République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Support de cours du module
Algébre I

Domaine : Mathématiques et informatique

2023-2024

Introduction

Ce support de cours destiné aux étudiants de la **première année** : informatique, mathématiques.

Le cours est commencé par la méthode du raisonnement mathématique, puis on s'intéresse à la théorie des ensembles et les applications, les relations . On étudie les structures algébriques, anneaux de polynomes.

Le chapitre 5 : Anneaux de polynomes en collaboration avec **Dr ANBER Ahmed**.

J'essaierai également dans la mesure du possible de fournir l'essentiel des résultats de chaque chapitre. Je fournirai autant d'exemples et des figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours.

Il s'agit du polycopié d'un cours que j'ai donné pour les étudiants de la première année chimie à l'université USTO-MB en (2009-2010) et (2010-2011), les étudiants de la première année de génie de l'eau en (2011-2012) et (2012-2013), les étudiants de la première année socle commun en (2014-2015), et les étudiants de la première année informatique de puis 2017. J'espère que ce polycopié sera utile.

Table des matières

Chapitre 1

Notions de logique

1.1 Assertions

Défiinition 1.1.1 *Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.*

Exemple 1.1.2 *1.* $5 + 2 = 7$ *est une assertion vraie.*

2. $4 \times\ 2 = 7$ *est une assertion fausse.*

1.2 L'opérateur logique et ($\wedge$)

L'assertion P et Q est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion P *et* Q est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	V	F
F	F	F
V	F	F

.

Exemple 1.2.1 *1.* $(6+2=8 \wedge\ 5\times 2=10)$ *est une assertion vraie.*

2. $(4\times 2=7\ \wedge\ 5\times 2=10)$ *est une assertion fausse.*

1.3 L'opérateur logique ou $(\vee)$

L'assertion P ou Q est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion P *ou* Q est fausse si les deux assertions P *et* Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
F	V	V
F	F	F
V	F	V

.

Exemple 1.3.1 *1.* $(5+3=4 \ \vee \ 9\times 2=7)$ *est une assertion fausse.*

2. $(5\times \ 2=9 \ \vee \ 4+2=6)$ *est une assertion vraie.*

1.4 La négation $\overline{P}(non\ P)$

L'assertion $\overline{P}$ $(non\ P)$ est vraie si P est fausse.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

.

Exemple 1.4.1 *La négation de l'assertion* $3>0$ *est l'assertion* $3\leq 0$.

1.5 L'implication $(\Longrightarrow)$

La définition mathématique est la suivante : l'assertion $\overline{P}$ *ou* Q $\left(\overline{P}\vee Q\right)$ est notée $(P\Longrightarrow Q)$.

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q \ \ (\overline{P} \vee Q)$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
V	F	F

.

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ se lit P implique Q.

Exemple 1.5.1 $\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1} \Longrightarrow x = y$$

est vraie.

1.6 Equivalence $(\Longleftrightarrow)$

L'équivalence est définie par : $(P \Longleftrightarrow Q)$ est l'assertion $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$. On dira P est équivalent à Q ou P équivaut à Q ou P si et seulement si Q.

Cette assertion est vraie lorsque P *et* Q sont vraies ou lorsque P *et* Q sont fausses. Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
F	V	F
F	F	V
V	F	F

.

Exemple 1.6.1 45 *est un multiple de a* $\Longleftrightarrow$ 45 *est divisible par a*

1.7 Quantificateurs

1.7.1 Le quantificateur $\forall$: pour tout

L'assertion : $\forall x \in E$, $P(x)$, est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit : pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie .

Exemple 1.7.1 *1.* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ *est une assertion vraie.*

2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} < 0$ *est une assertion fausse, car l'inegalité* $\frac{1}{x} < 0$ *n'est pas vérifié pour* $x = 1$.

1.7.2 Le quantificateur $\exists$: il existe

L'assertion : $\exists x \in E, P(x)$, est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit : il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) .

Exemple 1.7.2 $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leq 0$ *est une assertion vraie pour, car l'inégalité* $x^2 \leq 0$ *est vraie pour* $x = 0$.

1.7.3 La négation des quantificateurs

La négation de $\forall x \in E$, $P(x)$ est $\exists x \in E$, $\overline{P(x)}$.

Exemple 1.7.3 *La négation de* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ *est l'assertion* $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$.

La négation de $\exists x \in E,\ P(x)$ est $\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$.

Exemple 1.7.4 *La négation de*

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} < 0$$

est l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} \geq 0.$$

1.8 Raisonnement mathématique

Le raisonnement mathématique est un outil qui fait appel à des règles de déduction, en faisant intervenir des définitions, des énoncés, des lois ou propositions où encore des résultats préalablement obtenus par un raisonnement. Il existe plusieurs types de raisonnement à savoir, le raisonnement direct, contraposé, par absurde, contre-exemple et par récurrence.

1.8.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple 1.8.1 *Montrer que si* $a, b \in \mathbb{Q}$ *alors* $a + b \in \mathbb{Q}$.

Rappelons que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ *se constitue par la formule :*

$$\frac{P}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*.$$

Posons $a = \frac{p}{q}$ *et* $b = \frac{p^{'}}{q^{'}}$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{p}{q} + \frac{p^{'}}{q^{'}} \\ &= \frac{pq^{'} + p^{'}q}{qq^{'}} \end{aligned}$$

Or le numérateur $pq^{'} + p^{'}q$ *est bien un élément de* $\mathbb{Z}$*, le dénominateur* $qq^{'}$ *est lui un élément de* $\mathbb{N}^*$*. Donc* $a+b$ *s'écrit bien de la forme*

$$a+b = \frac{p^{''}}{q^{''}}$$

ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$*.*

1.8.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion «$P \Rightarrow Q$ » est équivalente à « $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ ».

Donc, montrer l'assertion « $P \Rightarrow Q$ », revient à montrer l'assertion « $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ » est vraie.

Exemple 1.8.2 *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que si* n^2 *est pair alors* n *est pair.*

Nous supposons que n *n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors* n^2 *n'est pas pair.*

Comme n *n'est pas pair, il est impair et donc il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2k+1$*.*

Alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+1+4k \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \\ &= 2k^{'}+1,\ (k^{'}=2k^2+2k) \end{aligned}$$

et donc n^2 est impair.

Conclusion : Nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.8.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemple 1.8.3 *Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer que*

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ et } a \neq b$$

Comme

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$$

alors

$$a + a^2 = b + b^2$$

cela conduit à

$$(a-b)(a+b) = -(a-b).$$

Comme $a \neq b$ *alors* $a - b \neq 0$ *et donc en divisant par* $(a-b)$ *on obtient* $a + b = -1$.

La somme des deux nombres positifs a *et* b *ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.*

Conclusion : l'assertion

$$\textit{si } \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}, \textit{ alors } a = b \textit{ est vraie.}$$

1.8.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E$, $P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver un $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse. Trouver un tel x_0 c'est trouver un contre-exemple à l'assertion « $\forall x \in E$, $P(x)$ ».

Exemple 1.8.4 *Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».*

Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, ...,$ *Par exemple* $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Un contre-exemple est 7 *: les carrés inférieurs à* 7 *sont* $0, 1, 4$ *mais avec trois de ces nombres on ne peut pas obtenir* 7*.*

1.8.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1. Vérifions que l'assertion est vraie : pour $n = 0$.
2. Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n.
3. On démontre alors que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n + 1$.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.8.5 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Pour $n \geqslant 0$*, notons* $P(n)$ *l'assertion suivante :*

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geqslant 0$*.*

1. *Vérifions que l'assertion est vraie : pour* $n = 0$ *nous avons* $2^0 = 1 > 0$*. Donc* $P(0)$ *est vraie.*
2. *Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre* n*.*

3. Montrons que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n+1$.

On a :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n, \text{ car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1, \text{ car } 2^n > 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.9 Exercices

Exercice 1.9.1 *Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse tout en justifiant votre réponse.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R}, x - 3 = 0)$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0$ *ou* $x - 3 \neq 0)$

4. $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0$ *et* $x - 3 = 0)$.

Solution :

1. *La proposition :* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ *est fausse, car l'inigalité n'est pas vérifié pour* $x = -2$, $y = -1$.

2. *La proposition :* $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R},\ x-3=0)$ *est vraie, car*

$$(\exists x=-1,\ x+1=0) \text{ et } (\exists x=3,\ x-3=0).$$

3. *La proposition :* $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1 \neq 0$ *ou* $x-3 \neq 0)$ *est vraie, car*

$$\begin{aligned} si\ x &= -1,\ x+1=0 \text{ ou } x-3 \neq 0 \\ si\ x &= 3,\ x+1 \neq 0 \text{ ou } x-3=0, \end{aligned}$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1 \neq 0$ *ou* $x-3 \neq 0)$ *est vraie.*

4. *La proposition :* $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1=0$ *et* $x-3=0)$ *est fausse car,*

$$\begin{aligned} si\ x &= -1,\ x+1=0 \text{ et } x-3 \neq 0 \\ si\ x &= 3,\ x+1 \neq 0 \text{ et } x-3=0. \end{aligned}$$

Exercice 1.9.2 *Soient P, Q et R trois propositions telles que :*

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, 2x-1 \geq x, \qquad Q : \forall x \in \mathbb{R}, x^2-4 \geq 0$$
$$R : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x \geq y \implies x^2+y^2 \geq 0).$$

Les propositions P, Q, R sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négation.

Solution :

1. *La proposition*

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, 2x-1 \geq x, \text{ est fausse}$$

Car si $x=-1$, *l'inégalité* $2x-1 \geq x$ *est fausse.*

La négation de P (non P) est

$$\overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}, 2x - 1 < x.$$

2. La proposition

$$Q : \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 \geq 0,\ \textit{est fausse}$$

Car si $x = 1$, l'inégalité $x^2 - 4 \geq 0$ est fausse.

La négation de Q (non Q) est

$$Q : \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 < 0.$$

3. La proposition

$$R : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \left(x \geq y \implies x^2 + y^2 \geq 0\right)\ \textit{est vraie,}$$

car sa négation (non R) est

$$\overline{R} : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \left(x \geq y\ \wedge x^2 + y^2 < 0\right)\ \textit{est fausse.}$$

Exercice 1.9.3 *Ecrire la contraposée puis la négation des implications suivantes :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - 1$ *n'est pas divisible par* $8 \Rightarrow\ n$ *est pair*

2. $(x = y)$ *ou* $((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\quad (n \textit{ premier} \Longrightarrow\ (n = 2 \textit{ ou } n \textit{ est impair}))$.

Solution :

1. *La contraposé de l'implication :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8 \Rightarrow \ n \text{ est pair}$$

est

$$n \text{ est impair } \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8.$$

2. *La contraposé de l'implication :* $((x = y) \text{ ou } ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))) \Leftrightarrow ((x \neq y) \Longrightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)))$, *est*

$$((x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)) \Longrightarrow (x = y).$$

3. *La contraposé de l'implication :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ premier} \Longrightarrow \ (n = 2 \text{ ou } n \text{ est impair})),$$

est

$$\forall n \in \mathbb{N}, ((n \neq 2 \text{ et } n \text{ est pair}) \Longrightarrow n \text{ n'est pas premier }).$$

Exercice 1.9.4 *En utilisant le principe de raisonnement par contraposée montrer que :*

$$a^2 + 9 = 2^n \implies a \text{ est impair.}$$

Solution :

Par contraposée montrons que

$$\text{si } a^2 + 9 = 2^n \text{ alors } a \text{ est impair.}$$

Montrons que si a est pair alors $a^2+9 \neq 2^n$

$$\begin{aligned} a \text{ est pair} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}/a = 2k \\ a^2+9 &= (2k)^2+9 \\ &= 4k^2+9 \\ &= 2(2k^2+4)+1 \\ &= 2k'+1. \end{aligned}$$

Alors a^2+9 est impair, or 2^n est pair.

