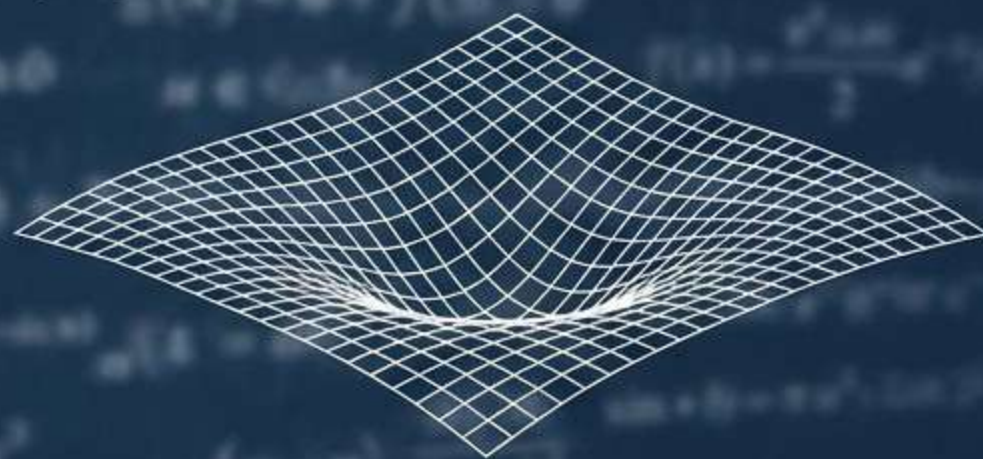
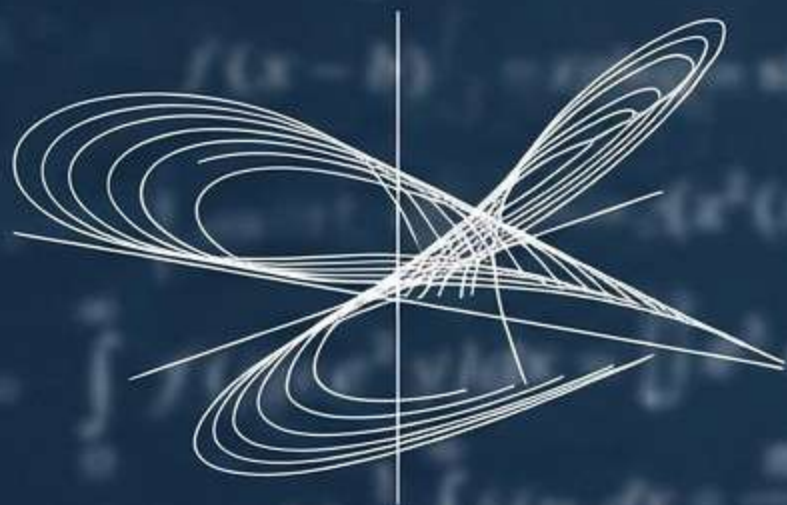


Courbes et Surfaces, Exercices Corrigés et Rappel de Cours

Par Medjadj Imene



Année 2023/2024
USTO-MB



Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques



"COURBES ET SURFACES"

RAPPELS DE COURS ET EXERCICES CORRIGÉS

USTO-MB

2023/2024

Table des matières

1	Courbes paramétrées	7
1.1	Introduction	7
1.2	Généralités	7
1.3	Étude locale d'une courbe paramétrée	10
1.3.1	La tangente à une courbe (C) :	10
1.3.2	Position de la courbe par rapport à la tangente, nature des points stationnaires(singuliers) :	11
1.4	Points multiples	12
1.5	Branche infinies	12
1.6	Symétries et réduction du domaine d'étude	14
1.7	Plan d'étude et le Tracé d'une courbe paramétrée	14
1.8	Exercices	16
1.9	Solutions	17
2	Courbes d'équations polaires	33
2.1	Introduction	33
2.2	Coordonnées Polaires :	33
2.3	Représentation d'une courbe en coordonnées polaires :	34
2.4	Étude local en un point d'une courbe $\rho = \rho(\theta)$	36
2.4.1	Étude en O=origine	36
2.4.2	Étude en un point distinct de l'origine	36
2.5	Branche infinies	37
2.6	Réduction de l'intervalle d'étude - Symétries et rotations	38
2.6.1	Périodicité et rotation	38
2.6.2	Symétries	39
2.7	Concavité par rapport à l'origine, inflexion	39
2.8	Point Multiples	40
2.9	Plan d'étude d'une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$	40
2.10	Longueur d'un arc de courbe paramétrée	40
2.11	Longueur des arcs	40
2.12	Exercices	42
2.13	Solutions	43
3	Courbes Gauches et Surfaces	55
3.1	Introduction	55
3.2	Courbes Gauches	55

3.2.1	Vecteur Tangent	56
3.3	Surfaces Paramétrées	57
3.3.1	Nappe paramétrée :	57
3.3.2	Courbes tracées sur une surface	57
3.3.3	Courbes Coordonnées :	58
3.3.4	Point régulier	58
3.3.5	Plan tangent	59
3.4	Surfaces d'équation $z = f(x, y)$	60
3.4.1	Points réguliers	61
3.4.2	Équation du plan tangent	61
3.4.3	Position de la surface par rapport à son plan tangent	61
3.5	Surfaces d'équation $F(x, y, z) = 0$	62
3.5.1	Point régulier	63
3.5.2	Plan Tangent	63
3.5.3	Intersection de deux Surfaces	64
3.6	Surfaces Usuelles	65
3.6.1	Le Cylindre	65
3.6.2	Le cône	67
3.6.3	Surface de Révolution	68
3.7	Exercices	70
3.8	Solutions	71

Introduction

Ce document intitulé "Courbes et surfaces, Rappel de Cours et Exercices Corrigés " recouvre une partie du programme de géométrie de la 2ème année universitaire.

Le lecteur trouvera des rappels de cours et à la fin de chaque chapitre des exercices corrigés dont la plupart ont été proposés dans le cadre de travaux dirigés ou ont fait l'objet de contrôle des connaissances.

Il est destiné principalement aux étudiants de la 2ème année licence en mathématiques.

Nous espérons que ce polycopié pourra répondre aux attentes des étudiants et qu'il les aidera à réussir. Le lecteur y trouvera des exercices variés avec leurs corrigés détaillés.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et reconnaissance aux deux spécialistes qui ont expertisé ce modeste ouvrage. Grâce à leurs commentaires nous avons pu améliorer la présentation du présent manuscrit.

Comme toute première version de tout ouvrage. Ce recueil peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, nous invitons le lecteur à nous faire part de ses remarques afin que l'on puisse améliorer la présentation et le contenu du présent manuscrit.

Chapter 1

Courbes paramétrées

On se placera toujours dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.1) Introduction

Une droite dans $\mathbb{R}^2$ est un objet qui peut être défini par un ensemble de points (x, y) qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On peut aussi la définir sous forme paramétrique à l'aide d'un point P et d'un vecteur $\vec{u}$ sous la forme $P + t\vec{u}$ où $t \in \mathbb{R}$. On peut aussi la définir comme un sous-espace affine de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.

Le fait de décrire une droite ou une autre courbe par un paramètre t qui évolue revient à considérer une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, d \in \{2, 3\}$. Quand le paramètre t parcourt, l'intervalle I , le point $\gamma(t)$ parcourt la courbe, d'un point de vue cinématique...
La courbe est dite plane si $d = 2$ et gauche si $d = 3$.

1.2) Généralités

Définition 1.2.1. On appelle courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ une application continue

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (x(t), y(t))$$

où I est intervalle de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{C} = \gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\}$ est appelé le support géométrique de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.
On dit que $\mathcal{C}$ est une courbe géométrique et que γ est la paramétrisation de $\mathcal{C}$.

Remarque 1.2.2. On remarque que la courbe paramétrée comporte plus d'informations que la courbe géométrique quand t parcourt l'intervalle I , le point $\gamma(t)$ parcourt $\mathcal{C}$.
Autrement dit, la courbe paramétrée donne non seulement le support géométrique, mais aussi la manière de le parcourir.

Une courbe paramétrée $\mathcal{C}$ est dite de classe C^k si γ est de classe C^k .

Une courbe est dite fermée pour $t \in [a, b]$ si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Une courbe est dite simple si et seulement si elle est injective.

Interprétation cinématique

D'un point de vue cinématique, une courbe paramétrée est un point en mouvement ou mobile, le paramètre t s'interprète comme le temps et le support de cette courbe porte le nom de trajectoire.

$\gamma'(t)$: représente la vitesse et $\gamma''(t)$ représente l'accélération.

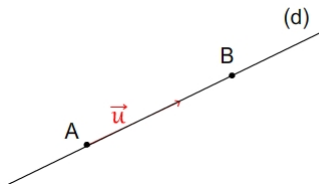
Définition 1.2.3. Soit $\mathcal{C}$ la courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in I \end{cases} \quad \text{Le domaine de définition de } \gamma \text{ est donné par : } D_\gamma = D_x \cap D_y.$$

Remarque 1.2.4. 1. On peut toujours obtenir une équation de la forme $F(x, y) = 0$ en éliminant le paramètre t entre les deux équations.

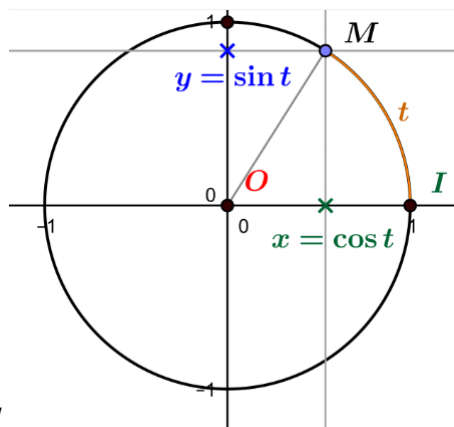
2. On peut parfois en éliminant le paramètre t entre les deux équations trouver une équation sous la forme $y = f(x)$.

3. La courbe (C) n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction d'où la notion de courbe paramétrée et non de fonction paramétrée.



Exemple 1.2.5. [La droite]

Dans le plan de $\mathbb{R}^2$ une droite est représentée par l'équation $(\delta) : ax + by + c = 0$. La représentation paramétrique d'une droite est donnée par : $\gamma(t) = \begin{cases} x = at + b, \dots (1) \\ y = a_0t + b_0, \dots (2) t \in \mathbb{R} \end{cases}$ où $P = (b, b_0), \vec{u} = (a, a_0)$ on élimine le t des équations (1), (2) on aura $y = \frac{a_0}{a}x - \frac{a_0b - ab_0}{a}$ i.e., sous la forme $F(x, y) = 0$.



Exemple 1.2.6. [Le cercle]

Dans le plan de $\mathbb{R}^2$ La représentation paramétrique d'un cercle de centre (a, b) de rayon R est donnée par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = a + R \cos(t) \\ y = b + R \sin(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

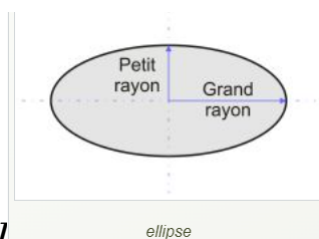
où $a, b \in \mathbb{R}$. La représentation paramétrique d'un cercle unité de centre $(0,0)$ de rayon R est

$$\text{donnée par : } \gamma(t) = \begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

On peut obtenir l'équation cartésienne suivante :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



Exemple 1.2.7. [L'ellipse]

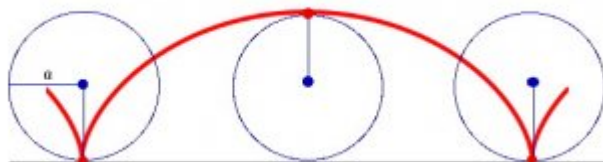
Dans le plan de $\mathbb{R}^2$ la représentation paramétrique d'une ellipse est donnée par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, son l'équation cartésienne est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exemple 1.2.8. [La cycloïde]



La cycloïde est la courbe que parcourt un point choisi de la roue d'une bicyclette ou d'un vélo, lorsque la bicyclette avance.

Dans le plan de $\mathbb{R}^2$ la représentation paramétrique de la cycloïde est donnée par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = r(t - \sin(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad \text{où } r \text{ est le rayon de la roue.}$$

Remarque 1.2.9. Si I est un intervalle la courbe est appelé un arc.

On dira que γ est continu sur I (respectivement dérivable ou de classe C^k), si $x(t), y(t)$ sont continues (respectivement dérivables ou de classe C^k) pour $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.2.10. La courbe C peut admettre plusieurs représentation paramétrique "RP".

Exemple 1.2.11. Le cercle trigonométrique peut être paramétré par :

- L'application $\gamma_1 : t \in \mathbb{R} \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$.
- $\gamma_2 : t \in [0, 2\pi] \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$.
- $\gamma_3 : t \in \mathbb{R} \rightarrow (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t)), \alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.12. [Changement de paramétrage] Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe (C^k) .

1. On appelle *changement de paramétrage de classe (C^k)* de γ toute application $g : J \rightarrow I$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{cases} g \text{ est de classe } C^k \text{ sur } J \\ g \text{ est bijective} \\ g^{-1} \text{ est de classe } C^k \text{ sur } J \end{cases}.$$

2. On appelle *paramétrage admissible (de classe (C^k))* de γ toute application $h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un changement de paramétrage (de classe C^k) g de γ tel que $h = \gamma \circ g$, on dit que γ et h sont C^k -équivalents.

Exemple 1.2.13. Soient

$$\begin{aligned} h :]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\rightarrow \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right) \end{aligned}$$

h, γ sont de classe C^1 .

Étant donné le changement de paramétrage

$$\begin{aligned} g :]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \tan\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} (\gamma \circ g)(t) &= \gamma(g(t)) = \left(\frac{1 - \tan^2(\frac{t}{2})}{1 + \tan^2(\frac{t}{2})}, \frac{2 \tan(\frac{t}{2})}{1 + \tan^2(\frac{t}{2})} \right) \\ &= \left(\frac{\cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})}, \frac{2 \sin(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})} \right) \\ &= (\cos(t), \sin(t)) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

Remarque 1.2.14. L'application $t \in \mathbb{R} \rightarrow \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$ paramètre le cercle privé du point $(-1, 0)$.

1.3) Étude locale d'une courbe paramétrée

1.3.1) La tangente à une courbe (C) :

Définition 1.3.1. Soit $M_0 = M(t_0) \in (C)$, on dit que la courbe (C) admet une tangente en M_0 si la droite (M_0M) a une limite quand $M \rightarrow M_0$, c'est à dire quand $t \rightarrow t_0$. Cette droite est alors la tangente à (C) en M_0 .

On parlera de demi-droite s'il existe une limite à droite et une autre à gauche.

Soit (C) la courbe définie par $RP \begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), t \in I \end{cases}$ avec $x(t), y(t)$ sont de classe C^1

Si $(\phi'(t_0), \psi'(t_0)) \neq (0, 0)$, alors le vecteur $(\phi'(t_0), \psi'(t_0))$ est le vecteur directeur de la tangente à la courbe (C) en $M(t_0)$.

La représentation de la tangente est donnée par : $(RP_T) : \begin{cases} x = \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0), \\ y = \psi(t_0) + \psi'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$

Définition 1.3.2. Soit $\begin{matrix} \gamma : t \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow M(t) = \gamma(t) \end{matrix}$ un arc paramétrée de classe C^1 .

On dit que $M(t)$ est un point régulier de C si $\overrightarrow{\gamma'(t)} \neq \vec{0}$, si γ est de classe C^2 , on dit que $M(t)$ est un birégulier de C si $(\overrightarrow{\gamma'(t)}, \overrightarrow{\gamma''(t)})$ est libre.

Définition 1.3.3. Soit $\begin{matrix} \gamma : t \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow M(t) = \gamma(t) \end{matrix}$ un arc paramétrée de classe C^1 (respectivement de classe C^2) est régulier (respectivement birégulier) si $M(t)$ est régulier (respectivement birégulier) pour tout $t \in I$.

Théorème 1.3.4. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 , sa trajectoire (C) admet une tangente en tout point régulier $\gamma(t)$ dirigé par le vecteur $\overrightarrow{\gamma'(t)}$.

Démonstration. Comme γ est de classe C^1 , on a :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\epsilon(t),$$

Avec $\gamma(t_0) \neq 0$ car $\gamma(t_0)$ est un point régulier,

$$\overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t_0)} = \gamma(t_0) - \gamma(t) = (t - t_0)\overrightarrow{\gamma'(t)} + (t - t_0)\epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = (0, 0),$$

d'où le résultat. □

Définition 1.3.5. Soit (C) la courbe définie par $\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x'(t_0), y'(t_0)) = (x''(t_0), y''(t_0)) = \dots = (x^{(p-1)}(t_0), y^{(p-1)}(t_0)) = (0, 0)$, et $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)$. La tangente à (C) en $M(t_0)$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ et qui a comme vecteur directeur $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$.

1.3.2) Position de la courbe par rapport à la tangente, nature des points stationnaires(singuliers) :

On note :

p comme le plus petit entier avec $p \geq 1$ tel que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)$

q comme le plus petit entier avec $q > p$ tel que la famille $\{(x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0)), (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))\}$ soit libre.

1. P est pair et q impair :

La courbe (C) traverse la tangente en $M(t_0)$. C'est un point de rebroussement de première espèce.

2. P est pair et q pair :

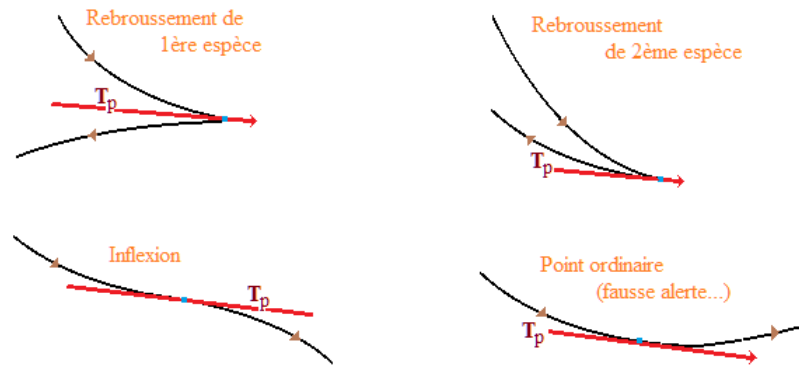
La courbe (C) ne traverse pas la tangente en $M(t_0)$. C'est un point de rebroussement de deuxième espèce.

3. P est impair et q impair :

La courbe (C) traverse la tangente en $M(t_0)$. C'est un point d'inflexion.

4. P est impair et q pair :

La courbe (C) touche traverse la tangente en $M(t_0)$. C'est un point ordinaire (allure normale).

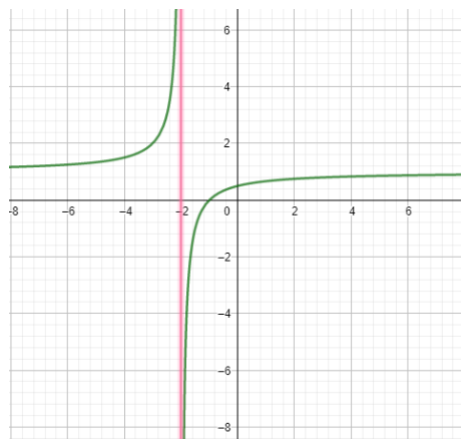


1.4) Points multiples

Définition 1.4.1. s'il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$, on dit que $M(t_1)$ est un point multiple.

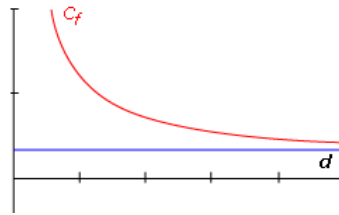
1.5) Branche infinies

La courbe (C) présente une branche infinie pour $t \rightarrow t_0$ (t_0 fini ou pas) si au moins une de ses coordonnées $x(t), y(t)$ de M tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0 .

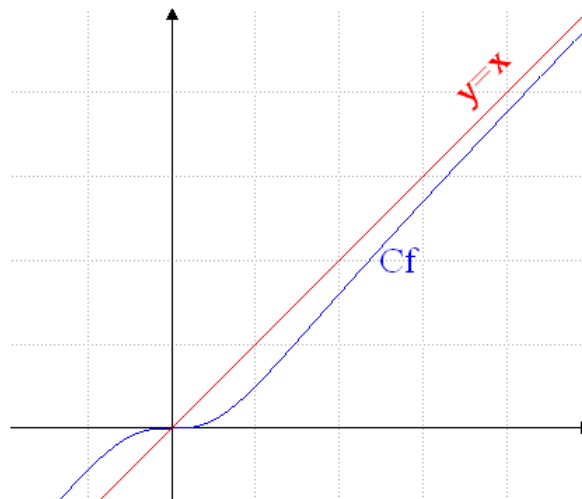


1. Asymptote verticale :

$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty, (C)$ admet la droite $x = a$ comme asymptote verticale.

2. **Asymptote horizontale :**

$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b \in \mathbb{R}, (C)$ admet la droite $y = b$ comme asymptote horizontale.

