Université des sciences et de la technologie USTO-MB Oran

Département de Génie Physique

Faculté de Physique

Polycopié de Cours et exercices résolus

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Destiné aux étudiants en:

1^{ere} Année (L.M.D) Sciences et Technologie (S.T) et Sciences de la Matière (SM))

Élaboré par:

Dr: BELKHARROUBI - FADILA

Année universitaire 2022 -2023

Sommaire

Chapitre I: Rappel mathématique

I.1. Grandeurs physiques et dimension 3

I.1.1 Une grandeur physique 3

I.1.2 Une grandeur physique 3

I.1.3 Grandeurs de base 3

I.1.4 Grandeurs dérivées 4

I.1.5 Choix des unités de mesure 4

I.1.5.1 Le Système International 4

I.1.5.2 Multiples et sous-multiples 7

I.1.5.3 Autres systèmes d'unités 7

I.1.6 Analyse dimensionnelle 8

I.1.7. Equation en dimension d'une grandeur 8

Exercice corrigés 9

I.2 Erreurs et incertitudes 15

I.2.1 Erreur 15

I.2.2 Erreur absolue-Incertitude absolue 16

I.2.3 Erreur relative et incertitudes relatives 17

I.2.4. Calcul des incertitudes: 17

Exercice corrigés 18

1.3. Calcul vectoriel 25

I.3.1 Grandeur scalaires et grandeur vectorielle 25

I.3.2 Représentation d'un vecteur 25

I.3.3 Propriétés des vecteurs 26

I.3.3.1. Vecteur libre 26

I.3.3.2. Vecteur glissant 26

I.3.3.3. Vecteur lié 26

I.3.3.4. Vecteurs unitaires 27

I.3.3.5. Orientation de l'espace et du plan 27

I.3.3.6. Vecteurs égaux 28

I.3.3.7. Vecteurs opposés 28

I.3.4. Coordonnées d'un point dans différents systèmes 29

I.3.4.1. Coordonnées cartésiennes 29

I.3.4.2. Coordonnées polaires 30

I.3.4.3. Coordonnés cylindriques 31
I.3.4.4. Coordonnés sphériques 31
I.3.5. Opérations sur les vecteurs 31
I.3.5.1. Somme des vecteurs . 31
I.3.5.2. Soustraction des vecteurs 34
I.3.5.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire 34
I.3.5.4. Produit scalaire de deux vecteurs: 34
I.3.5.5. Produit vectoriel de deux vecteurs 35
I.3.5.6. Produit mixte de trois vecteurs 36
I.3.6. Dérivée d'un vecteur: 38
I.3.6. Règles de dérivation 38
I.3.8. Les opérateurs différentiels: 39
I.3.8.1 Les principaux opérateurs et leurs propriétés 39
I.3.8.2 L'opérateur nabla 39
I.3.8.3 L'opérateur gradient $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ 39
I.3.8.4 L'opérateur divergence $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\vec{\boldsymbol{F}}$ 40
I.3.8.**5** L'opérateur rotationnel $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$ 41
I.3.8.6 L'opérateur laplacien 42
Exercices corrigés 43

Chapitre II. Cinématique du point matériel
II.1 Introduction 48
II.2 Référentiels 48
II.2.1 Définition du référentiel d'étude 48
II.2.2 Les référentiels galiléens 48
II.3 Les repères 50
II.3.1 Le repère temps 50
II.3.2 Le repère d'espace 50
II.4. Description du mouvement d'un point matériel 52
II.4.1 Equations horaires & Trajectoires 52
II.4.1.1 Equations horaires ou équations paramétriques 52
II.4.1.2 Trajectoire 53
II.4.2. Vecteur déplacement 54
II.4.3. Vecteur position 55
II.4.3.1. Vecteur position en coordonnées cartésiennes 55

II.4.3.2. Vecteur position en coordonnées polaires 56
II.4.3.3. Vecteur position en coordonnées cylindriques 57
II.4.3.4. Vecteur position en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) 59
II.4.3.5. Abscisse curviligne et base de Frenet 61
II.4.4. Vecteur vitesse moyenne 62
II.4.5. Vitesse instantanée 63
II.4.5.1. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes 64
II.4.5.2. Vecteur vitesse en coordonnes polaires 65
II.4.5.3. Vecteur vitesse en coordonnes cylindriques 67
II.4.5.4. Vecteur vitesse en coordonnes sphériques 67
II.4.5.5. Vecteur vitesse dans la base de Frénet 68
II.4.5.6. Vecteur vitesse angulaire 69
II.4.6.Vecteur accélération moyenne 70
II.4.7.Vecteur accélération instantanée 70
II.4.7.1. Vecteur accélération en coordonnées cartesiennes 71
II.4.7.2. Vecteur accélération en coordonnées polaires 71
II.4.7.3. Vecteur accélération en coordonnées cylindriques 72
II.4.7.4. Vecteur accélération en coordonnées curvilignes 72
Exercices corrigés ***73***
II.5 Exemples de mouvements 80
II.5.1 Généralités sur les mouvements rectilignes 80
II.5.1.1. Mouvement rectiligne uniforme 80
II.5.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié 82
II.5.1.3. Mouvement rectiligne quelconque 83
II.5.1.4. Mouvement rectiligne sinusoïdal 83
II.5.2.Mouvement plan 86
II.5.2.1. Mouvement circulaire uniforme 86
II.5.2.2. Mouvement parabolique 89
Exercices corrigés 92
II.6 Le mouvement relatif 101
II.6.1. Vecteur position 101
II.6.2 Vecteur vitesse 102
II.6.3 Vecteur accélération 103
Exercices corrigés 103

