République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعـلـيـم العـالـــي والبـحـــث العـلـمـــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE d'ORAN Mohamed Boudiaf

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématiques
Option :Systèmes dynamiques et géométrie différentielle

MEMOIRE
Présenté par

Mlle. BELDJERD Djamila

Pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Thème

Perturbations singulières d'équations différentielles ordinaires: Sur l'approche géométrique

Soutenu le 30 septembre 2012 à la salle M2 du département de Mathématiques devant la commission d'examen composée de:

Président	M. BEBBOUCHI Rachid	Professeur	USTHB, Bab Ezzouar
Rapporteur	M. LAKRIB Mustapha	Professeur	UDL, Sidi Bel Abbès
Examinateur	M. BENAISSA Abbès	Professeur	UDL, Sidi Bel Abbès
Examinateur	M. ALLA Hocine	M.conf. A	USTOMB, Oran

Dédicaces

A la mémoire de mon cher papa,

A ma trés chère maman.

Remerciements

C'est une habitude saine que de remercier, après Dieu, au début d'un mémoire tous ceux qui ont contribué à le rendre agréable. C'est avec mon enthousiasme le plus vif le plus sincère que je voudrais rendre mérite à tous ceux qui plus ou moins à leur manière m'ont aidée à mener à bien mon mémoire de magister.

Je désire alors exprimer ma profonde gratitude au Professeur Mustapha LAKRIB qui a accepté de diriger patiemment mon mémoire, pour son soutien constant ; mais aussi spécialement pour le savoir qu'il m'a transmis, pour sa disponibilité et sa générosité exceptionnelle, pour toutes ses remarques mathématiques et suggestives, cela m'a beaucoup encouragé. En un mot, merci.

Je tiens à remercier très chaleureusement Monsieur le professeur Rachid BEBBOUCHI de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de mémoire de magister.

Mes remerciements s'adressent au même titre au Professeur Abbès BENAISSA et au Maître de Conférences, classe A, Hocine ALLA pour avoir accepté la charge d'examiner mon travail.

Je ne pourrais jamais oublier le soutien et l'aide des personnes chères de ma merveilleuse famille. Je réserve une reconnaissance particulière à Mohammed pour avoir été mon ange gardien dans les sentiers noirs des aubes de mes déplacements pendant ces années.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles ordinaires dont la dérivée du plus haut degré est multipliée par un petit paramètre ε sont généralement appellées équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées. De telles équations sont fréquemment utilisées pour modéliser des processus complexes. La résolution du problème non perturbé (dit réduit) pour $\varepsilon = 0$ n'est pas suffisante pour rendre compte de l'évolution du système initial. Dans ce mémoire nous allons étudier les systèmes singulièrement perturbés par trois méthodes selon les outils utilisés dans différent travaux fait dans ce domaine.

Notre étude se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre est un rappel de quelques notions de base que nous utilisons dans ce mémoire (théorème d'existence et d'unicité, notions de base des systèmes dynamiques et historique de la théorie des perturbations singulières).

Le deuxième chapitre expose une première méthode qu'on appellerait qualitative réelle dûe à Tykhonov et ses successeurs. On présentera la démonstration du théorème de Tykhonov pour les intervalles de temps finis et aussi pour les intervalles de temps infinis (avec affaiblissements des conditions habituellement imposées dans la litérature).

Le troisième chapitre est consacré à la présentation d'une autre méthode qui consiste à étudier les développements asymptotiques des solutions. Dans les différentes zones, ces développements asymptotiques ne sont pas de la même espèce. Le problème est alors de recoller les morceaux (Wasow, Vasil'eva, O'Malley et d'autres). Une comparaison entre le théorème de Tykhonov et le théorème de O'Malley-Vasil'eva sera donnée à la fin du chapitre.

Quant au chapitre quatre, il sera consacré à une dernière méthode géométrique qui consiste à étudier les variétés stables et instables. Elle a été utilisée par Fenichel, Jones, etc. Elle donne des résultats quand il n'y a pas de singularités trop compliquées. On exposera l'approche géométrique des problèmes singulièrement perturbés et les outils utilisés pour l'analyse sont les théorèmes de Fenichel qui seront cités et expliqués. La théorie sera illustrée par des exemples et on donnera une comparaison entre les approches de Tykhonov et Fenichel.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats sur les équations différentielles ordinaires : Existence, unicité des solutions, Notions de stabilité et Perturbation ; des notions que nous utilisons tout au long de ce mémoire.

Références bibliographiques : M.Lakrib [10], K.Yadi [17], H.K.KHALIL[9].

1.1 Equations différentielles ordinaires

1.1.1 Definitions

Définition 1.1.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Une équation différentielle ordinaire sur U est une relation du type $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ que l'on note :*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

où $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

Définition 1.1.2. *Soit x une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$.*

1 *La fonction x est dite solution de l'équation (1.1) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I, si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, et si x satisfait la relation (1.1) sur I.*

2 *Soit* $(t_0, x_0) \in U$ *donnée. La fonction* x *est dite solution du problème à valeur initiale associée à l'équation (1.1) s'il existe un intervalle* I *contenant* t_0 *tel que* x *soit solution de l'équation (1.1) sur* I *et vérifie* $x(t_0) = x_0$.

Remarque 1.1.1. *Pour* $(t_0, x_0) \in U$ *donné, un problème à valeur initiale associée à l'équation (1.1) est généralement exprimé sous l'écriture suivante :*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.2. *Une solution de (1.2) est également dite solution de l'équation (1.1) à valeur initiale* x_0 *à l'instant* t_0.

Définition 1.1.3. *Pour* $(t_0, x_0) \in U$ *donnée, une solution du problème (1.2) est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.*

Remarque 1.1.3. *Si le problème (1.2) admet une solution unique, celle ci est notée par* $x = x(.; t_0, x_0)$.

Remarque 1.1.4. *Pour tout* $(t_0, x_0) \in U$, *le problème (1.2) est équivalent à l'équation intégrale :*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.3}$$

1.1.2 Existence et unicité des solutions

Théorème 1.1.1. *(Existence) Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *et* $f : U \to \mathbb{R}^d$ *une fonction continue. Pour tout* $(t_0, x_0) \in U$, *le problème (1.2) admet au moins une solution.*

Théorème 1.1.2. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *et* $f : U \to \mathbb{R}^d$ *une fonction continue. Pour tout* $(t_0, x_0) \in W \subset V \subset U$ *où* W *est fermé et borné (i.e compact), et* V *est un ouvert avec* $\bar{V} \subset U$, *il existe* $L > 0$ *tel que pour toute condition initiale* $(t_0, x_0) \in W$, *il existe une solution* x *du problème (1.2) définie au moins sur l'intervalle* $[t_0 - L, t_0 + L]$.

Définition 1.1.4. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *et* $f : U \to \mathbb{R}^d$ *une fonction continue. On dit que* $f = f(t, x)$ *est localement lipschitzienne en* x *si pour tout fermé et borné (i.e compact)* K *dans* U, *il existe une constante* $L > 0$ *telle que :*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

pour tout (t, x_1) *et* (t, x_2) *dans* K.

Théorème 1.1.3. *(Unicité) Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. *Si* $f : U \to \mathbb{R}^d$ *une fonction continue et localement Lipschitzienne en* x, *pour tout* $(t_0, x_0) \in U$, *le problème (1.2) admet une solution unique.*

1.1.3 Notions de stabilité

Définition 1.1.5. *On considére le système non autonome*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

tel que $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est continue en* t *et localement Lipschitzienne en* x. *On dit que* a *est un point d'équilibre du système (1.1) si* $f(t, a) = 0$ *pour tout* $t \geq 0$.

Définition 1.1.6. *Le point d'équilibre* 0 *de (1.1) est stable (au sens de Lyapunov) si :*

$$\forall t_0 \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \forall x = x(., t_0) \text{ solution de (1.1)}$$

$$\|x(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Définition 1.1.7. *Le point d'équilibre* 0 *de (1.1) est asymptotiquement stable si* 0 *est stable i.e*

$$\forall t_0 \geq 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 :\ \forall x = x(., t_0) \text{ solution de (1.1)}$$

$$\|x(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \geq t_0, \quad \text{et } \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Définition 1.1.8. *On dit que le point d'équilibre* 0 *de (1.1) est*

- *Uniformément stable si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall t_0 \geq 0,\ \forall x = x(., t_0) \text{ solution de (1.1) :}$$

$$\|x(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \geq t_0.$$

- *Globalement uniformément stable, s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globalement uniformément bornées.*

Définition 1.1.9. *Le point d'équilibre* 0 *de (1.1) est*

– *Exponentiellement stable si :*

$$\forall t_0 \geq 0,\ \exists c = c(t_0) > 0, \forall x = x(., t_0) \text{ solution de (1.1) :}$$

$$\|x(t_0)\| < c \Longrightarrow \exists k,\ \lambda > 0 : \|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)},\ \forall t \geq t_0.$$

la constante k est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

– *Globalement exponentiellement stable si*

$$\exists k,\ \lambda > 0,\ \forall t_0 \geq 0,\ \forall x = x(., t_0) \text{ solution de (1.1)}$$

$$\|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)},\ \forall t \geq t_0.$$

Remarque 1.1.5. *Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraine nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.*

Théorème 1.1.4. *Soit $x = 0$ un équilibre du système $\dot{x} = f(x)$ où $f : D \to \mathbb{R}^n$ est continue et différentiable et D est un voisinage de 0 .On pose $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \mid_{x=0}$de valeurs propres $\lambda_i, i = 1....n$*

1)Si $Re(\lambda_i) < 0$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

2)Si $Re(\lambda_i) > 0$ pour une valeur propre de A : λ_{i0} alors $x = 0$ est instable.

Remarque 1.1.6. *Une matrice carrée A est dite Hurwitz si $Re(\lambda_i) < 0$, $\forall i = 1....n$ où λ_i sont les valeurs propres de A.*

Définition 1.1.10. *Soit D un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Soit $V : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*

1. $V(0) = 0$

2. $V(x) > 0$ *si* $x \neq 0$

On dit que V est définie positive dans D.

Théorème 1.1.5. *(Théorème de stabilité de Lyapunov) Soit 0 le point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, D est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $V : D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et définie positive. Si $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D, x \neq 0$, alors, $x = 0$ est stable. Si de plus $\dot{V}(x) < 0$ dans $D - \{0\}$, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.*

Remarque 1.1.7. *La fonction V définie dans le théorème 1.1.4 est appelée fonction de Lyapunov.*

Théorème 1.1.6. *Une matrice A est Hurwitz ($Re(\lambda_i) < 0$) si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive Q il existe une matrice définie positive P qui satisfait l'équation de Lyapunov : $PA + A^T P = -Q$. La fonction de Lyapunov candidate pour le système $\dot{x} = Ax$ est $V(x) = x^T Px$.*

Ainsi pour le système $\dot{x} = Ax$ si $\forall i : Re(\lambda_i) < 0$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable. En considérant la fonction de Lyapunov condidate $V(x) = x^T Px$ on a:

$$\dot{V}(x) = x^T P\dot{x} + \dot{x}^T Px = x^T(PA + A^T P)x = -x^T Qx < 0, \quad \forall x \neq 0$$

Les inégalités de Gronwall

Lemme 1.1.1. *Soit $\lambda, \mu : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues avec μ positive.*

Si $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie : $y(t) \leq \lambda(t) + \int\limits_a^t \mu(s)y(s)ds$, pour tout $t \in [a; b]$, alors $y(t) \leq \lambda(t) + \int\limits_a^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_a^t \mu(\tau)d\tau} ds$, pour tout $t \in [a; b]$

- *En particulier si $\lambda(t) = \lambda$, alors $y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau)d\tau}$.*
- *Si de plus $\mu(t) = \mu \geq 0$, alors $y(t) \leq \lambda e^{\mu(t-a)}$.*

1.2 Systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps.

On suppose que l'état d'un système dynamique peut être représenté par un élément x d'un espace d'état X. L'espace X est de dimension finie (un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement une variété différentiable). L'évolution du système dynamique est décrite par une équation différentielle ordinaire sur X, qu'on écrira sous la forme : $\dot{x} = f(x)$, où $f : X \to \mathbb{R}^n$ est une fonction. L'équation $\dot{x} = f(x)$ définit en fait un champ de vecteurs sur X.

L'image d'une solution est appelée une orbite. Une orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteurs f. Le domaine X est appelé l'espace des phases. La théorie des systèmes dynamiques a son origine dans les travaux de Poincaré, à la fin du $19^{ème}$ siècle où il a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système, d'utiliser des arguments topologiques ou géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions, considérées comme orbites (ou trajectoires) dans l'espace des états. Par la suite, dans les années 1920 avec les travaux de Birkhoff et d'autres, s'est dégagée la notion de système dynamique abstrait, de flot, d'ensembles invariants, etc.

1.2.1 Flot d'un système dynamique

Définition 1.2.1. *Le flot d'une équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ est la famille à un paramètre d'applications $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de X dans lui même, définies par :*

$$\phi_t(a) = x(t,a) \text{ pour tout } a \in X$$

où $x(t,a)$ est l'unique solution du problème de Cauchy qui consiste en la détermination des solutions du problème $\dot{x} = f(x)$ satisfaisant la condition initiale $x(0) = a$.

Le théorème suivant affirme que le flot est un groupe à un paramètre de difféomorphismes :

Théorème 1.2.1. *Le flot $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie les propriétés suivantes :*
$\phi_0 = Id$ *(Id est l'identité de X)*
$\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ *pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.*

Bien que l'on ait par définition $\phi_t(a) = x(t,a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $a \in X$, on ne peut confondre le flot ϕ_t et la solution x conceptuellement.

- Pour chaque $a \in X$, la solution $x(.,a) : \mathbb{R} \to X$ donne l'état du système $x(t,a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, tel que $x(o,a) = a$.
- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, le flot $\phi_t : X \to X$ donne l'état du système $\phi_t(a)$ à l'instant t, pour tout $a \in X$.

Par définition du flot on a

$$\frac{d}{dt}\phi_t(a) \mid_{t=0} = f(a).$$

Ce qui montre que la donnée du flot ϕ_t définit le système $\dot{x} = f(x)$. Les solutions d'un système dépendent de manière différentiable des conditions initiales.

Théorème 1.2.2. *L'application ϕ_t est différentiable sur X.*

Pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, le flot est donné par $\phi_t(a) = e^{tA}a$. La matrice exponentielle est définie par la série

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + ... + \frac{1}{n!}t^nA^n + ...$$

Définition 1.2.2. *Soit X un espace métrique.Un système dynamique sur X est la donnée d'une famille à un paramètre d'homéomorphisme $\phi_t : X \to X$ vérifiant les conditions :*
$\phi_0 = Id$ (Id est l'identité de X), $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.3. *Etant donné un système $\dot{x} = f(x)$ et le flot associé ϕ_t sur$X$, l'orbite d'un point $x_0 \in X$ est l'ensemble*

$$\gamma(x_0) = \{x \in X : \exists t \in \mathbb{R} \qquad x = \phi_t(x_0)\}.$$

Les points d'équilibre d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés du système.

Un point x_0 est un point d'équilibre du système s'il satisfait $\phi_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On déduit que l'orbite d'un point d'équilibre est réduite au point lui même : $\gamma(x_0) = \{x_0\}$. Par contre l'orbite d'un point ordinaire est une courbe lisse qui admet en chacun de ses points le vecteur $f(x)$ comme vecteur tangent.

1.3 Pertubations

1.3.1 Perturbation régulière et perturbation singulière

Un problème (P_ε) dépendant du paramètre ε peut s'avérer difficile à traiter. Supposons que l'on soit capable de résoudre le problème (P_{ε_0}) pour une certaine valeur ε_0 de ε. On espère en déduire des informations sur d'éventuelles solutions de (P_ε) pour des valeurs de ε voisines de ε_0.

Si $\overline{x}_{\varepsilon_0}(t)$ est une solution supposée unique de (P_{ε_0}), existe -t-il une solution $x_\varepsilon(t)$ de (P_ε) proche de $\overline{x}_{\varepsilon_0}(t)$ pour ε proche de ε_0 ? Si oui cette approximation peut-elle avoir lieu pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $\overline{x}_{\varepsilon_0}(t)$ est définie ?

Pour ε proche de ε_0, on dit que le problème (P_ε) est une perturbation du problème (P_{ε_0}).

(P_{ε_0}) est appelé problème réduit ou non perturbé. Lorsque (P_ε) est un problème dépendant du paramètre ε de sorte que l'on peut appliquer la théorie de dépendance continue par rapport aux paramètres et/ou aux conditions initiales, on parle de perturbation régulière : si $\overline{x}_{\varepsilon_0}(t)$ est définie pour $t \in [0, T]$ avec $\overline{x}_{\varepsilon_0}(0) = \alpha_{\varepsilon_0}$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \alpha_\varepsilon = \alpha_{\varepsilon_0}$, alors il existe une solution $x_\varepsilon(t)$ de (P_ε) définie au moins sur $[0, T]$ de condition initiale α_ε telle que $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} x_\varepsilon(t) = \overline{x}_{\varepsilon_0}(t)$, la convergence étant uniforme par rapport à t dans $[0, T]$.

Si la solution $x_\varepsilon(t)$ du problème perturbé (P_ε) ne dépend pas continûment du paramètre ε, on parle de perturbation singulière. La convergence de $x_\varepsilon(t)$ vers une solution du problème réduit (P_{ε_0}) n'est pas uniforme par rapport à t. Cette "cassure" se voit sur de trés petits intervalles de la variable t. Ces intervalles sont appelés couches limites ou libres selon qu'ils se trouvent aux limites de l'intervalle de définition de la solution du problème réduit (P_{ε_0}) ou à l'interieur.

1.3.2 Développement de la théorie des perturbations singulières

Une étude intensive des problèmes singulièrement perturbés a été mené durant les 50 dernières années. Durant cette periode différente méthodes ont été dévelopées.