D'où

$$a^2+9 \neq 2^n.$$

Exercice 1.9.5 *Démontrer par l'absurdre que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.*

Solution :

Par absurdre : supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel donc $\exists p \in \mathbb{Z}$, $\exists p \in \mathbb{Z}^*$ (p et q sont premiers entre eux), tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \tfrac{p}{q} &\Rightarrow p = \sqrt{2}q \\ &\Rightarrow p^2 = 2q^2/q^2 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow p^2 = 2k/k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow p^2 \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Montrons que

$$\text{si } p^2 \text{ est pair} \Rightarrow p \text{ est pair .}$$

Par contraposée supposons que p est impair :

$$\begin{aligned}
\exists k &\in \mathbb{N}/\ p = 2k+1 \\
\exists k &\in \mathbb{N}/\ p^2 = 4k^2+4k+1 \\
\exists k &\in \mathbb{N}/\ p^2 = 2(2k^2+2k)+1 \\
\exists k^{'} &= 2k^2+2k \in \mathbb{N}/\ p^2 = 2k^{'}+1
\end{aligned}$$

alors p^2 est impair.

Donc

$$\textit{si } p^2 \textit{ est pair} \Rightarrow p \textit{ est pair.}$$

Et

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{2}q \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ 2k = \sqrt{2}q \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ q^2 = 2k^2 \\
&\Rightarrow \exists k^{''} = k^2 \in \mathbb{N},\ q^2 = 2k^{''} \\
&\Rightarrow q^2 \textit{ est pair} \\
&\Rightarrow q \textit{ est pair.}
\end{aligned}$$

D'où contradiction avec p et q sont premiers entre eux.

Alors $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 1.9.6 *Montrer par récurrence que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Solution :

Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Vérifions que l'assertion est vraie pour $n = 1$:

$$1.1! = 1 \ \textit{et} \ (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n :

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1,$$

et montrons que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n + 1$.

On a :

$$\begin{aligned} 1.1! + 2.2! + ... + n.n! + (n+1).(n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! \\ &= (n+1)!.(1+n+1) - 1 \\ &= (n+1)!.(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

donc l'assertion $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$ *est vraie pour l'ordre* $n + 1$.

Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Ensemble

Défiinition 2.1.1 *Une collection ou ensemble est constitué par des objets ou éléments présentant une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer q'un objet appartient ou n'appartient pas à l'ensemble .*

Exemple 2.1.2 *On désigne par* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des enties naturels*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}.$$

L'ensemble des nombres pairs se notera

$$P = \{x/\ x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble des nombres impairs se notera

$$K = \{x/\ x = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble vide est noté

$$\varnothing = \{x/\ x \in E \text{ et } x \notin E\},\ \text{où } E \text{ est un ensemble quelconque.}$$

2.2 Inclusion

On dit que l'ensemble A inclu dans l'ensemble B, si tout élément de A et aussi un élément de B et on note

$$A \subset B.$$

Autrement dit : *si* $x \in A$ alors $x \in B$.

On dit que : A est un sous ensemble de B ou A une partie de B.

Exemple 2.2.1 *Si on désigne par* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombre réels, on aura*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R},$$

et si on désigne par $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers relatifs et par* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des nombres rationnels :*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}/\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

nous aurons,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.3 Égalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles.

$$E = F \Longleftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E$$

i.e.

$$\forall x,\ x \in E \Longleftrightarrow x \in F.$$

2.4 Différence de deux ensembles

La différence de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F, noté $E - F$

$$E - F = \{x/\ x \in E \text{ et } x \notin F\},$$

si $F \subset E$ alors $E - F$ est encore appelée complémentaire de F dans E, il est noté C_E^F ou F^c si E est l'ensemble total.

2.5 Opérations sur les ensembles

2.5.1 Réunion

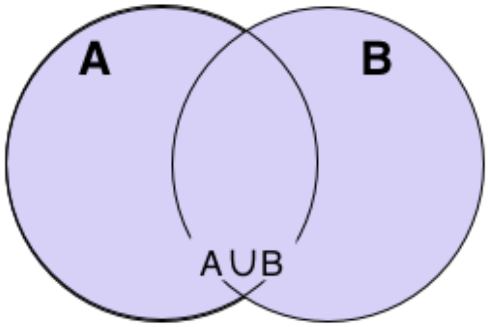
Défiinition 2.5.1 *La réunion des deux ensembles A et B est l'ensemble C des éléments qui appartient à A ou B, on écrit*

$$C = A \cup B \text{ (ce lit } C \text{ égale } A \text{ union } B)$$

$$i.e.\ x \in C = A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Autrement dit : si A et B sont deux parties de E,

$$A \cup B = \{x \in E/\ x \in E \text{ ou } x \in B\}.$$



2.5.2 L'intersection

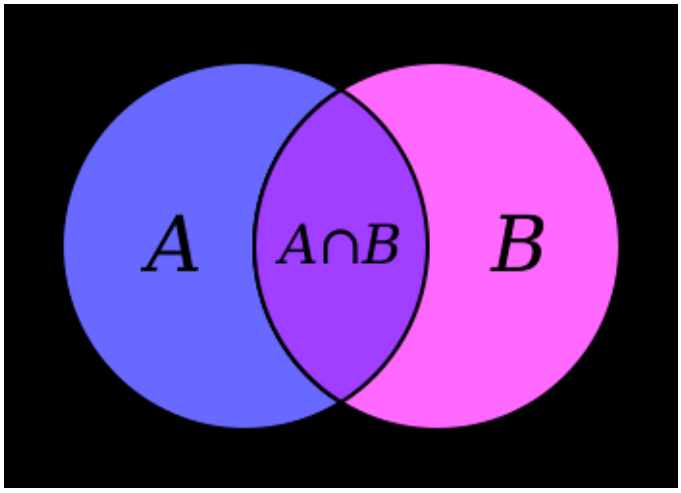
Défiinition 2.5.2 *L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble C des éléments qui appartient à A et B, on écrit*

$$C = A \cap B(ce\ lit\ C\ égale\ A\ inter\ B).$$

$$x \in C = A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Autrement dit : si A et B sont deux parties de E,

$$A \cap B = \{x \in E/\ x \in E \text{ et } x \in B\}.$$



Remarque 2.5.3 *Si A et B n'ont pas des éléments commun, on dit qu'ils sont disjoints, alors $A \cap B = \varnothing$.*

Exemple 2.5.4 *L'ensemble des nombres naturels pairs et l'ensemble des nombres naturels impairs ont une intersection vide.*

Remarque 2.5.5 *Soient A, $B \subset E$*

1. $$A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A$$

2. $$B = C_E^A \Longleftrightarrow A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \varnothing.$$

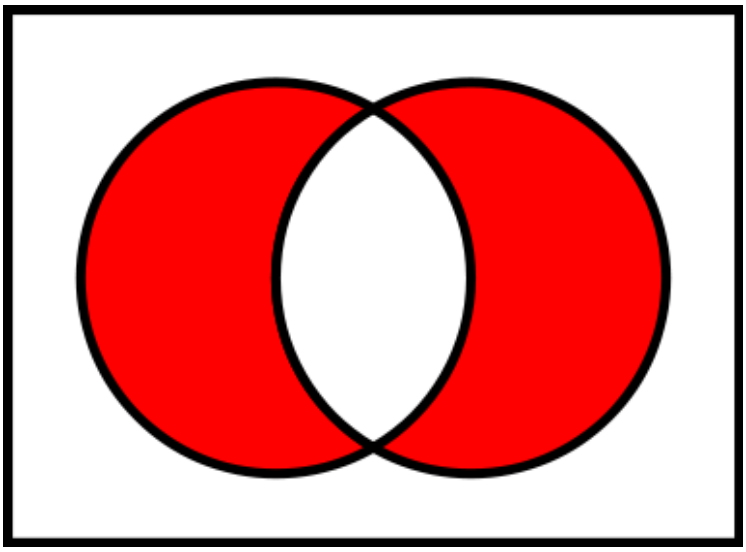
3.

$$A - B = A \cap B^c.$$

2.5.3 La différence symétrique

Défiinition 2.5.6 *La différence symétrique de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas aux deux à la fois. C'est la différence de $A \cup B$ et de $A \cap B$, noté $A \triangle B$.*

$$A \triangle B = A \cup B - A \cap B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$



$A \triangle B$ des ensembles A et B est l'ensemble coloré en rouge.

2.6 Propriétés des opérations sur les ensembles

2.6.1 Commutativité

Soient les ensembles A et B deux parties d'un ensemble E.

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A.$$

2.6.2 Associativité

Soient les ensembles A, B et C trois parties d'un ensemble E.

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

2.6.3 Distributivité

Soient les ensembles A, B et C trois parties d'un ensemble E.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

l'intersection et la réunion sont distributives l'une par rapport à l'autre.

2.7 Lois de Morgan

Soient les ensembles A et B deux parties d'un ensemble E.

– $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

– $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Preuve. Montrons la première loi :

On montre $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ et $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

D'abord montrons que $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

Soit $x \in (A \cap B)^c$,

$$x \in (A \cap B)^c \Longrightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Longleftrightarrow \ (x \in A \ et \ x \notin B) \ \text{ou} \ (x \notin A \ et \ x \in B) \ \text{ou} \ (x \notin A \ et \ x \notin B).$$

1. $x \in A$ et $x \notin B \Longrightarrow x \in A$ et $x \in B^c \Longrightarrow x \in A^c \cup B^c$
2. $x \notin A$ et $x \in B \Longrightarrow x \in A^c$ et $x \in B \Longrightarrow x \in A^c \cup B^c$
3. $x \notin A$ et $x \notin B \Longrightarrow x \in A^c$ et $x \in B^c \Longrightarrow x \in A^c \cup B^c$

de 1, 2 et 3 on a $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

Inversement montrons que $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

Soit $x \in A^c \cup B^c$,

$x \in A^c \cup B^c \Longrightarrow x \in A^c$ ou $x \in B^c$

1. si $x \in A^c$,

   $x \in A^c \Longrightarrow x \notin A \Longrightarrow x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in (A \cap B)^c$

2. si $x \in B^c$,

   $x \in B^c \Longrightarrow x \notin B \Longrightarrow x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in (A \cap B)^c$.

D'où $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

Montrons la dexième loi :

D'abord montrons $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Soit $x \in (A \cup B)^c$,

$x \in (A \cup B)^c \Longrightarrow x \notin A \cup B$

$\Longrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$,

$\Longrightarrow x \in A^c$ et $x \in B^c$

$\Longrightarrow x \in A^c \cap B^c$.

D'où $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Inversement montrons que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

Soit $x \in A^c \cap B^c$,

$x \in A^c \cap B^c \Longrightarrow x \in A^c$ et $x \in B^c$

$\Longrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$,

$\Longrightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$.

D'où $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. □

2.8 Produit d'ensembles (Produit cartésien)

Soient A et B deux ensembles, et soient a, b deux éléments tels que $a \in A$ et $b \in B$.

L'ensemble des couples (a, b) pris dans cet ordre est appelé l'ensembles produit

cartésien des ensembles A et B. et on note

$$A \times B.$$

Exemple 2.8.1 *Soient* $A = \{1, 3, 5\}$ *et* $B = \{0, 2\}$,

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2), (5, 0), (5, 2)\}$$

Remarque 2.8.2 *Si* A *et* B *sont des ensembles finis et si on désigne par :*

$card(A)$ *: le nombre des éléments de* A,

$card(B)$ *: le nombre des éléments de* B,

on aura : $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$.

2.9 Application

On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F une loi de correspondance f permettent d'associer à tout élément $x \in E$ un élément $y \in F$.

E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble image .