3. **Asymptote obliques :**

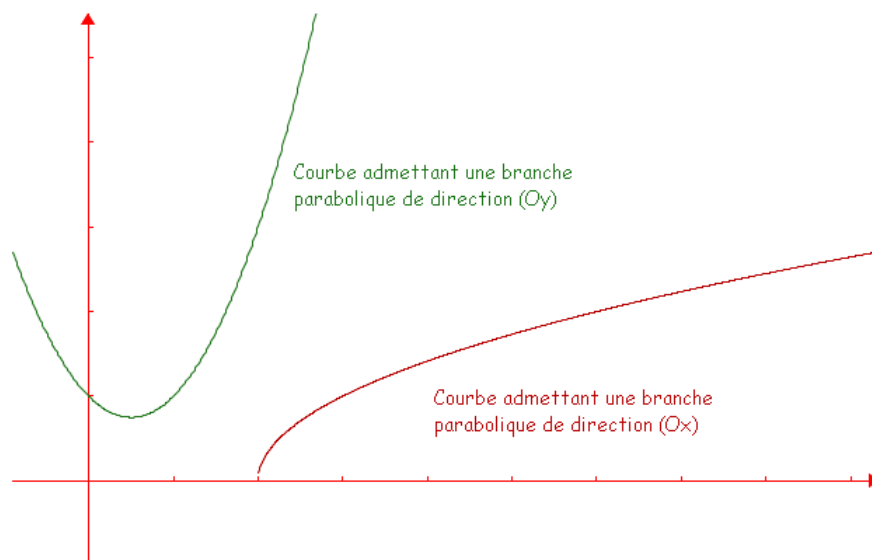
$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty.$

i) La droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique si :

$$m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \in \mathbb{R}, h = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - mx(t)) \in \mathbb{R}.$$

ii) $m = \pm\infty$, alors (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) .

iii) $m = 0$, alors (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) .



iiii) $m = a, h = \pm\infty$, alors C admet une branche parabolique de direction asymptotique (ax) .

1.6) Symétries et réduction du domaine d'étude

Soit (C) une courbe de représentation paramétrée $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$, Soit $\psi : I \rightarrow I$ un changement de paramétrage de I' un sous intervalle de I sachant que $I = I' \cup \psi(I')$ et que $I' \cap \psi(I')$ soit vide soit un singleton. En pratique ψ, I' sont sous la forme :

- $\psi :]-a, a[\rightarrow]-a, a[$, $I' = [0, a[$
 $t \rightarrow -t$
- $\psi : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $I' = [a, \frac{a+b}{2}]$
 $t \rightarrow a + b - t$
- $\psi :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $I' =]0, 1]$
 $t \rightarrow \frac{1}{t}$
- $\psi :]-\infty, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$, $I' = [-1, 1]$
 $t \rightarrow \frac{1}{t}$,

- 1 Si $\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t), \\ y(\psi(t)) = y(t), \end{cases}$, (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (yy').
- 2 Si $\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t), \\ y(\psi(t)) = -y(t), \end{cases}$, (C) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses (xx').
- 3 Si $\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t), \\ y(\psi(t)) = -y(t), \end{cases}$, (C) est symétrique par rapport à l'origine O .
- 4 Si $\begin{cases} x(\psi(t)) = y(t), \\ y(\psi(t)) = x(t), \end{cases}$, (C) est symétrique par rapport à la première bissectrice $y = x$.
- 5 Si $\begin{cases} x(\psi(t)) = \alpha + x(t), \\ y(\psi(t)) = \beta + y(t), \end{cases}$, (C) admet une translation de vecteur $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$.

1.7) Plan d'étude et le Tracé d'une courbe paramétrée

1. Domaine de définition de la courbe. Recherche du plus petit D_f grâce aux symétries, périodicités.
2. Vecteur dérivé $(x'(t), y'(t))$ déterminer les points réguliers, l'équation de la tangente :
 - a) $x'(t) = 0, y'(t) \neq 0$ tangente verticale.
 - b) $x'(t) \neq 0, y'(t) = 0$ tangente horizontale.
 - c) $x'(t) \neq 0, y'(t) \neq 0$ point régulier.
3. Tableau de variation conjointes.
4. Étude des points singuliers.
5. Étude des branches infinies.
6. Construction de la courbe : On doit placer les deux axes, les asymptotes, tangentes ..., Puis tracer l'arc suivant les indications suivantes :
 - i Si x croît ↗ et y croît ↗ on va de la gauche vers la droite du bas vers le haut.
 - ii Si x croît ↗ et y décroît ↘ on va de la gauche vers la droite du haut vers le bas.
 - iii Si x décroît ↘ et y croît ↗ on va de la droite vers la gauche du bas vers le haut.

iii Si x décroît $\searrow$ et y décroît $\searrow$ on va de la droite vers la gauche du haut vers le bas.

7. Points multiples, s'il y a lieu.

1.8) Exercices

Exercice 01 : Déterminer le domaine d'étude le plus simple des courbes paramétrées suivantes :

1. $\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(3t))$.
2. (Cycloïde): $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$.
3. (Tractrice): $\gamma(t) = (t - th(t), \frac{1}{ch(t)})$.
4. $\gamma(t) = (t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t})$.
5. $\gamma(t) = (\frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2}{1-t})$.
6. $\gamma(t) = (t + \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t} + t^2)$.

Exercice 02 : Étudier les points singuliers des courbes paramétrées suivantes :

1. (Cycloïde): $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$.
2. $\gamma(t) = (t^4 - t^3 - t^2, t^4 + t^3 + t^2)$.
3. $\gamma(t) = (-t^3 + t^4, t^3)$.
4. $\gamma(t) = (t^3, t^3 + t^5)$.

Exercice 03 : Trouver les points multiples des courbes suivantes :

1. $\gamma(t) = (t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2})$.
2. (Courbe de Lissajous) : $\gamma(t) = (\sin(2t), \cos(3t))$.

Exercice 04 : Étudier les branches infinies de la courbe :

1. $\gamma(t) = (t + \frac{1}{t}, t + \frac{1}{2t^2})$.
2. $\gamma(t) = (\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1})$.

Exercice 05 : Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

1. (Tractrice): $\gamma(t) = (t - th(t), \frac{1}{ch(t)})$.
2. (Folium de Descartes) : $\gamma(t) = (\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1})$.
3. (Lemniscate de Bernoulli) : $\gamma(t) = (\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4})$.
4. (Astroïde) : $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$.
5. $\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(t) - \cos^4(t))$.

Exercice 06 : Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

1. (La courbe de Lissajous) : $\gamma(t) = (\sin(2t), \cos(3t))$.
2. $\gamma(t) = (\sin(t)\cos^2(t), \cos(t)\sin^2(t))$.
3. $\gamma(t) = (\frac{1}{\sin(2t)}, \cos(3t))$.

1.9) Solutions

Exercice 01 : Réduisons le domaine des courbes suivantes :

1. $\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(3t))$,

Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$, γ est de classe C^∞ , car x, y le sont aussi.

On remarque que $M(t + 2\pi) = M(t)$ puisque les fonctions sont 2π -périodiques. On peut clairement réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π on prend $I = [-\pi, \pi]$ ou bien $[0, \pi]$.

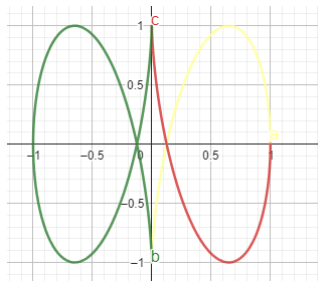
Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \pi]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

$\begin{cases} x(\pi - t) = x(t), \\ y(\pi - t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Ox) .

Le domaine réduit est $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Le tracé en rouge représente la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.



2. (Cycloïde): $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$,

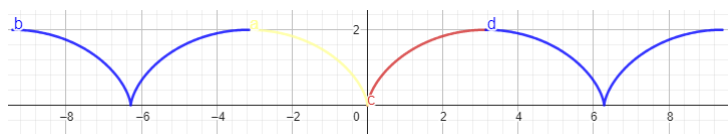
Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$, γ est de classe C^∞ , car x, y le sont aussi.

On remarque que $M(t + 2\pi) = M(t) + \vec{U}$ ainsi on peut clairement réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π on prend $I = [-\pi, \pi]$ ou bien $[0, \pi]$. Puis on complète le tracé par des translations de vecteurs $(2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \pi]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

Le tracé rouge représente la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.



3. (Tractrice): $\gamma(t) = (t - th(t), \frac{1}{ch(t)})$.

Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$, γ est de classe C^∞ , car x, y le sont aussi.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, +\infty[$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

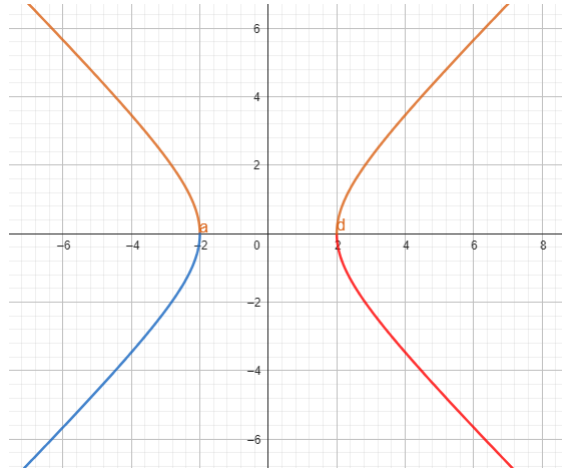
4. $\gamma(t) = (t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t})$. Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}^*$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $]0, +\infty[$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à l'origine.

On remarque aussi que : $\begin{cases} x(1/t) = x(t), \\ y(1/t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $]0, 1]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Ox) .

Le tracé rouge représente la courbe sur $]0, 1]$.



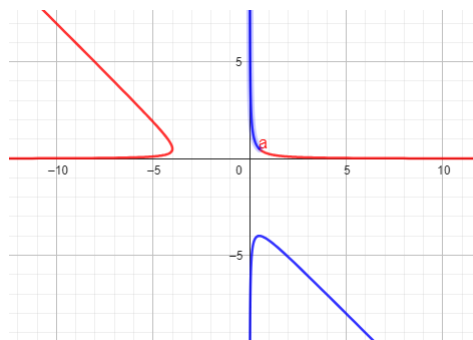
5. $\gamma(t) = (\frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2}{1-t})$.

Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(1/t) = y(t), \\ y(1/t) = x(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[-1, 0[\cup]0, 1[$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à première bissectrice $y = x$.

Le tracé rouge représente la courbe sur $[-1, 0[\cup]0, 1[$



6. $\gamma(t) = (t + \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t} + t^2)$ Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}^*$.

On remarque que Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(1/t) = y(t), \\ y(1/t) = x(t), \end{cases}$ ainsi on peut réduire le domaine à $] -1, 0[\cup]0, 1[$. puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à 1ère bissectrice ($y = x$).



Exercice 02 : Étudions les points singuliers des courbes paramétrées suivantes :

1. (Cycloïde): $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. $\begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos(t) = 0 \\ \sin(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Étudions la nature du point singulier $t = 0$.

1-ère Méthode :

$$\begin{cases} x''(0) = 0, & \text{ainsi } p = 2 \\ y''(0) = 1, \end{cases}, \begin{cases} x^{(3)}(0) = 1 \\ y^{(3)}(0) = 0 \end{cases} \quad \det(\gamma^{(2)}(0), \gamma^{(3)}(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

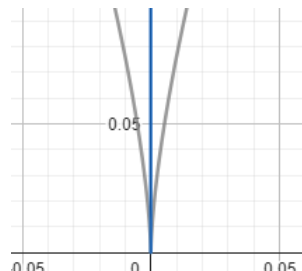
Les vecteurs sont libres $p = 2, q = 3$ au point $(0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

2-ème Méthode :

On utilise de D.L : $\begin{cases} x(t) = t - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\ y(t) = 1 - 1 + \frac{t^2}{4} + o(t^3), \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 0 \cdot \frac{t^2}{4} + 1 \cdot \frac{t^3}{6} + o(t^3) & \text{ainsi } p = 2 \\ y(t) = 1 \cdot \frac{t^2}{4} + 0 \cdot \frac{t^3}{6} + o(t^3), & \text{ainsi } q = 3 \end{cases}$$

$\det(\gamma^{(2)}(0), \gamma^{(3)}(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, les vecteurs sont libres $p = 2, q = 3$ au point $(0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

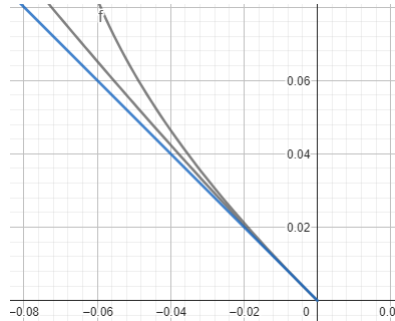


2. $\gamma(t) = (t^4 - t^3 - t^2, t^4 + t^3 + t^2)$. $\begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 - 3t^2 - 2t = 0 \\ 4t^3 + 3t^2 + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$

Étudions la nature du point singulier $t = 0$.

$$\begin{cases} x''(0) = -2, & \text{ainsi } p = 2 \\ y''(0) = 2, \end{cases}, \begin{cases} x^{(3)}(0) = -1 \\ y^{(3)}(0) = 1 \end{cases}, \begin{cases} x^{(4)}(0) = 1 \\ y^{(4)}(0) = 1 \end{cases}$$

$\det(\gamma^{(2)}(0), \gamma^{(4)}(0)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, les vecteurs sont libres $p = 2, q = 4$ au point $(0,0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce.



$$3. \gamma(t) = (-t^3 + t^4, t^3). \begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 - 3t^2 = 0 \\ 3t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

Étudions la nature du point singulier $t = 0$ en utilisant les D.L :

$$\begin{cases} x(t) = -6 \cdot \frac{t^3}{6} + 24 \cdot \frac{t^4}{24} + o(t^4) & \text{ainsi } p = 3 \\ y(t) = 6 \cdot \frac{t^3}{6} + 0 \cdot \frac{t^4}{24} + o(t^4), \end{cases}$$

$$\det(\gamma^{(3)}(0), \gamma^{(4)}(0)) = \begin{vmatrix} -6 & 24 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ les vecteurs sont libres } p = 3, q = 4 \text{ au point } (0,0)$$

est un point ordinaire, la tangente de direction $\vec{\gamma}^{(3)}(0)$ passe par le point $M(0) = (0,0)$

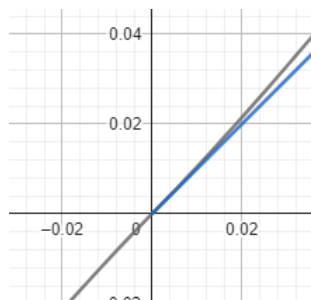


$$4. \gamma(t) = (t^3, t^3 + t^5). \begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t^2 = 0 \\ 5t^4 + 4t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

Étudions la nature du point singulier $t = 0$.

$$\begin{cases} x''(0) = 0, & \text{ainsi } p = 2 \\ y''(0) = 0, \end{cases}, \begin{cases} x^{(3)}(0) = 6 \\ y^{(3)}(0) = 6 \end{cases}, \begin{cases} x^{(5)}(0) = 0 \\ y^{(5)}(0) = 5! \end{cases}$$

$\det(\gamma^{(3)}(0), \gamma^{(5)}(0)) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 5! \end{vmatrix} \neq 0$, les vecteurs sont libres $p = 3, q = 5$ le point $M(0) = (0,0)$ est un point d'inflexion La courbe (C) traverse la tangente en $M(0)$.



Exercice 03 : Trouvons les points multiples des courbes suivantes :

1. $\gamma(t) = (t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2})$.

$D_\gamma = \mathbb{R}^*$

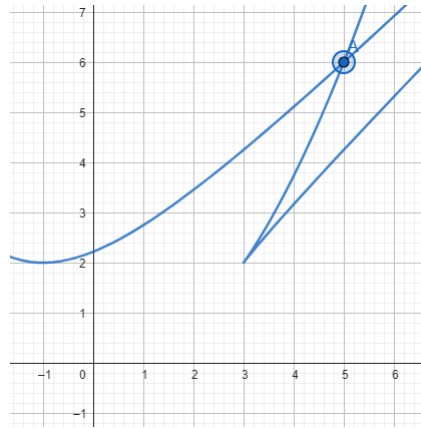
On cherche $t_1 \neq t_2$ tel que :

$$\begin{cases} t_1^2 + \frac{2}{t_1} = t_2^2 + \frac{2}{t_2} \\ t_1^2 + \frac{1}{t_1^2} = t_2^2 + \frac{1}{t_2^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 + t_2^2 = \frac{2t_2 - 2t_1}{t_1 t_2} \\ t_1^2 - t_2^2 = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_1^2 t_1^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{2}{t_1 t_2} \\ 1 = \frac{1}{t_1^2 t_2^2} \end{cases}$$

Ainsi $\begin{cases} t_1 t_2 = 1 & t_1 + t_2 = 2 \\ \vee \\ t_1 t_2 = -1 & t_1 + t_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 - 2t_1 + 1 = 0 \\ t_1^2 + 2t_1 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = 1 & \text{choix refusé} \\ t_1 = -1 + \sqrt{2}, t_2 = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

le point multiple est $M(t_1) = M(t_2) = (5, 6)$



2. $\gamma(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$. On cherche $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]/t_1 \neq t_2$ et

$$\begin{cases} \sin(2t_1) = \sin(2t_2) \\ \cos(3t_1) = \cos(3t_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 = 2t_2 + 2k_1\pi \vee 2t_1 = \pi - 2t_2 + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 3t_1 = 3t_2 + 2k_2\pi \vee 3t_1 = -3t_2 + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

cela revient à résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} t_1 - t_2 = k_1\pi \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2\pi}{3} \end{cases}, (S_2): \begin{cases} t_1 - t_2 = k_1\pi \\ t_1 + t_2 = \frac{2k_2\pi}{3} \end{cases}, (S_3): \begin{cases} t_1 - t_2 = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2\pi}{3} \end{cases},$$

$$(S_4): \begin{cases} t_1 - t_2 = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ t_1 + t_2 = \frac{2k_2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{sachant que l'écart entre } t_1, t_2 \text{ ne dépasse pas } 2\pi.$$

Les systèmes $(S_1), (S_4)$ n'ont pas de solutions.

Les solutions du système (S_2) sont :

$$(t_1, t_2) = (\frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}), (k_1, k_2) = (1, 1), (t_1, t_2) = (\frac{19\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}), (k_1, k_2) = (2, 1),$$

$$(t_1, t_2) = (\frac{17\pi}{12}, \frac{\pi}{12}), (k_1, k_2) = (1, 2), (t_1, t_2) = (\frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}), (k_1, k_2) = (2, 2).$$

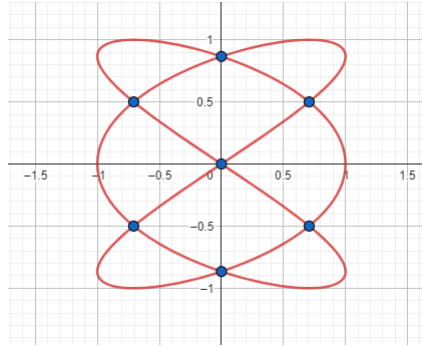
Les solutions du système (S_3) sont :

$$(t_1, t_2) = (\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}), (k_1, k_2) = (1, 2), (t_1, t_2) = (\frac{9\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}), (k_1, k_2) = (1, 3)$$

$$(t_1, t_2) = \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), (k_1, k_2) = (1, 4)$$

Les point multiples sont :

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0, 0).$$



Exercice 04 : Étudions les branches infinies de la courbe :

1. $\gamma(t) = \left(t + \frac{1}{t}, t + \frac{1}{2t^2}\right), D_\gamma = \mathbb{R}^*.$

a) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \pm\infty, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \pm\infty.$

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (y(t) - x(t)) = 0$ (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

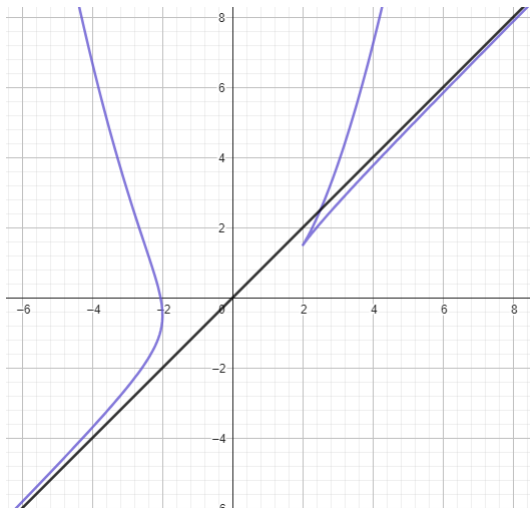
La position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote

$y(t) - x(t) > 0$ quand $t \rightarrow -\infty$ ainsi (C) est au dessus de la droite.

$y(t) - x(t) < 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ ainsi (C) est au dessous de la droite.

b) $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} x(t) = \pm\infty, \lim_{t \rightarrow 0^\pm} y(t) = \pm\infty.$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).