Pour un aperçu historique des perturbations singulières, la première date à mentionner est celle du début historique des perturbations singulières qui remonterait à 1904 quand "L.Prardtl" a présenté un travail dans le domaine de la dynamique des fluides lors du troisième congrés des mathématiciens à Heidelberg. La deuxième est celle de l'utilisation pour la première fois du terme "perturbation singulière" par K.Friedrichs et son étudiant W.Wasow en 1946. La troisième est en rapport avec les travaux de Andrey Nikolayevich Tikhonov et ses étudiants et à l'apparition du livre "Asymptotic expansions of Ordinary Différential Equations" de Wasow.

Puis, à peu prés à la même époque vers les année 70 s'est développée d'une part l'approche non standard et d'autre part la théorie géométrique.

L'idée d'utiliser l'analyse non standard dans la théorie des perturbartion singulières des équations différentielles s'est développée au sein de l'école de G.Reeb à Mulhouse et Strasbourg, en France et à Oran en Algérie.

La théorie géométrique des perturbations singulières quant à elle, a pour fondateur reconnu N.Fenichel. Elle est basée sur la théorie des variétés invariantes et jouit d'une large utilisation pour l'étude des système lents-rapides. Un champ d'application par excellence des méthodes de perturbations singulières est celui des modèles de dynamique de population. Signalons enfin que la variété des problèmes singulèrement perturbés est trés étendue.

Chapitre 2

Théorèmes de Tykhonov

Les systèmes lents-rapides tiennent leurs structures de la présence de deux échelles de temps. L'analyse de ces systèmes se fait à l'aide de la théorie des perturbations singulières dont l'outil fondamental est le théorème de Tykhonov. Dans ce chapitre, on énoncera le théorème de Tykhonov pour les systèmes lent-rapides non autonomes sur un intervalle fini puis sur un intervalle infini avec des démonstrations dûes a H.Khalil , on énoncera aussi les théorèmes avec affaiblissements des conditions dûs a C.Lobry,T.Sari et S.Touhami.

Références bibliographiques : J.P.Françoise [2], C.F.Hoppensteadt [4], C.F.Hoppensteadt [5], H.Khalil [9], C.Lobry, T.Sari and S.Touhami [11], A.N.Tykhonov [14], F.Verhulst [15]

2.1 Dynamiques lentes-rapides

Une dynamique lente-rapide est un champ de vecteurs différentiable défini sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, \varepsilon_0]$ de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), & x(t_0) = \xi(\varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), & z(t_0) = \eta(\varepsilon) \end{cases} \tag{2.1}$$

où f et g sont des fonctions régulières, et " $\cdot$ " $= \dfrac{d}{dt}$.

Le paramètre ε représente le rapport entre les deux échelles de temps des variables x et z. Il est supposé petit et strictement positif. Ces systèmes sont parmi les modèles les plus étudiés des perturbation singulières. En remplaçant ε par 0, le problème obtenu ne peut pas satisfaire les conditions initiales, comme on peut le voir dans cet exemple :

Exemple 2.1.1. *on considère le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \ \ x(0) = 1 \\ \varepsilon \dot{z} = -z + \varepsilon f(x), \ z(0) = 1. \end{cases}$$

où $f(x)$ est une fonction scalaire. Si on pose $\varepsilon = 0$, le problème devient $\begin{cases} x = 1 \\ 0 = -z \end{cases}$.

Il admet comme solution $\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ z(t) = 0 \end{cases}$ *qui ne vérifie pas la condition initiale pour z.*

Le changement dans l'échelle de temps suivant : $t = \varepsilon\tau$, permet d'obtenir un système équivalent à (2.1).

$$\begin{cases} x' = \varepsilon f(\varepsilon\tau, x, z, \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon) \\ z' = g(\varepsilon\tau, x, z, \varepsilon), \qquad z(t_0) = \eta(\varepsilon). \end{cases} \tag{2.2}$$

Comme $0 < \varepsilon \ll 1$, on a intuitivement que z est une variable rapide : sa vitesse est de l'ordre de 1. Tandis que x est une variable lente : sa vitesse est de l'ordre de ε.

De manière générale beaucoup de systèmes naturels sont de type lent-rapide car il couplent des milieux avec des échelles de temps trés différentes : par exemple en biologie moléculaire, les interactions entre gènes et protéines sont de type lent-rapide. Plus précisement, les changements dans les gènes sont lents, par contre la production de protéines est rapide. Un autre exemple serait l'interaction atmosphère (dynamique rapide)-océan (dynamique lente). Evidement une modélisation par équations différentielles ordinaires est en général insuffisante mais peut servir de première approximation. Cette première approximation peut expliquer quelques traits importants de l'évolution.

Exemple 2.1.2. *(circuits électriques) Cet exemple a été introduit et étudié par Van Der Pol.*

On considère l'équation différentielle

$$\varepsilon \ddot{x} + (x + x^2)\dot{x} + x - a = 0$$

On passe dans l'espace de phase $(x, y = \dot{x})$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \varepsilon \dot{y} = -(x + x^2)y + a - x. \end{cases}$$

Ce système peut se mettre sous une forme dite de Liénard comme suit :

Le changement de variable $Y = \varepsilon y$ transforme le système en

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = Y \\ \dot{Y} = -\frac{Y}{\varepsilon}(x + x^2) + a - x \end{cases}$$

On opère maintenant la transformation dite de Liénard : $y = Y + F(x)$ avec

$$F(x) = \int_0^x (s + s^2) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En passant au temps rapide on obtient l'équation de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = \varepsilon(a - x) \end{cases}$$

2.2 Théorème de Tykhonov

On considère le système lent-rapide :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), \quad z(t_0) = \eta(\varepsilon) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0, t_1] \times D_x \times Dz \times [0, \varepsilon_0] \longrightarrow R^n$, $g : [0, t_1] \times D_x \times Dz \times [0, \varepsilon_0] \longrightarrow R^m$, $\varepsilon_0 > 0$, $t_1 > 0$, $D_x \subset R^n$, $Dz \subset R^m$, D_x, Dz ouverts, $t_0 \in [0, t_1]$. Les fonctions f et g sont supposées continûment différentiables (de classe C^1). On note par $(x(t, \varepsilon)\ , z(t, \varepsilon))$ la solution de (2.1).

Pour $\varepsilon = 0$ on obtient un système réduit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, 0) \\ 0 = g(t, x, z, 0). \end{cases}$$

On suppose qu'il existe une application h telle que :

$$0 = g(t, x, z, 0) \Leftrightarrow z = h(t, x). \tag{2.3}$$

En remplaçant (2.3) dans la première équation de (2.1) pour $\varepsilon = 0$, on trouve

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0), \tag{2.4}$$

appelée équation lente avec $x(t_0) = \xi(0)$. On note la solution de (2.4) par $\bar{x}(t)$. L'ensemble des points défini par l'équation (2.3) est appelé variété lente.

Les solutions de (2.1) ont une phase rapide (couche limite) de $(\xi(\varepsilon), \eta(0))$ à $(\xi(0), h(t_0, \xi(0)))$ qui est un point de la variété lente puis un mouvement lent prend place sur la variété suivant l'équation $\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$. Pour l'analyse du système on introduit le changement de variables suivant :

$$y = z - h(t, x). \tag{2.5}$$

Avec les nouvelles variables (x, y) le problème (2.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), \quad x(t_0) = \xi(\varepsilon) && (2.6) \\ \varepsilon\dot{y} &= g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon), && (2.7) \\ y(t_0) &= \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)). \end{aligned}$$

L'état quasi stationnaire de la nouvelle variable y est $y = 0$ si on le remplace dans (2.6) on retrouve (2.4).On introduit le nouveau temps $\tau = \frac{t-t_0}{\varepsilon}$, dont la valeur initial est $\tau = 0$ pour $t = t_0$, τ est donc un temps beaucoup plus rapide que t. On a pour tout t fini, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tau(t) = \infty$. Pour la nouvelle échelle de temps τ, (2.6)-(2.7) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= g(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, y + h(t, x), \varepsilon) && (2.8) \\ y(t_0) &= \eta(\varepsilon) - h(t_0, \xi(\varepsilon)) \end{aligned}$$

les variables t et x pour l'équation précédente varie lentement avec : $t = t_0 + \varepsilon\tau$ et $x = x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon)$. En prenant $\varepsilon = 0$ on a :

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t, x, y + h(t, x), 0) \tag{2.9}$$

où $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$ est traité comme un paramètre fixé. Le système (2.9) est appellé système couche limite. On a besoin pour l'analyse du système (2.9) de la stabilité exponentielle uniforme de $y = 0$.

Définition 2.2.1. *Le point d'équilibre $y = 0$ du système couche limite* (2.9) *est uniformement exponentiellement stable pour $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$ s'il existe des constantes positives k ,γ, ρ_0 qui vérifient :*

$$\parallel y(\tau) \parallel \leq k \parallel y(0) \parallel e^{-\gamma\tau}, \ \forall \parallel y(0) \parallel < \rho_0, \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x, \forall \tau \geq 0. \tag{2.10}$$

En général on peut vérifier la stabilité exponentielle de l'origine par linéarisation ou via une fonction de Lyapounov associée a l'équation différentielle considérée. On peut montrer que si la matrice jacobienne $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ a toutes ses valeurs propres à partie rélle négative alors il existe k, γ, ρ_0 qui vérifient (2.10). D'une autre part on peut montrer qu'il existe une fonction de Lyapunov $v(t, x, y)$ qui vérifie :

$$c_1 \parallel y \parallel^2 \leq v(t, x, y) \leq c_2 \parallel y \parallel^2 \tag{2.11}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial y} g(t, x, y + h(t, x), 0) \leq -c_3 \parallel y \parallel^2 \tag{2.12}$$

pour tout $(t, x, y) \in [0, t_1] \times D_x \times D_y$ où $D_y \subset R^m$ domaine qui contient l'origine. Alors (2.10) est vérifié pour :

$$\rho_0 = \rho\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \gamma = \frac{c_3}{2c_2} \quad \text{où} \quad B_\rho \subset D_y \tag{2.13}$$

Théorème 2.2.1. *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système non linéaire $\dot{x} = f(t, x)$ où $f : [0, +\infty[\to R^n$ est continûment différentiable. $D = \{x \in R^n / \|x\| \leq r\}$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la matrice Jacobienne est bornée sur D pour tout $t \geq 0$ (uniformément). Soit k, γ et r_0 des constantes positives avec : $r_0 < \dfrac{r}{k}$ et $D_0 = \{x \in R^n / \|x\| \leq r_0\}$. On suppose que les trajectoires du système vérifient :*

$$\|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall x(t_0) \in D_0, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

alors il existe une fonction $v : [0, +\infty[\times D_0 \to R^n$ qui vérifie les inégalités :

$$c_1 \|x\|^2 \leq v(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|$$

avec c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes positives. De plus si $r = \infty$ alors l'origine est globalement exponentiellement stable et $v(t, x)$ est définie et vérifie les inégalités précédentes sur R^n. Si le système est autonome, v peut être choisie indépendante de t.

On considère le système $\dot{x} = f(x, u(t))$ où $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^m$ pour $t \geq 0$. On suppose que f est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n \times \Gamma$ et pour tout $u \in \Gamma$:

$$f(x, u) = 0 \Longleftrightarrow x = h(u)$$

On suppose que $\left\|\frac{\partial h}{\partial u}\right\| \leq L$, $\forall u \in \Gamma$. Pour analyser la stabilité du point d'équilibre $x = h(\alpha)$, on considère le changement de variable $z = x - h(\alpha)$, on obtient l'équation :

$$\dot{z} = f(z + h(\alpha), \alpha) = g(z, \alpha)$$

On va chercher une fonction de Lyapunov pour montrer que $z = 0$ est asymptotiquement stable. Puisque g dépend de α,la fonction de Lyapunov peut dépendre en générale de α.On suppose qu'on trouve une fonction de Lyapunov $v(z, \alpha)$ qui vérifie les conditions :

$$c_1 \|z\|^2 \leq v(z, \alpha) \leq c_2 \|z\|^2 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} g(z, \alpha) \leq -c_3 \|z\|^2 \tag{2.15}$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial z}\right\| \leq c_4 \|z\| \tag{2.16}$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right\| \leq c_3 \|z\|^2 \tag{2.17}$$

pour tout $z \in D = \{z \in \mathbb{R}^2 / \|z\| < r\}$ et $\alpha \in \Gamma$, avec c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes positives. Les inégalités $(1) - (2)$ affirment que v est définie positive et $\dot{v}$ est définie négative, elles montrent donc que $z = 0$ est exponentiellement stable.

Lemme 2.2.1. *On considére le système $\dot{z} = g(z, \alpha)$, où g est continûment différentiable, les matrices jacobiennes vérifient :*

$$\| \frac{\partial g}{\partial z}(z, \alpha) \| \leq L_1, \quad \| \frac{\partial g}{\partial \alpha}(z, \alpha) \| \leq L_2 \|z\|$$

pour tout $(z, \alpha) \in D \times \Gamma$, où $D = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\| < r\}$.

Soit k, γ, r_0 des constantes positives avec : $r_0 < \frac{r}{k}$ et $D_0 = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\| < r_0\}$. On suppose que les solutions du système vérifient :

$$\|z(t)\| \leq k \|z(0)\| e^{-\gamma t}, \forall z(0) \in D_0, \alpha \in \Gamma, t \geq 0.$$

Alors il existe une fonction $v : D_0 \times \Gamma \to \mathbb{R}$ *qui vérifie les inégalités* $(2.14) - (2.17)$*. De plus, si toutes les conditions sont vérifiées globalement pour* z *alors* $v(z,\alpha)$ *est définie et vérifie* $(2.14) - (2.17)$ *sur* $\mathbb{R}^n \times \Gamma$*.*

Théorème 2.2.2. *Soit* $x = 0$ *un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système* $\dot{x} = f(x)$ *où* $f : [0,+\infty[\to R^n$ *est localement lipschitzienne et* $D \subset R^n$ *un domaine qui contient l'origine. Soit* $R_A \subset D$ *une région d'attraction de* $x = 0$*. Alors il existe une fonction définie positive* $v(x)$ *et une fonction continue définie positive tel que*

$$\begin{aligned} v(x) &\to \infty \text{ quand } x \to \partial R_A \\ \frac{\partial v}{\partial x} f(x) &\leq -w(x), \ \forall x \in R_A \end{aligned}$$

et pour tout $c > 0$ *l'ensemble* $\{x \in R_A \,/ v(x) \leq c\}$ *est un sous ensemble compact de* R_A

Définition 2.2.2. *si* $\varphi \in c([0,h], \mathbb{R}_+)$ *est strictement croissante et* $\varphi(0) = 0$ *on dit que* φ *est de classe* $\mathcal{K}$

Définition 2.2.3. $\beta : [0,a] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ *est dite de classe* $\mathcal{KL}$ *si pour tout* s *fini,* $\beta(t,s) \in \mathcal{K}$ *en* t *et pour* t *fixe* $\underset{s\to+\infty}{\beta(t,s)} \to 0$.

Théorème 2.2.3. *Soit* $D \subset R^n$ *un domaine qui contient l'origine et*

$$v : [0,+\infty[\times D \to R$$

une fonction continûment différentiable tel que

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq v(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f(t,x) &\leq -w(x), \ \forall \|x\| \geq \mu > 0 \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$ *et* $\forall x \in D$*, où* α_1 *et* α_2 *sont des fonctions classe* $\mathcal{K}$ *et* $w(x)$ *est une fonction continue définie positive. Soit* $r > 0$ *tel que* $B_r \subset D$ *et on suppose que*

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$$

alors il existe une fonction β *de classe* $\mathcal{KL}$ *tel que pour toute valeur initiale* $x(t_0)$ *qui vérifie* $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$*, il existe* $T \geq 0$ *(dépendant de* $x(t_0)$ *et de* μ*) tel que les soluions de* $x = f(t,x)$ *vérifient :*

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \ \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \\ \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r)), \ \forall t \geq t_0 + T \end{aligned}$$

si $D = \mathbb{R}^n$ et α_1 est de classe $\mathcal{K}_\infty$ alors les inégalités précédentes sont vérifiées pour toute valeur initiale $x(t_0)$ et pour tout μ.

Lemme 2.2.2. *(Lemme de comparaison) On considère l'équation*

$$\dot{x} = f(t, x(t)),\ \ x(t_0) = x_0$$

où f est continue et localement lipschitzienne en x pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in I \subset \mathbb{R}$. Soit $[t_0, T[$ un intervalle maximale de l'existance de solutions $x(t)$ et on suppose que $x(t) \in I$ pour tout $t \in [t_0, T[$, soit $y(t)$ une fonction continue dont la dérivée superieure $D^+y(t)$ vérifie l'inégalité différentielle : $D^+y(t) \leq f(t, y(t)),\ \ y(t_0) = x_0$ avec $y(t) \in I$ pour tout $t \in [t_0, T[$, alors $y(t) \leq x(t)$ pour tout $t \in [t_0, T[$

Théorème 2.2.4. *(Théorème de Tykhonov) On considère le problème singulièrement perturbé :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), & x(t_0) = \xi(\varepsilon) \\ \varepsilon\dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), & z(t_0) = \eta(\varepsilon) \end{cases}$$

et $z = h(t, x)$ définie par (2.3). On suppose les conditions suivantes vérifiées pour tout :

$$(t, x, z - h(t, x), \varepsilon) \in [0, t_1] \times D_x \times D_y \times [0, \varepsilon_0]\,, D_x \subset \mathbb{R}^n, D_y \subset \mathbb{R}^m;$$

D_x est convexe et D_y contient l'origine.

