

Recueil d' Exercices et Examens  
avec Corrigés Détaillés

Première Année Tronc Commun  
Sciences et Technologie

*Marir Saliha*

USTO, 2023

# Avant-propos

Les mathématiques occupent une place prépondérante en sciences et l'enseignement doit en tenir compte. Dans les lycées, on reçoit une initiation dans la matière, cependant c'est à l'université, plus précisément, dans le premier cycle de l'enseignement supérieur qu'est faite une véritable étude des mathématiques. Cette étude est répartie sur les deux années du tronc commun.

Le présent polycopié est un recueil d'exercices corrigés d'algèbre et d'analyse à l'usage des étudiants en Mathématiques et Physique. Il s'adresse plus particulièrement aux étudiants de première année LMD Sciences et techniques.

Les exercices ont été regroupés en chapitres dont le sujet est indiqué en tête et ils sont, dans la mesure du possible, classés par ordre de difficulté croissante. On a donné explicitement la solution de tous les exercices proposés afin, en particulier, de faciliter le travail de l'étudiant isolé qui utilise cet ouvrage.

Ces exercices étant suivis de leur correction, il peut vérifier le bien fondé de son raisonnement et la justesse de ses calculs et de ses résultats.

Enfin les corrigés détaillés aideront précieusement à comprendre et à assimiler le cours que ce recueil ne prétend pas remplacer.

On espère que la pratique de ce document aidera les étudiants à assimiler plus rapidement les notions et méthodes nouvelles introduites au début des études supérieures en Analyse et Algèbre.

Il est conseillé de s'exercer à résoudre par soi-même les exercices sans avoir une solution à côté. C'est grâce à ce travail personnel indispensable que l'on peut aller loin dans la compréhension

et l'assimilation des notions mathématiques introduites. C'est la seule méthode connue à ce jour pour progresser en mathématiques. L'étudiant consciencieux travaillera la justification de chacune de ses réponses.

Rappelons que trouver la bonne réponse ne suffit pas en science, il faut aussi la justifier !

# Table des matières

Avant-propos	1
1 Logique Mathématique	4
2 Ensembles-Relations-Applications	10
3 Limites-Continuité-Dérivabilité	32
4 Structure Algébriques	68
5 Espaces Vectoriels	85
6 Développements Limités	95
7 Examens Corrigés	113
Bibliographie	146

# Chapitre 1

## Logique Mathématique

### Exercices

**Exercice 1.** Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous forme de propositions mathématiques écrites avec des symboles  $\forall$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\implies$ ,  $\iff$  et les prouver.

- 1) Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
- 2) Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
- 3) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?

**Exercice 2.** Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses (justifier votre réponse) :

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; x + y = 0$
- 2)  $\exists y \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}; x + y = 0$
- 3)  $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; y = x^2$
- 4)  $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; x = y^2$

**Exercice 3.**

1) Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{N}, (a^2 \text{ pair}) \iff (a \text{ pair})$ .

2) Montrer que :  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel.

**Exercice 4.** Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, n^2 \leq 2^n.$$

**Solutions****Exercice 1.**

1)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (n \text{ pair}) \wedge (m \text{ pair}) \implies (n.m \text{ pair})$ , proposition vraie.

En effet, on a

$$(n \text{ pair}) \iff (\exists k_1 \in \mathbb{N}, n = 2.k_1),$$

$$(m \text{ pair}) \iff (\exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 2.k_2).$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} n.m &= (2.k_1)(2.k_2), \\ &= 2(\underbrace{2.k_1.k_2}_K), \\ &= 2.K, K \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d'où  $n.m$  est pair.

2)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (n \text{ impair}) \wedge (m \text{ impair}) \implies (n.m \text{ impair})$ , proposition vraie.

En effet, on a

$$(n \text{ impair}) \iff (\exists k_1 \in \mathbb{N}, n = 2.k_1 + 1),$$

$$(m \text{ impair}) \iff (\exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 2.k_2 + 1).$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} n.m &= (2.k_1 + 1)(2.k_2 + 1), \\ &= 4k_1.k_2 + 2(k_1 + k_2) + 1 \\ &= 2(\underbrace{2.k_1.k_2 + k_1 + k_2}_K) + 1, \\ &= 2.K + 1, K \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d'où  $n.m$  est impair.

3)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (n \text{ pair}) \wedge (m \text{ impair}) \implies (n.m \text{ pair})$ ,  
proposition vraie.

En effet, on a

$$(n \text{ pair}) \iff (\exists k_1 \in \mathbb{N}, n = 2.k_1),$$

$$(m \text{ impair}) \iff (\exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 2.k_2 + 1).$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} n.m &= (2.k_1)(2.k_2 + 1), \\ &= 4k_1.k_2 + 2(k_1), \\ &= 2(\underbrace{2.k_1.k_2 + k_1}_K), \\ &= 2.K + 1, K \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Sinon directement,

$$\begin{aligned} n.m &= 2.k_1.m, \\ &= 2(\underbrace{k_1.m}_K), \\ &= 2.K, K \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

d'où  $n.m$  est impair.

### Exercice 2.

1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$ , proposition vraie.

En effet,

pour  $x \in \mathbb{R}$  quelconque, il suffit de prendre  $y = -x \in \mathbb{R}$ .

On a alors  $x + y = x - x = 0$ .

2)  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0 : P$ .

Considérons la négation de  $P$  :

$$\bar{P} : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y \neq 0.$$

Pour  $y \in \mathbb{R}$  quelconque, on peut prendre  $x = -y + 2 \in \mathbb{R}$ .

On a alors,  $x + y = -y + 2 + y = 2 \neq 0$ ,

donc  $\bar{P}$  est une proposition vraie, ce qui implique que  $P$  est fausse.

3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ , proposition vraie.

En effet, Pour  $x \in \mathbb{R}$  quelconque,  $x^2 \in \mathbb{R}$  car la multiplication est une opération interne dans  $\mathbb{R}$ . Il suffit alors de considérer  $y = x^2$ .

4)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ , proposition fausse.

En effet, il suffit de prendre le contre-exemple  $x = -3$ , dans ce cas on ne peut trouver  $y \in \mathbb{R}$ , tel que  $-3 = y^2$ .

### Exercice 3.

1) Montrons :  $\forall a \in \mathbb{R}, (a^2 \text{ pair}) \iff (a \text{ pair})$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$  quelconque.

(**Nécessité**) On montre que :  $(a^2 \text{ pair}) \implies (a \text{ pair})$ .

Rappelons que,

$$(P \implies Q) \iff \underbrace{(\bar{Q} \implies \bar{P})}_{\text{contraposée}}.$$



Il suffit alors de démontrer la contraposée :

$$(a \text{ impair}) \implies (a^2 \text{ impair}).$$

Cette implication est vraie, voir question2 dans l'exercice1 et prendre  $a = n = m$  impair.

D'où l'implication  $(a^2 \text{ pair}) \implies (a \text{ pair})$  est vraie.

**(Suffisance)** On montre que :  $(a \text{ pair}) \implies (a^2 \text{ pair})$ .

Cette implication est vraie, voir question1 dans l'exercice1 et prendre  $a = n = m$  pair.

Étant donné que les deux implications sont vraies, on déduit alors que l'équivalence l'est aussi.

2) Montrons que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel, i.e.,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

On va raisonner par l'absurde ; on suppose que :  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .

$\exists p \in \mathbb{N}$ ,  $\exists q \in \mathbb{N}^*$ , tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , et  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{p}{q} &\iff 2 = \frac{p^2}{q^2}, \\ &\iff p^2 = 2 \cdot q^2, \\ &\implies p^2 \text{ pair}, \\ &\iff p \text{ pair, (voir question1)}, \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N}, p = 2 \cdot k. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} p^2 = 2 \cdot q^2 &\iff 4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2, \\ &\iff q^2 = 2 \cdot k^2, \\ &\implies q^2 \text{ pair}, \\ &\iff q \text{ pair, (voir question1)}. \end{aligned}$$

On obtient alors que  $p$  et  $q$  sont pairs, ce qui est en contradiction avec le fait que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

Ainsi,  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  est fausse, il s'ensuit alors que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 4.** Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, n^2 \leq 2^n.$$

- Pour  $n = 4$ , on a  $n^2 = 16$  et  $2^n = 16$ , alors  $n^2 \leq 2^n$  est vérifiée.
- On suppose pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  $n^2 \leq 2^n$ .
- On montre que :  $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$  ?  
On a  $n^2 \leq 2^n$  (hypothèse de récurrence),  
d'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} n \geq 4 &\implies n > 2, \\ &\implies n^2 > 2.n, \\ &\implies n^2 \geq 2n + 1, \\ &\implies 2n + 1 \leq n^2 \leq 2^n, \text{ (hypothèse de récurrence),} \\ &\implies 2n + 1 \leq 2^n. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n^2 &\leq 2^n \\ 2n + 1 &\leq 2^n \end{cases} \implies n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \leq 2.2^n = 2^{n+1}.$$

D'où,  $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, n^2 \leq 2^n$ .

# Chapitre 2

## Ensembles-Relations-Applications

### Exercices

**Exercice 1.** Soient  $A, B, C$  trois sous-ensembles quelconques d'un ensemble  $E$ . Simplifier les ensembles suivants :

$$(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup A}), (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap A})$$

où  $\bar{A}$  désigne le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

**Exercice 2.** Soient  $A, B$  deux sous-ensembles quelconques d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

$$1) (A \subset B) \iff (\bar{A} \cup B = E)$$

$$2) (A \subset B) \iff (A \cap B = A) \iff (A \cup B = B)$$

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \mathcal{R} y) \iff (x^2 - y^2 = x - y).$$

- 1) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer la classe d'équivalence de 0 et en déduire celle de 1.
- 3) Déterminer la classe d'équivalence d'un élément quelconque  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 4.** On définit dans  $\mathbb{R}^*$  la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, (x\mathcal{R}y) \iff x.y > 0$$

- 1) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- 2) Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation.

**Exercice 5.** On munit  $\mathbb{R}^2$  de la relation  $\mathcal{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff (x - x' \geq 0 \text{ et } y = y')$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

**Exercice 6.** Soit l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x^2$$

a) Déterminer :

$$f([-1, 1]), \quad f([-1, 2]), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(\{-1\}),$$

$$f^{-1}([0, 4]), \quad f^{-1}([-2, 4]), \quad f^{-1}([-2, 1]).$$

b) Est ce que  $f$  est injective ? surjective ? bijective ?

**Exercice 7.** Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$\begin{array}{lll} f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} & f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ n \longmapsto 2n & x \longmapsto x^2 & x \longmapsto x^2 \end{array}$$

$$f_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad f_5 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto n + 1 \quad n \longmapsto n + 1$$

**Exercice 8.** Les applications suivantes sont-elles bijectives ?  
(Donner l'application réciproque si elle existe) :

1)  $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad / \quad f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$

2)  $g : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = x + \frac{1}{x}$

## Solutions

**Exercice 1.** En utilisant les lois de Morgan pour les ensembles :

•

$$\begin{aligned} (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup A}) &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap \overline{A}), \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap A), \\ &= \underbrace{\overline{A} \cap A}_{=\emptyset} \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \text{ (}\cap\text{ est commutative et associative),} \\ &= \emptyset \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap A}) &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup \overline{A}), \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup A), \\ &= \underbrace{\overline{A} \cup A}_{=E} \cup \overline{B} \cup \overline{C}, \text{ (}\cup\text{ est commutative et associative),} \\ &= E \cup \overline{B} \cup \overline{C}, \\ &= E. \end{aligned}$$

ou bien,

$$\begin{aligned}
 (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}}) &= \overline{(A \cap B) \cap (C \cap \bar{A})}, \\
 &= \overline{(A \cap \bar{A}) \cap (C \cap B)}, \\
 &= \overline{\underbrace{\bar{A} \cap A}_{=\emptyset} \cap (C \cap B)}, \\
 &= \overline{\emptyset \cap (C \cap B)}, \\
 &= \overline{\emptyset}, \\
 &= E.
 \end{aligned}$$

**Exercice 2.**  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

On montre

$$(A \subset B) \iff (\bar{A} \cup B = E)$$

(Nécessité) On montre :  $(A \subset B) \implies (\bar{A} \cup B = E)$ .

On suppose que  $A \subset B$  et on montre que  $\bar{A} \cup B = E$ ?

• On a :

$$\begin{cases} \bar{A} \subset E \\ B \subset E \end{cases} \implies \bar{A} \cup B \subset E \quad (1)$$

•

$$\begin{aligned}
 x \in E &\iff x \in (\bar{A} \cup A), \\
 &\iff (x \in \bar{A}) \vee (x \in A), \\
 &\implies (x \in \bar{A}) \vee (x \in B), (A \subset B), \\
 &\implies x \in \bar{A} \cup B,
 \end{aligned}$$

d'où

$$E \subset \bar{A} \cup B. \quad (2)$$

De (1) et (2), on obtient  $E = \bar{A} \cup B$ .

(Suffisance) On montre :  $(\bar{A} \cup B = E) \implies (A \subset B)$ .

On suppose que  $\bar{A} \cup B = E$  et on montre que  $A \subset B$ ?

$$\begin{aligned}
 x \in A &\implies x \in E, (A \subset E), \\
 &\iff x \in \bar{A} \cup B, (\bar{A} \cup B = E), \\
 &\iff (x \in \bar{A}) \vee (x \in B), \\
 &\iff x \in B, (x \in \bar{A} \text{ est fausse}).
 \end{aligned}$$

D'où  $A \subset B$ . Ainsi,  $(A \subset B) \iff (\bar{A} \cup B = E)$ .

2) Montrons  $(A \subset B) \iff (A \cap B = A) \iff (A \cup B = B)$ .

a. Commençons par montrer :  $(A \subset B) \iff (A \cap B = A)$ .

(Nécessité) On montre :  $(A \subset B) \implies (A \cap B = A)$ .

On suppose que  $A \subset B$ , et on montre  $A \cap B = A$ ?

Il est évident que

$$A \cap B \subset A. \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 x \in A &\implies x \in B, (A \subset B), \\
 &\implies (x \in A) \wedge (x \in B), \\
 &\implies x \in A \cap B,
 \end{aligned}$$

d'où

$$A \subset A \cap B. \tag{4}$$

De (3) et (4), on obtient  $A \cap B = A$ .

(Suffisance) On montre :  $(A \cap B = A) \implies (A \subset B)$ .

On suppose que  $A \cap B = A$ , et on montre  $A \subset B$ ?

$$\begin{aligned}
 x \in A &\iff x \in A \cap B, (A \cap B = A), \\
 &\iff (x \in A) \wedge (x \in B), \\
 &\implies x \in B,
 \end{aligned}$$

d'où  $A \subset B$ .

On déduit alors que  $((A \subset B) \iff (A \cap B = A))$ .

b. On montre :  $(A \subset B) \iff (A \cup B = B)$ .

(Nécessité) On montre :  $(A \subset B) \implies (A \cup B = B)$ .

On suppose que  $A \subset B$ , et on montre  $A \cup B = B$ ?

Il est évident que

$$B \subset A \cup B. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff (x \in A) \vee (x \in B), \\ &\implies (x \in B) \vee (x \in B), (A \subset B), \\ &\implies x \in B, \end{aligned}$$

d'où

$$A \cup B \subset B. \tag{6}$$

De (5) et (6), on obtient  $A \cup B = B$ .

(Suffisance) On montre :  $(A \cup B = B) \implies (A \subset B)$ .

On suppose que  $A \cup B = B$ , et on montre  $A \subset B$ ?

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in A \cup B, (A \subset A \cup B), \\ &\implies x \in B, (A \cup B = B), \end{aligned}$$

d'où  $A \subset B$ .

On déduit alors que  $(A \subset B) \iff (A \cup B = B)$ . Ainsi, de (a) et (b), on conclut

$$(A \subset B) \iff (A \cap B = B) \iff (A \cup B = B).$$

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \iff (x^2 - y^2 = x - y).$$

1.  $\mathcal{R}$  est une **relation d'équivalence** dans  $\mathbb{R}$  si  $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} \text{ réflexive} \\ \mathcal{R} \text{ symétrique} \\ \mathcal{R} \text{ transitive} \end{array} \right.$



**a.  $\mathcal{R}$  est réflexive :**  $\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x$ .

soit  $x \in \mathbb{R}$  quelconque.

On a  $x^2 - x^2 = 0$  et  $x - x = 0$ , alors  $x^2 - x^2 = x - x$ ,  
d'où  $x\mathcal{R}x$ . On déduit alors que  $\mathcal{R}$  est réflexive dans  $\mathbb{R}$ .

**b.  $\mathcal{R}$  est symétrique :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x)$$

Soient  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$  tels que  $x\mathcal{R}y$ . On montre  $y\mathcal{R}x$  ?

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff x^2 - y^2 = x - y, \\ &\iff y^2 - x^2 = y - x, \text{ (par multiplication par } (-1)\text{)}, \\ &\iff y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est symétrique dans  $\mathbb{R}$ .

**c.  $\mathcal{R}$  est transitive :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)] \implies (x\mathcal{R}z).$$

Soient  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$  tels que  $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)$ . On  
montre  $x\mathcal{R}z$  ?

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases} \\ &\implies x^2 - z^2 = x - z, \text{ (en faisant la somme),} \\ &\implies x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est transitive.

De (a), (b) et (c), on déduit que  $\mathcal{R}$  est une relation  
d'équivalence dans  $\mathbb{R}$ .

2.  $\dot{0} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}0\}$ .

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}0 &\iff x^2 - 0^2 = x - 0, \\ &\iff x.(x - 1) = 0, \\ &\iff (x = 0) \wedge (x = 1). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\dot{0} = \{0, 1\}$ .

On a

$$1 \in \dot{0} \iff 1\mathcal{R}0 \iff \dot{1} = \dot{0} = \{0, 1\}.$$

3. Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\}$ .

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}a &\iff x^2 - a^2 = x - a, \\ &\iff (x - a)(x + a) - (x - a) = 0, \\ &\iff (x - a)(x + a - 1) = 0, \\ &\iff \begin{cases} x = a \\ \vee \\ x = 1 - a \end{cases} \end{aligned}$$

d'où  $\dot{a} = \{a, 1 - a\}$ .