2. $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1}\right); D_\gamma = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$

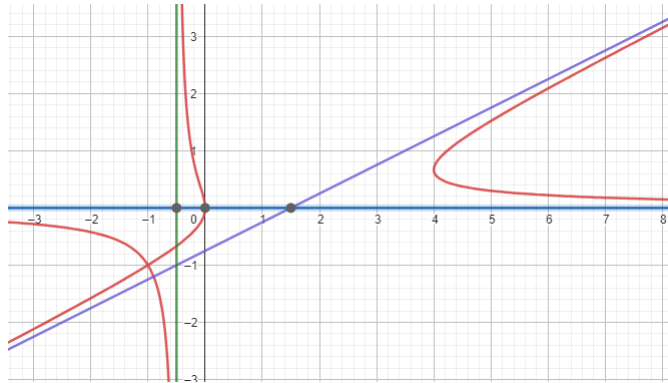
a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, (C) admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale.

b) $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$, (C) admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale.

c) $\lim_{t \rightarrow -1} x(t) = -1/2$, $\lim_{t \rightarrow -1^\pm} y(t) = \pm\infty$, (C) admet la droite $x = -1/2$ comme asymptote verticale.

d) $\lim_{t \rightarrow 1^\pm} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow 1^\pm} y(t) = \pm\infty$, (C) une asymptote oblique.

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1/2$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (y(t) - 1/2x(t)) = -3/4$ (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.



Exercice 05 : Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

1. (Tractrice): $\gamma(t) = (t - th(t), \frac{1}{ch(t)})$, (Ex01) :

a) Domaine d'étude est $I : [0, +\infty[$, (C) admet une symétrie par rapport à (Oy).

b) Calculons $\gamma'(t)$:

$(x'(t), y'(t)) = (th^2(t), -\frac{sh(t)}{ch^2(t)})$, $(x'(t), y'(t)) = (0, 0) \Rightarrow t = 0$ est un point singulier.

c) Le tableau de variations conjointes de x et y :

t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	+
$x(t)$	0	$+\infty$
$y(t)$	1	0
$y'(t)$	0	-

d) Les éventuelles tangentes et asymptotes, étudier la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Étude en $t = +\infty$:

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0^+$, ainsi (C) admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale, (C) est au dessus de l'asymptote.

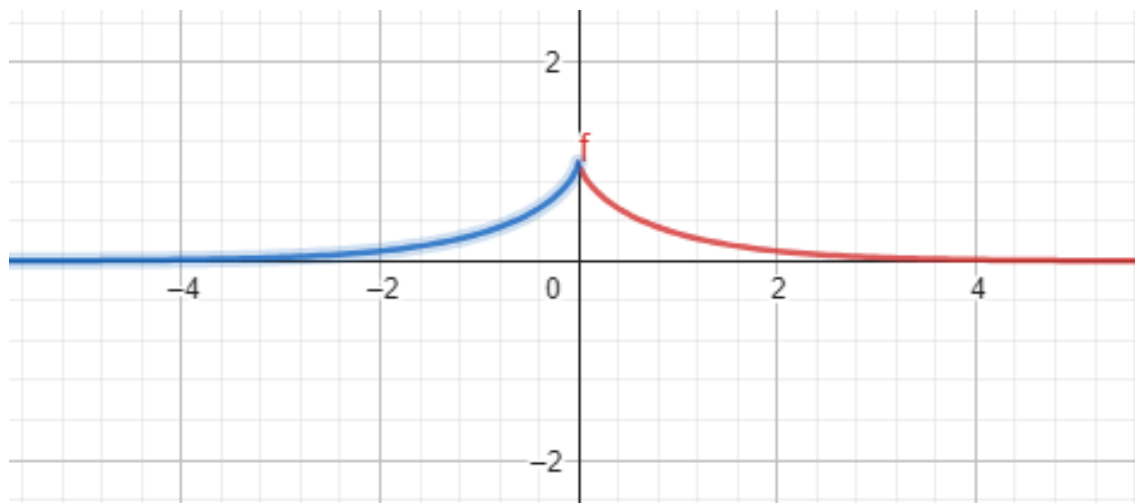
d) Étude au point $t = 0$:

On utilise de D.L : $\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{3} + o(t^3) \\ y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3), \end{cases}$ ainsi $p = 2, q = 3$

$\det(\gamma^{(2)}(0), \gamma^{(3)}(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, les vecteurs sont libres $p = 2, q = 3$ au point $(0, 0)$

est un point de rebroussement de première espèce.

f) Le tracé rouge représente la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.



2. (Folium de Descartes) : $\gamma(t) = (\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1})$, $D_\gamma = \mathbb{R} - \{-1\}$.

a) Réduction de domaine :

On remarque que $\begin{cases} x(1/t) = y(t), \\ y(1/t) = x(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $] -1, 1]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à la première bissectrice ($y = x$).

b) Calculons $\gamma'(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}, & x'(t) = 0 \Rightarrow t = 2^{-\frac{1}{3}} \\ y'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}, & y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \sqrt[3]{2} \end{cases} \quad \text{Ainsi la courbe est régulière.}$$

t	-1	0	$2^{-\frac{1}{3}}$	1
$x'(t)$	+	+	0	-
$x(t)$	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{4}$	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	$+\infty$	0	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{3}{2}$
$y'(t)$	-	0	+	+

c) Les éventuelles tangentes et asymptotes, étudier la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

En $t = 0$:

$x'(t) = 3, y'(t) = 0$, ainsi (C) admet une tangente horizontale en $M(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{\gamma}'(0)$

En $t = 2^{-\frac{1}{3}}$:

$x'(t) = 0, y'(t) \neq 0$, ainsi (C) admet une tangente verticale en $M(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{\gamma}'(0)$

Étude en $t = -1$:

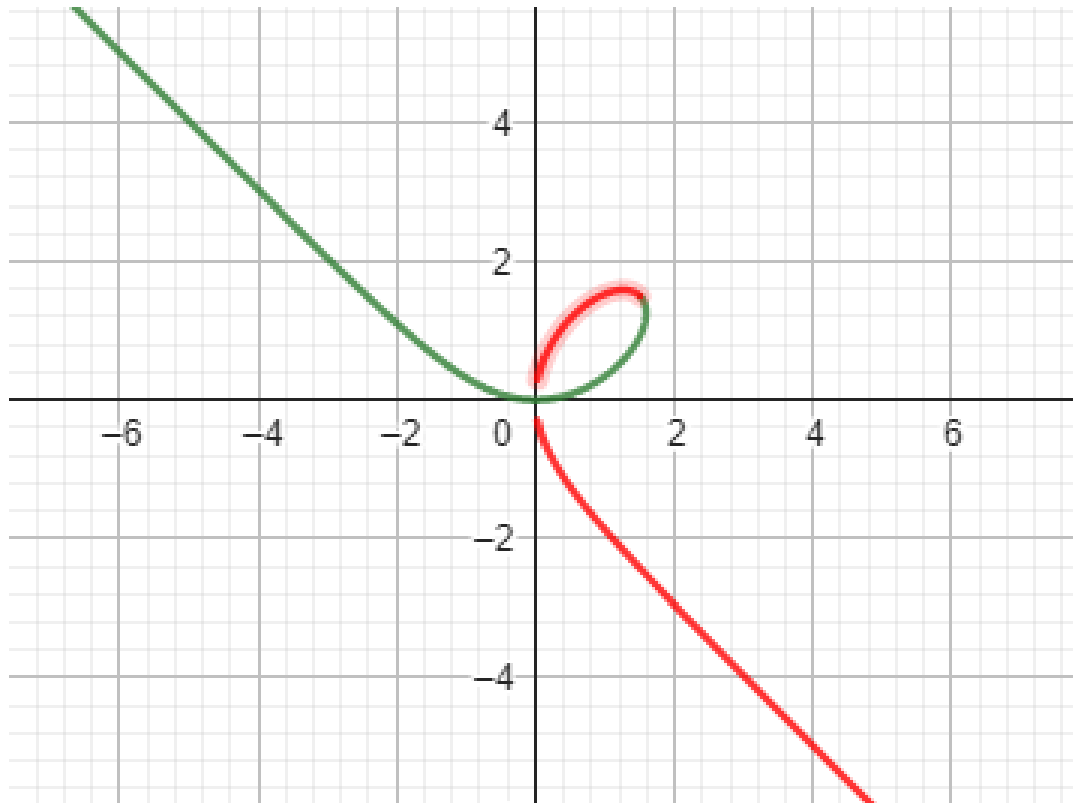
$$\lim_{t \rightarrow -1} x(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow -1} y(t) = +\infty,$$

$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1 = m, \lim_{t \rightarrow -1} (y(t) + x(t)) = -1 = h$ (C) admet une asymptote oblique d'équation cartésienne $y = -x - 1$.

Étudions la position de la courbe par rapport à l'asymptote :

$$y(t) + x(t) + 1 = \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} > 0 \text{ ainsi (C) est au dessus de la droite.}$$

d) Le tracé vert représente la courbe sur $] -1, 1]$.



3. (Lemniscate de Bernoulli) : $\gamma(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right), D_{\gamma} = \mathbb{R}$.

a) Réduction du domaine d'étude : $\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, +\infty[$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à l'origine.

On remarque aussi que $\begin{cases} x(1/t) = y(t), \\ y(1/t) = x(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, 1]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à la première bissectrice ($y = x$).

Le domaine d'étude est $I = [0, 1]$.

b) Calculons $\gamma'(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}, & x'(t) = 0 \Rightarrow t = 3^{-\frac{1}{4}} \\ y'(t) = \frac{3t^2-t^6}{(1+t^4)^2}, & y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \pm \sqrt[4]{3} \end{cases}$$

c) Le tableau de variations conjointes de x et y :

t	0	$3^{-\frac{1}{4}}$	1
$x'(t)$	+	0	-
$x(t)$	0	0.56	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	0	0.32	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0	+	+

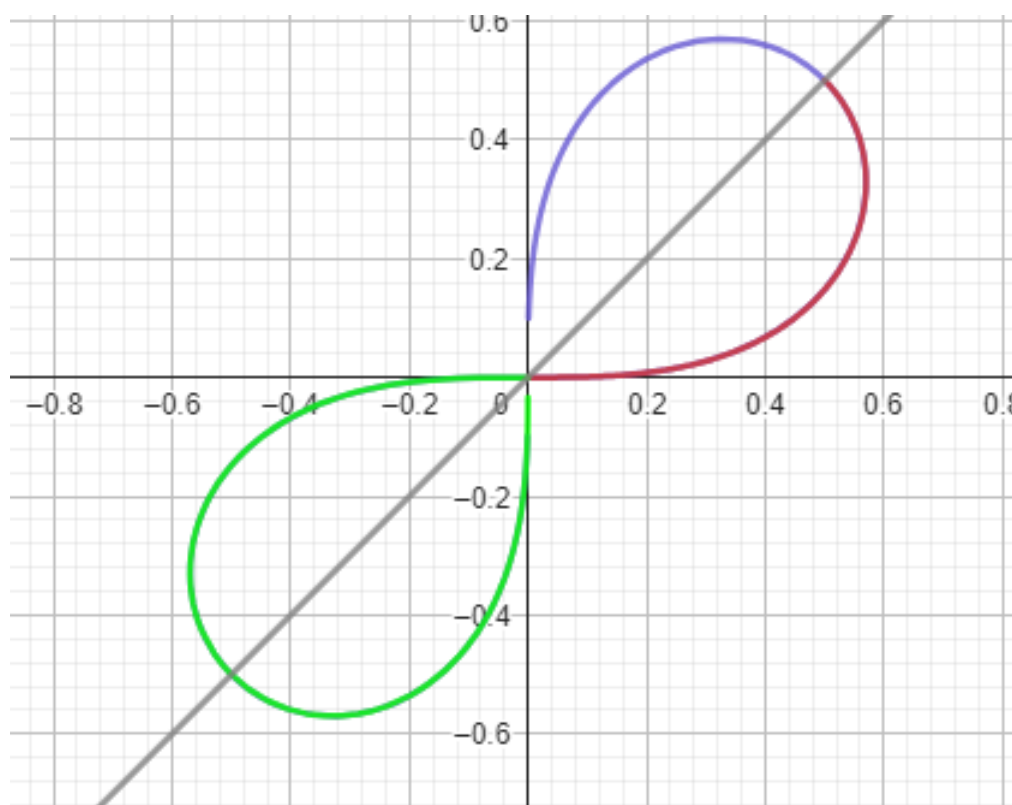
d) En $t = 0$:

$x'(t) = 3, y'(t) = 0$, ainsi (C) admet une tangente horizontale en $M(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{\gamma}'(0)$

En $t = 3^{-\frac{1}{4}}$:

$x'(t) = 0, y'(t) \neq 0$, ainsi (C) admet une tangente verticale en $M(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{\gamma}'(0)$

e) Le tracé rouge représente la courbe sur $[0, 1]$.



4. (Astroïde) : $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$. Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$, γ est de classe C^∞ , car x, y le sont aussi.

On remarque que $M(t + 2\pi) = M(t)$ puisque les fonctions sont 2π -périodiques. On peut clairement réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π on prend $I = [-\pi, \pi]$ ou bien $[0, \pi]$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = x(t), \\ y(-t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \pi]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Ox) .

$$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t), \\ y(\pi - t) = y(t), \end{cases}$$
 on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t), \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t), \end{cases}$$
 on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \frac{\pi}{4}]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à $(y = x)$.

Le domaine réduit est $I = [0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Calculons $\gamma'(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t), & x'(t) = 0 \Rightarrow t = 0, \vee t = \pi/2 \\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t), & y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0, \vee t = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow t = 0, t = \pi/2 \notin [0, \pi/4].$$

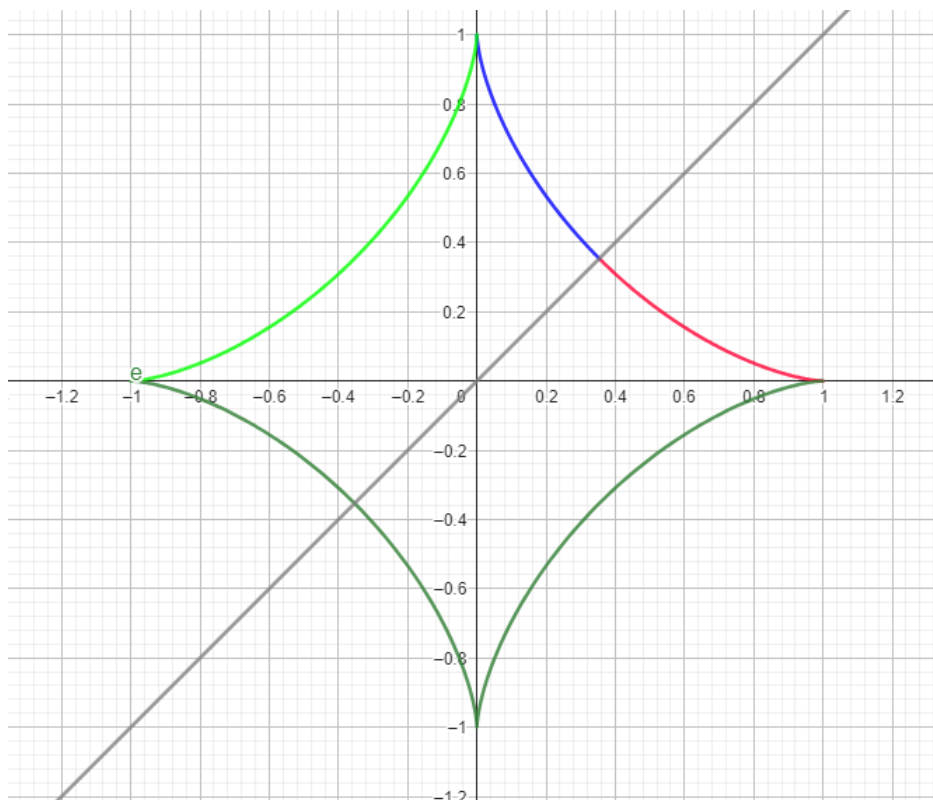
c) Le tableau de variations conjointes de x et y :

t	0	$\pi/4$
$x'(t)$	0	—
$x(t)$	1 $\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0 $\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	+

d) Nature du point singulier :

En $t = 0$:

$(x''(0), y''(0)) = (-3, 0), (x'''(0), y'''(0)) = (0, 6)$ ainsi $p = 2, q = 3$. Ainsi $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. e) Le tracé rouge représente la courbe sur $[0, \pi/4]$.



5. $\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(t) - \cos^4(t))$.

a) Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$.

On remarque que $M(t + 2\pi) = M(t)$ puisque les fonctions sont 2π -périodiques. On peut clairement réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π on prend $I = [-\pi, \pi]$ ou bien $[0, \pi]$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \pi]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

b) Le tableau de variations conjointes de x et y :

$$\gamma'(t) = (3\cos(t)\sin^2(t), -\sin(t) + 4\sin(t)\cos^3(t))$$

$$\gamma'(t) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \vee t = \pi/2, t = \pi, \\ t = 0 \vee t = \pi \end{cases} \quad \cos^4(t) = 1/4$$

t	0	α	$\pi/2$	π
$x'(t)$	+	-	-	-
$x(t)$	0	$\nearrow 1$	$\searrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$y(t)$	1	$\searrow \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow -1$	0
$y'(t)$	-	-	+	+

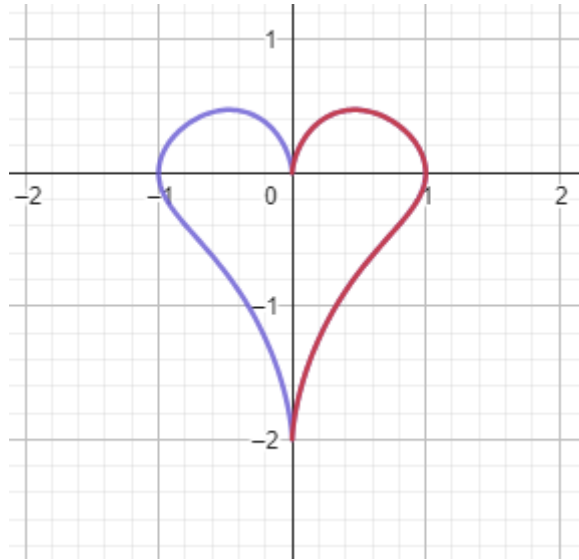
c) Nature du pont singulier :

1. Étude en $t = 0$:

Le D.L de $x(t), y(t)$ au $V(0)$ est donné par : $\begin{cases} x(t) = t^3 - \frac{t^5}{2} + o(t^5), \\ y = \frac{3t^2}{2} - \frac{13t^4}{8} + o(t^5), \end{cases}$ Ainsi : $x''(0) = 0, y''(0) = 3, x^{(3)}(0) = 6, y^{(3)}(0) = 0$, comme $(0, 3), (6, 0)$ forme une famille libre, alors $p = 2, q = 3, M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

2. Étude en $t = \pi$:

On remarque que : $\begin{cases} x''(\pi) = 0, & x^{(3)}(\pi) = 6 \\ y''(\pi) = -3, & y^{(3)}(\pi) = 0 \end{cases}$ de plus $(0, -3), (6, 0)$ forme une famille libre, alors $p = 2, q = 3, M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



Exercice 06 : Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

1. La courbe de Lissajous $\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \sin(2t), \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$

(a) Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$.

On remarque que $M(t + 2\pi) = M(t)$ puisque les fonctions sont 2π -périodiques. On peut clairement réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π on prend $I = [-\pi, \pi]$ ou bien $[0, \pi]$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \pi]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t), \\ y(\pi - t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à O origine.

Le domaine réduit est $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Le tableau de variations conjointes de x et y :

$$\gamma'(t) = (2\cos(2t), -3\sin(3t))$$

$$\gamma'(t) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} t = \pi/4, \\ t = 0 \vee t = \pi/3 \end{cases}$$

t	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$x'(t)$		+	-	-
$x(t)$	0	$\nearrow 1$	$\searrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow 0$
$y(t)$	1	$\searrow \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\searrow -1$	$\nearrow 0$
$y'(t)$		-	-	+

(c) Les éventuelles tangentes et asymptotes, étudier la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

$t = \pi/4$, (C) admet une tangente dirigée par $(x'(t), y'(t)) = (1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

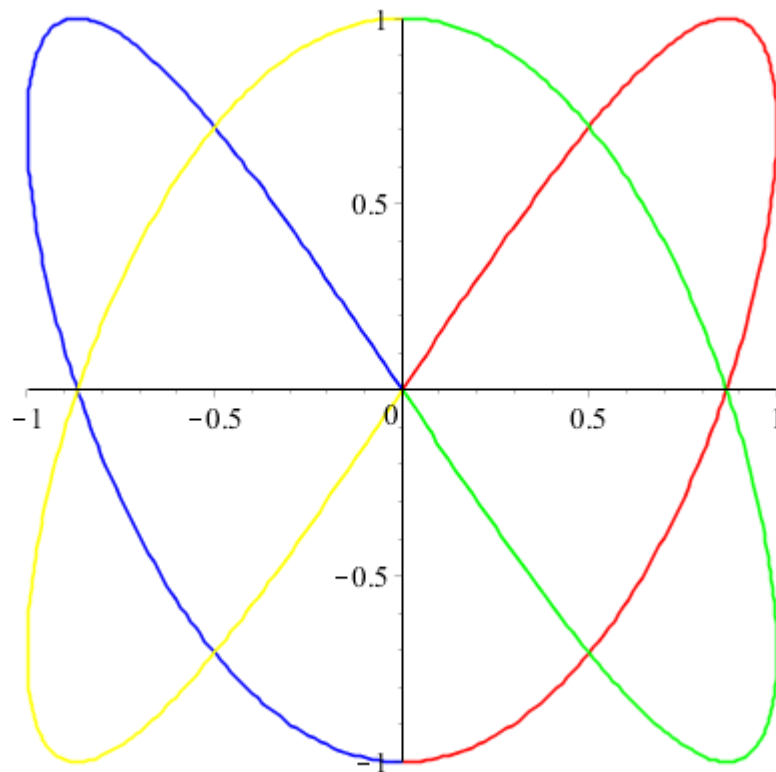
$t = \pi/3$, (C) admet une tangente dirigée par $(x'(t), y'(t)) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$.