H1) *Les fonctions f, g, leurs premières dérivées partielles en (x, z, ε) et la première dérivée partielle de g en t sont continues. Les fonctions $h(t, x)$ et $\frac{\partial g}{\partial z}(t, x, z, 0)$ ont leurs premières dérivées partielles continues.*

H2) *Le problème réduit (2.4) a une solution unique $\bar{x}(t) \in S$ pour $t \in [t_0, t_1]$ où S est un compact de D_x.*

H3) *L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable de l'équation couche limite(2.9) uniformément en (t, x). Soit $R_y \subset D_y$ le bassin d'attraction de (2.9) et Ω_y un compact de R_y.*

alors : il existe une constante positive ε^* tel que pour tout $\eta_0 - h(t_0, \xi_0) \in \Omega_y$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ le problème singulièrement perturbé (2.1)-(2.2) a une unique solution $((x, t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ sur $[t_0, t_1]$ et :

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon) \tag{2.18}$$

$$z(t,\varepsilon)-h(t,\bar{x}(t))-\hat{y}(\frac{t}{\varepsilon})=O(\varepsilon) \tag{2.19}$$

uniformément sur $[t_0,t_1]$ où $\hat{y}(\tau)$ est la solution de l'équation couche limite (2.9). De plus, pour $t_b>t_0$ il existe $\varepsilon^{**}<\varepsilon^{*}$telle que :

$$z(t,\varepsilon)-h(t,\bar{x}(t))=O(\varepsilon) \tag{2.20}$$

uniformément pour $t\in\ [t_b,t_1]$ quand $\varepsilon<\varepsilon^{**}$.

Preuve On considère le système (2.6)-(2.7) dû au changement de variable

$y=z-h(t,x)$,

$$\left\{\begin{array}{ll}\dot{x}=f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon), & x(t_0)=\xi(\varepsilon)\\ \varepsilon\dot{y}=g(t,x,y+h(t,x),\varepsilon)\ -\varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial t}-\varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial x}f(t,x,y+h(t,x),\varepsilon) & \\ \qquad y(t_0)=\eta(\epsilon)-h(t_0,\xi(\varepsilon)) & \end{array}\right.$$

On prend $y\in D_y$, et en analysant l'équation (2.8) aprés le changement de l'echelle de temps du problème réduit où t, et x varie lentement, on utilise la stabilité exponentielle uniforme du système couche limite. L'inégalité (2.10) n'est valable que pour $x\in D_x$, alors pour l'utilisé on doit s'assurer que la variable lente x reste dans D_x, on suppose cela vérifié puisque la solution $\bar{x}$ du problème réduit (2.4) reste dans S où S est un compact de D_x. Si $D_x\neq\mathbb{R}^n$, on considère E le complément de D_x dans $\mathbb{R}^n$ et on pose

$$k=\frac{1}{2}\inf\{\|x-y\|\,/x\in S,y\in E\}>0$$

si $D_x=\mathbb{R}^n$ on prend k quelconque. On considère les ensembles :

$$\begin{array}{rcl}S_1&=&\left\{x\in\mathbb{R}^n\,/d(x,S)\leq\dfrac{k}{2}\right\}\\ S_2&=&\{x\in\mathbb{R}^n\,/d(x,S)\leq k\}\end{array}$$

S_1, S_2 sont des compact de D_x et $S\subset S_1\subset S_2$. On considère $\psi:\mathbb{R}^n\ \rightarrow[0,1]$ de classe C^{∞} telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}\psi(x)=1;x\in S_1\\ \psi(x)=0;x\notin S_2\end{array}\right.\quad\text{et }\varphi(x)=(x-\xi_0)\psi(x)+\xi_0$$

donc pour $x \in S_1$: $\varphi(x) = x$. On définit F et G comme suit :

$$\begin{aligned} F(t,x,y,\varepsilon) &= f(t,\varphi(x),y+h(t,x),\varepsilon) && (2.21)\\ G(t,x,y,\varepsilon) &= g(t,\varphi(x),y+h(t,\varphi(x)),\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial t}(t,\varphi(x)) \\ &\quad -\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}(t,\varphi(x))f(t,\varphi(x),y+h(t,\varphi(x)),\varepsilon) && (2.22)\end{aligned}$$

pour $x \in S_1$ on a :

$$\begin{cases} F = f \\ G = g - \varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial h}{\partial x}f \end{cases}$$

On a pour pour : $(t,x,y,\epsilon) \in [0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega_1 \times [0,\varepsilon_0]$ tel que Ω_1 un compact de D_y. On a

- F et G et leurs premières dérivées partielles en ε sont continues et bornées.
- $F(t,x,y,0)$ a des dérivées partielle en (x,y) bornée.
- $G(t,x,y,0)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t,x,y,0)$ ont des dérivées partielles en (t,x,y) bornées.

On considère le problème modifié :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(t,x,y,\varepsilon), & x(t_0) &= \xi(\varepsilon) && (2.23)\\ \varepsilon\dot{y} &= G(t,x,y,\varepsilon), & y(t_0) &= \eta(\varepsilon) - h(t_0,\xi(\varepsilon)) && (2.24)\end{aligned}$$

Ce problème est identique au problème initial pour $x \in S_1$. L'ensemble S_1 a été choisi au paravant d'une telle façon que $x(t,\varepsilon)$ reste dans S_1 ce qui est basé sur le fait que $\bar{x}(t) \in S$. L'équation couche limite :

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = G(t,x,y,0) \tag{2.25}$$

a $y = 0$ comme point d'équilibre. On a $G(t,x,y,0) = g(t,\varphi(x),y+h(t,\varphi(x)),0)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. L'équation couche limite (2.25) peut être présentée sous la même forme que le système (2.9) avec $\varphi(x) \in D_x$ paramètre. Comme l'inégalité (2.10)"stabilité exponentielle" est vérifiée uniformément pour le paramètre, il est claire que la solution de (2.25) vérifie la même inégalité pour $x \in \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\|y(\tau)\| \leq k\,\|y(0)\|\,e^{-\gamma\tau},\ \forall\,\|y(0)\| < \rho_0, \forall(t,x) \in [0,t_1] \times \mathbb{R}^n,\ \forall\tau \geq 0 \tag{2.26}$$

Le problème réduit de (2.23) - (2.24) est :

$$\dot{x} = F(t,x,0,0), \qquad x(t_0) = \xi_0 \tag{2.27}$$

Il est identique au problème réduit (2.4) pour $x \in S_1$ puisque (2.4) a une solution unique $\bar{x}(t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$ et $\bar{x}(t) \in S_1$ alors $\bar{x}(t)$ est une solution de (2.27) pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Pour la démonstration on va procéder comme suit : démontrer le théorème pour le problème modifié (2.23)-(2.24) puis on va prouver que pour ε suffisament petit la solution $x(t,\varepsilon)$ de (2.23)-(2.24) reste dans S_1 cela établira que le problème original et le problème modifié ont la même solution, ce qui démontre le théorème pour le problème original (2.6)-(2.7).

1$^{\text{ere}}$ étape :On considère l'équation couche limite (2.25) puisque $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ a une dérivée première bornée par rapport à (t,x) et $G(t,x,0,0) = 0$ pour tout (t,x). Les matrices jacobienne $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ vérifies : $\left\|\dfrac{\partial G}{\partial t}\right\| \leq L_1$, $\left\|\dfrac{\partial G}{\partial x}\right\| \leq L_2 \|y\|$, utilisant ces estimations et (2.26) on conclut du lemme (2.2.1) qu'il existe une fonction de Lyapunov $v_1(t,x,y)$ qui vérifie :

$$c_1 \|y\|^2 \leq v_1(t,x,y) \leq c_2 \|y\|^2 \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} G(t,x,y,0) \leq -c_3 \|y\|^2 \tag{2.29}$$

$$\left\|\frac{\partial v_1}{\partial y}\right\| \leq c_4 \|y\|, \left\|\frac{\partial v_1}{\partial t}\right\| \leq c_5 \|y\|^2, \left\|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right\| \leq c_6 \|y\|^2 \tag{2.30}$$

pour tout $y \in \{\|y\| < \rho_0\}$ et tout $(t,x) \in [0,t_1] \times \mathbb{R}^n$ la dérivée de v_1 le long des trajectoires du système (2.23)-(2.24) est donnée par :

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v_1}{\partial y} G(t,x,y,\varepsilon) + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} F(t,x,y,\varepsilon) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v_1}{\partial y} G(t,x,y,0) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v_1}{\partial y}[G(t,x,y,\varepsilon) - G(t,x,y,0)] \\
&\quad + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} F(t,x,y,\varepsilon)
\end{aligned}$$

en utilisant (2.29) et (2.30) et les estimations, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|F(t,x,y,\varepsilon)\| &\leq k_0 \text{ (bornée)} \\
\|G(t,x,y,\varepsilon) - G(t,x,y,0)\| &\leq \varepsilon L_3 \text{ (dérivé de } G \text{ par rapport a } \varepsilon \text{ est bornée)}
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &\leq -\frac{c_3}{\varepsilon} \|y\|^2 + c_4 L_3 \|y\| + c_5 \|y\|^2 + \varepsilon k_0 \|y\|^2 \\
\dot{v}_1 &\leq -\frac{c_3}{2\varepsilon} \|y\|^2 + c_4 L_3 \|y\| \text{ pour } \varepsilon \leq \frac{c_3}{2c_5 + 2c_6 k_0}
\end{aligned}$$

ainsi, si pour $t^* \geq t_0$, $\|y(t^*, \varepsilon)\| < \rho_0 \sqrt{\dfrac{c_1}{c_2}} = \mu$ on a

$$\dot{v}_1 \leq -\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} v_1 + c_4 L_3 \rho_0$$

on va résoudre l'équation de comparaison

$$\dot{v}_1 = -\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} v_1 + c_4 L_3 \rho_0$$

on considère $\dot{v}_1 = -\dfrac{c_3}{2\epsilon c_2} v_1$ on aura donc :

$$\frac{\dot{v}_1}{v_1} = -\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} \Longrightarrow \ln v_1 = -\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t$$

$$\Longrightarrow v_1 = \lambda e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t}$$

$$\lambda'(t) e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t} - \frac{c_3}{2\varepsilon c_2} \lambda(t) e^{-\frac{c_3}{2\epsilon c_2} t} = -\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} \lambda(t) e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t} + c_4 L_3 \rho_0$$

$$\lambda'(t) = c_4 L_3 \rho_0 e^{\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t} \Longrightarrow \lambda(t) = \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0 e^{\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t} + k$$

on déduit que :

$$v_1 = (\varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0 e^{\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t} + k) e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t}$$

$$v_1 = \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_1 c_3} \rho_0 + k e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t}$$

$$v_1(t^*, x, y) = \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0 + k e^{-\frac{c_3}{2\epsilon c_2} t^*}$$

$$k = (v_1(t^*, x, y) - \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0) e^{\frac{c_3}{2\varepsilon c_2} t^*}$$

d'où :

$$v_1(t, x, y) \leq \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0 + (v_1(t^*, x, y) - \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0) e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2}(t - t^*)}$$

$$c1 \left\|y(t, \varepsilon)\right\|^2 \leq \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0 + (c2 \left\|y(t^*, \varepsilon)\right\|^2 - \varepsilon \frac{2c_2 c_4 L_3}{c_3} \rho_0) e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2}(t - t^*)}$$

$$\|y\|^2 \leq \varepsilon\frac{2c_2c_4L_3}{c_1c_3}\rho_0 + (\frac{c_2}{c_1}\|y(t^*,\varepsilon)\|^2 - \varepsilon\frac{2c_2c_4L_3}{c_1c_3}\rho_0)e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2}(t-t^*)}$$

$$\|y\|^2 \leq \varepsilon\frac{2c_2c_4L_3}{c_1c_3}\rho_0 + \frac{c_2}{c_1}\|y(t^*,\varepsilon)\|^2 e^{-\frac{c_3}{2\epsilon c_2}(t-t^*)}$$

$$\|y\| \leq \sqrt{\epsilon\frac{2c_2c_4L_3}{c_1c_3}\rho_0 + \frac{c_2}{c_1}\|y(t^*,\varepsilon)\|^2 e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2}(t-t^*)}}$$

$$\|y\| \leq \sqrt{\varepsilon\frac{2c_2c_4L_3}{c_1c_3}\rho_0} + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\|y(t^*,\varepsilon)\|^2 e^{-\frac{c_3}{2\varepsilon c_2}(t-t^*)}}$$

$$\|y\| \leq \varepsilon\frac{2c_2c_4L_3}{c_1c_3}\rho_0 + \mu\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}e^{-\frac{c_3}{4\varepsilon c_2}(t-t^*)}$$

la solution $y(t,\epsilon)$ de se problème vérifie :

$$\|y(t,\varepsilon)\| < \mu\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}e^{-\frac{\alpha(t-t^*)}{\varepsilon}} + \varepsilon\delta \ ; \ \forall t \geq t^* \ \text{ où } \alpha = \frac{c_3}{4c_4} \ \ et \ \delta = \frac{2c_2c_4L_3}{c_1c_3}\rho_0 \qquad (2.31)$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} y(t_0,\varepsilon) &= \eta(\varepsilon) - h(t_0,\xi(\varepsilon)) \\ &= \eta_0 - h(t_0,\xi_0) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

et $[\eta_0 - h(t_0,\xi_0)]$varie dans Ω_y un compact du bassin d'attraction du système couche limite :

$$\frac{dy}{d\tau} = G(t_0,\xi_0,y,0) = g(t_0,\xi_0,y+h(t_0,\xi_0),0) \qquad (2.32)$$

on rappelle du théorème (2.2.2) qu' il existe une fonction Lyapunov $v_0(y)$ telle que :

$$\frac{dv_0}{dy}g(t_0,\xi_0,y+h(t_0,\xi_0),0) \leq -w_0(y)$$

sur le bassin d'attraction, où $w_0(y)$ est definie positive et $\{v_0(y) \leq c\}$ est un compact du bassin d'attraction pour tout $c > 0$ on choisit c_0 telle que $\Omega_y \subset \overbrace{\{v(y) \leq c\}}^{\circ}$. La derivée de v_0 le long des trajectoires du système (2.23)-(2.24) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v_0}{\partial y}G(t,x,y,\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v_0}{\partial y}G(t_0,\xi_0,y,0) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v_0}{\partial y}[G(t,x,y,\varepsilon) - G(t_0,\xi_0,y,0)] \end{aligned}$$

on peut vérifier que pour tout $(t, y) \in [t_0, t_0 + \varepsilon T] \times \{v_0(y) \leq c_0\}$:

$$\dot{v}_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}\left[-w_0(y) + a_0\varepsilon(1+T)\right]$$

pour $a_0 > 0$. Par application du théorème (2.2.3) on a l'existence d'un $\varepsilon_1^* > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_1^*$: $y(t, \varepsilon)$ vérifie l'inégalité :

$$\|y(t,\varepsilon)\| \leq \beta(\mu_2, \frac{t-t_0}{\varepsilon}) + \varrho(\varepsilon(1+T))$$

sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon t]$, où β est une fonction de classe $\mathcal{KL}$ et ϱ est une fonction de classe $\mathcal{K}$, et μ_2 une constante positive ; on choisit $\varepsilon^* < \varepsilon_1^*$ assez petit tel que :
$\varrho(\varepsilon^*(1+T)) < \dfrac{\mu}{2}$ on déduit que pour $\varepsilon < \varepsilon^*, y(t, \varepsilon)$ vérifie :

$$\|y(t,\varepsilon)\| \leq \mu_1 + \frac{\mu}{2} \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + \epsilon T] \text{ et } y(t_0 + \varepsilon T, \varepsilon) < \mu \tag{2.33}$$

avec $\mu_1 = \beta(\mu_2, 0)$, alors (2.31) et (2.33) nous donne :

$$\|y(t,\varepsilon)\| \leq k_1 e^{\dfrac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}} + \varepsilon\delta, \; \forall t \geq 0, k_1 > 0. \tag{2.34}$$

On considère (2.23) et on pose :

$$F(t,x,y,\epsilon) = F(t,x,0,0) + [F(t,x,y,\varepsilon) - F(t,x,0,0)]$$

le système (2.23) est vu comme perturbation du problème réduit (2.27) ainsi :

$$\begin{aligned}
\|F(t,x,y,\varepsilon) - F(t,x,0,0)\| &\leq \|F(t,x,y,\varepsilon) - F(t,x,y,0)\| \\
&\quad + \|F(t,x,y,0) - F(t,x,0,0)\| \\
&\leq L_4\varepsilon + L_5\|y\| \\
&\leq \theta_1\varepsilon + \theta_2 e^{\dfrac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

où $\theta_1 = L_4 + L_5\delta$ et $\theta_2 = L_5 k_1$ on définit : $u(t,\varepsilon) = x(t,\epsilon) - \bar{x}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
u(t,\varepsilon) &= \xi(\varepsilon) - \xi(0) + \int_{t_0}^{t} \left[F(s, x(s,\varepsilon), y(s,\varepsilon), \varepsilon) - F(s, \bar{x}(s), 0, 0)\right] ds \\
&= \xi(\varepsilon) - \xi(0) + \int_{t_0}^{t} \left[F(s, x(s,\varepsilon), y(s,\varepsilon), \varepsilon) - F(s, x(s,\varepsilon), 0, 0)\right] ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \left[F(s, x(s,\varepsilon), 0, 0) - F(s, \bar{x}(s), 0, 0)\right] ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|u(t,\varepsilon)\| &\leq k_2\varepsilon + \int_{t_0}^{t} (\theta_1\varepsilon + \theta_2 e^{\frac{-\alpha(s-t_0)}{\varepsilon}})ds + \int_{t_0}^{t} L_6 \|u(s,\varepsilon)\| \, ds \\
&\leq k_2\varepsilon + \left[\theta_1\varepsilon\,(t_1 - t_0) + \frac{\theta_2\varepsilon}{\alpha}\right] + \int_{t_0}^{t} L_6 \|u(s,\varepsilon)\| \, ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall on arrive à l'estimation :

$$\|x(t,\epsilon) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon k_3 \left[1 + t_1 - t_0\right] e^{L_6(t_1-t_0)} \tag{2.35}$$

on a prouvé l'erreur de l'estimation de x. on conclu pour ε assez petit que $x(t,\varepsilon)$ est défini pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

2$^{\text{ème}}$ étape Pour prouver l'erreur d'estimation pour y, on considère (2.24) qui est décrite en temps τ comme suit :

$$\frac{dy}{d\tau} = G(t_0 + \varepsilon\tau, x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), y, \varepsilon)$$