**Exercice 4.** La relation  $\mathcal{R}$  est définie dans  $\mathbb{R}^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \iff x.y > 0.$$

1.  $\mathcal{R}$  est une **relation d'équivalence** dans  $\mathbb{R}^*$  si  $\begin{cases} \mathcal{R} \text{ réflexive} \\ \mathcal{R} \text{ symétrique} \\ \mathcal{R} \text{ transitive} \end{cases}$

**a.  $\mathcal{R}$  est réflexive :**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}x.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a  $x.x > 0$ , d'où  $x\mathcal{R}x$ .

On déduit alors que  $\mathcal{R}$  est réflexive dans  $\mathbb{R}^*$ .

**b.  $\mathcal{R}$  est symétrique :**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, (x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x).$$

Soient  $x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^*$  tels que  $x\mathcal{R}y$ . On montre  $y\mathcal{R}x$  ?

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff x.y > 0, \\ &\iff y.x > 0, \text{ (la multiplication est commutative),} \\ &\iff y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est symétrique dans  $\mathbb{R}^*$ .

**c.  $\mathcal{R}$  est transitive :**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)] \implies (x\mathcal{R}z).$$

Soient  $x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^*, z \in \mathbb{R}^*$  tels que  $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)$ .  
On montre  $x\mathcal{R}z$  ?

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\iff \begin{cases} x.y > 0 \\ \wedge \\ y.z > 0 \end{cases} \\ &\implies x.y.y.z > 0, \\ &\implies x.z > 0, (y^2 > 0) \\ &\implies x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est transitive.

De (a), (b) et (c), on déduit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{R}^*$ .

2. Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}a\}$ .

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}a &\iff x.a > 0, \\ &\iff x \text{ et } a \text{ sont de même signe,} \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{a} = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \in \mathbb{R}_+^* \\ \mathbb{R}_-^* & \text{si } a \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

**Exercice 5.** La relation  $\mathcal{R}$  est définie dans  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff (x - x' \geq 0) \wedge (y = y').$$

1.  $\mathcal{R}$  est une **relation d'ordre** dans  $\mathbb{R}^2$  si  $\begin{cases} \mathcal{R} \text{ réflexive} \\ \mathcal{R} \text{ antisymétrique} \\ \mathcal{R} \text{ transitive} \end{cases}$

**a.  $\mathcal{R}$  est réflexive :**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x, y).$$

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $x - x \geq 0$  et  $y = y$   
d'où  $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ . On déduit alors que  $\mathcal{R}$  est réflexive dans  $\mathbb{R}^2$ .

**b.  $\mathcal{R}$  est antisymétrique :**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \\ \wedge \\ (x', y')\mathcal{R}(x, y) \end{cases} \implies ((x, y) = (x', y')).$$

Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x', y') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$  et  $((x', y')\mathcal{R}(x, y))$ . On montre  $(x, y) = (x', y')$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \\ \wedge \\ (x', y')\mathcal{R}(x, y) \end{cases} &\iff \begin{cases} (x - x' \geq 0) \wedge (y = y'), \\ \wedge \\ (x' - x \geq 0) \wedge (y' = y), \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} (x - x' \geq 0) \wedge (x - x' \leq 0), \\ \wedge \\ (y = y'), \end{cases} \\ &\implies (x - x' = 0) \wedge (y = y'), \\ &\implies (x, y) = (x', y'), \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est antisymétrique dans  $\mathbb{R}^2$ .

**c.  $\mathcal{R}$  est transitive :**

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall(x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall(x'', y'') \in \mathbb{R}^2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \\ \wedge \\ (x', y')\mathcal{R}(x'', y'') \end{array} \right. \implies ((x, y)\mathcal{R}(x'', y'')).$$

Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $((x, y)\mathcal{R}(x', y')) \wedge ((x', y')\mathcal{R}(x'', y''))$ . On montre  $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$  ?

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \\ \wedge \\ (x', y')\mathcal{R}(x'', y'') \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (x - x' \geq 0) \wedge (y = y') \\ \wedge \\ (x' - x'' \geq 0) \wedge (y' = y'') \end{array} \right.$$

$$\implies (x - x'' \geq 0) \wedge (y = y''),$$

$$\implies (x, y)\mathcal{R}(x'', y''),$$

d'où  $\mathcal{R}$  est transitive.

De (a), (b) et (c), on déduit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre dans  $\mathbb{R}^2$ .

2. L'ordre est-il total ?

Pour que l'ordre soit total il faut et il suffit que :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall(x', y') \in \mathbb{R}^2, ((x, y)\mathcal{R}(x', y')) \vee ((x', y')\mathcal{R}(x, y)).$$

On raisonne par exhiber un contre-exemple :

Pour  $(x, y) = (3, 5)$  et  $(x', y') = (2, 7)$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - 2 \geq 0 \text{ (est vraie)} \\ \wedge \\ 5 = 7 \text{ (est fausse)} \end{array} \right. \implies ((3 - 2 \geq 0) \wedge (5 = 7)) \text{ (est fausse),}$$

$$\implies (3, 5)\not\mathcal{R}(2, 7).$$

On a aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - 3 \geq 0 \text{ (est fausse)} \\ \wedge \\ 7 = 5 \text{ (est fausse)} \end{array} \right. \implies ((2 - 3 \geq 0) \wedge (7 = 5)) \text{ (est fausse),}$$

$$\implies (2, 7)\not\mathcal{R}(3, 5).$$

D'où

$$((3, 5)\mathcal{R}(2, 7)) \wedge ((2, 7)\mathcal{R}(3, 5)).$$

Par conséquent l'ordre n'est pas total mais partiel.

**Exercice 6.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2$ .

a)

1.  $f([-1, 1]) = ?$

On a

$$[-1, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1] \implies f([-1, 1]) = f([-1, 0]) \cup f([0, 1])$$

• On a pour  $x \in [-1, 0]$  :

$$\begin{aligned} x \in [-1, 0] &\iff -1 \leq x \leq 0, \\ &\iff 0 \leq x \leq 1, \\ &\iff f([-1, 0]) = [0, 1]. \end{aligned}$$

• On a pour  $x \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] &\iff 0 \leq x \leq 1, \\ &\iff 0 \leq x \leq 1, \\ &\iff f([0, 1]) = [0, 1]. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$f([-1, 1]) = [0, 1] \cup [0, 1] = [0, 1].$$

**Autre méthode directe :** On a :

$$\begin{aligned} x \in [-1, 1] &\iff -1 \leq x \leq 1, \\ &\iff 0 \leq |x| \leq 1, \\ &\iff 0 \leq |x|^2 \leq 1, \\ &\iff 0 \leq x^2 \leq 1, \end{aligned}$$

d'où

$$f([-1, 1]) = [0, 1].$$

2.  $f([-1, 2]) = ?$

On a

$$[-1, 2] = [-1, 1] \cup [1, 2] \implies f([-1, 2]) = f([-1, 1]) \cup f([1, 2])$$

• On a :

$$f([-1, 1]) = [0, 1].$$

• On a pour  $x \in [1, 2]$  :

$$\begin{aligned} x \in [1, 2] &\iff 1 \leq x \leq 2, \\ &\iff 1 \leq x^2 \leq 4, \\ &\iff f([1, 2]) = [1, 4]. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$f([-1, 2]) = [0, 1] \cup [1, 4] = [0, 4].$$

3.  $f^{-1}(\{1\}) = ?$

On sait que :

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 1\}.$$

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff x^2 = 1, \\ &\iff (x = 1) \vee (x = -1), \end{aligned}$$

d'où

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}.$$

4.  $f^{-1}(\{-1\}) = ?$

On sait que :

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = -1\}.$$

On a :

$$f(x) = -1 \iff x^2 = -1,$$

or, cette dernière équation n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ , par conséquent,

$$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset.$$

5.  $f^{-1}([0, 4]) = ?$

On sait que :

$$f^{-1}([0, 4]) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 4]\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) \in [0, 4] &\iff 0 \leq x^2 \leq 4, \\ &\iff 0 \leq |x| \leq 2, \\ &\iff -2 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2].$$

6.  $f^{-1}([-2, 4]) = ?$

On sait que :

$$f^{-1}([-2, 4]) = f^{-1}([-2, 0[) \cup f^{-1}([0, 4]).$$

- On sait que :

$$f^{-1}([-2, 0[) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-2, 0[)\}.$$

On a :

$$f(x) \in [-2, 0[ \iff -2 \leq x^2 < 0.$$

Or, cette dernière inégalité n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ , par suite,

$$f^{-1}([-2, 0[) = \emptyset.$$

- $f^{-1}([0, 4]) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 4]\}.$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) \in [0, 4] &\iff 0 \leq x^2 \leq 4, \\ &\iff 0 \leq |x| \leq 2, \\ &\iff -2 \leq x \leq 2, \end{aligned}$$

d'où

$$f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2].$$



Ainsi, on obtient :

$$f^{-1}([-2, 4]) = \emptyset \cup [-2, 2] = [-2, 2].$$

7.  $f^{-1}([-2, 1]) = ?$

On sait que :

$$f^{-1}([-2, 1]) = f^{-1}([-2, 0]) \cup f^{-1}([0, 1]).$$

- On a d'après la question précédente :

$$f^{-1}([-2, 0]) = \emptyset.$$

- $f^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 1]\}.$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) \in [0, 1] &\iff 0 \leq x^2 \leq 1, \\ &\iff 0 \leq |x| \leq 1, \\ &\iff -1 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

d'où

$$f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1].$$

Ainsi, on obtient :

$$f^{-1}([-2, 1]) = \emptyset \cup [-1, 1] = [-1, 1].$$

b)

- $f$  est injective ?

$f$  est **injective** si et seulement si

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2).$$

On raisonne par donner un contre-exemple :

D'après  $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$  (voir (3)), on a

$$(f(-1) = f(1)) \wedge (-1 \neq 1),$$

donc  $f$  n'est pas injective.

- $f$  est surjective ?

$f$  est **surjective** si et seulement si

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x).$$

On raisonne par donner un contre-exemple :

D'après

$$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset, \text{ (voir(4))},$$

on déduit que l'équation

$$-1 = f(x)$$

n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  n'est pas surjective.

- $f$  est bijective ?

$f$  est bijective si  $f$  est injective et surjective à la fois.

$f$  n'est pas injective, alors  $f$  n'est pas bijective.

De même,  $f$  n'est pas surjective, alors  $f$  n'est pas bijective.

### Exercice 7.

1. L'application :  $f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f_1(n) = 2n$ .

- Soient  $n_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $n_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $f(n_1) = f(n_2)$ .

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\iff 2n_1 = 2n_2, \\ &\iff n_1 = n_2, \end{aligned}$$

donc  $f_1$  est injective.

- on raisonne par donner un contre-exemple :

Pour  $y = 3$ , on trouve  $3 = 2n \iff n = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ , d'où, 3 n'a pas d'antécédent dans  $\mathbb{Z}$  par  $f_1$ .

Alors,  $f_1$  n'est pas surjective, et par conséquent  $f_1$  n'est pas bijective.

2. L'application :  $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_2(x) = x^2$ .

- On raisonne par donner un contre-exemple :  
Pour  $x_1 = 2$  et  $x_2 = -2$ , on a

$$(f_2(x_1) = f_2(x_2) = 4) \wedge (x_1 \neq x_2),$$

donc  $f_2$  n'est pas injective.

- on raisonne par donner un contre-exemple :  
Pour  $y = -3$ , l'équation

$$-3 = x^2,$$

n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ , d'où,  $-3$  n'a pas d'antécédent dans  $\mathbb{R}$  par  $f_2$ .

Alors,  $f_2$  n'est pas surjective, et par conséquent  $f_2$  n'est pas bijective.

3. L'application :  $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f_3(x) = x^2$ .

- On raisonne par donner un contre-exemple :  
Pour  $x_1 = 3$  et  $x_2 = -3$ , on a

$$(f_3(x_1) = f_3(x_2) = 9) \wedge (x_1 \neq x_2),$$

donc  $f_3$  n'est pas injective.

- l'application  $f_3$  est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2.$$

Soit  $y \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} y = x^2 &\iff |x| = \sqrt{y}, \\ &\iff x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

alors,  $f_3$  est surjective.

Comme  $f_3$  n'est pas injective, on déduit que  $f_3$  n'est pas bijective.

4. L'application :  $f_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f_4(n) = n + 1$ .

- Soient  $n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $n_2 \in \mathbb{N}$  tels que  $f(n_1) = f(n_2)$ .

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\iff n_1 + 1 = n_2 + 1, \\ &\iff n_1 = n_2, \end{aligned}$$

donc  $f_4$  est injective.

- on raisonne par donner un contre-exemple :

Pour  $y = 0$ , on trouve  $0 = n + 1 \iff n = -1 \notin \mathbb{N}$ , d'où, 0 n'a pas d'antécédent dans  $\mathbb{N}$  par  $f_4$ .

Alors,  $f_4$  n'est pas surjective, et par conséquent  $f_4$  n'est pas bijective.

5. L'application :  $f_5 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f_5(n) = n + 1$ .

- Soient  $n_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $n_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $f(n_1) = f(n_2)$ .

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\iff n_1 + 1 = n_2 + 1, \\ &\iff n_1 = n_2, \end{aligned}$$

donc  $f_5$  est injective.

- Soit  $y \in \mathbb{Z}$ . On a

$$y = n + 1 \iff n = y - 1 \in \mathbb{Z},$$

car l'addition est une opération interne dans  $\mathbb{Z}$ .

Alors,  $f_5$  est surjective. Comme  $f_5$  est injective et surjective, par conséquent  $f_5$  est bijective.

### Exercice 8.

1. On considère l'application  $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  définie par  $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ .

- $f$  est **injective** ?

Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ , tels que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Est ce que  $x_1 = x_2$  ?

$$\begin{aligned}
 f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{x_1 + 1}{2x_1 - 3} = \frac{x_2 + 1}{2x_2 - 3}, \\
 &\iff (x_1 + 1)(2x_2 - 3) = (x_2 + 1)(2x_1 - 3), \\
 &\iff \cancel{2x_1x_2} - 3x_1 + 2x_2 - 3 = \cancel{2x_2x_1} - 3x_2 + 2x_1 - 3, \\
 &\iff -5x_1 = -5x_2, \\
 &\iff x_1 = x_2,
 \end{aligned}$$

d'où  $f$  est injective.

- $f$  est **surjective** ?

Soit  $y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ . Essayons de trouver  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$   
tel que  $y = f(x)$  ?

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\iff y = \frac{x + 1}{2x - 3}, \\
 &\implies y(2x - 3) = (x + 1), \\
 &\text{Implies } x(2y - 1) = 3y + 1, \\
 &\implies x = \frac{3y + 1}{2y - 1} \left( y \neq \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned}$$

d'où  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $x$  est bien défini.

Est ce que  $x \neq \frac{3}{2}$  ?

On raisonne par l'absurde : On suppose que  $x = \frac{3}{2}$ .

$$\begin{aligned}
 x = \frac{3}{2} &\iff \frac{3y + 1}{2y - 1} = \frac{3}{2}, \\
 &\iff 6y + 2 = 6y - 3, \\
 &\iff 2 = -3 \text{ (absurde)}
 \end{aligned}$$

d'où  $x = \frac{3}{2}$  est fausse, par conséquent  $x \neq \frac{3}{2}$  est vraie.

On déduit que  $f$  est surjective.

**Conclusion** : Comme  $f$  est injective et surjective, alors  $f$  est bijective.

• **Application réciproque ?**

L'application

$$f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$x \quad \mapsto \quad y = f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$$

est bijective, elle admet alors une application réciproque  $f^{-1}$  définie par

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$y \quad \mapsto \quad x = f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{2y-1}$$

ou encore :

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$x \quad \mapsto \quad f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$$

2. On considère l'application  $g : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ .

•  $g$  est **injective** ?

Soient  $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ , tels que  $g(x_1) = g(x_2)$ . Est ce que  $x_1 = x_2$  ?

$$\begin{aligned}
 g(x_1) = g(x_2) &\iff x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2}, \\
 &\iff x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 0, \\
 &\iff x_1 - x_2 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = 0, \\
 &\iff (x_1 - x_2)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) = 0, \\
 &\iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \vee \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \vee \\ x_1 = x_2 = 1 \text{ (car } x_1, x_2 \in [1, +\infty[) \end{cases} \\
 &\implies x_1 = x_2
 \end{aligned}$$

d'où  $g$  est injective.

- $g$  est **surjective** ?

Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Essayons de trouver  $x \in [1, +\infty[$  tel que  $y = g(x)$  ?

$$\begin{aligned}
 y = g(x) &\iff y = x + \frac{1}{x}, \\
 &\implies yx = x^2 + 1, \\
 &\implies x^2 - yx + 1 = 0. \tag{E}
 \end{aligned}$$

On résout l'équation  $x^2 - yx + 1 = 0$  dans  $[1, +\infty[$ . On a

$$\Delta = (-y)^2 - 4 = y^2 - 4$$

Le signe de  $\Delta$  est donné par le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
signe de $\Delta$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Pour tout  $y \in ]-2, 2[$ ,  $\Delta < 0$ , alors l'équation (E) n'admet pas de solutions, par suite  $y$  n'admet pas un antécédent par  $g$ .

On déduit que  $g$  n'est pas surjective, par conséquent  $g$  n'est pas bijective, et donc  $g$  n'admet pas une application réciproque.