$t = 0$, (C) admet une tangente dirigée par $(x'(t), y'(t)) = (2, 0)$.

Il y a pas de branches infinies.

$$y(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \vee t = \frac{\pi}{2}, x(t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = \frac{\pi}{2}.$$

(d) Le tracé la courbe (C) :



Le tracé vert représente la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Le tracé jaune représente la symétrie par rapport à (yy') .

Le reste c'est la symétrie de l'ensemble (vert et jaune) par rapport à O origine .

2. Domaine d'étude : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$, γ est de classe C^∞ , car x, y le sont aussi.

On remarque que $M(t + 2\pi) = M(t)$ puisque les fonctions sont 2π -périodiques.

On peut clairement réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π on prend $I = [-\pi, \pi]$ ou bien $[0, \pi]$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \pi]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

$\begin{cases} x(\pi - t) = x(t), \\ y(\pi - t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Ox) .

$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t), \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \frac{\pi}{4}]$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à $(y = x)$.

Le domaine réduit est $I = [0, \frac{\pi}{4}]$.

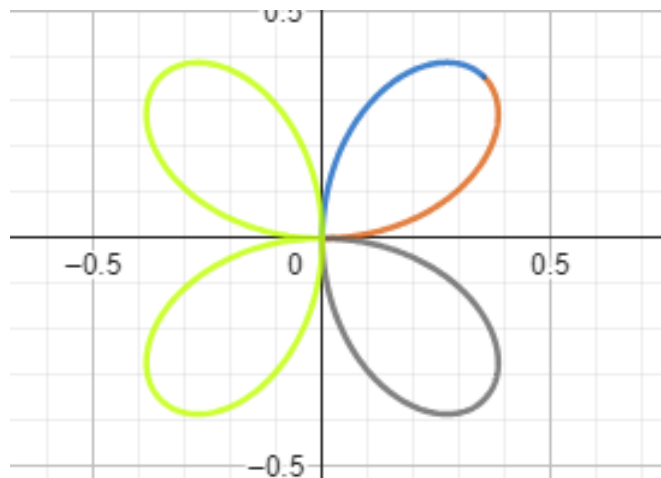
b) Calculons $\gamma'(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = \cos^3(t) - 2\sin^2(t)\cos(t), & x'(t) = 0 \Rightarrow t = \pi/2, \vee t_1 = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ y'(t) = 2\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t), & y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0, \vee t = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases} . \text{ Il n'y a pas de singularités.}$$

c) Le tableau de variations conjointes de x et y :

t	0	t_1	$\pi/4$
$x'(t)$	+	0	-
$x(t)$	0 $\longrightarrow$	$\gamma(t_1)$ $\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0 $\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	
$y'(t)$	0	+	

e) Le tracé rouge représente la courbe sur $[0, \pi/4]$.



3. 1. Domaine définition : $D = D_x \cap D_y = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Domaine d'étude : on remarque que $M(t + 2\pi) = M(t)$.

On peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π on prend $I = [-\pi, \pi]$ ou bien $[0, \pi]$.

Recherche de symétries :

$\begin{cases} x(-t) = -x(t), \\ y(-t) = y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \pi] \cap D_\gamma$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à (Oy) .

$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t), \\ y(\pi - t) = -y(t), \end{cases}$ on peut ainsi restreindre le domaine à $[0, \frac{\pi}{2}] \cap D_\gamma$ puis on complète le tracé en effectuant une symétrie par rapport à O .

Le domaine réduit est $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$3. \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{-2\cos(2t)}{\sin^2(2t)}, -3\sin(t) \right)$$

on remarque que $\begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \pi/4 \\ t = 0 \vee t = \pi/3 \end{cases}$ il n'y a pas de singularité.

Le tableau de variations conjointes de x et y :

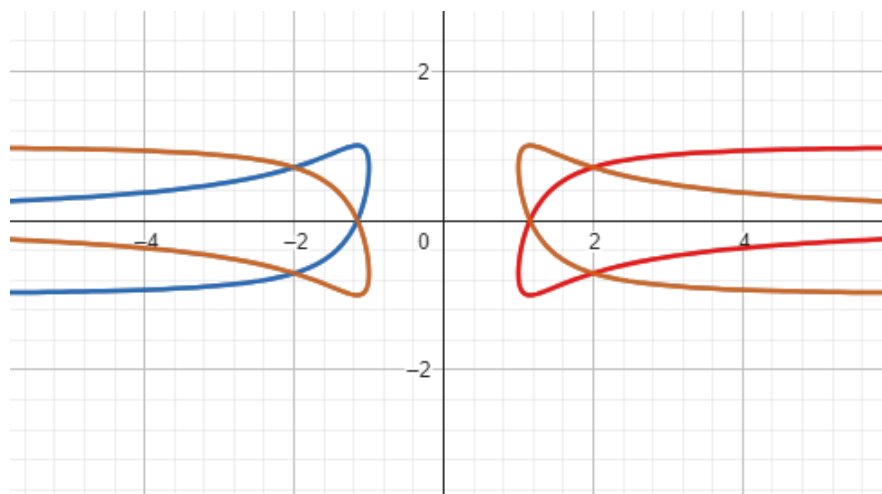
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	-	0	+	+
$x(t)$	$+\infty$	1	1.15	$+\infty$
$y(t)$	1	-0.7	-1	0
$y'(t)$	-	-	0	+

4. En $t = \pi/4$, (C) admet une tangente dirigée par $(x'(0), y'(0)) = (1, -0.7)$

En $t = \pi/3$, (C) admet une tangente dirigée par $(x'(t), y'(t)) = (1.15, -1)$

En $t = 0^+$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 1$, (C) admet une tangente horizontale d'équation $y = 1$.

En $t = \pi/2^-$, $\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} y(t) = 0$, (C) admet une tangente horizontale d'équation $y = 0$.



Chapter 2

Courbes d'équations polaires

Dans ce chapitre, on considère le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

2.1) Introduction

Certaines courbes planes comme le cercle et les spirales sont décrites par un paramètre angulaire, ces courbes planes sont définies par une équation appelée équation polaire, à la différence des coordonnées cartésiennes un point M du plan est définie suivant un rayon ρ et un angle θ . Nous allons dans ce chapitre étudier et tracer les courbes d'équations polaires.

2.2) Coordonnées Polaires :

Tout point M du plan peut être repéré par un système de coordonnées polaires : le rayon polaire ρ , l'angle polaire θ .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos(\theta) = \frac{x}{\rho}, \sin(\theta) = \frac{y}{\rho}, \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0.$$

On dit qu'un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, est un système de coordonnées polaires de $M(x, y)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta), \\ y = \rho \sin(\theta). \end{cases} \quad \text{On note } M[\rho, \theta].$$

Remarque 2.2.1. 1. Le ρ peut être négatif.

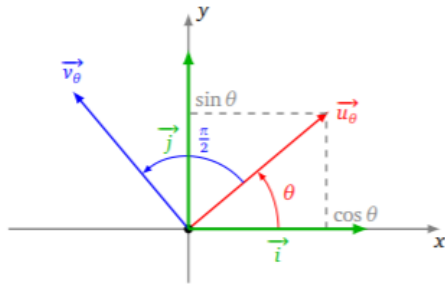
2. Tout point M de $\mathbb{R}_{\{(0,0)\}}^2$, admet comme système de coordonnées polaires (SCP) les $(\rho, \theta), (-\rho, \theta + \pi)$ où $\theta + 2k\pi$ est l'angle polaire de M et $|\rho| = OM$.

Définition 2.2.2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la base orthonormée $(\vec{U}(\theta), \vec{V}(\theta))$ avec

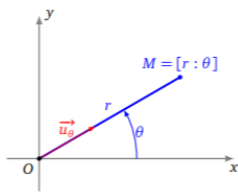
$$\vec{U}(\theta) = \vec{U}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

et

$$\vec{V}(\theta) = \vec{V}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} = \vec{U}_{\theta + \frac{\pi}{2}}.$$



On dit que $[\rho, \theta]$ est un couple de coordonnées polaires de M si et seulement si $\vec{OM} = \rho \vec{U}_\theta$



2.3) Représentation d'une courbe en coordonnées polaires :

La courbe C définie en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta), \theta \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos(\theta), & \theta \in I \\ y = f(\theta) \sin(\theta). \end{cases}$$

On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ au moins de classe C^1 , sur I , $OM(\theta) = |\rho(\theta)|$.

Exemple 2.3.1. 1. La droite :

a. L'équation polaire d'une droite (Δ) passant par O origine est :

$$\theta = \alpha[\pi], \rho \in \mathbb{R}.$$

Où α est l'angle polaire de Δ .

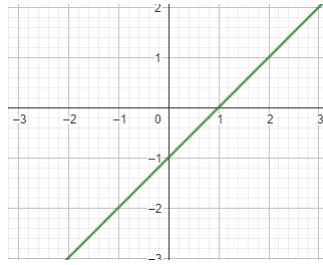
b. L'équation polaire d'une droite d'équation cartésienne est :

$$ax + by + c = 0, (a, b) \neq (0, 0), c \neq 0,$$

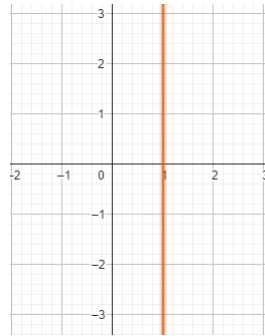
ne passant pas par l'origine est :

$$\rho = \frac{1}{-\frac{a}{c} \cos(\theta) - \frac{b}{c} \sin(\theta)}.$$

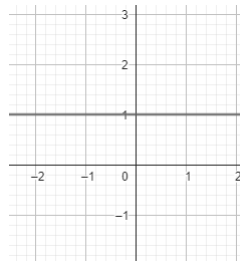
Exemple 2.3.2. La droite polaire $\rho = \frac{1}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}$, représente la droite d'équation cartésienne $y = x - 1$.



La droite polaire $\rho = \frac{1}{\cos(\theta)}$, représente la droite d'équation cartésienne $x = 1$.



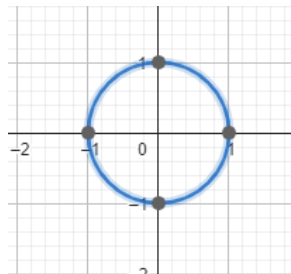
La droite polaire $\rho = \frac{1}{\sin(\theta)}$, représente la droite d'équation cartésienne $y = 1$.



2. Le Cercle :

a. Le cercle de rayon $R > 0$ de centre O , admet l'équation polaire

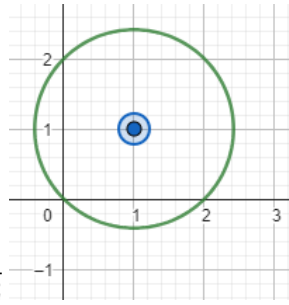
$$\theta = R.$$



b. Le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ a pour équation polaire

$$\theta = 2(a \cos(\theta) + b \sin(\theta))$$

Exemple 2.3.3. Le cercle d'équation polaire : $\rho = 2 \cos(\theta) + 2 \sin(\theta)$. représente le cercle de



centre $(1, 1)$ de rayon $\sqrt{2}$

2.4) Étude local en un point d'une courbe $\rho = \rho(\theta)$

Soit C une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ où $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k , $k \geq 1$.

2.4.1) Étude en O =origine

Supposons qu'il existe $\theta_0 \in I$ telle que $\rho(\theta_0) = 0$ et que ρ soit continue et monotone au voisinage en θ_0 , le vecteur $\vec{U}(\theta)$ qui dirige (OM) admet pour limite $\vec{U}(\alpha)$, en d'autre terme $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) = 0$, donc (C) admet comme tangente en O , la droite passant par O et d'angle polaire θ_0 .

2.4.2) Étude en un point distinct de l'origine

On a : $\vec{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{U}(\theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, d'où si ρ , est de classe C^1 alors :

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{U}(\theta) + \rho(\theta)\vec{V}(\theta).$$

Proposition 2.4.1. 1. Tout point de (C) différent de l'origine est régulier.

2. Si $M(\theta) \neq O$, la tangente est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$.

3. L'angle θ' compris entre la tangente à la courbe en $M(\theta)$ et la droite $\vec{U}_\theta$ vérifie :

$$\text{si } \rho'(\theta) \neq 0, \text{ alors } \tan(\theta') = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)},$$

$$\text{si } \rho'(\theta) = 0, \text{ alors } \theta' = \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Démonstration. 1. évident car $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = \rho'(\theta)\vec{U}(\theta) + \rho(\theta)\vec{V}(\theta)$, si on suppose que θ est un point stationnaire alors :

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \vec{0} \Leftrightarrow \rho(\theta) = 0 \wedge \rho'(\theta) = 0, \text{ comme } \rho(\theta) = 0 \text{ cela signifie que } M(\theta) = O.$$

2. Déterminons les points singuliers : $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \rho(\theta) = 0 \wedge \rho'(\theta) = 0$ ainsi si $\rho(\theta) = 0 \Rightarrow M(\theta) = O$, donc tous les points différent de l'origine sont régulier, la tangente est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$.

3. Les coordonnées de $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ dans le nouveau repère $(M(\theta), \vec{U}(\theta), \vec{V}(\theta))$ sont $(\rho'(\theta), \rho(\theta))$ on a alors :

$$\cos(\theta') = \frac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}}, \sin(\theta') = \frac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}}.$$

ainsi si $\rho'(\theta) \neq 0, \Rightarrow \tan(\theta') = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$, sinon si $\rho'(\theta) = 0, \Rightarrow \theta' = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

□

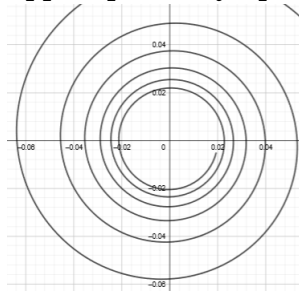
Remarque 2.4.2.

On nomme $(M(\theta_0), \vec{U}(\theta_0), \vec{V}(\theta_0))$ le repère polaire (repère mobile) en $M(\theta_0)$. Les coordonnées du vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta_0}$ sont (ρ', ρ) . On note θ' l'angle compris entre la tangente à la courbe en $M(\theta_0)$ et $\frac{d\vec{M}}{d\theta_0}$ et α l'angle entre $\vec{i}$, et $\frac{d\vec{M}}{d\theta_0}$, alors $\alpha = \theta' + \theta_0$.

2.5) Branche infinies

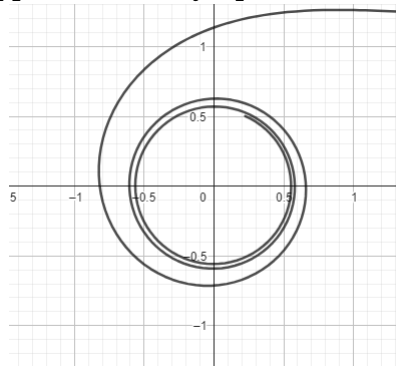
Soit C la courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$.

1. Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = 0$, alors la courbe se présente comme une spirale qui s'enroule autour du point O , qui est aussi appelé point asymptote.



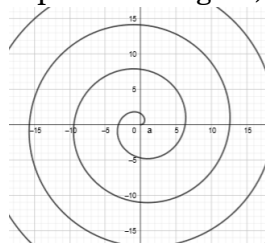
Exemple : $\rho(\theta) = 1/\theta$.

2. Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = a \neq 0$, alors la courbe est une spirale qui s'enroule autour du cercle de centre O et de rayon $|a|$, appelé cercle asymptote de la courbe C .



Exemple : $\rho(\theta) = 1/2 + 1/\theta$.

3. Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = \pm\infty$, alors la courbe présente une branche infinie en forme de spirale (qui s'écarte de plus en plus de l'origine).



Exemple : $\rho(\theta) = \theta$.

4. Au voisinage de θ_0 si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$, alors la courbe admet une branche infinie.

Pour étudier plus précisément cette branche infinie, on procède un changement de repère, nous allons travailler dans le repère $(O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0}) = (O, X, Y)$.

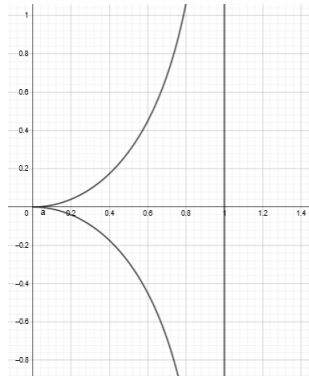
Le point $M(\theta)$ de la courbe a pour coordonnées dans ce repère

$$X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \text{ et } Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0).$$

$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} X(\theta) = \pm\infty$ ainsi la nature de la branche infinie est donnée par le comportement de

$Y(\theta)$:

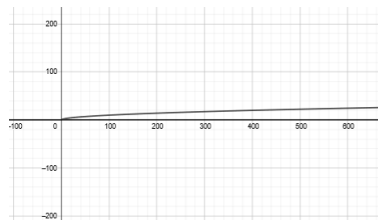
Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y(\theta) = l$, alors la courbe admet une asymptote d'équation $Y = l$ dans le repère $(O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$.



Exemple : $\rho(\theta) = \tan(\theta), \theta_0 = \pi/2$.

Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y(\theta) = \pm\infty$, alors la courbe admet une branche parabolique de direction (XX') ou bien la droite d'angle polaire $\theta = \theta_0$. Puisque

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{Y(\theta)}{X(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \tan(\theta - \theta_0) = 0.$$



Exemple : $\rho(\theta) = \frac{1}{\theta \sin(\theta)}, \theta_0 = 0$.

2.6) Réduction de l'intervalle d'étude - Symétries et rotations

2.6.1) Périodicité et rotation

On considère une la courbe $(C) : \rho = f(\theta), \theta \in \mathbb{R}$.

1. S'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$, tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + 2k\pi) = f(\theta)$, alors $M(\theta + 2k\pi) = M(\theta)$ on obtient ainsi tout C pour θ décrivant un intervalle d'amplitude $2k\pi$, pour $k = 1$, alors $I = [0, 2\pi]$ ou $I = [-\pi, \pi]$.

2. S'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$, tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta + \pi + 2k\pi) = -f(\theta)$, alors on obtient tout C avec un intervalle d'amplitude $\pi + 2k\pi$.

3. Si $f(\theta + T) = f(\theta), (\theta \in I, \theta + T \in I)$, alors la courbe paramétrée est invariante par rotation d'angle T . Le cas le plus intéressant se produit lorsque $\theta = \frac{k2\pi}{p}$. On peut alors restreindre l'intervalle d'étude à tout intervalle de longueur T .

On déduira le reste de la courbe paramétrée en effectuant $p - 1$ rotations, d'angles respectifs $T, 2T, \dots, (p - 1)T$.

2.6.2) Symétries

1. Si $f(\alpha - \theta) = f(\theta)$, alors on peut restreindre le domaine d'étude à $[\alpha/2, +\infty[$ et obtenir le tracé complet en effectuant la symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

Cas particulier : $\alpha = 0$, si f est paire $f(-\theta) = f(\theta)$, alors on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, +\infty[$ et obtenir le tracé complet en effectuant la symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = 0$, c'est à dire (xx') .

2. Si $f(\alpha - \theta) = -f(\theta)$, alors on peut restreindre le domaine d'étude à $[\alpha/2, +\infty[$ et obtenir le tracé complet en effectuant la symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$.

Cas particulier : $\alpha = 0$, si f est impaire $f(-\theta) = -f(\theta)$, alors on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, +\infty[$ et obtenir le tracé complet en effectuant la symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire (yy') .