On note $\hat{y}(\tau)$ la solution de l'équation couche limite :

$$\frac{dy}{d\tau} = G(t_0, \xi_0, y, 0) \ , \ y(0) = \eta_0 - h(t_0, \xi_0)$$

on pose $v(\tau,\varepsilon) = y(\tau,\varepsilon) - \hat{y}(\tau)$. En dérivant par rapport à τ on obtient :

$$\frac{dv}{d\tau} = G(t, x, v, 0) + \Delta G \tag{2.36}$$

où $t = t_0 + \varepsilon\tau$, $x = x(t_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), \Delta G = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ tel que

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= G(t, x, y, 0) - G(t, x, \hat{y}, 0) - g(t, x, v, 0), \\
\Delta_2 &= G(t, x, y, \varepsilon) - G(t, x, y, 0), \\
\Delta_3 &= G(t, x, \hat{y}, 0) - G(t_0, \xi_0, \hat{y}, 0).
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|\Delta_1\| &\leq k_4 \|v\|^2 + k_5 \|v\| \|\hat{y}\| \\
\|\Delta_2\| &\leq \varepsilon L_3 \\
\|\Delta_3\| &\leq L_1 |t - t_0| \|\hat{y}\| + L_2 \|x - \xi_0\| \|\hat{y}\| \leq (L_1\varepsilon\tau + L_2\varepsilon a + L_3\varepsilon\tau k_0) \|\hat{y}\|
\end{aligned}$$

k_4, k_5 sont des constantes positives. on a :

$$\|\hat{y}(\tau)\| \leq k_1 e^{-\alpha\tau} \quad , \forall \tau \geq 0 \tag{2.37}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\Delta G\| &\leq k_4 \|v\|^2 + k5k1 \|v\| e^{-\alpha\tau} + \varepsilon L_3 + \varepsilon a_1 k_1 (1+\tau) e^{-\alpha\tau} \\ &\leq k_4 \|v\|^2 + k_5 k_1 \|v\| e^{-\alpha\tau} + \varepsilon a_2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

où $a_1 = \max\{L_2 a, L_1 + L_2 k_0\}$ et $a_2 = L_3 + a_1 k_1 \max\{1, \frac{1}{\alpha}\}$. L'équation (2.36) peut être vue comme une perturbation de :

$$\frac{dv}{d\tau} = G(t, x, v, 0) \tag{2.39}$$

qui d'aprés le lemme (2.2.1) a une fonction de Lyapunov qui vérifie (2.28)-(2.30). En calculant la dérivée de v_1 le long de la trajectoire de(2.36) et en utilisant l'estimation (2.38) on obtient :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} F + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial v} [G(t, x, v, 0) + \Delta G] \\ &\leq c_5 \|v\|^2 + c_6 k_0 \|v\|^2 - \frac{c_3}{\varepsilon} \|v\|^2 + \frac{c_4}{\varepsilon} \|v\| (k_4 \|v\|^2 + k_5 k_1 \|v\| e^{-\alpha\tau} + \varepsilon a_2 \end{aligned}$$

pour $\|v\| \leq \frac{-c_3}{4 c_4 k_4}$ et $0 < \varepsilon < \frac{c_3}{4(c_5 + c_6 k_0)}$ on a :

$$\begin{aligned} v1 &\leq -\frac{c_3}{2\varepsilon} \|v\|^2 + \frac{c_4 k_5 k_1}{\varepsilon} \|v\|^2 e^{\,-\alpha\tau} + c_4 a_2 \|v\| \\ &\leq -\frac{2}{\varepsilon} (k_a - k_b e^{-\alpha\tau}) v_1 + 2 k_c \sqrt{v_1} \end{aligned}$$

où $k_a = \frac{c_3}{4c_2}$, $k_b = \frac{c_4 k_5 k_1}{2c_1}$, $k_c = \frac{c_4 a_2}{2\sqrt{c_1}}$

on pose $w = \sqrt{v_1}$, on a donc :

$$D^+ w(\tau) \leq -(k_a - k_6 e^{-\alpha\tau}) w + \varepsilon k_c.$$

du lemme de comparaison (2.2.6) on conclut que :

$$w(\tau) \leq \phi(\tau, 0) w(0) + \varepsilon \int_0^\tau \phi(\tau, \sigma) k_c d\sigma$$

où : $\phi(\tau,\sigma) = e^{\int_0^\tau (k_a - k_b e^{-\alpha\lambda})d\lambda}$ et $|\phi(\tau,\sigma)| \leq k_g e^{-\alpha_g(\tau-\sigma)}$.Pour k_g et $\alpha_g > 0$ on utilise le fait que $v(0) = O(\varepsilon)$, on conclut que $v(\tau) = O(\varepsilon)$ pour $\tau \geq 0$, donc la solution du système (2.23)-(2.24) vérifie :

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) &= O(\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) - \hat{y}(\frac{t}{\varepsilon}) &= O(\varepsilon) \end{aligned}$$

$\forall t \in [t_0, t_1]$ pour ε assez petit. Puisque $x(t) \in S$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ et $\varepsilon < \varepsilon_2^*$ pour $x(t,\varepsilon)$ et $y(t,\varepsilon)$ solutions de (2.6)-(2.7), en utilisant (2.5) on a :

$$z(t,\varepsilon) - h(t,\bar{x}(t)) - \hat{y}(\frac{t}{\varepsilon}) = y(t,\varepsilon) - \hat{y}(\frac{t}{\varepsilon}) + h(t,x(t,\varepsilon)) - h(t,\bar{x}(t)) = O(\varepsilon)$$

en utilisant que h étant est lipschitzienne. Puisque $\hat{y}(\tau)$ vérifie (2.37) et

$$e^{\frac{-\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}} \leq \varepsilon, \forall \alpha(t-t_0) \geq \varepsilon \ln(\frac{1}{\varepsilon})$$

alors $\hat{y}(\frac{t}{\varepsilon})$ est $O(\varepsilon)$ uniformément sur $[t_b, t_1]$ pour ε suffisament petit pour vérifier $\varepsilon \ln(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \alpha(t_b - t_0)$.

2.3 Les exemples

Exemple 2.3.1. *on considère le problème :*

$$\begin{cases} \dot{x} = z, & x(0) = \xi_0 \\ \varepsilon\dot{z} = -x - z + t, & z(0) = \eta_0 \end{cases}$$

on veut résoudre le problème sur $[0,1]$ *. Pour* $\varepsilon = 0$ *on a* $-x - z + t = 0$ *d'où*

$$z = -x + t = h(t,x).$$

L'équation couche limite pour $\tau = \frac{1}{\varepsilon}t$ *et* $y = z - h(t,x)$*est :*

$$\frac{dy}{d\tau} = -\mathbf{y}$$

pour $y(0) = \eta_0 + \xi_0$, *on a*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= -y \iff \frac{dy}{y} = -d\tau \\ &\iff \ln y = -\tau + \alpha \\ &\iff y = \lambda e^{-\tau} \quad d'où\ y(\tau) = (\eta_0 + \xi_0)e^{-\tau} \end{aligned}$$

l'origine est globalement exponentiellement stable : $\|y(\tau)\| \leq ke^{-\lambda(\tau-\tau_0)}$. *Le problème réduit est :*

$$\dot{x} = -x + t$$

il a une solution unique. Le système homogène :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \iff \frac{dx}{x} = -dt \\ &\iff \ln x = -t + \alpha \\ &\iff x = \lambda e^{-t} \end{aligned}$$

par la méthode de variation de la constante, on pose $x(t) = \lambda(t)e^{-t}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\lambda}(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t} = -\lambda(t)e^{-t} + t \\ &\Longrightarrow \dot{\lambda}(t)e^{-t} = t \\ &\Longrightarrow \dot{\lambda}(t) = te^{t} \\ &\Longrightarrow \lambda(t) = te^{t} - e^{t} + k \end{aligned}$$

donc $x(t) = (t-1) + ke^{-t}$ *avec la condition initiale* $x(0) = \xi_0$, *on a* $k = \xi_0 + 1$
par conséquent la solution du problème réduit est :

$$x(t) = (t-1) + (\xi_0 + 1)e^{-t}$$

d'aprés le théorème de Tykhonov on a :

$$\begin{aligned} x - [(t-1) + (\xi_0+1)e^{-t}] &= O(\varepsilon) \\ z - [(\eta_0 + \xi_0)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + 1 - (1+\xi_0)e^{-t}] &= O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Exemple 2.3.2. *On considère le système :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bz \quad, x(0) = \xi_0 \\ \varepsilon\dot{z} &= arctg(1 - z - kcx), \ \ z(0) = \eta_0. \end{aligned}$$

pour $\varepsilon = 0$ *on a*

$$\begin{aligned} arctg(1 - z - kcx) &= 0 \Longleftrightarrow 1 - z - kcx = 0 \\ &\Longleftrightarrow z = 1 - kcx = h(t, x) \end{aligned}$$

l'équation couche limite avec $y = z - h(t, x), \tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= arctg(1 - y - (1 - kcx) - kcx) \\ &= arctg(-y) \\ &= -arctg(y) \\ \frac{dy}{d\tau} &= -arctg(y) = g(y) \end{aligned}$$

par linéarisation, la Jacobienne $\dfrac{\partial g}{\partial y} \mid_{y=0} = -\dfrac{1}{1+y^2} \mid_{y=0} = -1$ *est donc Hurwitz d'où l'origine est exponentiellement stable pour l'équation couche limite. Le problème réduit :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(1 - kcx) \\ \dot{x} &= (A - Bck)x + B \end{aligned}$$

on résoud le système homogène :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - B - ck)x \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = (A - B - ck)x \\ &\Longrightarrow \frac{dx}{x} = (A - B - ck)dt \\ &\Longrightarrow \ln x = \lambda e^{(A-B-ck)\ t} \end{aligned}$$

par la méthode de variation des constantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda(t) e^{(A-B-ck)\ t} \\ \dot{x}(t) &= \dot{\lambda}(t) e^{(A-B-ck)\ t} + \lambda(t)(A - B - ck)e^{(A-B-ck)\ t} \\ &= (A - B - ck)\lambda(t)e^{(A-B-ck)\ t} + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t)e^{(A-B-ck)\ t} &= B \\ \dot{\lambda}(t) &= Be^{-(A-B-ck)\ t} \\ &= -Be^{-(A-B-ck)\ t} + K \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= (-Be^{-(A-B-ck)\ t} + (\xi_0+\beta))e^{(A-B-ck)\ t} \\ \bar{x}(t) &= -B + (\xi_0+\beta)e^{(A-B-ck)\ t}\end{aligned}$$

et on applique le théorème de Tykhonov.

2.4 Théorème de Tykhonov pour les intervalles infinis

Le théorème 2.2.4 n'est valable que sur des intervalles compacts. On peut voir cela dans la démonstration. Dans (2.35) on a :

$$\|x(t,\varepsilon) - x(t)\| \leq \varepsilon k_3 \left[1 + t_1 - t_0\right] e^{L_6(t-t_0)}$$

pour tout t_1 fini, $\|x(t,\varepsilon) - x(t)\| = O(\varepsilon)$; mais cette estimation n'est pas uniforme pour tout $t \geq t_0$. Le théorème suivant généralise le théorème 2.2.4 pour un intervalle infini. On va montrer que $\|x(t,\varepsilon) - x(t)\| \leq \varepsilon k$, $\forall t \in [t_0, +\infty[$. En supposant des conditions supplémentaires tel que le problème réduit (2.4) admet l'origine comme point d'équilibre exponentiellement stable.

Théorème 2.4.1. *Soit $x = 0$ le point d'équilibre de $\dot{x} = f(t,x)$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient $x = 0$. Soit $v : [0, +\infty[\times D \to R$ une fonction continûment différentiable tel que*

$$\begin{gathered} w_1(x) \leq v(x) \leq w_2(x) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f(t,x) \leq -w_3(x). \end{gathered}$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où $w_1(x)$, $w_2(x)$ et $w_3(x)$ sont des fonctions définies positives sur D. Alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable. De plus de plus si r, et c vérifient :

$$B_r = \{x/\ \|x\| \leq r\} \subset D \text{ et } c < \min_{\|x\|=r} w_1(x)$$

alors toute trajectoire qui commence dans$\{x \in B_r/\ w_2(x) \leq c\}$ vérifie

$$\|x\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0),\ \forall t \geq t_0 \geq 0$$

tel que β est une fonction de classe $\mathcal{KL}$.

Théorème 2.4.2. *(Théorème de Tykhonov intervalle infini) On considère le système singulièrement perturbé (2.1)-(2.2) et soit* $z = h(t,x)$ *la solution de (2.3). On suppose les hypothèses suivantes vérifiées pour tout :*

$$(t, x, z - h(t,x), \varepsilon) \in [0, +\infty[\, \times D_x \times D_y \times [0, \varepsilon_0]$$

$D_x \subset \mathbb{R}^n$, $D_y \subset \mathbb{R}^m$, *des domaines qui contienent l'origine de* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ *rspectivement :*

H1) Sur tout compact de $D_x \times D_y$, *les fonctions* f, g *et leur premières dérivée en* (x, z, ε), *et la première dérivée de* g *en* t *sont continues et bornées.* $h(t,x)$ *et* $\dfrac{\partial g}{\partial z}(t,x,z,0)$ *ont leurs dérivées partielles bornée et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,h(t,x),0)$ *est lipschitzienne en* x *uniformément en* t. *Les valeurs initiales* $\xi(\varepsilon)$ *et* $\eta(\varepsilon)$ *sont des fonction continues en* ε;

H2) L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système réduit (2.4). Il existe une fonction de Lyapunov $V(t,x)$ *qui vérifie les conditions du théorème (2.4.1) pour (2.4) pour tout* $(t,x) \in [0,+\infty[\, \times D_x$. $\{x \in \mathbb{R}^n, W_1(x) \leq c\}$ *est un compact de* D_x;

H3) L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système couche limite (2.9), uniformément en (t,x). *Soit* $\mathcal{R}_y \subset D_y$ *la région d'attraction du système (2.9) et* Ω_y *un compact de* $\mathcal{R}_y$.

Alors pour tout compact $\Omega_x \subset \{x \in \mathbb{R}^n, W_2(x) \leq \rho c,\ 0 < \rho < 1\}$, *il existe une constante positive* ε^* *telle que pour tout* $t_0 \geq 0 :\ \ \xi_0 \in \Omega_x, \quad \eta_0 - h(t_0, \xi_0) \in \Omega_y$ *et* $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ *le problème singulièrement perturbé (2.1)-(2.2) a une unique solution* $(x(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ *sur* $[t_0, +\infty[$ *et*

$$x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$$

$$z(t,\varepsilon) - h(t,\bar{x}(t)) - \hat{y}(\frac{t}{\varepsilon}) = O(\varepsilon)$$

uniformément pour tout $t \in [t_0, +\infty[$ *où* $\bar{x}(t)$ *et* $\hat{y}(\frac{t}{\varepsilon})$ *sont des solutions du problème réduit (2.4) et du problème couche limite (2.9) respectivement. De plus pour tout* $t_b > t_0$ *il existe* $\varepsilon^{**} < \varepsilon^*$ *tel que*

$$z(t,\varepsilon) - z(t,\bar{x}(t)) = O(\varepsilon)$$

uniformément pour tout $t \in [t_b, +\infty[$ *où* $\varepsilon < \varepsilon^{**}$.

Preuve La démonstration de ce théorème est induite de la démonstration du théorème 2.2.4, avec deux points de différence. La première est de montrer que x appartient à D_x

en utilisant une fonction de Lyapunov du système réduit et l'autre est d'analyser l'erreur $x - \bar{x}$ en utilisant les propriétés de la stabilité. En utilisant la fonction de Lyapunov V, On va montrer que x appartient au compact $\{x \in \mathbb{R}^n, W_1(x) \leq c\}$ pour tout $t \geq t_0$; On a pas besoin de la fonction ψ comme dans la démonstration du théorème précédent. Les fonctions F et G sont définies comme dans (2.21)-(2.22) mais $\varphi(x)$ est remplacé par x. Elles ont les même propriétés qu'auparavant pour tout :

$$(t, x, y, \varepsilon) \in [0, +\infty[\times \{x \in \mathbb{R}^n, W_1(x) \leq c\} \times \Omega_1 \times [0, \varepsilon_0] .$$

de plus, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t, x, 0, 0)$ est Lipschitzienne en x, uniformément en t. Pour tout

$$x \in \{x \in \mathbb{R}^n, W_1(x) \leq c\}$$

on peut recommencer la dérivation pour montrer(2.34). Puisque

$$\dot{V} \leq -W_3(x) + k_6\varepsilon + k_7 e^{-\dfrac{\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}}$$

utilisant le fait que $\xi_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n, W_2(x) \leq \rho c\}$, $\exists T > 0$ indépendant de ε tel que pour pour ε suffisament petit, $x(t, \varepsilon) \in \{x \in \mathbb{R}^n, W_2(x) \leq c\}$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Pour $t \geq t_0 + T$: $e^{-\dfrac{\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}} = O(\varepsilon)$ d'où $\dot{V} \leq -W_3(x) + k_8\varepsilon$, utilisant cette inégalité on peut montrer que $\dot{V}$ est négative sur le bord $V(t, x) = c$, donc
$x(t, \varepsilon) \in \{x \in \mathbb{R}^n, W_1(x) \leq c\}$ pour tout $t \geq t_0$.