L'élément y associé à x est l'image de x par f, on note

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = f(x). \end{array}$$

Exemple 2.9.1 *L'application* $f : x \to y = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$ *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

2.9.1 Surjection

Soit $f : E \to F$ une application.

L'image $f(E)$ de E par f est en général une partie de F. Si tout élément de F est l'image par f d'au mois un élément de E, on dit que que f est une application surjective, on a alors $f(E) = F$.

Autrement dit :

$$f \text{ surjective} \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in E / y = f(x).$$

Exemple 2.9.2 *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\ f(x) = x + 1$.

f est surjective $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y &= f(x) \Rightarrow y = x + 1 \\ &\Rightarrow x = y - 1. \end{aligned}$$

D'où $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = y - 1 \in \mathbb{R} / f(x) = y$.

2.9.2 Injection

Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est une application injective si,

$$\forall x_{1,} x_2 \in E,\ (\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$$

ou bien par contraposé

$$\forall x_{1,} x_2 \in E,\ (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))\,.$$

Exemple 2.9.3 *Soit l'application* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}/\ f(x) = x^2$.

f est injective car :

$$\begin{aligned} \forall x_{1,} x_2 \quad &\in \quad \mathbb{R}_+,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Longrightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Bijection

f est une application bijective si elle est surjective et injective, tout élément de F est l'image d'un élément de E et d'un seul.

Dans ce cas il existe une application inverse f^{-1} de F sur E, puisqu'à tout $y \in F$, on associe un élément x bien déterminé de E.

f^{-1} est l'application inverse ou réciproque de f

$$x \overset{f}{\longmapsto} y \Leftrightarrow y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x$$

f^{-1} est elle même une bijection de F sur E *et* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple 2.9.4 $f(x) = a + x,\ x \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{Z}$

f est bijective, son inverse est $f^{-1}(y) = y - a$.

2.9.3 Composition des applications

Soient les ensembles E, F et G, et deux applications f et g de E dans F et de F dans G $(resp.)$

$f : E \to F$ $\qquad\qquad$ $g : F \to G$

$x \mapsto f(x) = y$ $\qquad\qquad$ $y \mapsto g(y) = z$

on définit l'application composée gof :

$gof : E \to G$

$x \to gof(x) = z.$

Proposition 2.9.5 *1. Si f et g sont injective $\Rightarrow$ gof est injective*

2. Si f et g sont surjective $\Rightarrow$ gof est surjective

Preuve.

(a) Soient $x_1, x_2 \in E$,

$$gof(x_1) = gof(x_2) \overset{g\ injective}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f\ injective}{\Rightarrow} x_1 = x_2,$$

d'où gof injective.

(b)

$$gof(E) = g(f(E)) \overset{f\ surjective}{=} g(F) \overset{g\ surjective}{=} G,$$

d'où gof surjective.

□

Remarque 2.9.6 *La composée de deux bijections est une application bijective.*

En particulier, la composition de $f : E \to F$ *et sa réciproque* $f^{-1} : F \mapsto E$ *est l'application identique* I *sur* E

$$f^{-1}of = Id_E \quad et \quad fof^{-1} = Id_F$$

2.10 Image directe et image réciproque

2.10.1 Image directe

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. On appelle image de A par f le sous ensemble de F, noté $f(A)$ tel que

$$f(A) = \{f(x) \in F/\ x \in A\}$$

2.10.2 Image réciproque

Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f le sous ensemble de E, noté $f^{-1}(B)$ tel que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/\ f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 2.10.1 *1. Soit* f *une application définie comme suit*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & [0,2] \\ & x & \mapsto & 2-x. \end{array}$$

Trouver $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$

$$\begin{aligned} f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) &= \left\{f(x)/x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{2-x/x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{2-x/0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -x \leq 0 \\ &\Rightarrow 2-\frac{1}{2} \leq 2-x \leq 2 \\ &\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2-x \leq 2 \end{aligned}$$

alors

$$f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{3}{2},2\right] \subset [0,2]\,.$$

2. *Soit la fonction*

$$\begin{aligned} g: \ [0,2] &\rightarrow [0,1] \\ x &\mapsto (x-1)^2. \end{aligned}$$

Calculer $g^{-1}(\{0\})$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0\}) &= \{x \in [0,2]\,/f(x) \in \{0\}\} \\ &= \left\{x \in [0,2]\,/(x-1)^2 \in \{0\}\right\} \\ &= \left\{x \in [0,2]\,/(x-1)^2 = 0\right\} \\ &= \{x \in [0,2]\,/\ x-1=0\} \\ &= \{1\}\,. \end{aligned}$$

2.11 Propriétés des applications

Soit $f : E \to F$ une application.

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Preuve.

1. Soit $y \in f(A)$,

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\implies \exists x \in A / f(x) = y \\ &\overset{A \subset B}{\implies} \exists x \in B / y = f(x) \\ &\implies y \in f(B) \end{aligned}$$

d'où

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B).$$

2. Soit $y \in f(A \cup B)$,

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B / \ f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A / \ f(x) = y \ ou \ \exists x \in B / \ f(x) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \ ou \ y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B), \end{aligned}$$

d'où

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

3. Soi t$y \in f(A \cap B)$,

$$\begin{aligned} y \quad &\in \quad f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B / \ y = f(x) \\ &\Rightarrow \quad \exists x \in A \ et \ x \in B / \ y = f(x) \\ &\Rightarrow \quad y \in f(A) \ et \ y \in f(B) \\ &\Rightarrow \quad y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

d'où

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

□

Remarque 2.11.1 *En général, la deuxiéme inclusion n'est pas vérifié, voir l'exemple suivant.*

Exemple 2.11.2 *Soit*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} \ &\rightarrow \ \mathbb{R} \\ x \ &\mapsto \ x^2 \end{aligned}$$

$A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, $A \cap B = \{0\}$

$f(A) = f(B) = [0, 1]$, $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$, $f(A) \cap f(B) = [0, 1]$

d'où $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Remarque 2.11.3 *L'égalité n'ayant lieu que si f est injective.*

Proposition 2.11.4 *Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$*

1. *gof est injective $\Longrightarrow$ f est injective.*

2. *gof est surjective $\Longrightarrow$ g est surjective.*

3. *gof est bijective $\Longrightarrow$ f est injective et g est surjective.*

Preuve.

1. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\iff gof(x_1) = gof(x_2) \\ \overset{gof\ injective}{\iff} x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

   d'où f injective.

2. Pour montrer que g est surjective, il suffit de montrer que $g(F) = G$.

   D'autre par,t on a ,

$$gof(E) = G \text{ car } gof \text{ est surjective.}$$

   et

$$G = gof(E) = g\left(f(E)\right) \subset g(F) \subset G$$

   d'où

$$g(F) = G, \text{ ainsi } g \text{ est surjective.}$$

□

2.12 Exercices

Exercice 2.12.1 *1- Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut on écrie :*

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\varnothing \in E$
5. $\varnothing \subset E$
6. $\{\varnothing\} \subset E$.

2- Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

- Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$.

Solution :

1-

1. $vraie$
2. $faux$
3. $vraie$
4. $faux$
5. $vraie$
6. $faux$.

Exercice 2.12.2 *2-*

- $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$
- $A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1) \\ , (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3) \end{array} \right\}$

Exercice 2.12.3 *Soient E et F deux ensembles. Montrer que* :

$$P(E) = P(F) \Leftrightarrow E = F$$

où $P(E)$ est l'ensemble des parties de E.

Solution :

Montrons que $P(E) = P(F) \Leftrightarrow E = F$.

1- Montrons si $P(E) = P(F) \Rightarrow E = F$

Supposons $P(E) = P(F)$

$$P(E) = \{A/\ A \subset E\} = P(F) = \{B/\ B \subset F\}$$

1) *Soit $x \in E$,*

$$\begin{aligned} x \quad \in \quad & E \Rightarrow \{x\} \subset E \\ \Rightarrow \quad & \{x\} \in P(E) \\ \Rightarrow \quad & \{x\} \in P(F), (P(E) = P(F)) \\ \Rightarrow \quad & \{x\} \subset F \\ \Rightarrow \quad & x \in F \\ \Rightarrow \quad & E \subset F. \end{aligned}$$

2) *Soit* $y \in F$,

$$\begin{aligned} y \quad &\in \quad F \Rightarrow \{y\} \subset F \\ &\Rightarrow \quad \{y\} \in P(F) \\ &\Rightarrow \quad \{y\} \in P(E), (P(E) = P(F)) \\ &\Rightarrow \quad \{y\} \subset E \\ &\Rightarrow \quad y \in E \\ &\Rightarrow \quad F \subset E. \end{aligned}$$

D'où $E = F$.

2-Montrons si $E = F \Rightarrow P(E) = P(F)$.

Supposons $E = F$

1) *Soit* $A \in P(E)$

$$\begin{aligned} A \quad &\in \quad P(E) \Rightarrow A \subset E \\ &\Rightarrow \quad A \subset F, \ (E = F) \\ &\Rightarrow \quad A \in P(F) \\ &\Rightarrow \quad P(E) \subset P(F). \end{aligned}$$

2) *Soit* $B \in P(F)$

$$\begin{aligned} B \quad &\in \quad P(F) \Rightarrow B \subset F \\ &\Rightarrow \quad B \subset E, \ (E = F) \\ &\Rightarrow \quad B \in P(E) \\ &\Rightarrow \quad P(F) \subset P(E). \end{aligned}$$

D'où $P(E) = P(F)$.

Exercice 2.12.4 *Montrer que pour toutes parties* A, B, C *de* E,*on a :*

1. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
2. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

Solution :

1) *Monter que* $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

1.1) *Montrons la première implication* ($\Longrightarrow$)

Supposons $A \cap B = A \cup B$, *soit* $x \in A$,

$$\begin{aligned} x \quad &\in \quad A \Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cap B, (A \cap B = A \cup B) \\ &\Rightarrow \quad x \in B \\ &\Rightarrow \quad A \subset B. \end{aligned}$$

Soit $y \in B$,

$$\begin{aligned} y \quad &\in \quad B \Rightarrow x \in B \cup A \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cap B, (A \cap B = A \cup B) \\ &\Rightarrow \quad x \in A \\ &\Rightarrow \quad B \subset A. \end{aligned}$$

D'où $A = B$.

1.2) *Montrons la deuxième implication*($\Longleftarrow$)

Supposons $A = B$,

$$\begin{aligned} A \quad &= \quad B \Longrightarrow A \cap B = A = B \\ &\Longrightarrow \quad A \cup B = A = B, \end{aligned}$$

D'où $A \cap B = A \cup B$.

2) *Montrer que :* $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

2.1) *Montrons que* $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$.

Supposons $A \cup B = A \cap C$.

Soit $x \in B$,

$$\begin{aligned} x \quad &\in \quad B \Rightarrow x \in B \cup A \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cap C, (A \cup B = A \cap C) \\ &\Rightarrow \quad x \in A \\ &\Rightarrow \quad B \subset A. \end{aligned}$$

Soit $y \in A$

$$\begin{aligned} y \quad &\in \quad A \Rightarrow y \in A \cup B \\ &\Rightarrow \quad y \in A \cap C, (A \cup B = A \cap C) \\ &\Rightarrow \quad y \in C \\ &\Rightarrow \quad A \subset C, \end{aligned}$$

d'où $B \subset A \subset C$.

2.2) *Montrons* $B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$.

Supposons $B \subset A \subset C$,

on a :

$$\begin{aligned} B \quad &\subset \quad A \subset C \Longrightarrow A \cup B = A \ et \\ B \quad &\subset \quad A \subset C \Longrightarrow A \cap C = A, \end{aligned}$$

d'où $A \cup B = A \cap C$.

Exercice 2.12.5 *Soient* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n\ est\ pair \\ \frac{n-1}{2} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité,et la bijectivité de f.

