



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

COURS EN LIGNE DE :

Résistance Des Matériaux Avancée

Présenté par :

Dr. LEBBAL Habib

Destiné aux étudiants :

1^{ère} année master option construction mécanique



Année 2022/2023

Préface

Ce cours en ligne intitulé « : Résistance des matériaux avancée », s'adresse aux étudiants de première année master en Génie Mécanique. Il est rédigé de manière simplifiée et beaucoup d'exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et ait une vision claire de son application dans la vie courante.

Le cours comporte six chapitres, est considéré comme document de travail dans la spécialité de mécanique de construction. Il est destiné de prime abord aux étudiants de master 1ère année en construction mécanique dont l'intitulé du module même (en S1).. Il contient six chapitres de cours et des exercices résolus à la fin de chaque chapitre. Le premier chapitre traite le flambement. Dans le second chapitre on aborde la flexion déviée . Il s'agit de l'énergie de déformation et structure hyperstatique, respectivement aux chapitres 3 et 4. le cinquième chapitre traite les théories des états de contraintes limites. Enfin le dernier chapitre est consacré aux plaques minces.

Table des Matières

Chapitre 1 : Flambement

| | |
|---------------------------------|----|
| 1.1 Définition | 1 |
| 1.2 Contrainte critique d'Euler | 2 |
| 1.3 Exercice corrigées | 5 |
| QCM 1 | 12 |

Chapitre 2 : Flexion déviée

| | |
|----------------------------------|----|
| 2.1 Flexion déviée | 13 |
| 2.2. Contraintes | 14 |
| 2.3 Plan neutre ou axe neutre | 15 |
| 2.4 La flèche résultante | 15 |
| 2.5 Flexion dans deux directions | 16 |
| 2.6 Exercices corrigées | 19 |
| QCM 2 | 28 |

Chapitre 3 : Energie de déformation

| | |
|--|----|
| 3.1 Définition | 29 |
| 3.2 Energie de déformation en traction | 29 |
| 3.3 Energie de deformation en cisaillement | 30 |
| 3.4 Energie de deformation en torsion | 31 |
| 3.5 Energie de deformation en flexion | 32 |
| 3.6 Théorème de CASTIGLIANO | 34 |
| 3.7 Méthode de la charge et moment fictive | 34 |
| 3.8 Différentiation sous le signe intégral | 36 |
| 3.9 Charge d'impact | 36 |
| 3.10 Allongement maximal de la barre | 37 |
| 3.11 Contrainte maximale dans la barre | 38 |
| 3.12 Facteur d'impact | 39 |
| 3.13 Charge soudainement appliquée | 39 |
| 3.14 Déplacements produits par l'impact en flexion | 40 |
| 3.15 Exercices corrigées | 43 |

| | |
|-------|----|
| QCM 3 | 53 |
|-------|----|

Chapitre 4 : Structure hyperstatique

| | |
|--|----|
| 4.1 Introduction | 54 |
| 4.2 Structures isostatiques équivalentes | 54 |
| 4.3 Cas d'une structure hyperstatique de degré 1 | 54 |
| 4.4 Structures hyperstatiques de degré 2 | 57 |
| 4.5 Structures hyperstatiques de degré n | 59 |
| 4.6 Exercice Corrigées | 60 |
| QCM 4 | 78 |

Chapitre 5 : Théories des états de contraintes limites

| | |
|---|----|
| 5.1 Équations générales de la contrainte plane | 79 |
| 5.2 Invariance de la contrainte | 80 |
| 5.3 Contraintes principales | 80 |
| 5.4 Contrainte maximale de cisaillement | 81 |
| 5.5 Cercle de Mohr | 81 |
| 5.6 Critères de limite élastique | 82 |
| 5.6.1 Critères pour matériaux ductiles ou malléables | 83 |
| 5.6.1.1 Critère de Tresca ou de la contrainte de cisaillement maximal | 83 |
| 5.6.1.2 Critère de Von Mises ou de l'énergie de déformation | 84 |
| 5.6.1.3 Flexion, traction et torsion pour les arbres à section circulaire | 85 |
| 5.6.2 Critères pour matériaux fragiles | 85 |
| 5.6.2.1 Critère de la contrainte normale maximale ou de Coulomb | 85 |
| 5.6.2.2 Critère de Mohr | 86 |
| 5.7 Exercice Corrigées | 88 |
| QCM 5 | 99 |

Chapitre 6 : Plaques minces

| | |
|---|-----|
| 6.1 Tenseur flexion et tenseur courbure | 100 |
| 6.1.1 définition | 100 |
| 6.1.2 flexion pure d'une plaque rectangulaire | 100 |
| 6.2 Tenseur flexion et tenseur courbure | 102 |

| | |
|--|-----|
| 6.3 Flexion des plaques chargées transversalement | 104 |
| 6.3.1 Equation de Lagrange | 104 |
| 6.3.2 Conditions aux limites | 107 |
| 6.4 Plaques circulaires symétriquement chargées | 107 |
| 6.4.1 Généralités | 107 |
| 6.4.2 Plaques circulaires uniformément chargées | 108 |
| 6.5 Coques | 109 |
| 6.5.1 Cylindriques verticaux | 109 |
| 6.5.2 Cylindres horizontaux remplis par un liquide | 111 |
| 6.5.3 Coupole sphérique fermée | 111 |
| 6.5.4 Coupole sphérique ouverte | 113 |
| 6.5.5 Coque sphérique | 114 |
| Références | 115 |

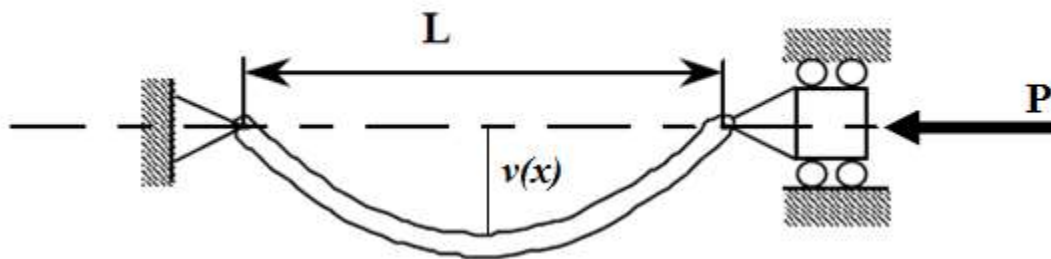
1.1 Définition

Le flambage ou flambement est un phénomène d'instabilité d'une structure ou d'un élément d'une structure, qui soumis à une force de compression, a tendance à fléchir et à se déformer dans une direction perpendiculaire à la force de compression.

Dans le cas du flambage, les formules établies tiennent compte des déformations. Celles-ci ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents. De même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations et, dans certains cas, de grandes déformations peuvent être causées par des accroissements de charges très faibles. Tous ces phénomènes sont connus sous le nom d'instabilité élastique.

Les procédures de calcul des poutres flambées varient d'un pays à l'autre, d'une profession à l'autre, en obéissant souvent à des normes précises. Nous nous limiterons à une étude générale ayant un caractère universel.

Soit une poutre soumise à un effort de compression P , articulée en A et simplement appuyée en B.



L'équation de la déformée s'écrit sous la forme :

$$EIv''(x) = -M_f = -v(x) * P$$

$$EIv''(x) + v(x) * P = 0$$

$$v''(x) + \frac{P}{EI} * v(x) = 0 \quad (1.1)$$

En posant :

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$v''(x) + \omega^2(x) = 0 \quad (1.2)$$

On aboutit à une équation différentielle du second ordre

La solution prend la forme d'une onde sinusoïdale. Cette solution est satisfaite pour $\omega L = n\pi$, où $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Remplaçant de nouveau dans l'expression le α (équation 10.4) donne la valeur de la charge P requise pour causer le flambement de la colonne articulée- articulée :

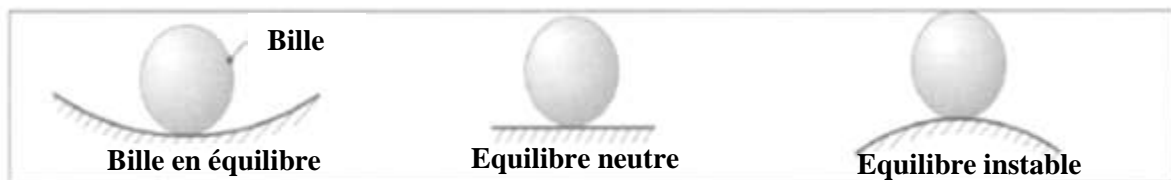
$$P = \frac{(n\pi)^2 * E * I}{L^2} \tag{1.3}$$

La première charge critique est atteinte pour $n=1$:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I}{L^2} \tag{1.4}$$

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

- $P < P_{cr}$: compression simple, la poutre reste droite, elle est dite en équilibre stable.
- $P = P_{cr}$: la poutre peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche égale à B, elle est dite en équilibre neutre. A noter que $B = y_{maxi}$ est en général petit.
- $P > P_{cr}$: il y a instabilité en position droite (équilibre instable) avec une forte tendance au flambement. B augmentera très rapidement avec un léger accroissement de P.



1.2 Contrainte critique d'Euler

A la charge critique d'Euler P_c correspond une contrainte critique σ_c , qui peut prendre le nom de contrainte critique limite ou admissible, donnant un élément de sécurité vis-à-vis du flambement.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 * E * I}{S * L^2} \tag{1.5}$$

Supposons que la poutre soit parfaitement rectiligne, que l'effort de compression (P) soit centré et que le matériau soit parfaitement homogène. Soit:

$$\sigma = \frac{P}{S} \tag{1.6}$$

La contrainte dans la poutre peut être comme ci-dessous :

- Si $\sigma_c < \sigma_e$ (où σ_e est la limite élastique): il y aura ruine par flambement dès que σ atteindra la valeur σ_c ($\sigma = \sigma_c$). Le dimensionnement se fait au flambement.
- Si $\sigma_c > \sigma_e$: la poutre périra par écrasement (ou compression simple sans flambement) dès que σ atteindra la valeur σ_e ($\sigma = \sigma_e$). Dans ce cas, il n'y a aucun risque de flambement. Le dimensionnement se fait en compression simple.

Exemple

un poteau de longueur $L=3\text{m}$, de section circulaire creuse de diamètre $d=70\text{ mm}$ et d'épaisseur $t=5\text{mm}$, encastré libre. $E=200\text{ GPa}$

Calculer la charge critique d'EULER.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I}{L^2}$$

$$I = \frac{\pi * (d_{ex}^4 - d_{in}^4)}{64} = \frac{\pi * (70^4 - 60^4)}{64}$$

$$I = 172656,25\text{mm}^4$$

Encastré libre : $K=2$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * 172656,25 * 200 * 10^9}{36 * 10^6} = F_{cr} = 9.45\text{N}$$

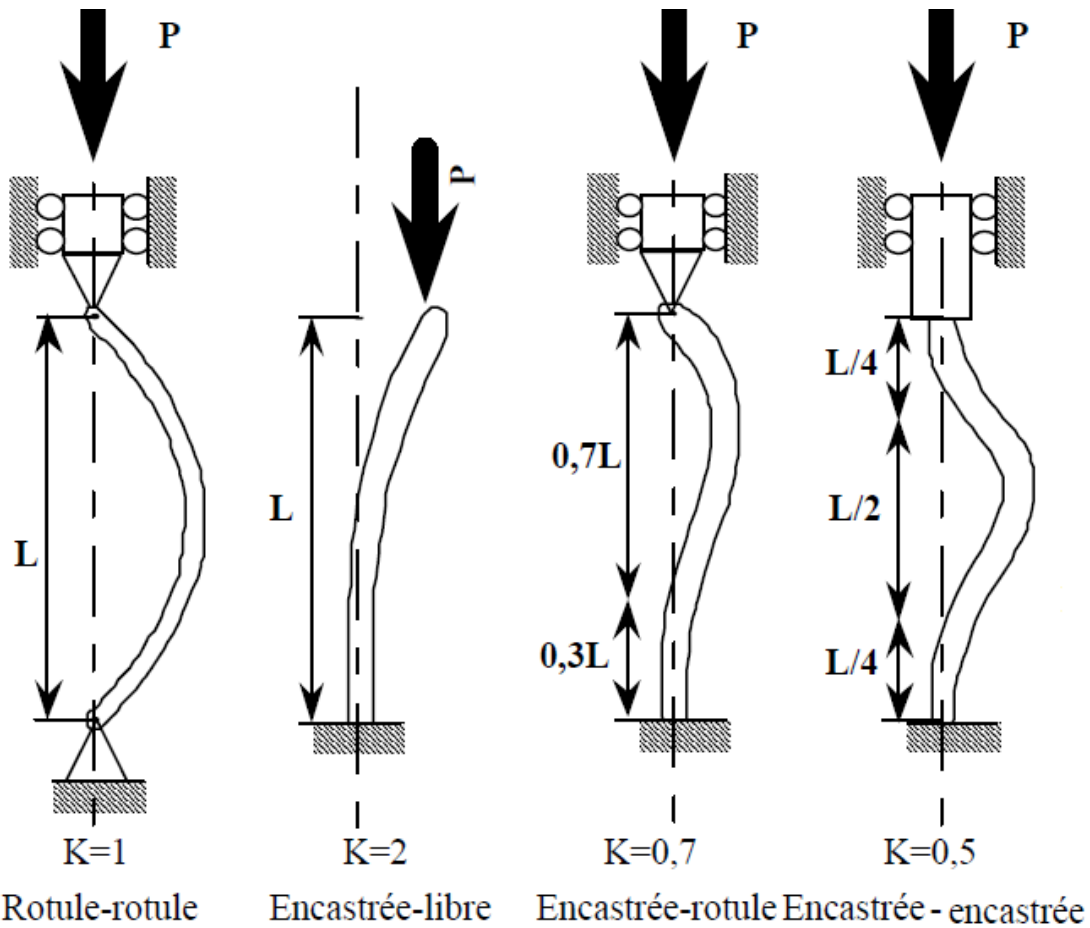
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 * E}{\lambda^2} \text{ avec } \lambda = \frac{l}{r} ; r = \sqrt{\frac{832031}{1178}} = 26.57\text{ mm}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * 200 * 10^9}{3000} * 26.57 = 154.9\text{MPa}$$

$$\lambda = \frac{3000}{26.57} \cong 113$$

Dans l'expression de P_{cr} , L représente la longueur effective de la colonne. Pour l'appliquer aux différentes combinaisons possibles d'appuis :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I}{(L_e)^2} = \frac{\pi^2 * E * I}{(K * L)^2}$$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I}{L_{eff}^2} = \frac{\pi^2 * E * I}{(K * L)^2} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 * E * I}{L_{eff}^2} = \frac{\pi^2 * E * I}{\lambda^2}$$

λ : élancement de la poutre.

Le moment d'inertie peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I = S r^2 \tag{1.7}$$

r : rayon de giration

$$r = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}$$

Donc

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 * E * S r^2}{S L^2} = \pi^2 * E * \left(\frac{r}{L}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{L}{r}$$

λ : Élancement de la poutre (colonne).

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E}{\lambda^2} \tag{1.8}$$

1.3 Exercice corrigées

Exercice 1

Calculer la charge critique d'EULER et la contrainte critique. On donne :

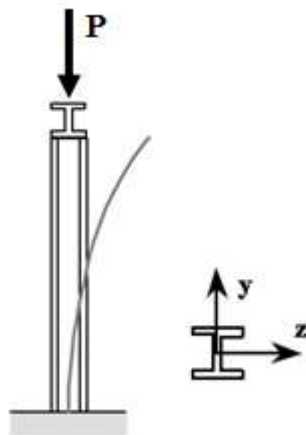
$$I_z = 9,18 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 4,88 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$S = 2960 \text{ mm}^2$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$L = 4 \text{ m}$$



Solution

La charge critique d'EULER

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I_{\min}}{L^2} = \frac{\pi^2 * 200 * 1000 * 4,88 \cdot 10^6}{(4 * 10^3)^2}$$

$$P_{cr} = 601435,6 \text{ N}$$

La contrainte critique

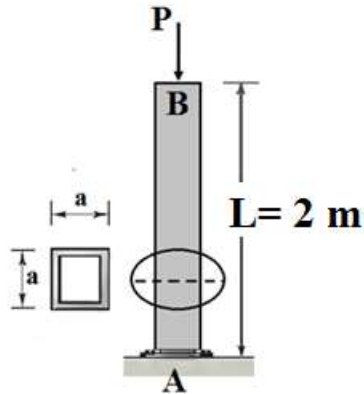
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{601435,6}{2960}$$

$$\sigma_{cr} = 203,18 \text{ MPa}$$

Exercice 2

Un tube en aluminium AB de section carré creuse est encastré en A et libre en B il supporte une charge $P = 200 \text{ kN}$.

-Déterminer l'épaisseur requise t du tube si $a = 100 \text{ mm}$ et que le coefficient de sécurité par rapport à la charge critique d'EULER est $n = 3$; ($E = 72 \text{ GPa}$).



Longueur effective

$$L_e = 2L = 2 * 2 = 4\text{m}$$

$$P_{cr} = \frac{P}{3} = \frac{\pi^2 * E * I_{min}}{(L_e)^2}$$

$$I_{min} = \frac{(L_e)^2 * P}{3 * \pi^2 * E}$$

$$I_{min} = \frac{(4 * 10^3)^2 * 200 * 10^3}{3 * \pi^2 * 72 * 10^3}$$

$$I_{min} = 1502577.67 \text{ mm}^4$$

$$I_{min} = \frac{a^4}{12} - \frac{(a - 2t)^4}{12}$$

$$I_{min} = 1502577.67 \text{ mm}^4 = \frac{100^4}{12} - \frac{(100 - 2t)^4}{12}$$

$$I_{min} = 2.42 \text{ mm}$$

Exercice 3

Un tuyau en acier ($E=200$ GPa) de longueur $L= 9$ m a un diamètre extérieur de 220 mm et une épaisseur de 8 mm Calculer la charge critique P_{cr} pour les cas suivants :

1-Rotule-rotule

2-Encastrée-libre

3-Encastrée-rotule

4-Encastrée-Encastrée

Solution

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I}{(K * L)^2}$$

$$d = 220 - 2 \times 8 = 204 \text{ mm}$$

$$I = \left[\frac{\pi * D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} \right]$$

$$I = \left[\frac{\pi * 220^4}{64} - \frac{\pi 204^4}{64} \right]$$

$$I = 29976122 \text{ mm}^4$$

1-Rotule-rotule $k=1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * 200 * 1000 * 29976122}{(1 * 9 * 1000)^2}$$

$$P_{cr} = 731 \text{ kN}$$

2-Encastrée-libre $k=2$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * 200 * 1000 * 29976122}{(2 * 9 * 1000)^2}$$

$$P_{cr} = 182.6 \text{ kN}$$

3-Encastrée-rotule $k=0.7$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * 200 * 1000 * 29976122}{(0.7 * 9 * 1000)^2}$$

$$P_{cr} = 1489.3 \text{ kN}$$

4-Encastrée-Encastrée $k=0.5$

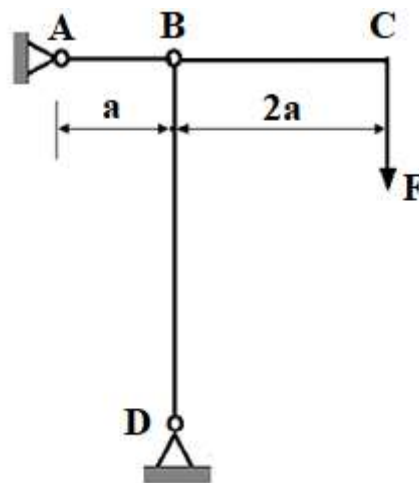
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * 200 * 1000 * 29976122}{(0.5 * 9 * 1000)^2}$$

$$P_{cr} = 2919 \text{ kN}$$

Exercice 4

Une tube BD en acier de section carrée creuse decôté $c=60 \text{ mm}$ et d'épaisseur $e=5 \text{ mm}$ est relié à une poutre horizontale AB qui supporte une charge F au point C.

Déterminer la charge admissible F si le coefficient de sécurité rapport à la charge critique d'EULER est $n=2$. $BD=2 \text{ m}$, $E=210 \text{ GPa}$.



Solution :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I_{min}}{(L_e)^2}$$

$$L_e = 0.7 * L$$

$$I_{min} = \left[\frac{c^4}{12} - \frac{(c - 2e)^4}{12} \right] = \left[\frac{60^4}{12} - \frac{50^4}{12} \right] = 559166,67 \text{ mm}^4$$

Charge admissible

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{n} = \frac{\pi^2 * E * I_{min}}{n * (L)^2}$$

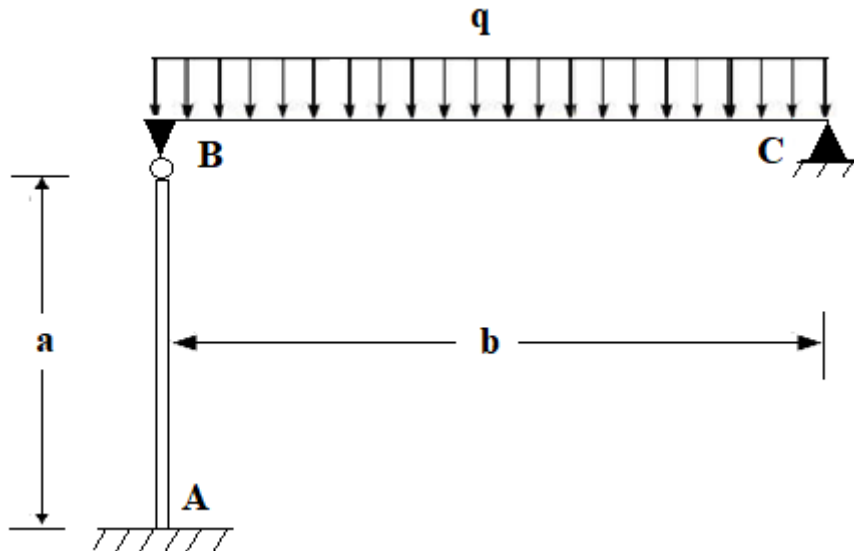
$$\sum M/A = -1F + 2P = 0 \Rightarrow F = 2P$$

$$2P = \frac{\pi^2 * E * I_{min}}{n * (L)^2}$$

$$P = \frac{\pi^2 * E * I_{min}}{2n * (L)^2} = \frac{\pi^2 * 210 * 10^9 * 559166,6710^{-12}}{2 * 2 * (2)^2} = 2,396 * 10^6 \text{ N}$$

Exercice 5

La tige BC de diamètre $d=50$ mm en acier $\sigma_y=345$ MPa. Déterminer l'intensité q de la charge répartie uniforme qui peut être appliquée sans risque de flambement. On adopte un coefficient de sécurité $n=2$ par rapport à la charge critique.



Solution

$$\sum M/C = 0$$

$$q * \frac{b^2}{2} - F_{AB} * b = 0 \quad F_{AB} = \frac{q * b}{2} = 3q$$

La barre AB est encastree –articulee :

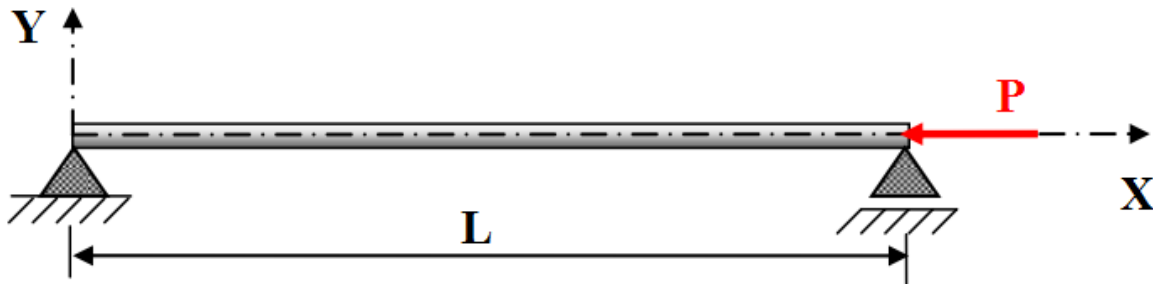
$$\frac{P_{cr}}{n} = \frac{\pi^2 * E * I}{2 * (0.71)^2} = F_{AB} = 3q$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$q = \frac{\pi^2 * E * I}{3 * 2 * (0.71)^2} = 2.318 \text{ kN} * \text{m}^{-1}.$$

Exercice 6

Une barre en acier de section circulaire de diamètre égal à 25mm, articulée à ses extrémités, est soumise à une compression axiale, comme la montre la figure



Déterminer :

- 1-La charge de compression critique d'Euler si $L=1.5$ m et $E = 21000$ daN/mm²
- 2- Calculer la valeur de la contrainte critique d'Euler.
- 3- Tracer la déformée de la poutre correspondant à la charge de compression critique d'Euler, sachant que l'équation de la déformée est: $v(x) = B \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$ ou $k=1$ et B une constante.

Solution

1-La charge de compression critique d'Euler est donnée par la formule

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I}{L^2}$$

Pour une poutre articulée à ses deux extrémités $l_f = L = 1500$ mm.

$$I = \frac{\pi * D^4}{64} = \frac{\pi * 25^4}{64}$$

$$I = 19165,039 \text{ mm}^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * 210000 * 19165,039}{1500^2}$$

$$P_{cr} = 17636,23 \text{ N}$$

2- Valeur de la contrainte critique d'Euler

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S}$$

$$S = \frac{\pi * D^2}{4} = \frac{\pi * 25^2}{4} = 490,625 \text{ mm}^2$$

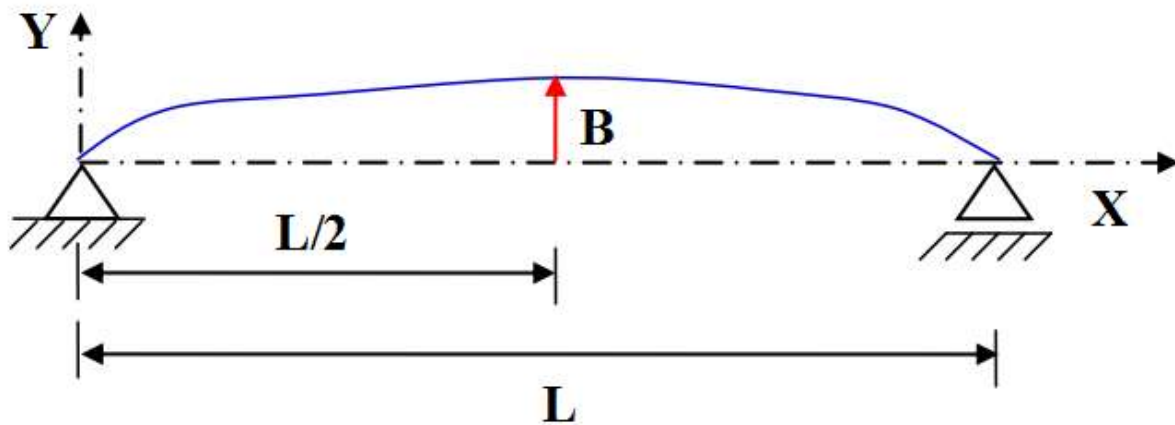
$$\sigma_{cr} = \frac{17636,23}{490,625}$$

$$\sigma_{cr} = 35.94 \text{ MPa}$$

3- Déformée de la poutre :

La charge critique d'Euler correspond à $k = 1$

$$v(x) = B \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \\ v_{\max} = B & \text{si } x = L/2 \end{cases}$$



QCM 1

1-Pour une poutre d'inertie constante soumise à un effort normal de compression simple, quelle est la formule F de la charge critique de flambage théorique ? (E est le module d'Young du matériau ; I est le moment quadratique de la poutre ; Lk est la longueur de flambement de la poutre).

a) $P_{cr} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{kL}$

b) $P_{cr} = \frac{\pi \times E \times I}{kL}$

c) $P_{cr} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{(kL)^2}$

2- dans le flambement la poutre est en équilibre neutre si :

a) $P < P_{cr}$

b) $P = P_{cr}$

c) $P > P_{cr}$

3-Pour une poutre d'inertie constante soumise à un effort normal de compression simple, quelle est la formule de la contrainte critique de flambage ?

a) $\sigma_{cr} = \frac{\pi \times E}{\lambda^2}$

b) $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \times E}{\lambda^2}$

c) $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \times E}{\lambda}$

4- il y aura ruine par flambement si :

a) $\sigma_c < \sigma_e$ (où σ_e est la limite élastique)

b) $\sigma_c > \sigma_e$

c) $\sigma_c = \sigma_e$

5-dans le flambage la longueur effective de la colonne de combinaison encasté-rotule est :

a) 0.5L

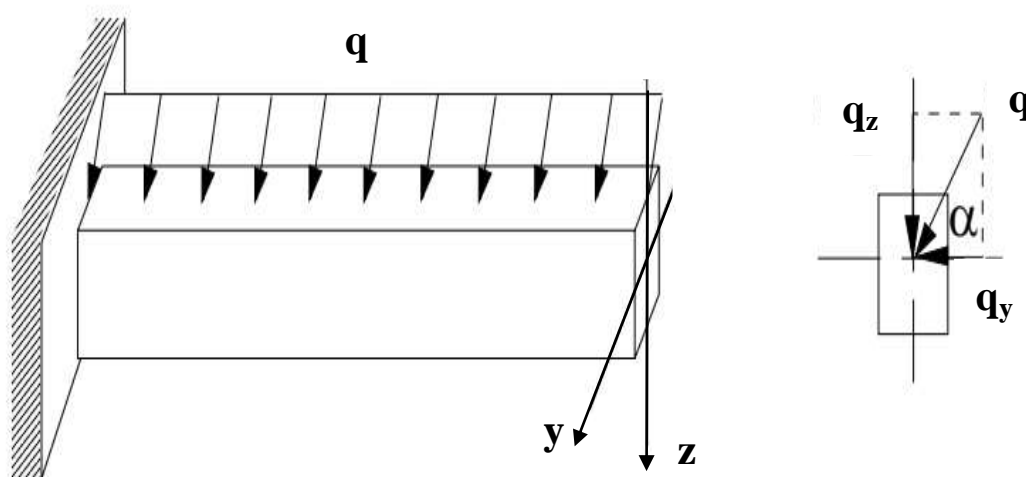
b) 2L

c) 0.7L

2.1 Flexion déviée

C'est le cas où les forces appliquées bien que situées dans un plan passant par l'axe longitudinal de la poutre ne sont pas situées dans l'un des plans principaux définis par l'axe longitudinal et l'un des axes principaux d'inertie de sa section. Il s'agit de flexion déviée et non pas de flexion simple.

Une solution plus simple notamment pour les sections courantes consiste à projeter les forces sur les deux plans principaux. On calcule séparément les contraintes normales dues aux projections des forces dans chacun de ces plans et en application du principe de superposition on fait la somme algébrique, en chaque point de la section, des contraintes normales relatives à chaque flexion. En général il suffit de déterminer les points de la section où les contraintes σ sont maximales.



Dans ce chapitre nous allons aborder l'étude des poutres non symétriques et le cas des poutres symétriques non chargées dans leur plan de symétrie.

L'étude de la flexion déviée, du type de celle indiquée par la figure, se ramène à la superposition ou à l'addition (vectorielle) de deux flexions simples, définies à partir des plans de symétrie.