2.7) Concavité par rapport à l'origine, inflexion

Soit C une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, où ρ est de classe C^1 . M le point de C , sachant que $\vec{OM} = \rho \vec{U}_\theta$, on

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{U}(\theta) + \rho(\theta)\vec{V}(\theta).$$

avec

$$\vec{U}(\theta) = \vec{U}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

et

$$\vec{V}(\theta) = \vec{V}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} = \vec{U}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

De plus

$$\frac{d^2\vec{M}}{d^2\theta} = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\vec{U}(\theta) + 2\rho'(\theta)\vec{V}(\theta).$$

Ainsi :

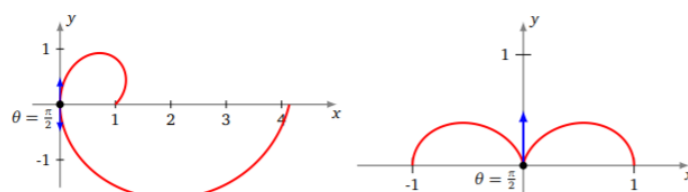
$$\det_{(\vec{U}_\theta, \vec{V}_\theta)}\left(\frac{d\vec{M}}{d\theta}, \frac{d^2\vec{M}}{d^2\theta}\right) = \begin{vmatrix} \rho' & \rho'' - \rho \\ \rho & 2\rho' \end{vmatrix} = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = K$$

- Si $K > 0$, alors C tourne sa **concavité** (au voisinage de $M(\theta)$) vers O .
- Si $K < 0$, alors C tourne sa **convexité** (au voisinage de $M(\theta)$) vers O .
- Si $K = 0$ et change de signe en O , alors $M(\theta)$ est un **point d'inflexion** de C .

Remarque 2.7.1. En l'origine, on ne peut avoir qu'un point d'allure ordinaire ou un rebroussement de première espèce.

a. Si ρ s'annule en changeant de signe, le point $M(\theta)$ franchit l'origine en tournant dans le sens direct : **c'est un point d'allure ordinaire**.

b. Si ρ s'annule sans changer de signe en arrivant en O , on rebrousse chemin en traversant la tangente (puisque l'on tourne toujours dans le même sens) : c'est un rebroussement de première espèce



2.8) Point Multiples

Soit C une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, on définit un intervalle pour lequel on obtient toute la courbe.

les éventuels points multiples de C sont parmi les points $M(\theta)$ tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta).$$

Ou qu'il existe $l \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\rho(\pi + \theta + 2l\pi) = -\rho(\theta).$$

On doit ainsi résoudre ces deux équations d'inconnues θ, l, k .

2.9) Plan d'étude d'une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$

1. Domaine de définition D_ρ .
2. Recherche d'éventuelles symétries, Périodicité et rotations.
3. Étude de la variation et du signe ρ , ($O \in C?$) et tangent.
4. Étude des branches infinies.
5. Tracer la courbe.
6. Recherche d'éventuelle de points multiples.

2.10) Longueur d'un arc de courbe paramétrée

2.11) Longueur des arcs

Soit Γ un arc de classe C^1 admettant une représentation paramétrique $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec $t \in I = [a, b]$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{OM} = \vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Définition 2.11.1. on appelle **abscisse curviligne** s toute application $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telle que

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}, t \in I$$

Définition 2.11.2. La **longueur** de Γ est donnée par :

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

Dans le cas ou Γ est définie par une courbe polaire d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur I .

Définition 2.11.3. 1. *L'abscisse curviligne s est définie par :*

$$s'(t) = \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho''^2(\theta)}, \theta \in I$$

2. *La longueur de Γ est donnée par :*

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho''^2(\theta)} d\theta.$$

2.12) Exercices

Exercice 01 : Déterminer un domaine d'étude réduit des courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$.
2. $\rho(\theta) = 1 - 2\cos(2\theta)$.
3. $\rho(\theta) = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}}$,
4. $\rho(\theta) = \frac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta + 1}$.
5. $\rho(\theta) = \sin(\frac{2\theta}{3})$.
6. $\rho(\theta) = \tan(\frac{\theta}{2})$.

Exercice 02 : Étudier les tangentes des courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$. En $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$.
2. $\rho(\theta) = 1 - 2\cos(2\theta)$. En $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$.
3. $\rho(\theta) = \sin(\frac{2\theta}{3})$. En $\theta = 0, \theta = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 03 : Trouver les points multiples des courbes suivantes :

- a. $\rho(\theta) = \frac{1}{\exp(\theta) - 1}$.
- b. $\rho(\theta) = 1 - 4\cos^2(\theta)$

Exercice 04 : Étudier les branches infinies des courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = \frac{1}{\exp(\theta) - 1}$.
2. $\rho(\theta) = 1 + \tan\theta$.
3. $\rho(\theta) = \theta^2$.
4. $\rho(\theta) = \theta$.

Exercice 05 : Étudier et tracer les courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$.
2. $\rho(\theta) = 1 - 2\cos(2\theta)$.
3. $\rho(\theta) = \frac{1}{\exp(\theta) - 1}$
4. $\rho(\theta) = 1 + \tan\theta$.
5. $\rho(\theta) = \sin(4\theta)$.
6. $\rho(\theta) = \sin(\frac{2\theta}{3})$
7. $\rho(\theta) = \sin(\frac{\theta}{3})$.

Exercice 06 : Étudier et tracer les courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta)$.
2. $\rho(\theta) = \tan(\frac{2\theta}{3})$.
3. $\rho(\theta) = \ln(1 + \cos(2\theta))$.

Exercice 07 : Calculer la longueur des courbes suivantes :

1. Le cercle : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.
2. La cycloïde : $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi]$.
3. L'astroïde : $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), t \in [0, 2\pi]$.
4. La cardiode : $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta), t \in [0, 2\pi]$.

2.13) Solutions

Exercice 01 : Déterminons un domaine d'étude réduit des courbes suivantes, définies en coordonnées polaires :

1. $\rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}, D_\rho = [-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi]$.
 - a) On remarque que ρ est π périodique, ainsi on prend un intervalle de longueur π , $I = [-\pi/2, \pi/2]$, alors $I' = I \cap D_\rho$.
 - b) Symétries : $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \pi/2]$, et on complète (C) par une symétrie par rapport à (xx') , $I' = [0, \pi/4]$.
2. $\rho(\theta) = 1 - 2\cos(2\theta), D_\rho = \mathbb{R}$
 - a) On remarque que ρ est π périodique, ainsi on prend un intervalle d'amplitude π , $I = [-\pi/2, \pi/2]$, alors $I' = I \cap D_\rho = I$.
 - b) Symétries : $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \pi/2]$, et on complète (C) par une symétrie par rapport à (xx') , $I' = [0, \pi/2]$.
3. $\rho(\theta) = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}}, D_\rho = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 - a) On remarque que ρ est 4π périodique, ainsi on prend un intervalle d'amplitude 4π , $I = [-2\pi, 2\pi]$, alors $I' = I \cap D_\rho$.
 - b) Symétries : $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, 2\pi]$, et on complète (C) par une symétrie par rapport à (xx') , $I' = [0, 2\pi] \cap D_\rho$.
 $M(2\pi - \theta) = -M(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \pi]$, et on complète (C) par une symétrie par rapport à (yy') , $I' = [0, \pi] \cap D_\rho = [0, \pi[$.
4. $\rho(\theta) = \frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$

$$D_\rho = \{\theta \in \mathbb{R} / \theta \neq -\pi/6 + 2k\pi, \theta \neq \pi + \pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- a) On remarque que ρ est 2π périodique, ainsi on prend un intervalle d'amplitude 2π , $I = [-\pi, \pi]$, alors

$$I' = I \cap D_\rho = [-\pi, -\frac{5\pi}{6}[\cup]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6}, \pi]$$

- b) Aucune symétrie.

5. $\rho(\theta) = \sin(\frac{2\theta}{3}), D_\rho = \mathbb{R}$,

a) On remarque que ρ est 3π périodique, ainsi on prend un intervalle d'amplitude 3π , $I = [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, alors $I' = I \cap D_\rho = I$

b) Symétries : $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \frac{3\pi}{2}]$, et on complète (C) par une symétrie par rapport à (yy') , $I' = [0, \frac{3\pi}{2}] \cap D_\rho$.

$M(\frac{3\pi}{2} - \theta) = M(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \frac{3\pi}{4}]$, et on complète (C) par une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $(\theta = \frac{3\pi}{4}), (y = -x)$,

$$I' = [0, \frac{3\pi}{4}] \cap D_\rho = [0, \frac{3\pi}{4}].$$

6. $\rho(\theta) = \tan(\frac{\theta}{2}), D_\rho = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On remarque que ρ est 2π périodique, ainsi on prend un intervalle d'amplitude 2π , $I = [-\pi, \pi]$, alors $I' = I \cap D_\rho$

b) Symétries : $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \pi]$, et on complète (C) par une symétrie par rapport à (yy') , le domaine réduit est : $I' = [0, \pi] \cap D_\rho = [0, \pi[$

Exercice 02 : Étudions les tangentes des courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}, I = [0, \pi/4]$.

En $\theta = 0$: $\rho(0) = 1 \neq 0, \rho'(\theta) = \frac{-2\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, $\rho'(0) = 0$, ainsi la tangente est dirigée par le vecteur

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(0) = \rho'(0)\vec{U}(0) + \rho(0)\vec{V}(0) = \vec{V}_0 = \vec{j}.$$

La tangente est colinéaire à (yy') .

En $\theta = \frac{\pi}{4}$, sachant que $\rho(\pi/4) = 0$, alors C admet une tangente en $M(\pi/4)$ d'équation polaire $\theta = \pi/4$ première bissectrice ($y = x$).

2. $\rho(\theta) = 1 - 2\cos(2\theta)$.

En $\theta = 0, \rho(0) = -1 \neq 0, \rho'(0) = 0$, ainsi la tangente est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(0) = -\vec{V}_0 = -\vec{j}$.

$\theta = \frac{\pi}{2}, \rho(\frac{\pi}{2}) = 3 \neq 0, \rho'(\frac{\pi}{2}) = 0$, ainsi la tangente est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) = 3\vec{V}_{\frac{\pi}{2}} = -3\vec{i}$.

3. $\rho(\theta) = \sin(\frac{2\theta}{3})$. En $\theta = 0$, sachant que $\rho(0) = 0$, alors C admet une tangente en $M(0)$ d'équation polaire $\theta = 0, (xx')$.

En $\theta = \frac{3\pi}{4}, \rho(\frac{3\pi}{4}) = 1 \neq 0, \rho'(\frac{3\pi}{4}) = 0$, ainsi la tangente est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\frac{3\pi}{4}) = \vec{V}_{\frac{3\pi}{4}}$.

Exercice 03 : Trouvons les points multiples des courbes suivantes :

a. $\rho(\theta) = \frac{1}{\exp(\theta)-1}$, Soit $k, l \in \mathbb{Z}^*$, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \rho(\theta + 2k\pi) = \rho(\theta), \\ \rho(\pi + \theta + 2l\pi) = -\rho(\theta), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\exp(\theta+2k\pi)-1} = \frac{1}{\exp(\theta)-1}, \\ \frac{1}{\exp(\theta+\pi+2l\pi)-1} = -\frac{1}{\exp(\theta)-1}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0, \\ \theta = -\ln\left(\frac{e^{\pi+2l\pi}+1}{2}\right), \end{cases} \quad \text{cas exclu}$$

Ainsi (C) admet une infinité des points multiples $l \in \mathbb{Z}^*$.

- b. $\rho(\theta) = 1 - 4\cos^2(\theta)$, cherchons les points multiples :

$D_\rho = \mathbb{R}, \rho(\theta + 4\pi) = \rho(\theta)$ ainsi (C) est obtenue en faisant varier θ dans $[-\pi, \pi]$, on résout l'équation :

$$\rho(\theta - \pi) = \rho(\theta) \Rightarrow 1 - 4\cos^2(\theta - \pi) = -1 + 4\cos^2(\theta) \Rightarrow \cos^2(\theta) = 1/4 \Rightarrow \theta = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}.$$

Exercice 04 : Étudions les branches infinies des courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = \frac{1}{\exp(\theta)-1}, D_\rho =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

En $\theta = +\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho(\theta) = 0$, alors (C) admet 0 comme point asymptote .

En $\theta = -\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \rho(\theta) = -1$, alors (C) admet le cercle de rayon 1 de centre O comme cercle asymptote .

En $\theta = 0$, $\lim_{\theta \rightarrow 0^\pm} \rho(\theta) = \pm\infty$ ainsi on pose $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - 0) = \rho(\theta)\sin(\theta)$,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} Y(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\exp(\theta)-1} \sin(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\exp(\theta)-1} = 1. \quad (\sin(\theta) \sim^0 \theta, \exp(\theta)-1 \sim^0 \theta).$$

ou bien

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} Y(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta + o(\theta^2)}{\theta + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)} = 1 - \frac{\theta}{2} + o(\theta^2) = 1.$$

D'où (C) admet $(\Delta) : Y = 1$ comme asymptote lorsque $\theta \rightarrow 0^-$ (respectivement 0^+) (C) est au dessus (respectivement en dessous).

2. $\rho(\theta) = 1 + \tan \theta, I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

En $\theta = -\frac{\pi}{2}$: $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \rho(\theta) = -\infty$.

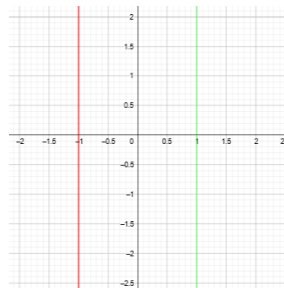
$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} Y(\theta) = -1$$

(C) admet $Y = -1$ comme asymptote dans le repère $(O, \vec{OX}, \vec{OY})$.

En $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) = +\infty$.

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} Y(\theta) = -1$$

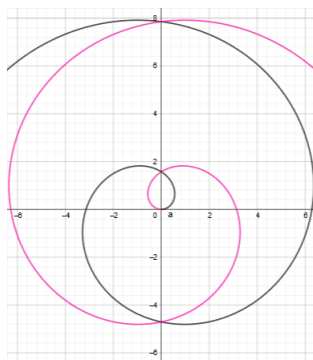
(C) admet $Y = -1$ comme asymptote dans le repère $(O, \vec{OX}, \vec{OY})$.



3. $\rho(\theta) = \theta, D_\rho = \mathbb{R}, I = [0, +\infty[$, il y a une symétrie par rapport à (yy') .

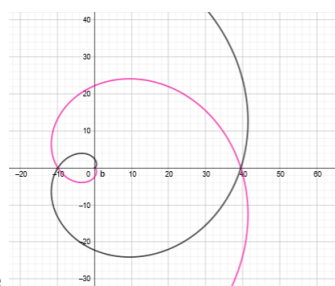
$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = \pm\infty$$

(C) admet une branche spirale



4. $\rho(\theta) = \theta^2, D_\rho = \mathbb{R}, I = [0, +\infty[$, il y a une symétrie par rapport à (xx') .

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = +\infty$$



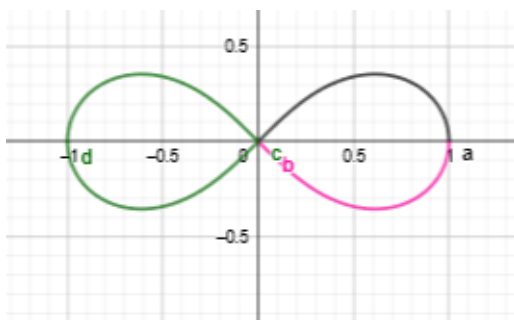
(C) admet une branche spirale

Exercice 05 : Tracer les courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}, I = [0, \pi/4], \rho'(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \leq 0, \theta \in [0, \pi/4]$
 $\rho'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$, alors (C) admet une tangente en $M(0)$ dirigée par (yy') .

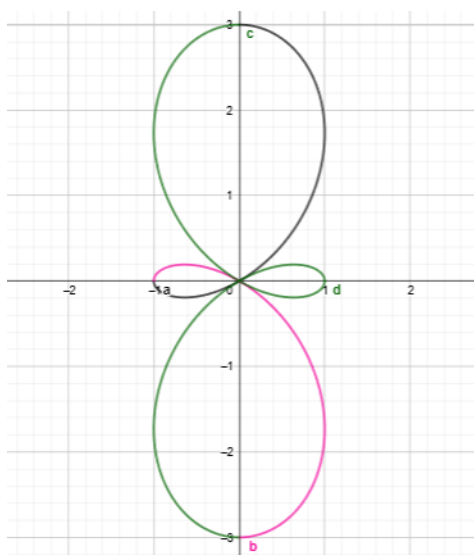
$\rho(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \pi/4$, alors (C) admet une tangente en $M(\pi/4)$ d'équation polaire $\theta = \pi/4$.

θ	0	$\pi/4$
ρ'	-	
ρ	1	$\searrow_0$

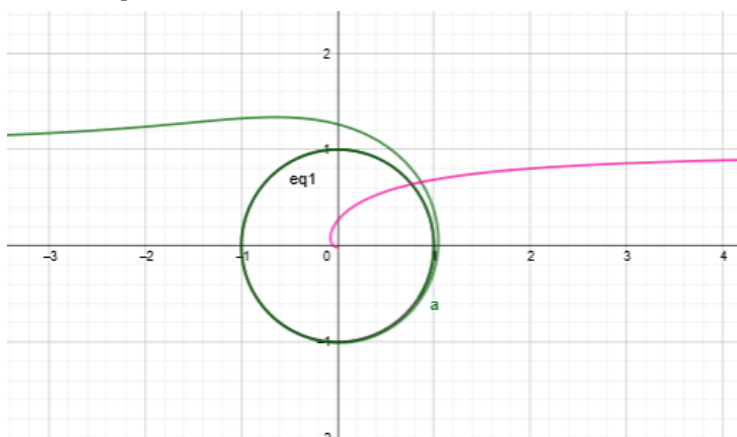


2. $\rho(\theta) = 1 - 2\cos(2\theta), I = [0, \pi/2]$
 $\rho'(\theta) = 4\sin(2\theta) \geq 0$, sur $[0, \pi/2]$, $\rho(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \pi/6$.
 De plus (C) admet une tangente en $M(0)$ et en $M(\pi/2)$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(t)$	+		
$\rho(t)$	-1	0	3



3. $\rho(\theta) = \frac{1}{\exp(\theta)-1}$, $D_\rho = \mathbb{R}^*$ on utilise les résultats des exercices précédents .



4. $\rho(\theta) = 1 + \tan \theta$, $D_\rho = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
a) On remarque que ρ est π périodique, ainsi on prend un intervalle d'amplitude π , $I = [-\pi/2, \pi/2]$, alors $I' = I \cap D_\rho =]-\pi/2, \pi/2[$,
b) $\rho'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) > 0$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(t)$	+		
$\rho(t)$	$-\infty$	0	$+\infty$

c) Position des asymptotes par rapport à la courbe :

On pose $t = \theta + \pi/2, \theta \rightarrow -\pi/2, t \rightarrow 0$.

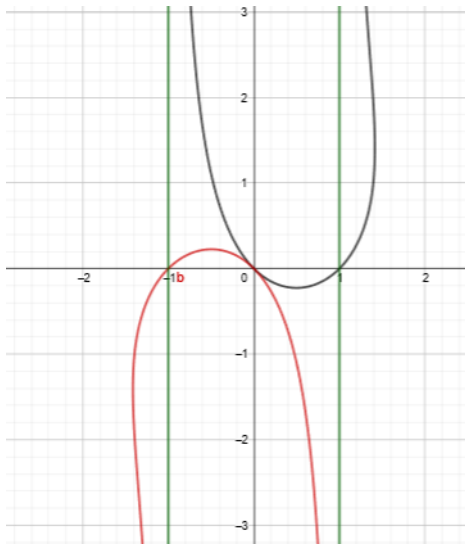
$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi/2^+} Y(\theta) + 1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 - \cos(t) + \sin(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (t + o(t)) = o^+.$$

Alors (C) est au dessus de $Y = -1$.

On pose $t = \theta - \pi/2, \theta \rightarrow \pi/2, t \rightarrow 0$.

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} Y(\theta) + 1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 - \cos(t) + \sin(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (t + o(t)) = o^-.$$

Alors (C) est en dessous de $Y = -1$.



5. Il est clair qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. $D_\rho = \mathbb{R}$.

2. On remarque que $M(\theta + \frac{\pi}{2}) = M(\theta)$, $M(\theta + \frac{\pi}{2})$ est l'image de $M(\theta)$ par une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. On peut réduire le domaine à un intervalle d'amplitude $\pi/2$, soit $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ la courbe sera complétée par des rotations de centre O et d'angles $\pi/2, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots, k(\pi/2), k \in \mathbb{Z}$.

On remarque que $M(-\theta) = -M(\theta)$, ainsi on réduit le domaine à $I = [0, \pi/4]$ et on complète la courbe par une symétrie par rapport à $(y, y'), \theta = \pi/2$.

De plus $M(\pi/4 - \theta) = M(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \pi/8]$, et on fait une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \pi/8$.

3. $\rho'(\theta) = 4 \cos(4\theta) > 0$, sur $[0, \pi/8]$.

$$\rho'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \pi/8.$$

$$\rho(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0.$$

La courbe passe par l'origine.

θ	0	$\pi/8$
ρ'		+
ρ	0	$\nearrow^1$

Étude en $\theta = 0$.