Solution :

1/ f *est injective* $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, ($f(n_1) = f(n_2) \Longrightarrow n_1 = n_2$)

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$,

$$f(n_1) = f(n_2) \Longrightarrow \begin{cases} \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} & si\ n_1, n_1\ sont\ pairs \\ \frac{n_1-1}{2} = \frac{n_2-1}{2} & si\ n_1, n_1\ sont\ impairs \\ \frac{n_1}{2} = \frac{n_2-1}{2} & si\ n_1\ est\ pair,\ et\ n_2\ est\ impair \\ \frac{n_1-1}{2} = \frac{n_2}{2} & si\ n_2\ est\ pair,\ et\ n_1\ est\ impair \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 & si\ n_1, n_1\ sont\ pairs \\ n_1 = n_2 & si\ n_1, n_1\ sont\ impairs \\ n_1 = n_2 - 1 & si\ n_1\ est\ pair,\ et\ n_2\ est\ impair \\ n_1 - 1 = n_2 & si\ n_2\ est\ pair,\ et\ n_1\ est\ impair \end{cases},$$

d'où f *n'est pas injective sur* $\mathbb{N}$.

2/ f *surjective* $\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / \ y = f(n)$.

Soit $y = f(n)$,

$$y = f(n) \Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{n}{2} & si\ n\ est\ pair \\ y = \frac{n-1}{2} & si\ n\ est\ impair \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n = 2y & si\ n\ est\ pair \\ n = 2y+1 & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

$\forall y \in \mathbb{N}, \exists (n = 2y,\ si\ n\ est\ pair,\ et\ n = 2y+1,\ si\ n\ est\ impair)\ tel\ que\ \ y = f(n)$,

d'où f *est surjective sur* $\mathbb{N}$.

Exercice 2.12.6 *Soit* $f : [-1, 0] \to [-1, 1]$ *l'application définie par*

$$f(x) = \frac{3x+1}{1+x^2}$$

Déterminer $f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right)$, $f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right\}\right)$.

Solution :

1/

$$\begin{aligned} f\left(\left[-\frac{1}{2},0\right]\right) &= \left\{f(x)\in[-1,1]\,/\; x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]\right\} \\ &= \left\{\frac{3x+1}{1+x^2}\in[-1,1]\,/\; x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]\right\} \\ &= \left\{\frac{3x+1}{1+x^2}\in[-1,1]\,/-\frac{1}{2}\leq x\leq 0\right\} \\ &= \left\{\frac{3x+1}{1+x^2}\in[-1,1]\,/-\frac{1}{2}\leq 3x+1\leq 1 \text{ et } 1\leq\frac{1}{1+x^2}\leq\frac{4}{5}\right\} \\ &= \left\{-\frac{1}{2}\leq\frac{3x+1}{1+x^2}\leq\frac{4}{5}\right\} \\ &= \left[-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]. \end{aligned}$$

2/

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{3},0,\frac{1}{2}\right\}\right) &= \left\{x\in[-1,1]\,/\; f(x)\in\left\{-\frac{1}{3},0,\frac{1}{2}\right\}\right\} \\ &= \left\{x\in[-1,1]\,/\; f(x)=-\frac{1}{3} \text{ ou } f(x)=0 \text{ ou } f(x)=\frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{x\in[-1,1]\,/\; \frac{3x+1}{1+x^2}=-\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{3x+1}{1+x^2}=0 \text{ ou } \frac{3x+1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{-9+\sqrt{65}}{2},\frac{-1}{3},3-\sqrt{10}\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 2.12.7 *Soit l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

1. *Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$. L'application f est-elle surjective ?*

2. *Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$. L'application f est-elle injective ?*

Solution :*L'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

1)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ \frac{x}{1+x^2} = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ x^2 - x + 1 = 0\right\} \end{aligned}$$

on a

$$\triangle = 1 - 4 = -3 < 0$$

donc l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{R}$,

d'où,

$$f^{-1}(\{1\}) = \varnothing.$$

Et f *n'est pas surjective car* 1 *n'admet pas un antécédent .*

2)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\left\{\frac{1}{3}\right\}) &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ f(x) = \frac{1}{3}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{3}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 - 3x + 1 = 0\right\} \\ &= \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Donc, f *n'est pas injective car* $f(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = f(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ *et* $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2.12.8 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux applications définie par*

$$f(x) = 2x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1.$$

A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Solution :

$f(x) = 2x + 1$ *et* $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. *Donc,*

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(x^2 - 1) + 1 \\ (f \circ g)(x) &= 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (2x + 1)^2 - 1 \\ (g \circ f)(x) &= 4x^2 + 4x. \end{aligned}$$

D'où

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Chapitre 3

Relations binaires sur un ensemble

3.1 Relation binaire sur un ensemble

Défiinition 3.1.1 *Soient $x \in E$, $y \in F$. Une relation $\Re$ entre x et y est une correspondance entre x et y.*

Lorsque le couple (x, y) vérifie la relation $\Re$, on note $x\Re y$.

Si x, y appartiennent au même ensemble E, la relation $\Re$ est appelée relation binaire dans E.

Exemple 3.1.2 *1. $x, y \in \mathbb{N}$, $x\Re y \Longleftrightarrow x$ divise y, $\Re$ relation binaire*

2. $x, y \in \mathbb{R}$, $x\Re y \Longleftrightarrow x = y$

3. $A \subset E, B \subset E$, $A\Re B \Leftrightarrow A \subset B$.

3.2 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soient $\Re$ une relation binaire dans un ensemble E et $x, y, z \in E$.

1. $\Re$ est réflixive $\Leftrightarrow \forall x \in E\ ,\ \ x\Re x$
2. $\Re$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ x\Re y \Rightarrow y\Re x$
3. $\Re$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ x\Re y$ et $y\Re x \Rightarrow x = y$
4. $\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E,\ x\Re y$ et $y\Re z \Rightarrow x\Re z$.

Défiinition 3.2.1 *Une relation est dite relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Une relation est dite relation d'odre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 3.2.2 *1.* $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ x\Re y \Leftrightarrow x = y$, *est une relation d'équivalence et aussi est une relation d'ordre.*

2. Soient $A, B \subset E,\ \ A\Re B \Leftrightarrow A \subset B$ *est une relation d'ordre.*

En effet :

- $\forall A \subset E,\ \ A \subset A \Leftrightarrow \Re$ *réflexive.*

- $\forall A, B \subset E,\ A \subset B$ *et* $B \subset A \Rightarrow A = B \Rightarrow \Re$ *est antisymetrique.*

- $\forall A, B, C \subset E, A \subset B$ *et* $B \subset C \Rightarrow A \subset C \Rightarrow \Re$ *est transitive .*

3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ x\Re y \Leftrightarrow x \leq y$, *est une relation d'ordre.*

4. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\Re y \Leftrightarrow x - y$ *est un multiple de* n $(n \geq 1)$ *est une relation d'équivalence, elle est appelée congruence modulo* n *et notée par*

$$x\Re y \Leftrightarrow x \equiv y\,[n] \Leftrightarrow x - y = kn, k \in \mathbb{Z}.$$

Défiinition 3.2.3 - *Une relation d'ordre dans un ensemble* E *est dite d'ordre total si deux éléments quelconque de* E *sont comparable i.e.*

$$\forall x, y \in E, \quad on\ a\ x\Re y\ ou\ y\Re x.$$

- Une relation d'odre qui n'est pas d'ordre total est dite d'ordre partiel.

Exemple 3.2.4 1. *Soient* $x, y \in \mathbb{R}, \quad x\Re y \Leftrightarrow x \leq y$

- $\Re$ *est réfléxive* $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x \Leftrightarrow x\Re x)$.

- $\Re$ *est antisymétrique* $\Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y\ et\ y \leq x \Rightarrow x = y)$.

- $\Re$ *est transitive* $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y\ et\ y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

- $\Re$ *est une relation d'ordre.*

Donc, l'ordre est total car $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *on a* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

2. *Soient* $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \ (x, y)\Re(x', y') \Leftrightarrow x \leq x'$ *et* $y \leq y'$.

$\Re$ *est une relation d'ordre. L'ordre est partiel car :* $(1, 2), (3, 0) \in \mathbb{R}^2$,

ni $(1, 2)$ *en relation avec* $(3, 0)$, *ni* $(3, 0)$ *en relation avec* $(1, 2)$.

3.3 Classe d'équivalence

Soit $\Re$ est une relation d'équivalence, on appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation $\Re$ avec x on la note :

$$C_x \text{ ou } \overline{x},$$

$$\overline{x} = \{y \in E/\ x\Re y\}.$$

Défiinition 3.3.1 *L'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de E est appellée ensemble quotient de E par $\Re$, il est noté $E/\Re$.*

$$E/\Re = \{\overline{x}/x \in E\}.$$

Exemple 3.3.2 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ x\Re y \Leftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$

$\Re$ est une relation d'équivalence, en effet :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^4 - x^2 = x^4 - x^2 \Leftrightarrow x\Re x \Leftrightarrow \Re$ *réfléxive.*
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \Rightarrow y^4 - y^2 = x^4 - x^2 \Leftrightarrow \Re$ *symétrique.*
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^4 - x^2 = y^4 - y^2$ *et* $y^4 - y^2 = z^4 - z^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = z^4 - z^2 \Leftrightarrow \Re$ *transitive.*

Cherchons les classes d'équivalence de $0, 1, \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{y \in \mathbb{R}/\ 0\Re y\} \\
0\Re y &\Leftrightarrow 0^4 - 0^2 = y^4 - y^2 \\
&\Leftrightarrow y^2(y^2-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \ ou\ y = 1 \ ou\ y = -1 \\
\overline{0} &= \{-1, 0, 1\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{1} &= \{y \in \mathbb{R}/\ 1\Re y\} \\
1\Re y &\Leftrightarrow 1^4 - 1^2 = y^4 - y^2 \\
y &= 0 \ ou\ y = 1 \ ou\ y = -1 \\
\overline{1} &= \{-1, 0, 1\} = \overline{0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{1}}{2} &= \left\{y \in \mathbb{R}/\ \frac{1}{2}\Re y\right\} \\
\frac{1}{2}\Re y &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = y^4 - y^2 \\
&\Leftrightarrow y^4 - y^2 - \frac{3}{16} = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - \frac{1}{4})(y^2 - \frac{3}{4}) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{1}}{2} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 *Dans chacun des cas suivants la relation $\Re$ définie sur E est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique ou transitive ?*

1.

$$E = \mathbb{N} \text{ et } x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}.$$

2.

$$E = \mathbb{N} \text{ et } x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ x = y^n.$$

Solution :

1) -a)$\Re$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{N}$,

$$\frac{x+2x}{3} = x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x\Re x\ (\Re\ réflexive).$$

b) $\Re$ est symétrique :$\forall x, y \in \mathbb{N}$,

$$x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}.$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{x+2y}{3} + \frac{2x+y}{3} &= x+y \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x+2y}{3} + \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N}, \left(\frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}\right) \\ &\Rightarrow \Re \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

c) $\Re$ est antisymétrique

Soient $x = 1,\ y = 4$

$$\frac{1+8}{3} \in \mathbb{N}, \frac{4+2}{3} \in \mathbb{N} \nRightarrow 1 = 4.$$

Alors $\Re$ *n'est pas antisymétrique.*

d) $\Re$ *est transitive :* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N} \\ y\Re z \Leftrightarrow \frac{y+2z}{3} \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2y}{3} + \frac{y+2z}{3} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2z}{3} + \frac{3y}{3} \in \mathbb{N}, \ \ (y \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \frac{x+2z}{3} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \Re \text{ est transitive.}$$