2.2. Contraintes

Si on néglige les effets de l'effort tranchant T , la contrainte en un point A, de coordonnées (y,z) , dans le système d'axes (G,y,z) , est la somme (algébrique ou vectorielle) des contraintes dues à chacune des flexions simples M_{fy} , et M_{fz} . Autrement dit :

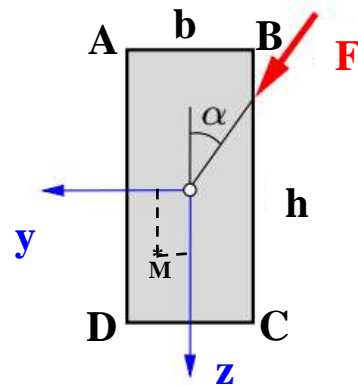
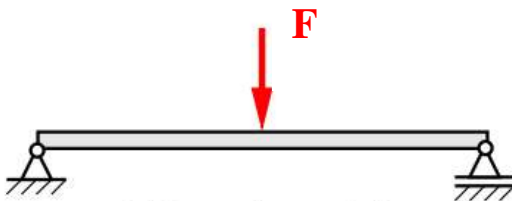
$$\sigma = \frac{M_{fy}}{I_y} * z + \frac{M_{fz}}{I_z} * y \tag{2.1}$$

Avec : y, z coordonnées d'A dans (G, y, z)

$$M_{fy} = M_f * \sin\alpha \quad \text{et} \quad M_{fz} = M_f * \cos\alpha$$

Les projections du moment fléchissant M_f sur les axes y et z . I_y et I_z , moments quadratiques de la section par rapport aux axes y et z .

Remarque



En un point $M(y_M > 0, z_M > 0, M_{fy} > 0, M_{fz} > 0)$. Les moments fléchissant M_{fy} et M_{fz} engendrent des contraintes positives en M (contraintes de traction):

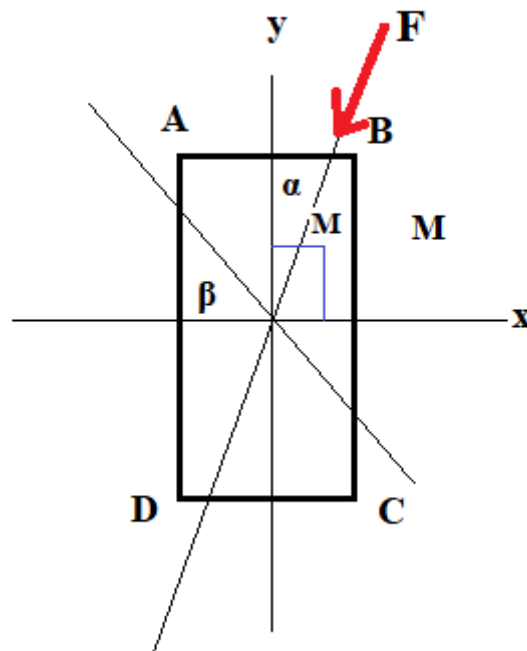
$$\sigma_D = + \frac{M_{fz}}{I_z} * y_{max} + \frac{M_{fy}}{I_y} * z_{max}$$

$$\sigma_B = - \frac{M_{fz}}{I_z} * y_{max} - \frac{M_{fy}}{I_y} * z_{max}$$

$$\sigma_A = \frac{M_{fz}}{I_z} * y_{max} - \frac{M_{fy}}{I_y} * z_{max}$$

$$\sigma_C = - \frac{M_{fz}}{I_z} * y_{max} + \frac{M_{fy}}{I_y} * z_{max}$$

2.3 Plan neutre ou axe neutre



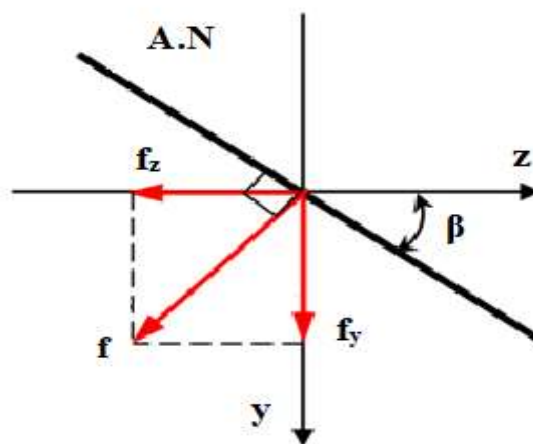
Le plan neutre est le plan où les contraintes sont nulles :

$$\sigma = \frac{M_{fy}}{I_y} * x + \frac{M_{fx}}{I_x} * y = 0$$

$$\text{tg}\beta = \left(\frac{M_{fy}}{M_{fx}} \right) * \left(\frac{I_x}{I_y} \right) = -\frac{y}{x} = -\left(\frac{M_f \sin\alpha}{M_f \cos\alpha} \right) * \left(\frac{I_x}{I_y} \right)$$

$$\text{tg}\beta = -\left(\frac{I_x}{I_y} \right) * \text{tg}\alpha \tag{2.2}$$

2.4 La flèche résultante



La flèche résultante pour une section donnée est la résultante géométrique de ses projections calculées selon les équations différentielles précédentes :

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad (2.3)$$

2.5 Flexion dans deux directions

Considérons une poutre de section carrée chargée verticalement au milieu : la contrainte de flexion maximale se produit sur les faces supérieures et inférieures. Si la poutre est chargée horizontalement au milieu, la contrainte de flexion maximale se produit sur les surfaces latérales.

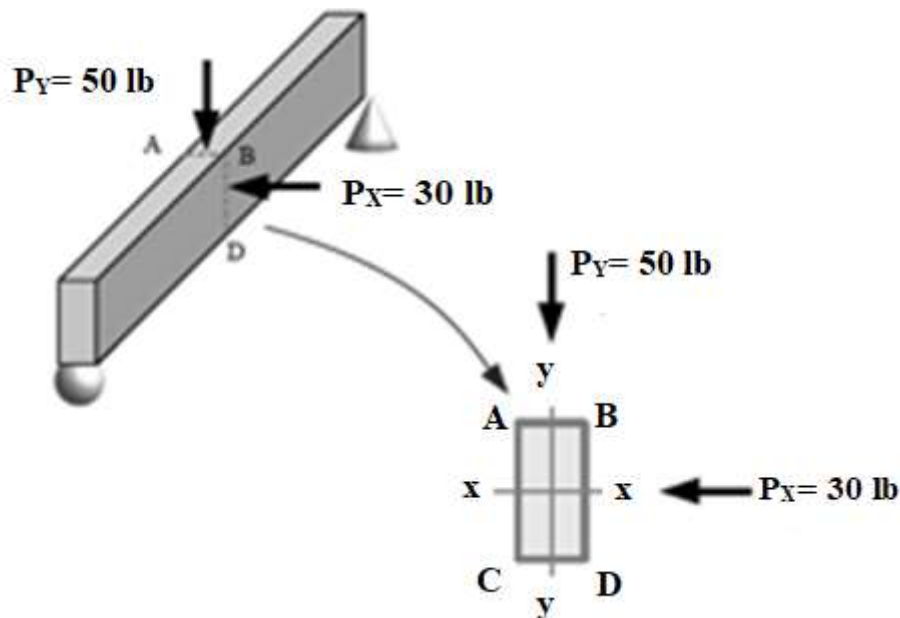
Nous pouvons ajouter les contraintes aux extrémités pour trouver les valeurs maximales. La poutre fléchit en bas et vers la gauche ; nous pouvons prévoir ces flèches, puis les combiner en utilisant les relations trigonométriques.

Exemple

Une poutre en bois de longueur 84 in supporte une charge verticale de 50 lb et une charge horizontale de 30 lb au milieu de la poutre.

Calculer les contraintes résultantes aux points A, B, C et D de la section située au milieu de la poutre ainsi que la flèche verticale, horizontale et totale.

On donne: $AB = b = 1.5$ in, $AC = h = 3.5$ in et $E = 1700$ psi.



Solution :

La contrainte de flexion au milieu de la poutre due à la charge verticale est :

$$\sigma_y = \frac{M_y}{S_x} = \frac{P_y * L}{4 * S_x}$$

$$S_x = \frac{I_x}{c} = \frac{b * h^3}{12 * (0.5h)} = \frac{b * h^2}{6} = \frac{1.5 * (3.5)^2}{6} = 3.06 \text{ in}^3$$

Cette contrainte est positive (traction) aux points C et D. Cette contrainte est négative (compression) aux points A et B.

$$\sigma_y = \frac{P_y * L}{4 * S_x} = \frac{50 * 84}{4 * 3.06} = 343 \text{ psi}$$

Alors:

$$\sigma_y(C) = \sigma_y(D) = +343 \text{ psi} \text{ and } \sigma_y(A) = \sigma_y(B) = -343 \text{ psi.}$$

La contrainte de flexion au milieu de la poutre due à la charge horizontale est :

$$\sigma_x = \frac{M_x}{S_y} = \frac{P_x * L}{4 * S_y}$$

Cette contrainte est positive (traction) aux points A et C, négative (compression) aux points B et D.

Calculons cette contrainte :

$$S_y = \frac{I_y}{c} = \frac{h * b^3}{12 * (0.5b)} = \frac{h * b^2}{6} = \frac{3.5 * (1.5)^2}{6} = 1.313 \text{ in}^3$$

$$\sigma_x = \frac{P_x * L}{4 * S_y} = \frac{30 * 84}{4 * 1.313} = 480 \text{ psi}$$

Alors:

$$\sigma_y(A) = \sigma_y(C) = +480 \text{ psi} \text{ and } \sigma_y(B) = \sigma_y(D) = -480 \text{ psi.}$$

L'étape finale est d'ajouter algébriquement ces contraintes en chaque point. La contrainte maximale de traction est au niveau du point C, sa valeur est 823 psi, alors que la contrainte maximale de compression est au niveau du point B sa valeur est -823 psi.

| Point | σ_y (psi) | σ_x (psi) | σ_{totale} (psi) |
|-------|------------------|------------------|-------------------------|
| A | -343 | 480 | 137 |
| B | -343 | -480 | -823 |
| C | 343 | 480 | 823 |
| D | 343 | -480 | -137 |

La flèche due à une charge concentrée appliquée au milieu de la poutre est :

$$\Delta_{max} = \frac{P * L^3}{48 * EI}$$

Flèche verticale :

$$I_x = \frac{h * b^3}{12} = \frac{1.5 * 3.5^3}{12} = 5.36 \text{ in}^4$$

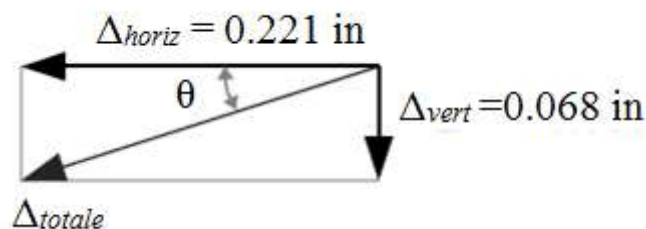
$$\Delta_{vert} = \frac{P_y * L^3}{48 * EI_x} = \frac{50 * (84)^3}{48 * 1700 * (5.36)^4} = 0.068 \text{ in dirigée vers le bas}$$

Flèche horizontale :

$$I_y = \frac{b * h^3}{12} = \frac{3.5 * 1.5^3}{12} = 0.984 \text{ in}^4$$

$$\Delta_{horiz} = \frac{P_x * L^3}{48 * EI_y} = \frac{30 * (84)^3}{48 * 1700 * (0.984)^4} = 0.221 \text{ in latérale vers la gauche.}$$

En utilisant les relations trigonométriques, on trouve la flèche totale et sa direction : $\Delta_{vert}, \Delta_{horiz}$



$$\Delta_{totale} = \sqrt{\Delta_{vert}^2 + \Delta_{horiz}^2} = \sqrt{(0.221)^2 + (0.068)^2} = 0.231 \text{ in}$$

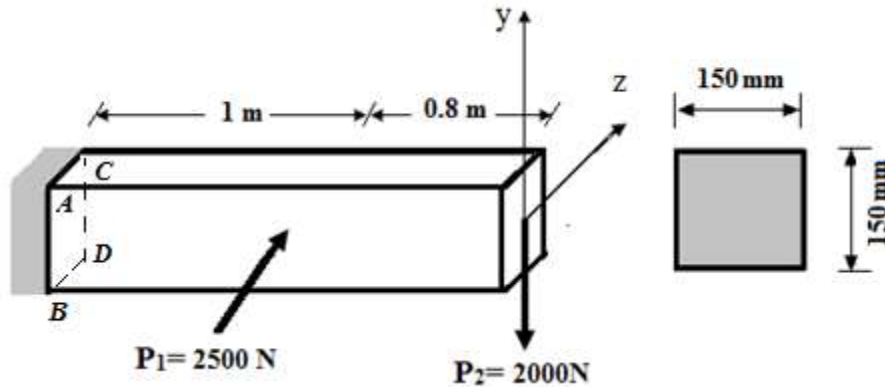
$$\theta = \text{arctg} \frac{\Delta_{\text{vert}}}{\Delta_{\text{horiz}}} = \text{arctg} \frac{0.068}{0.221} = 17.1^\circ$$

1.6 Exercices corrigés

Exercice 1

Une poutre de section transversale carrée est chargée comme indiquée dans la figure.

- ✓ Déterminer les des contraintes dans les quatres coins aux niveau des appuis.



Solution

Les contraintes normales peuvent être déterminées par l'équation :

$$\sigma = \frac{M_{fy}}{I_y} * z + \frac{M_{fz}}{I_z} * y$$

Moments quadratiques : $I_y = I_z = \frac{a^4}{12} = 42187500 \text{ mm}^4$

y et z étant les axes principaux de la section transversale. On décompose F en deux

Les moments flechissants sont alors déterminées comme suit :

$$M_{fy} = - P_1 * 1\text{m} = - 2500 * (1 * 1000) = - 2500000 \text{ MPa},$$

$$M_{fz} = P_2 * 1.8\text{m} = 2000 * (1.8 * 1000) = 3600000 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{M_{fy}}{I_y} z + \frac{M_{fz}}{I_z} y$$

$$\sigma = \frac{- 2500000}{42187500} * z + \frac{3600000}{42187500} * y$$

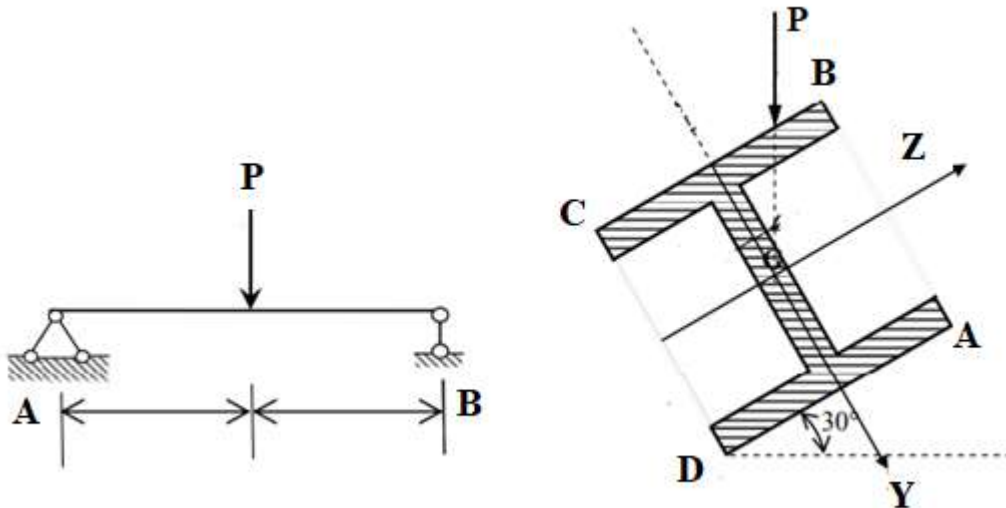
$$\sigma = - 0,0592 * z + 0,085 * y$$

| Point | y (mm) | z (mm) | σ_{totale} (MPa) |
|-------|--------|--------|--------------------------------|
| A | +75 | -75 | +10.84 MPa |
| B | -75 | -75 | -1.96 MPa |
| C | +75 | +75 | +1.96 MPa |
| D | -75 | +75 | - 10.84 MPa |

Exercice 2

Une poutre de longueur $L=1\text{m}$ simplement appuyée supporte une charge de $P=900\text{N}$ en son milieu. Cette charge est inclinée d'un angle de 30° par rapport à l'axe verticale y .

Déterminer les contraintes maximales aux points A, B, C et D de la section et la position de l'axe neutre. On donne : $AB = BC = 120\text{ mm}$,
 $I_Y = 5813333.33\text{ mm}^4$, $I_Z = 13013333.33\text{ mm}^4$.



Solution

Les contraintes normales peuvent être déterminées par l'équation :

$$\sigma = \frac{M_{fy}}{I_y} * z + \frac{M_{fz}}{I_z} * y$$

y et z étant les axes principaux de la section transversale. On décompose F en deux composantes dans les directions y et z :

$$P_y = P * \cos\alpha = 900 * \cos30 = 774\text{ N},$$

$$P_z = -P * \sin\alpha = -900 * \sin30 = -450\text{ N}$$

Les moments flechissants sont alors déterminées comme suit :

$$M_{fy} = \frac{1}{4} * P_z = 500 * (-450) = -112500\text{ MPa},$$

$$M_{fz} = \frac{1}{4} * P_y = 500 * 774 = 193500\text{ MPa}$$

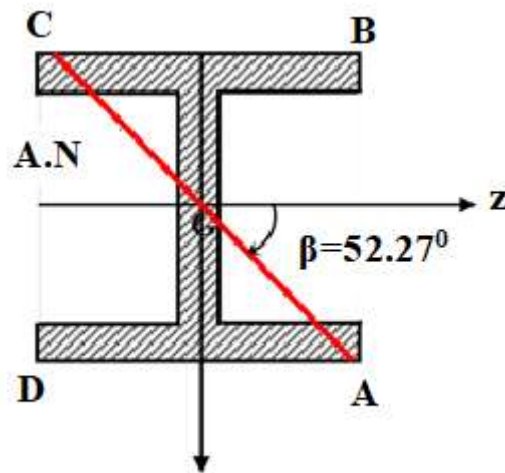
$$\sigma = \frac{M_{fy}}{I_y} * z + \frac{M_{fz}}{I_z} * y$$

$$\sigma = \frac{-112500}{5813333,33} * z + \frac{193500}{13013333,33} * y$$

$$\sigma = -0,0193 * z + 0,0148 * y$$

| Point | Y (mm) | Z (mm) | σ_{totale} (MPa) |
|-------|--------|--------|--------------------------------|
| A | +60 | +60 | -0.27 |
| B | -60 | +60 | -2.046 |
| C | -60 | -60 | +0.27 |
| D | +60 | -60 | +2.046 |

Position de l'axe neutre



$$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_z} * y + \frac{M_{fy}}{I_y} * z = 0$$

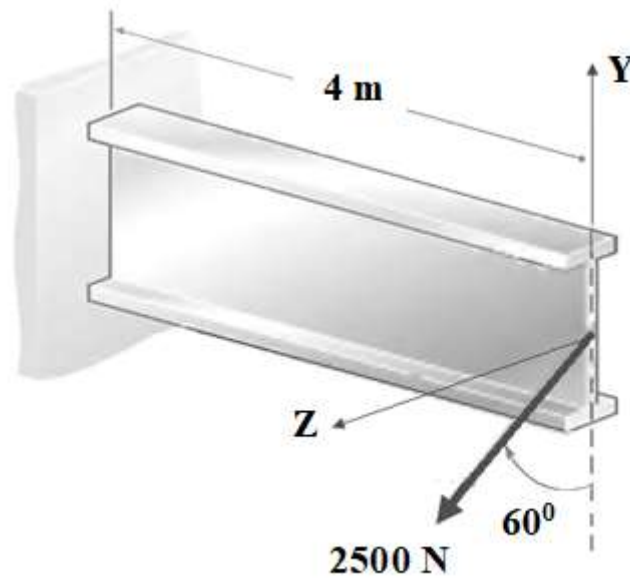
$$\text{tg}\theta = \left(\frac{M_{fy}}{M_{fz}}\right) * \left(\frac{I_z}{I_y}\right) = \frac{y}{z} = \left(\frac{M_f \sin\alpha}{M_f \cos\alpha}\right) * \left(\frac{I_z}{I_y}\right)$$

$$\text{tg}\theta = \left(\frac{I_z}{I_y}\right) \text{tg}\alpha \rightarrow \theta = 52.27^\circ$$

Exercice 3

Une poutre console en profilé W460 X 97 (voir annexe) est soumise à l'effet combiné d'une force transversale de 2500 N et de son poids propre comme illustré dans la figure.

-Déterminer la contrainte de traction maximale dans la poutre et sa position.

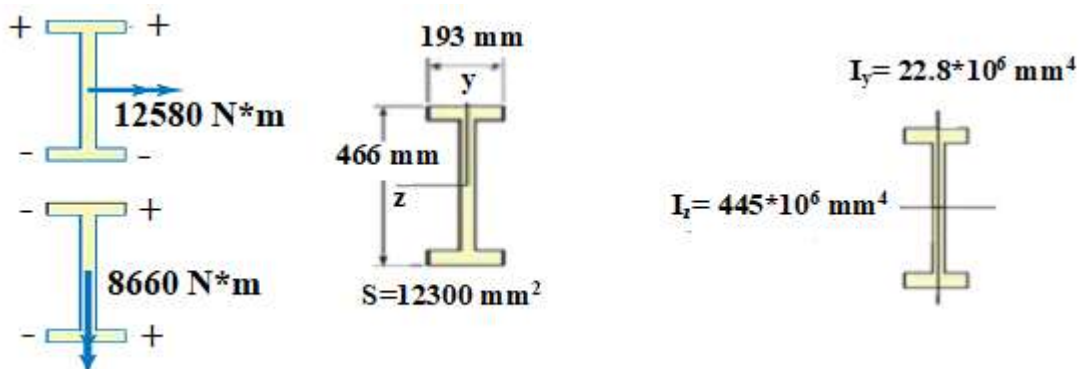


Solution

La section transversale de la poutre est symétrique par rapport aux plans vertical et horizontal. Le moment peut être décomposé en deux composants parallèles à chacun des axes de symétrie et les contraintes dues à chaque moment peuvent être ajoutées.

L'aire de la section transversale est donnée dans l'annexe E, $S = 12300 \text{ mm}^2$, par conséquent la force par unité de longueur due au poids est: $q = A \cdot \rho \cdot g = 12300 \cdot 10^{-6} \cdot 7850 \cdot 9.81 = 947 \text{ N/m}$.

Les moments d'inertie par rapport aux deux axes, sont également donnés dans l'annexe E.



Le moment fléchissant maximal par rapport à l'axe z est au niveau de l'appui. Il est dû au poids q et au moment produit par la force de 2500 N :

$$M_z = -\frac{1}{2} \cdot (947) \cdot (4 \text{ m})^2 - (2500 \text{ N}) \cdot (\cos 60^\circ) \cdot (4 \text{ m}) = -12580 \text{ N.m}$$

Le moment fléchissant maximal par rapport l'axe y est toujours au niveau de l'appui, mais il est dû seulement au moment produit par la force de 2500 N :

$$M_y = -(2500 \text{ N}) * (\sin 60^\circ) * (4 \text{ m}) = -8660 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Le moment par rapport à l'axe z produit une traction (+) et une compression (-) comme illustré dans la figure.

$$\sigma(\text{due à } M_z) = \frac{M_z * y}{I_z} = \frac{12580 * (0.466/2)}{445 * 10^{-6}} = 6.59 \text{ MPa}$$

Le moment par rapport à l'axe des y produit une tension (+) et une compression (-) comme illustré dans la figure.

$$\sigma(\text{due à } M_y) = \frac{M_y * z}{I_y} = \frac{8660 * (0.193/2)}{22,8 * 10^{-6}} = 6.59 \text{ MPa}$$

La contrainte de traction maximale est dans l'extrémité supérieure droite de la section transversale, où les deux tractions maximales s'ajoutent.

$$(\sigma)_{\max} = 6.59 + 36.7 = 43.2 \text{ MPa}$$

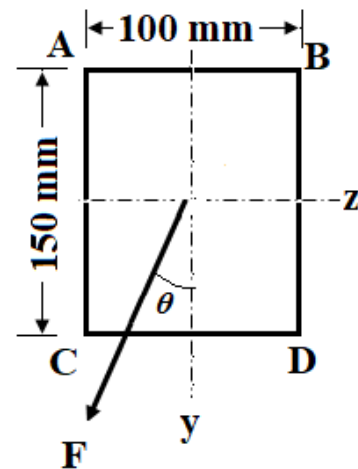
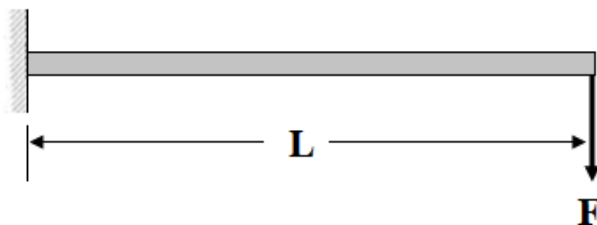
Exercice 4

Une poutre de section transversale rectangulaire supporte une charge de $F=1300 \text{ N}$ dans son extrémité libre. La ligne d'action de la force est inclinée d'un angle θ par rapport à l'axe des y.

-Déterminer les contraintes dans les quatre coins de la section au niveau de l'encastrement.

-La position de l'axe neutre

On donne ; $F = 1300 \text{ N}$, $L = 2 \text{ m}$ et $\theta = 22.62^\circ$



Solution

Moments fléchissant :

$$M_{fy} = 1200 * 2 = 2400 \text{ N * m}$$

$$M_{fz} = 200 * 2 = 1000 \text{ N * m}$$

Moments d'inertie :

$$I_z = \frac{100 * 150^3}{12} = 28.1 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{150 * 100^3}{12} = 12.5 \text{ mm}^4$$

Contraintes de flexion:

$$\sigma_A = \frac{2400}{28.1} * 75 - \frac{1000}{12.5} * 50 = 6.4 - 4 = +2.4 \text{ MPa (traction)}$$

$$\sigma_B = \frac{2400}{28.1} * 75 + \frac{1000}{12.5} * 50 = 6.4 + 4 = +10.4 \text{ MPa (traction)}$$

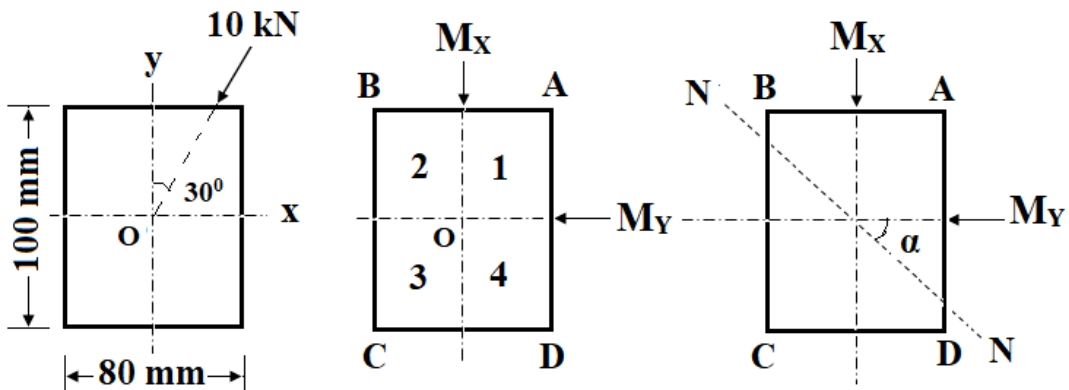
$$\sigma_C = \frac{2400}{28.1} * 75 - \frac{1000}{12.5} * 50 = -6.4 + 4 = -2.4 \text{ MPa (compression)}$$

$$\sigma_D = \frac{2400}{28.1} * 75 - \frac{1000}{12.5} * 50 = -6.4 - 4 = -10.4 \text{ MPa (compression)}$$

Exercice 5

Une poutre de section rectangulaire de longueur L=4m simplement appuyée supporte une charge de 10 kN en son milieu. Cette charge est inclinée d'un angle de 30° par rapport à l'axe vertical y.

Déterminer les contraintes maximales aux points A, B, C et D de la section.



Solution**Caractéristiques de la section**

Rectangle plein

Dimension suivant Y = 100.00 mm , Z = 80.00 mm

Moments quadratiques : $I_Y = 426.667 \text{ cm}^4$, $I_Z = 666.667 \text{ cm}^4$

Charges nodales, Noeud 2: $F_y = -5000.00 \text{ N}$, $F_z = -8666.25 \text{ N}$

$$M_f = \frac{P * L}{4} = \frac{10000 * 4}{4} = 10000 \text{ N * m}$$

$$M_{fz} = M_f * \cos\alpha = 10000 * 0.866 = 8660 \text{ N * m}$$

$$M_{fy} = M_f * \sin\alpha = 10000 * 0.5 = 5000 \text{ N * m}$$

Contraintes de flexion :

$$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_z} * y + \frac{M_{fy}}{I_y} * z$$

$$I_z = \frac{80 * 100^3}{12} = 6.667 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{100 * 80^3}{12} = 4.267 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\max}^t = \frac{8,66 * 10^6}{6.667 * 10^6} * (40) + \frac{5 * 10^6}{4.267 * 10^6} * (50) = 111.83 \text{ MPa}$$

Position de l'axe neutre :

$$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_z} * y + \frac{M_{fy}}{I_y} * z = 0$$

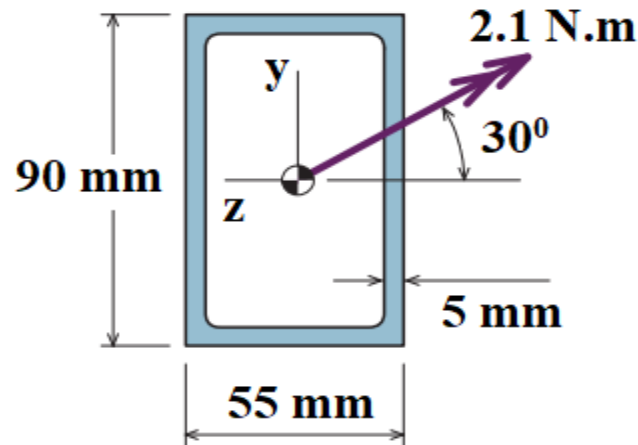
$$\text{tg}\alpha = \left(\frac{M_{fy}}{M_{fz}} \right) * \left(\frac{I_z}{I_y} \right) = \frac{y}{z} = \left(\frac{M_f \sin\theta}{M_f \cos\theta} \right) * \left(\frac{I_z}{I_y} \right)$$

$$\text{tg}\alpha = \left(\frac{I_z}{I_y} \right) * \text{tg}\theta = \frac{6.667}{4.267} * \text{tg}30^\circ = 0.902 \rightarrow \alpha = -42.05^\circ$$

Exercice 6

Une poutre à section carrée est soumise à un moment résultant de 2.1 N*m agissant à l'angle indiqué dans Figure. Déterminer:

- la contrainte maximale dans la poutre.
- l'orientation de l'axe neutre par rapport à l'axe z.



$$I_y = \frac{(90 \text{ mm}) * (55 \text{ mm})^3}{12} - \frac{(80 \text{ mm}) * (45 \text{ mm})^3}{12} = 640312.5 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{(55 \text{ mm}) * (90 \text{ mm})^3}{12} - \frac{(45 \text{ mm}) * (80 \text{ mm})^3}{12} = 1421250 \text{ mm}^4$$

Les moments fléchissant M_y et M_z

$$M_y = (2.1 \text{ N.m}) * \sin 30^\circ = 1.05 \text{ N.m}$$

$$M_z = -(2.1 \text{ N.m}) * \cos 30^\circ = -1.81 \text{ N.m}$$

Calcul la contrainte au point $y = 45 \text{ mm}$, $z = 27.5 \text{ mm}$

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} * z - \frac{M_z}{I_z} * y$$

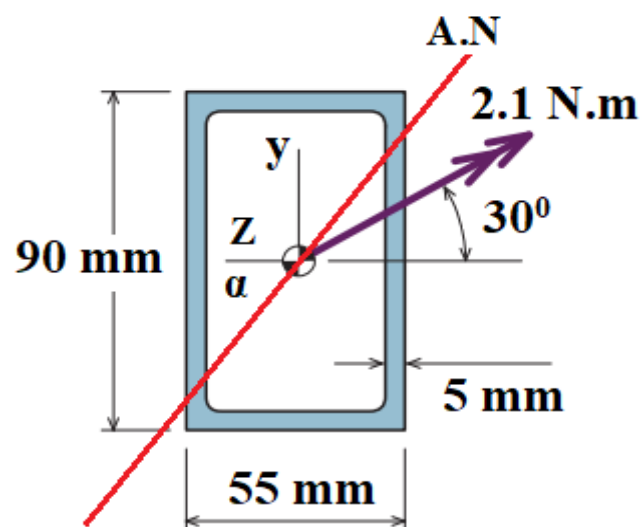
$$\sigma = \frac{1.05 * 1000 * 27.5}{640312.5} - \frac{-1.81 * 1000 * 45}{1421250} = 10.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma = 10.2 \text{ MPa (traction)}$$

L'orientation de l'axe neutre

$$\tan \alpha = \frac{M_y * I_y}{M_z * I_z} = \frac{1.05 * 640312.5}{-1.81 * 1421250} = -1.2815$$

$$\alpha = -52.03^\circ$$



QCM 2

1- Une section est dite soumise à la flexion déviée si :

- a) $N=0$, $M_Y \neq 0$ et $M_Z \neq 0$
- b) $N \neq 0$, $M_Y \neq 0$ et $M_Z = 0$
- c) $N \neq 0$, $M_Y \neq 0$ et $M_Z \neq 0$

2- L'axe neutre est le lieu des points où

- a) La contrainte est maximale dans la section droite
- b) La contrainte est nulle dans la section droite

3- Les matériaux des poutres étudiées sont supposés

- a) Homogènes et isotropes
- b) Continus et anisotropes

4- Dans la flexion déviée

- a) La force appliquée passe par l'un des axes principaux
- b) La force appliquée ne passe pas par l'un des axes principaux

5- En flexion déviée la poutre doit être

- a) Symétrique
- b) Non symétrique

3.1 Définition

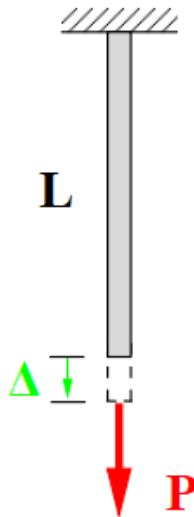
Le terme énergie exprime la capacité d'un système ou d'un corps à fournir un travail. Quand une force extérieure agit sur un corps élastique et le déforme, le travail effectué par cette force est emmagasiné dans le corps sous forme d'énergie de déformation. Le corps est ensuite capable de faire un travail équivalent à la quantité d'énergie emmagasinée où il peut reprendre ses dimensions primitives. Si le processus des déformations est conservatif, on écrit ;

$$U = W \quad (3.1)$$

3.2 Energie de déformation en traction

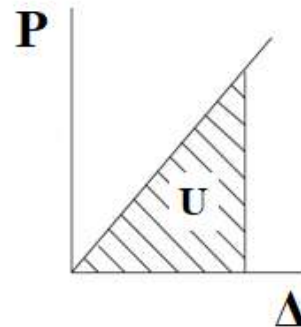
Lorsqu'une charge statique est appliquée au corps en matériau élastique, le corps se déforme et un travail est effectué sur le corps qui est stocké sous forme d'énergie interne. Le travail effectué par la force pour déformer le corps est connu sous le nom d'énergie de déformation. Pour la plupart des matériaux élastiques, l'élongation augmente linéairement avec l'accroissement de la charge et ainsi la courbe charge déplacement est une droite linéaire. Le travail effectuer pour déformer le matériau est égal à l'aire sous la courbe.