Pour analyser l'erreur de l'approximation $u(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)$, on voit (2.23) comme une perturbation du problème réduit (2.27). En utilisant le lemme de Granwall pour avoir une estimation de de u, en utilise une fonction de Lyapunov pour exploiter la stabilité exponentielle de l'origine de (2.27) . L'analyse de Lyapunov est similaire à l'analyse de la couche limite dans la démonstration du théorème 2.2.4. L'erreur u de l'équation vérifie

$$\dot{u} = F(t, u, 0, 0) + \Delta F \tag{2.40}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(t, \bar{x} + u, 0, 0) - F(t, \bar{x}, 0, 0) + F(t, x, y, 0) \\ &\quad + F(t, x, y, 0) - F(t, x, 0, 0) \end{aligned}$$

d'où on a :

$$\|\Delta F\| \leq \bar{k}_4 \|u\|^2 + \bar{k}_5 \|u\| \|\bar{x}\| + \bar{k}_6 e^{-\dfrac{\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}} + \varepsilon \bar{k}_7.$$

Le système (2.40) est une perturbation de :

$$\dot{u} = F(t, u, 0, 0). \tag{2.41}$$

L'origine de (2.41) est exponentiellement stable, donc on peut avoir par le théorème 2.2.1 une fonction de Lyapunov $\tilde{V}(t, u)$ de cette l'équation. En utilisant cette fonction de Lyapunov et (2.40) on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} F(t, u, 0, 0) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \Delta F \\ &\leq -\tilde{c}_3 \|u\|^2 + \tilde{c}_4 \|u\| \left(k_4 \|u\|^2 + k_5 \|u\| \|\tilde{x}\| + k_6 e^{-\frac{\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}} + \varepsilon k_7 \right). \end{aligned}$$

pour $\|u\| \leq \frac{\tilde{c}_3}{2\tilde{c}_4 k_4}$ on a :

$$\tilde{V} \leq -2\left(k_a - k_b e^{-\tilde{\alpha}(t-t_0)}\right) \tilde{V} + 2 \left(\varepsilon k_c + k_d e^{-\dfrac{\alpha(t-t_0)}{\varepsilon}} \right) \sqrt{\tilde{V}}$$

pour k_a, $\tilde{\alpha} > 0$ et $k_a, k_b, k_d \geq 0$. En appliquant le lemme de comparaison et en considérant le changement de variable $\tilde{W} = \sqrt{\tilde{V}}$ on obtient :

$$\tilde{W} \leq \tilde{\phi}(t, t_0) \tilde{W}(0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{\phi}(t, s)(\varepsilon k_c + k_d e^{-\dfrac{\alpha(s-t_0)}{\varepsilon}})ds$$

où $\left\|\tilde{\phi}(t, s)\right\| \leq k_g e^{-\sigma(t-t_0)}$, $\sigma > 0$ et $k_g > 0$. puisque $u(t_0) = O(\varepsilon)$ et

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\sigma(t-s)} e^{-\dfrac{\alpha(s-t_0)}{\varepsilon}} ds = O(\varepsilon)$$

on peut montrer que $\tilde{W}(0) = O(\varepsilon)$ donc $u(t) = O(\varepsilon)$. Le reste de la démonstration se fait comme dans la démonstation du théorème 2.2.4, car l'analyse de la couche limite dans la démonstraton est valable pour $\tau \geq 0$.

2.4.1 Affaiblissement des conditions

Des généralisations du théorème de Tykhonov se sont développées on proposant des affaiblissement de certaines hypothèses. Dans [9] on considère la stabilité asymptotique qui est moins forte que la stabilité exponentielle et on n'impose à f et g que le fait d'être continues. par ces généralisations on a des gains mais aussi des pertes :

- **Les gains** : des conditions moins contraignantes, on peut donc appliquer le théorème à des cas plus généraux.
- **Les pertes** : l'écart entre les composantes des solutions du système et celle de l'équation couche limite et le problème réduit n'est plus de l'ordre de ε mais tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Théorème 2.4.3. *intervalle fini*[9]

On considère le probème singulièrement perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), & x(t_0) = \xi(\varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), & z(t_0) = \eta(\varepsilon) \end{cases} \tag{2.1}$$

soit $z = h(t, x)$ les points singuliers solution de l'équation algébrique $g(t, x, z, 0) = 0$; on suppose qu'il existe des constantes positives $t_1 > t_0$, r, ε et un domaine compact $X \subset \mathbb{R}^n$ telle que les conditions sont satisfaites pour tout $t_0 < t < t_1$; $x \in X$; $\|z - h(t, x)\| \leq r$; $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

H1) *Les fonctions $f(t, x, z, \varepsilon)$, $g(t, x, z, \varepsilon)$ et $h(t, x)$ sont continues et les donnée initiales $\xi(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$ sont continues.*

H2) *Le problème réduit $\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$ a une unique solution $x_0(t)$ avec la condition initiale $x(t_0) = \xi(0)$ définie sur $[t_0, t_1]$ et $x_0(t) \in X$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$.*

H3) *L'équation couche limite $\acute{z} = g(t, x, z, 0)$, ($\acute{z} = \dfrac{dz}{d\tau}$ où $\tau = \dfrac{t - t_0}{\epsilon}$) a une solution unique avec des conditions initiales préscrite ; soit $\bar{z}(\tau)$ la solution de*

$$\begin{cases} z' = g(t, \xi(0), z, 0) \\ z(0) = \eta(0) \end{cases} \quad \textit{pour toute condition initiale fixée.}$$

H4) *Le point d'équilibre $z = h(t, x)$ de l'équation couche limite est uniformément asymptotiquement stable pour $(t, x) \in [t_0, t_1] \times X$.*

H5) *La condition initiale appartient au bassin d'attraction de $h(t_0, \xi(0))$.*

Alors, pour tout $\delta > 0$ il existe une constante ε^*telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ toute solution $(x(t), z(t))$ du problème (1.1) est définie sur $[t_0, t_1]$ et vérifie

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0(t)\| &\leq \delta \\ \left\| z(t) - \bar{z}(\frac{t-t_0}{\varepsilon}) - h(t, x_0(t)) + h(t_0, \xi(0) \right\| &\leq \delta \qquad \text{pour tout} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

quand le problème singulièrement perturbé (2.1) a une unique solution notée $(x(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ on a : $\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \epsilon) = x_0(t)$ pour $t_0 \leq t \leq t_1$. On a aussi $\lim_{\varepsilon \to 0} z(t, \varepsilon) = h(t, x_0(t))$ pour $t_0 < t \leq t_1$; mais la limite est vérifiée seulement pour $t > t_0$; puisqu'il existe une couche limite pour $t = t_0$ pour la composante z;

en effet on a :

$$\lim(z(t,\varepsilon) - \bar{z}(\frac{t-t_0}{\varepsilon}) = h(t, x_0(t)) - h(t_0, \xi(0)) \text{ pour } t_0 < t \leq t_1$$

Théorème 2.4.4. *intervalle infini*[9]

On considère le probème singulièrement perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), & x(t_0) = \xi(\varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), & z(t_0) = \eta(\varepsilon). \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit $z = h(t, x)$ les points singuliers, en fait solution de l'équation algébrique

$$g(t, x, z, 0) = 0.$$

On suppose qu'il existe des constantes positives r et ε_0 , et un domaine compact $X \subset \mathbb{R}^n$ telle que les conditions suivantes sont satisfaites pour tout :

$$t \in [t_0, +\infty[\ ; \ x \in X \ ; \ \|z - h(t, x)\| \leq r \ ; \ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

H1) Les fonctions $f(t, x, z, \varepsilon), g(t, x, z, \varepsilon)$ et $h(t, x)$ sont continues et les donnée initiales $\xi(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$ sont continues.

H2) $f(t, 0, 0, 0) = 0$, $g(t, 0, 0, 0) = 0$ et $h(t, 0) = 0$.

H3) L'origine du problème réduit est asymptotiquement stable et la condition initiale $\xi(0)$ appartient au bassin d'attraction. Soit $x_0(t)$ la solution du problème couche limite avec la condition initial $x(t_0) = \xi(0)$ définie sur $[t_0, t_1]$ et $x_0(t) \in X$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ et $\lim x_0(t) = 0$.

H4) L'équation couche limite $\acute{z} = g(t, x, z, 0)$, *(* $\acute{z} = \dfrac{dz}{d\tau}$ *où* $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon}$*) a une solution unique avec des conditions initiales préscrites. Soit* $\bar{z}(\tau)$ *la solution de*
$\begin{array}{c} z' = g(t, \xi(0), z, 0) \\ z(0) = \eta(0) \end{array}$ *pour toute condition initiale fixée.*

H5) Le point d'équilibre $z = h(t, x)$ *de l'équation couche limite est uniformément asymptotiquement stable pour* $(t, x) \in [t_0, t_1] \times X$.

H6) La condition initiale appartient au bassin d'attraction de $h(t_0, \xi(0))$*. Alors, pour tout* $\delta > 0$ *il existe une constante* ε^**telle que pour tout* $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$*, toute solution* $(x(t), z(t))$ *du problème (2.1) est définie pour tout* $t \geq t_0$ *et vérifie :*

$$\begin{array}{rcl} \|x(t) - x_0(t)\| & \leq & \delta \\ \left\| z(t) - \bar{z}(\dfrac{t - t_0}{\varepsilon}) - h(t, x_0(t)) + h(t_0, \xi(0) \right\| & \leq & \delta \end{array}$$

pour tout $t \geq t_0$*. Le problème singulièrement perturbée a une unique solution notée* $(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$*. On a* $x_0(t)$ *est définie pour tout* $t_0 \leq t < +\infty$ *et* $\lim_{\varepsilon \to 0} x_0(t) = 0$*. On a* $\lim_{\varepsilon \to 0, t \to +\infty} z(t, \epsilon) = 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0, t \to +\infty} x(t, \epsilon) = 0$.

Chapitre 3

Le développement asymptotique de O'Malley-Vasil'eva

Comment utiliser le Théorème de Tykhonov pour obtenir une approximation des solutions d'un problème à valeurs initiales ? Le théorème ne donne aucune précision à propos de la taille de l'intervalle couche limite et il ne donne aussi aucune information sur le comportement du système sur cet intervalle.

Une méthode dite des développements asymptotiques en puissances de ε donne en première approximation la solution $\bar{y}(t)$ du problème réduit sur la variété lente telle que définie par Tykhonov. Pour décrire le voisinage initial et le voisinage lent plus tard. Un développement asymptotique de la solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y, \varepsilon), & x(0) = x^0 \\ \varepsilon \dot{y} = g(t, x, y, \varepsilon), & y(0) = y^0 \end{cases} \tag{3.1}$$

est décrit dans le théorème de O'Malley-Vasil'eva.

Références bibliographiques : R.O'Malley [10], R.O'Malley [11], F.Verhulst [13], F.Verhulst [14].

3.1 Développement asymptotique

On considère le système (3.1), telles que f, g, x^0, y^0 admettent des développements asymptotiques :

$$\begin{aligned} f(x,z,t,\varepsilon) &\approx \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x,y,t)\varepsilon^j, \qquad g(x,y,t,\varepsilon) \approx \sum_{j=0j}^{\infty} g_j(x,y,t)\varepsilon^j \\ x^0(\varepsilon) &\approx \sum_{j=0}^{\infty} x_j^0\varepsilon^j, \qquad y^0(\varepsilon) \approx \sum_{j=0}^{\infty} y_j^0\varepsilon^j \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$. Les $f_j et g_j$ sont des fonctions C^∞ en x, y et t. Le problème réduit est :

$$\begin{cases} x = f(x,y,t,0) = f_0(x,y,t) \\ 0 = g(x,y,t,0) = g_0(x,y,t) \end{cases} \tag{3.2}$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

H1) Il existe une fonction $C^1, \Phi(X,t)$ tel que : $g_0(X,\Phi(X,t),t) = 0$.

D'où le problème à valeur initiale :

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x,\Phi(x,t),t) = \tilde{f}(x,t) \quad ; \quad x(0) = x_0^0 \tag{3.3}$$

a une unique solution $X_0(t)$ sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, telle que :

$$\frac{\partial V_0}{\partial y}(X_0(t),Y_0(t),t) \quad \leq \quad -k \quad \text{pour } k > 0 \tag{3.4}$$

$$\text{et } Y_0(t) \quad = \quad \Phi(X_0(t),t) \tag{3.5}$$

H2) Pour $k > 0$ défini par (3.4), on suppose que :

$$\frac{\partial V_0}{\partial y}(X_0(t),\lambda,t) \leq -k \;\; \text{pour } \lambda \text{ entre } Y_0(0) \text{ et } y_0^0.$$

Sous ces conditions, on peut construire une solution asymptotique du problème (3.1) qui à $(X_0(t),Y_0(t))$ comme solution limite pour $t > 0$ et $\varepsilon \to 0$. On a $X_0(0) = x_0^0$ mais $Y_0(0) \neq y_0^0$; en général $x(t,\varepsilon)$ converge uniformément sur $[0;1]$ pour $\varepsilon \to 0$ mais $y(t,\varepsilon)$ à une convergence non uniforme pour $t = 0$.

On recherche la solution sous la forme :

$$\begin{cases} x(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon) + \varepsilon m(\tau,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) = Y(t,\varepsilon) + \varepsilon n(\tau,\varepsilon) \end{cases} \tag{3.6}$$

où X, Y, m, n ont des développements en série asymptotique quand $\varepsilon \to 0$, i.e :

$$\begin{aligned} X(t,\varepsilon) &\approx \sum_{j=0}^{\infty} X_j(t)\varepsilon^j \quad , \qquad Y(t,\varepsilon) \approx \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(t)\varepsilon^j \\ m(\tau,\varepsilon) &\approx \sum_{j=0}^{\infty} m_j(\tau)\varepsilon^j \quad , \qquad m(\tau,\varepsilon) \approx \sum_{j=0}^{\infty} m_j(\tau)\varepsilon^j \end{aligned}$$

et la variable $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ tend vers ∞ pour $\varepsilon \to 0$ avec $t \geq \delta > 0$ (δ fixe).

Tous les termes dans les développements de m, n tendent vers 0 quand $\tau \to \infty$. Loin de $t = 0$ on a (x, y) converge vers (X, Y) quand $\varepsilon \to 0$, tandis que la correction couche limite $(\varepsilon m, n)$ n'a de sens qu'au voisinage de $t = 0$.

La procédure de développement consiste à obtenir en première étape le développement régulier ensuite le développement complet.

Puisque la solution asymptotique est donnée par la solution régulière pour $t > 0$ alors $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ doivent satisfaire le système (3.1). En remplaçant $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ dans (3.1) on a l'égalité pour $\varepsilon = 0$, puisque (X_0, Y_0) est une solution du problème réduit.

On considère le développement régulier :

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= \sum_{j=0}^{p} X_j(t)\varepsilon^j + O\left(\varepsilon^{p+1}\right) \\ y(t,\varepsilon) &= \sum_{j=0}^{p} Y_j(t)\varepsilon^j + O\left(\varepsilon^{p+1}\right) \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned} \dot{X}_0 + \varepsilon\dot{X}_1 + ... &= f(\dot{X}_0 + \varepsilon\dot{X}_1 + ...; \dot{Y}_0 + \varepsilon\dot{Y}_1 + ...; t; \varepsilon) \\ \varepsilon\dot{Y}_0 + \varepsilon^2\dot{Y}_1 + ... &= g(\dot{X}_0 + \varepsilon\dot{X}_1 + ...; \dot{Y}_0 + \varepsilon\dot{Y}_1 + ...; t; \varepsilon) \end{aligned}$$

pour X_0, Y_0 on a besoin d'une condition suplémentaire :

$$\begin{aligned} \dot{X}_0 &= f(\dot{X}_0; \Phi(X_0, t); t; 0),\ X_0(0) = x_0 \\ 0 &= g(\dot{X}_0; \Phi(X_0, t); t; 0) \end{aligned}$$

avec $Y_0(t) = \Phi(X_0, t)$. Pour X_1 ,Y_1 on a :

$$\dot{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0; Y_0; t; 0)X_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0; Y_0; t; 0)Y_1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X_0; Y_0; t; 0), \tag{3.7}$$

$$\dot{Y}_1 = \frac{\partial g}{\partial x}(X_0; Y_0; t; 0)X_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(X_0; Y_0; t; 0)Y_1 + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(X_0; Y_0; t; 0). \tag{3.8}$$

De l'équation (3.5) on retrouve Y_1 qu'on remplace dans (3.6) pour retrouver X_1. l'équation de X_1 après l'estimation de Y_1 est linéaire, on ajoute la condition initiale $X_1(0) = 0$. En générale à l'ordre supérieur les équations sont encore linéaires. On utilise le développement de Taylor en série des fonctions f et g en $(X_0, Y_0, t, 0)$, et l'égalité des coefficients de ε^j pour $j > 0$ le développement est de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dX_j}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(X_0; Y_0; t; 0)X_j + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0; Y_0; t; 0)Y_j + \alpha_{j-1}(t) \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial x}(X_0; Y_0; t; 0)X_j + \frac{\partial g}{\partial y}(X_0; Y_0; t; 0)Y_j + \beta_{j-1}(t) \end{aligned}$$

où $\alpha_0(t) = f_1(X_0, Y_0, t)$ et $\beta_0 = g_1(X_0, Y_0, t) - \frac{dY_0}{dt}$ et en général α_{j-1} et β_{j-1} sont retrouvés successivement en fonction des X_l et Y_l pour $l < j$. Par l'hypothèse H1) on a :

$$\frac{\partial}{\partial X} g_0(X_0, \Phi(X_0, t), t) = 0$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial g_0}{\partial x}(X_0, \Phi(X_0, t), t) + \frac{\partial g_0}{\partial y}(X_0, \Phi(X_0, t), t)\frac{\partial \Phi}{\partial X}(X_0, t) = 0.$$

on note $\frac{\partial g_0}{\partial x} = g_{0,x}$ et $\frac{\partial g_0}{\partial y} = g_{0,y}$ alors :

$$g_{0,x}(X_0, Y_0, t) + g_{0,y}(X_0, Y_0, t)\Phi(X_0, t) = 0$$

on en déduit que

$$\Phi(X_0, t) = -\frac{g_{0,x}(X_0, Y_0, t)}{g_{0,y}(X_0, Y_0, t)}$$

donc

$$\begin{aligned} Y_j(t) &= \Phi_x(X_0(t), t)X_j(t) + \tilde{\beta}_{j-1}(t) \\ \frac{dX_j}{dt}(t) &= \tilde{f}_x(X_0(t), t)X_j(t) + \tilde{\alpha}_{j-1}(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

où $\tilde{\alpha}_{j-1}$ et $\tilde{\beta}_{j-1}$ sont déterminées successivement et $\tilde{f}$ est définie dans (3.3). On obtient X_j, ensuite Y_j comme solution d'équation linéaire aprés avoir déterminé la valeur initiale : $X_j(0) = x_j^0 - m_{j-1}(0)$. Donc le développement régulier peut être complètement déterminé, si les constantes $m_{j-1}(0)$ sont connues pour chaque étape. Il ne suffit pas de connaitre la valeur initiale $x^0(\varepsilon)$,on a besoin de la valeur initiale de la correction couche limite $m(0, \varepsilon)$.