2) $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x = y^n$

a) $\Re$ *est réflexive :* $\forall x \in \mathbb{N}$,

$$\exists n = 1 \in \mathbb{N},\ x = x \Leftrightarrow x\Re x \ \ (\Re\ réflexive).$$

b) $\Re$ *est symétrique :* $\forall x, y \in \mathbb{N}$,

$$x\Re y \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ x = y^n$$

$$\Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^{\frac{1}{n}}.$$

- Nous remarquons que pour $x, y \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \neq y$, *et s'il existe* $n \in \mathbb{N}$, *tel que* $x = y^n$,

alors y *s'ércit sous la forme*

$$y = x^{\frac{1}{n}} \ avec\ n \neq 1,$$

d'où il n'éxiste pas un $n_0 \in \mathbb{N}$, *tel que*

$$y = x^{n_0}.$$

Donc $\Re$ *n'est pas symétrique.*

Par exemple : $x = 9$ *et* $y = 3$,

$\exists n = 2/\ 9 = 3^2$ *mais n'éxiste pas* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tel que* $3 = 9^{n_0}$, *car* $3 = 9^{\frac{1}{2}}$ *et* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

c) $\Re$ *est antisymétrique :* $\forall x, y \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x = y^n \\ y\Re x \Leftrightarrow \exists n^{'} \in \mathbb{N},\ y = x^{n^{'}} \end{cases} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \exists n^{'} \in \mathbb{N},\ x = x^{n^{'}n}$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \exists n^{'} \in \mathbb{N},\ nn^{'} = 1$$

$$\Rightarrow n = n^{'} = 1$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow \Re \text{ est antisymétrique.}$$

d) $\Re$ *est transitive :* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x = y^n \\ y\Re z \Leftrightarrow \exists n^{'} \in \mathbb{N},\ y = z^{n^{'}} \end{cases} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ \exists n^{'} \in \mathbb{N};\ x = z^{n^{'}n}$$

$$\Rightarrow \exists n^{''} = nn^{'} \in \mathbb{N},\ x = z^{n^{''}}$$

$$\Rightarrow x\Re z$$

$$\Rightarrow \Re \text{ est transitive.}$$

Exercice 3.4.2 *Soit* $E = \{1, 2, 3, 5, 8, 14, 17\}$.

1. *Montrer que l'on peut définir une relation d'équivalence sur E en posant*

$$x\Re y \Longleftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}.$$

2. *Trouver les classes d'équivalence.*

Solution :

1/ $\Re$ *est une relation d'équivalence sur* E*, en effet*

- $\Re$ *est réflexive :* $\forall x \in E$,

$$\frac{x+x}{2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x\Re x \ \ (\Re \ réflexive)\,.$$

- $\Re$ *est symétrique :* $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned} x\Re y &\Longleftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \frac{y+x}{2} \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow y\Re x \\ &\Longrightarrow \Re \ symétrique. \end{aligned}$$

- $\Re$ *est transitive :* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{l} x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N} \\ y\Re z \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} & \in & \mathbb{N} \Longrightarrow \\ \frac{x+z}{2} + y & \in & \mathbb{N} \Longrightarrow \\ \frac{x+z}{2} & \in & \mathbb{N}, \ (y \in E)\,. \end{array}$$

2/ Les classes d'équivalence :

$$\begin{array}{rcl} \overline{x} & = & \{y \in E/\ x\Re y\} \\ & = & \left\{y \in E/\ \frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}\right\}. \end{array}$$

Si $x \in \{1, 3, 5, 17\}$

$$\overline{x} = \{1, 3, 5, 17\}\,.$$

Si $x \in \{2, 8, 14\}$

$$\overline{x} = \{2, 8, 14\}\,.$$

Exercice 3.4.3 *Dans* $\mathbb{N}^*$ *on définit une relation binaire notée* $|$ *par :*

$x|y$ *si et seulement si* x *divise* y

1. Montrer que $|$ *est une relation d'ordre*

2. Trouver un élément x_0 *tel que pour tout* x *dans* $\mathbb{N}^*$, x_0 *divise* x.

3. L'ordre est il total ?

Solution :

1/ $|$ *est une relation d'ordre, en effet*

- $|$ *est réflexive :* $\forall x \in \mathbb{N}^*$,

$$x \text{ divise } x \Leftrightarrow x|x \ \ (\Re \ réflexive)\,.$$

- $|$ *est antisymétrique :* $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow x|y \\ \\ y\Re x \Leftrightarrow y|x \end{cases} \Rightarrow \ x = y$$

$$\Rightarrow \ \Re \text{ est antisymétrique.}$$

- $|$ *est transitive :* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow x|y \\ \\ y\Re z \Leftrightarrow y|z \end{cases} \Rightarrow \ x|z$$

$$\Rightarrow \ \Re \text{ est transitive.}$$

2/

$$\exists x_0 = 1 \in \mathbb{N}^*, \ x_0|x.$$

3/ L'ordre est partiel car, si

$$x = 2 \text{ et } y = 3,$$

ni x *divise* y, *ni* y *divise* x.

Chapitre 4

Structures algébriques

Défiinition 4.0.4 *(Loi interne)*

Soit G un ensemble, on appelle loi interne sur G toute application de $G \times G$. On note une loi interne par $*$, Δ.

Exemple 4.0.5 *1. L'addition est une loi interne sur $\mathbb{R}$, de même pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.*

2.L'application

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} & \rightarrow & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ & (a, b) & \longmapsto & a + b - 2ab \end{array}$$

est une loi interne dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ car $\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \forall b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$,

on a : $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$.

Défiinition 4.0.6 *Soit G un ensemble et $*$ une loi interne*

1. *$*$ est dite commutative si et seulement si $\forall x, y \in G : x * y = y * x$*

2. $*$ *est dite assosiative si et seulement si* $\forall x, y, z \in G : (\ x * y) * z = x * (y * z)$

3. $*$ *admet un élément neutre si et seulement si* $\exists e \in G / \forall x \in G : x * e = e * x = x$

4. *soit* $x \in G$, *on dit qu'un élément* $x' \in G$ *est l'élément inverse ou symétrique de* x *par la loi* $*$ *si et seulement si* $x * x' = x' * x = e$ *(*e *est élément neutre).*

4.0.1 Groupe

Défiinition 4.0.7 *On appelle groupe un ensemble* G *muni d'une opération interne* $*$ *telleque*

1. $(*)$ est associative
2. $(*)$ admet un élément neutre
3. tout élément de G admet un inverse dans G .

Remarque 4.0.8 *Si de plus* $*$ *est commutative, on dit que* $(G, *)$ *est un groupe commutative (ou abelien).*

Exemple 4.0.9 1. $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*

2. $(\mathbb{R}, \times)$ *n'est pas un groupe car le* 0 *n'admet pas d'inverse.*

3. $(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe commutatif.*

4. $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}\right) = \left\{\overline{0}, ..., \overline{(n-1)}\right\}$ *est un groupe commutatif d'élément neutre* $\overline{0}$,

tels que :

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{x}/\ x \in \mathbb{Z}\}, \\ \overline{x} &= \{y \in \mathbb{Z}/\ (x-y)\ \textit{est un multiple de } n\}. \\ \forall \overline{x}, \overline{y} &\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{x+y}. \end{aligned}$$

4.0.2 Morphisme de groupes

Soient $(E, *)$ et (G, Δ) deux groupes, avec e et h leurs éléments neutres respectifs.

Défiinition 4.0.10 *Une application $f : E \longrightarrow G$ est appelée morphisme de groupes de E dans G si*

$$\forall x, y \in E,\ f(x * y) = f(x)\Delta f(y).$$

1. *Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de groupes de E sur G.*
2. *Si $E = G$, on dit que f est un endomorphisme de E, et de plus f est bijective, on dit que f est un automorphisme de groupe de E.*

Exemple 4.0.11 *Soit l'application $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$ telle que $f(x) = e^x$.*

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} \\ &= e^x \times e^y \\ &= f(x) \times f(y). \end{aligned}$$

D'où est un morphisme de groupes.

Défiinition 4.0.12 *Soit* $f : E \longrightarrow G$ *un morphisme de groupes de* $(E, *)$ *dans* (G, Δ).

- *On appelle noyau de* f *l'ensemble*

$$Ker\ f = f^{-1}(\{h\}) = \{x \in E / f(x) = h\}.$$

- *On appelle image de* f *l'ensemble*

$$\text{Im}\ f = f(E) = \{f(x) / x \in E\}.$$

4.0.3 Sous groupes

Défiinition 4.0.13 *Soit* $(E, *)$ *un groupe, on appelle sous groupe de* $(E, *)$ *tout sous ensemble non vide* F *de* E *tel que* $(F, *)$ *est un groupe avec la loi induite par celle de* E.

Proposition 4.0.14 *Soient* $(E, *)$ *un groupe d'élément neutre* e *et* F *un sous ensemble de* E *: On dit que* F *est un sous groupe de* E *si et seulement si*

1. $e \in F$
2. $\forall x, y \in F,\ \ x * y \in F$.
3. $\forall x \in F,\ x^{-1} \in F$.

Exemple 4.0.15 *L'ensemble*

$$n\mathbb{Z} = \{nk / \ k \in \mathbb{Z}\},\ \ avec\ n \in \mathbb{N}$$

est un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

En effet,

1/ $0 \in n\mathbb{Z}$.

2/Soient $x, y \in n\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x,y \quad \in \quad n\mathbb{Z} \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} x = nk/\ k \in \mathbb{Z} \\ \\ y = nk^{'}/\ k^{'} \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \\ \Longrightarrow & \ x + y = nk + nk^{'} \\ \Longrightarrow & \ x + y = n\left(k + k^{'}\right) \\ \Longrightarrow & \ x + y = nk^{''}/\ \left(k + k^{'}\right) = k^{''} \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow & \ x + y \in n\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3/ Soit $x \in n\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x \quad \in \quad & n\mathbb{Z} \Longrightarrow x = nk/\ k \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow & \ -x = -nk \\ \Longrightarrow & \ -x = nk^{'}/\ k^{'} = -k \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow & \ x^{-1} = -x \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

D'où $(n\mathbb{Z},+)$ *est un sous groupe de* $(\mathbb{Z},+)$.

Proposition 4.0.16 *Soient* $(E,*)$ *un groupe d'élément neutre* e *et* F_1, F_2 *deux sous groupes de* E. *Alors* $F_1 \cap F_2$ *est un sous groupe de* E.

Remarque 4.0.17 *En général, la réunion de sous groupes n'est pas un sous groupe.*

4.0.4 Sous groupe engendré par un sous ensemble

Défiinition 4.0.18 *Soit $(G,*)$ un groupe, et A une partie de G.*

- Le plus petit sous groupe de G contenant A est appelé le sous groupe engendré par A.

- Si ce sous-groupe est G, on dit que A est une partie génératrice de G.

- On dit que $x \in G$ est générateur de G si $\{x\}$ est une partie génératrice de G.

Proposition 4.0.19 *Le sous groupe engendré par A est l'intersection de tous les sous groupes contenant A.*

- Si $A \neq \emptyset$, alors ce sous-groupe est égal à

$$\{a_1^{\alpha_1}...a_k^{\alpha_n},\ k \in \mathbb{N}^*,\ a_i \in A,\ \alpha_i\ \pm 1\}.$$

- En particulier, le sous-groupe engendré par $a \in G$ est

$$\{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 4.0.20 *Soit le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$, et $A = \{3\} \subset \mathbb{R}^*$, le sous groupe engendré par A est*

$$H = \{3^n, n \in Z\}.$$

Proposition 4.0.21 *Soit $f : E \longrightarrow G$ un morphisme de groupes de $(E,*)$ dans (G,Δ). Alors*

1.

$$f(e) = h$$

2. $\forall x \in E$,

$$(f(x))^{-1} = f(x^{-1}).$$

3. L'image d'un sous groupe de E *est un sous groupe de* G*.*

4. L'image réciproque d'un sous groupe de G *est un sous groupe de* E*.*

5. f *est injective si et selement si* $Ker\ f = \{e\}$*.*

6. f *est surjective si et selement si* $\operatorname{Im} f = G$*.*

4.0.5 Anneaux

Soit A un ensemble muni de deux lois de compossition interne $(*)$ *et* (Δ). On dit que $(A, *, \Delta)$ est un anneau si :

1. $(A, *)$ est un groupe commutatif,
2. $\forall x, y, z \in A : x\Delta(y * z) = (x\Delta y) * (x\Delta z)$,
3. (Δ) est assosiative.