$M(0) = O$ est un point ordinaire dont la tangente est la droite d'équations polaire $\theta = 0$.

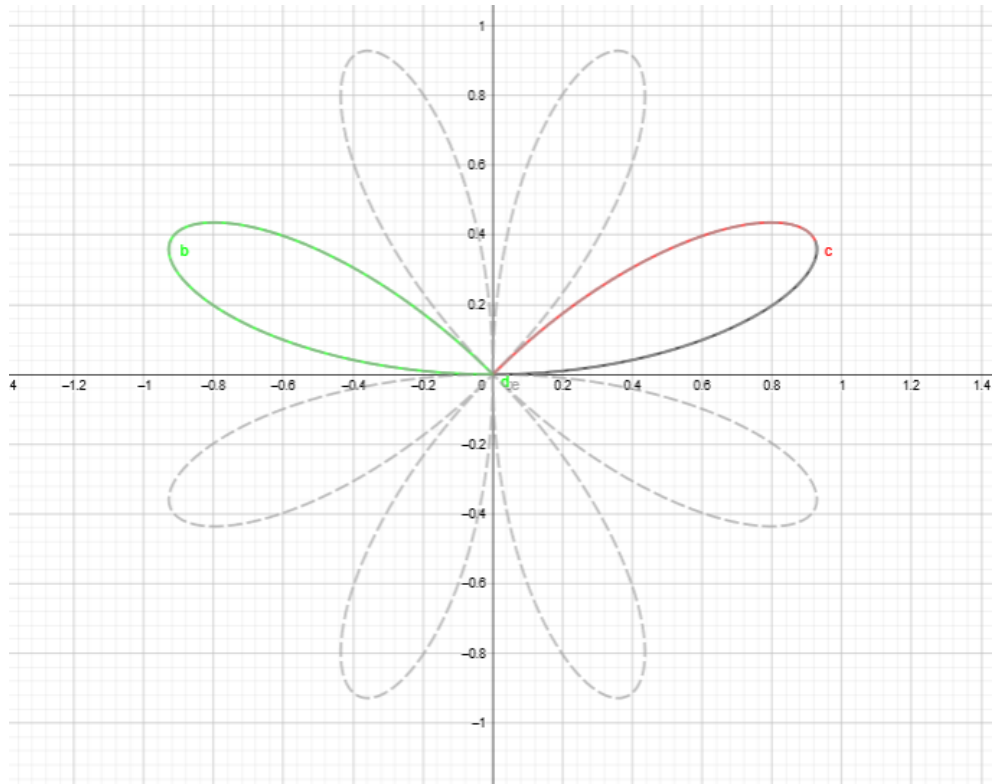
Étude en $\theta = \pi/8$.

On a $\rho(\pi/8) = 1, \rho'(\theta) = 0$, ainsi C admet une tangente en $M(\pi/8)$ dirigée par

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\pi/8) = 1 \cdot \vec{V}_\theta = \vec{V}_{\pi/8}.$$

4. Il n'y a pas de branches infinies.

5. Traçons la courbe :



le trait noir est la courbe d'origine sur $[0, \pi/8]$. Le trait rouge est la symétrie par rapport $\theta = \pi/8$. Le vert est la symétrie par rapport (yy') , et le reste sont les rotations $k\pi/2$, jusqu'à revenir à la courbe initiale.

6. Soit $\rho(\theta) = \sin(\frac{2\theta}{3})$ il est clair qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. $D_\rho = \mathbb{R}$.

2. On remarque que $M(\theta + 3\pi) = M(\theta)$, $M(\theta + 3\pi)$ est l'image de $M(\theta)$. On peut réduire le domaine à un intervalle d'amplitude 3π , soit $I = [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

On remarque que $M(-\theta) = -M(\theta)$, ainsi on réduit le domaine à $I = [0, \frac{3\pi}{2}]$ et on complète la courbe par une symétrie par rapport à $(yy'), \theta = \pi/2$.

De plus $M(\frac{3\pi}{2} - \theta) = M(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \frac{3\pi}{4}]$, et on fait une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{3\pi}{2}$ i.e., $y = -x$ la 2ème bissectrice.

3. $\rho'(\theta) = \frac{2}{3} \cos(\frac{2\theta}{3}) \geq 0$, pour $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$.

$$\rho(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0.$$

La courbe passe par l'origine.

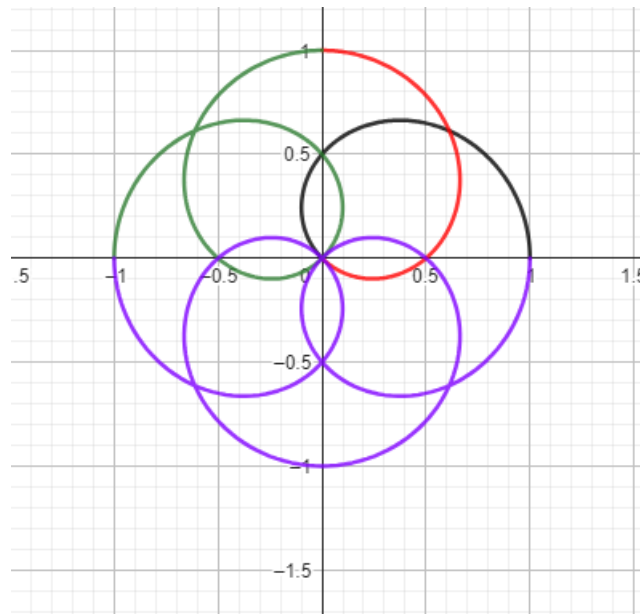
θ	$0 \quad \frac{3\pi}{4}$
ρ'	$+$
ρ	$0 \nearrow 1$

Étude en $\theta = 0$.

$M(0) = O$ est un point de rebroussement de 1ère espèce et la tangente est la droite d'équations polaire $\theta = 0$.

Étude en $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

On a $\rho(\frac{3\pi}{4}) = 1, \rho'(\theta) = 0$, ainsi C admet une tangente en $M(\pi/8)$ dirigée par $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\frac{3\pi}{4}) = 1 \cdot \vec{V}_\theta = \vec{V}_{\frac{3\pi}{4}}$. 4. Il n'y a pas de branches infinies.



7. Soit (C) une courbe d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

[(a)] $D_\rho = \mathbb{R}$. [(b)] ρ est 6π -périodique car $\rho(\theta + 6\pi) = \rho(\theta)$, ainsi on prend un intervalle de longueur 6π , $I = [-3\pi, 3\pi]$, alors $I' = I \cap D_\rho$.

[(c)] Symétries : $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, 3\pi]$ et on complète le graphe par une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \pi/2$. i.e (yy') . $\rho(3\pi - \theta) = \rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \frac{3\pi}{2}]$ et on complète le graphe par une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Le domaine réduit est $[0, \frac{3\pi}{2}]$.

[(d)] Le tableau de variation de ρ :

$$\rho'(\theta) = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

On remarque que $\rho'(\theta) \geq 0, \theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

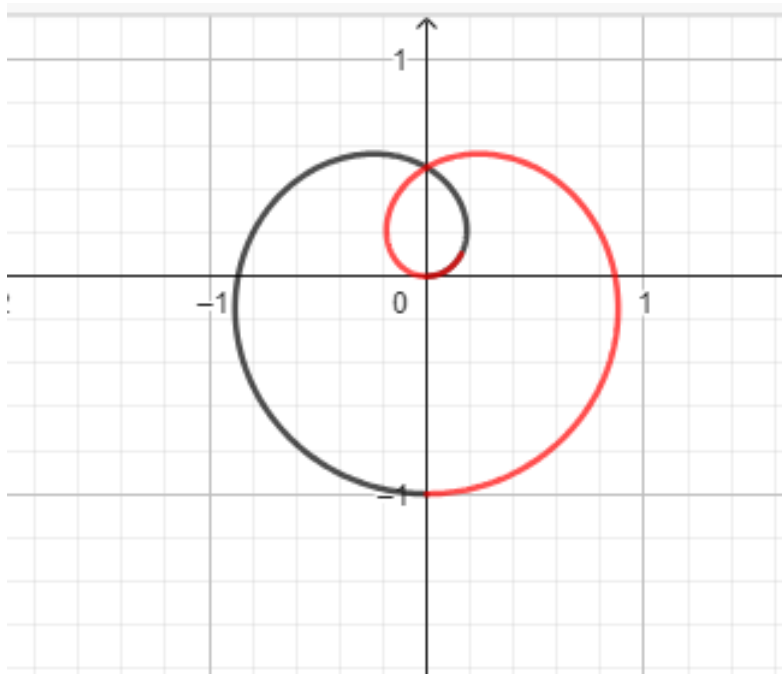
θ	0	$\frac{3\pi}{2}$
$\rho'(t)$	+	
$\rho(t)$	0	1

[(e)] $\rho'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$, alors (C) admet une tangente en $M(0)$ dirigée par (yy') .

En $\theta = 0$:

$\rho(0) = 0$, alors (C) admet une tangente en $M(0)$ d'équation polaire $\theta = 0$. En $\theta = \frac{3\pi}{2}$:

$\rho(\frac{3\pi}{2}) = 1, \rho'(\frac{3\pi}{2}) = 0$, ainsi la tangente est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\frac{3\pi}{2}) = \vec{V}_{\frac{3\pi}{2}} = \vec{i}$.



[(f)]

Exercice 04 : Étudier et tracer les courbes suivantes :

1. $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta)$.

[(a)] $D_\rho = \mathbb{R}$. [(b)] ρ est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique car $\rho(\theta + \frac{2\pi}{3}) = \rho(\theta)$, ainsi on prend un intervalle de longueur 6π , $I = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, alors $I' = I \cap D_\rho$. Puis on complète la courbe par des rotations de centre O et d'angles $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \dots, \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

[(c)] Symétries : $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, alors on réduit le domaine à $I = [0, \frac{\pi}{3}]$ et on complète le graphe par une symétrie par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = 0$. i.e (xx') .

Le domaine réduit est $[0, \frac{\pi}{3}]$.

[(d)] Le tableau de variation de ρ :

$$\rho'(\theta) = -6\sin(3\theta).$$

On remarque que $\rho'(\theta) \leq 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$
$\rho'(t)$	-	
$\rho(t)$	3	$\longrightarrow -1$

[(e)] $\rho'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = 0$.

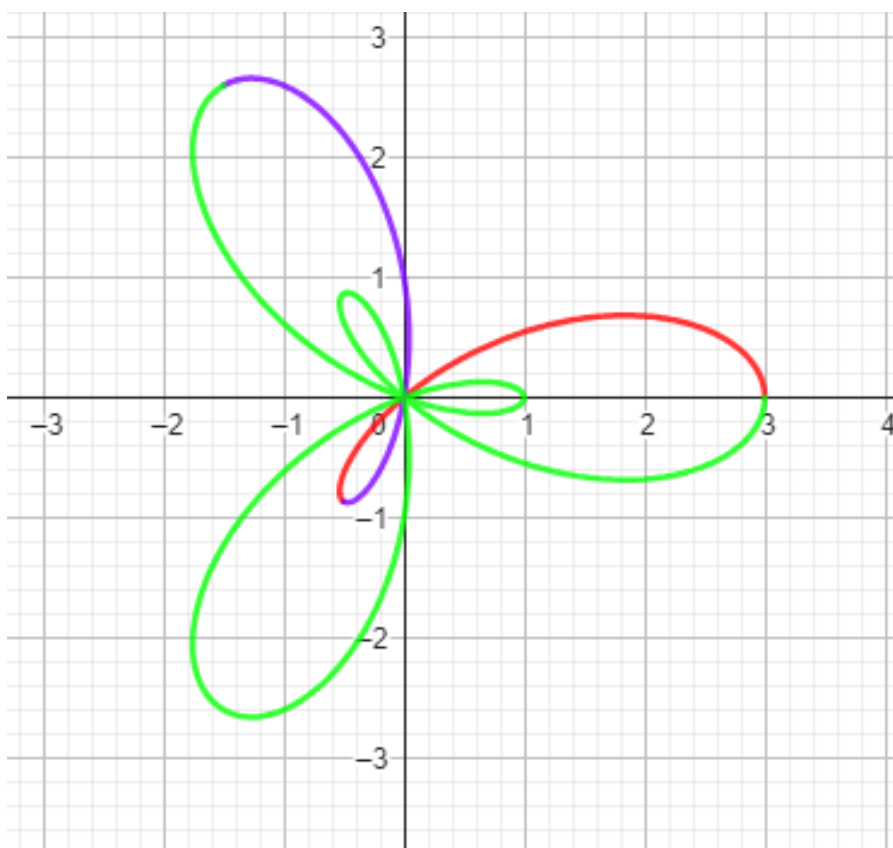
En $\theta = 0$:

$\rho(0) = 3$, alors (C) admet une tangente en $M(0)$ dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(0) = \vec{V}_0 = 3\vec{j}$.

En $\theta = \pi/3$:

$\rho(0) = -1$, alors (C) admet une tangente en $M(0)$ dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\pi/3) = -\vec{V}_{\pi/3}$.

$\rho(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{9}$, C admet une courbe en $M(\frac{2\pi}{9})$ dont la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \frac{2\pi}{9}$.



[(f)]

2. $\rho(\theta) = \tan(\frac{2\theta}{3})$. $D_\rho = \mathbb{R} - \{3\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

a) On remarque que ρ est π périodique, ainsi on prend un intervalle d'amplitude $3\pi/2$, $I = [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, alors $I' = I \cap D_\rho$.

On remarque que $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ ainsi on réduit le domaine à $[0, \frac{3\theta}{4}]$, puis on complète le graphe par une symétrie d'équation polaire $\theta = \pi/2$.

Le domaine d'étude est $I = [0, \frac{3\pi}{4}[$.

b) $\rho'(\theta) = \frac{2}{3}(1 + \tan^2(2\theta/3)) > 0$

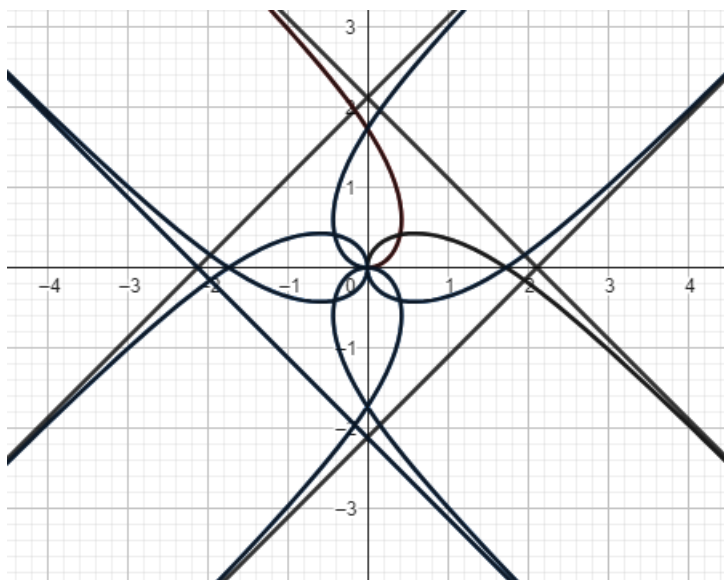
θ	0	$\frac{3\pi}{4}$
$\rho'(t)$	+	
$\rho(t)$	0 $\longrightarrow$ $+\infty$	

c) Position des asymptotes par rapport à la courbe :

On pose $t = \theta - 3\pi/4, \theta \rightarrow 3\pi/4, t \rightarrow 0$.

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4}} Y(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(2/3t)}{\sin(2/3t)} \sin(t) = 2/3.$$

Alors (C) est au dessus de l'asymptote d'équation $Y = 2/3$.



3. $\rho(\theta) = \ln(1 + \cos(2\theta))$. (a) $D_\rho = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$. On remarque que ρ est π périodique ainsi on prend un intervalle d'amplitude π , $I = [-\pi/2, \pi/2] \cap D_\rho$.

(b) Symétries :

$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ on réduit le domaine à $[0, \pi/2]$, puis on complète le graphe par une symétrie d'équation polaire $\theta = 0$.

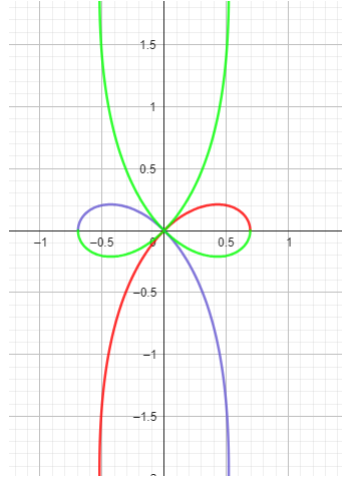
Le domaine d'étude est $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.

c) $\rho'(\theta) = \frac{-2\sin(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)} \leq 0$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(t)$	-	
$\rho(t)$	$\ln(2) \longrightarrow -\infty$	

c) Position des asymptotes par rapport à la courbe :

On pose $t = \theta - \pi/2, \theta \rightarrow \pi/2, t \rightarrow 0$. $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} Y(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + \cos(2t + \pi)) \sin(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 - \cos(2t)) \sin(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(2t^2 + o(t^2))(t + o(t)) = 0$. Alors (C) est au dessus de l'asymptote d'équation $Y = 0$.



Exercice 07 : Calculons la longueur des courbes suivantes :

1. Le cercle : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2\pi.$$

2. La cycloïde : $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi]$,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin(t/2) dt = 8.$$

3. L'astroïde : $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), t \in [0, 2\pi]$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(3 \sin(t) \cos^2(t))^2 + (3 \sin^2(t) \cos(t))^2} dt$$

$$L = 3 \int_0^{2\pi} 2 |\sin(t) \cos(t)| dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt = 6.$$

4. La cardiode : $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta), t \in [0, 2\pi]$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} d\theta = 8.$$

Chapter 3

Courbes Gauches et Surfaces

Dans la suite, on muni $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.1) Introduction

Dans ce chapitre nous allons parler de courbes gauches et les surfaces paramétrés. Nous allons généraliser la notion de courbe plane (une courbe de $\mathbb{R}^2$) à celle de courbe gauche (une courbe de $\mathbb{R}^3$). L'étude des surfaces est différente avec celle des courbes, en effet, une surface est un objet à deux dimensions et sera donc décrite par une fonction de deux paramètres, comme par exemple une sphère, un cylindre. L'étude de telles fonctions nécessite des outils d'analyse plus avancé.

3.2) Courbes Gauches

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)), \quad \vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On suppose f de classe $C^k, k \geq 1$, sur I , f définie ainsi une courbe paramétrée de classe C^k .

La trajectoire ou le support géométrique de la courbe paramétrée est donnée par :

$$\Gamma = f(I) = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, t \in I \right\}$$

Exemple 3.2.1. 1. La droite (Δ) passant par $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (a, b, c)$ non nul.

La représentation paramétrique de (Δ) est le système d'équations :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. La droite (A,B) , avec $A = (x_a, y_a, z_a), B = (x_b, y_b, z_b)$ deux points distincts est le système d'équations :

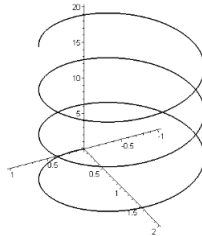
$$\begin{cases} x = x_a + t(x_b - x_a) \\ y = y_a + t(y_b - y_a) \\ z = z_a + t(z_b - z_a) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Remarque 3.2.2.

La représentation paramétrique d'un segment $[A,B]$ avec $A = (x_a, y_a, z_a), B = (x_b, y_b, z_b)$ deux points distincts est le système d'équations :

$$\begin{cases} x = x_a + t(x_b - x_a) \\ y = y_a + t(y_b - y_a) \\ z = z_a + t(z_b - z_a) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

3. L'hélice dont la représentation paramétrique est :



$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pour $R \in \mathbb{R}^{+*}$,

3.2.1) Vecteur Tangent

Soit (C) la courbe paramétrée par $t \rightarrow \vec{OM}(t)$, pour $t \in I$ de classe $C^k, k \geq 1$. Soit un point $M_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ de (C) . On considère au point $M = (x(t), y(t), z(t))$ de (C) , x, y, z sont de classe $C^k, k \geq 1$.

$$\frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

Si $\frac{d\vec{OM}}{dt}(t_0) \neq 0 = \left\{ \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} \right\}$, alors M_0 est un point régulier, sinon il est dit singulier.

Soit M_0 un point régulier, alors la tangente à (C) en M_0 est dirigé par le vecteur $\frac{d\vec{OM}}{dt}(t_0)$.

Proposition 3.2.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc paramétrée de classe C^1 , la courbe (C) admet une tangente en tout point régulier $M(t)$ dirigé par $\vec{f}'(t)$.

Définition 3.2.4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc paramétrée de classe C^1 , $M(t)$ est un point régulier de C , $T(t)$ la tangente en $M(t)$ à (C) .

On appelle :

1. Plan normal en $M(t)$ à C : le plan passant par $M(t)$ perpendiculaire à $T(t)$.
2. Plan Tangente en $M(t)$ à C : Tout plan contenant $T(t)$.