Le développememt complet (3.6) doit lui aussi vérifier le système (3.1). En remplaçant (3.6) dans (3.1) on trouve que la correction couche limite doit vérifier le système non linéaire :

$$\begin{aligned}
\frac{dm}{d\tau} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \\
&= f(X(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \varepsilon m(\tau,\varepsilon), Y(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \varepsilon n(\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - f(X(\varepsilon\tau,\varepsilon)+, Y(\varepsilon\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) \\
\frac{dn}{d\tau} &= \varepsilon(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt}) \\
&= g(X(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \varepsilon m(\tau,\varepsilon), Y(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \varepsilon n(\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(X(\varepsilon\tau,\varepsilon)+, Y(\varepsilon\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

avec la condition initiale $n(0,\varepsilon) = y^0(\varepsilon) - Y(0,\varepsilon)$. On obtient un développement pour m, n en développant les deux membres de (3.10) et par égalité des coefficients de la même puissance en ε pour les même valeurs fini de ε. Pour $\varepsilon = 0$ on a le système non linéaire :

$$\begin{aligned}
\frac{dm_0}{d\tau} &= f_0(X_0(0), Y_0(0) + n_0(\tau), 0) - f_0(X_0(0), Y_0(0), 0) \\
&= n_0(\tau) U(n_0(\tau)) \\
\frac{dn_0}{d\tau} &= g_0(X_0(0), Y_0(0) + n_0(\tau), 0) - g_0(X_0(0), Y_0(0), 0) \\
&= n_0(\tau) V(n_0(\tau))
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où U et V sont des dérivées partielles appropriées déduites du théorème de la valeur moyenne comme suit : on considère la fonction H tel que

$$f_0(X_0(0), Y_0(0) + n_0(\tau), 0) - f_0(X_0(0), Y_0(0), 0) = H(n_0(\tau)) - H(0)$$

d'aprés le théorème de la moyenne :

$$H(n_0(\tau)) - H(0) = n_0(\tau) \frac{\partial H}{\partial y}(\theta n_0(\tau))$$

on pose $\frac{\partial H}{\partial y}(\theta n_0(\tau)) = U(n_0(\tau))$; de la même façon, on considère la fonction K tel que

$$g_0(X_0(0), Y_0(0) + n_0(\tau), 0) - g_0(X_0(0), Y_0(0), 0) = P(n_0(\tau)) - P(0)$$

d'aprés le théorème de la moyenne

$$P(n_0(\tau)) - P(0) = n_0(\tau) \frac{\partial P}{\partial y}(\theta n_0(\tau))$$

on pose $\frac{\partial P}{\partial y}(\theta n_0(\tau)) = V(n_0(\tau))$. On note que la condition initiale implique que $n_0(0) = J = y^0(0) - Y_0(0)$ " le saut couche limite" et que par l'hypothèse H2) $V(J) \leq -k$.

De l'équation différentielle on déduit que $|n_0(\tau)|$ est décroissante ; de l'hypothèse H2) on a encore le fait que $V(n_0(\tau))$ est négative et l'équation différentielle implique que $|n_0(\tau)|$ décroit vers 0 quand $\tau \to \infty$ puisque :

$$\begin{aligned}\frac{dn_0}{d\tau} &= n_0(\tau)V(n_0(\tau)) \Longrightarrow \frac{dn_0}{n_0} = V(n_0(\tau))d\tau \\ &\Longrightarrow \ln\left|\frac{n_0(\tau)}{n_0(0)}\right| = \int_0^\tau V(n_0(s))ds\end{aligned}$$

comme $V(n_0(\tau)) \leq -k$ alors $\ln\left|\frac{n_0(\tau)}{n_0(0)}\right| \leq -k\tau$, d'où : $|n_0(\tau)| \leq |n_0(0)|\, e^{-k\tau}$. la résolution de l'équation différentielle non linéaire de n_0 est rarement possible mais on peut résoudre l'équation intégrale :

$$n_0(\tau) = n_0(0) + \int_0^\tau n_0(s)V(n_0(s))ds \tag{3.12}$$

par approximation successive. Etant donné n_0 on a :

$$\frac{dm_0}{d\tau} = n_0(\tau)U(n_0(\tau))$$

sachant que $m_0(\tau) \to 0$ quand $\tau \to 0$, donc

$$m_0(\tau) = \int_\tau^\infty \frac{dm_0}{d\tau}(s)ds = -\int_\tau^\infty n_0(s)U(n_0(s))ds = O(e^{-k\tau}) \tag{3.13}$$

puisque : $X_1(0) = x_1^0 - m_0(0)$ est donnée alors les termes $X_1(t)$ et $Y_1(t)$ dans le développement sont uniques. On développe le deuxième membre de (3.10) en

$$(x, y, t, \varepsilon) = (X_0(0), Y_0(0) + n_0(\tau), 0)$$

et par égalité des coeficients de ε^j pour tout $j > 0$ alors m_j et n_j vérifient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dm_j}{d\tau} &= f_{0,y}(X_0(0), Y_0(0) + n_0(\tau), 0)n_j(\tau) + A_{j-1}(\tau) \\ \frac{dn_j}{d\tau} &= g_{0,y}(X_0(0), Y_0(0) + n_0(\tau), 0)n_j(\tau) + B_{j-1}(\tau)\end{aligned} \tag{3.14}$$

où A_{j-1} et B_{j-1} sont trouvés successivement et on a par récurrence que :

$$A_{j-1}(\tau) = O(e^{-k(1-\delta)\tau}) = B_{j-1}(\tau)$$

quand $\tau \to \infty$ pour tout $\delta > 0$. Comme $n_j(0) = y_j^0(0) - Y_j(0)$ sont retrouvés successivement alors on peut integrer l'équation linéaire pour obtenir $n_j(\tau)$ seulement, puis $\frac{dm_j}{d\tau}$

est déterminé et que $m_j(\tau) = -\displaystyle\int_{\tau}^{\infty} \frac{dm_j}{d\tau}(s)ds$.On peut maintenant énoncé le théorème qui résume la détermination du développement complet :

Théorème 3.1.1. *Pour tout entier $N \geq 0$ le problème (3.1) vérifiant les hypothèses H1) et H2) a une unique solution pour ε suffisamment petit tel que :*

$$x(t,\varepsilon) = X_0(t) + \sum_{j=1}^{N}(X_j(t) + m_{j-1}(\frac{t}{\varepsilon}))\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}R(t,\varepsilon) \tag{3.15}$$

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N}(Y_j(t) + n_j(\frac{t}{\varepsilon}))\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}S(t,\varepsilon) \tag{3.16}$$

où $R(t,\varepsilon)$,$S(t,\varepsilon)$ sont uniformément bornés pour tout $0 \leq t \leq 1$.

Preuve Soit :

$$\begin{aligned}
X^N(t,\varepsilon) &= \sum_{j=0}^{N} X_j(t)\varepsilon^j \ ,Y^N(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} Y_j(t)\varepsilon^j \\
m^N(\tau,\varepsilon) &= \sum_{j=0}^{N-1} m_j(\tau)\varepsilon^j \ , \ n^N(\tau,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N-1} n_j(\tau)\varepsilon^j
\end{aligned}$$

par définition des X_j,Y_j, m_j, n_j on a :

$$\begin{aligned}
\frac{dX^N}{dt} &= f(X^N, Y^N, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}) \\
\frac{dY^N}{dt} &= g(X^N, Y^N, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}) \\
\frac{dm^N}{d\tau} &= f(X^N + \varepsilon m^N, Y^N + n^N, t, \varepsilon) - f(X^N, Y^N, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^N e^{-k(1-\delta)\tau}) \\
\frac{dn^N}{d\tau} &= g(X^N + \varepsilon m^N, Y^N + n^N, t, \varepsilon) - g(X^N, Y^N, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^N e^{-k(1-\delta)\tau})
\end{aligned}$$

en remplaçant (3.17) dans le système (3.1) on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{N+1}\frac{dR}{dt} &= f(X^N + \varepsilon m^N + \varepsilon^{N+1}R, Y^N + n^N + \varepsilon^{N+1}S, t, \varepsilon) \\
&\quad -f(X^N + \varepsilon m^N, Y^N + n^N, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon^N e^{-k(1-\delta)\tau}) \\
\varepsilon^{N+2}\frac{dS}{dt} &= g(X^N + \varepsilon m^N + \varepsilon^{N+1}R, Y^N + n^N + \varepsilon^{N+1}S, t, \varepsilon) \\
&\quad -g(X^N + \varepsilon m^N, Y^N + n^N, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})
\end{aligned}$$

où les termes O sont indépendants de R et S de plus : $R(0,\varepsilon) = S(0,\varepsilon) = o(1)$. Par intégration on obtient :

$$\begin{aligned}
R(t,\varepsilon) &= R^0(t,\varepsilon) + \int_0^t \hat{F}(R(\mu,\varepsilon), S(\mu,\varepsilon), \mu, \varepsilon) d\mu \\
S(t,\varepsilon) &= S^0(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \hat{G}(R(\mu,\varepsilon), S(\mu,\varepsilon), \mu, \varepsilon) \\
&\times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_\mu^t g_y(X^N+\varepsilon m^N, Y^N+n^N, s,\varepsilon)ds} d\mu
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\hat{F}(R,S,t,\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{N+1}}[f(X^N+\varepsilon m^N+\varepsilon^{N+1}R, Y^N+n^N+\varepsilon^{N+1}S,t,\varepsilon) \\
&-f(X^N+\varepsilon m^N, Y^N+n^N,t,\varepsilon)] \\
\hat{F}(R,S,t,\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^{N+1}}[g(X^N+\varepsilon m^N+\varepsilon^{N+1}R, Y^N+n^N+\varepsilon^{N+1}S,t,\varepsilon) \\
&-g(X^N+\varepsilon m^N, Y^N+n^N,t,\varepsilon) - \varepsilon^{N+1}S\frac{dg}{dy}(X^N+\varepsilon m^N, Y^N+n^N,t,\varepsilon)] \\
R^0(t,\varepsilon) &= O(1)[1+\int_0^t (1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{k(1-\delta)s}{\varepsilon}})ds] = O(1) \\
S^0(t,\varepsilon) &= O(1) + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \times \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t g_y(X^N+\varepsilon m^N, Y^N+n^N,s,\varepsilon)ds} dt.
\end{aligned}$$

Exemple 3.1.1. *Dans cet exemple on va appliquer le théorème précédent au problème des deux corps avec masse décroissante. Nous considérons deux corps* A, B *de masse* m_A *,*m_B *en interaction gravitationnelle. L'étude de leur mouvement est appellée le problème des deux corps. Ce problème a été posé et résolu par Newton en 1687. Il a confirmé les relations expérimentales obtenues par Kepler de 1609 à 1630 (lois de Kepler). Les équations du mouvement sont :*

$$\ddot{r} = -G\frac{m(t)}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} \tag{3.17}$$

$$c = r^2 + \dot{\theta} \tag{3.18}$$

où r, θ *sont les coordonnées polaires et* c *et* G *des constantes positives. on prend* $c = G = 1$, *telle que la masse initiale* $m(0) = 1$. *Pour la fonction qui décrit la perte rapide de la masse on considère :*

$$m(t) = m_r + (1-m_r)e^{-\dfrac{t}{\varepsilon}}$$

tel que m_r *est la masse restante,* $0 \leq m_r < 1$. $\dot{\theta}$ *étant une fonction croissante en t, on peut l'utiliser comme nouvelle échelle de temps. On introduit le changement de variable suivant* $\rho = \dfrac{1}{r}$ *qu'on remplace dans (3.18), on obtient :* $\dfrac{1}{\rho^2}\dot{\theta} = c$ *ainsi* $\dot{\theta} = \rho^2 c$.
On a $\dfrac{d\rho}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$ *d'où* $\dfrac{d\rho}{d\theta} = -\dfrac{1}{c}\dot{r}$ *ce qui implique que*

$$\ddot{r} = -c^2\rho^2\frac{d^2\rho}{d\theta^2}.$$

En remplaçant dans l'équation (3.19) on obtient $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \dfrac{G}{c^2}m(t) - \rho$. *pour* $c = G = 1$ *et* $m(t) = m_r + (1-m_r)e^{-\dfrac{t}{\varepsilon}}$ *on conclut que :*

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho &= m_r + u, \;\; \rho(0) = 1, \frac{d\rho}{d\theta}(0) = \alpha \\ \varepsilon\frac{du}{d\theta} &= -\frac{u}{\rho^2}, \; u(0) = 1 - m_r \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec $u = (1-m_r)e^{-\dfrac{t}{\varepsilon}}$. *on pose* $\rho = \rho_1$ *et* $\dfrac{d\rho_1}{d\theta} = \rho_2$. *Ainsi le système prend la forme :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho_1}{d\theta} = \rho_2, & \rho_1(0) = 1 \\ \dfrac{d\rho_2}{d\theta} = -\rho_1 + m_r + u, & \rho_2(0) = \alpha \\ \varepsilon\dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{u}{\rho_1^2}, & u(0) = 1 - m_r. \end{cases}$$

Le théorème deO'Malley-Vasil'eva peut être appliqué puisque :

$$g(\rho, u, \theta, 0) = -\frac{u}{\rho^2} \;\; \textit{vérifie} \;\; \frac{\partial g}{\partial u}(\rho, u, \theta, 0) = -\frac{1}{\rho^2} < 0.$$

On recherche un développement par la méthode de O'Malley. On commence par la recherche du développement régulier de la solution (ρ_1, ρ_2, u) *de la forme :*

$$\begin{cases} \rho_1(\theta) = a_0(\theta) + \varepsilon a_1(\theta) + \varepsilon^2 a_2(\theta) + ... \\ \rho_2(\theta) = b_0(\theta) + \varepsilon b_1(\theta) + \varepsilon^2 b_2(\theta) + ... \\ u(\theta) = c_0(\theta) + \varepsilon c_1(\theta) + \varepsilon^2 c_2(\theta) + ... \end{cases}$$

en les remplaçant dans le système(3.20) on obtient :

$c_0 = c_1 = c_2 = ... = 0$

$\frac{da_0}{d\theta} = b_0$, $\frac{db_0}{d\theta} = -a_0 + m_r$, *en générale on trouve que :* $\frac{da_n}{d\theta} = b_n$, $\frac{db_n}{d\theta} = -a_n$.
Satisfaisant les conditions initiales pour a_0, b_0 *on a*

$$\begin{aligned} a_0(\theta) &= m_r + (1 - m_r)\cos\theta + \alpha\sin\theta, \\ b_0(\theta) &= -(1 - m_r)\sin\theta + \alpha\cos\theta. \end{aligned}$$

On note que le développement régulier correspond à l'état du problème des deux corps où le processus d'éjection de la masse est terminé. Le développement complet de O'Malley est de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho(\theta) = a_0(\theta) + \varepsilon a_1(\theta) + \varepsilon\alpha_1(\frac{\theta}{\varepsilon}) + \varepsilon^2......., \\ \rho_2 = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}(\theta) = b_0(\theta) + \varepsilon b_1(\theta) + \varepsilon\beta_1(\frac{\theta}{\varepsilon}) + \varepsilon^2....., \\ u(\theta) = \gamma_0(\frac{\theta}{\varepsilon}) + \varepsilon\gamma_1(\frac{\theta}{\varepsilon}) + \varepsilon^2.................................... \end{cases}$$

les conditions initiales pour a_1, b_1, ... *etc, sont déduites des termes de la correction couche limite :* $a_1(0) = -\alpha_1(0)$, $b_1(0) = -\alpha_1(0)$, *etc. On a pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\begin{aligned} a_n(\theta) &= -\alpha_n(0)\cos\theta - \beta_n(0)\alpha\sin\theta, \\ b_n(\theta) &= \alpha_n(0)\sin\theta - \beta_n(0)\cos\theta. \end{aligned}$$

En remplaçant le développement complet dans les équations, on obtient en posant $\tau = \frac{\theta}{\varepsilon}$ *:*

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 + \varepsilon\dot{a}_1 + \varepsilon\frac{d\alpha_1}{d\tau} + \varepsilon^2... &= b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2..., \\ \dot{b}_0 + \varepsilon\dot{b}_1 + \varepsilon\frac{d\beta_1}{d\tau} + \varepsilon^2... &= -a_0\varepsilon a_1 - \varepsilon\alpha_1 + m_r + \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_0}{d\tau} + \varepsilon\frac{d\gamma_1}{d\tau} + \varepsilon^2.... &= -(\gamma_0 + \varepsilon\gamma_1)(a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2....)^{-2} \end{aligned}$$

pour les premiers termes de la correction couche limite on trouve

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = 0, \frac{d\beta_1}{d\tau} = \gamma_0, \frac{d\gamma_O}{d\tau} = -\gamma_0 a_0(0)^{-2}$$

on a $a_0(0) = 1$. *Comme* $c_0 = 0$ *le saut couche limite pour* γ_0 *correspond à la condition initiale de u. En appliquant les conditions :* $\lim_{\tau\to+\infty}\alpha_1(\tau) = \lim_{\tau\to+\infty}\beta_1(\tau) = 0$ *on trouve :*

$$\alpha_1(\tau) = 0, \beta_1(\tau) = -(1 - m_r)e^{-\tau}, \gamma_0(\tau) = (1 - m_r)e^{-\tau}$$

alors $\alpha_1(0) = 0, \beta_1(0) = -(1 - m_r)$ *ainsi on trouve* a_1 *et* b_1.