Soit P la charge appliquée graduellement à la barre de longueur L et de section S . Soit Δ l'élongation totale due au chargement.



L'énergie de déformation = Force moyenne * Allongement

$$U = \frac{1}{2} * P * \Delta \quad (3.2)$$



L'énergie de déformation peut être aussi exprimée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} * (\sigma S) * (\varepsilon * L) = \frac{1}{2} * \sigma * \varepsilon * S * L = \frac{1}{2} * \text{contrainte} * \text{déformation} * \text{volume}$$

$$U = \frac{1}{2} * \sigma * \frac{\sigma}{E} * S * L = \frac{\sigma^2}{2E} * S * L = \frac{\sigma^2}{2E} * \text{volume}$$

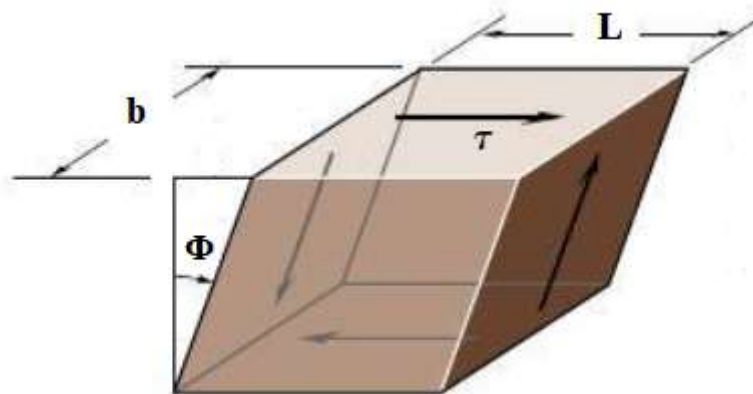
$$U = \frac{1}{2} * \sigma * \frac{\sigma}{E} * S * L = \frac{P^2}{S^2} * \frac{1}{2E} * S * L = \frac{P^2 * L}{2E * S}$$

L'expression générale de l'énergie de déformation en torsion est :

$$U = \int_0^L \frac{N^2}{2E * S} * dx \tag{3.2}$$

3.3 Energie de déformation en cisaillement

Soit un bloc de dimensions de longueur **L** de largeur **b** et de hauteur **h** fixé au sol. Une force de cisaillement **P** lui est appliqué graduellement sur la face supérieure.



L'énergie de déformation est égale au travail effectué pour tordre le bloc :

$$U = W = \frac{1}{2} * \text{Couple total} * \text{angle de torsion}$$

$$U = \frac{1}{2} * \text{Force totale} * h * \varphi$$

$$U = \frac{1}{2} * (\text{contrainte de cisaillement} * \text{surface}) * h * \varphi$$

Comme :

$$G = \frac{\tau}{\varphi} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{\tau}{G}$$

$$U = \frac{1}{2} * \tau * (L * b) * h * \frac{\tau}{G}$$

$$U = \frac{\tau^2}{2G} * (L * b * h) = \frac{\tau^2}{2G} * \text{volume}$$

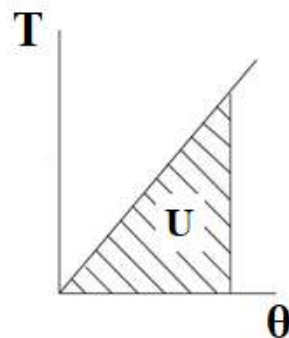
Ou :

$$U = \frac{\tau^2}{2G} \tag{3.3}$$

Expression similaire à celle l'énergie de déformation $\frac{\sigma^2}{2E}$ en traction.

3.4 Energie de déformation en torsion

L'énergie de déformation totale d'un arbre sous l'action d'un moment de torsion est égal au travail effectué pour tordre l'arbre. Alors pour un moment appliqué graduellement à l'arbre le faisant tordre d'un angle.



$$U = \frac{1}{2} * T * \theta \tag{3.4}$$

Comme :

$$\frac{T}{I_0} = \frac{\tau}{r} = \frac{G * \theta}{l}$$

I_0 : Moment d'inertie polaire de la section.

Pour un arbre de section circulaire pleine :

$$T = \left(\frac{\pi d^4}{32} \right) * \frac{\tau}{d/2} = \frac{\pi d^3 * \tau}{16}$$

Et :

$$\theta = \frac{\tau * l}{G * (d/2)} = \frac{2\tau * l}{G * d}$$

$$U = \frac{1}{2} * T * \theta = \frac{1}{2} \frac{\pi d^3 * \tau}{16} * \frac{2\tau * l}{G * d} = \frac{\tau^2}{4G} * \left(\frac{\pi d^2}{4} * l \right) = \frac{\tau^2}{4G} * \text{volume}$$

L'expression générale de l'énergie de déformation en torsion est :

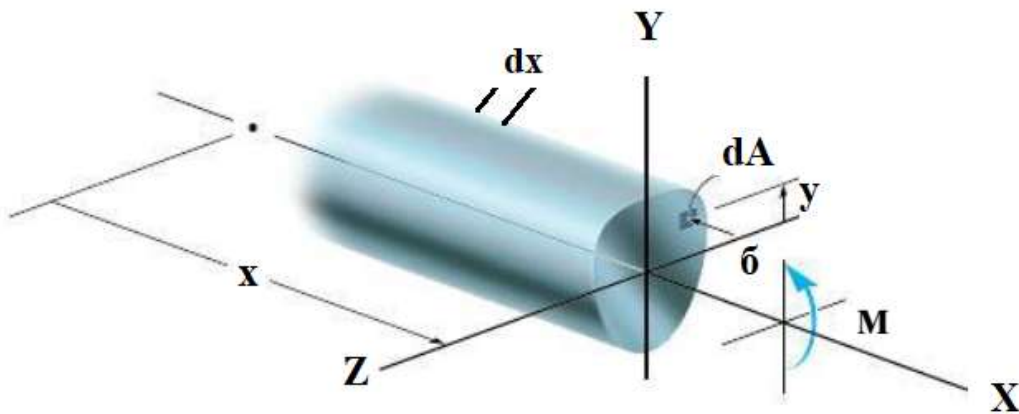
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_t^2}{G * I_o} * dx \quad (3.5)$$

L'énergie de déformation par unité de volume est :

$$U = \frac{\tau^2}{4G} \quad (3.6)$$

3.5 Energie de déformation en flexion

Considérons deux sections voisines de la poutre distantes de dx comme illustré dans la figure. Comme la distance dx est infiniment petite on ne considère que le moment fléchissant M est constant. Soit σ la contrainte de flexion dans l'élément cylindrique d'aire dS situé à une distance y de l'axe neutre.



L'énergie de déformation dans l'élément cylindrique est :

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} * \text{volume} = \frac{\sigma^2}{2E} * dS * dx$$

L'énergie de déformation dans l'élément dx :

$$\delta U = \int \frac{\sigma^2}{2E} * dS * dx = \int \frac{1}{2E} * \left(\frac{M * y}{I} \right)^2 * dS * dx = \frac{M^2 * dx}{2E * I^2} \int y^2 * dS$$

Comme:

$$\int y^2 * dS = I$$

$$\delta U = \frac{M^2 * dx}{2E * I} \quad (3.7)$$

L'énergie de déformation totale emmagasinée dans la poutre est :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{E * I} * dx \quad (3.8)$$

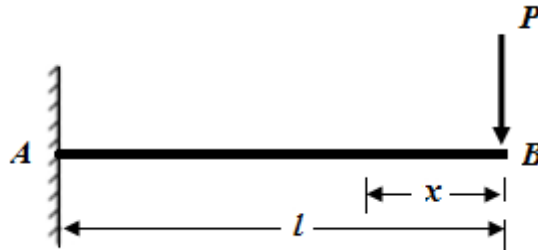
L'énergie de déformation due à l'effort tranchant :

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{G * S^*} * dx \quad (3.9)$$

S^* : Section réduite au cisaillement

Exemple

Trouver la flèche au point B de la poutre console chargée par une force P à l'extrémité libre.



Le moment flechissant est égal à :

$$M = -P * x$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 * x^2}{E * I} * dx = \frac{P^2}{2E * I} * \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{P^2 * l^3}{6E * I}$$

D'après le principe de conservation d'énergie, le travail effectué par la force P est égal à l'énergie de déformation :

$$U = W = \frac{1}{2} * P * \delta = \frac{P^2 * l^3}{6E * I}$$

D'où :

$$\delta = \frac{P * l^3}{3E * I}$$

L'expression générale de l'énergie de déformation est

$$U = + \frac{1}{2} \left[\int_0^L \frac{P^2}{E * S} * dx + \int_0^L \frac{M_t^2}{G * I_o} * dx + \int_0^L \frac{M^2}{E * I} * dx + \int_0^L \frac{T^2}{G * S^*} * dx \right] \tag{3.10}$$

3.6 Théorème de CASTIGLIANO

Le déplacement du point d'application d'une force sur la direction de cette force est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force.

La rotation du point d'application d'un couple quelconque, projeté sur l'axe de ce couple, est égale à la dérivée partielle, par rapport au moment de ce couple, de l'énergie de déformation.

$$\frac{\partial U}{\partial P_r} = \delta_r \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_n} = \Theta_n \tag{3.12}$$

3.7 Méthode de la charge et moment fictive

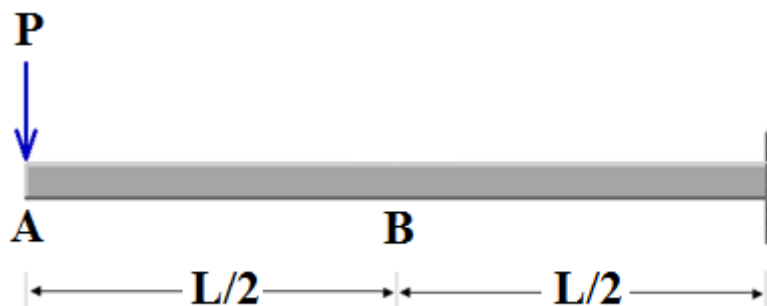
Pour calculer le déplacement d'un point où il n'y a pas de force on applique une charge fictive arbitraire *Q* en ce point, après avoir calculé les efforts intérieurs et les dérivées partielles, il suffit d'annuler cette charge fictive.

Pour calculer la rotation d'un point où il n'y a pas de moment on applique un moment fictive arbitraire *M* en ce point, après avoir calculé les moments intérieurs et les dérivées partielles, il suffit d'annuler ce moment fictive.

Exemple

Pour la poutre console représentée dans la figure.

- Déterminer les déplacements des points A et B.



La poutre est sollicitée en flexion. Le moment fléchissant est :

$$M_f = -P * x$$

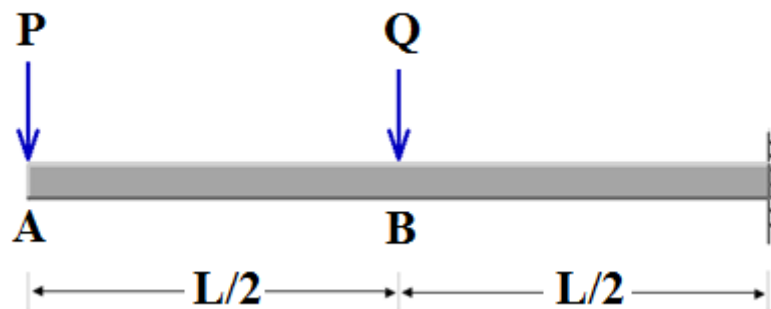
L'énergie de déformation est :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_f^2}{E * I} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(-P * x)^2}{E * I} * dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2 * x^2}{E * I} * dx = \frac{P^2 * L^3}{6E * I}$$

Donc la flèche au point A est égale a la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à P :

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P * L^3}{3E * I}$$

Pour déterminer la flèche au point B on doit appliquer une force fictive Q



Pour : $0 \leq x \leq L/2$

$$M_f = -P * x$$

Et pour : $L/2 \leq x \leq L$

$$M_f = -P * x - Q * \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Dou :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \frac{(-P * x)^2}{E * I} * dx + \frac{1}{2} \int_{L/2}^L \frac{[-P * x - Q * (x - \frac{L}{2})]^2}{E * I} * dx$$

$$U = \frac{L^3}{48 * E * I} (8P^2 + Q^2 + 5P * Q)$$

Donc la flèche au point B est égale à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à Q qu'on annulera ensuite :

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \Big|_{Q=0} = \frac{L^3}{48E * I} * (2Q + 5P) \Big|_{Q=0} = \frac{5P * L^3}{48E * I}$$

3.8 Différentiation sous le signe intégral

Comme nous avons vu dans l'exemple précédent, l'utilisation du théorème de Castigliano pour déterminer les flèches des poutres peut mener à des intégrations lentes, particulièrement quand plus de deux charges agissent sur la poutre. La raison est claire, trouver l'énergie de déformation exige l'intégration du carré du moment de flexion. Par exemple, si l'expression de moment de flexion a trois termes, son carré peut avoir pour autant six termes, qui doivent être intégrés.

Après que les intégrations soient accomplies et l'énergie de déformation déterminée, on effectue une dérivation de l'énergie de déformation pour obtenir les flèches.

Cependant, nous pouvons by passer l'étape de détermination de l'énergie de déformation par la dérivation avant d'intégrer. Ce procédé n'élimine pas les intégrations, mais ils les rendent beaucoup plus simples.

Pour dériver cette méthode, nous commençons par l'équation de l'énergie de déformation et appliquer ensuite le théorème de Castigliano:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \int \frac{M^2 * dx}{2E * I}$$

(3.13)

Après les règles du calcul, nous pouvons dériver l'intégrale par la dérivation sous le signe intégral :

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int \frac{M^2 * dx}{2E * I} = \int \left(\frac{M}{EI} \right) * \left(\frac{\partial M}{\partial P_i} \right) * dx \quad (3.14)$$

Nous appelons à cette équation comme théorème du **Castiglione modifié**.

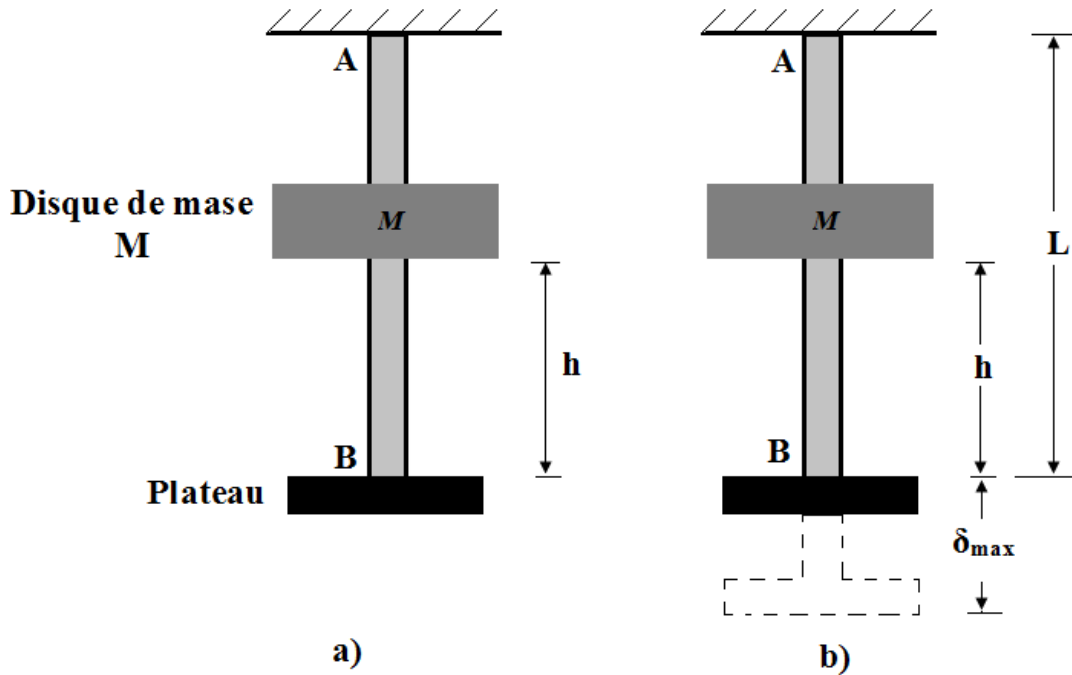
En employant le théorème modifié, nous intégrons le produit du moment de flexion et de sa dérivée. En revanche, en employant le théorème du Castigliano normal, nous intégrons le carré du moment de flexion. Puisque la dérivée est une expression plus courte que le moment lui-même, ce procédé est beaucoup plus simple.

3.9 Charge d'impact

La réaction de la barre au disque en chute est évidemment très compliquée, et une analyse complète et précise exige l'utilisation de techniques mathématiques avancées. Cependant, nous pouvons effectuer une analyse approximative en employant le concept de l'énergie de déformation et effectuer plusieurs hypothèses de simplification.

Commençons par considérer l'énergie du système juste avant que le disque est relâché. L'énergie potentielle du disque par rapport à la hauteur du plateau est $M * g * h$,

où g est l'accélération de la pesanteur. Cette énergie potentielle est convertie en énergie cinétique pendant la chute du disque. A l'instant où le disque heurte le plateau, son énergie potentielle par rapport à la hauteur du plateau est égale à zéro et son l'énergie cinétique est $\frac{M*v^2}{2}$, où $v = \sqrt{2g * h}$ est sa vitesse.



3.10 Allongement maximal de la barre

L'allongement maximal δ_{max} dans la figure peut être obtenu à partir du principe de conservation d'énergie en égalisant l'énergie potentielle perdue par la masse en chute à l'énergie de déformation totale accumulée par la barre.

L'énergie potentielle perdue est $P*(h+\delta_{max})$, où P est le poids du disque et δ_{max} son déplacement maximal. L'énergie de déformation de la barre est $E*S*\delta_{max}^2/2L$, où $E*S$ est la rigidité axiale et L la longueur de la barre. Ainsi, on obtient l'équation suivante

$$P(h + \delta_{max}) = \frac{E*I*\delta_{max}^2}{2L} \tag{3.13}$$

Cette équation est quadratique en δ_{max} et peut être résolue pour obtenir la racine positive, le résultat est:

$$\delta_{max} = \frac{P*L}{E*S} + \left[\left(\frac{P*L}{E*S} \right)^2 + 2h * \left(\frac{P*L}{E*S} \right) \right]^{1/2} \tag{3.14}$$

Notons que l'allongement maximal de la barre augmente si le poids du disque ou la hauteur de chute augmente. L'allongement diminue si la rigidité $E*S/L$ augmente.

L'équation précédente peut être écrite sous une forme plus simple par l'introduction de la notation:

$$\delta_{\max} = \delta_{\text{st}} + (\delta_{\text{st}}^2 + 2h * \delta_{\text{st}})^{1/2} \quad (3.15)$$

Ou:

$$\delta_{\max} = \delta_{\text{st}} * \left[1 + \left(1 + \frac{2h}{\delta_{\text{st}}} \right)^{1/2} \right] \quad (3.16)$$

De cette équation on voit que l'allongement de la barre sous l'impact de la charge est beaucoup plus grand que si la même charge était appliquée statiquement.

Supposons, par exemple, que la hauteur h soit 40 fois le déplacement statique δ_{st} , l'allongement maximal serait alors égal à 10 fois l'allongement statique.

Quand la hauteur h est grande comparée à l'allongement statique, on peut négliger les termes 1 du côté droit dans l'équation (3.16) et obtenir:

$$\delta_{\max} = \sqrt{2h * \delta_{\text{st}}} = \sqrt{\frac{M*v^2*L}{E*S}} \quad (3.17)$$

Où :

$M=P/g$ et $v = \sqrt{2g * h}$ est la vitesse de la masse en chute quand elle heurte le plateau.

Cette équation peut également être obtenue directement à partir de l'équation (3.13) en négligeant δ_{\max} du côté gauche de l'équation et la résoudre alors pour déterminer δ_{\max} .

En raison des termes négligés, les valeurs de δ_{\max} prévues par l'équation (3.17) sont toujours inférieures que celles obtenues à partir de l'équation (3.16).

3.11 Contrainte maximale dans la barre

La contrainte maximale peut être prévue facilement à partir de l'allongement maximal parce qu'on suppose que la distribution des contraintes est uniforme dans toute la longueur de la barre. De l'équation générale $P*L/E*S = \sigma*L/E$, nous savons que :

$$\sigma_{\max} = \frac{E * \delta_{\max}}{L} \quad (3.18)$$

La substitution dans l'équation (2.2), on obtient l'équation suivante pour la contrainte de traction maximale :

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} + \left[\left(\frac{P}{S} \right)^2 + \left(\frac{2P*h*E}{S*L} \right) \right]^{1/2} \quad (3.19)$$

L'introduction de la notation :

$$\sigma_{st} = \frac{P}{S} = \frac{M \cdot g}{S} = \frac{E \cdot \delta_{st}}{L} \quad (3.20)$$

Où:

σ_{st} : est la contrainte quand la charge agit statiquement, nous pouvons écrire l'équation (2.7) sous la forme suivante :

$$\sigma_{max} = \sigma_{st} + \left(\sigma_{st}^2 + \frac{2h \cdot E}{L} * \sigma_{st} \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{st} * \left[1 + \left(1 + \frac{2h \cdot E}{L * \sigma_{st}} \right)^{1/2} \right] \quad (3.22)$$

Cette équation est analogue à l'équation (3.16) et montre encore que la charge d'impact produit des effets beaucoup plus grands que quand la même charge est appliquée statiquement.

Dans le cas où la hauteur h est grande comparée à l'allongement de la barre (en comparaison avec l'équation (3.17), on obtient :

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{2h \cdot E * \sigma_{st}}{L}} = \sqrt{\frac{M * v^2 * E}{S * L}} \quad (3.23)$$

3.12 Facteur d'impact

Le rapport de la réponse dynamique d'une structure à la réponse statique (pour la même charge) est connu sous le nom de facteur d'impact. Par exemple, le facteur d'impact pour l'allongement de la barre est le rapport de l'allongement maximal et l'allongement statique :

$$\text{Facteur d'impact} = \frac{\delta_{max}}{\delta_{st}} \quad (3.23)$$

Ce facteur représente la valeur par laquelle l'allongement statique est amplifié par les effets dynamiques de l'impact.

Des équations analogues à l'équation (3.23) peuvent être écrites pour d'autres facteurs d'impact, tels que le facteur d'impact des contraintes dans la barre (rapport de σ_{max} et σ_{st}). Quand le disque tombe d'une hauteur considérable, le facteur d'impact peut être très grand à savoir 100 ou plus.

3.13 Charge soudainement appliquée

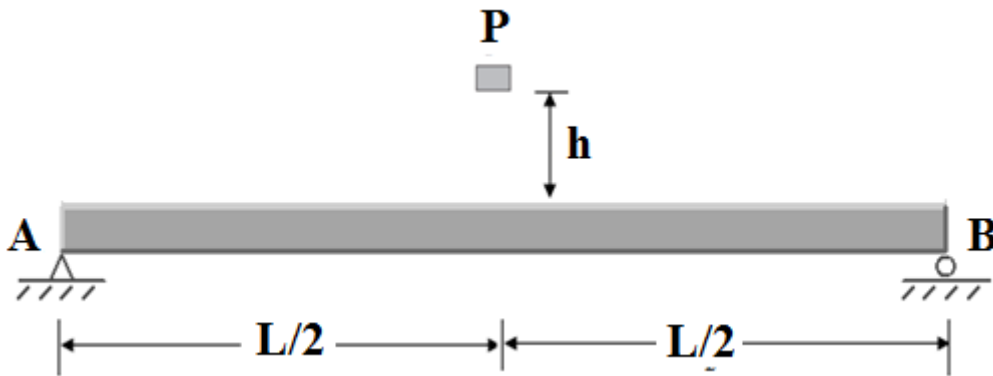
Quand un disque est relâché soudainement de son point de contact avec plateau. Au début l'allongement de la barre et la contrainte dans la barre sont nuls, mais le mouvement du disque vers le bas est assuré sous l'action de son propre poids. Pendant ce mouvement la barre s'allonge et sa force de résistance augmente graduellement. Le mouvement continue jusqu'à ce qu'à un certain instant où la force de résistance égale

juste P , poids du disque. A cet instant particulier l'allongement statique de la barre est atteint δ_{st} . Cependant, le disque a maintenant une certaine énergie cinétique, qu'il a acquise pendant le déplacement δ_{st} de haut en bas. Par conséquent, le disque continue à descendre jusqu'à ce que sa vitesse soit s'annule par la force de résistance de la barre. L'allongement maximal pour cette condition est obtenu à partir de l'équation (3.16) en plaçant h égal à zéro, ainsi :

$$\delta_{st} = 2\delta_{max} \quad (3.24)$$

3.14 Déplacements produits par l'impact en flexion

Nous allons maintenant étudier l'impact d'un objet tombant sur une poutre. Nous allons déterminer la flèche dynamique de la poutre en égalisant l'énergie potentielle perdue par la masse en chute à l'énergie de déformation accumulée par la poutre. Cette méthode approximative est similaire au cas d'une masse heurtant une barre axialement chargée.

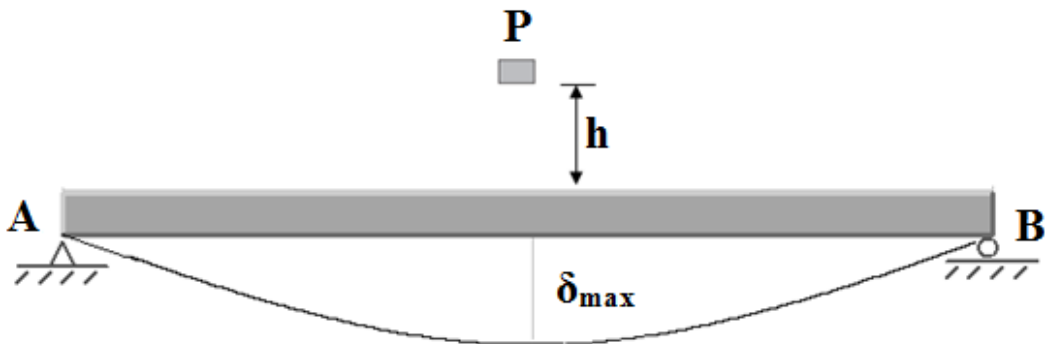


La plupart des hypothèses décrites auparavant s'appliquent aux poutres aussi bien qu'aux barres axialement chargées. Certaines de ces hypothèses sont comme suit:

- Le poids en chute colle à la poutre et se déplace avec elle,
- Aucune perte d'énergie ne se produise,
- La poutre se comporte d'une façon linéaire élastique,
- La forme fléchie de la poutre est identique sous une charge dynamique que sous une charge statique.

L'énergie potentielle de la poutre due à son changement est relativement petite et peut être négligée. Généralement ces hypothèses sont raisonnables si la masse de l'objet en chute est très grande comparée à la masse de la poutre. Autrement, cette analyse approximative est inadmissible et une analyse plus détaillée est exigée.

Comme exemple, nous considérerons la poutre simple AB montré dans figure. La poutre est heurtée en son point médian par un corps en chute libre de masse M et de poids P . Basé sur les idéalizations précédentes, nous pouvons supposer que toute l'énergie potentielle perdue par le corps pendant sa chute est transformée en énergie de déformation élastique qui est emmagasinée dans la poutre. Puisque la distance par à partir de laquelle le corps tombe est $h + \delta_{\max}$, où h est la hauteur au-dessus de la poutre et δ_{\max} est le fléchissement dynamique maximal de la poutre, l'énergie potentielle perdue est:



$$\text{L'énergie potentielle} = P \cdot (h + \delta_{\max}) \tag{3.25}$$

L'énergie de déformation stockée par la poutre peut être déterminée en utilisant l'équation suivante:

$$U = \int \frac{E \cdot I}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \cdot dx \tag{3.26}$$

L'équation de la déformée pour une poutre simple soumise à une charge concentrée agissant au point médian est :

$$v = \frac{P \cdot x}{48 E \cdot I} (3L^2 - 4x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \tag{3.27}$$

En outre, la flèche maximale de la poutre est :

$$\delta_{\max} = \frac{P \cdot L^3}{48 E \cdot I} \tag{3.28}$$

Après l'élimination de la charge P des équations (3.27) et (3.28), nous obtenons l'équation de la déformée en termes de flèche maximale :

$$v = \frac{\delta_{\max} \cdot x}{L^3} \cdot (3L^2 - 4x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \tag{3.29}$$

Prenant deux dérivés, nous trouvons :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{24\delta_{\max} * x}{L^3} \quad (3.30)$$

En conclusion, nous substituons la dérivée seconde dans l'équation (3.26) et on obtient l'expression suivante pour l'énergie de déformation de la poutre en termes de flèche maximale:

$$U = 2 \int_0^{L/2} \frac{E * I}{2} * \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 * dx = E * I \int_0^{L/2} \left(\frac{24\delta_{\max} * x}{L^3}\right)^2 * dx = \frac{24 * E * I * \delta_{\max}^2}{L^3} \quad (3.31)$$

En égalisant l'énergie potentielle perdue par la masse en chute (équation 2.14) à l'énergie de déformation acquise par la poutre (équation 2.20), on obtient :

$$P * (h + \delta_{\max}) = \frac{24 * E * I * \delta_{\max}^2}{L^3} \quad (3.32)$$

Cette équation est quadratique en δ_{\max} et peut être résolue pour déterminer sa racine positive :

$$\delta_{\max} = \frac{P * L^3}{48E * I} + \left[\left(\frac{P * L^3}{48E * I}\right)^2 + 2h * \left(\frac{P * L^3}{48E * I}\right) \right]^{1/2} \quad (3.33)$$

On voit que le déplacement dynamique maximal augmente si le poids de l'objet en chute ou la hauteur de la chute augmente, et diminue si la rigidité $E * I / L^3$ de la poutre augmente.