# Chapitre 3

## Limites-Continuité- Dérivabilité

### Exercices

**Exercice 1.** Déterminer pour chaque fonction  $f$  ci-dessous le domaine de définition :

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \ln(\sqrt{1-x^2}), & 2) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}, \\ 3) f(x) &= \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}, & 4) f(x) &= \sqrt{\cos(2x)}, \\ 5) f(x) &= \ln(\ln(1+x)), & 6) f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{1-x} & , x \geq 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases}, \\ 7) f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2-x} & , x \geq 0 \\ x^3 + x & , x < -1 \end{cases} & 8) f(x) &= \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

**Exercice 2.** Calculer les limites suivantes, en utilisant si nécessaire les fonctions équivalentes (pas de règle de l'Hopital) :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 5x - 10}{2x^2 + 10} & \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{1+x^2} \\ 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 5) \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(x) & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\operatorname{tg}(2x)} \\
 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x + x^2)}{x} \\
 9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\sqrt{5 - x^2} - 2} & 10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}(x)}{\pi \sin(x) - \cos(x)} \\
 11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} & 12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}
 \end{array}$$

**Exercice 3.** Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition et indiquer si elles peuvent être prolongées par continuité en certains points :

$$\begin{array}{ll}
 1) f_1(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & 2) f_2(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
 3) f_3(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} & 4) f_4(x) = \frac{\sin(\pi x)}{|x - 1|} \\
 5) f_5(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & \text{si } x \leq 0 \\ \vee \\ \sin(3x) & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \vee \\ -1 + \cos(2x) & \text{si } x > \pi \end{cases} \\
 6) f_6(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \vee \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

**Exercice 4.** Déterminer le réel  $a$  pour que la fonction  $f$  soit continue sur son domaine de définition :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(2x^2)} & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x - a + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Exercice 5.**

- 1) Montrer que l'équation  $xe^x = 1$  admet au moins une solution dans  $]0, 1[$ .
- 2) Montrer que l'équation  $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$  admet exactement trois solutions dans  $] - 1, 1[$ .
- 3) Montrer que l'équation  $x^3 + 3x + 1 = 0$  admet au moins une solution entre  $-1$  et  $0$ . La solution est-elle unique ?

**Exercice 6.** Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur le domaine de définition et déterminer leurs dérivées :

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \vee \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ \vee \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \vee \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

**Exercice 7 :**

a) En utilisant la règle de l'Hopital, calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos(x)}{x - \sin(x)} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin(x)}{2x + \sin(x)} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} (5 - x) \left( \frac{1}{x - 4} \right)$$

b) En utilisant le théorème des accroissements finis (TAF),

Montrer que :

1) Pour  $0 < a < b$ ,  $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$ .

2)  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

**Exercice 8.** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, les limites aux bornes des intervalles et leurs fonctions dérivées :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$          | 2) $f(x) = \arccos(\ln(x))$              |
| 3) $f(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right)$ | 4) $f(x) = \operatorname{argch}(2x+1)$   |
| 5) $f(x) = \operatorname{argth}(e^x)$                    | 6) $f(x) = \operatorname{argcoth}(2x+2)$ |

## Solutions

**Exercice 1.** On détermine le domaine de définition,  $D_f$  des fonctions :

1.  $f(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})$ .

On a :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} \sqrt{1-x^2} > 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \\ \iff 1-x^2 > 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
signe de $1-x^2$	-	0	+	0

Par suite  $D_f = ]-1, 1[$ .

2.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}$ .

On a :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \wedge \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
signe de $x$		-	0	+
signe de $(2-x)$		+	+	0

Par suite  $D_f = [0, 2]$ .

3.  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}$ .

On a :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0 \\ \wedge \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff x(x+1) > 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
signe de $x(x+1)$		+	0	-
			0	+

Par suite  $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$ .

4.  $f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$ .

On a :

$$x \in D_f \iff \cos(2x) \geq 0,$$

$$\iff 2x \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\iff x \in \left[ \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

Comme la fonction  $x \rightarrow \cos$  est périodique, de période  $2\pi$ , alors

$$D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{-\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right].$$

5.  $f(x) = \ln(\ln(1+x))$ .

On a :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \begin{cases} 1+x > 0 \\ \wedge \\ \ln(x+1) > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+1 > 0 \\ \wedge \\ x+1 > 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1+x > 0 \\ \wedge \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	$0$	$+$
signe de $x$		$-$	$-$	$0$

Par suite  $D_f = ]0, +\infty[$ .

6.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \geq 0 \rightarrow D_1 \\ 1, & x < 0 \rightarrow D_2 \end{cases}$ .

On a,

$$D_f = D_1 \cup D_2.$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $\frac{1}{1-x}$  est défini si  $x \neq 1$ , donc,

$$D_1 = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

Pour  $x < 0$ ,  $f(x) = 1$  est défini, donc,

$$D_2 = ]-\infty, 0[.$$

Par suite,

$$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \geq 0 \longrightarrow D_1 \\ x^3 + x, & x < -1 \longrightarrow D_2 \end{cases}$$

On a,

$$D_f = D_1 \cup D_2.$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $\frac{1}{2-x}$  est défini si  $x \neq 2$ , donc,

$$D_1 = [0, 2[ \cup ]2, +\infty[.$$

Pour  $x < -1$ ,  $x^3 + x$  est défini, donc,

$$D_2 = ]-\infty, -1[.$$

Par suite,

$$D_f = ]-\infty, -1[ \cup [0, 2[ \cup ]2, +\infty[.$$

$$8. f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

On a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \frac{x-1}{x+1} \text{ est définie} \\ &\iff x \neq -1 \end{aligned}$$

alors

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

**Exercice 2.** Calcul de limites

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 5x - 10}{2x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{2x^2} = \frac{-3}{2}.$$

2. On a,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{1+x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}}, \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x + \sqrt{1+x^2}}, \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. On a,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}, \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x \ln \left( \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \right), \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x \ln \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right), \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right), \\
 &\simeq^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{x^2}, \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est bornée} \end{cases}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot x \ln(x) = 0$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \end{cases}$

6. On a,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\operatorname{tg}(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{\operatorname{tg}(2x)}, \\
 &\simeq^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)(1 + \cos(x))}{2x}, \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x(1 + \cos(x)))}{4}, \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \simeq^0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x+x^2)}{x} \simeq^0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+x^2}{x} = \simeq^0 \lim_{x \rightarrow 0} 2+x = 2$$

9. On a,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{5-x^2}+2)}{(\sqrt{5-x^2}-2)(\sqrt{5-x^2}+2)}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{5-x^2}+2)}{1-x^2}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^2}+2}{1+x}, \\ &\& = 2. \end{aligned}$$

10. On a,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\sin(x)-\cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)}, \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)}, \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\sin(x)-\cos(x))}{\cos(x)(\sin(x)-\cos(x))}, \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos(x)}, \text{ (car } \sin(x)-\cos(x) \neq 0) \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

11. On a,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x - 2}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x - 2}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)(x^2 + 4), \\ &= 32. \end{aligned}$$

12. On a,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(x - 1)^2}}{x - 1}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
signe de $x - 1$	$-$	$0$	$+$

alors on obtient,

$$\begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} &= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1, \\ \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} &= \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1. \end{aligned}$$

**Exercice 3.**

1.  $f_1(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ .

- **Domaine de définition :**

$$D_{f_1} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

- **Continuité sur  $D_{f_1}$  :**

La fonction  $f_1$  est le rapport des fonctions

$$x \longrightarrow 1 - \cos(x), \quad x \longrightarrow x^2$$

qui sont continues sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur chacun des intervalles de  $\mathbb{R}^*$ , par conséquent  $f_1$  est continue sur  $D_{f_1}$ .

• **Prolongement par continuité :**

La fonction  $f_1$  n'est pas définie en 0, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \simeq^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{2} < \infty.$$

On déduit alors que  $f_1$  admet un prolongement par continuité en 0, noté par  $\tilde{f}_1$  et défini par :

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, & x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

2.  $f_2(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$

• **Domaine de définition :**

Il est clair que :

$$D_{f_2} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

• **Continuité sur  $D_{f_2}$  :**

La fonction  $f_2$  est le produit et la composée des fonctions

$$x \longrightarrow x^2, \quad x \longrightarrow \sin(x), \quad x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

qui sont continues sur chacun des intervalles de  $\mathbb{R}^*$ , par conséquent  $f_2$  est continue en tout point de  $D_{f_2}$ .

• **Prolongement par continuité :**

La fonction  $f_2$  n'est pas définie en 0, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 < \infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ est borné} \end{cases}$$

On déduit alors que  $f_2$  admet un prolongement par continuité en 0, noté par  $\tilde{f}_2$  et défini par :

$$\tilde{f}_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3.  $f_3(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

• **Domaine de définition :** Il est clair que :

$$D_{f_3} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

• **Continuité sur  $D_{f_3}$  :**

La fonction  $f_3$  est le rapport et la composée des fonctions

$$x \longrightarrow \pi x, \quad x \longrightarrow \sin(x), \quad x \longrightarrow x - 1$$

qui sont continues sur chacun des intervalles de  $\mathbb{R} - \{1\}$ , par conséquent  $f_3$  est continue en tout point de  $D_{f_3}$ .

• **Prolongement par continuité :**

La fonction  $f_3$  n'est pas définie en 1, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = ?$$

Si on pose  $g(x) = \sin(\pi x)$ ,  $g(1) = \sin(\pi) = 0$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1),$$

or  $g'(x) = \pi \cos(\pi x)$ , donc  $g'(1) = \pi \cos(\pi) = -\pi$ .

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = -\pi < \infty.$$

On déduit alors que  $f_3$  admet un prolongement par continuité en 1, noté par  $\tilde{f}_3$  et défini par :

$$\tilde{f}_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}, & x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ -\pi, & x = 1 \end{cases}$$

4.  $f_4(x) = \frac{\sin(\pi x)}{|x - 1|}$

- **Domaine de définition :**

Il est clair que :

$$D_{f_4} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

- **Continuité sur  $D_{f_4}$  :**

La fonction  $f_4$  est le rapport et la composée des fonctions

$$x \longrightarrow \pi x, \quad x \longrightarrow \sin(x), \quad x \longrightarrow x - 1, \quad x \longrightarrow |x|$$

qui sont continues sur chacun des intervalles de  $\mathbb{R} - \{1\}$ , par conséquent  $f_4$  est continue en tout point de  $D_{f_4}$ .

- **Prolongement par continuité :**

La fonction  $f_4$  n'est pas définie en 1, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = ?$$

$$\text{On a, } \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = -\pi, \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = \pi$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = \nexists.$$

On déduit alors que  $f_4$  n'admet pas un prolongement par continuité au point 1.

$$5. f_5(x) = \begin{cases} x^3 - 4x, & x \leq 0 \\ \vee \\ \sin(3x), & 0 < x \leq \pi \\ \vee \\ -1 + \cos(2x), & x > \pi \end{cases}$$

• **Domaine de définition :**

Il est clair que

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-\infty, 0], f_5(x) = x^3 - 4x \text{ est définie,} \\ \forall x \in ]0, \pi], f_5(x) = \sin(3x) \text{ est définie,} \\ \forall x \in ]\pi, +\infty[, f_5(x) = -1 + \cos(2x) \text{ est définie,} \end{aligned}$$

par suite,

$$D_{f_5} = ]-\infty, 0] \cup ]0, \pi] \cup ]\pi, +\infty[ = \mathbb{R}$$

• **Continuité sur  $D_{f_5}$  :**

Il est clair que

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-\infty, 0[, f_5(x) = x^3 - 4x \text{ est continue,} \\ \forall x \in ]0, \pi[, f_5(x) = \sin(3x) \text{ est continue,} \\ \forall x \in ]\pi, +\infty[, f_5(x) = -1 + \cos(2x) \text{ est continue,} \end{aligned}$$

alors,  $f_5$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} - \{0, \pi\}$ .

- On étudie la continuité en 0 :

On a  $f_5(0) = 0^2 + 0 = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(3x) = 0 = f_5(0) \implies f_5$  est continue à droite de 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 4x = 0 = f_5(0) \implies f_5$  est continue à gauche de 0.

On déduit que  $f_5$  est continue en 0.

- On étudie la continuité en  $\pi$  :

On a  $f_5(\pi) = \sin(3\pi) = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} -1 + \cos(2x) = 0 = f_5(\pi) \implies f_5$  est continue à droite de  $\pi$ .

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(3x) = 0 = f_5(\pi) \implies f_5$  est continue à gauche de  $\pi$ .

On déduit que  $f_5$  est continue en  $\pi$ .

Ainsi, la fonction  $f_5$  est continue en tout point de  $D_{f_5}$ .

$$6. f_6(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

• **Domaine de définition :**

Il est clair que

$$D_{f_6} = \mathbb{R}$$

• **Continuité sur  $D_{f_6}$  :**

- Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f_6(x) = \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x}$  est le rapport, la composée et la somme des fonctions

$$x \longrightarrow 2x, \quad x \longrightarrow \sin(x), \quad x \longrightarrow e^x, \quad x \longrightarrow x, \quad x \longrightarrow -1$$

qui sont continues sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $\mathbb{R}^*$ , alors,  $f_6$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^*$ .

- On étudie la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_6(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} = ?$$

Pour calculer cette limite, on distingue deux méthodes :

**Méthode 1 :**

Si on pose  $g(x) = e^{\sin(2x)}$ ,  $g(0) = e^{\sin(2 \cdot 0)} = 1$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0),$$

or  $g'(x) = 2 \cos(2x)e^{\sin(2x)}$ , donc  $g'(0) = 2$ .

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} = 2 = f_6(0).$$

**Méthode 2 :**

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) = 0$ , alors  $e^{\sin(2x)} - 1 \sim^0 \sin(2x) \sim^0 2x$ ,  
d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_6(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2 = f_6(0)$$

On déduit que  $f_6$  est continue en 0.

Ainsi, la fonction  $f_6$  est continue en tout point de  $D_{f_6}$ .

**Exercice 4.** On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(2x^2)} & , -\pi < x < 0 \\ x - a + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



• **Domaine de définition :**

Il est clair que

$$\forall x \in ]-\pi, 0[, f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(2x^2)} \text{ est définie car } \sin(2x^2) \neq 0,$$

$$\forall x \in [0, \infty[, f(x) = x - a + 1 \text{ est définie car c'est un polynôme,}$$

par suite,

$$D_f = ]-\pi, +\infty[.$$

• **Continuité sur  $D_f$**

- Sur  $]-\pi, 0[$ ,  $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(2x^2)}$  est le rapport, la composée est la somme des fonctions

$$x \longrightarrow x^2, x \longrightarrow \sin(x), x \longrightarrow e^x, x \longrightarrow 2x, x \longrightarrow -1$$

qui sont continues sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $]-\pi, 0[$ , alors  $f$  est continue en tout point de  $]-\pi, 0[$ .

- Sur  $]0, +\infty[$ ,  $f(x) = x - a + 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $]0, +\infty[$  car c'est un polynôme, alors  $f$  est continue en tout point de  $]0, +\infty[$ .

- On étudie la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$\text{On a : } f(0) = -a + 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(2x^2)} \underset{\simeq^0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

et,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - a + 1 = -a + 1.$$

Pour que  $f$  soit continue au point 0, il faut et il suffit que

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0), \text{ donc } -a + 1 = \frac{1}{2}, \text{ ce qui donne}$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,  $f$  est continue sur  $D_f$  si et seulement si  $a = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 5.**

1. l'équation  $xe^x = 1 \iff xe^x - 1 = 0$ .

On considère la fonction  $f(x) = xe^x - 1$  définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  car c'est la somme et le produit des fonctions  $x \rightarrow x, x \rightarrow e^x$  et  $x \rightarrow -1$  qui sont continues sur  $[0, 1]$ .

De plus, on a  $f(0) = -1 < 0$  et  $f(1) = e - 1 > 0$ , donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins  $c \in ]0, 1[$  tel que  $f(c) = 0$ .

On déduit alors que l'équation  $xe^x = 1$  admet au moins une solution  $c \in ]0, 1[$ .

2. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$  sur  $[-1, 1]$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$  car c'est un polynôme.  $f(-1) = \frac{-1}{2} < 0$  et  $f(1) = \frac{3}{2} > 0$ , alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins  $c \in ]-1, 1[$  tel que  $f(c) = 0$ .

Pour montrer l'existence de trois solutions exactement, on étudie la monotonie de  $f$  sur  $[-1, 1]$ .

$$\forall x \in [-1, 1], f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(2x - 1)(2x + 1).$$

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1		
signe de $f'$		+	0	-	0	+
variations de $f$			$\frac{3}{2}$			$\frac{3}{2}$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	$-\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$	

- Sur  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ , la fonction  $f$  est continue, strictement croissante et  $f(-1).f(-\frac{1}{2}) < 0$  alors il existe une valeur unique  $c_1 \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$  telle que  $f(c_1) = 0$ .
- Sur  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , la fonction  $f$  est continue, strictement décroissante et  $f(-\frac{1}{2}).f(\frac{1}{2}) < 0$  alors il existe une valeur unique  $c_2 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$  telle que  $f(c_2) = 0$ .
- Sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , on suit le même raisonnement, il existe une valeur unique  $c_3 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$  telle que  $f(c_3) = 0$ .

On déduit alors que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement trois solutions comprises entre  $-1$  et  $1$ .

3. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 + 3x + 1$  sur  $[-1, 0]$ .
  - La fonction  $f$  est continue sur  $[-1, 0]$  car c'est un polynôme.  
 $f(0) = 1 > 0$  et  $f(-1) = -3 < 0$ , alors par le théorème des des valeurs intermédiaires il existe au moins

$c \in ]-1, 0[$  tel que  $f(c) = 0$ .

- La solution  $c$ , est-elle unique ?  
on étudie la monotonie de  $f$  sur  $[-1, 0]$ .

$$\forall x \in [-1, 0], f'(x) = 3x^2 + 3 > 0.$$

$x$	-1	0
signe de $f'$	+	
variations de $f$	-3	1

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[-1, 0]$  alors il existe une valeur unique  $c \in ]-1, 0[$  telle que  $f(c) = 0$ .

On déduit alors que l'équation  $x^3 + 3x + 1 = 0$  admet une solution unique comprise entre  $-1$  et  $0$ .

**Exercice 6.**

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \vee \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- **Domaine de définition** : Il est clair que

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- **Dérivabilité sur  $\mathbb{R}^*$**  :

Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ; la fonction  $f$  est le produit et la composée des fonctions élémentaires suivantes :

$$x \longrightarrow x^2, \quad x \longrightarrow \frac{1}{x}, \quad x \longrightarrow \cos(x),$$

qui sont dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ , alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
 En utilisant les règles de dérivation d'un produit et d'une composition de fonctions, on obtient que

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

- **Dérivabilité au point 0 :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 < \infty,$$

car  $\begin{cases} x \rightarrow 0, \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est bornée,} \end{cases}$   
 donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \vee \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \vee \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- **Domaine de définition :** Il est clair que

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- **Dérivabilité sur  $\mathbb{R}^*$  :**

Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ; la fonction  $f$  est la composée des fonctions élémentaires suivantes :

$$x \rightarrow x^2, \quad x \rightarrow -\frac{1}{x}, \quad x \rightarrow e^x,$$

qui sont dérivables sur  $\mathbb{R}^*$ , alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
 En utilisant les règles de dérivation d'une composition de fonctions, on obtient que

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}.$$

• **Dérivabilité au point 0 :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \left( \frac{-1}{x^2} \right) e^{\frac{-1}{x^2}} = 0 < \infty,$$

$$\text{car } \begin{cases} -x \rightarrow 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} e^{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u = 0, \text{ avec } u = \frac{-1}{x^2}, \end{cases}$$

donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \vee \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ \vee \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), & x > -1 \end{cases}$$

• **Domaine de définition :**

Pour  $x \leq -1$ ,  $f(x) = x + 1$  est bien définie.