Le développement complet et donc de la forme :

$$\begin{cases} \rho(\theta) = m_r + (1 - m_r)\cos\theta + \alpha\sin\theta + \varepsilon(1 - m_r)\sin\theta + O(\varepsilon^2), \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}(\theta) = -(1 - m_r)\sin\theta + \alpha\cos\theta + \varepsilon(1 - m_r)\cos\theta - \varepsilon(1 - m_r)e^{-\frac{\theta}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^2), \\ u(\theta) = (1 - m_r)e^{-\frac{\theta}{\varepsilon}} + O(\varepsilon). \end{cases}$$

3.2 Comparaison Tykhonov-O'Malley

Le théorème de Tykhonov donne une approximation de la solution du système par un développement O(1) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) &= \bar{x}(t) \Longleftrightarrow x_\varepsilon(t) = \bar{x}(t) + O(1) \text{ sur } [t_0, t_1] \\ \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t) &= \bar{y}(t) \Longleftrightarrow y_\varepsilon(t) = \bar{y}(t) + O(1) \text{ sur } [t_b, t_1] \end{aligned}$$

cette dernière approximation n'est pas valable sur l'intervalle couche limite. O'Malley-Vasil'eva ont proposé un développement qui est valable même sur l'intervalle couche limite et dont le premier terme est l'approximation de Tykhonov mais avec un inconvenient des calculs qui peuvent être trop compliqués.

Chapitre 4

La Théorie Géométrique

La théorie géométrique des perturbations singulières est un outil utilisé dans l'analyse des problèmes avec une nette séparation des échelles de temps. La téhorie utilise les variétés invariantes en l'espace de phase afin de comprendre la structure globale ou pour construire des orbites avec des propriétés désirées. Pour les systèmes lents-rapides le fondateur de cette approche est N.Fenichel (1979) et depuis les méthodes ont évoluées et ont trouvée plusieurs applications. Les théorèmes de Fenichel sont un outil fondamental dans l'analyse, notre stratégie est de citer ces théorèmes et d'expliquer et de donner des applications, la théorie est illustrée par des exemples.

Références bibliographiques : N.Fénichel [1], G.Hek [3], C.K.R.T.Jones [6], C.K.R.T.Jones [7], T.J.Kaper [8], F.Verhulst [15], K.Yadi [17]

4.1 Variétés stable et instable et variété centrale

L'orsqu'on étudie la dynamique d'un système différentiel, on commence par déterminer les objets invariants, qui peuvent être de natures diverses (points fixes, variétés, orbites périodiques), puis on étudie l'évolution du système au voisinage de ces objets invariants.

4.1.1 Orbites et ensembles invariants

Définition 4.1.1. *Un ensemble $S \subset X$ est dit invariant par le flot ϕ_t sur X si pour tout $x \in S$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\phi_t(x) \in S$. Si S vérifie la propriété que $\phi_t(x) \in S$ pour tout*

$x \in S$ et tout $t > 0$ alors on dit que S est positivement invariant.

Si S est invariant et $x \in S$ alors l'orbite $\gamma(x)$ est incluse dans S par conséquent un ensemble invariant est une réunion d'orbites.

Définition 4.1.2. *Un ensemble S est dit invariant sous le champ de vecteurs*

$$\dot{x} = f(x)$$

si toute solution x de l'équation différentielle ayant une condition initiale x_0 appartenant à S vérifie $x(t) \in S$ pour tout t réel. On dira que l'ensemble est positivement invariant si cette propriété est vérifié pour tout $t > 0$.

Les ensembles invariants les plus simples sont ceux des points d'équilibres, viennent ensuite les orbites périodiques. La notion de restriction d'invariance appelée invariance locale est cruciale pour la théorie de Fenichel.

Définition 4.1.3. *Un ensemble ouvert S est dit localement invariant par rapport a un ensemble ouvert U pour le système $\dot{x} = f(x)$ si $S \subset U$ tel qu'aucune trajectoire ne quitte S sans quitter U.*

4.1.2 Linéarisation

La première étape d'étude qualitative d'un système consiste en l'étude du système au voisinage de ses points d'équilibre . Considérons un système $\dot{x} = f(x)$ sur X et soit a un point d'équilibre. Le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{avec } A = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a))$$

s'appelle le linéarisé du système au point a. Etant donné un système linéarisé $\dot{x} = Ax$ dans $\mathbb{R}^n$, on considère les valeurs propres λ de la matrice A, qui sont complexes et non distinctes en général, et les sous espaces vectoriels caractéristiques associés E_λ. On défini :

$$\textit{le sous espace stable} \quad E^s = \oplus_{Re\lambda<0} E_\lambda$$

$$\textit{le sous espace instable} \quad E^u = \oplus_{Re\lambda>0} E_\lambda$$

$$\textit{le sous espace centre} \quad E^c = \oplus_{Re\lambda=0} E_\lambda$$

On a $E^s \oplus E^u \oplus E^c = \mathbb{R}^n$ et que

$$w \in E^s \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} e^{tA} w = 0, \quad w \in E^u \Longrightarrow \lim_{t \to -\infty} e^{tA} w = 0$$

par conséquent toutes les solutions issues de conditions initiales dans le sous espace stable sont attirées vers l'origine tandis que celles issues de conditions initiales dans le sous espace instable sont repoussée par l'origine, en particulier lorsque $E^s = \mathbb{R}^n$, toutes les solutions tendent vers l'origine qui est appelée puit, et lorsque $E^u = \mathbb{R}^n$, toutes les solutions proviennent de l'origine qui est appelée source. Si ni E^s, ni E^u n'est réduit à $\{0\}$ alors $E^c = \{0\}$ l'origine est appelée point selle.

4.1.3 Théorème de Hartman-Grobman

Dans ce qui suit on compare dans un voisinage d'un point d'équilibre a, la solution du système $\dot{x} = f(x)$ et celle de son linéarisé.

Définition 4.1.4. *Deux flots ϕ_t , ψ_t sont dit topologiquement équivalents dans des voisinages de points d'équilibres, s'il existe un homéomorphisme h qui envoie le point d'équilibre du premier flot en un point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est à dire $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$.*

Théorème 4.1.1. *(Hartman-Grobman) considérons un système $\dot{x} = f(x)$ de flot ϕ_t, si a est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage V de a sur lequel le flot ϕ_t est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en a.*

Les ensembles invariants qu'on va étudier maintenant ont des propriétés spéciales ; ce sont des variétés.

4.1.4 Variétés invariantes

Le concept des variétés invariantes joue un rôle important dans la stabilité et la structure des système dynamiques et spécialement pour les systèmes lent- rapide et les systèmes singulièrement perturbés . La variété stable W^s d'un point d'équilibre a du système $\dot{x} = f(x)$ est une variété différentiable qui est tangente au sous espace stable E^s du linéarisé en a et telle que toutes les solutions issues de W^s tendent vers a quand $t \to +\infty$. de même la variété instable W^u d'un point d'équilibre a est une variété différentiable qui est tangente au sous espace instable E^u du linéarisé en a et telle que toutes les solutions issues de W^u tendent vers a quand $t \to -\infty$; enfin la variété centrale W^c est une variété différentiable qui est tangente au sous espace centre E^c. Le comportement asymptotique des orbites contenues dans la variété centrale n'est pas déterminé par le linéarisé du système en a. Il y'a unicité des variétés stable W^s et instable W^u, par contre il y'a une infinité de variétés centrales.

Théorème 4.1.2. *(Théorème de la variété centrale) Considèrons un système admettant* 0 *comme point d'équilibre. Soient* E^s, E^u, E^c *les sous espaces stable, instable et central du système linéarisé du système en* 0. *Alors le système admet des variétés invariantes* W^s, W^u*et* W^c *passant par le point* 0 *et tangentes respectivement à* E^s, E^u, E^c*.les solutions issues de* W^s*(resp* W^u*) tendent exponentiellement vers* 0 *quand* $t \to +\infty$ *(resp* $t \to -\infty$*). Le comportement des solutions dans la variété* W^c *est déterminé par les termes linéaires.*

Définition 4.1.5. *Une variété est dite localement invariante pour le système* $\dot{x} = f(x)$ *si l'ensemble des points qui la définit est localement invariant.*

Autre que la propriété d'invariance, l'hyperbolicité joue un rôle important.

Définition 4.1.6. *Le point d'équilibre a du système* $\dot{x} = f(x)$ *est dit hyperbolique, lorsque toutes les valeurs propres de la matrice* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ *sont de partie réelle non nulle.*

Exemple 4.1.1. *un exemple familier de point d'équilibre hyperbolique est l'équilibre du classique pendule non linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\sin q \end{cases} \tag{4.1}$$

on a la matrice jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos q \end{pmatrix}$ *au point d'équilibre* $(-\pi, 0)$. *les valeurs propres de la matrice jacobienne en* $(-\pi, 0)$ *sont 1 et(-1), d'où le point d'équilibre est hyperbolique "les valeurs propres sont de parties réelles non nulles".*

Exemple 4.1.2. *Un deuxième exemple le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{z} = \varepsilon z \end{cases} \tag{4.2}$$

cet exemple est un cas particulier de (1.1), la matrice jacobienne est une matrice diagonale $J\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ *elle a pour valeurs propres* (-1) *et* $(-\varepsilon)$ *donc l'origine est un point d'équilibre hyperbolique pour* $\varepsilon \neq 0$. *Pour* $\varepsilon = 0$ *la deuxième valeur propre est nulle.*

Linéaris2 au point d'équilibre a, le système $\dot{x} = f(x)$ a un espace stable et instable dont les dimensions correspondent au nombre de valeurs propres à partie réelle strictement négative et partie réelle strictement positive respectivement, la théorie des systèmes dynamiques affirme que ces sous espaces ont des analogues non linéaires appelé variété local stable et instable du point d'équilibre hyperbolique.

soit v un voisinage de a, la variété stable au point d'équilibre hyperbolique a est définie comme suit :

$$W^s(a) = \{x/x(t) \in v, \forall t \geq 0 \text{ et } x(t) \to a \text{ exponentiellement pour } t \to +\infty\}$$

de la même façon on définit la variété locale instable d'un point d'équilibre a :

$$W^u(a) = \{x/x(t) \in v, \forall t \leq 0 \text{ et } x(t) \to a \text{ exponentiellement pour } t \to -\infty\}$$

Ces variétés sont tangentes aux sous espace stable et instable respectivement en a.

4.2 Théorie de Fenichel pour les systèmes singulièrement perturbés

Le théorème de Fénichel affirme que sous certaines conditions les variétés invariantes normalement hyperboliques pour le système (4.3) persistent pour $0 < \varepsilon \ll 1$.La démonstration de cette persistance se fait en démontrant que la variété stable et instable de $\mathcal{M}_0$ persiste, elle aussi comme des variétés invariantes par le système perturbé. En d'autres termes, on démontre que la structure hyperbolique locale persiste et la variété lente est obtenue comme variété localement invariante.

4.2.1 Les concepts fondamentaux pour les systèmes lents rapides

On considère le système :

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(x,y,\varepsilon) \\ \dot{y} = g(x,y,\varepsilon) \end{cases} \tag{4.3}$$

$x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. f, g fonctions continues de classe C^∞dans $U \times I$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ et I un intervalle ouvert qui contient 0. La théorie qu'on va étudier reste vraie pour f, g fonctions de classe C^∞. En posant $\tau = \varepsilon t$ on obtient un système qui est équivalent à (4.3) pour $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{cases} x' = f(x,y,\varepsilon) \\ y' = \varepsilon g(x,y,\varepsilon) \end{cases} \tag{4.4}$$

pour $\varepsilon = 0$ le système (4.3) prend la forme :

$$\begin{cases} 0 = f(x,y,0) \\ \dot{y} = g(x,y,0) \end{cases} \tag{4.5}$$

appelée système réduit rapide. En posant $\varepsilon = 0$ le système (4.4) devient de la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x,y,0) \\ y' = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

appelée système réduit lent. En étudiant ce système on est amené à l'ensemble d'équation $f(x,y,0) = 0$. Localement cet ensemble est de dimension n. On considère les problèmes pour lesquels (4.6) a une variété C^∞ différentiable $\mathcal{M}_0$:

$$\mathcal{M}_0 \subset \{(x,y)/f(x,y,0) = 0\}$$

on suppose que : $x = \phi(y)$ est l'equation de la variété $\mathcal{M}_0$.

Définition 4.2.1. *La variété $\mathcal{M}_0$ est est dite normalement hyperbolique si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(y),y,0)$ n'a que des valeurs propres a parties réelles non nulles.*

Exemple 4.2.1. *Le système (4.2) écrit en considérant la variable temps lente est sous la forme :*

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -x \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

on a $f(x,z,0) = 0 \iff x = 0$. Donc l'équation de $\mathcal{M}_0$ est $x = 0$. On conclut que $\mathcal{M}_0$ est l'axe des z. Pour le système général (1.1) avec $\varepsilon = 0$, les conditions initiales sur $\mathcal{M}_0$ évoluent sur l'echelle de temps lente par rapport au système réduit lent (4.6).

Exemple 4.2.2. *Pour le système (4.2) l'axe des z est une variété invariante normalement hyperbolique.*

Exemple 4.2.3. *On considère le système de la forme :*

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = -(1 + \alpha \sin z)\sin q \\ z' = \varepsilon \end{cases} \tag{4.7}$$

pour $0 < \alpha < 1$. *Pour* $z \in [0, 2\pi]$ *les points* $(\pi, 0)$ *et* $(-\pi, 0)$ *sont des point d'équilibre hyperbolique du système réduit rapide :*

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = -(1 + \alpha \sin z)\sin q \end{cases}$$

où z *est un paramètre fixé. Dans l'espace des phases* (q, p, z) *on a :* $\mathcal{M}_0^+ = \bigcup\limits_{z\in[0,2\pi]} (\pi, 0, z)$ *et* $\mathcal{M}_0^- = \bigcup\limits_{z\in[0,2\pi]} (-\pi, 0, z)$ *sont des variétés invariantes normalement hyperboliques par (4.7) et pour* $\varepsilon = 0$.

4.2.2 Théorèmes de Fénichel

On considère un système lent-rapide de la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon). \end{cases} \tag{4.7}$$

La méthode des développements asymptotiques en puissances de ε pour l'étude de systèmes autonomes tel que (4.8), donne en première approximation la solution $\bar{y}(t)$ du problème réduit comme défini par Tykhonov sur la variété lente $\mathcal{M}$; on associe à un tel dévelopement une variété $\mathcal{M}_\epsilon$ dans l'espace des phases, la solution obtenue par le développement asymptotique appartient à cette variété si elle existe. On considère le système (4.8) où f et g sont des fonctions de classe C^∞, $(x, y) \in X \times Y$, tel que $X \times Y$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+m}$ et ε appartient a un intervalle qui contient 0. Il serait plus confortable de considérer l'echelle de temps $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$, le système devient de la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x, z, \varepsilon) \\ y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases}.$$

On suppose que l'ensemble :

$$\mathcal{M}_0 \subset \{(x, y)/f(x, y, 0) = 0\}$$

et suppose que : $x = \phi(y)$ est l'équation de la variété $\mathcal{M}_0$ qui est une variété de dimention m. Cette variété représente une première approximation de la variété invariante $\mathcal{M}_\varepsilon$ de dimention m et si cette dernière existe, Fenichel affirme que si $\mathcal{M}_0$ est une variété compacte normalement hyperbolique, il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon^*$, il existe une variété (localement) invariante $\mathcal{M}_\varepsilon$ tel que $\mathcal{M}_\varepsilon \to \mathcal{M}_0$ quand $\varepsilon \to 0$. On dit que $\mathcal{M}_0$ persiste pour de petites valeurs de ε.

si $\mathcal{M}_0$ est une variété compacte normalement hyperbolique pour (3.3), on a le théorème suivant

Premier Théorème de Fenichel

Théorème 4.2.1. *Pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit, il existe une variété invariante $\mathcal{M}_\varepsilon$ qui se trouve dans un voisinage $O(\varepsilon)$ de $\mathcal{M}_0$. De plus il existe un difféomorphisme entre $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}\varepsilon$.*

Preuve

On pose $t = \varepsilon\tau$ nous obtenons le système

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \varepsilon) \\ y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon' = 0 \end{cases}$$

comme $f(\phi(y), y, 0) = 0$ alors $z_0 = (\phi(y), y, 0)$ est un équilibre de ce système.

la linéarisée du système en cet équilibre est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\ 0 & 0 & g(z_0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ sont de parties réelles non nulles telles que n_1 valeurs propres de partie réelle strictement négative et n_2 valeurs propres de partie réelle strictement positive avec $n_1 + n_2 = n$.

le système quand à lui possède $m+1$ valeurs propres réelles nulles. D'aprés le théorème de la variété centrale, il existe une variété centrale de dimension $m + 1$ tangente au sous espace propre nul. cette variété centrale contient tous les points d'équilibre z_0, avec y dans un compact. On coupe cette variété avec le plan invariant $\varepsilon = cte$ de dimension $m+n$, on obtient une variété invariante $\mathcal{M}_\varepsilon$.

$\mathcal{M}_\varepsilon$ sera appelée variété lente alors que $\mathcal{M}_0$ est la variété critique.

4.2.3 Approximation de la variété de Fenichel

Dans le cas où $\mathcal{M}_0$ est un graphe on peut montrer que $\mathcal{M}_\varepsilon$ est aussi un graphe

Pour $\mathcal{M}_\varepsilon$est le graphe de $x = p_\varepsilon(y)$. Pour que $\mathcal{M}_\varepsilon$ soit invariante elle doit vérifier

$$\dot{x} = \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y}(y)\dot{y} = \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y}(y)g(p_\varepsilon(y), y, \varepsilon)$$

et en mulipliant par ε, on trouve

$$\varepsilon\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y}(y)g(p_\varepsilon(y), y, \varepsilon) = f(p_\varepsilon(y), y, \varepsilon) \tag{4.8}$$

pour $\varepsilon = 0$, on obtient $p_0(y) = \phi(y)$ tel que $x = \phi(y)$ est l'equation de la variété critique $\mathcal{M}_0$. On peut obtenir une approximation de la variété lente à partir d'un développement en série comme suit

$$p_\varepsilon(y) = p_0(y) + \varepsilon p_1(y) + \varepsilon^2 p_2(y) + ... \tag{4.9}$$

en substituant ce développement dans l'équation (4.8) et en identifiant les coefficients des puissance de ε on retrouve les termes de (4.9).

pour $O(1)$: *comme* on l'avait montré $p_0(y) = \phi(y)$.

pour $O(\varepsilon)$: $\dfrac{d\phi}{dy}(y)g(\phi(y), y, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(y), y, 0)p_1(y) + \dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\phi(y), y, 0)$, puisque la matrice $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(y), y, 0)$ est inversible on déduit $p_1(y)$. On peut continuer pour trouver des termes d'ordres superieurs. L'équation

$$\dot{y} = g(p_\varepsilon(y), y, \varepsilon)$$

décrit le mouvement lent sur la variété lente. On l'appelle l'équation lente exacte.