Pour simplifier l'équation précédente, on désigne la flèche statique de la poutre dû au poids P par δ_{st} :

$$\delta_{st} = \frac{P * L^3}{48E * I} \quad (3.34)$$

Alors le déplacement dynamique maximal devient :

$$\delta_{\max} = \delta_{st} + \left(\delta_{st}^2 + 2h * \delta_{st}\right)^{1/2} \quad (3.35)$$

Cette équation prouve que le déplacement dynamique maximal est toujours plus grand que le déplacement statique.

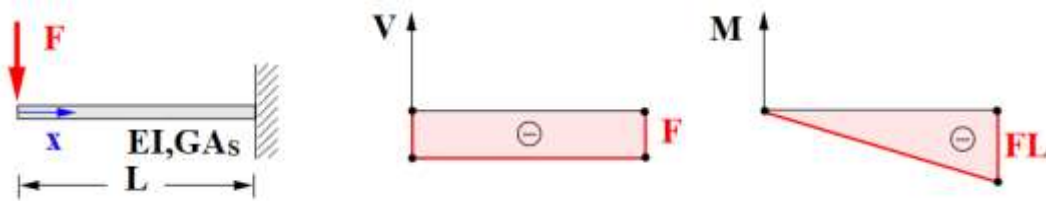
Si la hauteur h est égale zéro, cela signifie que la charge est appliquée soudainement mais sans chute libre, le déplacement dynamique est égal au double du déplacement statique. Si h est très grand comparé au déplacement statique, alors le terme contenant h dans l'équation (3.34) est prédominant, et l'équation peut être simplifié à :

$$\delta_{\max} = \sqrt{2h * \delta_{st}} \quad (3.36)$$

3.15 Exercices corrigés

Exercice 1

Une poutre est soumise à une force F , comme le montre sur la figure. Calculer le déplacement au point d'application de la force en tenant compte le cisaillement de la poutre.



Solution

D'après le principe de conservation de l'énergie :

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_0^L \frac{M^2}{EI} * dx + \int_0^L \frac{V^2}{G * S^*} * dx \right]$$

$$\frac{1}{2} Ff = \frac{1}{2} \left[\int_0^L \frac{M^2}{E * I} * dx + \int_0^L \frac{V^2}{G * A_S} * dx \right]$$

On a:

$$V = -F \quad \text{et} \quad M = -F * x$$

On obtient :

$$\frac{1}{2} F * f = \frac{1}{2} \left[\int_0^L \frac{F^2 * x^2}{E * I} * dx + \int_0^L \frac{F^2}{G * A_S} * dx \right]$$

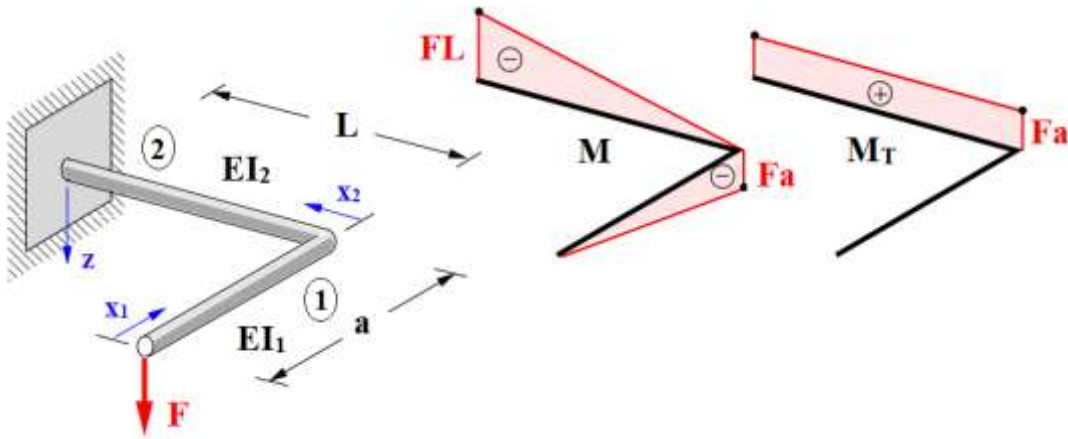
$$F * f = \int_0^L \frac{F^2 * x^2}{E * I} * dx + \int_0^L \frac{F^2}{G * A_S} * dx$$

$$F * f = F^2 * \frac{l^3}{3E * I} + F^2 * \frac{l}{G * A_S}$$

$$f = F \frac{l^3}{3E * I} + F * \frac{l}{G * A_S}$$

Exercice 2

Une barre inclinée est soumise à une force F, comme le montre sur la figure. Calculer le déplacement au point d'application de la force.



Solution

La barre est en flexion et en torsion d'après le principe de conservation de l'énergie :

$$U = \frac{1}{2} \left[\int \frac{M^2}{E * I} * dx + \int \frac{M_T^2}{G * I_T} * dx \right]$$

$$\frac{1}{2} F * f = \frac{1}{2} \left[\int \frac{M^2}{E * I} * dx + \int \frac{M_T^2}{G * I_T} * dx \right]$$

Flexion de la section 1 on a : $M_1 = - F * x_1$

Flexion de la section 2 on a : $M_2 = - F * x_2$

La barre est soumise a un moment de torsion : $M_{T2} = - F * a$

$$\frac{1}{2} Ff = \frac{1}{2} \left[\int_0^a \frac{F^2 * x_1^2}{E * I_1} * dx_1 + \int_0^L \frac{F^2 * x_2^2}{E * I_2} * dx_2 + \int_0^L \frac{F^2 * a^2}{G * I_T} * dx_2 \right]$$

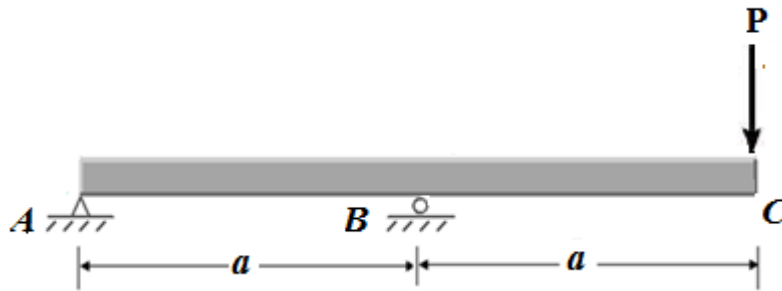
$$Ff = \frac{F^2}{E * I_1} * \frac{a^3}{3} + \frac{F^2}{E * I_2} * \frac{L^3}{3} + \frac{F^2 * a^2 * L}{G * I_T}$$

$$f = F \left[\frac{a^3}{3E * I_1} + \frac{L^3}{3E * I_2} + \frac{a^2 * L}{G * I_T} \right]$$

Exercice 3

Pour la poutre en porte à faux chargée comme représenté dans la figure .

Calculer le déplacement du point C.

**Solution**

Calcul des réactions :

$$\sum F = 0$$

$$R_A - R_B = P$$

$$\sum M/B = 0$$

$$R_A * a + P * a = 0$$

$$R_A = -P \text{ et } R_B = 2P$$

Moments fléchissant et dérivées partielles

Tronçon de A à B ($0 \leq x \leq a$)

$$M_{fAB} = R_A * x = -Px \text{ et } \frac{\partial M_{fAB}}{\partial P} = -x$$

Tronçon de C à B ($0 \leq x \leq a$) :

$$M_{fBC} = R_B * x = 2Px \text{ et } \frac{\partial M_{fBC}}{\partial P} = 2x$$

Calcul du déplacement du point C en utilisant le théorème de Castigliano modifié :

$$\delta_C = \frac{1}{E * I} \int_0^a -P * x * (-x) * dx + \frac{1}{EI} \int_0^a 2P * x * (2x) * dx$$

$$\delta_C = \frac{2P * a^3}{3E * I} = 32 \text{ mm}$$

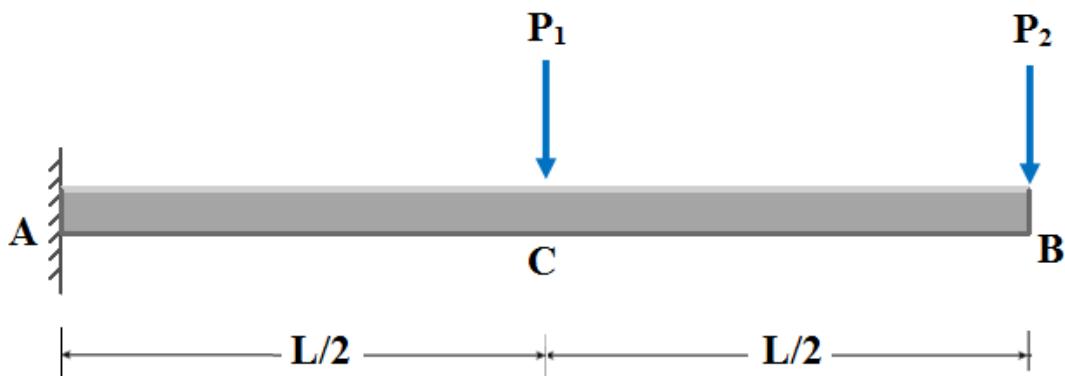
Exercice 4

Une poutre ACB de longueur $L=6\text{m}$ de section carrée $100 \times 100 \text{ mm}^2$ supporte deux charges concentrées P_1 et P_2 .

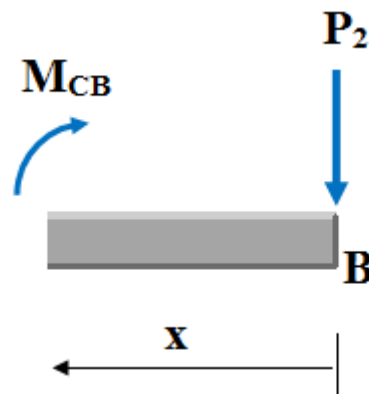
-Déterminer les moments fléchissants M_{BC} et M_{CA} .

-Déterminer les flèches aux points C et B respectivement en utilisant la forme modifiée du théorème de Castigliano).

On donne : $P_1= 6 \text{ kN}$ et $P_2=8 \text{ kN}$ et $E=210 \text{ GPa}$.

**Solution**

Zone CB : $0 \leq x \leq L/2$

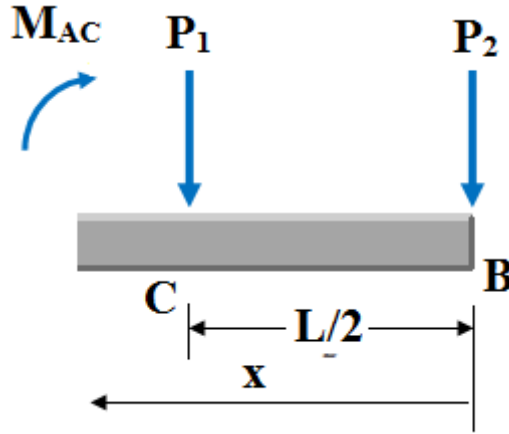


Moments fléchissant et dérivées partielles dans le tronçon CB:

$$M_{CB} = -P_2 * x$$

$$\frac{\partial M_{CB}}{\partial P_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial M_{CB}}{\partial P_2} = -x$$

Zone AC : $L/2 \leq x \leq L$



Moments fléchissant et dérivées partielles dans le tronçon AB :

$$M_{AC} = -P_1 * \left(x - \frac{L}{2}\right) - P_2 * x$$

$$\frac{\partial M_{AC}}{\partial P_1} = \frac{L}{2} - x \text{ et } \frac{\partial M_{AC}}{\partial P_2} = -x$$

Calcul du déplacement δ_C du point C en utilisant le théorème de CASTIGLIANO modifié :

$$\delta_C = \frac{1}{E * I} \int_0^{L/2} (M_{CB}) * \left(\frac{\partial M_{CB}}{\partial P_1}\right) * dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L (M_{AC}) * \left(\frac{\partial M_{AC}}{\partial P_1}\right) * dx$$

$$\delta_C = 0 + \frac{1}{E * I} \int_{L/2}^L \left[-P_1 * \left(x - \frac{L}{2}\right) - P_2 * x\right] * \left(\frac{L}{2} - x\right) * dx = \frac{L^3}{48E * I} * (2P_1 + 5P_2)$$

Calcul du déplacement δ_B du point B en utilisant le théorème de CASTIGLIANO modifié :

$$\delta_B = \frac{1}{E * I} \int_0^{L/2} (M_{CB}) * \left(\frac{\partial M_{CB}}{\partial P_2}\right) * dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L (M_{AC}) * \left(\frac{\partial M_{AC}}{\partial P_2}\right) * dx$$

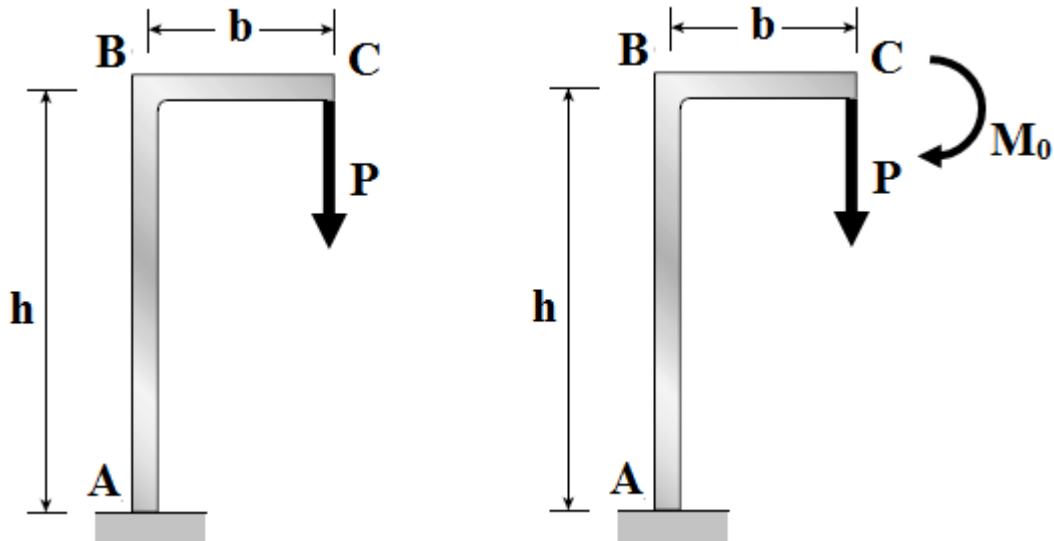
$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{1}{E * I} \int_0^{L/2} [-P_2 x] * (x) * dx + \frac{1}{E * I} \int_{L/2}^L \left[-P_1 * \left(x - \frac{L}{2}\right) - P_2 * x\right] * (-x) * dx \\ &= \frac{L^3}{48E * I} (5P_1 + 16P_2) \end{aligned}$$

$$\delta_B = 0.133714 \text{ m et } \delta_C = 0.406286 \text{ m}$$

Exercice 5

Le portique ABC supporte une charge concentrée P au point C.

Déterminer la flèche δ_C et la rotation θ_C au point C en utilisant le théorème de Castigliano modifié.



Solution

P : Force concentrée appliquée au point C (correspondant au déplacement δ_C)

M_0 : Moment fictif appliquée au point C (correspondant à l'angle de rotation θ_C)

Moment flechissant et dérivées partielles dans le tronçon AB ($0 \leq x \leq h$):

$$M_{AB} = -(P * b + M_0)$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial P} = -b \quad \text{et} \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_0} = -1$$

Moment flechissant et dérivées partielles dans le tronçon BC ($0 \leq x \leq b$):

$$M_{BC} = -(P * x + M_0)$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial P} = -x \quad \text{et} \quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial M_0} = -1$$

Calcul de la flèche δ_C du point C en utilisant le théorème de CASTIGLIANO modifié :

$$\delta_C = \int \left(\frac{M}{EI}\right) * \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right) * dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^h -(P * b + M_0) * (-b) * dx + \frac{1}{EI} \int_0^b -(P * x + M_0) * (-x) * dx$$

Posons $M_0 = 0$:

$$\delta_C = \int_0^h P * b^2 * dx + \frac{1}{E * I} \int_0^b P * x^2 dx = \frac{P * b^2}{3E * I} (3h + b)$$

Calcul de l'angle de rotation θ_C du point C en utilisant le theoreme de CASTIGLIANO modifié :

$$\theta_C = \int \left(\frac{M}{EI}\right) * \left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^h -(P * b + M_0) * (-1) dx + \frac{1}{EI} \int_0^b -(P * x + M_0) * (-1) dx$$

Posons $M_0 = 0$:

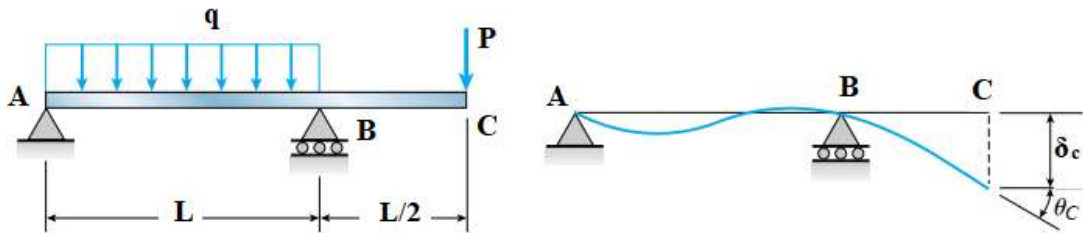
$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^h P * b * dx + \frac{1}{EI} \int_0^b P * b * dx = \frac{P * b}{2EI} * (2h + b)$$

(Dans le sens des aiguilles d'une montre)

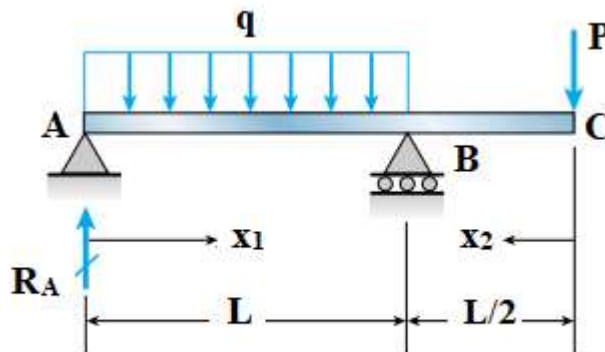
Exercice 6

Une poutre soumise à une charge répartie q en AB et une charge concentrée P à l'extrémité C comme le montre dans la figure.

Déterminer la flèche δ_C et la rotation θ_C au point C en utilisant le théorème de Castigliano modifié.



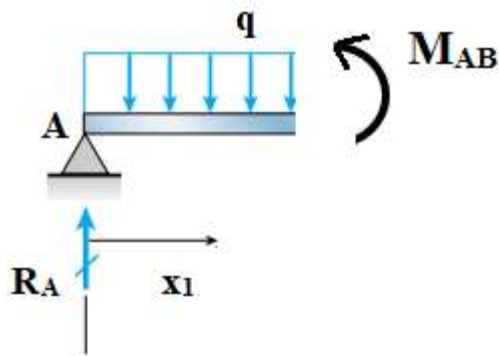
Solution



La réaction au point A

$$R_A = \frac{q * L}{2} - \frac{P}{2}$$

Zone AB : $0 \leq x \leq L$

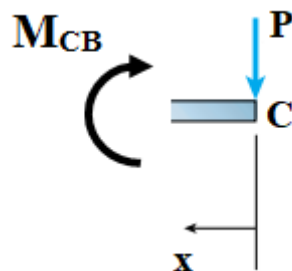


Moments fléchissant dans le tronçon AB:

$$M_{AB} = R_A * x_1$$

$$M_{AB} = R_A * x_1 - \frac{q * x^2}{2} = \frac{q * L * x}{2} - \frac{P * x}{2} - \frac{q * x^2}{2}$$

Zone BC : $0 \leq x \leq L/2$



$$M_{CB} = -P * x$$

Les dérivées partielles des moments fléchissants

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial P} = -\frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial P} = -x \quad (0 \leq x \leq L/2)$$

$$\delta_C = \int \left(\frac{M}{EI} \right) * \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) dx$$

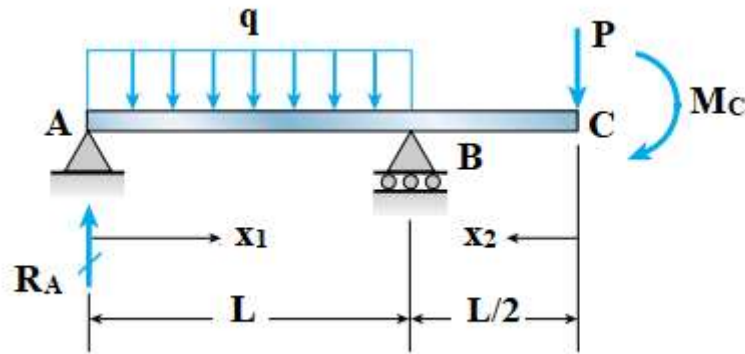
$$\delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L (M_{AB}) * \left(\frac{\partial M_{AB}}{\partial P} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (M_{BC}) * \left(\frac{\partial M_{BC}}{\partial P} \right) dx$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{q * L * x}{2} - \frac{P * x * q * x^2}{2} \right) * \left(-\frac{x}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-P * x) * (-x) dx$$

$$\delta_C = \frac{P * L^3}{8EI} - \frac{q * L^4}{48EI}$$

La rotation θ_C au point C

Pour déterminer l'angle de rotation θ_C on applique un moment fictif M_C au point C



La réaction au point A

$$R_A = \frac{q * L}{2} - \frac{P}{2} - \frac{M_C}{L}$$

Zone AB : $0 \leq x \leq L$

$$M_{AB} = R_A * x - \frac{q * x^2}{2} = \frac{q * L * x}{2} - \frac{P * x}{2} - \frac{q * x^2}{2} - \frac{M_C * x}{L}$$

Zone CB : $0 \leq x \leq L/2$

$$M_{CB} = -P * x - M_C$$

Les dérivées partielles des moment flechissant

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial M_C} = -\frac{x}{L} \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial M_C} = -1 \quad (0 \leq x \leq L/2)$$

$$\begin{aligned} \theta_c &= \int \left(\frac{M}{EI} \right) * \left(\frac{\partial M}{\partial M_c} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{\partial M_{AB}}{\partial M_c} \right) * (M_{AB}) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} - \left(\frac{\partial M_{BC}}{\partial M_c} \right) * (M_{BC}) dx \\ \theta_c &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{x}{L} \right) * \left(\frac{qL * x}{2} - \frac{P * x}{2} - \frac{q * x^2}{2} - \frac{M_c * x}{L} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-1) * (-P * x - M_c) dx \end{aligned}$$

Posons $M_c = 0$

$$\begin{aligned} \theta_c &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{x}{L} \right) \left(\frac{qL * x}{2} - \frac{P * x}{2} - \frac{q * x^2}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-1)(-P * x) dx \\ \theta_c &= \frac{7P * L^2}{24EI} - \frac{q * L^3}{24EI} \end{aligned}$$

QCM 3

1- Energie de déformation en traction égale

- a) $P\Delta$
- b) $2P$
- c) $\frac{1}{2}P\Delta$

2- Pour des matériaux élastiques

- a) L'élongation augmente linéairement avec l'accroissement de la charge
- b) L'élongation diminue linéairement avec l'accroissement de la charge
- c) L'élongation augmente linéairement avec la diminution de la charge

3- Le travail effectuer pour déformer le matériau égal à

- a) volume
- b) l'aire sous la courbe

4- Le théorème de CASTIGLIANO le déplacement égale

- a) La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à la force
- b) La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport au moment

5- La méthode de la charge fictive est pour calculer le déplacement d'un point

- a) Où il n'y a pas de force
- b) Où il y a de force

6- L'énergie de déformation en flexion d'un élément cylindrique est

- a) $U = \frac{\sigma}{2E} \times \text{volume}$
- b) $U = \frac{\sigma^2}{2E} \times \text{surface}$
- c) $U = \frac{\sigma^2}{2E} \times \text{volume}$

4.1 Introduction

La résolution d'une structure hyperstatique par la méthode des forces consiste à la remplacer par une structure isostatique équivalente en pratiquant des coupures choisies judicieusement ; et à chaque coupure :

- Faire introduire une force correspondante X_i .
- Ecrire une condition de compatibilité des déformations.

Si la structure hyperstatique est de degré k , alors on aura k coupures à effectuer, k forces à introduire (X_i inconnues) et k équations de compatibilité à écrire.

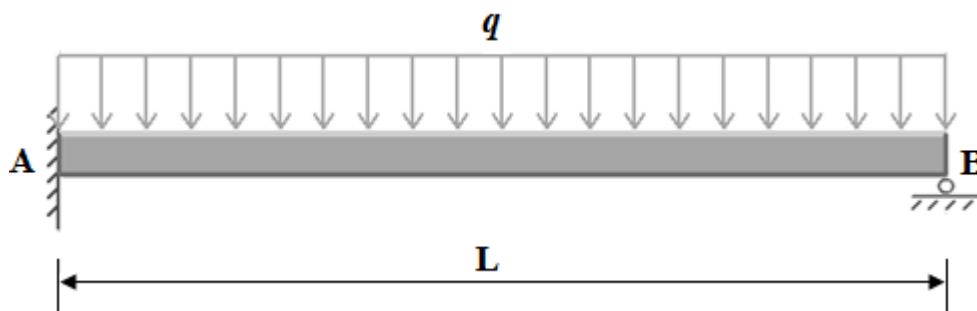
4.2 Structures isostatiques équivalentes

Soit une structure hyperstatique (S) de degré d'hyperstaticité k , soumise à un chargement initial X_0 connu. On peut rendre (S) une structure isostatique en pratiquant k coupures et en introduisant k forces inconnues ($X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_k$). Cette nouvelle structure est une structure isostatique équivalente à (S) qu'on note (S_0), dite aussi structure isostatique associée à (S).

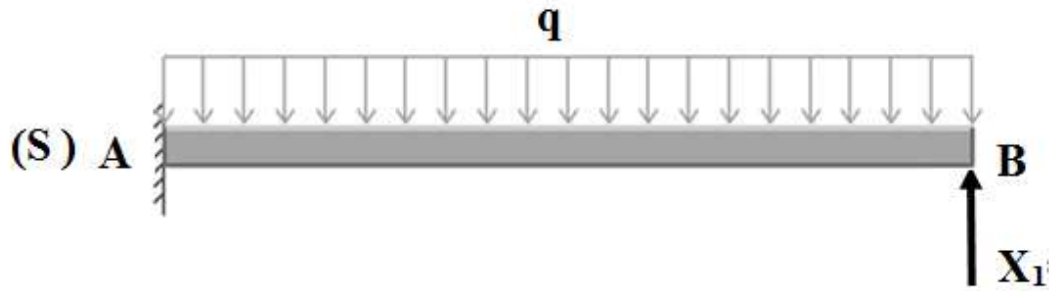
Pour une structure hyperstatique, il existe plusieurs structures isostatiques équivalentes.

4.3 Cas d'une structure hyperstatique de degré 1

Considérons une poutre de longueur L , de rigidité en flexion $EI = \text{constante}$, encadrée en A, sur simplement appuyée en B et soumise à une charge uniformément répartie d'intensité q . Soit (S) cette structure :



Cette structure est hyperstatique de degré 1. Choisissons pour inconnue hyperstatique la réaction au niveau de l'appui en B désignée par X_1 .

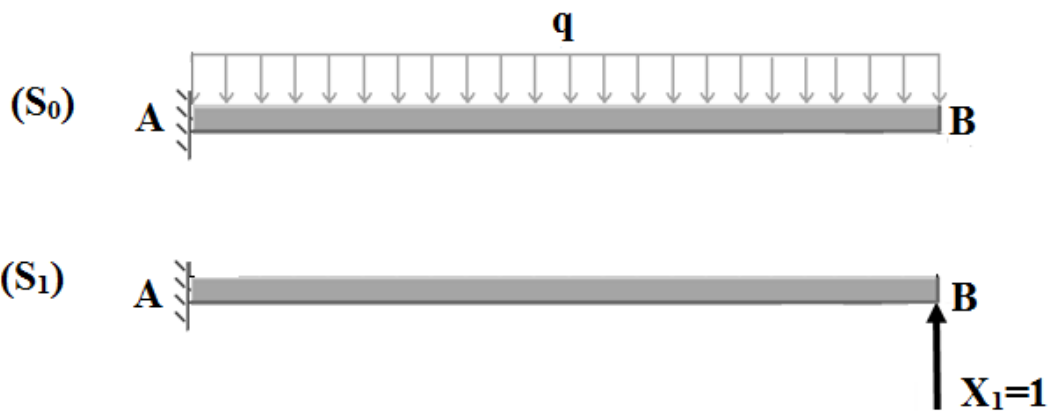


La structure (S') est la **structure isostatique associée** à (S).

(S') sera identique à (S) si l'inconnue hyperstatique X_1 est telle que le déplacement vertical du point B sous l'effet de la charge répartie q et de X_1 est nul (la liaison l'empêche).

Soit $\Delta_1 = 0$.

En utilisant le principe de superposition, on peut écrire que (S') est la superposition de 2 systèmes :



$$(S') = (S_0) + (S_1)$$

(S₀) : structure soumise uniquement à la charge répartie.

(S₁) : structure soumise à l'inconnue hyperstatique X_1 .

(S') est identique à (S) si on rajoute la condition sur le déplacement $\Delta = 0$.