3.3) Surfaces Paramétrées

3.3.1) Nappe paramétrée :

Définition 3.3.1. Soit f un application de classe $C^k, k \geq 1$,

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \end{aligned}$$

où D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On appelle nappe paramétrée par f l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, (u, v) \in D \right\}.$$

Remarque 3.3.2. Soit S une surface admettant $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, comme R.P représentation paramétrique (de classe C^k), $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ les coordonnées de $f(u, v)$, on suppose que x, y, z , sont des applications de classe $C^k, k \geq 1$, de D dans $\mathbb{R}$.

On peut toujours obtenir une équation cartésienne de S en éliminant (u, v) dans le système :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Exemple 3.3.3. 1. Le Plan passant par $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') supposés non colinéaires, admet la R.P :

$$\begin{cases} x = x_0 + au + a'v \\ y = y_0 + bu + b'v \\ z = z_0 + cu + c'v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

3.3.2) Courbes tracées sur une surface

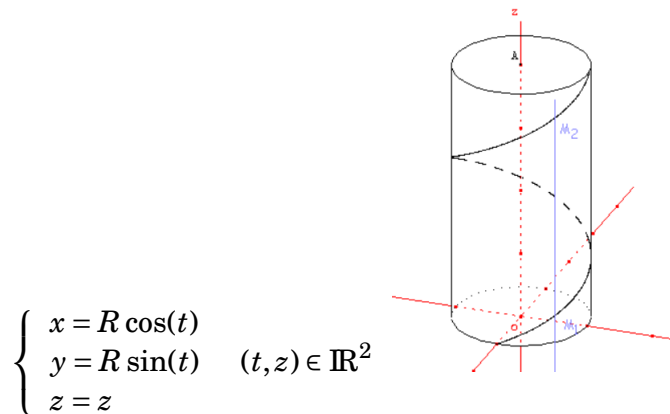
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans D

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow D \\ t &\rightarrow f(t) = (u(t), v(t)), \end{aligned}$$

alors par composition $t \in I : \vec{OM} = \begin{cases} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{cases}$

représente une courbe qui est tracée sur la surface (S)

Exemple 3.3.4. Le cylindre d'équation : $x^2 + y^2 = R^2$, admet pour R.P



$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ z = z \end{cases} \quad (t, z) \in \mathbb{R}^2$$

Pour $z = at$, on obtient une hélice tracée sur le cylindre.

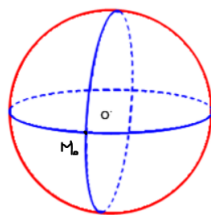
où R est la rayon du cylindre, et h un réel strictement positif. La distance $M_1 M_2$, où M_2 se déduit de M_1 en passant de t à $t + 2\pi$, s'appelle le pas de l'hélice.

3.3.3) Courbes Coordonnées :

Une courbe coordonnées est une courbe tracée sur la surface, obtenue quand l'un des paramétrée est constant ($u = u_0 \vee v = v_0$). Par exemple $u = u_0$ on note la courbe coordonnée $\gamma_{u=u_0}$ sur S par :

$$\gamma_{u=u_0} : v \rightarrow (u_0, v) \in D, \vec{OM} = \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$$

Ici le paramètre v .



Par tout point $M_0 = M(u_0, v_0)$ de S passent les deux courbes $\gamma_{u=u_0}, \gamma_{v=v_0}$.

3.3.4) Point régulier

Soit $M(u_0, v_0)$ de (S) est dit régulier si la famille $(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}(u_0, v_0))$ est libre, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}.$$

Sinon il est singulier.

Rappel : [Produit vectoriel]

1. Théorème: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.
 Soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs.

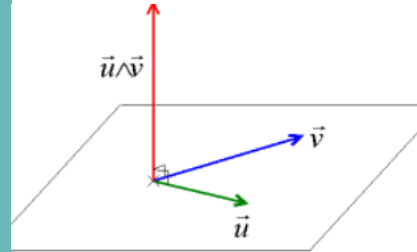
On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

Pour s'en rappeler, on écrit les deux vecteurs en colonnes et on réécrit les deux premières lignes dessous:

x	x'
y	y'
z	z'
x	x'
y	y'

On calcul les déterminants en commençant par le 2°.

2. Propriétés: * $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
 * Soit $(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan (P) de l'espace et M un point
 alors : $M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$



3.3.5) Plan tangent

Définition 3.3.5. Le plan tangent en un point régulier est la réunion des tangentes aux courbes régulières tracées sur la surface passant par ce point.

Théorème 3.3.6. Si $M(u_0, v_0) \in S$ est un point régulier alors S admet en $M(u_0, v_0)$ un plan tangent dirigé par les vecteurs

$$\left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}(u_0, v_0), \text{ et } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Démonstration. Soit $M_0 = M(u_0, v_0)$ un point régulier de S , alors nous avons deux courbes paramétrées $(C_1), (C_2)$ passant par M_0 avec :

$$C_1 : \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Ces deux courbes sont régulières, elle s'intersectent au point M_0 .

En ce point leurs tangentes sont dirigées respectivement par $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \text{ et } \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ étant non colinéaires, ils définissent un plan passant par M_0 .

Montrons qu'il s'agit du plan tangent :

On suppose que toute courbe régulière tracé sur S s'écrit comme :

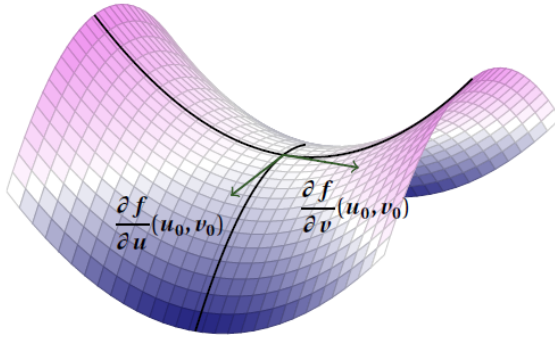
$$C : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si elle passe par M_0 , $\exists t_0 \in \mathbb{R}, (u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$, la tangente en ce point est dirigée par

$$\frac{\partial f}{\partial t}(u_0, v_0) = u'(t_0) \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(t_0) \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$$

ce vecteur est bien une combinaison linéaires des deux vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \text{ et } \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$.

□



3.3.5.1) Équation cartésienne du plan tangent

Pour déterminer l'équation cartésienne du plan tangent, on doit déterminer le vecteur normal $\vec{N}_0$ au plan tangent qui est défini comme suit :

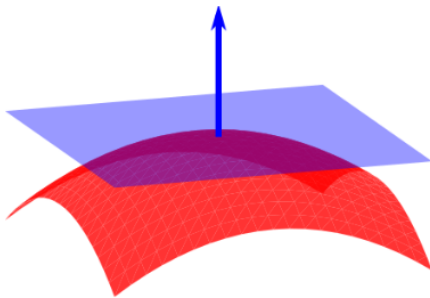
$$\vec{N}_0 = \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = (a, b, c).$$

L'équation cartésienne du plan tangent (P) est : $ax + by + cz = d$.
On détermine d à l'aide des coordonnées du point $M(u_0, v_0)$.

De plus un point $M \in (P)$ si et seulement si

$$\det \left(\overrightarrow{M_0 M}, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = 0$$

ou bien $\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{N}_0 = 0$, ce qui vous donne l'équation cartésienne du plan tangent (P) .



3.4) Surfaces d'équation $z = f(x, y)$

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $C^k, k \geq 1$, avec $D \subset \mathbb{R}^2$, on considère la surface (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ avec $z = f(x, y)$.

$$(x, y) \in D \rightarrow \overrightarrow{OM}(x, y) = \begin{cases} x \\ y \\ f(x, y) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u \\ v \\ f(u, v) \end{cases}$$

3.4.1) Points réguliers

Soit (S) une surface $z = f(x, y)$, avec f de classe $C^k, k \geq 1$, alors tous les points sont réguliers :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

En effet :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ car } 1 \neq 0.$$

Le plan tangent est alors dirigé par ces deux vecteurs et admet comme vecteur normal le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{N}$.

3.4.2) Équation du plan tangent

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan tangent (P) en M_0 à (S) . On peut utiliser les résultats précédents soit calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{M_0M}$, et $\vec{N}_0 = 0$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N}_0 = 0$$

on aura :

$$(P) : \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0.$$

$$(P) : z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

3.4.3) Position de la surface par rapport à son plan tangent

On suppose que f est de classe $C^k, k \geq 2$, soit $M_0 \in S$, on peut étudier la position de la surface par rapport au plan tangent en utilisant de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$z = f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 \right] + o(h^2 + k^2),$$

$h = (x - x_0), k = (y - y_0)$

alors

$$z - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 \right] + o(h^2 + k^2)$$

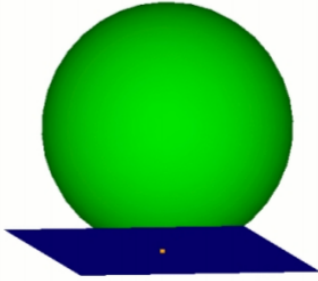
Au voisinage du point considéré, la position du plan tangent est donné par le signe de la quantité entre crochets. Cela revient à calculer le déterminant de la hessienne

$$H_{f(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

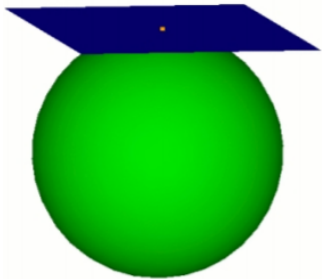
On note $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = s$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = t$

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}, \Delta = s^2 - rt$$

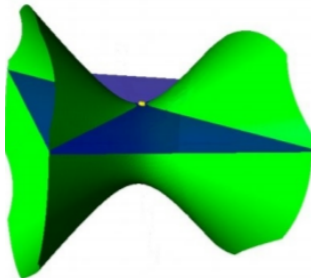
1. Si $s^2 - rt < 0, r > 0$, la hessienne est définie positive (les deux valeurs propres sont strictement positives), alors la surface est localement au dessus de son plan tangent.



2. Si $s^2 - rt < 0, r < 0$, la hessienne est définie négative (les deux valeurs propres sont strictement négatives), alors la surface est localement en dessous de son plan tangent.



3. Si $s^2 - rt > 0$, il y a deux valeurs propres non nulles et signes contraires, la surface



traverse son plan tangent.

3.5) Surfaces d'équation $F(x, y, z) = 0$

Soit (S) une surface définie par une équation implicite $F(x, y, z) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on supposera de classe $C^k, k \geq 1$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = 0\}$.

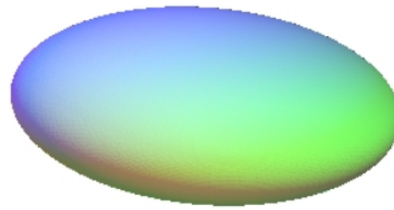
Exemple 3.5.1. 1. Le plan d'équation : $ax + by + cz - d = 0$.



2. Sphère d'équation : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.



3. Ellipsoïde d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Remarque 3.5.2. Une surface du $f(x, y) = z$ devient un cas particulier de surface paramétrée, aussi de surface implicite $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$.

3.5.1) Point régulier

Soit (S) une surface implicite, d'équation $F(x, y, z) = 0$, avec F de classe C^k , $k \geq 1$. Un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de (S) est dit régulier si le vecteur gradient de F en M_0 est non nul.

$$M_0 \text{ est régulier} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Définition 3.5.3. On dit que $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est un point critique de F si

$$\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$$

3.5.2) Plan Tangent

Théorème 3.5.4. Si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est un point régulier de F , alors (S) admet un plan tangent en M_0 de vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0)$. D'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \dots (*)$$

Démonstration. On considère la surface (S) d'équation $F(x, y, z) = 0$, où $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k , $k \geq 1$, en M_0 de (S) non critique, Soit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ la courbe paramétrée régulière

tracée sur la surface (S) passant par M_0 ,

$$\forall t \in I, F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

$\exists t_0 \in I / M_0 = \gamma(t_0)$ avec $F \circ \gamma$ est de classe C^1 , alors en dérivant on aura :

$$x'(t) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z'(t) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

c'est à dire

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0).$$

Sachant que $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ est la direction de la tangente en M_0 à la courbe (C) . Ceci prouve que le vecteur tangent à la courbe en M_0 est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0)$. De plus, $\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au vecteur tangent en M_0 à toute courbe régulière passant par M_0 : il est normal au plan tangent.

□

Remarque 3.5.5. On pratique pour calculer l'équation du plan tangent, on calcule :

$$\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

3.5.3) Intersection de deux Surfaces

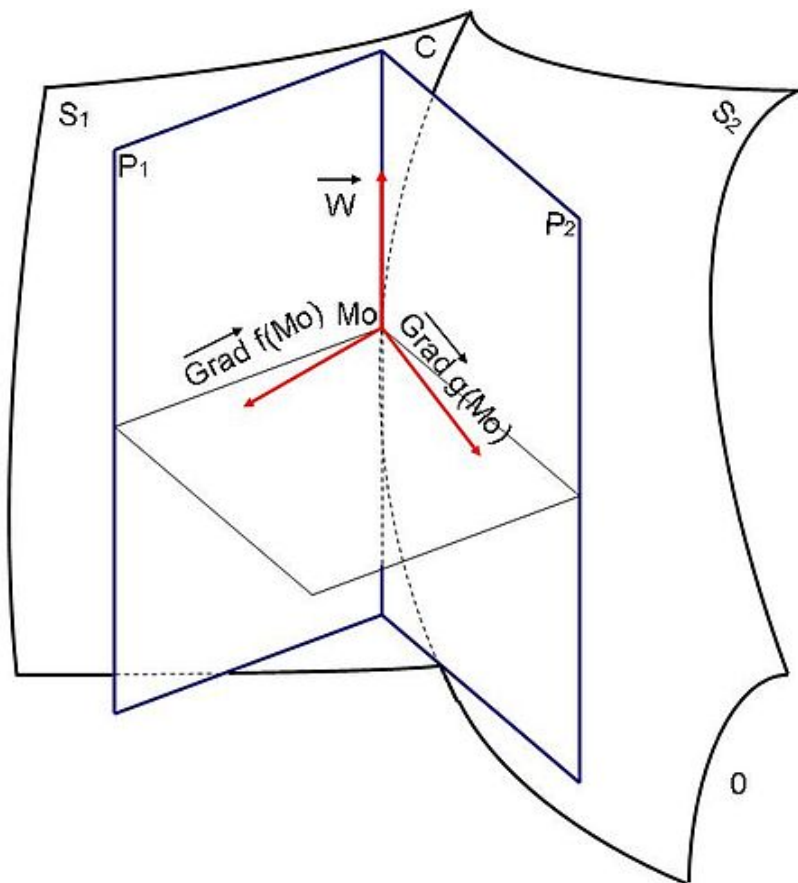
L'intersection de deux surfaces définit dans la plupart du temps une courbe. Toutefois ce n'est pas toujours vrai, l'intersection peut être vide, réduite à un point ou bien à une surface.

Supposons que l'intersection de deux surfaces $S_1 : F(x, y, z) = 0, S_2 : G(x, y, z) = 0$ définit une courbe notée C , on note $C = S_1 \cap S_2$ est définie par :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Si S_1 admet un plan tangent en un point $M_0 \in C$, alors la tangente à C en M_0 est incluse dans ce plan. Pareillement en va pour le plan tangent à la surface S_2 en M_0 . Ainsi, les surfaces S_1 et S_2 présentent des plans tangents au point M_0 admettant comme vecteurs normaux $\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0)$ et $\overrightarrow{\text{grad}G}(x_0, y_0, z_0)$, la tangente à C en M_0 est alors dirigée par :

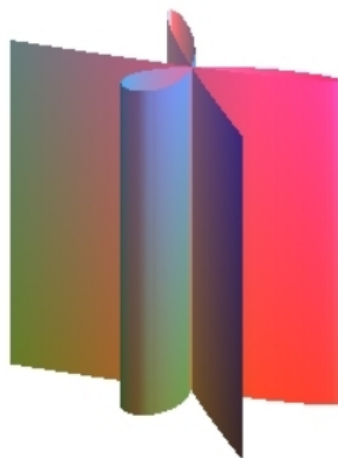
$$\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) \wedge \overrightarrow{\text{grad}G}(x_0, y_0, z_0).$$



3.6) Surfaces Usuelles

3.6.1) Le Cylindre

Définition 3.6.1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. On appelle cylindre de direction $\vec{u}$ toute surface (S) dont le support est la réunion d'une famille de droites dirigées par $\vec{u}$. Une droite de cette famille s'appelle une génératrice du cylindre.



Définition 3.6.2. On appelle cylindre de direction $\vec{u}$ et de directrice (C) la surface engendrée par toutes les droites dirigées par $\vec{u}$ passant par un point de (C) .

Remarque 3.6.3. $\vec{u}$ étant constant, toutes les droites sont parallèles.

3.6.1.1) Représentation paramétrique du cylindre

Soit $\vec{u}$ un vecteur dirigeant (Δ) : direction des droites.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \gamma(t), \end{aligned}$$

la R.P de (C) , alors la représentation paramétrée (R.P) du cylindre (S) de direction $\vec{u}$ et de directrice (C) est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) &\rightarrow \phi(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \vec{u}. \end{aligned}$$

3.6.1.2) Le plan tangent

Proposition 3.6.4. *Le plan tangent en un point régulier d'un cylindre contient la génératrice de ce point .*

Démonstration. Le cylindre de R.P

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) &\rightarrow \phi(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \vec{u}. \end{aligned}$$

et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une R.P de la courbe (C) de classe C^1 (au moins) et $\vec{u}$ dirige les génératrices. $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \vec{u}$, le plan tangent en $\phi(t, \lambda)$ à S contient la droite passant par un point M et dirigée par $\vec{u}$ c'est-à-dire la génératrice de M . $\square$

Remarque 3.6.5. *Soit (S) un cylindre de direction $\vec{u}$ de directrice (C)*

Supposons (C) régulière, et que (D) direction de droites ne soit pas parallèle au plan (P) de (C) En notant :

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ R.P de } (C) \\ \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ R.P de } (S) \\ (t, \lambda) &\rightarrow \phi(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \vec{u}. \end{aligned}$$

Alors ϕ est de classe C^1 , $\forall (t, \lambda) \in I \times \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \vec{u}, \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t, \lambda) = \vec{\gamma}'(t).$$

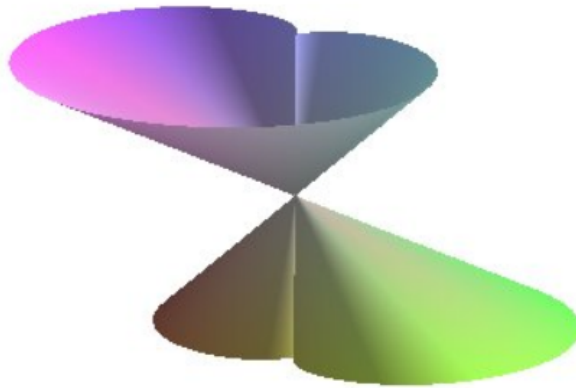
Avec $\vec{\gamma}'(t) \neq 0$ car elle est régulière.

$\vec{\gamma}'(t) \in P, \vec{u} \notin P$, ainsi $(\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t, \lambda), \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \lambda}(t, \lambda))$ est libre, et aussi tout point de (S) est régulier.

De plus, le plan tangent en M à S est le plan passant par M et contenant la génératrice de M et la tangente en γ à (C) .

3.6.2) Le cône

Définition 3.6.6. Soit ω un point de $\mathbb{R}^3$ et (C) une courbe. On appelle cône (S) de sommet ω de directrice (C) la réunion des droites passant par ω et rencontrant (C) . Pour tout point M du cône (S) , sauf ω , on appelle génératrice de M (sur (S)) la droite (ωM) .



3.6.2.1) Représentation paramétrique du cône

Soit

$$\begin{aligned} \text{Soit } \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \gamma(t), \end{aligned}$$

la R.P de la courbe (C) , alors la R.P du cône (S) de sommet ω et de directrice (C) est :

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) &\rightarrow \phi(t, \lambda) = \omega + \lambda \overrightarrow{\omega\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Le sommet ω est obtenue pour $\lambda = 0$.

3.6.2.2) Le plan tangent

Proposition 3.6.7. Le plan tangent en un point régulier d'un cône contient la génératrice de ce point.

Démonstration. Le cône (S) admet pour R.P

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) &\rightarrow \phi(t, \lambda) = \omega + \lambda \overrightarrow{\omega\gamma(t)}. \end{aligned}$$

où γ est R.P de la courbe (C) est de classe C^1 , ω est le sommet de (S) .