Pour  $x > -1$ ,  $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  est bien définie.

Alors,

$$D_f = ]-\infty, -1] \cup ]-1, +\infty[ = \mathbb{R}.$$

• **Dérivabilité sur  $]-\infty, -1[$  :**

Pour  $x < -1$ ,  $f$  est dérivable car  $f(x) = x + 1$  est un polynôme et on a

$$f'(x) = 1.$$

• **Dérivabilité sur  $] -1, +\infty[$  :**

Pour  $x > -1$ ,  $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ; la fonction  $f$  est le produit et la composée des fonctions élémentaires suivantes ;

$$x \longrightarrow \frac{\pi x}{2}, \quad x \longrightarrow \cos(x),$$

qui sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $] -1, +\infty[$ , alors  $f$  est dérivable. En utilisant les règles de dérivation d'un produit et d'une composition de fonctions, on obtient que

$$f'(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi x).$$

• **Dérivabilité au point -1 :**

On a :

$$f(-1) = -1 + 1 = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{x + 1}{x + 1} = 1 < \infty,$$

donc  $f$  est dérivable à gauche de  $-1$  et  $f'_g(-1) = 1$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x + 1} = ?$$

On pose  $u(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ,  $u(-1) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , alors,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{u(x) - u(-1)}{x + 1} = u'(-1).$$

On a  $u'(x) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi x)$ , alors  $u'(-1) = 0$ ,

d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 0,$$

donc  $f$  est dérivable à droite de  $-1$  et  $f'_d(-1) = 0$ .

Comme

$$f'_g(-1) \neq f'_d(-1),$$

On déduit que  $f$  n'est pas dérivable au point  $-1$

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi x).$$

**Exercice 7.**

a) Calcul de limites par la règle de l'Hopital :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos(x)}{x - \sin(x)} \text{ F.I. } \left(\frac{0}{0}\right)$$

Les fonctions  $x \rightarrow x - x \cos(x)$  et  $x \rightarrow x - \sin(x)$  sont dérivables. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x \cos(x))'}{(x - \sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) + x \sin(x)}{1 - \cos(x)} \text{ F.I. } \left(\frac{0}{0}\right)$$

Les fonctions  $x \rightarrow 1 - \cos(x) + x \sin(x)$  et  $x \rightarrow 1 - \cos(x)$  sont dérivables. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x) + x \sin(x))'}{(1 - \cos(x))'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) + x \cos(x)}{\sin(x)}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 + \frac{x}{\sin(x)} \cos(x), \text{ (car } \sin(x) \neq 0) \\ &= 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ . Par conséquent, en appliquant la règle de l'Hopital deux fois, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos(x)}{x - \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x \cos(x))'}{(x - \sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x \cos(x))''}{(x - \sin(x))''} = 3.$$



$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ F.I. } \left( \frac{0}{0} \right)$$

Les fonctions  $x \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{2})$  et  $x \rightarrow \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$  sont dérivables. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \sin(2x - \frac{\pi}{2}) \right)'}{\left( \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x - \frac{\pi}{2})}{-\sin(x)} = -\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, en appliquant la règle de l'Hopital une fois, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \sin(2x - \frac{\pi}{2}) \right)'}{\left( \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)'} = -\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin(x)}{2x + \sin(x)} \text{ F.I. } \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

Les fonctions  $x \rightarrow x - \sin(x)$  et  $x \rightarrow 2x + \sin(x)$  sont dérivables. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sin(x))'}{(2x + \sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(x)}{2 + \cos(x)} \not\exists.$$

Les fonctions  $x \rightarrow 1 - \cos(x)$  et  $x \rightarrow 2 + \cos(x)$  sont dérivables. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \cos(x))'}{(2 + \cos(x))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{-\sin(x)} \not\exists \text{ car } \sin(x) \text{ peut être nul,}$$

donc la règle de l'Hopital ne peut être appliquée.

On détermine cette limite autrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin(x)}{2x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \frac{\sin(x)}{x})}{x(2 + \frac{\sin(x)}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin(x)}{x}}{2 + \frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1}{2}$$

puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 4} (5 - x)^{\left(\frac{1}{x - 4}\right)} = \lim_{x \rightarrow 4} e^{\frac{\ln(5 - x)}{x - 4}}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln(5 - x)}{x - 4}$  F.I  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

Les fonctions  $x \rightarrow \ln(5 - x)$  et  $x \rightarrow x - 4$  sont dérivables et

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\ln(5 - x))'}{(x - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{5 - x} = -1.$$

En appliquant la règle de l'Hopital une fois, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln(5 - x)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\ln(5 - x))'}{(x - 4)'} = -1,$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 4} (5 - x)^{\left(\frac{1}{x - 4}\right)} = \lim_{x \rightarrow 4} e^{\frac{\ln(5 - x)}{x - 4}} = e^{-1}$$

**b)** Applications du théorème des accroissements finis :

1. On montre que :

$$\text{Pour } 0 < a < b, \frac{b - a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b - a}{a}.$$

Soit  $f$  la fonction définie dans  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x)$ . Pour tous réels  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$ , la fonction  $f$  est

continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ ; par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists c \ ]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ce qui s'écrit

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b - a}{c}.$$

Or

$$\begin{aligned} 0 < a < c < b &\iff 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \\ &\implies \frac{b - a}{b} < \frac{b - a}{c} < \frac{b - a}{a} \quad (\text{car } b - a > 0) \\ &\implies \frac{b - a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b - a}{a} \end{aligned}$$

2. On montre que :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ .

Soit  $f$  la fonction définie dans  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x$ . On distingue trois cas :

- Pour  $x > 0$ , la fonction  $f$  est continue sur  $[0, x]$  et dérivable sur  $]0, x[$ ; par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists c \ ]0, x[, f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0),$$

ce qui s'écrit

$$e^x - 1 = xe^c.$$

Or

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\iff e^0 < e^c < e^x \\ &\iff x < xe^c < xe^x \quad (\text{car } x > 0) \\ &\implies x < e^x - 1 \\ &\implies e^x > x + 1 \end{aligned}$$

- Pour  $x < 0$ , la fonction  $f$  est continue sur  $[x, 0]$  et dérivable sur  $]x, 0[$ ; par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists c \ ]x, 0[, f(0) - f(x) = f'(c)(0 - x),$$

ce qui s'écrit

$$1 - e^x = -xe^c.$$

Or

$$\begin{aligned} x < c < 0 &\iff e^x < e^c < e^0 \\ &\iff -xe^x < -xe^c < -x \text{ (car } -x > 0) \\ &\implies 1 - e^x < -x \\ &\implies e^x > x + 1 \end{aligned}$$

- Pour  $x = 0$ , on a  $e^0 = 1 \geq 0 + 1$  donc l'égalité est vérifiée pour  $x = 0$ .

Par conséquent, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1.$$

**Exercice 8.**

1.  $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

- **Domaine de définition :**

On a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \begin{cases} -1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -1 \leq \frac{x+1}{x-1} \\ \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

On a

$$-1 \leq \frac{x+1}{x-1} \iff \frac{x+1}{x-1} + 1 \geq 0 \iff \frac{2x}{x-1} \geq 0$$

L'ensemble des solutions est  $S_1 = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$

De même

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 1 \iff \frac{2}{x-1} \leq 0$$

L'ensemble des solutions est  $S_2 = ]-\infty, 1[$

Ainsi

$$D_f = S_1 \cap S_2 = ]-\infty, 0].$$

• **Calcul de Limites**

On sait que

$$\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in [-1, 1], y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$- f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \text{ car } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

• **Dérivée**

On sait que : Pour tout  $x \in D_f$  tel que  $u(x) \neq \pm 1$

$$(\arcsin(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

alors,  $\forall x \in ]-\infty, 0[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{\frac{-4x}{(x-1)^2}}} \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{|x-1|}{2\sqrt{-x}} \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{-(x-1)}{2\sqrt{-x}} \\ &= \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x}} \end{aligned}$$

2.  $f(x) = \arccos(\ln(x))$

• **Domaine de définition :**

On a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \begin{cases} -1 \leq \ln(x) \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^{-1} \leq x \leq e \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ainsi

$$D_f = \left[ \frac{1}{e}, e \right].$$

• **Calcul de Limites**

On sait que

$$\forall y \in [0, \pi], \forall x \in [-1, 1], y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \arccos\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \arccos(-1) = \pi \text{ car } \cos(\pi) = -1$$

$$f(e) = \arccos(\ln(e)) = \arccos(1) = 0 \text{ car } \cos(0) = 1$$

• **Dérivée**

On sait que : Pour tout  $x \in D_f$  tel que  $u(x) \neq \pm 1$

$$(\arccos(u(x)))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

alors,  $\forall x \in \left] \frac{1}{e}, e \right[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(\ln(x))'}{\sqrt{1 - (\ln(x))^2}} \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1 - (\ln(x))^2}} \end{aligned}$$

3.  $f(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right)$

• **Domaine de définition :**

On a

$$x \in D_f \iff x \neq 0$$

Ainsi

$$D_f = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

• **Calcul de Limites**

On sait que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = \operatorname{argsh}(x) \iff x = \operatorname{sh}(y)$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \operatorname{argsh}(0) = 0 \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{argsh}(x) = -\infty \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argsh}(x) = +\infty \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \operatorname{argsh}(0) = 0 \end{cases}$$

• **Dérivée**

On sait que :

$$\forall x \in D_f, (\operatorname{argsh}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u(x))^2}}$$

alors,  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}} \\ &= \frac{-|x|}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

4.  $f(x) = \operatorname{argch}(2x + 1)$



• **Domaine de définition :**

On a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff 2x + 1 \geq 1 \neq 0 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$D_f = [0, +\infty[.$$

• **Calcul de Limites**

On sait que

$$\forall x \geq 1, \forall y \geq 0, y = \operatorname{argch}(x) \iff x = \operatorname{ch}(y)$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argch}(2x+1) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argch}(x) = +\infty \end{cases}$$

$$- f(0) = \operatorname{argch}(1) = 0 \text{ car } \operatorname{ch}(0) = 1$$

• **Dérivée**

On sait que :

$$\forall x \in D_f, \text{ tel que } u(x) \neq 1, (\operatorname{argch}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - 1}}$$

alors,  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 1)'}{\sqrt{(2x + 1)^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$

5.  $f(x) = \operatorname{argth}(e^x)$

• **Domaine de définition :**

On a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff -1 < e^x < 1 \\ &\iff \begin{cases} -1 < e^x \\ e^x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 < e^x$$

L'ensemble des solutions est  $S_1 = \mathbb{R}$

et,

$$e^x < 1 \iff x < 0$$

L'ensemble des solutions est  $S_2 = ]-\infty, 0[$

Ainsi

$$D_f = S_1 \cap S_2 = ]-\infty, 0[.$$

• **Calcul de Limites**

On sait que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-1, 1[, y = \operatorname{argth}(x) \iff x = \operatorname{th}(y)$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{argth}(e^x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \operatorname{argth}(0) = 0 \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{argth}(e^x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1^- \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{argth}(x) = +\infty \end{cases}$$

• **Dérivée**

On sait que : Pour tout  $x \in D_f$

$$(\operatorname{argth}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$$

alors,  $\forall x \in ]-\infty, 0[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x)'}{1 - (e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{1 - e^{2x}} \end{aligned}$$

6.  $f(x) = \operatorname{argcoth}(2x + 2)$

• **Domaine de définition :**

On a

$$x \in D_f \iff (2x + 2 < -1) \vee (2x + 2 > 1)$$

On a

$$2x + 2 < -1 \iff x < -\frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions est  $S_1 = ]-\infty, -\frac{3}{2}[$

et,

$$2x + 2 > 1 \iff x > -\frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions est  $S_2 = ]-\frac{1}{2}, +\infty[$

Ainsi

$$D_f = S_1 \cup S_2 = ]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}, +\infty[.$$

• **Calcul de Limites**

On sait que

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[, y = \operatorname{argcoth}(x) \iff x = \operatorname{coth}(y)$$

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{argcoth}(2x + 2) &= 0^- \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{argcoth}(x) = 0^- \end{cases} \\ - \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \operatorname{argcoth}(2x + 2) &= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} 2x + 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{argcoth}(x) = -\infty \end{cases} \\ - \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \operatorname{argcoth}(2x + 2) &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 2x + 2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{argcoth}(x) = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argcoth}(2x + 2) = 0^+ \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argcoth}(x) = 0^+ \end{cases}$$

• **Dérivée**

On sait que : Pour tout  $x \in D_f$

$$(\operatorname{argth}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$$

$$\text{alors, } \forall x \in \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[ \cup \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[ ,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 2)'}{1 - (2x + 2)^2} \\ &= \frac{2}{-4x^2 - 8x - 3} \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Lois de Composition Internes Structure Algébriques

### Exercices

**Exercice 1.** Les lois suivantes définies sur  $E$  sont-elles internes sur  $E$  :

1)  $E = \mathbb{R}$ ;  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x * y = \sqrt{x^2 - y^2}$

2)  $E = \mathbb{R}$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $x * y = \frac{x + 1}{y^3 + 1}$

3)  $E = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$ ;  $\forall (x, y) \in \left( \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\} \right)^2$ ,  $x * y = 4xy + x + y$

**Exercice 2.** On définit sur  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$  une loi de composition  $*$  par

$$\forall (x, y) \in \left( \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\} \right)^2, \quad x * y = 4xy + x + y$$

Montrer que  $\left( \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}, * \right)$  est un groupe abélien, i.e., commutatif.

**Exercice 3.** On définit sur  $\mathbb{R}$  une loi de composition  $*$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Montrer que  $(\mathbb{R}, *)$  est un groupe abélien, i.e., commutatif.

**Exercice 4.** On définit sur  $] -1, 1[$  une loi de composition  $*$  par

$$\forall x \in ] -1, 1[, \forall y \in ] -1, 1[, x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1) Montrer que  $*$  est une loi interne sur  $] -1, 1[$ .

2) Montrer que  $(] -1, 1[, *)$  est un groupe abélien.

**Exercice 5.** On définit deux lois  $*$  et  $\perp$  sur  $\mathbb{R}$  comme suit :

$$\begin{aligned} x * y &= x + y - 1 \\ x \perp y &= x + y - xy \end{aligned}$$

pour tous réels  $x$  et  $y$ .

$(\mathbb{R}, *, \perp)$  est-il un anneau commutatif?

**Exercice 6.** Soit l'ensemble  $A$  défini par

$$A = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que  $(A, +, \times)$  est un anneau commutatif.

## Solutions

**Exercice 1.**

On sait que :  $*$  est une loi interne dans  $E$  si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x * y \in E$$

1. On raisonne par exhiber un contre-exemple :

Pour  $x = 2, y = 4, x * y = 2 * 4 = \sqrt{2^2 - 4^2} = \sqrt{-12} \notin \mathbb{R}$ ,  
donc  $*$  n'est pas une loi interne dans  $\mathbb{R}$ .

2. On raisonne par production d'un contre-exemple :

Si on prend  $x = 0, y = -1$ , on aura  $x + 1 = 0 + 1 = 1$   
et  $y^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = 0$ , alors  $x * y = 0 * (-1) \notin \mathbb{R}$ ,  
donc  $*$  n'est pas une loi interne dans  $\mathbb{R}$ .

3. Soient  $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ,  $y \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ,  $x * y \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$  ?

- On sait que  $x * y \in \mathbb{R}$  puisque  $+$  et  $\times$  sont des lois internes dans  $\mathbb{R}$ .
- $x * y \neq -\frac{1}{4}$  ?

On raisonne par l'absurde : On suppose que  $x * y = -\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} x * y = -\frac{1}{4} &\iff 4xy + x + y = x * y = -\frac{1}{4} \\ &\iff 16xy + 4x + 4y = -1 \\ &\iff 16xy + 4x + 4y + 1 = 0 \\ &\iff 4x(4y + 1) + 4y + 1 = 0 \\ &\iff (4x + 1)(4y + 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} 4x + 1 = 0 \\ \vee \\ 4y + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ \vee \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{impossible car } x, y \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}) \end{aligned}$$

On déduit que  $x * y = -\frac{1}{4}$  ne peut pas être vraie, par conséquent  $x * y \neq -\frac{1}{4}$ .

Ainsi  $*$  est une loi interne dans  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ .

**Exercice 2.**  $\forall(x, y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}\right)^2$ ,  $x * y = 4xy + x + y$ .

On sait que  $\left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}, *\right)$  est un groupe commutatif si

$*$  est interne dans  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ , commutative, associative, admet

un élément neutre dans  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ , et tout élément de  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$  admet un symétrique.

- $*$  est interne dans  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$  (voir Exo1,Q3).

- $*$  est commutative si

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}\right)^2, x * y = y * x$$

Soient  $x, y$  quelconques de  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ , on a

$$\begin{aligned} x * y &= 4xy + x + y \\ &= 4yx + y + x \quad (+ \text{ et } - \text{ sont commutatives dans } \mathbb{R}) \\ &= y * x \end{aligned}$$

alors  $*$  est commutative dans  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ .

- $*$  est associative si

$$\forall (x, y, z) \in \left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}\right)^3, (x * y) * z = x * (y * z)$$

Soient  $x, y, z$  quelconques de  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ , on a

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \underbrace{(4xy + x + y)}_a * z \\ &= a * z \\ &= 4az + a + z \\ &= 16xyz + 4xz + 4yz + 4xy + x + y + z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \underbrace{(4yz + y + z)}_b \\ &= x * b \\ &= 4xb + x + b \\ &= 16xyz + 4xy + 4xz + x + 4yz + y + z \end{aligned}$$



Il est clair que  $(x * y) * z = x * (y * z)$  puisque  $+$  et  $\times$  sont commutatives et associatives dans  $\mathbb{R}$ . alors  $*$  est associative dans  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$ .