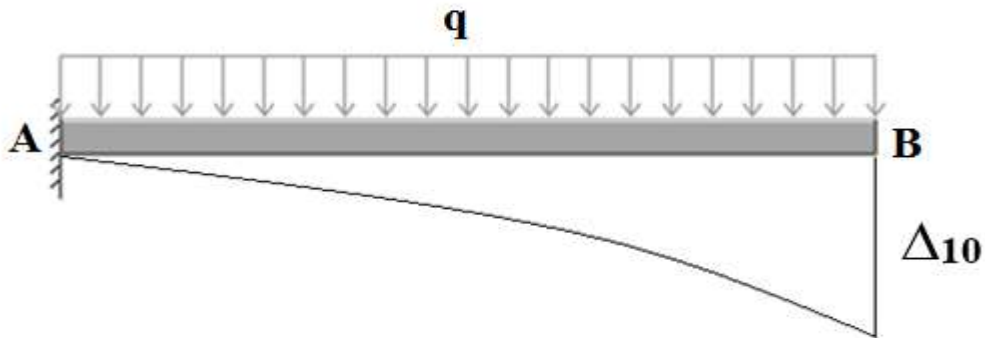
On a donc :

$$\begin{cases} (S) = (S_0) + (S_1) \\ \Delta_1 = 0 \end{cases}$$

Traduction au niveau des déplacements :

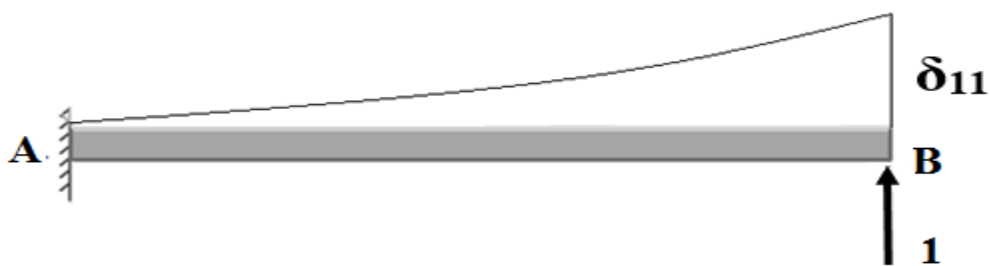
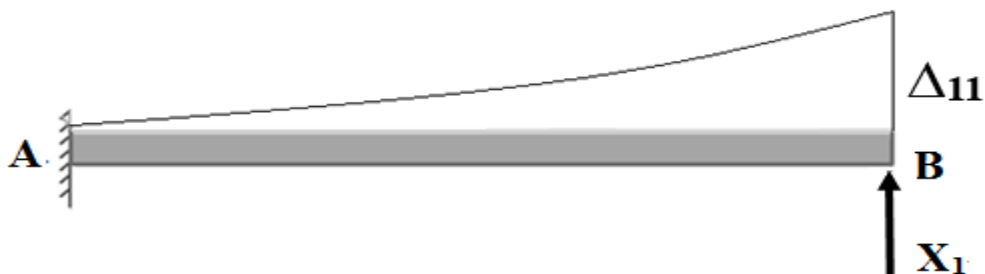
$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} = 0 \tag{4.1}$$

Δ_{10} : déplacement dans le sens de X_1 dû aux charges extérieures (structure S_0).



Δ_{11} : déplacement dans le sens de X_1 dû à X_1 (structure S_1).

$$\Delta_{11} = \delta_{11} \times X_1 \tag{4.2}$$



On peut donc écrire : $\Delta_{10} + \delta_{11} \times X_1 = 0$

$$\Delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \tag{4.3}$$

Calcul de Δ_{10} et de δ_{11} :

Pour cela, on applique le théorème de la charge unité :

$$\Delta_{10} = \int_{\text{structure}} \frac{\overline{M_1(x)M_0(x)}}{EI} dx \tag{4.4}$$

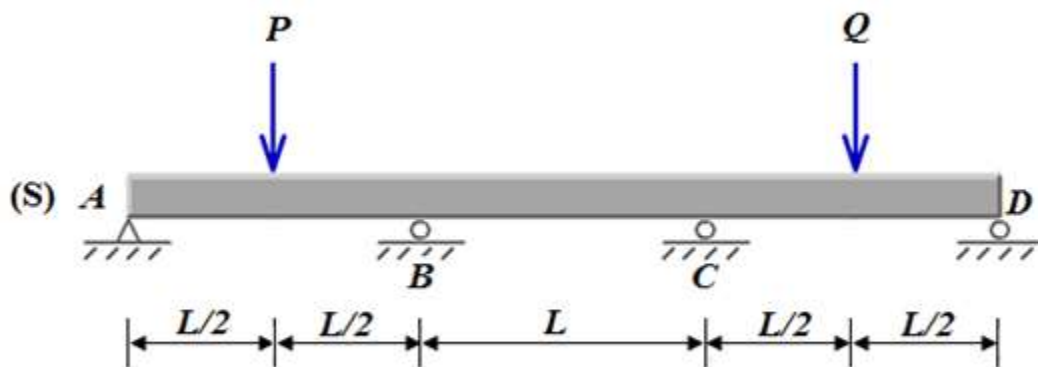
$$\delta_{11} = \int_{\text{structure}} \frac{\overline{M_1(x)M_1(x)}}{EI} dx \tag{4.5}$$

$\overline{M_0(x)}$: Moment fléchissant dû au chargement extérieur (ici q),

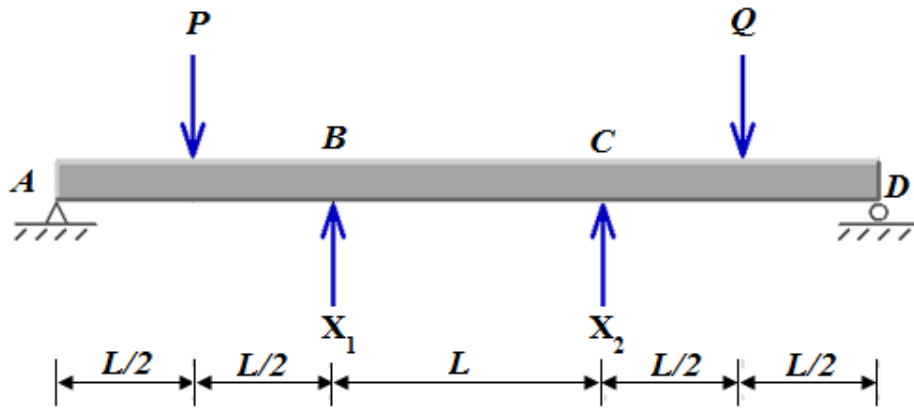
$\overline{M_1(x)}$: Moment fléchissant dû à $X = 1$.

4.4 Structures hyperstatiques de degré 2

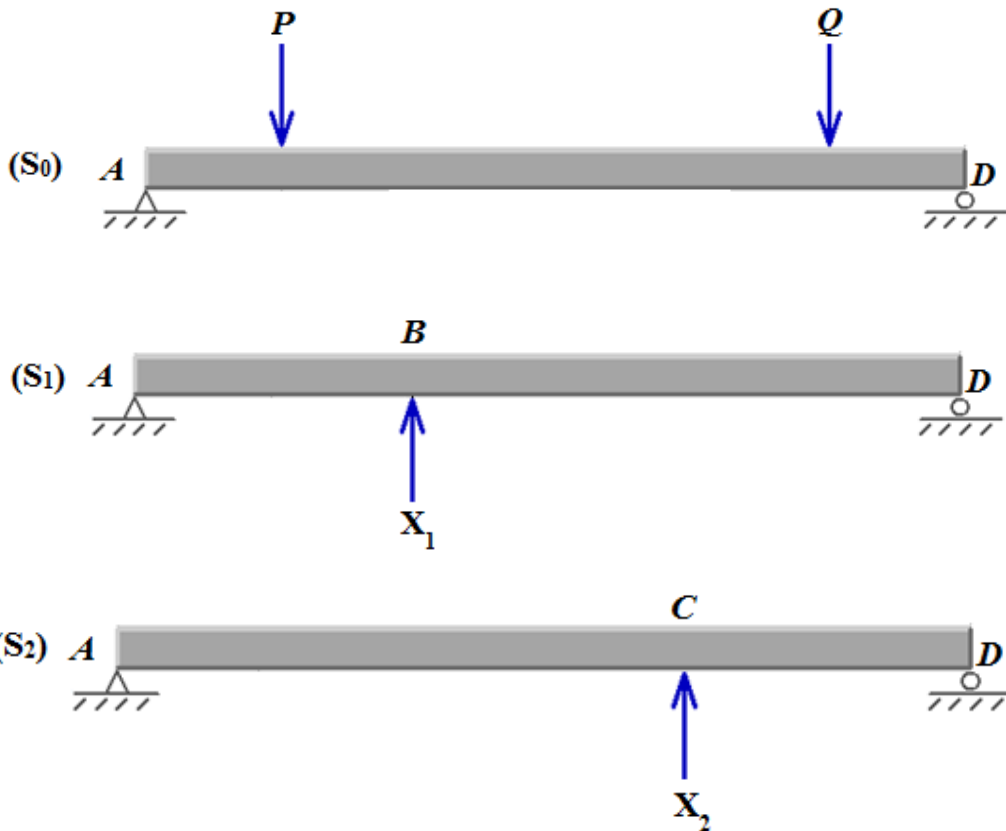
Le principe reste identique à ce que nous venons de voir. Considérons une structure hyperstatique de degré 2 :



Le nombre d'inconnues hyperstatiques étant égal au degré d'hyperstaticité. Lorsqu'on rend la structure isostatique, on fait apparaître 2 inconnues hyperstatiques X_1 et X_2 , ainsi que deux conditions sur les déplacements en B et C :



En appliquant le principe de superposition, on peut écrire :



$$(S) = (S_0) + (S_1) + (S_2)$$

La traduction de ce principe au niveau des déplacements donne :

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} + \Delta_{12} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + \Delta_{21} + \Delta_{22} = 0$$

Ce système s'écrit encore :

$$\begin{cases} \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0 \\ \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0 \end{cases}$$

On a un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

Remarque

- 1.-Théorème réciprocité de Maxwell-Betti, on a $\delta_{21} = \delta_{12}$
- 2.-Les inconnues hyperstatiques X_i peuvent être un effort ou un couple.

4.5 Structures hyperstatiques de degré n

Etant donné une structure hyperstatique de degré n, soumise à des forces extérieures. Les équations canoniques de la méthode des forces s'écrivent sous la forme matricielle :

$$[\delta_{ij}]\{X_i\} + [\Delta_{i0}] = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et } j = 1, \dots, n$$

Ou sous forme la forme analytique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots X_n \delta_{1n} = 0 \\ \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots X_n \delta_{2n} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_{n0} + X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots X_n \delta_{nn} = 0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Chacune de ces équations exprime la condition selon laquelle dans un système hyperstatique, le déplacement généralisé correspondant à chacune des forces généralisées superflues inconnues $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ est égal à zéro.

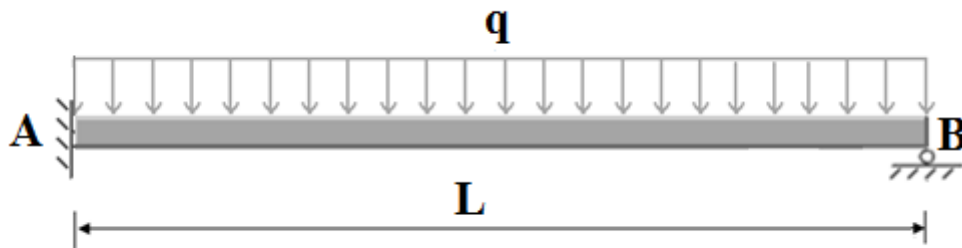
- $[\delta_{ij}]$: Matrice des coefficients de flexibilité
- δ_{ij} : coefficient de flexibilité c'est le déplacement produit dans la section (i) selon la direction de la force X_i causée par une force $X_j = 1$.
- Δ_{i0} : le déplacement produit dans la section (i) du système de base sous l'effet des charges extérieures.
- Pour la détermination des déplacements généralisés, on utilise les intégrales de Mohr ou Veretchaguine (méthode graphique).

4.6 Exercice Corrigées

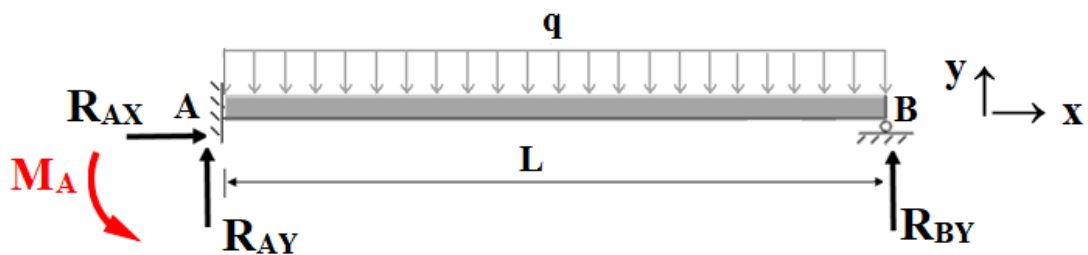
Exercice 1

Pour la poutre représentée dans la figure. Déterminer les réactions au niveau des appuis.

On donne : $I = 120.10^6 \text{ mm}^4$. $L = 6\text{ m}$, $q = 30 \text{ kN/m}$ et $E = 200\text{ GPa}$.



Solution



La poutre est hyperstatique de degré 1

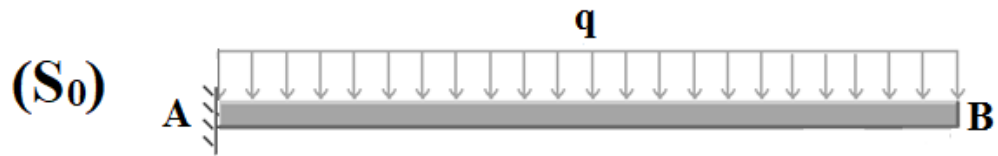
$$\Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = 0$$

$$\Delta_{10} = \int_{\text{structure}} \frac{M_0(x) * \overline{M_1(x)}}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int_{\text{structure}} \frac{\overline{M_1(x)} * \overline{M_1(x)}}{EI} dx$$

$M_0(x)$: Moment fléchissant dû au chargement extérieur (ici q),

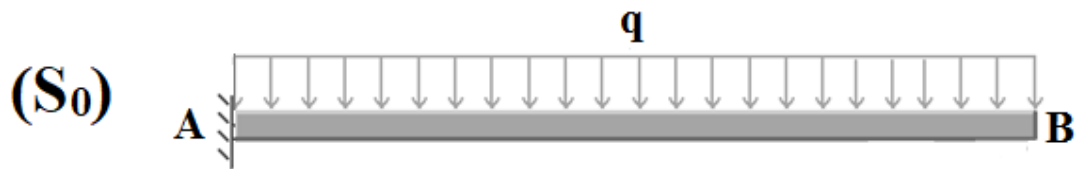
$\overline{M_1(x)}$: Moment fléchissant dû à $X = 1$.



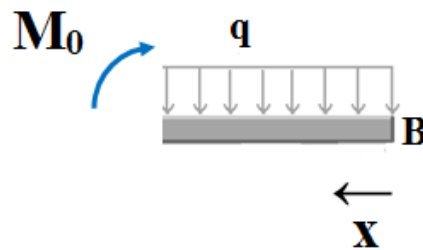
+



Etat 0 : charge extérieure ±0 et X₁=0



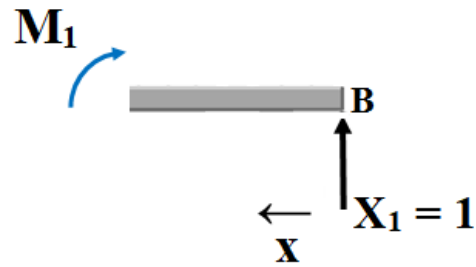
Calcul M₀:Moment fléchissant dû au chargement extérieur



$$M_0 = -\frac{q * x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq L$$

Etat 1 : charge extérieure = 0 et X₁=1





$$M_1 = X_1 * x = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_1 * M_0}{EI} dx = \int_0^L \frac{x * (-\frac{q*x^2}{2})}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \int_0^L -\frac{q * x^3}{2EI} dx$$

$$\Delta_{10} = -\frac{q * L^4}{8EI}$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 * M_1}{EI} dx = \int_0^L \frac{x * x}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{x^2}{EI} dx$$

$$\Delta_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

$$X_1 = -\frac{-\frac{q * L^4}{8EI}}{\frac{L^3}{3EI}}$$

$$X_1 = \frac{3q * L}{8}$$

$$R_{BY} = X_1 = \frac{3q * L}{8}$$

$$\sum F/x = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum M/A = 0$$

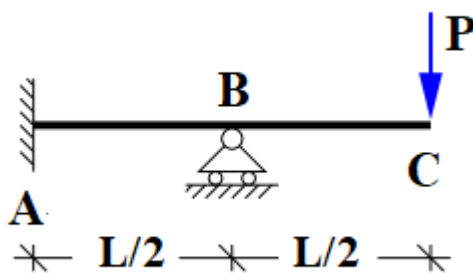
$$M_A + R_{BY} * L - \frac{q * L^2}{2} = 0$$

$$M_A = -\frac{q * L^2}{8}$$

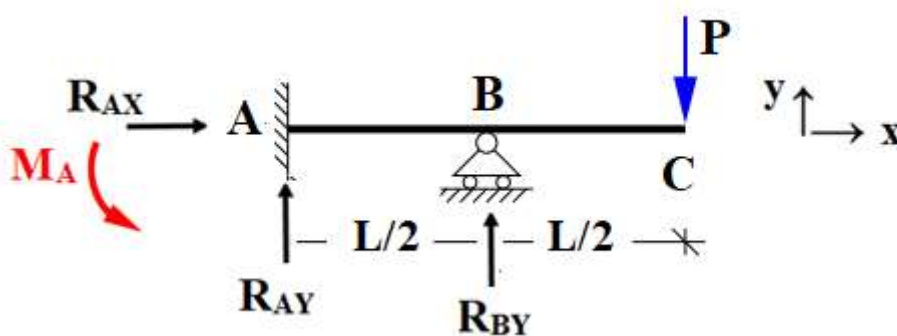
Exercice 2

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastree en A, repose sur un appui simple en B et soumise à une charge constante **P** en C. On donne : **EI = constante**.

En appliquant la méthode des forces, déterminer les réactions au point A et B.



Solution



La poutre est hyperstatique de degré 1

$$\Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = 0$$

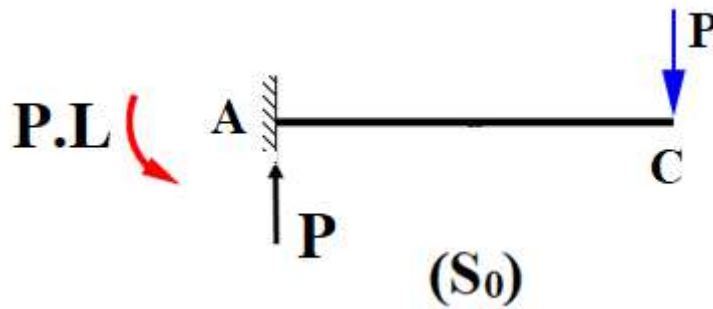
$$\Delta_{10} = \int_{\text{structure}} \frac{M_0(x) * \overline{M}_1(x)}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int_{\text{structure}} \frac{\overline{M}_1(x) * \overline{M}_1(x)}{EI} dx$$

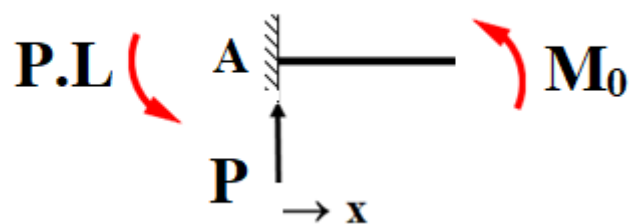
$M_0(x)$: Moment fléchissant dû au chargement extérieur (ici q),

$\overline{M}_1(x)$: Moment fléchissant dû à $X = 1$.

Etat 0 : charge extérieure ± 0 et $X_1=0$

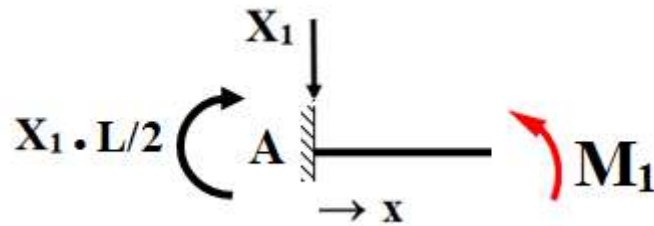


Calcul M_0 : Moment fléchissant dû au chargement extérieur



$$M_0 = P * x - P * L \quad 0 \leq x \leq L$$

Etat 1 : charge extérieur = 0 et $X_1=1$



$$M_1 = X_1 * \frac{L}{2} - X_1 * x = \frac{L}{2} - x \quad (0 \leq x \leq L/2)$$

$$M_1 = 0 \quad (L/2 \leq x \leq L)$$

$$\Delta_{10} = \int_0^{L/2} \frac{M_1 * M_0}{EI} dx = \int_0^{L/2} \frac{(\frac{L}{2} - x) * (P x - PL)}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (\frac{P * L * x}{2} - \frac{P * L^2}{2} + P * L * x - P * x^2) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (\frac{3P * L * x}{2} - \frac{P * L^2}{2} - P * x^2) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{-5PL^3}{48EI}$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 * M_1}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (\frac{L}{2} - x) * (\frac{L}{2} - x) dx$$

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{24EI}$$

$$\Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

$$X_1 = -\frac{\frac{-5PL^3}{48EI}}{\frac{L^3}{24EI}}$$

$$X_1 = \frac{5P}{2}$$

$$R_{BY} = X_1 = \frac{5P}{2}$$

$$\sum F/x = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum F/y = 0 \rightarrow R_{AY} + R_{BY} - P = 0$$

$$R_{AY} = \frac{-3P}{2}$$

$$\sum M/A = 0$$

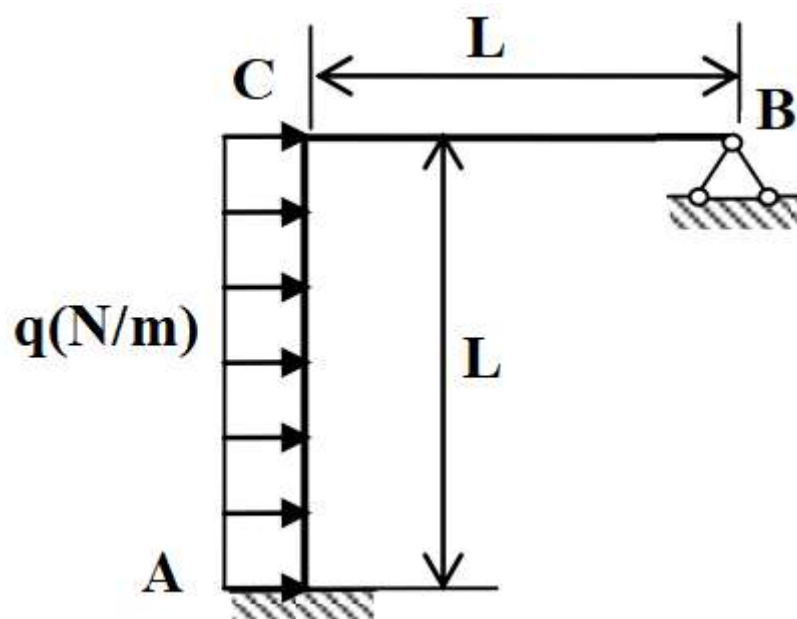
$$M_A + R_{BY} * \frac{L}{2} - P * L = 0$$

$$M_A = -\frac{3PL}{8}$$

Exercice 3

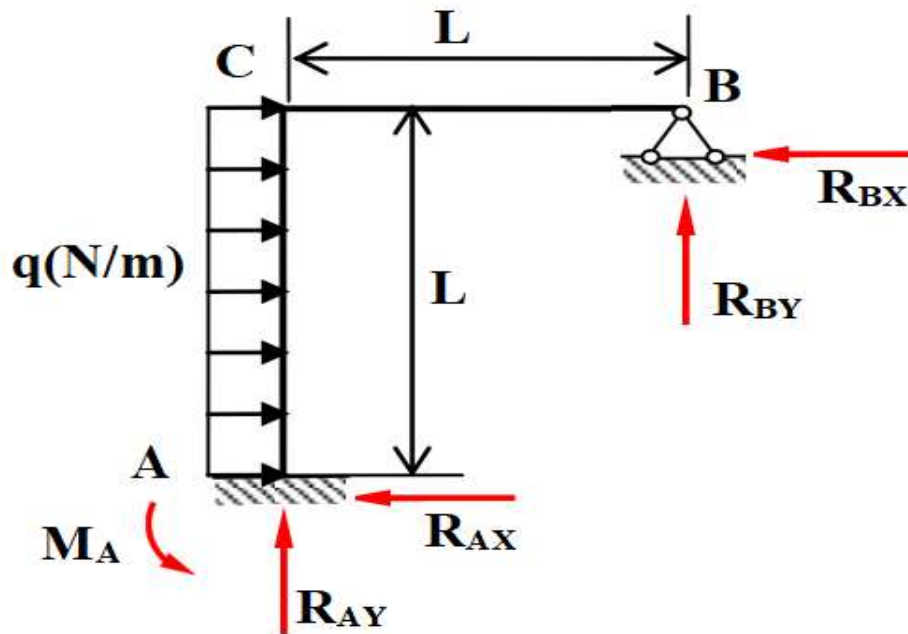
Soit la baree ACB soumise à une charge répartie q dans la partie AC comme le montre dans la figure. Déterminer les réactions en A et B.

On donne : $EI = \text{constant}$.



Solution

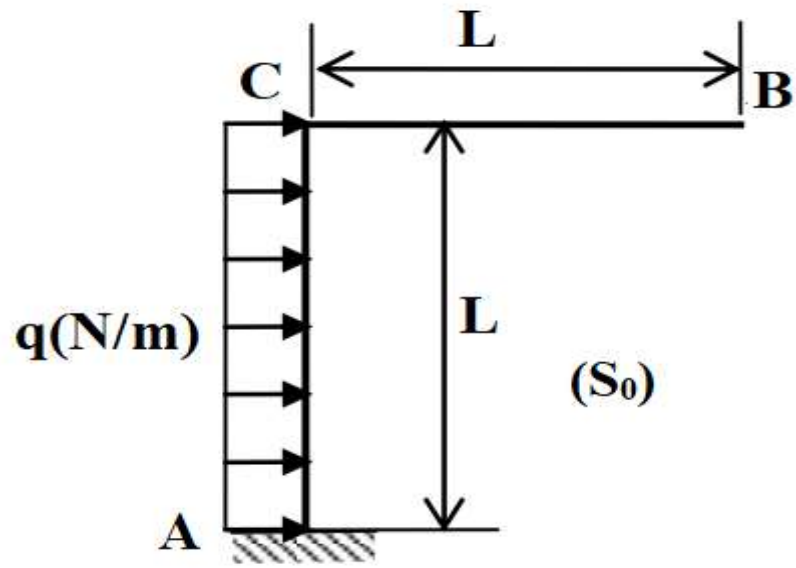
La poutre est hyperstatique de degré 2



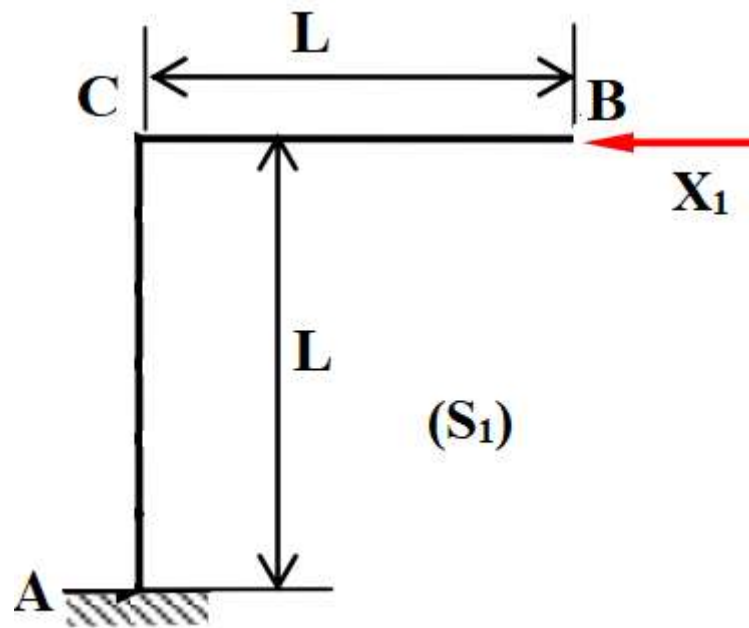
La méthode est illustrée avec l'exemple de problème hyperstatique de degré $n=2$ ci-contre. Ce problème est équivalent à la superposition de $(n+1)$ problèmes isostatiques associés à des conditions cinématiques.

Conditions cinématiques

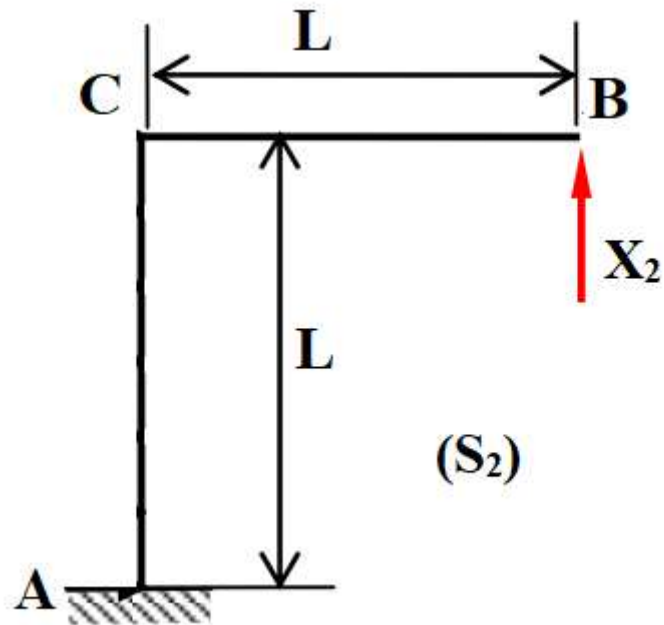
$$\begin{cases} \Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 + \delta_{12} * X_2 = 0 \\ \Delta_{20} + \delta_{21} * X_1 + \delta_{22} * X_2 = 0 \end{cases}$$



+

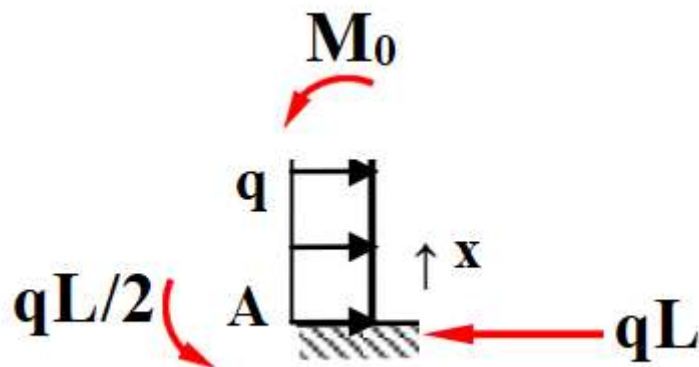


+



Etat 0 : charge extérieure ± 0 et $X_1=0, X_2=0$

La barre AC :



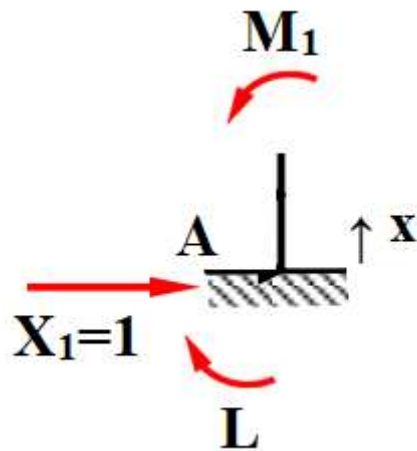
$$M_0 = q * L * x - \frac{q * x^2}{2} - \frac{q * L^2}{2} \quad 0 \leq x \leq L$$

La barre CB :

$$M_0 = 0$$

Etat 1 : charge extérieure = 0 , $X_2=0$ et $X_1=1$

La barre AC



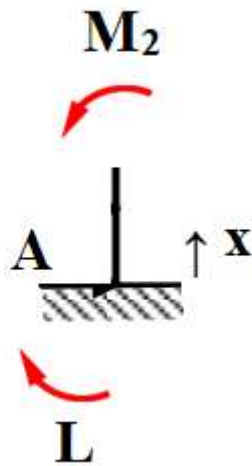
$$M_1 = L - x \quad 0 \leq x \leq L$$

La barre CB :

$$M_1 = 0$$

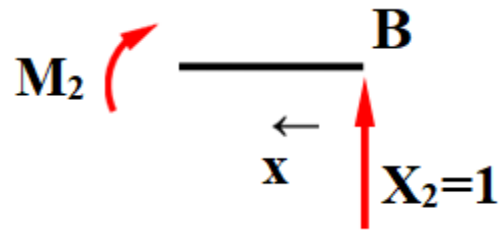
Etat 2 : charge extérieure = 0 , $X_1=0$ et $X_2=1$

La barre AC



$$M_2 = L \quad 0 \leq x \leq L$$

La barre CB :



$$M_2 = x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 * M_1}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (L - x) * (L - x) dx$$

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{M_2 * M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L x * x * dx + \frac{1}{EI} \int_0^L L * L * dx$$

$$\delta_{22} = \frac{4L^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \int_0^L \frac{M_1 * M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^L L * (L - x) dx$$

$$\delta_{12} = \frac{L^3}{2EI}$$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_1 * M_0}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^L (L - x) * \left(q * L * x - \frac{q * x^2}{2} - \frac{q * L^2}{2} \right) * dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{-qL^4}{8EI}$$

$$\Delta_{20} = \int_0^L \frac{M_2 * M_0}{EI} dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \int_0^L L * \left(q * L * x - \frac{q * x^2}{2} - \frac{q * L^2}{2} \right) * dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{-qL^4}{6EI}$$

$$\begin{cases} \Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 + \delta_{12} * X_2 = 0 \\ \Delta_{20} + \delta_{21} * X_1 + \delta_{22} * X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{-qL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} * X_1 + \frac{L^3}{2EI} * X_2 = 0$$

$$\frac{-qL^4}{6EI} + \frac{L^3}{2EI} * X_1 + \frac{4L^3}{3EI} * X_2 = 0$$

Dou ;

$$X_1 = R_{BX} = 0.41qL \quad \text{et} \quad X_2 = R_{BY} = -0.02qL$$

On calcule enfin les réactions manquantes :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{AX} + R_{BX} - qL = 0 \rightarrow R_{AX} = 0.59 qL$$

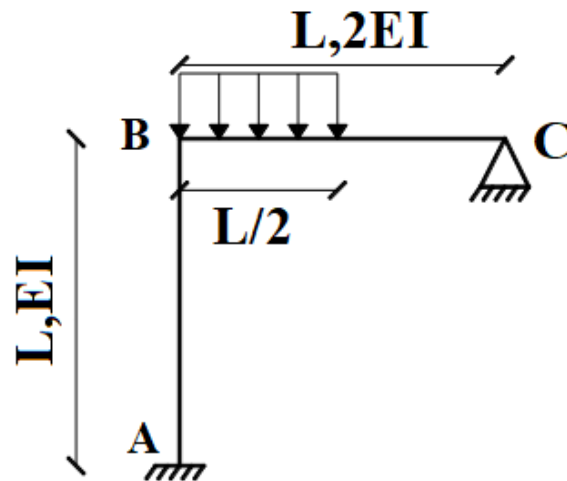
$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{AY} + R_{BY} = 0 \rightarrow R_{AY} = 0.02qL$$

$$\sum M/A = 0 \rightarrow -\frac{qL^2}{2} + R_{BX}L + M_A = 0 \rightarrow M_A = 0.09 qL^2$$

Exercice 4

On considère la structure (ABC) de la figure, composée de deux barres AB et BC, encastrée en A et articulée en C, d'inertie flexionnelle E.I variable et soumise à une charge répartie q sur la demi-travée BC.