Si de plus (Δ) admet un élément neutre on dit que $(A, *, \Delta)$ est un anneau unitaire.

4.0.6 Morphisme d'anneaux

Soit $(E, *, \Delta)$ et (G, Θ, T) deux groupes, avec e et h leurs éléments neutres respectifs.

Défiinition 4.0.22 *Une application $f : E \longrightarrow G$ est appelée morphisme d'aneauxs de E dans G si*

$$1/\ \forall x, y \ \in \ E,\ f(x * y) = f(x)\Theta f(y)$$

$$2/\ \forall x, y \ \in \ E,\ f(x\Delta y) = f(x)Tf(y).$$

4.0.7 Sous anneaux

Défiinition 4.0.23 *On appelle sous anneau de $(A, *, \Delta)$, tout sous ensemble $A^{'}$ de A tel que $A^{'}$ muni des restrictions des lois $*$ et Δ est un anneau. Si A est un anneau unitaire (Δ admet un élément neutre : 1_A) et $1_A \in A^{'}$, on dit que $A^{'}$ est sous anneau unitaire.*

Proposition 4.0.24 *Un sous ensemble $A^{'}$ de A est un sous anneau si et seulement si :*

1. $A^{'} \neq \emptyset$,
2. $\forall x, y \in A^{'}$, $x * y^{-1} \in A^{'}$, (y^{-1} élément symétrique de y paraport a $*$),
3. $\forall x, y \in A^{'}$, $x\Delta y \in A^{'}$.

Exemple 4.0.25 $(\mathbb{Z}, +, .)$ *est un sous anneau de* $(\mathbb{R}, +, .)$.

4.0.8 Corps

Soit $\Bbbk$ un ensemble muni de deux lois interne $(*)$ *et* (Δ), on dit que $(\Bbbk, *, \Delta)$ est un corps si :

1. $(\mathbb{k}, *, \Delta)$ est un anneau unitaire,

2. $(\mathbb{k} - \{e\}, \Delta)$ est un groupe ou e désigne l'élément neutre de $(*)$.

Si de plus (Δ) est commutative, on dit que $(\mathbb{k}, *, \Delta)$ est un corps commutatif.

Exemple 4.0.26 $(\mathbb{Z}, +, .)$ *et* $(\mathbb{R}, +, .)$ *sont des corps commutatifs.*

Il existe un corps plus grand que le corps des nombres réels, c'est le corps des nombres complexes.

4.0.9 Sous coprs

Défiinition 4.0.27 *On appelle sous corps, d'un corps* $(\mathbb{k}, *, \Delta)$*, tout sous ensemble* $\mathbb{k}^{'}$ *de* $\mathbb{k}$ *tel que, muni des restrictions des lois* $*$ *et* Δ *est un corps.*

Proposition 4.0.28 $\mathbb{k}^{'}$ *est un sous corps de* $(\mathbb{k}, *, \Delta)$ *si et seulement si*

1. $\mathbb{k}^{'} \neq \emptyset$,

2. $\forall x, y \in \mathbb{k}^{'}$, $x * y^{-1} \in \mathbb{k}^{'}(y^{-1}$ élément symétrique de y paraport a $*)$,

3. $\forall x, y \in A^{'}$, $x \Delta y^{'} \in \mathbb{k}^{'}$, ($y^{'}$ élément symétrique de y paraport a Δ).

Exemple 4.0.29 *1.* $\mathbb{Q}$ *est un sous corps de* $\mathbb{R}$ *pour les lois usuelles.*

2. $\mathbb{R}$ *est un sous corps de* $\mathbb{C}$ *pour les lois usuelles.*

Proposition 4.0.30 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est un corps si* n *est premier.*

4.1 Exercices

Exercice 4.1.1 *I- Soit $*$ la loi définie dans $\mathbb{R}$ par*

$$x * y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

a) Vérifier que $*$ est commutative, non associative et admet un élément neutre.

b) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$1)\ 2 * x = 5$$

$$2)\ x * x = 1$$

II- On définit sur $\mathbb{R}$ la loi

$$x * y = x + y - xy$$

-Etudier l'associativité, commutativité, existance d'un élément neutre, existance d'élément symetrique.

Solution :

a) $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

$*$ *est commutative*$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = y * x$ *ce qui est vraie*

$*$ *est associative*$\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z)$,

on trouve $(x * y) * z \neq x * (y * z)$.

$*$ *admet un élément neutre* $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$,

on utilise une seule équation car $*$ est commutative.

$x * e = x \Leftrightarrow xe + (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x \Rightarrow e = 1.$

b) -2 $* x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3\left(x^2 - 1\right) = 5 \Leftrightarrow x = -2$ *ou* $x = \frac{4}{3}$.

$x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$, *ou* $x = -1$.

II- $x * y = x + y - xy$

$*$ *est associative*$\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z)$,

on a $(x * y) * z = x * (y * z)$ *vraie.*

$*$ *est commutative*$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = y * x$ *ce qui est vraie.*

$*$ *admet un élément neutre* $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$,

on utilise une seule équation car $*$ *est commutative.*

$x * e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x \Leftrightarrow e = 0$.

- Chaque élément x *de* $\mathbb{R}$ *admet un élément symetrique.*

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x * x' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{-x}{1-x}$ *pour* $x \neq 1$.

1 *n'admet pas un élément neutre, donc tout les élément de* $\mathbb{R}$ *n'ont pas un inverse.*

Exercice 4.1.2 *On définit sur* $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ *la loi*

$$x * y = x + y + 2xy$$

-Montrer que $*$ *est interne.*

-Montrer que $\left(\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ *est un groupe commutatif.*

Solution :

Sur $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * y = x + y + 2xy$

1) $*$ *est interne*$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * y \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

i.e. $\forall x \neq \frac{-1}{2}, \forall y \neq \frac{-1}{2}, x * y \neq \frac{-1}{2}$.

Par absurde :

Supposons que $x * y = \frac{-1}{2}$ *avec* $x \neq \frac{-1}{2}, y \neq \frac{-1}{2}$

$x * y = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x + y + 2xy = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + y + 2xy = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + y\,(1 + 2x) = 0$

$x + \frac{1}{2} + 2y\left(\frac{1}{2} + x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)(1 + 2y) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$ *ou* $y = \frac{-1}{2}$ *contradiction.*

Alors $x * y \neq \frac{-1}{2}$.

2) $\left(\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ *est un groupe commutatif* $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} * \text{ est interne} \\ * \text{ est commutative} \\ * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un élément neutre} \\ \text{chaque élément admet un inverse} \end{cases}$

$*$ *est interne d'aprés la question 1.*

$*$ *est commutative* $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * y = y * x$ *ce qui est vraie*

$*$ *est associative* $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, (x * y) * z = x * (y * z)$

$*$ *admet un élément neutre* $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \forall x \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * e = e * x = x,$

on utilise une seule équation car $*$ *est commutative.*$x * e = x \Rightarrow e = 0$

- Chaque élément x *de* $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ *admet un élément symetrique.*

$\forall x \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \exists x' \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * x' = 0$

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{-x}{2x + 1}.$$

Montrons que $\frac{-x}{2x+1} \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ *par l'absurde :*

Supposons que $\frac{-x}{2x+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 = 0$ *impossible, donc*

$$\frac{-x}{2x + 1} \neq -\frac{1}{2}$$

et alors $\left(\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},*\right)$ *est un groupe commutatif.*

Exercice 4.1.3 *On définit sur* $\mathbb{Q}$ *deux lois de composition internes* $(*)$ *et* (Δ) *comme suit*

$$\begin{cases} a*b=a+b-1 \\ a\Delta b=a+b-ab \end{cases}$$

-Montrer que $(\mathbb{Q},*,\Delta)$ *est un corps.*

Solution :

$(\mathbb{Q},*,\Delta)$ *est un corps* $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (\mathbb{Q},*,\Delta) \text{ anneau unitaire} \\ \text{chaque élément de } \mathbb{Q}-\{e\} \text{ admet un inverce par rappot à } \Delta \\ (\mathbb{Q},*) \text{ est un groupe commutatif} \end{cases}$

$(\mathbb{Q},*,\Delta)$ *anneau unitaire* $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (\mathbb{Q},*) \text{ est un groupe commutatif} \\ \Delta \text{ est associative} \\ \Delta \text{ est distributive sur } * \text{ à gauche et à droite} \\ \Delta \text{ admet un élément neutre} \end{cases}$

$(\mathbb{Q},*)$ *est un groupe commutatif* $\begin{cases} * \text{ est interne} \\ * \text{ est commutative} \\ * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un élément neutre } e=1 \\ \text{chaque élément de } \mathbb{Q} \text{ admet un inverce par rapport à } * \end{cases}$.

Exercice 4.1.4 *1. Montrer que*

$$H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x-y=0\right\},$$

est un sous groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$.

2. *Soit*

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x - y = 1\right\},$$

F est-il un sous groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$.

Solution :

1. *H est un sous groupe de* $(\mathbb{R}^2, +)$,

- $(0, 0) \in H$ *car* $0 - 0 = 0$.

- *Soient* $(x, y), (a, b) \in H$,

$$(x, y), (a, b) \in H \Longrightarrow x - y = 0 \text{ et } a - b = 0$$

et

$$\begin{aligned} (x, y) + (a, b) &= (x + a, y + b) \Longrightarrow \\ x + a - (y + b) &= x - y + a - b = 0. \end{aligned}$$

D'où $(x, y) + (a, b) \in H$.

- *Soit* $(x, y) \in H$,

$$(x, y) \in H \Longrightarrow x - y = 0 \ ,$$

et

$$-x - (-y) = -(x - y) = 0.$$

D'où $(x, y)^{-1} = (-x, -y) \in H$.

2. $(F,+)$ *n'est pas un sous groupe de* $(\mathbb{R}^2,+)$ *car :*

$$(0,0) \notin F,\ \ (0-0=0 \neq 1)\,.$$

Exercice 4.1.5 *On muni* $\mathbb{R}^2$ *de deux lois de composition interne :*

$$\begin{aligned} 1.\,(x,y)+(a,b) &= (x+a,y+b) \\ 2.\,(x,y)\times(a,b) &= (xa,xb+ya)\,, \end{aligned}$$

tel que $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ *est un anneau commutatif, et soit*

$$F=\{(x,0)\}\,/\ x\in\mathbb{R}$$

est un sous anneau de $(\mathbb{R}^2,+,\times)$*.*

Soit

$$\begin{aligned} f:\ (\mathbb{R},+,.) &\rightarrow (F,+,\times) \\ x &\longmapsto (x,0)\,. \end{aligned}$$

- Monter que f *un morphisme d'anneaux.*

Solution :

f *un morphisme d'anneaux si*

$$\begin{aligned} 1.\ \forall x,y &\in \mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y) \\ 2.\forall x,y &\in \mathbb{R},\ f(x.y)=f(x)\times f(y). \end{aligned}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1.\ f(x+y) &= (x+y,0) \\ &= (x,0)+(y,0) \\ &= f(x)+f(y). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} 2.\ f(x.y) &= (x.y,0),\ \ et \\ f(x)\times f(y) &= (x,0)\times(y,0) \\ &= (x.y, x.0+0y) \\ &= (x.y,0) \\ &= f(x.y). \end{aligned}$$

D'où f *un morphisme d'anneaux.*

Chapitre 5

Anneaux de polynomes

5.1 Polynôme

Défiinition 5.1.1 *Soit* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Un polynôme à coefficient dans $\mathbb{k}$ *est une expression de la forme*

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_iX^i,$$

où $n \in \mathbb{N}$ *et les coefficients* $a_0, a_1, ..., a_n$ *sont des éléments de* $\mathbb{k}$. *Le symbole* X *est appelé l'indéterminée (on pose* $X^0 = 1$ *).*

-L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{k}$ *est noté* $\mathbb{k}[X]$.

$$\mathbb{k}[X] = \{\textit{polynômes à coefficients dans } \mathbb{k}\}$$

-Les a_i *sont appelés les coefficients du polynôme.*

-Si tous les coefficients a_i *sont nuls,* P *est appelé le polynôme nul, il est noté* 0.

-Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type a_kX^k) sont appelés monômes.

-Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$, un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle terme dominant le monôme a_nX^n. Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant de P.

-Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un polynôme unitaire.

- $P(X) = 3 - 5X + X^2$ et $Q(X) = 7 + X^6$ sont deux polynômes.
- $R(X) = \frac{4+X^2}{1+X}$ n'est pas un polynôme.

5.1.1 Degré

Défiinition 5.1.2 *Soit P un polynôme non nul, on appelle degré de P, le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note $degP$.*

Ainsi

$$degP = n \Leftrightarrow P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n, \text{ avec } a_n \neq 0.$$

a_n s'appelle coefficient dominant de P. Par convention $deg(0) = -\infty$.

- *Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{k}$ est appelé un polynôme constant.*

  Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.
- On note

$$\mathbb{k}_n[X] = \{P \in \mathbb{k}[X] \ / \ \deg(P) \leq n\}.$$

Exemple 5.1.3 *$P(X) = 1 - X + X^5$ est un polynôme de degré 5.*

$P(X) = 2 + X^{2n+1}$ est un polynôme de degré $2n+1$

$Q(X) = 3$ est un polynôme de degré 0.

Théorème 5.1.4 *Soient $P, Q \in \mathbb{k}[X]$, on a :*

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- *Soit λ une constante non nulle alors :*

$$\deg(\lambda P) = \deg(P).$$

5.2 Opérations sur les polynômes

5.2.1 Egalité

Soient $P, Q \in \mathbb{k}[X]$ tels que

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

$$Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_nX^n$$

$$(P = Q) \Leftrightarrow (a_i = b_i \text{ pour tout } i)$$

et on dit que P et Q sont égaux.

5.2.2 Addition

Soient $P, Q \in \mathbb{k}[X]$ tels que

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

$$Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_nX^n$$

On définit,

$$(P+Q)(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_n + b_n)X^n.$$

5.2.3 Multiplication par un scalaire

Soit $P \in \mathbb{k}[X]$ tel que

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

Soit $\lambda \in \mathbb{k}$.

On définit

$$(\lambda P)(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + ... + \lambda a_nX^n$$

5.2.4 Multiplication

Soient $P, Q \in \mathbb{k}[X]$ tels que

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

$$Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_nX^m$$

On définit

$$(P \times Q)(X) = c_0 + c_1 X + ... + c_r X^r$$

avec $r = n + m$ et $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ pour $k \in \{0, 1, ..., r\}$.

Proposition 5.2.1 $\Bbbk[X]$ *est intègre.* $\forall P, Q \in \Bbbk[X]$

$$(P.Q = 0) \Longrightarrow (P = 0 \ ou \ Q = 0).$$

Preuve. Soient $P, Q \in \Bbbk[X]$, on a

$$(P.Q = 0) \Rightarrow \deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q) = -\infty$$

$$\Rightarrow \deg(P) = -\infty \text{ ou } \deg(Q) = -\infty$$

$$\Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

□

Exemple 5.3

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X) = 2 + X - 3X^4$$

$$Q(X) = X + X^2$$

On a $(3P - 4Q)(X) = 6 - X - 4X^2 - 9X^4$,

et $(P \times Q)(X) = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + c_4 X^4 + c_5 X^5 + c_6 X^6$,

avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ pour $k \in \{0, 1, ..., 6\}$

$$c_0 = \sum_{i+j=0} a_i b_j = a_0 b_0 = 0$$

$$c_1 = \sum_{i+j=1} a_i b_j = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 2 \times 1 + 1 \times 0 = 2$$

$$c_2 = \sum_{i+j=2} a_i b_j = a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_1 = 3$$

$$c_3 = \sum_{i+j=3} a_i b_j = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1 = 1$$

$$c_4 = \sum_{i+j=4} a_i b_j = 0$$

$$c_5 = \sum_{i+j=5} a_i b_j = -3$$

$$c_6 = \sum_{i+j=6} a_i b_j = -3$$

donc,

$$(P \times Q)(X) = 2X + 3X^2 + X^3 - 3X^5 - 3X^6.$$

Proposition 5.2.2 *Soient* $P, Q, R \in \Bbbk[X]$, *on a*

1. $P + Q = Q + P, \qquad P \times Q = Q \times P$
2. $P + (Q + R) = (P + Q) + R,$
3. $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R,$
4. $0 + P = P + 0 = P,$
5. $1 \times P = P \times 1 = P,$
6. $P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R)$.

5.3 Arithmétique des polynômes

5.3.1 Divisibilité

Défiinition 5.3.1 *Soient $A, B \in \Bbbk[X]$, on dit que B divise A (ou que A est multiple de B ou que A est divisible par B) s'il existe $Q \in \Bbbk[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B \mid A$.*

Exemple 5.3.2 *Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que*

$$A(X) = 2 + X + 2X^2 - X^5$$

$$B(X) = 1 + X^2$$

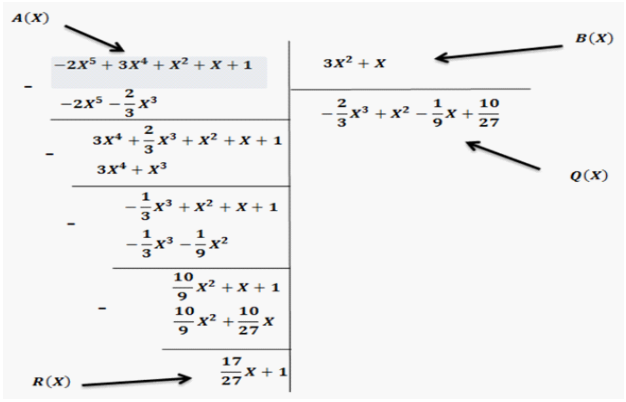
A est divisible par B, car il existe $Q \in \Bbbk_3[X]$ tel que $A = BQ$.

Le polynôme Q est défini par

$$Q(X) = 2 + X - X^3.$$

Proposition 5.3.3 *Soient $A, B, C \in \Bbbk[X]$, on a*

- *Si $B \mid A$ et $A \mid B \Longrightarrow \exists\ \lambda \in \Bbbk^*$ tel que $A = \lambda B$.*
- *Si $A \mid B$ et $B \mid C \Longrightarrow A \mid C$.*
- *Si $C \mid A$ et $C \mid B \Longrightarrow C \mid UA + VB$ avec $U, V \in \Bbbk[X]$.*



5.3.2 Division euclidienne

– *Soient* $A, B \in \mathbb{k}[X]$, *avec* $B \neq 0$, *alors il existe un unique polynpôme* Q *et il existe un unique polynôme* R *tels que :*

$$A = QB + R \quad et \quad \deg R < \deg B$$

Q *est appelé le quotient et* R *le reste de la* ***division euclidienne*** *de* A *par* B.

– *La condition* $\deg R < \deg B$ *signifie* $R = 0$ *ou bien* $0 \leq \deg R < \deg B$.

– *Enfin* $R = 0$ *si et seulement si* $B \mid A$.

Exemple 5.3.4 *Soient* $A, B \in \mathbb{R}[X]$ *tels que*

$$A(X) = 1 + X + X^2 + 3X^4 - 2X^5,$$

$$B(X) = X + 3X^2.$$

Alors on trouve

$$Q(X) = \tfrac{10}{27} - \tfrac{1}{9}X + X^2 - \tfrac{2}{3}X^3$$

$$R(X) = 1 + \tfrac{17}{27}X.$$

5.3.3 Pgcd et ppcm de deux polynômes

Défiinition 5.3.5 *Soient $A, B \in \mathbb{k}[X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Il existe un unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois A et B.*

Défiinition 5.3.6 *Cet unique polynôme est appelé le pgcd (plus grand commun diviseur) de A et B que l'on note $pgcd(A, B)$.*

Algorithme d'Euclide Soient A et B des polynômes, $B \neq 0$.

On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$A = BQ_1 + R_1, \ \deg R_1 < \deg B$$

$$B = R_1Q_2 + R_2, \ \deg R_2 < \deg R_1$$

$$R_1 = R_2Q_3 + R_3, \ \deg R_3 < \deg R_2$$

$$R_{k-2} = R_{k-1}Q_k + R_k, \ \deg R_k < \deg R_{k-1}$$

$$R_{k-1} = R_kQ_{k+1},$$

Le degré du reste diminue à chaque division. On arrête l'algorithme lorsque le reste est nul. Le *pgcd* est le dernier reste non nul R_k (rendu unitaire).

Exemple 5.3.7 *Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que*

$$A(X) = 2 + 3X + 4X^2 + 2X^3 - X^4$$

$$B(X) = X + X^2$$

On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$A = B(1 + 3X - X^2) + (2 + 2X),$$

$$B = \left(\tfrac{1}{2}X\right)(2X + 2) + 0,$$

Le *pgcd* est le dernier reste non nul (rendu unitaire), donc

$$pgcd(A, B) = 1 + X.$$

5.3.4 Polynômes premiers entre eux

Défiinition 5.3.8 *Soient $A, B \in \mathbb{k}[X]$, on dit que A et B sont premiers entre eux si $pgcd(A, B) = 1$.Pour A, B quelconques on peut se ramener à des polynômes premiers entre eux : si $pgcd(A, B) = D$, alors A et B s'écrivent : $A = DA'$, $B = DB'$ avec $pgcd(A', B') = 1$.*

Exemple 5.3.9 *Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que*

$$A(X) = 1 + X^5$$

$$B(X) = 2 + 3X + X^2$$

On a

$$pgcd(A, B) = 1 + X,$$

donc

$$A(X) = (1 + X)(1 - X + X^2 - X^3 + X^4)$$

$$B(X) = (1 + X)(2 + X)$$

$$pgcd(1 - X + X^2 - X^3 + X^4, 2 + X) = 1$$

Théorème 5.3.10 ***(Théorème de Bézout)*** *Soient $A, B \in \mathbb{k}[X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. On note $D = pgcd(A, B)$.*

Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{k}[X]$ tels que

$$AU + BV = D \cdot$$

Proposition 5.3.11 *Soient $A, B \in \mathbb{k}[X]$, A et B sont premiers entre eux s'il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{k}[X]$ tels que*

$$AU + BV = 1.$$

Défiinition 5.3.12 *Soient $A, B \in \mathbb{k}[X]$, avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Alors il existe un unique polynôme unitaire M de plus petit degré tel que $A \mid M$ et $B \mid M$.*

Cet unique polynôme est appelé le ppcm (plus petit commun multiple) de A et B qu'on note $ppcm(A, B)$.

5.3.5 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Défiinition 5.3.13 *Un polynôme A de $\mathbb{k}[X]$ est dit irréductible s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les polynômes de la forme cA ($c \in \mathbb{k}^*$).*

Un polynôme A est donc irréductible s'il a exactement deux diviseurs unitaires (ces deux diviseurssont alors 1 et $\frac{1}{d}A$ où d est le coefficient dominant).