- $*$  admet un élément neutre dans  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$  si

$$\exists e \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}, (x * e = x) \wedge (e * x = x)$$

Soient  $x$  quelconque de  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$ . Comme  $*$  est commutative, on va résoudre une seule équation.

$$\begin{aligned} x * e = x &\iff 4xe + x + e = x \\ &\iff e(4x + 1) = 0 \\ &\iff e = 0 \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\} \text{ puisque } 4x + 1 \neq 0 \end{aligned}$$

On déduit que 0 est l'élément neutre pour  $*$  dans  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$ ,  $x$  admet un symétrique dans  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$  par rapport à  $*$  si

$$\exists x' \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{4} \right\}, (x * x' = e) \wedge (x' * x = e).$$

Comme  $*$  est commutative, on va résoudre une seule équation.

$$\begin{aligned} x * x' = e &\iff 4xx' + x + x' = 0 \\ &\iff x'(4x + 1) = -x \\ &\iff x' = \frac{-x}{4x + 1} \in \mathbb{R} \text{ puisque } 4x + 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Est ce que  $\frac{-x}{4x+1} \neq -\frac{1}{4}$  ?

On raisonne par l'absurde : On suppose que  $\frac{-x}{4x+1} = -\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} \frac{-x}{4x+1} = -\frac{1}{4} &\iff -4x = -4x - 1 \\ &\iff 0 = -1 \text{ absurde} \end{aligned}$$

On déduit que  $\frac{-x}{4x+1} = -\frac{1}{4}$  ne peut être vraie, donc  $\frac{-x}{4x+1} \neq -\frac{1}{4}$  est vraie ainsi  $x' \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ .

Par conséquent, tout réel  $x$  de  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$  admet un symétrique  $x' = \frac{-x}{4x+1} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ .

De ce qui précède, on conclut que  $\left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}, *\right)$  est un groupe commutatif (ou bien abélien).

**Exercice 3.**  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

- $*$  est une loi interne dans  $\mathbb{R}$  ?

Soient  $x$  et  $y$  deux réels quelconques. On sait que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{a} \in \mathbb{R},$$

alors  $\sqrt[3]{x^3 + y^3} \in \mathbb{R}$ , ce qui est équivalent à  $x * y \in \mathbb{R}$ , par conséquent  $*$  est une loi interne dans  $\mathbb{R}$ .

- $*$  est commutative dans  $\mathbb{R}$  ?

Soient  $x$  et  $y$  deux réels quelconques. On a

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y * x,$$

alors  $*$  est commutative dans  $\mathbb{R}$ .

- $*$  est associative dans  $\mathbb{R}$  ?

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois réels quelconques. On a

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \underbrace{\sqrt[3]{y^3 + z^3}}_a \\ &= x * a \\ &= \sqrt[3]{x^3 + a^3} \\ &= \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3}\right)^3} \\ &= \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \underbrace{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}_b * z \\ &= b * z \\ &= \sqrt[3]{b^3 + z^3} \\ &= \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 + z^3} \\ &= \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} \end{aligned}$$

Il est clair que  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , alors  $*$  est associative dans  $\mathbb{R}$ .

- $*$  admet un élément neutre  $e$  dans  $\mathbb{R}$  ?

Soient  $x$  quelconque de  $\mathbb{R}$ . Comme  $*$  est commutative, on va résoudre une seule équation.

$$\begin{aligned} x * e = x &\iff \sqrt[3]{x^3 + e^3} = x \\ &\iff x^3 + e^3 = x^3 \\ &\iff e^3 = 0 \\ &\iff e = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On déduit que 0 est l'élément neutre pour  $*$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Tout élément de  $\mathbb{R}$  admet un symétrique pour  $*$ ?

Soit  $x$  un réel quelconque. Comme  $*$  est commutative, on se limite à résoudre  $x * x' = 0$ , où  $x'$  est l'inconnu réel à déterminer.

$$\begin{aligned} x * x' = 0 &\iff \sqrt[3]{x^3 + x'^3} = 0 \\ &\iff x^3 + x'^3 = 0 \\ &\iff x'^3 = -x^3 \\ &\iff x'^3 = (-x)^3 \\ &\iff x' = -x \end{aligned}$$

On déduit que  $-x$  est le symétrique de  $x$  \*.

Conclusion :  $(\mathbb{R}, *)$  est un groupe commutatif.

**Exercice 4.**  $\forall x \in ]-1, 1[, \forall y \in ]-1, 1[, x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$

1. On montre que  $*$  est interne dans  $]-1, 1[$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux réels de  $]-1, 1[$ .  $x * y \in ]-1, 1[$ ?

On sait que

$$x * y \in ]-1, 1[ \iff -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 \quad (\text{E})$$

**Méthode 1 :**

On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \in ]-1, 1[ \\ y \in ]-1, 1[ \end{cases} &\iff \begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \\ &\implies |xy| < 1 \\ &\implies -1 < xy < 1 \\ &\implies 0 < 1 + xy < 2 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\forall x \in ]-1, 1[, \forall y \in ]-1, 1[, 1 + xy > 0.$$

d'où montrer (E) revient à montrer

$$-1 - xy < x + y < 1 + xy,$$

qui est elle même équivalente à

$$\begin{cases} -1 - xy < x + y & (\text{E1}) \\ x + y < 1 + xy & (\text{E2}) \end{cases}$$

- Pour vérifier (E1), on calcule la différence,

$$x + y + 1 + xy = x(1 + y) + y + 1 = (1 + y)(1 + x)$$

$$\text{or } -1 < x < 1 \text{ donc } 0 < 1 + x < 2$$

$$\text{de même, } 0 < 1 + y < 2$$

donc  $(1 + y)(1 + x) > 0$ , ce qui implique que (E1) est vérifiée.

- Pour vérifier (E2), on calcule la différence,

$$x + y - 1 - xy = x(1 - y) + y - 1 = (1 - y)(x - 1)$$

or  $-1 < x < 1$  donc  $-2 < x - 1 < 0$

et  $-1 < y < 1$  donc  $0 < 1 - y < 2$

d'où  $(1 - y)(x - 1) < 0$ , ce qui implique que (E2) est vérifiée.

On déduit que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \forall y \in ]-1, 1[, x * y \in ]-1, 1[,$$

par suite  $*$  est une loi de composition interne dans  $]-1, 1[$ .

**Méthode 2 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]-1, 1[$  par

$$f(x) = \frac{x + y}{1 + xy}$$

où  $y \in ]-1, 1[$  est considéré comme un paramètre.

On fait l'étude des variations de la fonction  $f$  sur  $]-1, 1[$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + y}{1 + xy} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1 + y}{1 - y} = -1 \text{ car } y \neq 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + y}{1 + xy} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + y}{1 + y} = 1 \text{ car } y \neq -1.$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, f'(x) = \frac{1 - y^2}{(1 + xy)^2} > 0.$$

Tableau de variation de  $f$  :

$x$	-1	1
signe de $f'$	+	
variations de $f$	-1	1

On obtient  $\forall x \in ]-1, 1[, f(x) \in ]-1, 1[$ , par conséquent

$$\forall x \in ]-1, 1[, \forall y \in ]-1, 1[, \frac{x+y}{1+xy} \in ]-1, 1[.$$

Ainsi  $*$  est une loi interne dans  $] -1, 1[$ .

2. On montre que  $(]-1, 1[, *)$  est un groupe abélien ?

- $*$  est commutative ?

Soient  $x$  et  $y$  deux réels quelconques de  $] -1, 1[$ .

On a

$$\begin{aligned} x * y &= \frac{x+y}{1+xy} \\ &= \frac{y+x}{1+yx} \\ &= y * x \end{aligned}$$

On déduit que  $*$  est commutative.

- $*$  est associative ?

Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels quelconques de  $] -1, 1[$ .

On a

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= \frac{x + y}{\underbrace{1 + xy}_a} * z \\
&= a * z \\
&= \frac{a + z}{1 + az} \\
&= \frac{\frac{x + y}{1 + xy} + z}{1 + \frac{x + y}{1 + xy}z} \\
&= \frac{\frac{x + y + z + xyz}{1 + xy}}{1 + \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy}} \\
&= \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x * (y * z) &= x * \frac{y + z}{\underbrace{1 + yz}_b} \\
&= x * b \\
&= \frac{x + b}{1 + xb} \\
&= \frac{x + \frac{y + z}{1 + yz}}{1 + x \frac{y + z}{1 + yz}} \\
&= \frac{\frac{x + xyz + y + z}{1 + yz}}{1 + \frac{x + xyz + y + z}{1 + yz}} \\
&= \frac{x + xyz + y + z}{1 + yz + xy + xz}
\end{aligned}$$



On remarque que

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

d'où  $*$  est associative.

- $*$  admet un élément neutre  $e \in ]-1, 1[$  ?

Soit  $x$  un réel quelconque de  $]-1, 1[$ . Comme  $*$  est commutative, on se contente de résoudre qu'une seule équation.

$$\begin{aligned} x * e = x &\iff \frac{x + e}{1 + xe} = x \\ &\iff x + e = x + x^2e \\ &\iff e(1 - x^2) = 0 \\ &\iff e = 0 \in ]-1, 1[ \text{ (car } x \neq \pm 1) \end{aligned}$$

On déduit que 0 est l'élément neutre pour  $*$ .

- Tout élément de  $]-1, 1[$  admet un symétrique par rapport à  $*$  ?

Soit  $x \in ]-1, 1[$ , on cherche  $x' \in ]-1, 1[$  tel que

$$x * x' = e.$$

On se limite à résoudre cette équation puisque  $*$  est commutative.

$$\begin{aligned} x * x' = e &\iff \frac{x + x'}{1 + xx'} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + x' = 0 \\ \wedge \\ 1 + xx' \neq 0 \text{ (vérifiée, voir Q1)} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où  $x' = -x \in ]-1, 1[$  On déduit que  $-x$  est le symétrique de  $x$  pour  $*$ .

On conclut que  $(]-1, 1[, *)$  est un groupe abélien.

**Exercice 5.** Soient  $*$  et  $\perp$  deux lois définies sur  $\mathbb{R}$  pour tous réels  $x$  et  $y$  par

$$\begin{aligned}x * y &= x + y + 1 \\x \perp y &= x + y - xy.\end{aligned}$$

$(\mathbb{R}, *, \perp)$  est un anneau commutatif si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ et } \perp \text{ sont des lois internes dans } \mathbb{R}, \\ (\mathbb{R}, *) \text{ est un groupe abélien,} \\ \perp \text{ est commutative,} \\ \perp \text{ est associative,} \\ \perp \text{ est distributive par rapport à } * . \end{array} \right.$$

Il est clair que  $*$  et  $\perp$  sont des lois internes dans  $\mathbb{R}$  ( $+$  et  $\times$  sont internes dans  $\mathbb{R}$ ).

On a aussi :

- $*$  est commutative et associative (facile à faire).
- 1 est l'élément neutre pour  $*$ .
- Tout réel  $x$  admet un symétrique  $x'$  pour  $*$  :  $x' = 2 - x$ .

d'où  $(\mathbb{R}, *)$  un groupe abélien.

- $\perp$  est commutative et associative (facile à faire).
- $\perp$  est distributive par rapport à  $*$  si

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x \perp (y * z) = (x \perp y) * (x \perp z) \\ (y * z) \perp x = (y \perp x) * (z \perp x) \end{cases}$$

Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels quelconques. Comme  $\perp$  est commutative, on se contente de démontrer juste la première égalité.

$$\begin{aligned} x \perp (y * z) &= x \perp \underbrace{(y + z - 1)}_a \\ &= x \perp a \\ &= x + a - xa \\ &= x + y + z - 1 - xy - xz + x \\ &= 2x + y + z - xy - xz - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \perp y) * (x \perp z) &= (x + y - xy) * (x + z - xz) \\ &= x + y - xy + x + z - xz - 1 \\ &= 2x + y + z - xy - xz - 1 \end{aligned}$$

On remarque que  $x \perp (y * z) = (x \perp y) * (x \perp z)$ , alors  $\perp$  est distributive par rapport à  $*$ .

Conclusion :  $(\mathbb{R}, *, \perp)$  est un anneau commutatif.

**Exercice 6.** On considère l'ensemble  $A$  défini par

$$A \left\{ a + b\sqrt{5}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. On montre que  $(A, +)$  groupe abélien ?

- **$+$  est une loi interne dans  $A$  :**

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $A$ .  $x + y \in A$  ?

On a  $x = a_1 + b_1\sqrt{5}$ ,  $y = a_2 + b_2\sqrt{5}$ .

$$x + y = \underbrace{a_1 + a_2}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in \mathbb{Z}} \sqrt{5} \in \mathbb{Z}$$

alors,  $+$  est une loi interne dans  $A$ .

- **$+$  est commutative dans  $A$  :**

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $A$ . On a

$$x + y = y + x$$

puisque  $+$  est commutative dans  $\mathbb{R}$ , en particulier dans un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On déduit que  $+$  est commutative dans  $A$ .

•  **$+$  est associative dans  $A$  :**

Comme  $+$  est associative dans  $\mathbb{R}$ , et  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , alors  $+$  est associative dans  $A$ .

•  **$+$  admet un élément neutre dans  $A$  :**

comme  $0$  est l'élément neutre pour  $+$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $0$  est aussi l'élément neutre pour  $+$  dans  $A$ .

• **Tout élément  $x \in A$  admet un symétrique :**

On sait que le symétrique de tout  $x \in \mathbb{R}$  par rapport à  $+$  est  $-x$ , en particulier pour tout  $x = a + b\sqrt{5} \in A$ , son symétrique est  $x' = -(a + b\sqrt{5}) = -a - b\sqrt{5}$ . Il est évident que  $x' \in A$  puisque  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  donc  $-a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ .

On déduit que  $(A, +)$  est un groupe commutatif.

2.  $\times$  est une loi interne dans  $A$  ?

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $A$ .  $x \times y \in A$  ?

On a  $x = a_1 + b_1\sqrt{5}$ ,  $y = a_2 + b_2\sqrt{5}$ .

$$x \times y = (a_1 + b_1\sqrt{5})(a_2 + b_2\sqrt{5}) = \underbrace{a_1a_2 + 5b_1b_2}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b_1a_2 + a_1b_2)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{5} \in A$$

alors,  $\times$  est une loi interne dans  $A$ .

3.  $\times$  est commutative et associative dans  $A$  car elle est commutative et associative dans  $\mathbb{R}$ , en particulier dans  $A$  qui est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .
4.  $\times$  est distributive par rapport à l'addition dans  $A$  car elle l'est dans  $\mathbb{R}$ , en particulier dans  $A$  qui est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

Conclusion :  $(A, +, \times)$  est un anneau commutatif.

# Chapitre 5

## Espaces Vectoriels

### Exercices

Dans toute la suite, les espaces vectoriels sont considérés sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Exercice 1.** Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \geq 0\}$$

$$G = \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

**Exercice 2.** On considère dans  $\mathbb{R}^3$  le sous-ensemble  $H$  défini par

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y = 0\}$$

- 1) Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Donner une base de  $H$ . Quelle est la dimension de  $H$  ?
- 3)  $H$  est-il égal à  $\mathbb{R}^3$  ? Justifier.

**Exercice 3.** 1) Dans l'espace vectoriel  $E$ , on considère les familles de vecteurs suivantes. Déterminer celles qui sont libres. Justifier.

$$F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}, E = \mathbb{R}^3$$

$$F_2 = \{(0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 0); (2, 1, 1, 0)\}, E = \mathbb{R}^4$$

$$F_3 = \{(2, 0, 2); (1, 1, 4); (-1, 3, 2)\}, E = \mathbb{R}^3$$

2) Montrer que la famille  $\{(1, 2); (2, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

3) Montrer que la famille  $\{(2, 0, 2); (1, 1, 4); (-1, 3, 2)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 4.** Soit l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2y - z = 0\}$$

- 1) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Déterminer une base de  $E$ . Quelle est sa dimension ?
- 3)  $E$  est-il égal à  $\mathbb{R}^3$ ? justifier.

## Solutions

**Exercice 1.**

**Rappel de cours :**  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ .  $F \subseteq E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

- $F \neq \emptyset$ .
- $\forall X \in F, \forall Y \in F, X + Y \in F$ .
- $\forall X \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha X \in F$ .

ou bien de manière équivalente :

- $F \neq \emptyset$ .
- $\forall X \in F, \forall Y \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \beta \in \mathbb{K}, \alpha X + \beta Y \in F$ .

1.  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}$ .

On remarque que  $(0, 0, 0) \notin E$  puisque  $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$ , alors  $E$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

2.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \geq 0\}$

- $(0, 0, 0) \in F$  car  $y = 0 \geq 0$ , alors  $F \neq \emptyset$ .

- Soient  $X \in F, Y \in F$  quelconques.  $X + Y \in F$  ?

On a

$$X = (x_1, y_1, z_1) \text{ avec } y_1 \geq 0,$$

$$Y = (x_2, y_2, z_2) \text{ avec } y_2 \geq 0,$$

alors

$$X + Y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F \text{ puisque } y_1 + y_2 \geq 0.$$

- Soient  $X \in F, \alpha \in \mathbb{R}$  quelconques.  $\alpha X \in F$  ?

On a

$$X = (x_1, y_1, z_1) \text{ avec } y_1 \geq 0, \text{ alors } \alpha X = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

mais  $\alpha y_1$  n'est pas forcément positif.

**Contre exemple :** on prend  $X = (-1, 2, 3)$  et  $\alpha = -4$ , on obtient

$$\alpha X = (4, -8, -12), \text{ or } -8 \not\geq 0.$$

On déduit que  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque :** On peut directement donner un contre-exemple.

3.  $G = \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

On a  $(0, 0, 0) \notin G$  puisque  $x = 0 \neq 1$  alors  $G$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

4.  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

On raisonne par production d'un contre-exemple :

Pour  $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0) \in H$  et  $\alpha = 16$ , on a  $\alpha X = (8, 4, 0)$ .