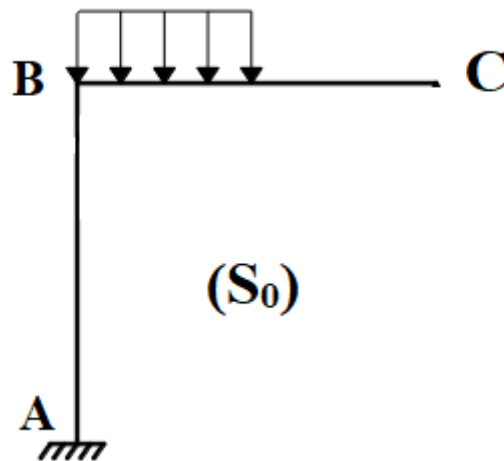
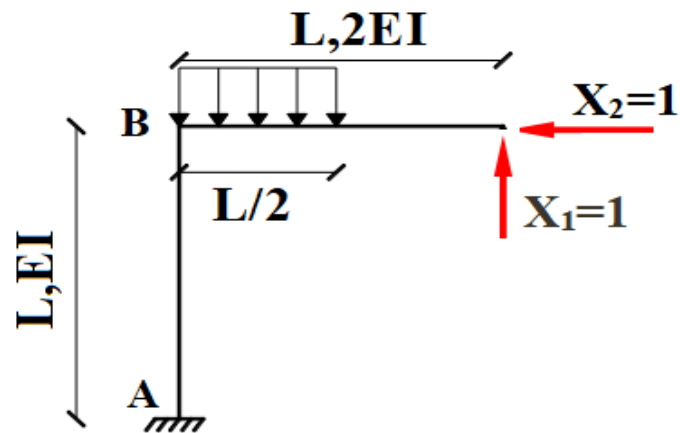
En appliquant la méthode des forces, déterminer les réactions en C. En déduire celles en A.

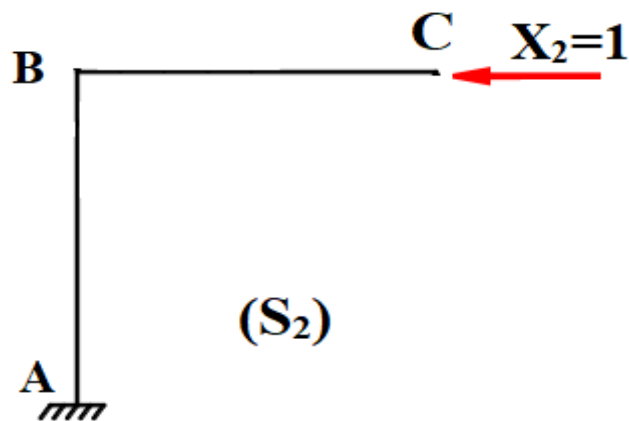
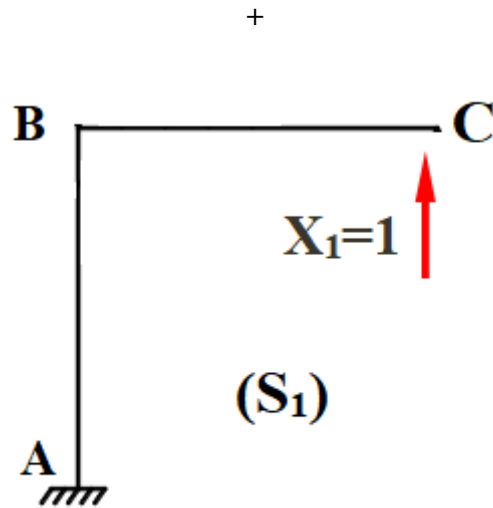


Solution

La poutre est hyperstatique de degré 2

On va considérer la structure (S₀) suivante :





Les moments M_0 , M_1 et M_2 sont calculés dans le tableau suivant :

| Barre | | (AB) | (BC) | |
|-------|-------|-------------------|---|---------------------|
| x | | $0 \leq x \leq L$ | $0 \leq x \leq L/2$ | $L/2 \leq x \leq L$ |
| EI | | EI | 2EI | |
| S_0 | M_0 | $-\frac{qL^2}{8}$ | $-\frac{q}{2} \left(\frac{L}{2} - x\right)^2$ | 0 |
| S_1 | M_1 | L | $(L - x)$ | |
| S_2 | M_2 | $(L - x)$ | 0 | |

Conditions cinématiques

$$\begin{cases} \Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 + \delta_{12} * X_2 = 0 \\ \Delta_{20} + \delta_{21} * X_1 + \delta_{22} * X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{M_1 * M_1}{EI} dx + \int_B^C \frac{M_1 * M_1}{2EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 * M_1}{EI} dx + \int_0^{L/2} \frac{M_1 * M_1}{2EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{L * L}{EI} dx + \int_0^{L/2} \frac{(L - x) * (L - x)}{2EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{7L^3}{6EI}$$

$$\delta_{22} = \int_A^B \frac{M_2 * M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{M_2 * M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{(L - x) * (L - x)}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \int_A^B \frac{M_1 * M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \int_0^L \frac{M_1 * M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \int_0^L \frac{L * (L - x)}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \frac{L^3}{2EI}$$

$$\Delta_{10} = \int_A^B \frac{M_1 * M_0}{EI} dx + \int_B^C \frac{M_1 * M_0}{2EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_1 * M_0}{EI} dx + \int_0^{L/2} \frac{M_1 * M_0}{2EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{L * (-\frac{qL^2}{8})}{EI} dx + \int_0^{L/2} \frac{(L-x) * (-\frac{q}{2} * (\frac{L}{2} - x)^2)}{2EI} dx$$

$$\Delta_{10} = -\frac{103qL^3}{768EI}$$

$$\Delta_{20} = \int_A^B \frac{M_2 * M_0}{EI} dx$$

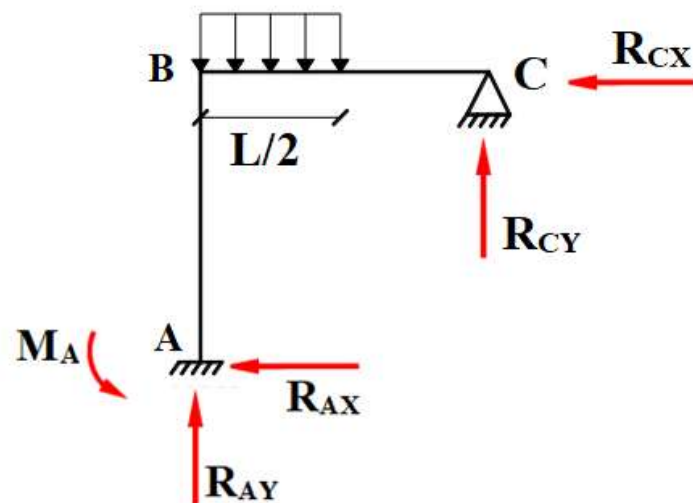
$$\Delta_{20} = \int_0^L \frac{M_2 * M_0}{EI} dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \int_0^L (L-x) * (-\frac{qL^2}{8}) dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{-qL^4}{16EI}$$

$$\begin{cases} \Delta_{10} + \delta_{11} * X_1 + \delta_{12} * X_2 = 0 \\ \Delta_{20} + \delta_{21} * X_1 + \delta_{22} * X_2 = 0 \\ -\frac{103qL^3}{768EI} + \frac{7L^3}{6EI} * X_1 + \frac{L^3}{2EI} * X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{-qL^4}{16EI} + \frac{L^3}{2EI} * X_1 + \frac{L^3}{3EI} * X_2 = 0$$



Dou ;

$$X_1 = R_{CY} = 0.0969qL \quad \text{et} \quad X_2 = R_{CX} = 0.0442qL$$

On calcule enfin les réactions manquantes :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{AX} + R_{CX} = 0 \rightarrow R_{AX} = 0.0422 qL$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{AY} + R_{CY} - \frac{qL}{2} = 0 \rightarrow R_{AY} = 0.403qL$$

$$\sum M/A = 0 \rightarrow \frac{qL^2}{8} - R_{CY}L - R_{CX}L - M_A = 0 \rightarrow M_A = 0.014qL^2$$

QCM 4

1- Dans une structure hyperstatique

- a) Le nombre des inconnus = le nombre des équations
- b) Le nombre des inconnus < le nombre des équations
- c) Le nombre des inconnus > le nombre des équations

2- Une poutre encastrée d'une extrémité et libre de l'autre extrémité

- a) Une fois hyperstatique
- b) Trois fois hyperstatique
- c) Isostatique

3- L'appui simple comporte

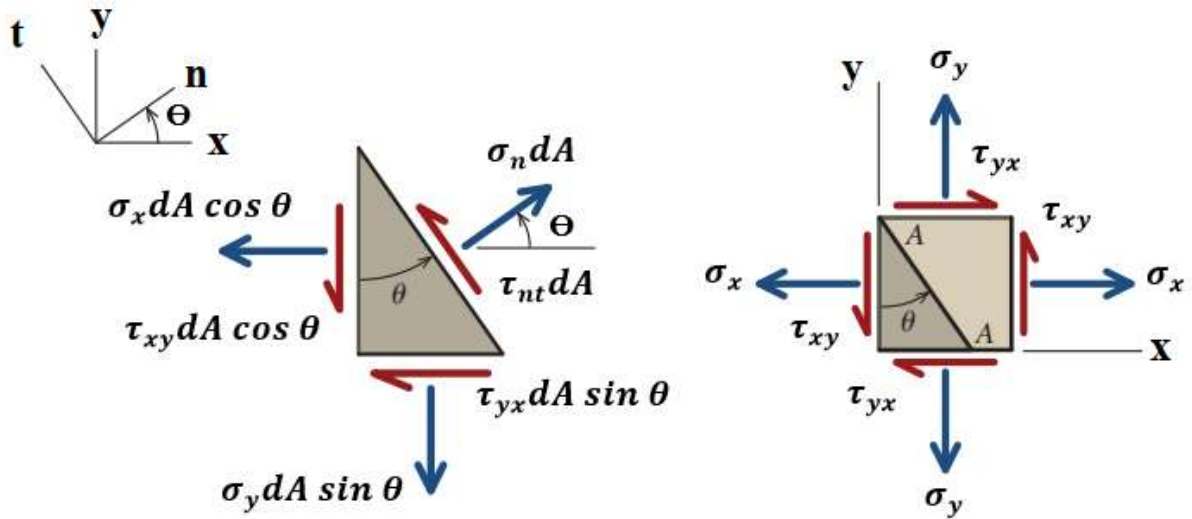
- a) Trois réaction inconnus
- b) Une réaction inconnue
- c) Deux réaction inconnus

4- Le degré d'hyperstatistité k

- a) Le nombre des inconnus - le nombre des équations
- b) Le nombre des inconnus + le nombre des équations
- c) Le nombre des équations - le nombre des inconnus

5.1 Équations générales de la contrainte plane

En Considère un état de contrainte représenté par un élément de contrainte plane soumis à des contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ comme le montre sur la figure.



L'équation d'équilibre pour la somme des forces dans la direction n :

$$\sum F_n = \sigma_n d - \tau_{yx} (dA \sin \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (dA \cos \theta) \sin \theta - \sigma_x (dA \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (dA \sin \theta) \sin \theta = 0$$

On a :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \tag{5.1}$$

D'après de la figure l'équation d'équilibre pour la somme des forces dans la direction t :

$$\sum F_t = \tau_{nt} dA - \tau_{xy} (dA \cos \theta) \cos \theta + \tau_{yx} (dA \sin \theta) \sin \theta + \sigma_x (dA \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (dA \sin \theta) \cos \theta = 0$$

On a :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{nt} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tag{5.2}$$

Tenons compte des relations trigonométriques suivantes :

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$$

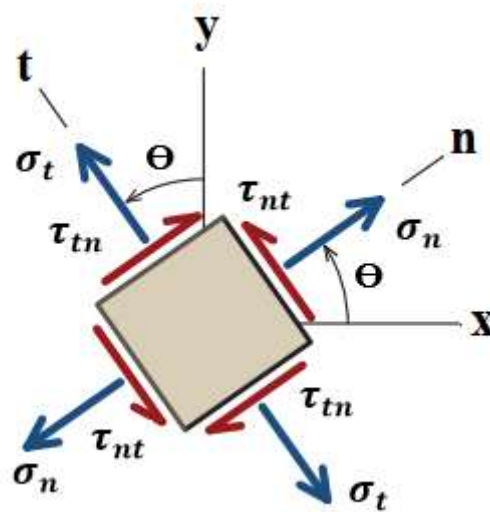
L'équation (5.1) devient :

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (5.3)$$

Et l'équation (5.2) devient :

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (5.4)$$

5.2 Invariance de la contrainte



La contrainte normale agissant sur la face n de l'élément de contrainte illustré dans la figure peut être déterminée à partir de l'équation (5.3). La contrainte normale agissant sur la face t peut également être obtenue à partir de l'équation (5.3) en remplaçant $90^\circ + \theta$ par θ , ce qui donne :

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (5.5)$$

Les équations (5.1) +(5.5) nous donne :

$$\sigma_n + \sigma_t = \sigma_x + \sigma_y$$

5.3 Contraintes principales

Les valeurs extrêmes des contraintes normales sont appelées contraintes principales. Elles sont obtenues en mettant égales à zéro, les dérivées des contraintes normales obtenues auparavant, par rapport à l'inclinaison θ . L'angle obtenu correspond à la direction des contraintes principales.

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (2\sin 2\theta) + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Il vient :

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (5.6)$$

Où θ_p représente la direction principale, suivant laquelle les contraintes principales agissent.

On remplace, on obtient :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.7)$$

5.4 Contrainte maximale de cisaillement

On maximise l'expression de la contrainte tangentielle par rapport à θ , il vient :

$$\frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

Ou bien :

$$\tan 2\theta_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

On obtient :

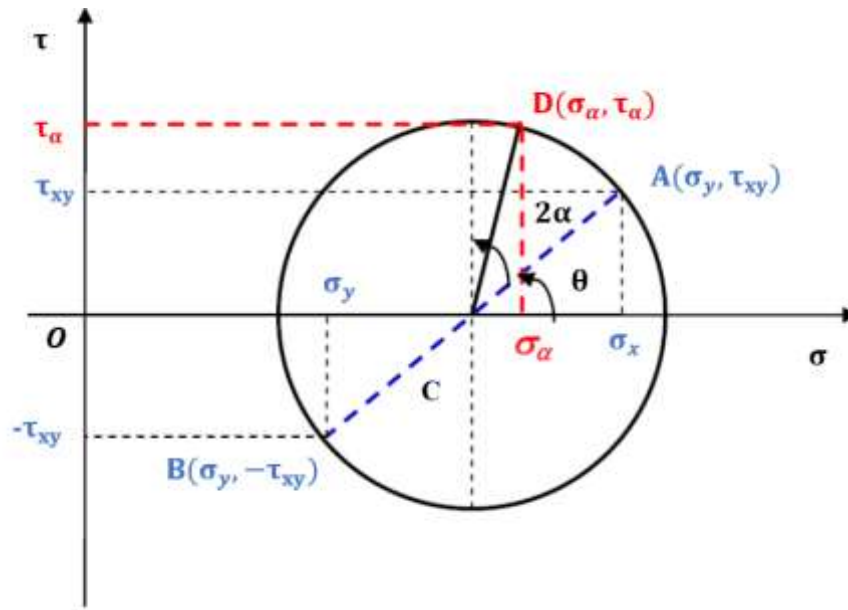
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.8)$$

5.5 Cercle de Mohr

Il est plus pratique de représenter l'état de contraintes sous forme de courbe. Pour tracer le cercle de Mohr, on suit les étapes suivantes ;

1. Tracer un repère perpendiculaire et orthonormé (O, σ , τ)
2. Placer les points A(σ_x , τ_{xy}) et B(σ_x , $-\tau_{xy}$) dans ce repère.
3. Localise le point C point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses.

Pour déduire du cercle de Mohr les contraintes sur un plan incliné dont la normale fait un angle Θ avec l'axe ox , il suffit de déterminer le point « D » qui fait un angle 2Θ avec le point A et dans le même sens, c-à-d (\overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CD}): 2Θ



Les coordonnées du point D sont $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$.

5.6 Critères de limite élastique

Au moment de la conception d'éléments de machines, il est souvent nécessaire de mettre une limite supérieure aux contraintes sollicitant les matériaux.

Si le matériau est ductile ou malléable, sa limite élastique (σ_e) servira de contrainte référence, si le matériau est fragile, on utilisera la résistance à la rupture σ_r .

Les modes de rupture et les critères sont plus faciles à définir lorsque le matériau est sollicité dans un état de contrainte uniaxial (exemple : en traction, $\sigma_{\text{admissible}} \leq \sigma_e$).

Cependant, lorsque les contraintes sont biaxiales ou triaxiales, d'autres critères sont nécessaires.

Les critères proposés dans ce paragraphe sont utilisés dans tous les pays industrialisés et sont régulièrement employés pour élaborer des cahiers des charges, des codifications ou des normalisations.

Aucun des critères présentés n'est universel et le choix de l'un ou l'autre dépendra du comportement final du matériau : ductile ou fragile, évolution avec la température, procédé de fabrication, environnement chimique, variation des charges, etc.

Pour chaque cas, il est d'abord nécessaire de déterminer les contraintes normales (σ) et tangentielles (τ) aux points les plus sollicités en tenant compte des concentrations de contraintes. Lorsque les contraintes maximales ont été établies (par calcul ou expérimentation), il est nécessaire de déterminer les contraintes principales aux points critiques car les critères abordés sont basés sur la connaissance de ces dernières.

Il existe de nombreux critères, seuls les plus utilisés seront développés.

5.6.1 Critères pour matériaux ductiles ou malléables

5.6.1.1 Critère de Tresca ou de la contrainte de cisaillement maximal

Le mode de rupture le plus usuel des matériaux ductiles est le glissement engendré par les contraintes de cisaillement.

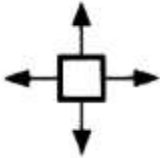
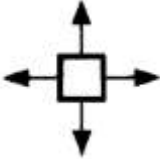
Dans le cas général, pour éviter la rupture des pièces ou des composants en traction, il suffit que la contrainte de cisaillement maximale τ_{\max} exercée reste inférieure à la valeur limite admissible du matériau ou par $\sigma_{\max} < \sigma_e$.

Dans le cas des contraintes planes, lorsque les contraintes principales ont le même signe, $\tau_{\max} = 1/2 \sigma_{\max}$

Si les contraintes principales ont des signes différents, alors :

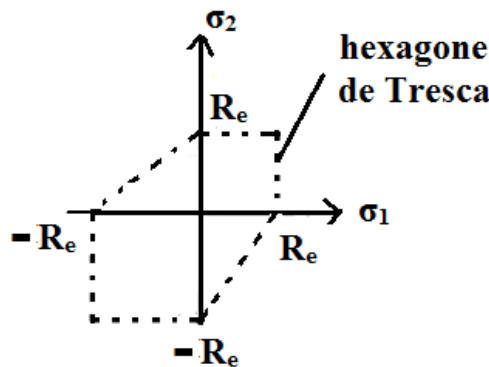
$$\tau_{\max} = 1/2 | \sigma_{\max} - \sigma_{\min} |.$$

En conséquence, le critère peut s'écrire :

| | |
|---|---|
| $ \sigma_1 \leq \sigma_e$ $ \sigma_2 \leq \sigma_e$ si σ_1 , et σ_2 , sont de même signe. |  |
| $ \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_e$ si σ_1 , et σ_2 , sont de signes opposés |  |

Graphes représentant le critère de Tresca

Si le point de coordonnées (σ_1, σ_2) tombe en dehors de l'hexagone de Tresca, il y a rupture.



5.6.1.2 Critère de Von Mises ou de l'énergie de déformation

Un matériau, lorsqu'il est déformé par une charge extérieure, tend à stocker de l'énergie interne dans son volume (analogie avec un ressort).

Par exemple, en traction $U = 1/2\sigma\varepsilon$ et en cisaillement $U = 1/2\tau\gamma$.

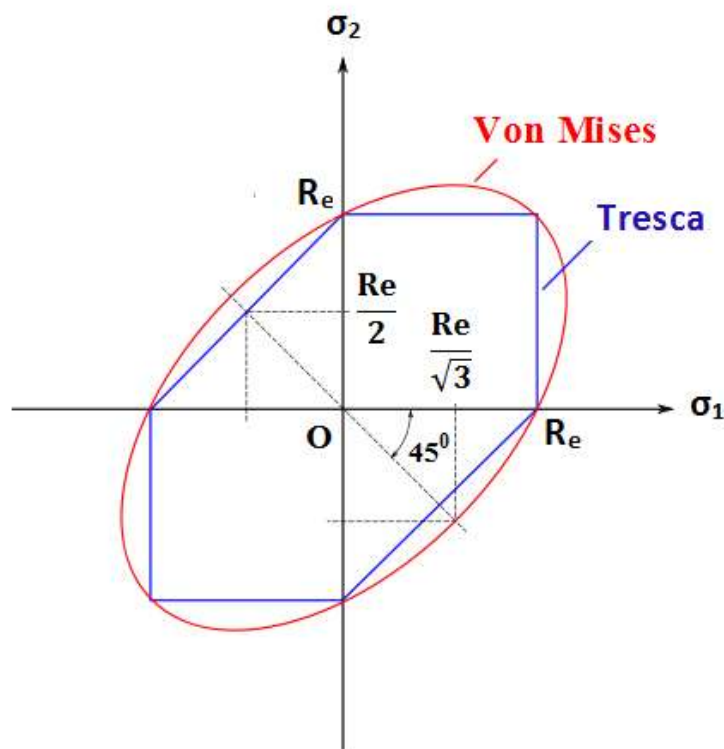
Le critère est basé sur l'énergie de déformation par unité de volume du matériau déformé.

Celle-ci ne doit pas dépasser l'énergie de distorsion engendrée dans le cas des contraintes limites élastiques (σ_e , etc.).

Dans le cas des contraintes planes, le critère s'énonce :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_e^2 \quad (5.1)$$

(Équation d'une ellipse dans le système d'axe (σ_1, σ_2)).



L'ellipse de Von Mises passe par les sommets de l'hexagone de Tresca. Pour ces six points, les deux critères donnent les mêmes résultats. Dans les autres cas, le critère de Tresca est plus sévère.

Dans le cas particulier du cisaillement pur ou de la torsion $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, les points correspondants sont situés sur la bissectrice des 2e et 4e quadrants. Les limites sont $\sigma_1 = -\sigma_2 = 0,5 \sigma_e$ avec Tresca et $\sigma_1 = -\sigma_2 = 0,577\sigma_e$ avec Von Mises. Pour ces cas, Von Mises est plus précis et est plus proche de l'expérimentation.

5.6.1.3 Flexion, traction et torsion pour les arbres à section circulaire

Ce type de sollicitation est fréquent dans le fonctionnement des systèmes mécaniques et notamment pour les arbres de transmission de puissance. La condition de résistance peut être vérifiée par l'un des critères :

-Selon le critère de TRESCA :

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x + 4\tau} \leq [\sigma] \quad (5.2)$$

-Selon le critère de VON MISES :

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x + 3\tau} \leq [\sigma] \quad (5.3)$$

5.6.2 Critères pour matériaux fragiles

Schématiquement, lorsqu'un matériau fragile est soumis à un essai de traction, sa rupture se produit soudainement sans déformation plastique préalable. Les contraintes normales maximales atteignent la valeur de la limite à la rupture par traction σ_r .

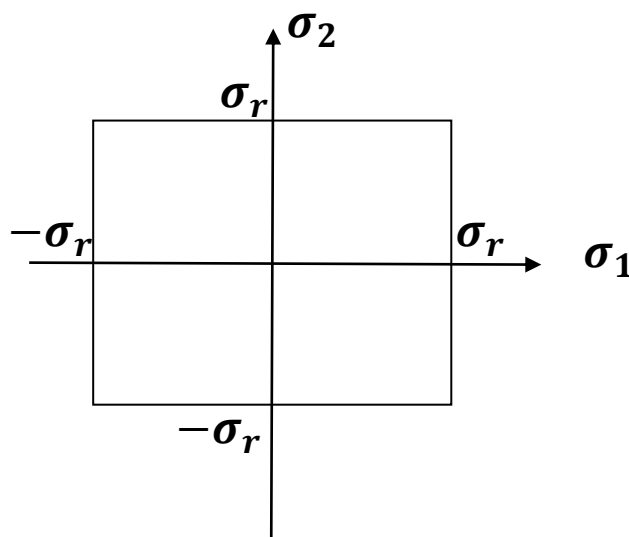
5.6.2.1 Critère de la contrainte normale maximale ou de Coulomb

Pour un composant, la rupture se produit dès que la contrainte normale principale maximale atteint la résistance à la rupture σ_r du matériau. Le critère s'énonce :

$$|\sigma_1| \leq \sigma_r$$

$$|\sigma_2| \leq \sigma_r$$

Le critère peut être représenté graphiquement par une aire carrée. Pour les points en dehors de cette surface, il y a rupture



5.6.2.2 Critère de Mohr

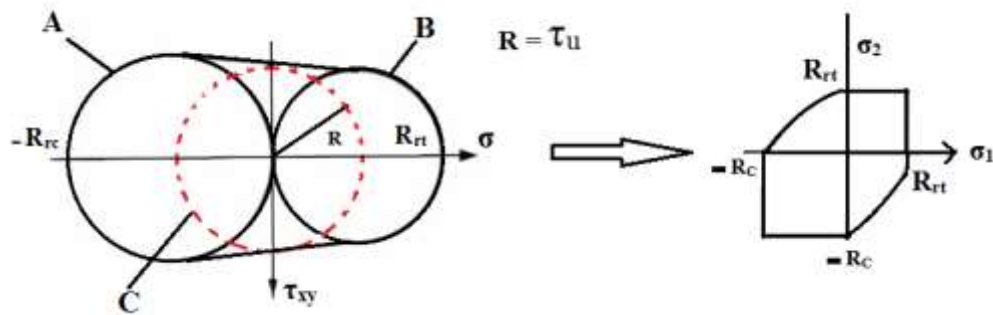
Pour beaucoup de matériaux fragiles, les résistances à la rupture par compression σ_{rc} , et par traction σ_{rt} sont différentes.

Le critère de Mohr est fondé sur des résultats d'essais. La rupture se produit lorsque le cercle de Mohr engendré par les contraintes sort ou est tangent à la courbe enveloppe aux trois cercles A, B, C définis par :

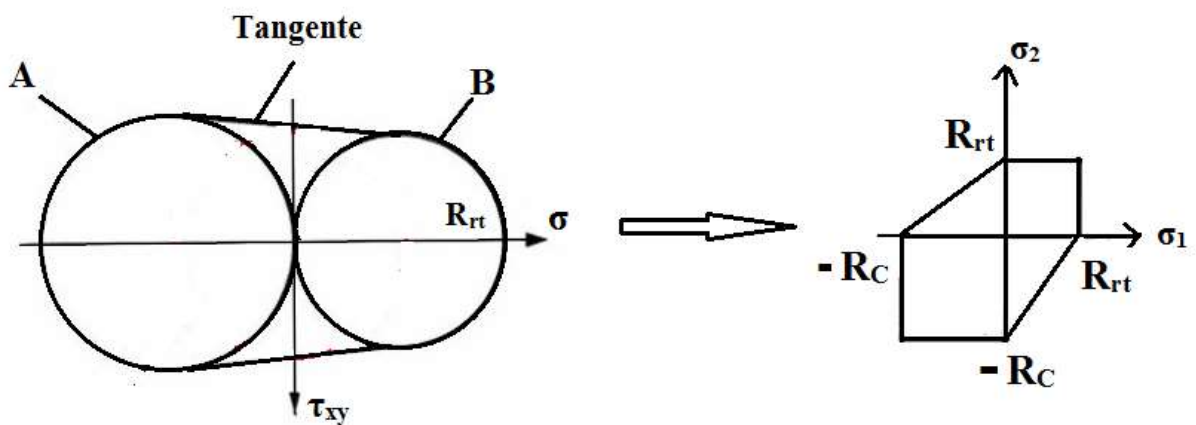
Cercle A (compression pure) : $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 ; \sigma_3 = -\sigma_{rc}$,

Cercle B (traction pure) : $\sigma_1 = \sigma_{rt}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Cercle C (cisaillement pur) : $\tau = \tau_{ultime} = \tau_u$



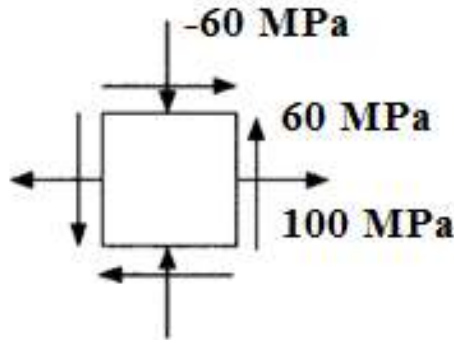
Remarque : si on ne dispose pas du cercle C, on peut faire une approximation à partir des tangentes aux cercles A et B.