$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \overrightarrow{\omega\gamma(t)}$ sachant que $\overrightarrow{\omega\gamma(t)}$ dirige la génératrice de M . (On suppose que $\omega \notin (C)$) le plan tangent en M à (S) contient la génératrice de M . $\square$

Remarque 3.6.8. 1. Soit (S) un cône de sommet ω , de directrice (C) supposons que (C) soit plane et régulière et que ω ne soit pas dans le plan P à (C) de R.P :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \gamma(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) &\rightarrow \phi(t, \lambda) = \omega + \lambda \overrightarrow{\omega\gamma(t)}. \end{aligned}$$

la R.P de (S) Alors, ϕ est de classe C^1 , $\forall (t, \lambda) \in I \times \mathbb{R}^*$

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \overrightarrow{\omega\gamma(t)}, \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t, \lambda) = \lambda \gamma'(t).$$

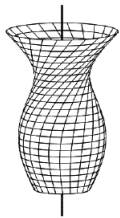
$\lambda \neq 0, \gamma'(t) \neq 0; \overrightarrow{\gamma'(t)} \in P, \overrightarrow{\omega\gamma(t)} \notin P$ ainsi $(\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t, \lambda), \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \lambda}(t, \lambda))$ est libre, alors tout point (S) est régulier sauf ω .

2. Le sommet ω du cône (S) est un point non régulier.

3.6.3) Surface de Révolution

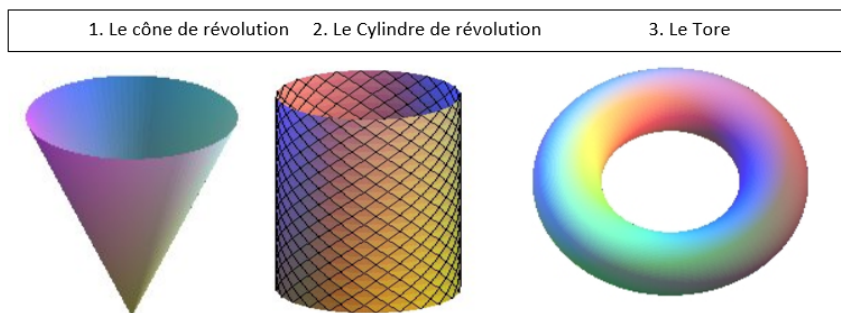
Définition 3.6.9. On appelle surface de révolution la surface obtenue en faisant tourner une courbe (C) autour d'une droite (D) .

On dit que (D) est l'axe de (S) .



On appelle méridienne (ou demi-méridienne) de (S) l'intersection de (S) avec un demi plan limité par (D) .

On appelle parallèles de (S) les cercles d'axes (D) et rencontrant (C) .



Remarque 3.6.10. On a

$$M \in (S) \Leftrightarrow \exists P \in (C), AM = AP \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$$

où A est un point de la droite (D) et $\vec{u}$ sa direction.

On obtient une E.C en éliminant P du système, avec $AM = \sqrt{x_{AM}^2 + y_{AM}^2 + z_{AM}^2}$.

3.6.3.1) Le plan tangent

Proposition 3.6.11. Soit (C) une courbe de représentation paramétrée $\gamma(t)$ avec $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe $C^k, k \geq 1$ et (D) une droite de $\mathbb{R}^3$ orientée par le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Notons R_θ la rotation d'angle θ autour de $\vec{u}$. La surface définie par $\Phi(t, \theta) = R_\theta(\gamma(t))$ est de révolution autour de (D) .

Si le point (C) est régulier, donc le plan tangent (T) en M n'est pas orthogonale à (D) , le point $M(t, \theta)$ est régulier sur (S) donc le plan tangent en ce point est déterminé par la droite $R_\theta(T)$ passant par ce point.

3.7) Exercices

Exercice 01 : Déterminer l'équation cartésienne de chacune des surfaces suivantes :

- a. La surface S_1 est la réunion des droites (Δ) rencontrant les trois droites suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x = 0, \\ z = 1. \end{cases}, \quad D_2 : \begin{cases} y = 0, \\ z = -1. \end{cases}, \quad D_3 : \begin{cases} x = y, \\ z = 0. \end{cases}$$

- b. La surface S_2 est la réunion des droites parallèles au plan P d'équation ($y = z$) et rencontrant P_1, P_2 avec :

$$P_1 : \begin{cases} y^2 = 2x, \\ z = 0. \end{cases}, \quad P_2 : \begin{cases} z^2 = 3x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Exercice 02 :

Déterminer les point réguliers et former une équation cartésienne du plan tangent aux surfaces en en certains points donnés suivantes :

1. La surface S_1 de R.P :

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = uv, \\ z = u^3 + v^3 \end{cases} \quad (u_0, v_0) = (1, -1).$$

2. La surface S_2 une surface de R.P : $f(u, v) = \begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 + v \\ z = uv \end{cases}$

3. La surface S_3 d'E.C : $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$, avec $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$.

4. La surface (S_4) d'E.C : $z = x^2 + y^2 = f(x, y)$.

Exercice 03 :

Former l'équation cartésienne du (des) plan(s) tangent(s) aux surfaces suivantes :

1. La surface S_1 d'équation cartésienne $z^3 - xy = 0$ contenant la droite D d'équation :

$$D : \begin{cases} x = 2, \\ y = 3z + 3. \end{cases}$$

2. La surface S_2 d' E.C : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et perpendiculaire(s) à la droite d'équation :

$$x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}$$

3. La surface S_3 d' E.C : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et contenant la droite d'équation :

$$x = -y = \frac{z}{2}$$

Exercice 04 :

Étudier la position de la surface $S : z \cos(x) - y \sin(x) = 0$ par rapport à son plan tangent en $O = (0, 0, 0)$.

Exercice 05 :

1. Donner la représentation paramétrée du cylindre de direction $\vec{u} = (2, 1, 3)$, de directrice $(C) : (x = t, y = t^2, z = t^3 + 1), t \in \mathbb{R}$.
2. Donner la représentation paramétrée du cône de sommet $\vec{u} = (1, -1, 3)$, de directrice $(C) : (x = t, y = t^2, z = t^3), t \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le sommet du cône d'équation cartésienne :

$$(S) : x^2 + xy + y^2 + z^2 + x - 3y - z + 3 = 0.$$

Exercice 06 :

1. Pour $a > 0$, former une équation cartésienne du cylindre (S) de direction $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et de directrice :

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax. \end{cases}$$

2. Former l'équation cartésienne du cône de sommet $\Omega = (1, 0, 1)$ et de directrice :

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

3. Former une équation de la surface de révolution (S) obtenue par rotation du cercle C de centre $\Omega = (a, 0, 0)$ et de rayon $r > 0$ du plan (xOy) autour de l'axe (Oy) .
4. Former une équation de la surface de révolution (S) obtenue par rotation de la courbe

$$C \text{ de la courbe } (C) : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = -t^2 \end{cases} \text{ autour de la droite } (D) : x = y = z.$$

3.8) Solutions

Exercice 01 :

- a. La surface S_1 est la réunion des droites (Δ) rencontrant les trois droites suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x = 0, \\ z = 1. \end{cases}, D_2 : \begin{cases} y = 0, \\ z = -1. \end{cases}, D_3 : \begin{cases} x = y, \\ z = 0. \end{cases}$$

Soit A un point de D_1 il s'écrit comme $A = (0, y, 1)$,

et B un point de D_2 comme $B = (x, 0, -1)$,

C un point de D_3 , comme $C = (x, x, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $A = (0, t, 1), B = (u, 0, -1), C = (v, v, 0), t, u, v \in \mathbb{R}$. Ainsi toutes droite (Δ) rencontrant les trois droites passent par A, B et C pour un certain $t, u, v \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ -t \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v \\ v-t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2v \\ u = 2v \\ uv - ut + vt = 0 \text{ (toujours vérifiée)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2v \\ u = 2v \end{cases}$$

La surface S_1 est formée des droites (AB) c'est à dire des points $M = A + t'\overrightarrow{AB}$ de R.P :

$$\begin{cases} x = 0 + t'u \\ y = t - tt' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

de plus $t = u = 2v$ on remplace :

$$\begin{cases} x = 0 + t'2v \\ y = 2v - 2vt' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$$

En éliminant les deux paramètres t', v on aura l'équation cartésienne E.C :

$$(S_1) : xz - yz - y + x = 0.$$

- b. La surface S_2 est la réunion des droites parallèles au plan P d'équation $(y = z)$ et rencontrant P_1, P_2 avec :

$$P_1 : \begin{cases} y^2 = 2x, \\ z = 0. \end{cases}, P_2 : \begin{cases} z^2 = 3x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Soit $A \in P, A = (0, t, t), t \in \mathbb{R}, B \in P_1, B = (\frac{u^2}{2}, u, 0), u \in \mathbb{R} C \in P_2, C = (\frac{v^2}{3}, 0, v), v \in \mathbb{R}.$

$$(BC) // (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{N_p} = 0,$$

avec $\overrightarrow{N_p} = (0, 1, -1).$

$$\begin{pmatrix} \frac{v^2}{3} - \frac{u^2}{2} \\ -u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -u - v = 0 \Leftrightarrow u = -v$$

La droite (BC) admet la R.P : $M \in (BC), M = B + t'\overrightarrow{BC}, t' \in \mathbb{R}$

$$(BC) : \begin{cases} x = \frac{u^2}{2} + t'(\frac{v^2}{3} - \frac{u^2}{2}) \\ y = u - t'u \\ z = 0 + t'v \end{cases}$$

De plus $u = -v$, alors

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{u^2}{2} + t'\frac{u^2}{6} \\ y = u - t'u \\ z = -t'u \end{cases}$$

on élimine t', u on aura :

$$(S_2) : 6x - 3y^2 - 2z^2 + 5yz = 0.$$

Exercice 02 :

1. La surface S_1 de R.P :

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = uv, \\ z = u^3 + v^3 \end{cases} \quad (u_0, v_0) = (1, -1).$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial OM}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ 3u^2 \end{pmatrix}, \frac{\overrightarrow{\partial OM}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 3v^2 \end{pmatrix} \quad \text{ils sont libres} \Leftrightarrow u \neq v$$

Pour $u \neq v$ tous les points sont réguliers y compris $(1, -1)$.

Soit (P) le plan tangent à (S) , $(P): ax + by + cz + d = 0$,

$$\vec{N}_0 = (a, b, c) = \frac{\overrightarrow{\partial OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\overrightarrow{\partial OM}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$(P): -6x + 2z + d = 0$, avec $M_0 = (0, -1, 0) \in P$ alors $d = 0$

$$(P): -6x + 2z = 0.$$

Remarque : on peut aussi calculer $\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{N}_0 = 0$.

2. Montrons que $M(1, 1)$ est point régulier de S_2 , déterminons la plan tangent en ce point.

Sachant que f est de classe C^1 , pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = (1, 2u + v) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = (1, 2, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (2v, v + u) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = (2, 1, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

De plus $(1, 2, 1), (2, 1, 1)$ sont libres d'où le résultat.

Soit $M = (x, y, z) \in (P)$ le plan tangent à S_2 en $M_0 = f(1, 1) = (2, 2, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z = 1 : (P)$$

Autre méthode :

$$\vec{N}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ on a :}$$

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{N}_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z = 1 : (P).$$

3. La surface S_3 d'E.C : $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$, avec $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$.

$$\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 4z_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Pour $M \neq O$, M est régulier, le plan tangent à (S_3) en $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

$$\vec{N}_0 = \overrightarrow{\text{grad}F}(1, 3, 3) = (2, 6, 12), 2x + 6y + 12z + d = 0, d = -56$$

$$(P) : 2x + 6y + 12z - 56 = 0.$$

4.

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

$$\vec{N}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{M}_0 M \cdot \vec{N}_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(P) : 2x_0 x(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - z - x_0^2 - y_0^2 = 0.$$

$$(P) : z = 2x_0 x + 2y_0 y - (x_0^2 + y_0^2).$$

Si on prend par exemple le sommet est un point régulier de S et l'équation P en ce point est $z = 0$.

Exercice 03 :

Formons l'équation cartésienne du (des) plan(s) tangent(s) aux surfaces suivantes :

1. La surface S_1 d'équation cartésienne $z^3 - xy = 0$ contenant la droite D d'équation :

$$D : \begin{cases} x = 2, \\ y = 3z + 3. \end{cases}$$

Points critiques :

$$\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -y_0 \\ -x_0 \\ 2z_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0),$$

Tous les points sont réguliers sauf l'origine.

Le plan tangent en M_0 est obtenu en calculant $\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{MM}_0 = 0$

$$(P) : -y_0 x - x_0 y + 3z_0^2 z + 2x_0 y_0 - 3z_0^3 = 0.$$

Le ou les plan contenant D sont :

La R.P de (D) est donnée par :

$$(D) : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 3t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad \text{avec, } A = (2, 3, 0) \in D, \vec{u} = (0, 3, 1) \text{ direction de } D$$

On a : $\vec{N}_0 \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{N}_0 \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -3x_0 + 3z_0^2 = 0$

$$x_0 = z_0^2 \tag{3.1}$$

De plus

$$\begin{aligned} A \in (P) : -y_0(2) - x_0(3) + 2x_0y_0 - 3z_0^2 &= 0 \\ -2y_0 - 3x_0 + 2x_0y_0 - 3z_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Enfin $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (S)$

$$z_0^3 - x_0y_0 = 0 \quad (3.3)$$

Cherchons M_0 tels que 3.1, 3.2, 3.3 soient vérifiées : on remplace 3.1 dans 3.3 on aura : $z_0^3 - z_0^2y_0 = 0 \Rightarrow z_0^2(z_0 - y_0) = 0 \Rightarrow z_0 \vee y_0 = z_0$.

Si $z_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$ absurde.

Alors $z_0 = y_0 \wedge x_0 = z_0^2$ on remplace dans 3.2 on obtient

$$-z_0^3 - 3z_0^2 - 2z_0 = 0$$

de plus $z_0 \neq 0$

$$\Rightarrow z_{01} = -1 \vee z_{02} = -2$$

on a deux points

$$M_{01} = (1, -1, -1), M_{02} = (4, -2, -2).$$

On aura les deux plans :

$$(P_1) = x - y + 3z + 1 = 0, \text{ pour } M_{01}$$

$$(P_2) = x - 2y + 6z + 4 = 0, \text{ pour } M_{02}$$

2. La surface S_2 d' E.C : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et perpendiculaire(s) à la droite d'équation :

$$x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}$$

Point réguliers :

$$\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Tous les points sont réguliers sauf l'origine.

$$\text{La R.P de } (D) \text{ est : } \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -2t \end{cases}, \vec{u} = (1, 3, -2), A = (0, 0, 0) \in D.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) // \vec{u} :$$

$$\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y_0 = -3z_0 \\ z_0 = 2x_0 \\ y_0 = 3x_0 \end{cases}$$

L'E.C du plan :

$$(P) : 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$$

$$(P) : x_0x + y_0y + z_0z - 1 = 0. \text{ car } M_0 \in (S).$$

$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, on remplace $z_0 = 2x_0, y_0 = 3x_0$ on aura :

$$14x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}$$

ainsi

$$M_{01} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right), M_{02} = \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right)$$

$$(P_1) : \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z - 1 = 0$$

$$(P_2) : \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{2}{\sqrt{14}}z + 1 = 0$$

$$(P_1) : x + 3y + 2z - \sqrt{14} = 0, (P_2) : x + 3y + 2z + \sqrt{14} = 0.$$

3. Point réguliers :

$$\overrightarrow{\text{grad}}F(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -2z_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Tous les points sont réguliers sauf l'origine.

L'E.C du plan :

$$(P) : 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0.$$

La R.P de la droite $x = -z/2$ est $\gamma(t) = (t, -t, 2t), t \in \mathbb{R}$, $(0, 0, 0)$ appartient à cette droite de plus c'est un point critique, alors il n'existe aucun plan contenant cette droite.

Exercice 04 :

Étudions la position de la surface $S : z \cos(x) - y \sin(x) = 0$ par rapport à son plan tangent en $O = (0, 0, 0)$.

1. $\overrightarrow{\text{grad}}F(0, 0, 0) = (0, 0, 1) \neq \vec{0}$, ainsi O est un point régulier, l'E.C du plan est donnée par :

$$(P) : z = 0$$

2. $z = y \tan(x) = f(x, y)$ de plus :

$$H_{f(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \tan(x)(1 + \tan^2(x)) & 1 + \tan^2(x) \\ 1 + \tan^2(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$t = r = 0, s = 1, s^2 - rt = 1 > 0$. Quand $xy > 0$ ou $xy < 0$ $f(x, y)$ change de signe que $v(0, 0)$ la surface traverse son plan (P) en O c'est un point col ou selle.

Exercice 05 :

1. La R.P du cylindre de direction $\vec{u} = (2, 1, 3)$, de directrice $(c) : (x = t, y = t^2, z = t^3 + 1), t \in \mathbb{R}$, est :

$$\phi(t, \lambda) = \begin{cases} t + 2\lambda \\ t^2 + \lambda \\ t^3 + 1 + 3\lambda \end{cases} \quad (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : R.P \text{ de } (S).$$

2. La R.P du cône de sommet $\omega = (1, -1, 3)$, de directrice $(c) : (x = t, y = t^2, z = t^3), t \in \mathbb{R}$, est :

$$\phi(t, \lambda) = \begin{cases} 1 + \lambda(t - 1) \\ -1 + \lambda(t^2 + 1) \\ 3 + \lambda(t^3 - 3) \end{cases} \quad (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : R.P \text{ de } (S).$$

3. Trouvons le sommet du cône E.C :

$$(S) : x^2 + xy + y^2 + z^2 + x - 3y - z + 3 = 0$$

$$\overrightarrow{\text{grad}F} = \begin{pmatrix} 2x + y - z + 1 \\ 2y + x - 3 \\ -x + 2z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{pmatrix} = \omega.$$

Car ω est un point non régulier $\overrightarrow{\text{grad}F}(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

Exercice 06 :

1. Pour $a > 0$, former une équation cartésienne du cylindre (S) de direction $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et de directrice :

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax. \end{cases}$$

$$\Phi(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \cdot \vec{j},$$

$$M = (x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, M + \lambda \vec{j} \in (C).$$

$$M + \lambda \vec{j} = \begin{pmatrix} x + \lambda \cdot 0 \\ y + \lambda \cdot 1 \\ z + \lambda \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + \lambda \\ z \end{pmatrix},$$

On aura $\exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} x^2 + (\lambda + y)^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + (y + \lambda)^2 = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax = a^2 \\ (y + \lambda)^2 = ax - x^2 \end{cases}$ Donc $(S) : z^2 + ax = a^2$, et $ax > x^2$.

2. Former l'équation cartésienne du cône de sommet $\Omega = (1, 0, 1)$ et de directrice :

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$M \in (S) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/\Omega + t\overrightarrow{\Omega M} \in (C).$$

$$\Omega + t\overrightarrow{\Omega M} = \begin{pmatrix} 1 + t \cdot (x - 1) \\ 0 + t(y) \\ 1 + t(z - 1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} (1 + t \cdot (x - 1))^2 + t^2 y^2 = 1, \\ 1 + t(z - 1) = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \frac{1}{z-1} \cdot (x - 1))^2 + \frac{1}{(z-1)^2} y^2 = 1 \\ t = \frac{1}{z-1}. \end{cases}$$

$$(S) : x^2 - y^2 - 2xz + 2z - 1 = 0.$$

3. Former une équation de la surface de révolution (S) obtenue par rotation du cercle C de centre $\Omega = (a, 0, 0)$ et de rayon $r > 0$ du plan (xOy) autour de l'axe (Oy) .

$$M = (x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \exists P \in (C), \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}\vec{u} = \overrightarrow{AP}\vec{u},$$

$$A = O \quad OM = OP, \overrightarrow{OM}\vec{u} = \overrightarrow{OP}\vec{u}.$$

On a

$$(C) : \begin{cases} x = a + r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \\ z = 0 \end{cases}, D = (oy),$$

on prend $A = O = (0, 0, 0)$, $\vec{u} = \vec{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{OP} = (X, Y, Z)$.

$$\exists P \in (C), \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (a + r \cos(t))^2 + (r \sin(t))^2 \\ y = Y, Z = 0 \\ Y = y = r \sin(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases}$$

$$(S) : (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - r^2)^2 - 4a^2 r^2 + 4a^2 y^2 = 0, r > 0$$

4. Déterminons l'équation de la surface de révolution (S) obtenue par la rotation de la

$$\text{courbe } (C) : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = -t^2 \end{cases} \text{ autour de la droite } (D) : x = y = z.$$

On prend $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $A = (0, 0, 0)$.

$$M = (x, y, z) \in S \Leftrightarrow \exists P = (X, Y, Z) \in (C), \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} X = t \\ Y = t^2 \\ Z = t^2 \end{cases}, (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ x + y + z = X + Y + Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + 2t^4 \\ x + y + z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : (x + y + z)^2 + 2(x + y + z)^4 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(S) : (x + y + z)^2 + (xy + xz + yz) = 0.$$

Bibliographie :

1. Michel Audin, Géométrie, Collection enseignement sup. EDP Sciences, 2006.
2. Yvan Kerbrat et Jean-Marc Braemer, Géométrie des courbes et surfaces et sous variété de $\mathbb{R}^n$. Hermann, 1976.
3. Jean-Marie Monier, Géométrie cours et 400 exercices corrigés, Dunod(2ème édition) Paris 2000.
4. Emmanuel Pedon, Cours de Géométrie Affine et Euclidienne pour la Licence de Mathématiques, Université de Reims-Champagne Ardenne 2015.