Or,  $8^2 + 4^2 + 0^2 \not\leq 1$ .

On déduit que  $H$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 2.** On considère le sous-ensemble  $H$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y = 0\}$$

1. On montre que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

- On a  $(0, 0, 0) \in H$  puisque  $x + y + z = 0 + 0 + 0 = 0$  et  $x + 2y = 0 + 2 \cdot 0 = 0$ , alors  $H \neq \emptyset$ .

- Soient  $X \in H$  et  $Y \in H$  quelconques.  $X + Y \in H$  ?

On sait que :

$X = (x_1, y_1, z_1)$  tel que  $x_1 + y_1 + z_1 = 0$  et  $x_1 + 2y_1 = 0$ ,

$Y = (x_2, y_2, z_2)$  tel que  $x_2 + y_2 + z_2 = 0$  et  $x_2 + 2y_2 = 0$ .

alors,

$$X + Y = (\underbrace{x_1 + x_2}_a, \underbrace{y_1 + y_2}_b, \underbrace{z_1 + z_2}_c) = (a, b, c).$$

Comme

$$\begin{aligned} a + b + c &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, \\ &= \underbrace{x_1 + y_1 + z_1}_{=0} + x_2 + \underbrace{x_2 + y_2 + z_2}_{=0}, \end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$a + 2b = x_1 + x_2 + y_1 + 2y_1 + 2y_2,$$

$$= \underbrace{x_1 + 2y_1}_{=0} + \underbrace{x_2 + 2y_2}_{=0},$$

$$= 0,$$

alors,  $X + Y \in H$ .

- Soient  $X \in H$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  quelconques.  $\alpha X \in H$  ?

On sait que

$X = (x, y, z)$  tel que  $x + y + z = 0$  et  $x + 2y = 0$ .

On a

$$\alpha X = (\alpha x, \alpha y, \alpha z),$$

or,

$$\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x + y + z) = 0,$$

$$\alpha x + 2\alpha y = \alpha(x + 2y) = 0,$$

alors  $\alpha X \in H$ .

On déduit que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Donner une base de  $H$ . Quelle est la dimension de  $H$  ?

**Rappel de cours :** Une famille de vecteurs de  $H$  est une base pour  $H$  si elle est libre et génératrice.

- On détermine une famille génératrice.

Soient  $X \in H$  quelconque. alors

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ x = -2y \end{cases}$$

alors, le vecteur  $X$  s'écrit

$$\begin{aligned} X &= (-2y, y, y) \\ &= y \underbrace{(-2, 1, 1)}_u \\ &= y \cdot u \end{aligned}$$

On déduit que  $\{u\}$  est une famille génératrice de  $H$ .

- $\{u\}$  est une famille libre ?

Comme  $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ , alors  $\{u\}$  est libre.

Par suite,  $\{u\}$  est une base de  $H$ .

Ainsi,

$$\dim H = 1$$

3.  $H$  est-il égal à  $\mathbb{R}^3$ ? Justifier.

On a

$$\dim H = 1 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

alors,

$$H \neq \mathbb{R}^3.$$

**Exercice 3.**

1. On détermine les familles libres :

**Rappel de cours :** Une famille de vecteurs  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , d'un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $\mathbb{K}$ , est libre si

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_E \implies v_1 = \beta = \gamma = 0$$

- $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ ,  $E = \mathbb{R}^3$ .  
Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  des réels tels que

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(0, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Est ce que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ?

$$\begin{aligned} \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(0, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

d'où  $F_1$  est une famille libre.

- $F_2 = \left\{ \underbrace{(0, 1, 1, 0)}_u; \underbrace{(1, 1, 1, 0)}_v; \underbrace{(2, 1, 1, 0)}_w \right\}$ ,  $E = \mathbb{R}^4$ .

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  des réels tels que  $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^4}$ .

Est ce que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ?

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^4} &\iff \begin{cases} \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases} \end{aligned}$$

**Contre-exemple :** Si on prend  $\gamma = 1$  alors  $\alpha = 1$  et  $\beta = -2$ , qui ne sont pas tous nuls, et on vérifie facilement que  $1u - 2v + 1w = 0_{\mathbb{R}^4}$ .  
On déduit que la famille  $F_2$  n'est pas libre mais liée.

$$\bullet F_3 = \left\{ \underbrace{(2, 0, 2)}_{u_1}; \underbrace{(1, 1, 4)}_{u_2}; \underbrace{(-1, 3, 2)}_{u_3} \right\}; E = \mathbb{R}^3.$$

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  des réels tels que  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Est ce que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  ?

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 &= 2\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -3\alpha_3 \\ -6\alpha_3 &= 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On déduit que la famille  $F_3$  est libre.

2. On montre que la famille  $\{(1, 2); (2, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

- la famille  $\{(1, 2); (2, 1)\}$  est libre ?

Soient  $\alpha_1, \alpha_2$  deux réels quelconques tels que

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(2, 1) = (0, 0).$$

On doit montrer que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ?

$$\begin{aligned} \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(2, 1) = (0, 0) &\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ -3\alpha_2 = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc, la famille  $\{(1, 2); (2, 1)\}$  est libre.

- **Rappel de cours** : Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $\mathcal{B}$  une famille à  $n$  vecteurs de  $E$ . On a

$$\begin{cases} \dim(E) = n \\ \mathcal{B} \text{ est libre (ou génératrice)} \end{cases} \implies \mathcal{B} \text{ est une base pour } E.$$

Comme  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$  et la famille  $\{(1, 2); (2, 1)\}$  est libre et contient exactement deux vecteurs, on déduit que c'est une base pour  $\mathbb{R}^2$ .

3. On montre que la famille  $\{(2, 0, 2); (1, 1, 4); (-1, 3, 2)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Remarquons que la famille  $\{(2, 0, 2); (1, 1, 4); (-1, 3, 2)\}$  est exactement la famille  $F_3$  de la question 1, qui est libre.

comme, elle contient 3 vecteurs et  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , alors c'est une base pour  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 4.** Soit l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2y - z = 0\}$$

1. On montre que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

- On a  $(0, 0, 0) \in E$  car  $2y - z = 2 \cdot 0 - 0 = 0$  alors  $E \neq \emptyset$
- Soient  $X, Y$  deux vecteurs quelconques de  $E$  et soient  $\alpha, \beta$  deux réels quelconques.  $\alpha X + \beta Y \in E$  ?

On sait que :

$$X = (x_1, y_1, z_1) \text{ tel que } 2y_1 - z_1 = 0,$$

$$Y = (x_2, y_2, z_2) \text{ tel que } 2y_2 - z_2 = 0.$$

On a

$$\alpha X + \beta Y = \left( \underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_a, \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_b, \underbrace{\alpha z_1 + \beta z_2}_c \right)$$

et

$$2b - c = \alpha \underbrace{(2y_1 - z_1)}_{=0} + \beta \underbrace{(2y_2 - z_2)}_{=0} = 0$$

ainsi  $(a, b, c) \in E$ , par suite  $\alpha X + \beta Y \in E$ .

On déduit que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Déterminer une base de  $E$ . Quelle est sa dimension ?

- On détermine une famille génératrice de  $E$  ?

Soit  $X \in E$  alors  $X = (x, y, z)$  tel que  $2y - z = 0$

donc

$$\begin{aligned} X &= (x, y, 2y) \\ &= (x, 0, 0) + (0, y, 2y) \\ &= x \underbrace{(1, 0, 0)}_u + y \underbrace{(0, 1, 2)}_v \\ &= xu + yv \end{aligned}$$

Ainsi,  $\{u, v\}$  est une famille génératrice de  $E$ .

- Est ce que la famille  $\{u, v\}$  est libre ?

Soient  $\alpha, \beta$  deux réels tels que  $\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3}$ .  $\alpha = \beta = 0$  ?

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \\ &\implies \alpha = \beta = 0\end{aligned}$$

alors la famille  $\{u, v\}$  est libre, par conséquent c'est une base de  $E$ .

On déduit que  $\dim(E) = 2$ .

3.  $E$  est-il égal à  $\mathbb{R}^3$ ? justifier.

comme  $\dim(E) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , alors  $E \neq \mathbb{R}^3$ .

# Chapitre 6

## Développements Limités

### Exercices

**Exercice 1.** Déterminer le développement limité à l'ordre donné au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln(1+x) + e^x \quad \text{à l'ordre 5} \quad 6) f(x) = \sqrt{2 + \cos x} \quad \text{à l'ordre 2}$$

$$2) f(x) = \ln(1+x)e^x \quad \text{à l'ordre 3} \quad 7) f(x) = e^{\sqrt{2+\cos x}} \quad \text{à l'ordre 2}$$

$$3) f(x) = \cos(e^x) \quad \text{à l'ordre 2} \quad 8) f(x) = \frac{1 + \arctan x}{\cos x} \quad \text{à l'ordre 4}$$

$$4) f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2} \quad \text{à l'ordre 2} \quad 9) f(x) = \operatorname{argsh} \sqrt{1+x} \quad \text{à l'ordre 3}$$

$$5) f(x) = (1 + \sqrt{1+x})^{\frac{1}{2}} \quad \text{à l'ordre 3} \quad 10) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{à l'ordre 4}$$

**Exercice 2.** Déterminer le développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$  des fonctions suivantes :



$$1) f(x) = \cos(x) \quad n = 3 \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$2) f(x) = \ln(x) \quad n = 2 \quad x_0 = 3$$

$$3) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \quad n = 2 \quad x_0 = +\infty$$

**Exercice 3.** 1) Donner le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 5, de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) En déduire le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 6, de la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = (\arcsin x)^2.$$

**Exercice 4.** A l'aide des développements limités, trouver les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arccos x}{\sin^3 x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

## Solutions

**Exercice 1.** On détermine les développements limités au voisinage de 0 :

1.  $f(x) = \ln(1+x) + e^x$  à l'ordre 3.

On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

d'où en effectuant la somme de ces deux développements limités

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + 2x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

2.  $f(x) = \ln(1+x)e^x$  à l'ordre 3

En effectuant le produit des développements limités des fonctions  $\ln(1+x)$  et  $e^x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

3.  $f(x) = \cos(e^x)$  à l'ordre 2. Comme la fonction  $f$  est la composée des fonctions :

$$x \longrightarrow e^x, \quad x \longrightarrow \cos x$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \neq 0.$$

On réécrit  $f(x)$  sous la forme suivante :

$$f(x) = \cos(e^x - 1 + 1) = \cos(e^x - 1) \cos(1) - \sin(e^x - 1) \sin(1).$$

On a les développements limités des fonctions  $\cos x$ ,  $\sin x$  et  $e^x$  au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et

$$\sin(x) = x + o(x^2)$$

Par composition,

$$\begin{aligned} \cos(e^x - 1) &= 1 - \frac{(x + \frac{x^2}{2})^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\sin(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos(e^x) &= \cos 1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \sin 1 \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= \cos 1 - x \sin 1 - \frac{\cos 1 + \sin 1}{2} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

4.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$  à l'ordre 2

On procède par division euclidienne suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} 1 & +x \\ -1 & -\frac{1}{2}x \quad -\frac{1}{2}x^2 \\ \hline & \frac{1}{2}x \quad -\frac{1}{2}x^2 \\ & -\frac{1}{2}x \quad -\frac{1}{4}x^2 \quad -\frac{1}{4}x^3 \\ \hline & -\frac{3}{4}x^2 \quad -\frac{1}{4}x^3 \end{array}$$

Ainsi, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

5.  $f(x) = (1 + \sqrt{1+x})^{\frac{1}{2}}$  à l'ordre 3

Le développement limité de la fonction  $(1+x)^\alpha$  au voisinage de 0 à l'ordre 3 est donné par :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on obtient

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

par suite, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3) = 0$$

alors par composition avec le développement limité au voisi-

nage de 0 de  $\sqrt{1+x}$ , on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} \right) - \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{16} \left( \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} \right)^3 + o(x^3) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} \right) - \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{32} \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{16} \left( \frac{x^3}{64} \right) + o(x^3) \\ &= \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + \frac{21}{1024}x^3 \right] + o(x^3) \end{aligned}$$

6.  $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$  à l'ordre 2

Le développement limité de la fonction  $\cos x$  au voisinage de 0 à l'ordre 2 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

alors

$$2 + \cos x = 3 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Par suite, au voisinage de 0, la fonction  $f$  s'écrit

$$f(x) = \sqrt{3 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \sqrt{3} \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

or,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$

et comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{6} + o(x^2) = 0$$

alors par composition des développements limités, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{-x^2}{6} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{-x^2}{6} \right)^2 + o(x^2) \right) \\ &= \sqrt{3} \left( 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right) \end{aligned}$$

7.  $f(x) = e^{\sqrt{2+\cos x}}$  à l'ordre 2

En utilisant le résultat de la question précédente, la fonction  $f$  s'écrit au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sqrt{3} \left( 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right)}, \\ &= e^{\sqrt{3}} e^{\left( -\frac{\sqrt{3}x^2}{12} + o(x^2) \right)}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

et comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sqrt{3}}{12} x^2 + o(x^2) = 0$$

alors par la composition des développements limités, en retenant que les puissances inférieures ou égales à 2, on obtient

$$f(x) = e^{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{12} x^2 \right) + o(x^2).$$

8.  $f(x) = \frac{1 + \arctan x}{\cos x}$ , à l'ordre 4

On a

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

ainsi, au voisinage de 0, la fonction  $f$  s'écrit

$$f(x) = \frac{1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}.$$

On procède par division euclidienne suivant les puissances croissantes, on obtient

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

9.  $f(x) = \operatorname{argsh}\sqrt{1+x}$ , à l'ordre 3

La fonction  $f$  est la composée des fonctions  $x \rightarrow \operatorname{argsh}x$  et  $x \rightarrow \sqrt{x+1}$  qui sont dérivables au voisinage de zéro, donc elle est dérivable,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \frac{1}{1+\sqrt{x+1}^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{2+x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant le développement limité de la fonction

$$x \rightarrow (1+u)^\alpha$$

au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x),$$

pour  $\alpha = \frac{-1}{2}$ , on a

$$\begin{aligned}(1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2), \\ \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \frac{x^2}{4} + o(x^2), \\ &= 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

En effectuant le produit de ces deux derniers développements limités, on obtient

$$\begin{aligned}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}} &= \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + o(x^2)\right), \\ &= 1 - \frac{3}{4}x + \frac{19}{32}x^2 + o(x^2),\end{aligned}$$

ainsi,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{8\sqrt{2}}x + \frac{19}{64\sqrt{2}}x^2 + o(x^2).$$

Par intégration, on obtient le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 :

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{3}{8\sqrt{2}} \frac{x^2}{2} + \frac{19}{64\sqrt{2}} \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

En utilisant la formule logarithmique

$$\operatorname{argsh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

on obtient

$$f(0) = \operatorname{argsh}(1) = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

d'où

$$f(x) = \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{3\sqrt{2}}{32}x^2 + \frac{19\sqrt{2}}{384}x^3 + o(x^3).$$



10.  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  à l'ordre 4

On a

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

Mais

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

donc

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)$$

Par suite, au voisinage de 0, la fonction  $f$  s'écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right)} \\ &= e \cdot e^{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right)} \end{aligned}$$

Si on pose  $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)$  alors  $f(x) = e e^u$ .

En utilisant le développement limité

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

sachant que

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4) = 0$$

la composition nous donne

$$f(x) = e \left( 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4) \right).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
u^2 &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{13x^4}{36} + o(x^4) \\
u^3 &= -\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
u^4 &= +\frac{x^4}{16} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Par substitution et après quelques calculs, on obtient

$$f(x) = e \left[ 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + \frac{2447x^4}{5760} + o(x^4) \right].$$

**Exercice 2.**

1.  $f(x) = \cos(x)$   $n = 3$   $x_0 = \frac{\pi}{4}$

**1<sup>re</sup> méthode :** On peut appliquer directement la formule de Taylor au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$ ; on obtient ainsi

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})}{1!} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) + o\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right]$$

On a

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
f'(x) &= -\sin x \quad \text{d'où} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
f''(x) &= -\cos x \quad \text{d'où} \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\
f'''(x) &= \sin x \quad \text{d'où} \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Par suite on trouve

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right]$$

**2<sup>e</sup> méthode** : On pose  $u = x - \frac{\pi}{4}$ . Quand  $x$  se trouve au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$ ,  $u$  est au voisinage de 0 et on peut appliquer les formules habituelles

$$f(x) = \cos x = \cos\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \cos u \cos \frac{\pi}{4} - \sin u \sin \frac{\pi}{4}$$

d'où

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos u - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin u$$

mais

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3); \quad \sin u = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

donc

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right)$$

d'où

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o \left[ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right]$$

## 2. $f(x) = \ln(x)$ $n = 2$ $x_0 = 3$

**1<sup>re</sup> méthode** : On peut appliquer directement la formule de Taylor au voisinage de 3; on obtient ainsi

$$f(x) = f(3) + \frac{(x-3)}{1!} f'(3) + \frac{(x-3)^2}{2!} f''(3) + \frac{(x-3)^3}{3!} f'''(3) + o \left[ (x-3)^3 \right]$$

On a

$$f(3) = \ln 3;$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{d'où} \quad f'(3) = \frac{1}{3};$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{d'où} \quad f''(3) = -\frac{1}{9};$$

Par suite on trouve

$$f(x) = \ln 3 - \frac{1}{3} (x-3) - \frac{1}{18} (x-3)^2 + o \left[ (x-3)^2 \right]$$

**2<sup>e</sup> méthode** : On pose  $u = x - 3$ . Quand  $x$  se trouve au voisinage de 3,  $u$  est au voisinage de 0 et on peut appliquer les formules habituelles

$$f(x) = \ln x = \ln(u + 3) = \ln \left[ 3 \left( 1 + \frac{u}{3} \right) \right] = \ln 3 + \ln \left( 1 + \frac{u}{3} \right)$$

mais

$$\ln \left( 1 + \frac{u}{3} \right) = \frac{u}{3} - \frac{\left(\frac{u}{3}\right)^2}{2} + o \left[ \left(\frac{u}{3}\right)^2 \right] = \frac{u}{3} - \frac{u^2}{18} + o(u^2)$$

donc

$$f(x) = \ln 3 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{18} + o(u^2)$$

d'où

$$f(x) = \ln 3 + \frac{(x-3)}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + o[(x-3)^2]$$