Exemple 4.2.4. *On considère*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{z} = -\varepsilon z \end{cases} \tag{4.10}$$

La solution exacte de ce système avec la condition initiale $x(0), z(0)$ *est :*

$$\begin{cases} x(t) = x(0)e^{-t} \\ z(t) = z(0)e^{-\varepsilon t} \end{cases}$$

pour $\varepsilon \neq 0$ *le seul point d'équilibre est* $(0,0)$. *Pour* $\varepsilon = 0$ *le système réduit :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

l'axe des z *est un ensemble de points fixes. C'est une variété invariante. La composante rapide du champ de vecteurs (4.10),* $f(x,z,0) = -x$ *linéarisé en* $x = 0$ *a une seul valeur propre a partie réelle négative (-1), alors l'axe des* z *est une variété normalement hyperbolique pour le système (4.10) pour* $\varepsilon = 0$*, qu'on note* $\mathcal{M}_0$.

Puisque toutes les orbites approchent $\mathcal{M}_0$ *dans le temps futur (forward time) la variété stable de* $\mathcal{M}_0$ *est donc le plan* (x,z) *tout entier, on note cette variété stable* $W^S(\mathcal{M}_0)$. *Toutes les structures géométriques sont identifiées pour* $\varepsilon = 0$*, elles sont aussi présentes pour* $0 < \varepsilon \ll 1$*, mais avec des propriétés modifiées. pour* $\varepsilon \neq 0$*, l'axe des* z *est aussi une variété invariante, on la note maintenant* $\mathcal{M}_\varepsilon$. *Le flot sur* $\mathcal{M}_\varepsilon$ *est lent, gouverné par la composante lente (deuxième équation) du système :*

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx}{d\tau} = -x \\ \dfrac{dz}{d\tau} = -z \end{cases}$$

$\mathcal{M}_\varepsilon$ *n'est pas l'unique variété lente, le système possède une famille de variétés lente invariantes sur lesquelles la solution approche* C^∞ *tangentiellement l'origine et de l'ordre* $O(\varepsilon)$. *Dans cet exemple la variété non perturbée* $\mathcal{M}_0$ *coincide avec la variété perturbée* $\mathcal{M}_\varepsilon$*, ce n'est pas toujours vrai en général pour le système (4.3).*

Exemple 4.2.5. *On considère le système "cinétique des enzymes" :*

$$\begin{cases} \dot{x} = z - (z+k)x = f(x,z,\varepsilon) \\ \dot{z} = \varepsilon[-z + (z+k-\lambda)x] = g(x,z,\varepsilon) \end{cases} \tag{4.11}$$

où k *et* λ *sont positives. pour* $\varepsilon = 0$ *on a la variété invariante normalement hyperbolique*

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (x,z,\varepsilon)/\ x = \phi_0(z) = \frac{z}{z+k} \right\}$$

puisque $f\ (x,z,0)=0 \Longrightarrow x=\frac{z}{z+k}$. *Pour la variable temps* τ, *la dynamique sur* $\mathcal{M}_0$ *est gouvernée par l'équation :*

$$\dot{z}=-z+(z+k-\lambda)x \iff \dot{z}=\frac{-\lambda z}{z+k}.$$

On recherche maintenant l'équation des variétés invariantes $\mathcal{M}_\varepsilon$ *et des fonctions* $\phi(z,\varepsilon)$ *dont le graphe est localement une variété lente invariante. On développe cette fonction en puissance de* ε *comme suit :*

$$\phi(z,\varepsilon)=\phi_0(z,\varepsilon)+\varepsilon\phi_1(z,\varepsilon)+O(\varepsilon^2)$$

en remplaçant dans la première équation du système (4.11) ; on trouve

$$\frac{d}{dt}\phi(z,\varepsilon)=\frac{\partial\phi}{\partial z}(z,\varepsilon)\dot{z}=\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial z}(z,\varepsilon)g(\phi(z,\varepsilon),z,\varepsilon) \tag{4.12}$$

c'est cette équation qui détermine $\phi(z,\varepsilon)$, *en substituant le développement dans (4.12), on trouve*

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial z}(z)g(\phi_0(z),z,)=\frac{\partial f}{\partial x}(\phi_0(z),z,0)\phi_1(z)+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(\phi_0(z),z,0)$$

d'où en identifiant les coefficient des puissances de ε

$$\phi_1(z,\varepsilon)=\frac{\lambda kz}{(z+k)^4}$$

donc

$$\phi(z,\varepsilon)=\frac{z}{z+k}+\varepsilon\frac{\lambda kz}{(z+k)^4}+O(\varepsilon^2).$$

Exemple 4.2.6. *On considère le modèle classique proie-prédateur de Rosenzweig-MacArthur comme il a été présenté dans l'article de Rinaldi-Muratori (1992) sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{u}=u(1-u-\dfrac{av}{u+d}) \\ \dot{v}=\varepsilon v(\dfrac{au}{u+d}-1) \end{cases} \tag{4.13}$$

u *est le nombre de proies et* v *celui des prédateurs tel que* $u,v\geq 0$. *Le paramètre* ε *est le quotient entre le taux de mortalité des prédateurs et le taux de croissance des proies, les paramètres* a *et* d *représente l'impact des prédateurs sur les proies. Si la reproduction des proies est plus importante que celle des prédateurs, et que les prédateurs sont agréssives mais peu efficaces alors* ε *devient petit (Rinaldi-Muratori 1992). Si le paramètre* a *dans*

(4.13) est de l'ordre de ε alors l'influence des prédateurs sur les proies devient petite et le système devient de la forme :

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1-u) - \varepsilon \dfrac{\tilde{a}uv}{u+d} \\ \dot{v} = \varepsilon v(\dfrac{au}{u+d} - 1) \end{cases} \tag{4.14}$$

on pose

$$\begin{aligned} f(u,v,\varepsilon) &= u(1-u) - \varepsilon \frac{\tilde{a}uv}{u+d} \\ g(u,v,\varepsilon) &= v(\frac{au}{u+d} - 1) \end{aligned}$$

pour $\varepsilon = 0$ l'ensemble $\{(u,v)/f(u,v,0) = 0\}$ se compose de deux parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^1 &= \{(u,v)/u = 0, v \geq 0\} \\ \mathcal{M}_0^2 &= \{(u,v)/u = 1, v \geq 0\} \end{aligned}$$

ces variétés critiques sont normalement hyperboliques puisque :
$\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,0)\Big|_{\mathcal{M}_0^1} = 1$ *et* $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,0)\Big|_{\mathcal{M}_0^2} = -1$

toutes les conditions du théorème1 de Fenichel sont vérifiées donc pour $0 < \varepsilon \ll 1$ il existe des variétés lentes $\mathcal{M}_\varepsilon^1$, $\mathcal{M}_\varepsilon^2$ qui sont $O(\varepsilon)$ et difféomorphique à $\mathcal{M}_\varepsilon^2$, $\mathcal{M}_\varepsilon^2$ respectivement. On a $\mathcal{M}_\varepsilon^1 = \mathcal{M}_0^1$ puisque l'ensemble $\{(u,v)/u = 0, v \geq 0\}$ reste invariant pour $\varepsilon > 0$. En utilisant l'invariance de la variété perturbée $\mathcal{M}_\varepsilon^1$ on peut donner une approximation par un développement asymptotique comme suit :

Sous l'hypothèse que la variété perturbé $\mathcal{M}_\varepsilon^1$ peut être décrite comme graphe

$$\{(u,v)/u = p_\varepsilon(v), v \geq 0\}$$

tel que

$$p_\varepsilon(v) = p_0(v) + \varepsilon p_1(v) + \varepsilon^2 p_2(v) + \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4.15}$$

$$\frac{dp_\varepsilon}{dv}\dot{v} = p_\varepsilon(v)(1 - p_\varepsilon(v)) - \varepsilon \frac{\tilde{a}vp_\varepsilon(v)}{p_\varepsilon(v) + d}$$

en remplaçant $\dot{v}$ on déduit

$$\varepsilon \frac{dp_\varepsilon}{dv} v(\frac{ap_\varepsilon(v)}{p_\varepsilon(v) + d} - 1) = p_\varepsilon(v)(1 - p_\varepsilon(v)) - \varepsilon \frac{\tilde{a}vp_\varepsilon(v)}{p_\varepsilon(v) + d} \tag{4.16}$$

$O(1)$ *: on pose $\varepsilon = 0$ dans (4.16) cela implique $p_0(1 - p_0) = 1$*

$O(\varepsilon)$: par dérivation de (4.16) par rapport à ε puis on pose $\varepsilon = 0$ nous retrouvons le résultat :

$$-p_1p_0 - \frac{\tilde{a}vp_0}{p_0 + d} = 1$$

donc

$$p_1 = -\frac{\tilde{a}v}{p_0 + d}$$

$O(\varepsilon^2)$: par dérivation de (4.16) par rapport à ε^2 puis on pose $\varepsilon = 0$ on a :

$$\varepsilon\frac{dp_1}{dv}v(\frac{ap_0}{p_0 + d} - 1) = -p_1p_2 - p_1^2 - \frac{\tilde{a}vp_1}{p_0 + d} + \frac{\tilde{a}vp_1p_0}{(p_0 + d)^2}$$

d'où

$$p_2 = \frac{\tilde{a}(a - 1 - d)v}{(1 + d)^2} - \frac{\tilde{a}^2v^2}{(1 + d)^3}$$

finalement on obtient l'approximation suivante

$$p_\varepsilon(v) = 1 - \varepsilon\frac{\tilde{a}v}{p_0 + d} + \varepsilon^2(\frac{\tilde{a}(a - 1 - d)v}{(1 + d)^2} - \frac{\tilde{a}^2v^2}{(1 + d)^3}) + ...$$

Remarque 4.2.1. *La variété lente ne coïncide pas, en général avec la variété critique, mais elle reste à une distance de l'ordre de ε.*

4.2.4 Comparaison Tykhonov-Fenichel

Dans le théorème de Tykhonov on suppose la stabilité asymptotique de la variété approximative, dans cette construction asymptotique on suppose que les valeurs propres de la linéarisée $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ sont de partie réelle non négative, alors que dans la théorie géométrique de Fénichel on ne suppose que le fait que ces valeurs soit de parties réelles non nulles. En donnant une approximation de la variété lente par un développement asymptotique on peut voir que le modèle réduit donné par Tykhonov est

$$\dot{y} = g(\phi(y), y, 0)$$

alors que celui donné par Fénichel peut être d'ordre supérieur

$$\dot{y} = g(\phi(y) + \varepsilon p_1(y) + ..., y, 0)$$

Deuxième Théorème de Fenichel

Le premier théorème de Fenichel nous donne une image locale du système pour $\varepsilon \neq 0$. Il garantit l'éxistence d'une variété invariante et le comportement du système sur celle-ci mais une image plus globale serait de connaître le comportement au voisinage de cette variété. Cela se fait via les variétés stable et instable les objets du deuxième théorème de Fenichel.

La variété critique $\mathcal{M}_0$ étant hyperbolique, elle possède une variété stable $W^s(\mathcal{M}_0)$ et une variété instable $W^u(\mathcal{M}_0)$ correspondant respectivement aux valeurs propres à partie réelle strictement négative et strictement positive. Le second théorème de Fenichel quant à lui montre sous l'hypothèse que$\mathcal{M}_0$ soit normalement hyperbolique, pour tout ε assez petit l'existence de deux variétés invariantes $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$ et $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon)$. Ces variétés vérifient $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon) \to \ W^s(\mathcal{M}_0)$, $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon) \to W^u(\mathcal{M}_0)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Théorème 4.2.2. *Pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit, il existe des variétés invariantes stable $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon\ )$ et instable $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon\ )$ qui se trouvent dans un voisinage $O(\varepsilon)$ des variétés stable $W^s(\mathcal{M}_0\ )$ et instable $W^u(\mathcal{M}_0\ )$ et il existe un difféomorphisme entre $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon\ )$ et $W^s(\mathcal{M}_0\ )$ d'une part et entre $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon\ )$ et $W^u(\mathcal{M}_0\ )$ d'autre part.*

On note

$$\begin{aligned} W^s(\mathcal{M}_0\ ) &= \bigcup_{m_0\in\mathcal{M}_0} W^s(m_0\ ) \\ W^u(\mathcal{M}_0\ ) &= \bigcup_{m_0\in\mathcal{M}_0} W^u(m_0\ ) \end{aligned}$$

ce dernier théorème donne des renseignement trés précis sur le comportement du système en dehors de $\mathcal{M}_\varepsilon$

Exemple 4.2.7. *On considère le système suivant :*

$$\begin{aligned} x &= y \\ y &= x - x^2 + f_i(x, y, z, \varepsilon, \mu) \\ z &= \varepsilon g(x, y, z, \varepsilon, \mu) \end{aligned}$$

avec $\mu = (a, d)$ tel que $d > 0$ et

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, \varepsilon, \mu) &= y(\varepsilon + az) \\ f_2(x, y, z, \varepsilon, \mu) &= y(z^2 + \varepsilon z - a) \\ g(x, y, z, \varepsilon, \mu) &= 1 - d^2 z^2 \end{aligned}$$

On pose

$$F(x, y, z, \varepsilon, \mu) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^2 + f_i(x, y, z, \varepsilon, \mu) \end{pmatrix}$$

Pour $\varepsilon = 0$ les deux systèmes ont deux variérés critiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^0 &= \left\{(x, y, z)/x = y = 0, |z| \leq \frac{1}{d}\right\} \\ \mathcal{M}_0^1 &= \left\{(x, y, z)/x = 1, y = 0, |z| \leq \frac{1}{d}\right\}. \end{aligned}$$

On considère la variété $\mathcal{M}_0^0$ qui est compact normalement hyperbolique puisque la matrice Jacobienne

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X, z, 0, \mu)\Big|_{\mathcal{M}_0^0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & az \end{pmatrix}$$

admet deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{az - \sqrt{(az)^2 + 4}}{2} < 0 \text{ et } \lambda_2 = \frac{az + \sqrt{(az)^2 + 4}}{2} > 0.$$

D'aprés le premier théorème de Fenichel $\mathcal{M}_0^0$ persiste comme variété lente $\mathcal{M}_\varepsilon^0$ invariante sous le flot du système elle est dans un voisinage $O(\varepsilon)$ de $\mathcal{M}_0^0$. Comme la variété critique $\mathcal{M}_0^0$ admet des variétés stable et instable $W^s(\mathcal{M}_0^0)$ et $W^u(\mathcal{M}_0^0)$ qui d'aprés le deuxième théorème de Fenichel persistent comme des variétés perturbées $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon^0)$ et $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon^0)$ sont dans un voisinage $O(\varepsilon)$ de $W^s(\mathcal{M}_0^0)$ et $W^u(\mathcal{M}_0^0)$ respectivement.

Bibliographie

[1] N. Fenichel. Geometric Singular Perturbations Theory for Ordinary Differential Equations. J.Differ.Equ. 31,53-98 (1979).

[2] J.P. Françoise. *O*scillations en Biologie, Analyse Qualitative et Modèles, coll Mathématiques et Applications (Vol.46), Springer, 2005.

[3] G. Hek. *G*eometric Singular Perturbations Theory in biological practice. J. Math. Biol. 60 (2010), 347-386.

[4] F.C. Hoppensteadt. *P*roperties of solutions of ordinary differential equations with a small parameter, comm. Pure Appl. Math. 24(1971), 807-840.

[5] F.C. Hoppensteadt. *S*ingular Perturbations On infinite interval, Trans.Amer. Math.Soc. 123 (1966), 521-535.

[6] C.K.R.T. Jones. *(*1995) Geometric singular perturbation theory.In :Johnson R(ed) Dynamical systems, Montecatibi Terme, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1609. Springer, Berlin, pp 44-118.

[7] C.K.R.T Jones. *(*1997) A Geometric Approach to Systems with Multiple Time Scales. In Bulletin of JSIAM, Vol.7, No.4, 1997.

[8] T.J. Kaper. *A*n introduction to geometric methods and dynamical systems theory for singular perturbation problems, Proc. Symposia Appl. Math, AMS 56 (1999) pp.85-131.

[9] H.K. Khalil. . Nonlinear systems, Prentice Hall (1996)

[10] M. Lakrib *T*hèse de doctorat : "Stroboscopie et Moyennisation dans les Equations Différentielles Fonctionnelles à Retard", Université de Haute Alsace (2004).

[11] C. Lobry, T. Sari et S. Touhami. *O*n Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems, Elec. J.Differential Equat.Vol.1998, No.19 (1998), 1-22.

[12] R.O'Malley Jr. *I*ntroduction to singular perturbations, Academic Press,NewYork,1974.

[13] R.O'Malley Jr . Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Applied Mathématical Sciences 89, Springer-Verlag(1991).

[14] A.N. Tythonov. . Systems of differential equations containing asmall parameter multiplying the derivative, Mat.Sb. 31(1952) pp. 575-585.

[15] F. Verhulst. *N*onlinear Differential Equations and Dynamic Systems, p.340, Springer-Verlag, New York (2000).

[16] F. Verhulst. *M*ethods and Applications of singular perturbation, Bondary Layers and Multiple Timescale Dynamics, p.340, Springer-Verlag, Berlin (2005).

[17] K. Yadi. *T*hèse de doctorat : "Perturbations Singulières : Approximations, Stabilité Pratique et Applications à des Modèles de compétition",Université de Haute-Alsace de Mulhouse(2008).