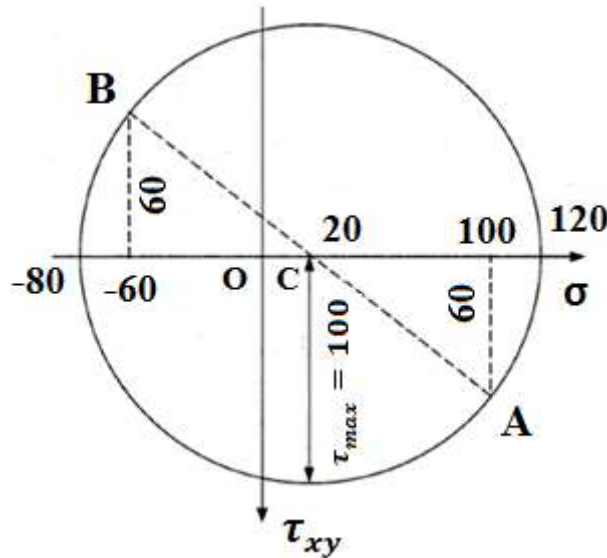
Exemple

Les contraintes en un point critique dun composant de machine en acier sont $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -60 \text{ MPa}$ et $\tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$.

Si la limite elastique de l'acier utilisé est $\sigma_e = 300 \text{ MPa}$, déterminer le coefficient de securité CS adopté par rapport aux critères de Tresca et de von Mises.



Solution :



$$OC = \sigma_{moy} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ MPa}$$

Contraintes principales :

$$\sigma_1 = 20 + 100 = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 20 - 100 = 80 \text{ MPa}$$

$$\text{Critère de Tresca : } |\sigma_1 - \sigma_2| = 200 \leq \sigma_e$$

$$CS_1 = \frac{\sigma_e}{200} = \frac{300}{200} = 1.5 = \frac{OT}{OM}$$

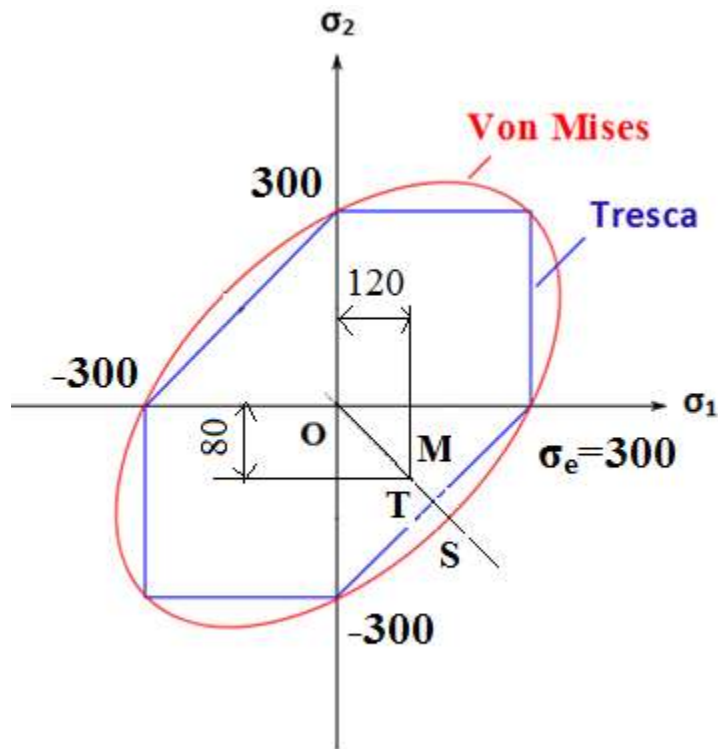
Remarque :

$$\tau_{\max} = 100 \leq \frac{\sigma_e}{2} = 150 \text{ MPa} \quad \text{donne le même coefficient de sécurité.}$$

Critère de von Mises :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 120^2 + 80 \times 20 + 80^2 = \left(\frac{\sigma_e}{CS_2}\right)^2 = 174.36 = \frac{300}{CS_2}$$

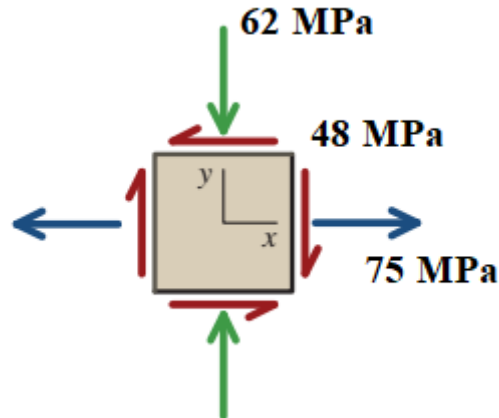
$$CS_2 = \frac{300}{174.36} = 1.72 = \frac{OS}{OM}$$



5.7 Exercice Corrigées

Exercice 1

Considérer un point dans un élément de structure qui est soumis à une contrainte plane. Normal et cisaillement les contraintes agissant sur les plans horizontal et vertical au point sont indiquées sur la figure.



-Déterminer les contraintes principales et la contrainte de cisaillement maximale.

Solution

On a : $\sigma_x = 75 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -62 \text{ MPa}$ et $\tau_{xy} = -48 \text{ MPa}$

Les contraintes principales

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{75 + (-62)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{75 + 62}{2}\right)^2 + (-48)^2}$$

$$\sigma_1 = 91 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -77.3 \text{ MPa}$$

Contrainte maximale de cisaillement

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

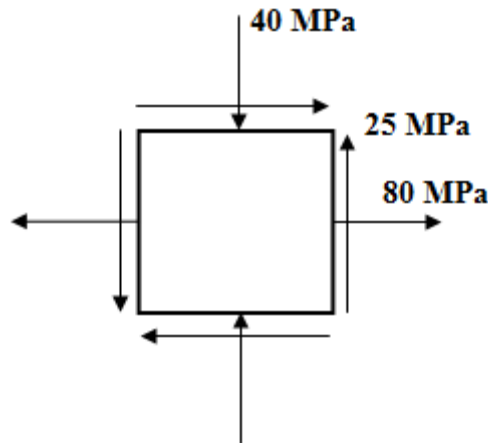
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{75 - (-62)}{2}\right)^2 + (-48)^2}$$

$$\tau_{\max} = 84 \text{ MPa}$$

Exercice 2

Les contraintes relevées en un point d'un composant mécanique sont : $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -40 \text{ MPa}$ et $\tau_{xy} = 25 \text{ MPa}$. Le composant est en acier moulé $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$.

Déterminer le coefficient de sécurité en adoptant le critère de Tresca et de Von Mises.



$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{1}{2}(80 - 40) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{80 + 40}{2}\right)^2 + 25^2} = \sqrt{60^2 + 25^2} = 65 \text{ MPa}$$

Contraintes principales

$$\sigma_1 = 20 + 65 = 85 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 20 - 65 = -45 \text{ MPa}$$

$$\text{Critère de Tresca : } |\sigma_1 - \sigma_2| = 85 + 45 = 130 \leq \sigma_e$$

$$CS_1 = \frac{\sigma_e}{130} = \frac{250}{130} = 1.92$$

Remarque :

$$\tau_{\text{max}} = 65 \leq \frac{\sigma_e}{2} = 125 \text{ MPa} \text{ donne le même coefficient de sécurité.}$$

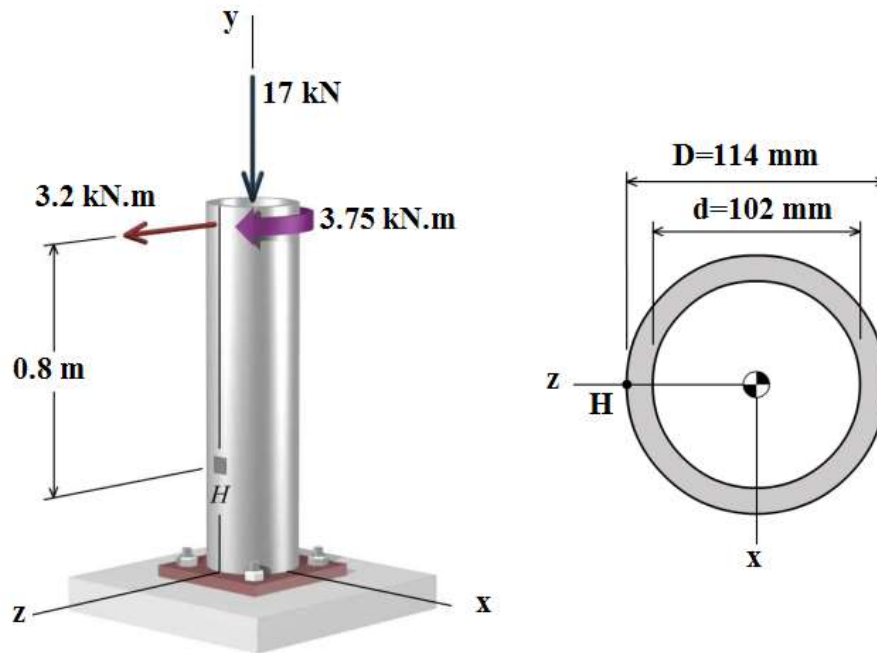
Critère de von Mises :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 85^2 + 45 \times 85 + 45^2$$

$$CS_2 = \frac{250}{114.34} = 2.18$$

Exercice 3

Un tube verticale avec un diamètre extérieur $D=114$ mm et un diamètre intérieur $d=102$ mm supporte les charges comme indiquées sur la figure. Déterminer les contraintes normales et les contraintes de cisaillement agissant au point H.



Solution

Propriétés de la section

Le diamètre extérieur du tube est $D=114$ mm, et le diamètre intérieur est $d=102$ mm.

La surface, le moment d'inertie, et le moment polaire d'inertie de la section sont :

$$S = \frac{\pi}{4} [D^2 - d^2] = \frac{\pi}{4} [(114)^2 - (102)^2]$$

$$S = 2035.752 \text{ mm}^2$$

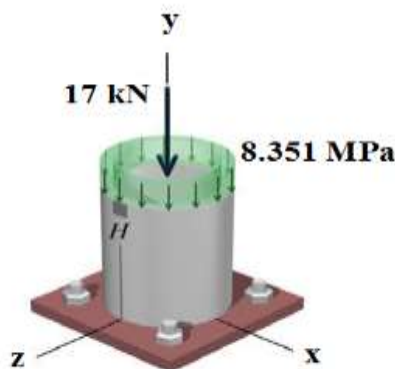
$$I = \frac{\pi}{64} [D^4 - d^4] = \frac{\pi}{64} [(114)^4 - (102)^4]$$

$$I = 2977.287 \text{ mm}^4$$

$$I = \frac{\pi}{32} [D^4 - d^4] = \frac{\pi}{32} [(114)^4 - (102)^4]$$

$$I = 5954.595 \text{ mm}^4$$

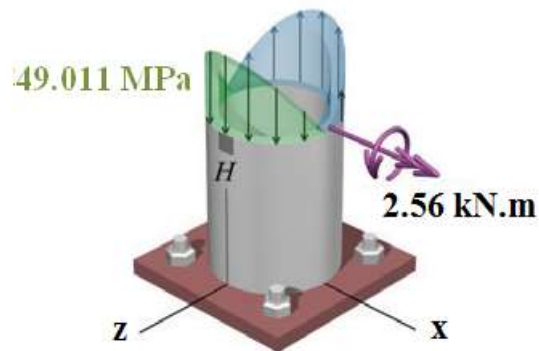
La force axiale de 17 kN crée une contrainte de compression normale, qui agit dans le direction y



$$\sigma_y = \frac{F_y}{S} = \frac{17000 \text{ N}}{3035.752 \text{ mm}^2} = 8.351 \text{ MPa}$$

-La force de 3,2 kN agissant dans la direction positive de l'axe z crée une contrainte de cisaillement transversale.

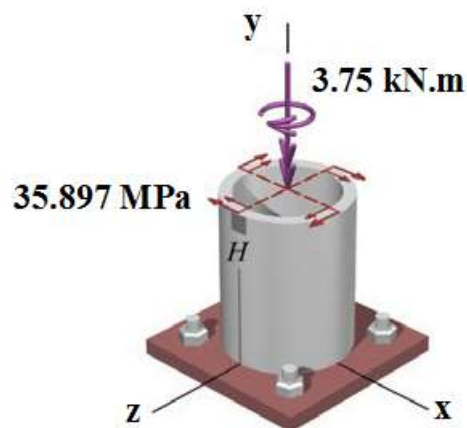
-La force de 3,2 kN agissant dans la direction positive de l'axe z crée également un moment de flexion à la section où se trouve H



$$\sigma_y = \frac{M_x c}{I_x} = \frac{2.56 * 57 * 1000 * 1000}{2977.287}$$

$$\sigma_y = 49.011 \text{ MPa}$$

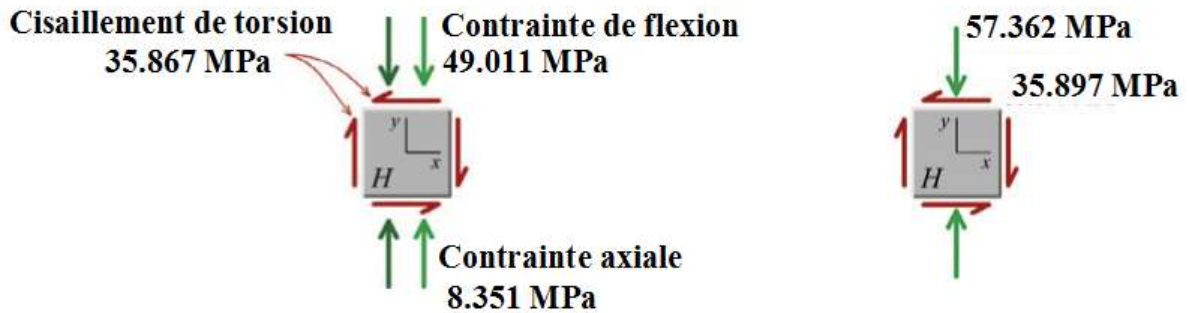
Le couple de 3,75 kN-m agissant autour de l'axe y crée une contrainte de cisaillement à H.



$$\tau = \frac{T c}{J} = \frac{3.75 * 57 * 1000 * 1000}{5954.575}$$

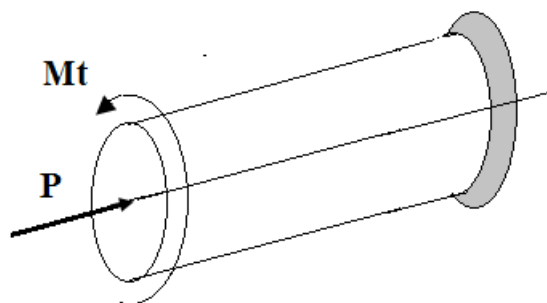
$$\tau = 35.897 \text{ MPa}$$

Les contraintes combinées au point H peuvent être résumées



Exercice 4

Un arbre plein de diamètre $d=26$ mm en acier ayant une limite élastique $\sigma_e=250$ MPa. Il supporte une force de compression $P=67$ kN et moment de torsion $M_t=0.4$ kN.m. Vérifier si l'arbre supporte ces chargements selon qu'on adopte le critère de Tresca et de von Mises.



$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \times 26^2}{4} = 530.66 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{-P}{S} = \frac{-67 \cdot 10^3}{530.66} = -126.25 \text{ MPa}$$

$$\frac{I_0}{v} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3.14 \times 26^3}{32} = 3449.29 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{M_t}{I_0/v} = \frac{400000}{3449.29} = 115.96 \text{ MPa}$$

$$\text{Tresca } \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(-126.25)^2 + 4(115.96)^2} = 233.40 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa}$$

$$\text{Von Mises } \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(-126.25)^2 + 3(115.96)^2} = 237.23 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa}$$

Exercice 4

Une poutre cylindrique de diamètre $d=36$ mm supporte une charge de traction $F=200$ kN et un moment de torsion M_t . Si la limite élastique du matériau $\sigma_e=250$ MPa, déterminer la valeur du couple M_t en adoptant le critère de Tresca.



$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \times 36^2}{4} = 1017.36 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{200 \cdot 10^3}{1017.36} = 196.58 \text{ MPa}$$

$$\text{Tresca} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(196.58)^2 + 4\tau^2} \leq 250$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(196.58)^2 + 4\tau^2} \leq 250$$

$$\tau = \sqrt{\frac{250^2 - (196.58)^2}{4}} = 77.24 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{M_t}{I_0/v} = 77.24 \text{ MPa}$$

$$\frac{I_0}{v} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3.14 \times 36^3}{16} = 9156.24 \text{ mm}^3$$

$$\frac{M_t}{I_0/v} = 77.24$$

$$M_t = 77.24 \times 9156.24 = 707.22 \text{ M.m}$$

Exercice 5

Une poutre cylindrique de diamètre $d=36$ mm supporte une charge de traction $F=200$ kN et un moment de torsion M_t . Si la limite élastique du matériau $\sigma_e=250$ MPa, déterminer la valeur du couple M_t en adoptant le critère de Tresca.



$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \times 36^2}{4} = 1017.36 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{200.10^3}{1017.36} = 196.58 \text{ MPa}$$

$$\text{Tresca: } \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(196.58)^2 + 4\tau^2} \leq 250$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(196.58)^2 + 4\tau^2} \leq 250$$

$$\tau = \sqrt{\frac{250^2 - (196.58)^2}{4}} = 77.24 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{M_t}{I_0/v} = 77.24 \text{ MPa}$$

$$\frac{I_0}{v} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3.14 \times 36^3}{16} = 9156.24 \text{ mm}^3$$

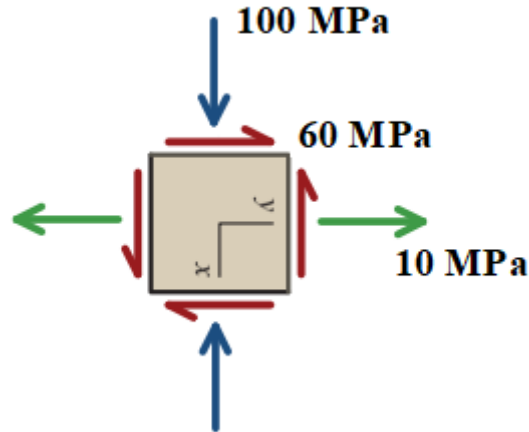
$$\frac{M_t}{I_0/v} = 77.24$$

$$M_t = 77.24 \times 9156.24 = 707.22 \text{ M.m}$$

Exercice 6

Les contraintes relevées en un point d'un composant mécanique sont : $\sigma_x = 10 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -100 \text{ MPa}$ et $\tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$. Le composant est en aluminium moulé La la résistance à la rupture en compression $\sigma_{rc} = 220 \text{ MPa}$ et celle à la traction est $\sigma_{rt} = 80 \text{ MPa}$.

En utilisant le critère de MOHR, déterminer s'il y a risque de rupture ou non.



$$\sigma_{moy} = \frac{1}{2}(10 - 100) = -45 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{10 + 100}{2}\right)^2 + 60^2} = \sqrt{55^2 + 60^2} = 81.39 \text{ MPa}$$

Contraintes principales

$$\sigma_1 = -45 + 81.39 = 36.39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -45 - 81.39 = -126.39 \text{ MPa}$$

Il y a risque de rupture.

Exercice 7

Les contraintes sur la surface libre d'un composant de machine sont indiquées sur la figure.

Le composant est en aluminium 6061-T6 avec une limite d'élasticité de $\sigma_y = 270 \text{ MPa}$.

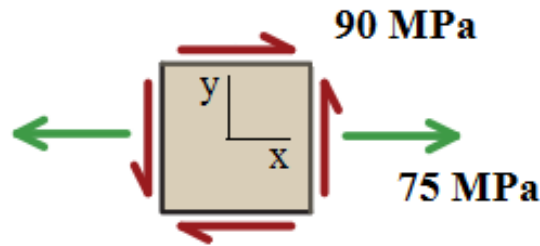
a- Quel est le facteur de sécurité prévu par la théorie de la contrainte de cisaillement maximale pour cet état de contrainte ?

b- Vérifier la condition de la résistance.

c- Quelle est la valeur de la contrainte équivalente de Von Mises pour l'état donné de la contrainte plane ?

d- Quel est le facteur de sécurité prévu par le critère de défaillance de la théorie de l'énergie de distorsion maximale ?

e- Vérifier la condition de la résistance.



Solution

On a :

$$\sigma_x = +75 \text{ MPa} , \sigma_y = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = +90 \text{ MPa}$$

Les contraintes principales sont calculées comme suit :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{75 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{75 + 0}{2}\right)^2 + (90)^2}$$

$$\sigma_1 = 135 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -60 \text{ MPa}$$

La contrainte de cisaillement maximale

Puisque σ_1 est positif et σ_2 est négatif la rupture se produira si $\sigma_1 - \sigma_2 \geq \sigma_y$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 135 \text{ MPa} - (-60 \text{ MPa}) = 195 \text{ MPa} < 270 \text{ MPa}$$

La condition de la éistance est saisait

Le facteur de sécurité associé à cet état de contrainte peut être calculé comme suit :

$$FS = \frac{\sigma_y}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{270}{195} = 1.385$$

La contrainte équivalente de Von Mises associée à la théorie de l'énergie de distorsion maximale peut être calculé à partir de l'équation :

$$\sigma_M = \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}$$

$$\sigma_M = \sqrt{((135)^2 - (135)(-60) + (-60)^2)}$$

$$\sigma_M = 173 \text{ MPa}$$

Le facteur de sécurité pour la théorie de l'énergie de distorsion maximale peut être calculé à partir de:

$$FS = \frac{\sigma_y}{\sigma_M} = \frac{270}{173} = 1.561$$

QCM 5

- 1-** Quel est le(s) critère(s) de défaillance le mieux adapté aux métaux
- a) Tresca
 - b) Von Mises
 - c) Mohr-Coulomb
- 2-** Quel est le(s) critère(s) de défaillance le plus régulier numériquement
- a) Tresca
 - b) Von Mises
 - c) Mohr-Coulomb
- 3-** En trois dimensions, le domaine de Tresca est représenté par un
- a) Prisme de base hexagonale
 - b) Cylindre de base circulaire
 - c) Cylindre de base ellipse
- 4-** En trois dimensions, le domaine de Von Mises est représenté par un
- a) Prisme de base hexagonale
 - b) Cylindre de base circulaire
 - c) Cylindre de base ellipse

6.1 Plaques minces

6.1.1 Tenseur flexion et tenseur courbure

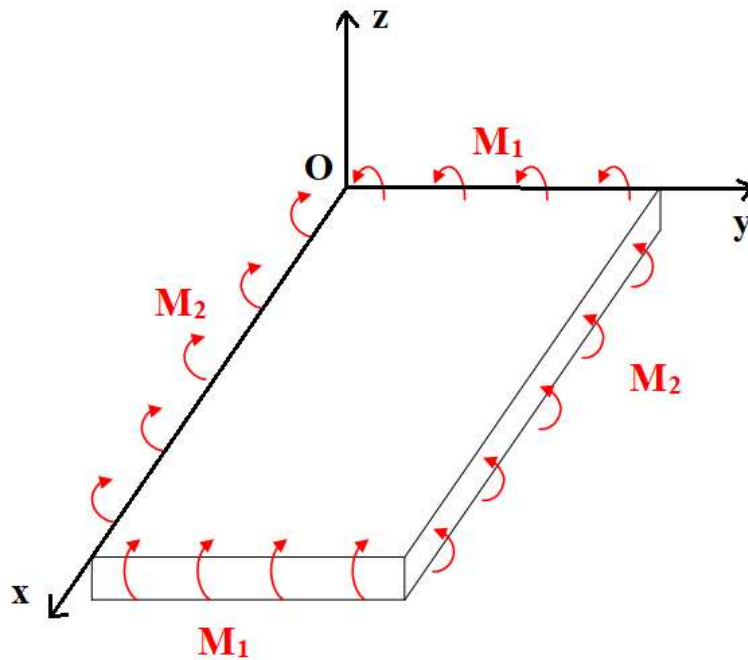
6.1.1.1 Définition

Une plaque est solide limité deux plans parallèles et par une surface cylindrique dont les génératrices sont perpendiculaires aux deux plans. La distance entre les plans parallèles est l'épaisseur h de la plaque.

Le plan équidistant des deux plans parallèles est le plan moyen (ou feuillet moyen) de la plaque. Nous perdrons toujours des axes rectangulaires $Oxyz$, Oz étant normal au plan moyen et Oxy contenus dans le plan moyen.

Une plaque est mince lorsque son épaisseur h est petite vis-à-vis de ses dimensions mesurées dans le plan. Nous pouvons alors admettre que la composante n_3 du tenseur est négligeable, et que les charges agissant sur la plaque sont équivalentes à une charge répartie de densité $p(x,y)$ appliquée dans le plan moyen.

6.1.1.2 Flexion pure d'une plaque rectangulaire



Considérons une plaque rectangulaire $OACB$ fléchie par des couples uniformément distribués le long de ses côtés ; soit M_1 le couple par unité de longueur sur les côtés OA et AC et soit M_2 le couple OB et BC . La plaque $OACB$ est donc soumise à un moment fléchissant M_1 par unité de longueur dans la direction Ox , et à un moment fléchissant M_2 par unité de longueur dans la direction Oy les moments M_1 et M_2 qui ont les dimensions d'une force, sont positifs s'ils tendent à comprimer la face de la plaque.

Le déplacement transversale $w(x,y)$ d'un point du plan moyen restant petit, nous pouvons assimiler les courbures du plan moyen déformé dans les directions Ox et Oy aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Si nous considérons alors un parallélépipède de côtés dx , dy et h , et si nous admettons que les faces de ce parallélépipède initialement parallèles à Oz demeurent planes et normales au plan moyen déformé, les dilatations e_1 et e_2 suivant Ox et Oy à la cote z sont :

$$e_1 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad e_2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Les contraintes normales n_1 et n_2 se déduisent des relations :

$$\frac{1}{E}(n_1 - \sigma n_2) = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{E}(n_2 - \sigma n_1) = z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Donc ont pour valeurs :

$$n_1 = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$n_2 = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

Les moments fléchissant M_1 et M_2 sont respectivement égaux aux moments résultant des forces élastiques $n_1 dx dy$ et $n_2 dx dy$ correspondant à une largeur unité parallèle à Ox et à Oy ;

Donc :

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} n_1 z dz$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} n_2 z dz$$

Nous trouvons ainsi, compte tenu des valeurs de n_1 et n_2 :

$$M_1 = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_2 = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (6.1)$$

D désignant la rigidité à la flexion de la plaque définie par :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} = \frac{EI}{(1-\sigma^2)} \quad (6.2)$$

$I = \frac{h^3}{12}$ est l'inertie de la plaque par unité de largeur.

Les contraintes n_1 et n_2 se déduisent de M_1 et M_2 par les formules :

$$n_1 = \frac{M_1 z}{I}, \quad n_2 = \frac{M_2 z}{I} \quad (6.3)$$

Nous déduisons des équations :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_1 - \sigma M_2}{D(1 - \sigma^2)}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{M_2 - \sigma M_1}{D(1 - \sigma^2)}$$

Et, puisque M_1 et M_2 sont constants, nous trouvons, en supposant l'origine choisie au point où le plan tangent au plan moyen déformé est parallèle à Oxy :

$$w(x, y) = \frac{M_1 - \sigma M_2}{2D(1 - \sigma^2)} x^2 + \frac{M_2 - \sigma M_1}{2D(1 - \sigma^2)} y^2 \tag{6.4}$$

Lorsque $M_1 = M_2$ le plan moyen déformé est un parabololoïde de révolution :

$$w(x, y) = \frac{M_1}{2D(1 - \sigma)} (x^2 + y^2)$$

Assimilable, puisque w est petit, à une sphère de rayon $R = \frac{D(1 - \sigma)}{M_1}$

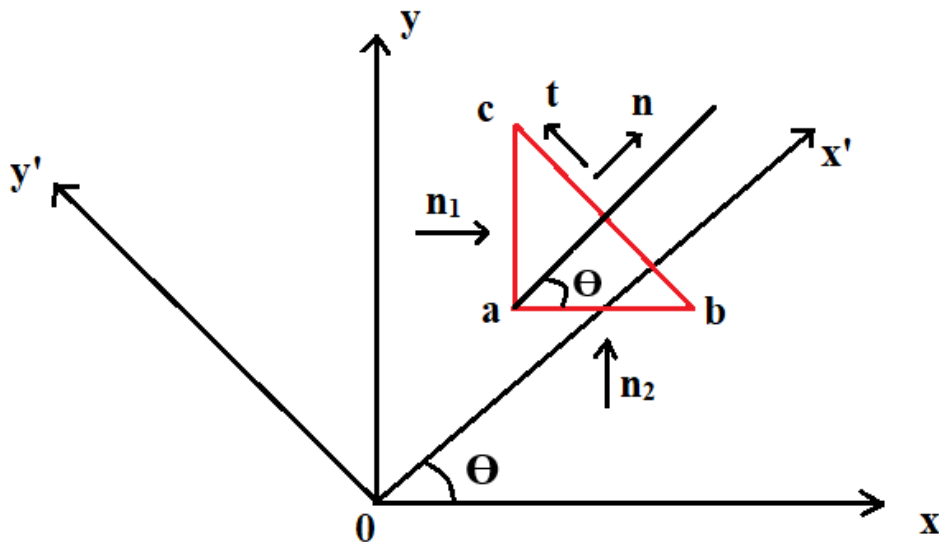
Nous déduisons de la relation (6.4) que $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ est nul ; les directions O_x et O_y sont donc les directions principales au plan moyen déformé. Les formules (1) donnent donc les moments fléchissant principaux en fonction des courbures principale du plan moyen déformé.

Lorsque la plaque est déformée suivant un cylindre de génératrices parallèles à Oy (flexion cylindrique), w n'est fonction que de x , et les relations (1) se réduisent à :

$$M_1 = D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M_2 = \sigma M_1 \tag{6.5}$$

Ainsi le moment fléchissant M_2 n'est pas nul.

6.1.2 Tenseur flexion et tenseur courbure



Considérons un prisme découpé dans la plaque, de section droite abc ; sur la face perpendiculaire à Ox s'exerce la contrainte principale n_1 , et sur la face ab perpendiculaire à

Oy s'exerce la contrainte principale n_2 ; sur la face bc de normale orientée par l'angle Θ s'exercent une contrainte normale n et une contrainte tangentielle t qui ont pour valeurs :

$$n = n_1 \cos^2\theta + n_2 \sin^2\theta \quad (6.6)$$

$$t = (n_1 - n_2) \sin\theta \cos\theta$$

n et t sont donc, comme M_1 et M_2 proportionnels à z ; il en résulte que la face bc du prisme abc supporte par unité de longueur un moment fléchissant M et un moment de torsion C égaux à :

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} n z dz = M_1 \cos^2\theta + M_2 \sin^2\theta \quad (6.7)$$

$$C = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t z dz = (M_2 - M_1) \sin\theta \cos\theta$$

Nous savons que n et t sont les composantes du vecteur contrainte sur l'élément dont la normale est définie par l'angle Θ , et que, lorsque Θ varie, l'ensemble de ces vecteurs constitue le tenseur contraint. Les formules (6.7) montrent que l'ensemble des moments fléchissant et des moments de torsion supportés par les sections verticales passant par un point A du plan moyen constitue un tenseur symétrique du second ordre appelé tenseur flexion de la plaque au point A.