3.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \quad n = 2 \quad x_0 = +\infty$

On pose  $u = \frac{1}{x}$ . Quand  $x$  se trouve au voisinage de  $+\infty$ ,  $u$  est au voisinage de 0 et on peut appliquer les formules habituelles

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = e^u \sqrt{1 + u}$$

mais

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2); \\ \sqrt{1+u} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\binom{1}{2} \binom{-1}{2}}{2!} u^2 + o(u^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

En effectuant le produit de ces deux développements limités

$$e^u \sqrt{1+u} = 1 + \frac{3}{2}u + \frac{7}{8}u^2 + o(u^2).$$

Par suite

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + \frac{7}{8} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

**Exercice 3.**

1. Développement limité de  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$  au voisinage de 0 à l'ordre 5 :

On commence par déterminer le Développement limité au voisinage de zéro à l'ordre 5 de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , On a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

obtenue par la composition des fonctions

$$x \longrightarrow -x^2, \quad x \longrightarrow (1+x)^\alpha$$

or

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2).$$

Pour  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , on obtient

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

Par composition, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

On sait que  $\arcsin x$  est la primitive de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

d'où

$$\arcsin x = \arcsin 0 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5),$$

comme  $\arcsin 0 = 0$ , alors

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

Par suite,

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)\right) \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\right)$$

d'où

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5).$$

2. Développement limité de  $g(x) = (\arcsin x)^2$  au voisinage de 0 à l'ordre 6 :

Il suffit de constater que

$$g'(x) = 2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 2f(x),$$

on a donc

$$g'(x) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^5),$$

d'où, par intégration

$$g(x) = g(0) + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + o(x^6)$$

or  $g(0) = 0$ , par suite

$$g(x) = (\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + o(x^6)$$

**Exercice 4.** Calcul de limites à l'aide des développements limités :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arccos x}{\sin^3 x} = ?$

On sait qu'au voisinage de 0, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \sin^3 x &= x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \arccos x}{\sin^3 x} &= \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{x^3 + o(x^3)}, \\ &= \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}, \\ &= -\frac{1}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arccos x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{3}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = ?$

On a

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$$

On sait qu'au voisinage de 0, on peut écrire

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \text{ d'où } \sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

et

$$x^2 \sin^2 x = x^4 + o(x^4).$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} &= \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - (x^2)}{x^4 + o(x^4)}, \\ &= \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}, \\ &= -\frac{1}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x} = ?$$

On a

$$\frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x} = \frac{e^{x \ln 5} - e^{x \ln 3}}{e^{x \ln 4} - e^{x \ln 2}}$$

Comme

$$e^x = 1 + x + o(x),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x} &= \frac{(1 + x \ln 5 + o(x)) - (1 + x \ln 3 + o(x))}{(1 + x \ln 4 + o(x)) - (1 + x \ln 2 + o(x))} \\ &= \frac{(\ln 5 - \ln 3)x + o(x)}{(\ln 4 - \ln 2)x + o(x)} \\ &= \frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 2} + o(1). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2} = ?$$

On a

$$\left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln \left(\cos \left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ; en utilisant les développements limités de  $x \rightarrow \cos x$  et  $x \rightarrow \ln(1+x)$  au voisinage de 0

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

on peut écrire

$$\cos \left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$



et

$$\ln \left( \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) = -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

par suite

$$x^2 \ln \left( \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) = -\frac{1}{2} + o(1)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left( \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = ?$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  et on peut écrire

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

par suite

$$f(x) = x - x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right)$$

d'où

$$f(x) = x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

# Chapitre 7

## Examens Corrigés

## Sujet 1

**Exercice 1 :**

a) **A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E.**

Montrer que  $(A \cap B = A \cup B) \implies (A = B)$

b)  **$\mathcal{R}$  une relation binaire définie dans  $\mathbb{N}^*$  par**

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{N}^*: \mathbf{a} \mathcal{R} \mathbf{b} \iff \exists \mathbf{p} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{a} = \mathbf{b}^{\mathbf{p}}$$

1)- **Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre dans  $\mathbb{N}^*$ .**

2)- **L'ordre est-il total ou partiel.**

3)- **Determiner  $a \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$ .**

**Exercice 2 :**

Soient  $E = [0, 1]$ ,  $F = [-1, 1]$ ,  $G = [0, 2]$  trois intervalles de  $\mathbb{R}$ . Considérons l'application  $f$  de  $E$  dans  $G$  définie par

$$f(x) = 2 - x$$

et l'application  $g$  de  $F$  dans  $G$  définie par

$$g(x) = x^2 + 1.$$

1) **Déterminer  $f(\{\frac{1}{2}\})$ ,  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $g([-1, 1])$ ,  $g^{-1}([0, 2])$ .**

2) **L'application  $f$  est-elle bijective ? justifier.**

**L'application  $g$  est-elle bijective ? justifier.**

**Exercice 3 :**

1) **Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.**

2) **Pour quelles valeurs réelles de  $\alpha$ , l'équation**

$$x^2 + \sqrt{x} - \alpha = 0$$

admet-elle une solution unique dans l'intervalle  $]0, 1[$

3) Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \arcsin(2 \ln x) + \frac{1}{x^2 - e}$$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

- Calculer la dérivée de  $f$ .

**Exercice 4 :**

On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$$

1)- Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .

2)- Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ , donner sa dérivée.

3)-  $f$  est-elle prolongeable par continuité là où elle n'est pas définie.

## Solution

**Exercice 1. a)** Montrons que  $A \cup B = A \cap B \implies A = B$ ?

On suppose que  $A \cup B = A \cap B$  vraie et on montre que  $A = B$ ?

On sait que

$$(A = B) \iff ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$$

•  $A \subset B$ ?

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in A \cup B \text{ puisque } A \subset A \cup B \\ &\implies x \in A \cap B \text{ puisque } A \cup B = A \cap B \\ &\implies x \in B \text{ puisque } A \cap B \subset B \end{aligned}$$

d'où

$$A \subset B$$

.

•  $B \subset A$ ?

$$\begin{aligned} x \in B &\implies x \in A \cup B \text{ puisque } B \subset A \cup B \\ &\implies x \in A \cap B \text{ puisque } A \cup B = A \cap B \\ &\implies x \in A \text{ puisque } A \cap B \subset A \end{aligned}$$

d'où

$$B \subset A$$

.

On déduit donc que  $A = B$ .

b) Soit la relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{N}^*: \mathbf{a} \mathcal{R} \mathbf{b} \iff \exists \mathbf{p} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{a} = \mathbf{b}^p$$

1.  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si  $\mathcal{R}$  est réflexive, antisymétrique et transitive.

- $\mathcal{R}$  est réflexive si :  $\forall a \in \mathbb{N}^*, a\mathcal{R}a$ .

Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $a = a^1$ , ( $p = 1$ ) alors  $a\mathcal{R}a$ ,  
d'où  $\mathcal{R}$  est réflexive.

- $\mathcal{R}$  est antisymétrique si :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, [(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a)] \implies (a = b).$$

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que  $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a)$ . On montre que :  $a = b$ ?

$$\left\{ \begin{array}{l} a\mathcal{R}b \\ \wedge \\ b\mathcal{R}a \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{N}^*, a = b^p \\ \wedge \\ \exists q \in \mathbb{N}^*, b = a^q \end{array} \right.$$

Par substitution, on obtient :

$$\begin{aligned} a = (a^q)^p = a^{pq} &\iff pq = 1 \\ &\iff p = q = 1 \quad (\text{car } p \text{ et } q \text{ sont des entiers naturels}) \end{aligned}$$

d'où  $a = b$ . On déduit que  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

- $\mathcal{R}$  est transitive si :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, \forall c \in \mathbb{N}^* [(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c)] \implies (a\mathcal{R}c).$$

Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que  $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c)$ . On montre que :  $a\mathcal{R}c$ ?

$$\left\{ \begin{array}{l} a\mathcal{R}b \\ \wedge \\ b\mathcal{R}c \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{N}^*, a = b^p \\ \wedge \\ \exists q \in \mathbb{N}^*, b = c^q \end{array} \right.$$

Par substitution, on obtient :

$$a = (c^q)^p = c^{pq} = c^m \text{ avec } m = pq \in \mathbb{N}^*$$

d'où  $a\mathcal{R}c$ . On déduit que  $\mathcal{R}$  est transitive, et par suite  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre dans  $\mathbb{N}^*$ .

2.  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre total si :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, (a\mathcal{R}b) \vee (b\mathcal{R}a)$$

sinon

$\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel si :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a)$$

**Contre-exemple :**

Pour  $a = 2$ ,  $b = 3$ , on a

$$2 = 3^p \iff \ln 2 = p \ln 3 \iff p = \frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{N}^*,$$

donc

$$2 \not\mathcal{R} 3.$$

De même, on a

$$3 = 2^q \iff \ln 3 = q \ln 2 \iff q = \frac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{N}^*,$$

alors

$$3 \not\mathcal{R} 2.$$

**Ou bien, on peut raisonner autrement :**

Les équations  $2 = 3^p$  et  $3 = 2^q$  n'ont pas de solutions dans  $\mathbb{N}^*$  puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, alors  $(2\mathcal{R}3) \wedge (3\mathcal{R}2)$ .

En conclusion, comme  $(2\mathcal{R}3) \wedge (3\mathcal{R}2)$ , on déduit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel dans  $\mathbb{N}^*$ .

3. Déterminer  $a \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$  ?

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{R}a \\ \wedge \\ 3\mathcal{R}a \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{N}^*, 2 = a^p \\ \wedge \\ \exists q \in \mathbb{N}^*, 3 = a^q \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} a \text{ divise } 2 \\ \wedge \\ a \text{ divise } 3 \end{array} \right. \\ &\implies a = 1 \text{ (puisque 2 et 3 sont premiers entre eux)} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$2 = 1^p = 1^p = 1 = 3 \text{ (ce qui est absurde).}$$

D'où

$$\nexists a \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } (2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a).$$

**Un autre raisonnement :**

On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{N}^*$ , tel que

$$(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a),$$

ceci implique que

$$2\mathcal{R}3,$$

du fait que  $\mathcal{R}$  est transitive.

Or d'après la question précédente, on avait trouvé que  $\nexists 2\mathcal{R}3$ ,  
alors

$$\nexists a \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } (2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a).$$

**Exercice 3.** Soient les fonctions :

$$\begin{array}{ll} f : [0, 1] \rightarrow [0, 2] & g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2] \\ x \mapsto f(x) = 2 - x & x \mapsto g(x) = x^2 + 1 \end{array}$$

$$1. \bullet f\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{y \in [0, 2], y = f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

$$\text{On a : } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \in [0, 2],$$

d'où

$$f\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\bullet f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0, 1], f(x) = 0\}.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2 - x = 0 \\ &\iff x = 2 \notin [0, 1] \end{aligned}$$

d'où

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$



- $g([-1, 1]) = \{g(x) \in [0, 2], x \in [-1, 1]\}$ .

**1<sup>re</sup> Méthode :**

Comme

$$[-1, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1],$$

alors

$$g([-1, 1]) = g([-1, 0]) \cup g([0, 1])$$

On a

$$\begin{aligned} x \in [-1, 0] &\iff -1 \leq x \leq 0 \\ &\iff 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\iff 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \end{aligned}$$

d'où

$$g([-1, 0]) = [1, 2].$$

De la même façon, on trouve

$$g([0, 1]) = [1, 2].$$

Par suite

$$g([-1, 1]) = [1, 2] \cup [1, 2] = [1, 2].$$

**Un autre raisonnement :** Vu que la fonction  $g$  est paire et les intervalles  $[-1, 0]$  et  $[0, 1]$  sont symétriques par rapport à 0, alors

$$g([-1, 1]) = g([0, 1]) = g([-1, 0]) = [1, 2].$$

**2<sup>e</sup> Méthode :**

On a

$$\begin{aligned} x \in [-1, 1] &\iff -1 \leq x \leq 1 \\ &\iff |x| \leq 1 \\ &\iff 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\iff 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\iff 1 \leq g(x) \leq 2 \end{aligned}$$

d'où

$$g([-1, 1]) = [1, 2].$$

- $g^{-1}([0, 2]) = \{x \in [-1, 1], g(x) \in [0, 2]\}$ .

$$\begin{aligned}
 g(x) \in [0, 2] &\iff 0 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\
 &\iff -1 \leq x^2 \leq 1 \\
 &\iff 0 \leq x^2 \leq 1 \text{ (le carré d'un réel est toujours positif)} \\
 &\iff 0 \leq |x| \leq 1 \\
 &\iff -1 \leq x \leq 1
 \end{aligned}$$

d'où

$$g^{-1}([0, 2]) = [-1, 1].$$

2.
  - $f$  est bijective ?  
On a  $0 \in [0, 2]$  et  $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ , donc 0 n'a pas d'antécédent par la fonction  $f$  dans  $[0, 1]$ , on déduit alors que  $f$  n'est pas surjective et par suite  $f$  n'est pas bijective.
  - $g$  est bijective ?  
On a  $g([-1, 1]) = [1, 2] \neq [0, 2]$ , alors  $g$  n'est pas surjective et par suite  $g$  n'est pas bijective.

**Ou bien :**

On a  $g(-1) = g(1) = 2$  et  $-1 \neq 1$ , alors  $g$  n'est pas injective et par suite  $g$  n'est pas bijective.

### Exercice 3.

#### 1. THéorème des valeurs intermédiaires :

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors pour tout réel  $c$  strictement compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) = c$ .

Sous forme de proposition mathématique :

$$\forall c \in ]f(a), f(b)[, \exists x_0 \in ]a, b[, f(x_0) = c$$

2. Pour que l'équation  $x^2 + \sqrt{x} - \alpha = 0$  admette une solution unique dans  $]0, 1[$ , il suffit que la fonction  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - \alpha$  soit :

- continue sur  $[0, 1]$
- $f(0)f(1) < 0$
- $f$  strictement monotone sur  $[0, 1]$ .

- $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - \alpha$  est la somme des fonctions

$$x \mapsto x^2 - \alpha (\text{polynôme}), \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

qui sont continues sur  $[0, 1]$ , alors  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

- On a

$$\begin{cases} f(0) = -\alpha \\ f(1) = 2 - \alpha \end{cases} \implies f(0)f(1) = -\alpha(2 - \alpha) = \alpha(\alpha - 2)$$

d'où

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$		
$f(0)f(1)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Ainsi

$$f(0)f(1) < 0 \iff \alpha \in ]0, 2[.$$

- On a

$$\forall x \in ]0, 1], \quad f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0,$$

alors  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ , donc elle est bijective de  $[0, 1]$  dans  $f([0, 1])$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et puisque  $f$  est bijective, on déduit que pour tout  $\alpha \in ]0, 2[$ , l'équation  $x^2 + \sqrt{x} - \alpha = 0$  admet une solution unique dans  $]0, 1[$ .

3.  $f(x) = \arcsin(2 \ln x) + \frac{1}{x^2 - e}$

• **Domaine de définition  $D_f$  :**

$$f(x) \text{ définie} \iff \begin{cases} x^2 - e \neq 0 & \leftarrow D_1 & (1) \\ \wedge \\ x > 0 & \leftarrow D_2 & (2) \\ \wedge \\ 2 \ln x \in [-1, 1] & \leftarrow D_3 & (3) \end{cases}$$

On a

$$(1) \iff x^2 - e \neq 0 \iff x \neq \pm\sqrt{e},$$

d'où

$$D_1 = \mathbb{R} - \{+\sqrt{e}, -\sqrt{e}\}.$$

$$(2) \iff x > 0, D_2 = ]0, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} (3) &\iff 2 \ln x \in [-1, 1] \\ &\iff -1 \leq 2 \ln x \leq 1 \\ &\iff -\frac{1}{2} \leq \ln x \leq \frac{1}{2} \\ &\iff e^{-\frac{1}{2}} \leq x \leq e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$D_3 = \left[ e^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{e} \right].$$

Or

$$D_f = D_1 \cap D_2 \cap D_3,$$

on obtient

$$D_f = \left[ e^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{e} \right[$$

• **Dérivée :**

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] e^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{e} \right[ , f'(x) &= (\arcsin(2 \ln x))' + \left( \frac{1}{x^2 - e} \right)' \\ &= \frac{(2 \ln x)'}{\sqrt{1 - (2 \ln x)^2}} - \frac{2x}{(x^2 - e)^2} \\ &= \frac{2}{x\sqrt{1 - (2 \ln x)^2}} - \frac{2x}{(x^2 - e)^2} \end{aligned}$$

**Exercice 4.**  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}e^{\frac{1}{x}}$

1. **Domaine de définition :**

$$f(x) \text{ définie} \iff \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \wedge \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -2 \\ \wedge \\ x \neq 0 \end{cases}$$

d'où

$$D_f = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

2. La fonction  $f$  est le produit et la composée des fonctions

$$x \mapsto \frac{x^2}{x+2}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto e^x$$

qui sont continues et dérivables sur chacun des intervalles de  $D_f$ , alors  $f$  est continue et dérivable en tout point de  $D_f$ .

Sa dérivée est

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f, f'(x) &= \left( \frac{x^2}{x+2} \right)' e^{\frac{1}{x}} + \left( \frac{x^2}{x+2} \right) \left( e^{\frac{1}{x}} \right)' \\ &= \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{x^2}{x+2} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

3. **Prolongement par continuité :**

•  $x_0 = 0$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ (F.I.)} \quad \text{puisque} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{x+2} \rightarrow 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

On lève l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = +\infty$$

puisque

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ \frac{1}{x+2} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \rightarrow +\infty \left( \text{il suffit de prendre } X = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \right) \end{array} \right.$$

On déduit que  $f$  n'est pas prolongeable par continuité au point 0.

•  $x_0 = -2$

On a  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$  puisque  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{x+2} \rightarrow -\infty \\ e^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right.$

alors  $f$  n'est pas prolongeable par continuité au point -2.

## Sujet 2

Exercice 1 :

$n$  et  $\alpha$  deux entiers naturels non nuls.

$\mathcal{R}$  une relation binaire définie dans  $\mathbb{Z}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \iff x^n - y^n = \alpha(x - y)$$

1)- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{Z}$ .