Théorème 5.3.14 *Tout polynôme non constant A s'écrit de manière unique sous la forme*

$$A = cR_1^{\alpha_1} ... R_k^{\alpha_k}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$, $c \in \Bbbk^*$, R_1,...,R_k *sont des polynômes unitaires irréductibles deux à deux distincts et* $\forall i \in \{1, ..., k\}$ $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

5.4 Racines d'un polynôme

5.4.1 Racines

Défiinition 5.4.1 *Soit* $P \in \Bbbk[X]$ *tel que*

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$$

Soit $\alpha \in \Bbbk$.

On dit que α *est une racine (ou un zéro) de* P *si*

$$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n = 0.$$

Exemple 5.4.2 *Soient* $A \in \mathbb{R}_3[X]$ *tel que*

$$A(X) = 3 - X + 2X^2 - 4X^3$$

On a :

$$A(1) = 3 - (1) + 2(1)^2 - 4(1)^3 = 0$$

donc, $\alpha = 1$ *est une racine de* A.

Proposition 5.4.3 *Soient* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in \Bbbk[X]$ *et* $\alpha \in \Bbbk$.

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (X - \alpha) \text{ divise } P(X)$$

Preuve. *Soient* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in \Bbbk[X]$ *et* $\alpha \in \Bbbk$.

La division euclidienne de $P(X)$ par $(X - \alpha)$ donne

$$P(X) = Q(X - \alpha) + R,$$

avec $\deg R < \deg(X - \alpha) = 1$.

Donc, $\deg R = 0$ ce qui donne R est une constante.

Alors,

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow R(\alpha) = 0 \Leftrightarrow R = 0,$$

donc, $(X - \alpha)$ *divise* $P(X)$. □

5.4.2 Multiplicité des racines

Défiinition 5.4.4 *Soient* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in \Bbbk[X]$ *et* $\alpha \in \Bbbk$.

On dit que α *est une racine de multiplicité* $k \in \mathbb{N}^*$ *(ou racine d'ordre* k*) de* P *si* $(X - \alpha)^k$ *divise* P *alors que* $(X - \alpha)^{k+1}$ *ne divise pas* P.

Lorsque $k = 1$ *on parle d'une racine simple, lorsque* $k = 2$ *d'une racine double, etc.*

Polynôme dérivé

On définit le polynôme dérivé de $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in \Bbbk[X]$ *comme suit*

$$P'(X) = a_1 + 2a_2X + ... + na_nX^{n-1}$$

On peut définir de la même façon les dérivées successive.

Proposition 5.4.5 *Soient* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in \mathbb{k}[X]$ *et* $\alpha \in \mathbb{k}$.

On a l'équivalence entre

1. α *est une racine de multiplicité* $k \in \mathbb{N}^*$.

2. *Il existe* $Q(X) \in \mathbb{k}[X]$ *tel que*

$$P(X) = (X - \alpha)^k Q(X),$$

avec $Q(\alpha) \neq 0$.

3.

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

$$et,\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

5.5 Exercices

Exercice 5.5.1 *Dans les cas suivants, effectuer la division euclidienne de* A *par* B *:*

1.

$$A(X) = X^5 - X^4 + 5X^3 - 2X + 3 \ et \quad B(X) = 2X^3 - X^2 - 5X + 1.$$

2.

$$A(X) = X^7 + 3X^5 - X^3 - 7X^2 + X \quad et \quad B(X) = X^4 + 4X^2 + 5X - 3..$$

Solution :

1/

$$A(X) = X^5 - X^4 + 5X^3 - 2X + 3 \ et \quad B(X) = 2X^3 - X^2 - 5X + 1.$$
$$A(X) = B(X) \underbrace{\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{29}{8}\right)}_{Q(X)} + \underbrace{\left(\frac{15}{8}X^2 + \frac{131}{8}X - \frac{5}{8}\right)}_{R(X)}.$$

2/

$$A(X) = X^7 + 3X^5 - X^3 - 7X^2 + X \quad et \quad B(X) = X^4 + 4X^2 + 5X - 3.$$

De la même manière, on trouve

$$A(X) = B(X) \underbrace{\left(X^3 - X + 5\right)}_{Q(X)} + \underbrace{\left(6X^3 + 18X^2 + 23X - 15\right)}_{R(X)}.$$

Exercice 5.5.2 *Déterminer les pgcd des polynômes suivants :*

1.

$$P(X) = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7 \ et \ Q(X) = 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7.$$

2.

$$A(X) = X^5 + 4X^4 + X^3 - 5X^2 + 3X \ et \ B(X) = X^6 + 3X^5 + 3X^3 + 14X^2 + 15X.$$

Solution

1. $pgcd(P, Q)$

On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$P = Q\underbrace{\left(\frac{1}{3}X\right)}_{Q_1} + \underbrace{\left(-\frac{14}{3}X^4 + 7X^3 - \frac{14}{3}X + 7\right)}_{R_1},$$
$$Q = R_1\underbrace{\left(-\frac{9}{14}X - \frac{27}{28}\right)}_{Q_2} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}\right)}_{R_2},$$
$$R_1 = R_2\underbrace{\left(\frac{56}{3}X - 28\right)}_{Q_3} + \underbrace{(0)}_{R_3}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul (rendu unitaire), donc

$$pgcd(A, B) = 1 + X^3$$

2. *pgcd* (A, B)

On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$B = A\underbrace{(X - 1)}_{Q_1} + \underbrace{\left(3X^4 + 9X^3 + 6X^2 + 18X\right)}_{R_1},$$
$$A = R_1\underbrace{\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)}_{Q_2} + \underbrace{\left(-4X^3 - 13X^2 - 3X\right)}_{R_2},$$
$$R_1 = R_2\underbrace{\left(-\frac{3}{4}X + \frac{3}{16}\right)}_{Q_3} + \underbrace{\left(-\frac{99}{16}X^2 - \frac{297}{16}X\right)}_{R_3}$$
$$R_2 = R_3\underbrace{\left(\frac{64}{99}X + \frac{16}{99}\right)}_{Q_4} + \underbrace{(0)}_{R_4}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul (rendu unitaire), donc

$$pgcd(A, B) = X^2 + 3X.$$

Exercice 5.5.3 *Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver U et $V \in \mathbb{k}[X]$ tel que $UP + VQ = 1$.*

1/

$$P(X) = 1 - 2X + X^3 + X^4 \quad et \quad Q(X) = 1 + X + X^2$$

2/

$$P(X) = 1 + X^2 + X^3 \quad et \quad Q(X) = 1 + X + X^3.$$

Solution

1. *$pgcd(P, Q) = 1$?*

On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$P = Q\underbrace{\left(X^2 - 1\right)}_{Q_1} + \underbrace{(-X + 2)}_{R_1},$$

$$Q = R_1\underbrace{(-X - 3)}_{Q_2} + \underbrace{(-7)}_{R_2},$$

$$R_1 = R_2\underbrace{\left(\frac{1}{7}X - \frac{2}{7}\right)}_{Q_3} + \underbrace{(0)}_{R_3}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul (rendu unitaire), donc

$$pgcd(P, Q) = 1$$

Trouver U *et* $V \in \mathbb{k}[X]$ *tel que* $UP + VQ = 1$

$$Q = R_1\underbrace{(-X-3)}_{Q_2} + \underbrace{(-7)}_{R_2} \Leftrightarrow 7 = R_1\underbrace{(-X-3)}_{Q_2} - Q$$

$$\Leftrightarrow 7 = \left(P - Q\underbrace{\left(X^2-1\right)}_{Q_1}\right)\underbrace{(-X-3)}_{Q_2} - Q$$

$$\Leftrightarrow 7 = (-X-3)\,P + (-(-X-3)\,(X^2-1)-1)\,Q$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{7}(-X-3)\,P + \tfrac{1}{7}(-(-X-3)\,(X^2-1)-1)\,Q = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(-\tfrac{1}{7}X - \tfrac{3}{7}\right)P + \left(\tfrac{1}{7}X^3 + \tfrac{3}{7}X^2 - \tfrac{1}{7}X - \tfrac{4}{7}\right)Q = 1$$

Donc,

$$U = -\tfrac{1}{7}X - \tfrac{3}{7}$$

$$V = \tfrac{1}{7}X^3 + \tfrac{3}{7}X^2 - \tfrac{1}{7}X - \tfrac{4}{7}$$

2. $pgcd\,(P,Q) = 1$?

On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$P = Q\underbrace{(1)}_{Q_1} + \underbrace{\left(X^2-X\right)}_{R_1},$$

$$Q = R_1\underbrace{(X+1)}_{Q_2} + \underbrace{(-2X-1)}_{R_2},$$

$$R_1 = R_2\underbrace{\left(-\frac{1}{2}X + \frac{3}{4}\right)}_{Q_3} + \underbrace{(-3)}_{R_3}$$

$$R_2 = R_3\underbrace{\left(\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right)}_{Q_4} + \underbrace{(0)}_{R_4}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul (rendu unitaire), donc

$$pgcd(P,Q) = 1$$

Trouver U *et* $V \in \mathbb{k}[X]$ *tel que* $UP + VQ = 1$

$$R_1 = R_2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2}X + \frac{3}{4}\right)}_{Q_3} + \underbrace{(-3)}_{R_3} \Leftrightarrow 3 = R_2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2}X + \frac{3}{4}\right)}_{Q_3} - R_1$$

$$\Leftrightarrow 3 = \left[Q - R_1 \underbrace{(X+1)}_{Q_2}\right] \underbrace{\left(-\frac{1}{2}X + \frac{3}{4}\right)}_{Q_3} - R_1$$

$$\Leftrightarrow 3 = Q\left(-\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{4}\right) - R_1\left((X+1)\left(-\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{4}\right) - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 3 = Q\left(-\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{4}\right) - (P - Q)\left((X+1)\left(-\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{4}\right) - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{1}{3}\left((X+1)\left(-\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{4}\right) - 1\right)P + \tfrac{1}{3}\left[\left(-\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{4}\right) - \left((X+1)\left(-\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{4}\right) - 1\right)\right]Q = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{6}X^2 + \tfrac{1}{12}X - \tfrac{1}{12}\right)P + \left(\tfrac{1}{6}X^2 - \tfrac{3}{12}X + \tfrac{1}{3}\right)Q = 1$$

Donc,

$$U = \tfrac{1}{6}X^2 + \tfrac{1}{12}X - \tfrac{1}{12}$$

$$V = \tfrac{1}{6}X^2 - \tfrac{3}{12}X + \tfrac{1}{3}.$$

Bibliographie

[1] *Nicolas Bourbaki, " Sur certains espaces vectoriels topologiques ", Annales de l'Institut Fourier, vol. 2, 1950.*

[2] *Nicolas Bourbaki," Espaces vectoriels topologiques", Masson, 1981, 3e éd.*

[3] *René Cori et Daniel Lascar, "Logique mathématique", tomes 1 , Masson, 2003.*

[4] *René David, Karim Nour et Christophe Raffalli, "Introduction à la logique", Cours et exercices corrigés, Dunod, 2001.*

[5] *Roger Godement," Cours d'algèbre", Edition, 2. Publisher, Hermann, 1966.*

[6] *Amara Hitta,"Cours d'algebre et exercices corriges",OPU,1994.*

[7] *Marie Josée et Durand Richard, "Nombre, grandeur, quantité, opérations : de la transformation conjointe de leurs significations ", 1998.*

[8] *René Lalement, "Logique, réduction, résolution",Publisher, Masson, 1990.*

[9] *Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès,"Cours de mathématiques", t. 2 : Analyse, Bordas, 1977, 4e éd.*

[10] *Serge Lang, "Structures algébriques", Paris, InterEditions, 1976.*

[11] *Michel de Rougemont et Richard Lassaigne," Logique et fondements de l'informatique", Hermes Science Publications, 1997.*

[12] *M.H.Mortad,"Exercices corrigés d'Algèbre", Dar el Bassair, Alger, 2013.*