Recherchons les relations entre M et C d'une part, et w d'autre part. Prenons deux nouveaux axes de coordonnées $Ox'y'$ déduits de Oxy par une rotation d'angle Θ . Nous déduisons des relations (6) et (1) :

$$M = D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \cos^2\theta + \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \sin^2\theta + \sigma \left(\frac{d^2w}{dx^2} \sin^2\theta + \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \cos^2\theta \right) \right)$$

$$C = D (1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2} - \frac{d^2w}{dx^2} \right) \sin\theta \cos\theta$$

Mais, des formules de changements de coordonnées :

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \quad y = x' \sin\theta - y' \cos\theta$$

Nous déduisons :

$$\frac{\partial^2w}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \cos^2\theta + \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \sin^2\theta + 2 \frac{\partial^2w}{\partial x \partial y} \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{\partial^2w}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \sin^2\theta + \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \cos^2\theta - 2 \frac{\partial^2w}{\partial x \partial y} \sin\theta \cos\theta \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial^2w}{\partial x' \partial y'} = \left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \right) \sin\theta \cos\theta + \frac{\partial^2w}{\partial x \partial y} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Les formules (6.8) montrent que les dérivées secondes de w sont les composantes d'un tenseur symétrique du second ordre appelé tenseur courbure de la plaque.

Si nous tenons compte de ce que x' et y' sont les directions principales du tenseur courbure ($\frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'} = 0$), nous voyons que les formules (7) se réduisent à :

$$M = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} \right] , \quad C = D (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'} \quad (6.9)$$

Donc, dans le cas général où les directions principales ne sont pas parallèles aux axes Ox et Oy , les composantes du tenseur flexion et les composantes du tenseur courbure :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & C \\ C & M_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

sont liées par les formules fondamentales :

$$\begin{cases} M_1 = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_2 = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ C = D (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (6.10)$$

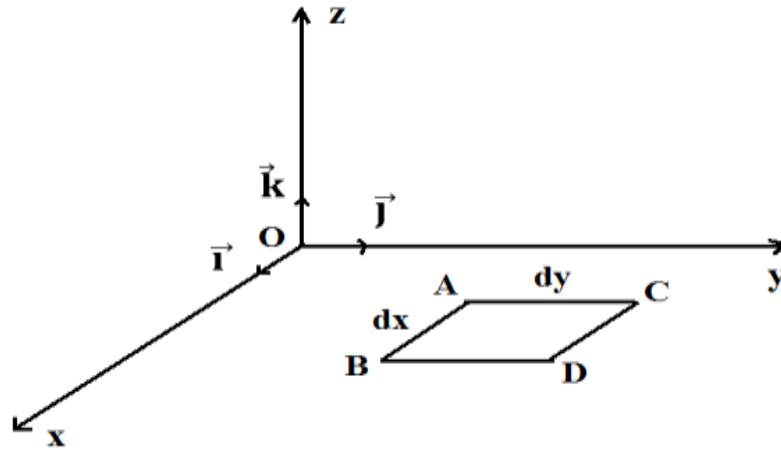
La signification géométrique des composantes du tenseur courbure est la suivante : w étant petit, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ sont respectivement les courbures et la torsion géodésique des lignes du plan moyen déformé situées dans des plans normaux à l'axe Ox et à l'axe Oy .

6.1.3 Flexion des plaques chargées transversalement

6.1.3.1 Equation de Lagrange

Nous désignerons par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unités des axes de coordonnées $Oxyz$ et par $p(x, y)$ la densité de charge, comptée positivement vers le bas, appliquée à la plaque. Écrivons les équations d'équilibre d'un élément de plaque ABCD (fig. 21.3) de côtés $AB=CD=dx$ parallèles à Ox , $AC=BD=dy$ parallèles à Oy . L'élément de plaque est soumis à une force extérieure :

$$- p \vec{k} \, dx \, dy$$



Le long du côté AB, l'élément est soumis :

- à une force $T_2 \vec{k} dx$
- aux couples $-M_2 \vec{i} dx$ et $C \vec{j} dx$.

T_2 désignant l'effort tranchant par unité de longueur le long de AB.

Le long du côté AC, l'élément est soumis :

- à une force $T_1 \vec{k} dy$
- aux couples $-C \vec{i} dy$ et $M_2 \vec{j} dy$.

T_1 désignant l'effort tranchant par unité de longueur le long de AC.

Le long du côté CD, l'élément est soumis :

- à une force $-(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial y} dy) \vec{k} dx$
- aux couples $-(M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial y} dy) \vec{i} dx$ et $-(C + \frac{\partial C}{\partial y} dy) \vec{j} dx$

Le long du côté BD, l'élément est soumis :

- à une force $-(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx) \vec{k} dy$
- aux couples $-(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx) \vec{j} dy$ et $-(C + \frac{\partial C}{\partial x} dx) \vec{i} dy$

En écrivant que la somme des forces et la somme des couples est nulle, nous obtenons les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = -p \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = T_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} = T_2 \end{cases} \quad (6.11)$$

Eliminons T_1 et T_2 ente les trois équations précédentes ; nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial y^2} = -p \quad (6.12)$$

Remplaçons M_1 , M_2 et C par leurs expressions (6.10), nous obtenons l'équation aux dérivées partielles de Lagrange :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p(x,y)}{D} \tag{6.13}$$

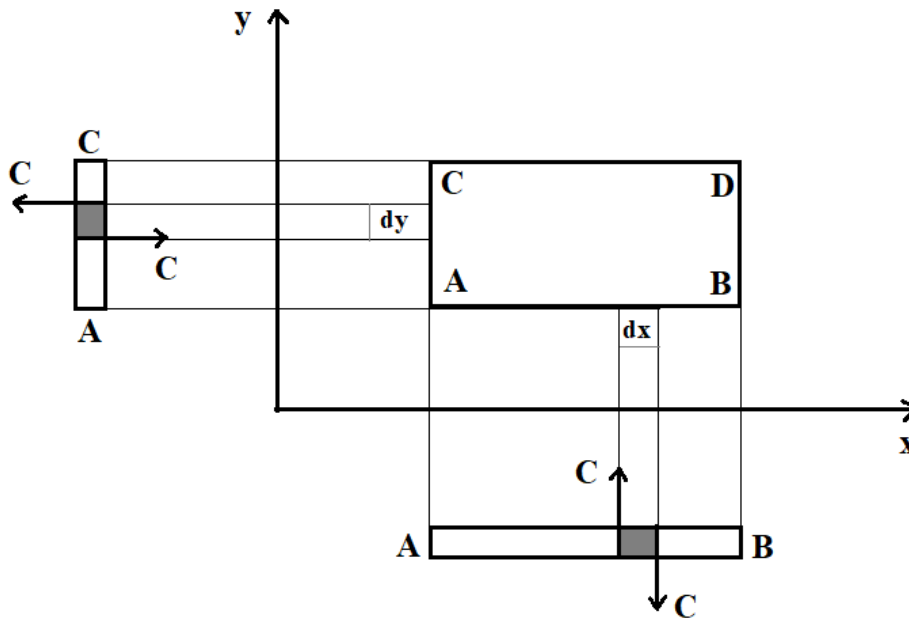
Ou, en désignant par ∇ l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$:

$$\nabla \nabla w = -\frac{p(x,y)}{D} \tag{6.14}$$

La fonction $w(x, y)$ est donc l'intégrale de l'équation de Lagrange qui vérifie les conditions aux limites que nous précisons. Connaissant w , les moments fléchissant M_1 et M_2 et le couple de torsion C sont donnés par les formules (10) ; les deux dernières équations (11) donnent les efforts tranchants :

$$T_1 = D \frac{\partial}{\partial x}(\nabla w), \quad T_2 = D \frac{\partial}{\partial y}(\nabla w) \tag{6.15}$$

Considérons (fig. 21.4) une plaque rectangulaire ABCD appuyée sur ses bords, et déterminons la réaction R_1 par unité de longueur le long du bord AC parallèle à Oy. L'effort tranchant T_1 produit une réaction égale à T_1 .



Il reste à évaluer la réaction équilibrant le couple de torsion C ; sur un élément dy de AC, le couple $C dy$ est équivalent à deux forces verticales :

C appliquée à l'ordonnée y et -C appliquée à l'ordonnée y+ dy ; en opérant de même pour tout les éléments du bord AC, nous voyons que le moment de torsion C est équilibré par une densité de réaction égale à $\frac{\partial C}{\partial y}$ donc :

$$R_1 = T_1 + \frac{\partial C}{\partial y} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^2 x \partial y}{\partial^3 w} \right] \quad (6.16)$$

De même, la réaction d'appui R_2 par unité de longueur le long du bord AB parallèle à Ox a pour valeur :

$$R_2 = T_2 + \frac{\partial C}{\partial x} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial^2 x \partial y} \right] \quad (6.17)$$

On généraliserait aisément ces résultats pour un bord de direction quelconque.

6.1.3.2 Conditions aux limites

Le déplacement transversal w (x, y) est l'intégrale de l'équation de Lagrange qui satisfait aux conditions aux limites sur le contour de la plaque. Examinons les conditions aux limites les plus courantes le long d'un bord que nous supposerons confondu avec Ox.

-Bord encasté

Les conditions aux limites sont, le long de Ox :

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (6.18)$$

-Bord simplement appuyé

-Les conditions aux limites sont, le long de Ox :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour } y = 0 \quad (6.19)$$

La seconde condition exprime que M_2 est nul.

Bord libre

Les conditions aux limites sont, le long de Ox :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial^2 x \partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (6.20)$$

Ces conditions expriment que M_2 et R_2 sont nuls.

6.1.4 Plaques circulaires symétriquement chargées

6.1.4.1 Généralités

Soit a rayon de la plaque et r la distance d'un point de la plaque au centre de la plaque ($0 \leq r \leq a$). Lorsque la densité de charge n'est fonction que de r et que les conditions d'appui sont les mêmes sur tout le pourtour de la plaque, w n'est également fonction que de r, et l'équation de Lagrange se réduit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = -\frac{p(r)}{D} \quad (6.21)$$

Que l'on peut encore écrire :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = - \frac{p(r)}{D} \quad (6.22)$$

Sous cette dernière forme, l'intégration est immédiate.

Le plan moyen de la plaque devient après déformation une surface de révolution dont les courbures principales sont le long d'un méridien et le long d'un parallèle. Les moments fléchissant principaux : M_r sur une section normale au rayon vecteur, et M_θ sur une section dirigée suivant le rayon vecteur, ont donc pour valeurs :

$$M_r = D \left[\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right], \quad M_\theta = D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \sigma \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (6.23)$$

Sur ces mêmes sections, le moment de torsion est nul.

6.1.4.2 Plaques circulaires uniformément chargées

Lorsque la densité de charge $p(r)$ est constante, l'intégrale générale de l'équation (22) s'écrit :

$$w = -p \frac{r^4}{64D} + A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r$$

Dans le cas d'une plaque qui ne comporte pas de trou central concentrique (plaque annulaire), les constantes A_3 et A_4 sont nécessairement nulles. Examinons le cas d'une plaque encastree sur le bord $r=a$. on détermine les constantes A_1 et A_2 en écrivant que w sont nuls pour $r=a$; nous obtenons ainsi la solution :

$$w(r) = - \frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (6.24)$$

Nous en déduisons les valeurs de et de au moyen des formules (23) :

$$M_r(r) = \frac{1}{16} p [(1 + \sigma)a^2 - (3 - \sigma)r^2]$$

$$M_\theta(r) = \frac{1}{16} p [(1 + \sigma)a^2 - (1 - 3\sigma)r^2]$$

Au centre de la plaque, $r=0$, nous trouvons :

$$M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{1 + \sigma}{16} p a^2$$

Au bord de la plaque, $r=a$, nous trouvons :

$$M_r(a) = - \frac{1}{8} p a^2 \quad M_\theta(a) = - \frac{\sigma}{8} p a^2$$

Pour trouver la solution relative au cas où la plaque est simplement appuyée sur le bord $r=a$, il suffit d'ajouter à la solution (24) la solution relative à l'application d'une densité de couple

$$M = \frac{1}{8} p a^2 \text{ sur le bord } r=a. \text{ nous savons, d'après la formule (4), que le déplacement } w \text{ dû à}$$

ces couples est :

$$w = -\frac{M}{2D(1+\sigma)}(a^2 - r^2) = -\frac{p a^2}{2D(1+\sigma)}(a^2 - r^2)$$

Nous obtenons donc la solution :

$$w(r) = -\frac{p}{64D}(a^2 - r^2) \left[\frac{5+\sigma}{1+\sigma} a^2 - r^2 \right] \tag{6.25}$$

Nous en déduisons les valeurs de M_r et M_θ au moyen des formules (23) :

$$M_r(r) = \frac{1}{16} p (3 + \sigma)(a^2 - r^2), \quad M_\theta(r) = \frac{1}{16} p [(3 + \sigma)a^2 - (1 + 3\sigma)r^2]$$

Au centre de la plaque, $r=0$, nous trouvons :

$$M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{3 + \sigma}{16} p a^2$$

Au bord de la plaque, $r=a$, nous trouvons :

$$M_r(a) = 0, \quad M_\theta(a) = \frac{1-\sigma}{8} p a^2$$

6.5 Coques

6.5.1 Cylindriques verticaux

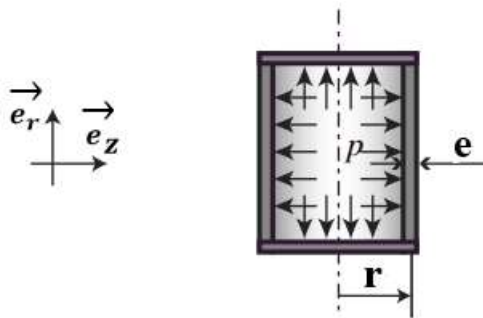
σ_z : Contrainte suivant l'axe du cylindre

σ_θ : Contrainte perpendiculaire à l'axe du cylindre

δ : Déformation radiale

a-Pression interne uniforme

- Extrémités fermées

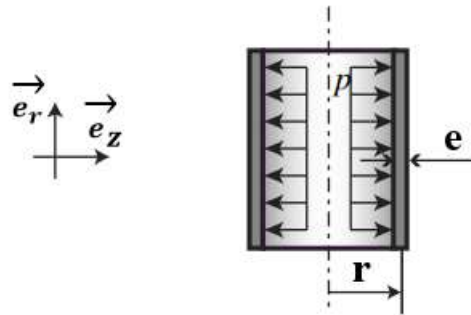


$$\sigma_z = \frac{pr}{2e} \tag{6.26}$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{e} \tag{6.27}$$

$$\delta = \frac{pr^2}{2Ee}(2 - \nu) \tag{6.28}$$

-Extrémités ouvertes



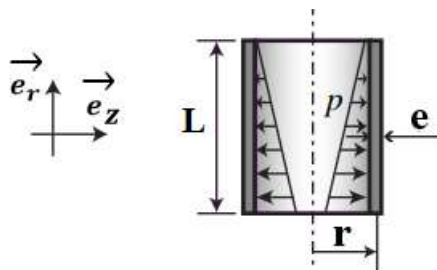
$$\sigma_z = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{e} \tag{6.29}$$

$$\delta = \frac{pr^2}{Ee} \tag{6.30}$$

b-Pression interne linéaire

$$p(z) = P_0 \frac{z}{L} \tag{6.31}$$

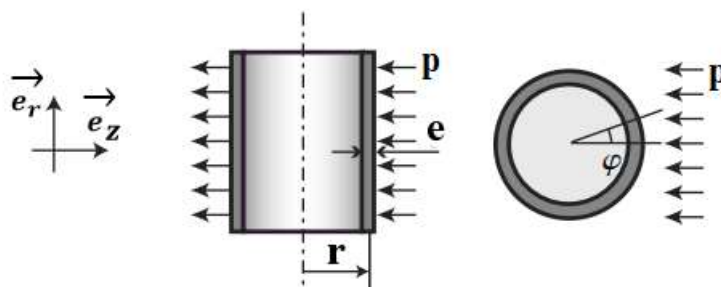


$$\sigma_z = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_0 r z}{eL} \tag{6.32}$$

$$\delta = \frac{P_0 r^2 z}{EeL} \tag{6.33}$$

c-Pression externe due au vent



$$\sigma_z = p \frac{d^2}{2r} \cos\varphi \tag{6.34}$$

$$\sigma_\theta = -pr \sin\varphi \tag{6.35}$$

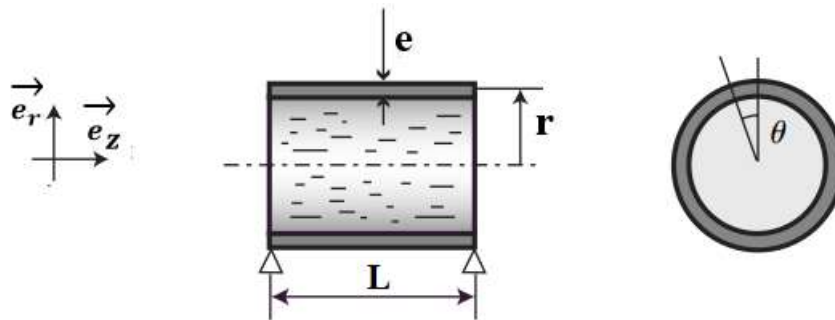
6.5.2 Cylindres horizontaux remplis par un liquide

ρ : densité du liquide

g : accélération de la pesanteur

$p_0 = \rho g 2r$: pression maximale

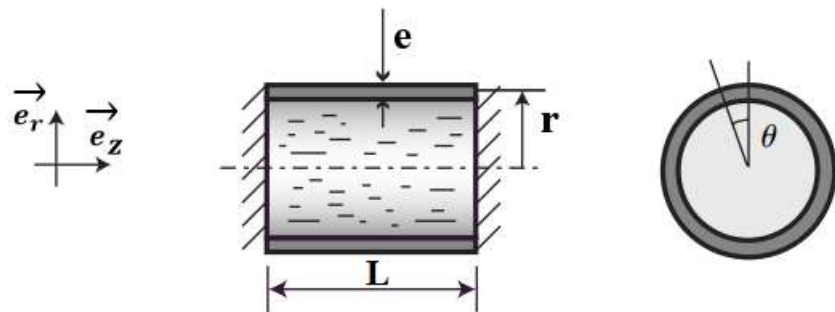
a-Extrémités simplement appuyées



$$\sigma_z = -\frac{\rho g}{2e} z(L - z) \cos\theta \tag{6.36}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho g}{e} (p_0 r - \rho g r^2 \cos\theta) \tag{6.37}$$

-Extrémités encastées



$$\sigma_z = -\frac{\rho g}{2e} z(L - z) \cos\theta + \frac{\vartheta p_0 a}{e} + \left(\frac{e}{12} - \vartheta r^2\right) \frac{\rho g}{e} \cos\theta \tag{6.38}$$

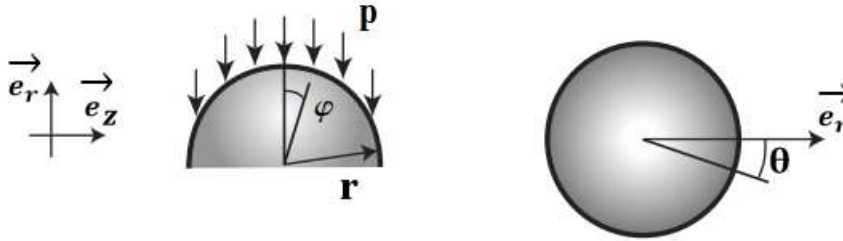
$$\sigma_\theta = \frac{1}{e} (p_0 r - \rho g r^2 \cos\theta) \tag{6.39}$$

6.5.3 Coupole sphérique fermée

e : épaisseur de la coupole

r : rayon

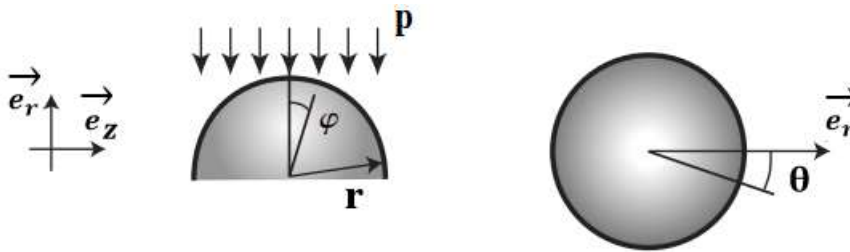
a-Charge p uniforme (poids propre)



$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{e(1+\cos\varphi)} \tag{6.40}$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{e} \left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi} \right) \tag{6.41}$$

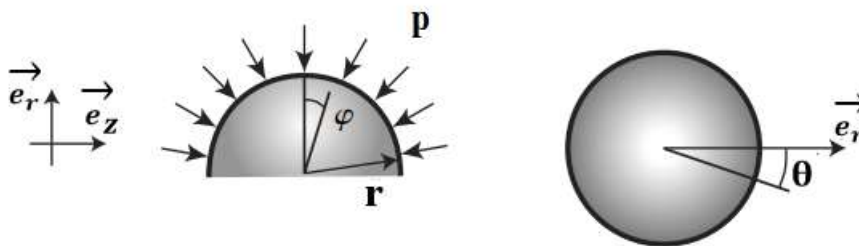
b-Charge p uniforme par unité de surface projetée (neige)



$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{2e} \tag{6.42}$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{2e} \cos(2\varphi) \tag{6.43}$$

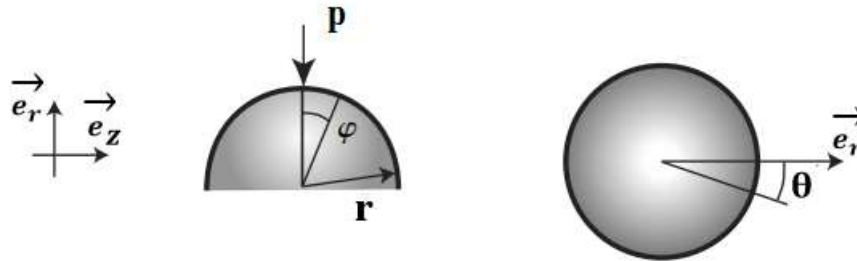
c-Pression p extérieure



$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{2e} \tag{6.44}$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{2e} \tag{6.45}$$

d-Charge P au sommet



$$\sigma_\varphi = \frac{-p}{2\pi r \sin^2 \varphi} \tag{6.46}$$

$$\sigma_\theta = \frac{-p}{2\pi r \sin^2 \varphi} \tag{6.47}$$

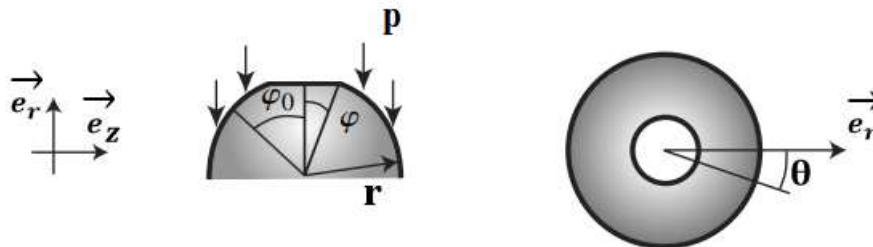
6.5.4 Coupole sphérique ouverte

e : épaisseur de la coupole

r : rayon

φ_0 : angle d'ouverture de la coupole

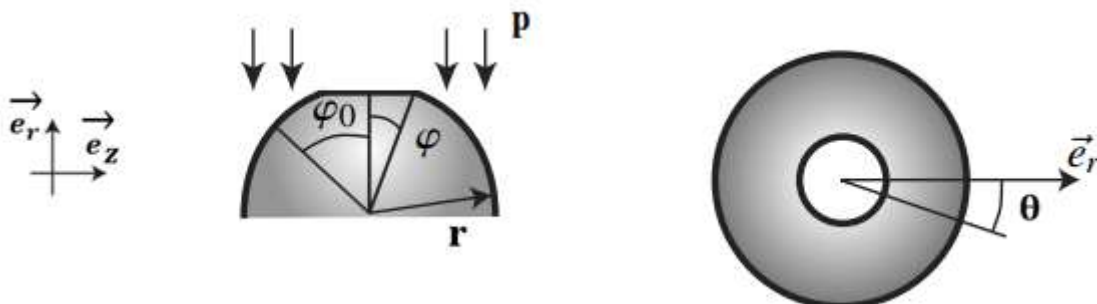
a-Charge p uniforme (poids propre)



$$\sigma_\varphi = \frac{pr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{e \sin^2 \varphi} \tag{6.48}$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{e \sin^2 \varphi} - \cos\varphi \tag{6.49}$$

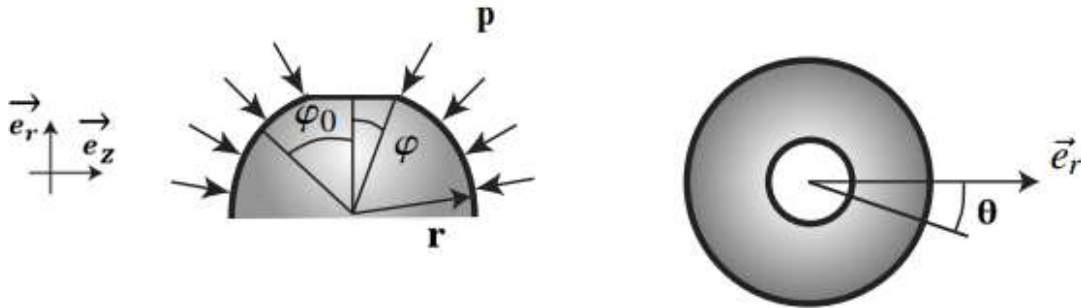
b-Charge p uniforme par unité de surface projetée (neige)



$$\sigma_\varphi = \frac{Pr}{2e} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right) \tag{6.50}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr}{2e} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} - 2 \cos^2 \varphi \right) \quad (6.51)$$

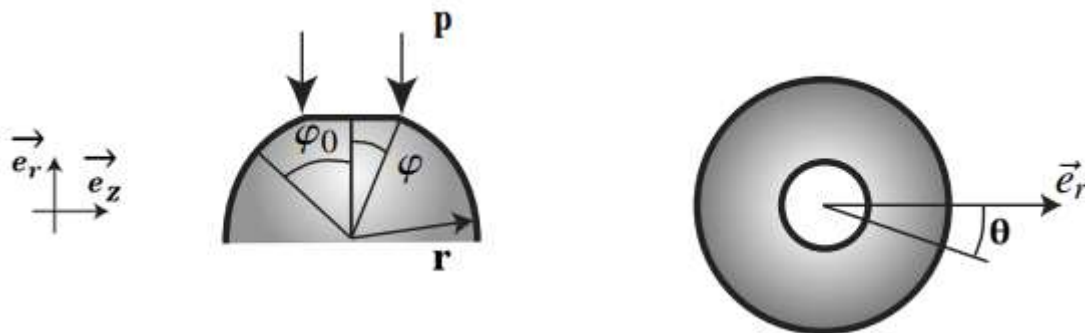
c-Pression p extérieure



$$\sigma_{\varphi} = \frac{Pr}{2e} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right) \quad (6.52)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr}{2e} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right) \quad (6.53)$$

-Charge P en bordure du sommet



$$\sigma_{\varphi} = -\frac{P}{e} \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \quad (6.54)$$

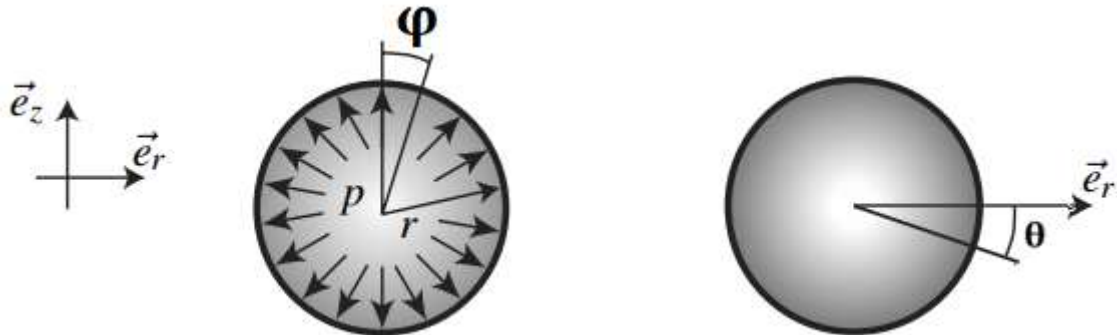
$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{e} \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \quad (6.55)$$

6.5.5 Coque sphérique

e : épaisseur de la coque

r : rayon

a-Pression interne p

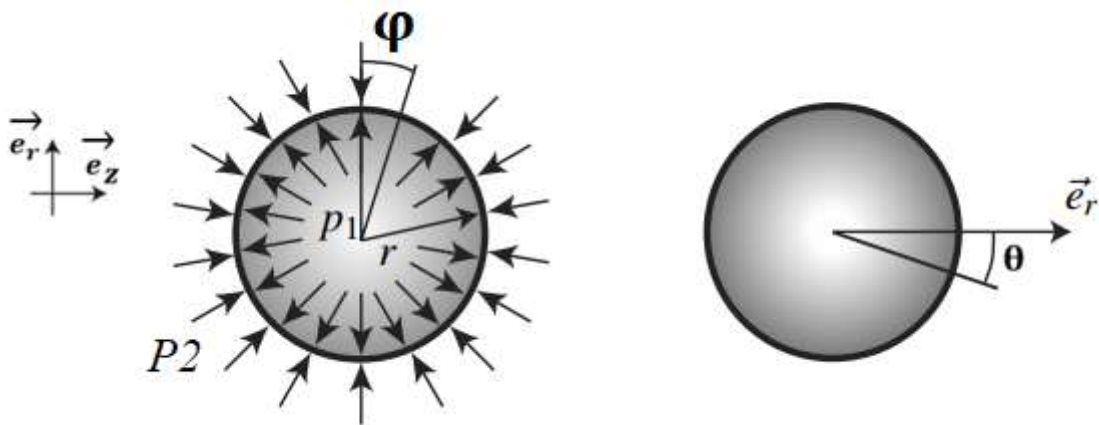


$$\sigma_r = \frac{Pr}{2e} \tag{6.56}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{Pr}{2e} \tag{6.57}$$

$$\delta = \frac{Pr^2}{2Ee} (1 - \nu) \tag{6.58}$$

b-Pression interne p1 et pression externe p2



$$\sigma_r = \frac{r_2^3 p_2 + r_1^3 p_1}{2(r_1^3 - r_2^3)} - \frac{p_2 - p_1}{r_1^3 - r_2^3} \tag{6.59}$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_2^3 p_2 + r_1^3 p_1}{2(r_1^3 - r_2^3)} + \frac{p_2 - p_1}{r_1^3 - r_2^3} \tag{6.60}$$

Références

- [1] Timothy A. Philpot, Mechanics Of Materials:An Integrated Learning System. Missouri University Of Science And Technology Rolla, Missouri
- [2] James M. Gere, Mechanics of Materials Sixth Edition, 2004
- [3] Stephen H Crandall, Borman C Dahi , Thomas J Lardner , An introduction to mechanics of solids
- [4] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., John T. Dewolf, David F. Mazurek Mechanics Of Materials, Sixth Edition, 2012
- [5] Hibbeler R. C, Mechanics of Materials Ninth Edition, 2014
- [6] Budynas-Nisbett, Mechanical Engineering Shigley's Mechanical Engineering Design, Eighth Edition, 2006
- [7] William A. Nash, Merle C. Potter, Strength of Materials Fifth Edition, 2011
- [8] P. STEPINE, Résistance des matériaux édition MIR. MOSCOU, 1998
- [9] R. BASQUIN, G. LEMASSON, Résistance des matériaux cours de mécanique, 1988
- [10] Stephen H Crandall, Norman C Dahl, Thomas J Larnder: In introduction to the mechanics of solids