2)- On pose  $n = \alpha = 3$ ,  
déterminer la classe d'équivalence de 2.

Exercice 2.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \sin x - 1 & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son domaine de définition.

3) Donner la dérivée de  $f$ .

**Exercice 3.**

a) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \arcsin(x)$

1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

2) Calculer la dérivée de  $f$ .

b) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$u(x) = \ln(x + 2), \quad v(x) = e^{x+1}$$

En déduire le développement à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \ln(x + 2)e^{x+1}$$



## Solution

**Exercice 1.**  $n$  et  $\alpha$  deux entiers naturels non nuls.  $\mathcal{R}$  une relation définie dans  $\mathbb{Z}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \iff x^n - y^n = \alpha(x - y).$$

1.  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{Z}$  si  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique et transitive.

- $\mathcal{R}$  réflexive si :  $\forall x \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}x$

Soit  $x \in \mathbb{Z}$  quelconque. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^n - x^n = 0 \\ \alpha(x - x) = 0 \end{cases} &\implies x^n - x^n = \alpha(x - x) \\ &\iff x\mathcal{R}x \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est réflexive.

- $\mathcal{R}$  symétrique si :  $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$

Soient  $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $x\mathcal{R}y$ . On montre que  $y\mathcal{R}x$  ?

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff x^n - y^n = \alpha(x - y) \\ &\iff y^n - x^n = \alpha(y - x) \text{ (il suffit de multiplier l'égalité par } (-1)\text{)} \\ &\iff y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est symétrique.

- $\mathcal{R}$  transitive si :

$$\forall (x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)] \implies (x\mathcal{R}z)$$

Soient  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$  tels que  $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)$ . On montre que  $x\mathcal{R}z$ ?

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\iff \begin{cases} x^n - y^n = \alpha(x - y) \\ \wedge \\ y^n - z^n = \alpha(y - z) \end{cases} \\ &\implies x^n - z^n = \alpha(x - z) \text{ (il suffit de sommer les équations )} \\ &\iff x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{R}$  est transitive.

Ce qui permet de conclure que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{Z}$ .

2.  $n = \alpha = 3$ . On détermine la classe d'équivalence de 2.

On sait que

$$\dot{2} = \{x \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}2\}.$$

On a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}2 &\iff x^3 - 2^3 = 3(x - 2) \\ &\iff (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 3(x - 2) \\ &\iff (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 0 \\ &\iff (x - 2)(x + 1)^2 = 0 \\ &\iff (x = 2) \vee (x = -1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dot{2} = \{-1, 2\}$$

**Exercice 2.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \sin x - 1 & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

1. **Domaine de définition  $D_f$  :**

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  donc définie sur

$$D_1 = ]-\infty, 0].$$

La fonction  $x \mapsto \cos x$  est définie sur  $\mathbb{R}$  donc définie sur

$$D_2 = ]0, \pi].$$

La fonction  $x \mapsto \sin x - 1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  donc définie sur

$$D_3 = ]\pi, +\infty[.$$

Or

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

d'où

$$D_f = \mathbb{R}$$

## 2. Continuité et Dérivabilité

- Sur  $]-\infty, 0]$ , la fonction  $f$  est définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  donc elle est continue et dérivable en tant que fonction rationnelle.
- Sur  $]0, \pi[$ , la fonction  $f$  est définie par  $f(x) = \cos x$  donc elle est continue et dérivable.
- Sur  $]\pi, +\infty[$ , la fonction  $f$  est définie par  $f(x) = \sin x - 1$  donc elle est continue et dérivable en tant que somme des fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto -1$  qui sont continues et dérivables.

### • Continuité en 0

On a

$$f(0) = \frac{1}{0^2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \cos x = \cos 0 = 1 = f(0)$$

alors  $f$  est continue en 0.

- **Dérivabilité en 0**

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2+1} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{(x^2+1)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{(x^2+1)} \\ &= 0 = f'_g(0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \\ &\underset{0}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x} \\ &\underset{0}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{2} \\ &= 0 = f'_d(0) \end{aligned}$$

Comme  $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ , alors  $f$  est dérivable en 0 et le nombre dérivé est  $f'(0) = 0$ .

- **Continuité en  $\pi$**

On a

$$f(\pi) = \cos \pi = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = \cos \pi = -1 = f(\pi) \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x - 1 = \sin \pi - 1 = -1 = f(0)$$

alors  $f$  est continue en  $\pi$ .

- **Dérivabilité en  $\pi$**

On a

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

Les fonctions  $x \mapsto \cos x + 1$  et  $x \mapsto x - \pi$  sont dérivables au voisinage de  $\pi$  et

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\cos x + 1)'}{(x - \pi)'} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

En appliquant la règle de l'Hopital, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\cos x + 1)'}{(x - \pi)'} = 0 = f'_g(\pi)$$

d'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - 1 - (-1)}{x - \pi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - \sin \pi}{x - \pi} \quad (\text{car } \sin \pi = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} \quad (\text{avec } g(x) = \sin x) \\ &= g'(\pi) \\ &= \cos(\pi) \\ &= -1 = f'_d(\pi) \end{aligned}$$

Comme  $f'_g(\pi) \neq f'_d(\pi) = 0$ , alors  $f$  n'est pas dérivable en  $\pi$ .

### 3. La dérivée de $f$

On a

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\sin x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \cos x & \text{si } x > \pi \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Exercice 3.** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \arcsin x$ .

**a.**

1) **Domaine de définition  $D_f$  :**

On sait que

$$D_f = [-1, 1].$$

2) **Dérivée de  $f$  :**

On sait que

$$\forall x \in ]-1, 1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**b. On a**

$u(x) = \ln(x+2) = \ln 2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right)$  On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ , alors par composition, on obtient

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right) &= \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3} + o(x^3) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \end{aligned}$$

d'où

$$u(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

On a

$$v(x) = e^{x+1} = e e^x = e \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

En effectuant le produit des développements limités de  $u(x)$  et  $v(x)$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+2)e^{x+1} \\ &= \left[ \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \right] \left[ e \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \right] \\ &= e \ln 2 + \left( \frac{e}{2} + e \ln 2 \right) x + \left( \frac{3e}{8} + \frac{e \ln 2}{2} \right) x^2 + \left( \frac{e}{6} + \frac{e \ln 2}{6} \right) x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

### Sujet 3

#### Exercice 1 :

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire définie dans  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, (x\mathcal{R}y) \iff (\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} - \sqrt{y} = \alpha)$$

- 1) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre dans  $\mathbb{R}^+$ .
- 2) L'ordre est-il total ou partiel. Justifier.

#### Exercice 2 :

Soit  $f$  l'application définie par

$$\begin{aligned} f: [0, 2[ \cup ]2, +\infty[ &\rightarrow ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[ \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

1. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? Conclure.
2. Déterminer les ensembles suivants :

$$f^{-1}(\{2\}), f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right), f([0, 2[ \cup ]2, +\infty[).$$

**Exercice 3 :(I)** Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition  $D_f$ .
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ .
3. Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .



(II) En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall x > 0, e^x > 1 + x.$$

**Exercice 4 :**

Les fonctions suivantes admettent-elles un développement limité au voisinage de 0 ? Si oui, calculer ce développement limité à l'ordre 3.

1.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

2.  $f(x) = \frac{\cosh x \cdot \ln(x+1)}{(1+x)^3}$

## Solution

### Exercice 1 :

Soit la relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x\mathcal{R}y \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} - \sqrt{y} = \alpha$$

1.  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si  $\mathcal{R}$  est réflexive, antisymétrique et transitive.

- $\mathcal{R}$  est réflexive si :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, x\mathcal{R}x$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0 \in \mathbb{R}^+$ , ( $\alpha = 0$ ) alors  $x\mathcal{R}x$ ,  
d'où  $\mathcal{R}$  est réflexive.

- $\mathcal{R}$  est antisymétrique si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)] \implies (x = y).$$

Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs tels que  $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)$ . On montre que :  $x = y$ ?

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} - \sqrt{y} = \alpha_1 \\ \wedge \\ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^+, \sqrt{y} - \sqrt{x} = \alpha_2 \end{cases}$$

alors  $\alpha_1 = -\alpha_2$ , or  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont positifs,

donc  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Ainsi

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \implies \sqrt{x} = \sqrt{y} \implies x = y$$

On déduit que  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

- $\mathcal{R}$  est transitive si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \forall z \in \mathbb{R}^+ [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)] \implies (x\mathcal{R}z).$$

Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels positifs tels que  $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)$ . On montre que :  $x\mathcal{R}z$  ?

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} - \sqrt{y} = \alpha_1 \\ \wedge \\ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^+, \sqrt{y} - \sqrt{z} = \alpha_2 \end{cases}$$

En sommant les deux égalités, on obtient :

$$\sqrt{x} - \sqrt{z} = \alpha_1 + \alpha_2 \implies \exists \alpha_3 \in \mathbb{R}^+, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \sqrt{x} - \sqrt{z} = \alpha_3.$$

d'où  $x\mathcal{R}z$ . On déduit que  $\mathcal{R}$  est transitive, et par suite  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre dans  $\mathbb{R}^+$ .

2.  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre total si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, (x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$$

Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs quelconques, alors

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{R} &\implies \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{R}^+ \\ \vee \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbb{R}^- \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} - \sqrt{y} = \alpha \\ \vee \\ \exists \beta \in \mathbb{R}^+, \sqrt{y} - \sqrt{x} = \beta \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \vee \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, tous les éléments de  $\mathbb{R}^+$  sont deux à deux comparables. on déduit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre total dans  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 2.** Soit l'application

$$f: \underbrace{[0, 2[ \cup ]2, +\infty[}_E \rightarrow \underbrace{]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[}_F$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

1. •  $f$  est injective si

$$\forall (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbf{E}^2, (f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)) \implies (\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2).$$

Soient  $x_1, x_2$  deux éléments de  $\mathbf{E}$  tels que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{x_1^2}{x_1^2 - 4} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 4} \\ &\implies \cancel{x_1^2 x_2^2} - 4x_1^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 4x_2^2 \\ &\implies x_1^2 = x_2^2 \\ &\implies |x_1| = |x_2| \\ &\implies x_1 = x_2 \text{ (puisque } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont positifs)} \end{aligned}$$

Par conséquent  $f$  est injective.

- $f$  est surjective si  $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{F}, \exists \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$

Soit  $y \in \mathbf{F}$ . On cherche  $x \in \mathbf{E}$  tel que  $y = f(x)$  ?

On a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y \frac{x^2}{x^2 - 4} \\ &\iff x^2 = x^2 y - 4y \\ &\iff x^2(y - 1) = 4y \\ &\iff x^2 = \frac{4y}{y - 1} \text{ (on peut diviser par } y \text{ car } y \neq 1) \end{aligned}$$

Cette dernière équation a un sens si et seulement si

$$\left(\frac{4y}{y - 1} \geq 0\right) \wedge (y \neq 1)$$

$y$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$\frac{4y}{y - 1}$		+	0	-
				+

Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4y}{y - 1} \geq 0 \\ \wedge \\ y \neq 1 \end{array} \right. \iff y \in ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$$

ceci montre que l'équation est bien définie pour tout  $y$  de  $F$ . Sa résolution donne

$$x = +\sqrt{\frac{4y}{y-1}} \text{ car } x \geq 0.$$

**Question** : Est ce que  $x \neq 2$ ?

On raisonne par l'absurde : Supposons que  $x = 2$ .

On a

$$\begin{aligned} x = 2 &\iff \sqrt{\frac{4y}{y-1}} = 2 \\ &\iff \frac{4y}{y-1} = 4 \\ &\iff 4y = 4y - 4 \\ &\iff 0 = -4 \text{ ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

Par suite  $x \neq 2$ . D'où  $f$  est surjective.

D'après ce qui précède, l'application  $f$  est donc bijective.

2. On détermine les ensembles :

- $f^{-1}(\{2\}) = \{x \in E, f(x) = 2\}$

On a

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{x^2}{x^2 - 4} = 2 \\ &\iff x^2 = 2x^2 - 8 \\ &\iff x = +2\sqrt{2} \text{ (car } x = -2\sqrt{2} \text{ est rejetée)} \end{aligned}$$

d'où

$$f^{-1}(\{2\}) = \{2\sqrt{2}\}$$

- $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left\{x \in E, f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$

D'après la question (1), on a montré que  $f$  est surjective, donc

$$\forall x \in E, f(x) \in F$$

or

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \notin F$$

donc

$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \emptyset$$

- $f([0, 2[ \cup ]2, +\infty[) = \{f(x) \in F, x \in [0, 2[ \cup ]2, +\infty[ \}$

On a

$$f([0, 2[ \cup ]2, +\infty[) = f(E)$$

et comme l'application  $f$  est surjective, alors

$$f(E) = F$$

d'où

$$f([0, 2[ \cup ]2, +\infty[) = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$$

**Autre méthode :** Une autre manière pour établir ce résultat consiste à étudier la monotonie de  $f$  en tant que fonction. On sait que

$$f([0, 2[ \cup ]2, +\infty[) = f([0, 2[) \cup f(]2, +\infty[).$$

L'application  $f$  est continue et dérivable sur chacun des intervalles  $[0, 2[$  et  $]2, +\infty[$ . Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} < 0$$

d'où  $f$  est strictement monotone. Par suite

$$f([0, 2[) = \left] \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(0) \right] = ]-\infty, 0]$$

$$f(]2, +\infty[) = \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \right[ = ]1, +\infty[$$

Finalement, on obtient

$$f([0, 2[ \cup ]2, +\infty[) = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$$

**Exercice 3.** On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Partie (I)**

1. **Domaine de définition  $D_f$**  Il est clair que  $f$  est définie pour tout réel, donc

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. **Continuité et dérivabilité sur  $D_f$**

- **Sur  $\mathbb{R}^*$** ,  $f$  est continue et dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$  car c'est le rapport des fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto e^x - 1$  qui sont continues et dérivables.

- **Continuité en 0 :**

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \quad (\text{avec } g(x) = e^x) \\ &= g'(0) = 1 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

**Autre méthode** Pour le calcul de cette limite, on peut utiliser les fonctions équivalentes ou la règle de l'Hopital. alors  $f$  est continue en 0.

- **Dérivabilité en 0 :** On calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Les fonctions  $x \mapsto e^x - 1 - x$  et  $x \mapsto x^2$  sont dérivables au voisinage de 0 et on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

En appliquant la règle de l'Hopital, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \frac{1}{2}$$

On déduit que  $f$  est dérivable en 0 et le nombre dérivé est  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

En conclusion,  $f$  est dérivable sur  $D_f$ .

3. **Dérivée de  $f$**  : On a

$$f'(x) = \begin{cases} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)' & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - x + 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### Partie (II)

On montre que

$$\forall x > 0, e^x > 1 + x$$

Théorème des accroissements finis :

Si  $f$  est une fonction définie et continue sur  $[a, b]$  et  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  alors

$$\exists c \in ]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(t) = e^t$  sur  $[a, b] = [0, x]$  avec  $x > 0$ .

On a

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $[0, x]$ ,
- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $]0, x[$ ,



donc, en appliquant le théorème des accroissements finis on a

$$\exists c \in ]0, x[, f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0).$$

Ainsi

$$\exists c \in ]0, x[, e^x - 1 = xe^c. \quad (A1)$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\implies 1 < e^c < e^x \text{ (puisque } e^x \text{ est croissante)} \\ &\implies x < xe^c < xe^x \text{ (puisque } x > 0 \end{aligned}$$

Tenant compte de (A1), on obtient

$$\forall x > 0, x < e^x - 1 < xe^x$$

Finalement,

$$\forall x > 0, e^x > x + 1$$

#### Exercice 4.

1. La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  n'admet pas un développement limité au voisinage de 0 puisque  $f$  n'est pas dérivable en 0.
2. La fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{\cosh x \cdot \ln(1+x)}{(1+x)^3}$  admet un développement limité au voisinage de 0 puisque c'est le produit et le rapport des fonctions :

$$x \mapsto \cosh x, \quad x \mapsto \ln(1+x), \quad x \mapsto (1+x)^3$$

admettant des dérivées successives à l'ordre  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Calcul du développement limité de  $g$  au voisinage de 0 à l'ordre 3 :

Tout d'abord, on a

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3), \text{ (car } \cosh \text{ est pair)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

En effectuant le produit, on obtient

$$\begin{aligned} \cosh x \cdot \ln(1+x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

d'où

$$g(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}{1 + 3x + 3x^2 + x^3}$$

On effectue une division euclidienne suivant les puissances croissantes :

$x$	$-\frac{x^2}{2}$	$+\frac{5}{6}x^3$		$1$	$+3x$	$+3x^2$	$+x^3$
$-x$	$-3x^2$	$-3x^3$	$-x^4$	$x$	$-\frac{7}{2}x^2$	$+\frac{25}{3}x^3$	
	$-\frac{7}{2}x^2$	$-\frac{13}{6}x^3$	$-x^4$				
	$+\frac{7}{2}x^2$	$+\frac{21}{2}x^3$	$\dots$				
		$+\frac{25}{3}x^3$					

d'où

$$g(x) = x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{25}{3}x^3 + o(x^3)$$

# Bibliographie

1. E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, Problèmes corrigés de Mathématiques, DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.
2. C. Baba-Hamed, K. Benhabib, Algèbre I Rappels de Cours et Exercices avec Solutions, Office des publications universitaires, Alger, 1988.
3. S. Balac, F. Sturm, Exercices d'Algèbre et d'Analyse, 154 exercices corrigés de première année.  
2 ième édition entièrement revue et augmentée, Edition Algérie+ Afrique, programme LMD.  
Presses polytechniques et universitaires romandes, Suisse.
4. B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Exercices d'Analyse, 1er cycle scientifique, 1ère année préparation aux grandes écoles, Armand Colin, collection U.
5. A. Denmat, F. Héaulme, Algèbre générale, série : TD, Dunod 2000.
6. J-P. Escofier, Toute l'Algèbre du 1<sup>er</sup> cycle, Dunod 2002.
7. A. Kostrikin, Introduction à l'Algèbre, Editons mir, Moscou, 1986.

8. K. Zizi, Fonctions d'une variable réelle, Livre 07.
9. M. Zitouni, Algèbre cours de 1<sup>ière</sup> Année des Universités, Office des publications universitaires, Alger, 1986.