Chapitre III. Dynamique du point matériel

III.1 Introduction 110
III.2 Généralités 110
III.2.1 Concept de masse 110
III.2.2. Système isolé 110
III.2.3. Système pseudo-isolé 110
III.2.4. Référentiel Galiléen 110
III.3. Notion de forces 111
III.4. Les différents types de force 112
III.4.1. Les types de forces à contact 112
III.4.2. Les types de forces à distance 118
III.5. Quantité de mouvement 120
III.6.Lois de Newton 121
III.6.1. Première loi de Newton – Principe d'inertie 121
III.6.2. Deuxième loi de Newton – Principe fondamental de la dynamique 121
III.6.3. Troisième loi de Newton – Principe des actions réciproques 121
III.7.. La conservation de la quantité de mouvement 122
III.8. Moment cinétique 123
III.8.1. Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point 123
III.8.2. Moment cinétique en O' différent de O 124
III.8.3. Moment cinétique par rapport à un axe 124
III.9. Moment d'une force 125
III.9.1. Moment d'une force par rapport à un point 125
III.9.2. Moment de force en A' différent de A 126
III.9.3. Moment d'une force par rapport à un axe 126
III.9.4. Interprétation physique du moment de force 127
III.10. Notion de mécanique du solide : moment d'inertie 128
III.10.1. Le moment d'inertie 128
III.10.2. Exemples de moment d'inertie 128
III.11. Théorème du moment cinétique 129
III.11.1. Par rapport à un point fixe 129
III.11.2. Exemple du pendule simple 129
III.12. Conservation du moment cinétique –forces centrales 131
III.12.1. Forces centrales 131
III.12.2. Conservation du moment cinétique 131
Exercices corrigés 132

Chapitre IV: Travail et énergie

IV.1. Le travail d'une force 142
IV.2. Énergie cinétique 143
IV.3. Forces conservatives ou force dérivant d'un potentiel 144
IV.4. L'énergie potentielle 144
IV.4.1. Énergie potentielle de pesanteur 144
IV.4.2. L'énergie potentielle élastique 145
IV.5. Expression du champ de force conservative à partir de l'énergie potentielle 145
IV.6. Energie mécanique totale ou énergie totale 146
IV.7. Principe de la conservation de l'énergie totale 146
Exercices corrigés 147
Références 159

Avant propos

C'est avec un immense plaisir que je vous présente ce polycopié intitulé "**Mécanique du Point Matériel**". Conçu spécialement pour les étudiants de première année (LMD) en Sciences et Technologies (ST) ainsi qu'en Sciences de la Matière (SM), ce document se veut être un outil essentiel pour votre apprentissage dans le domaine passionnant de la mécanique.

Composé de quatre chapitres distincts, ce polycopié couvre l'essentiel des connaissances requises pour une bonne maîtrise des concepts fondamentaux de la mécanique du point matériel. Le premier chapitre propose un rappel mathématique, destiné à vous remettre en mémoire les bases nécessaires à la compréhension des développements futurs. Il jette les bases sur lesquelles s'appuieront les chapitres suivants. Le deuxième chapitre, axé sur la cinématique du point matériel, vous guidera à travers l'étude des mouvements sans considération des causes qui les produisent. Vous y découvrirez les notions de position, de vitesse et d'accélération, éléments cruciaux pour comprendre les dynamiques plus avancées que nous aborderons par la suite. Le troisième chapitre sera consacré à la dynamique du point matériel. Vous y explorerez les lois qui régissent les mouvements sous l'influence des forces. Vous apprendrez à résoudre des problèmes complexes mettant en jeu l'interaction entre les corps, et à déterminer les accélérations et les trajectoires qui en résultent. Enfin, le quatrième chapitre abordera les notions d'énergie et de travail. Vous comprendrez l'importance fondamentale de ces concepts dans l'analyse des systèmes mécaniques. Vous serez amenés à calculer les énergies cinétique et potentielle, et à appréhender le concept de conservation de l'énergie, un principe central en mécanique.

Ce polycopié a été conçu avec soin pour vous offrir un support de travail complet et adapté à vos besoins. Les exercices résolus qui parsèment ce document ont été choisis avec attention pour vous permettre de mettre en pratique les connaissances acquises et ainsi consolider votre compréhension.

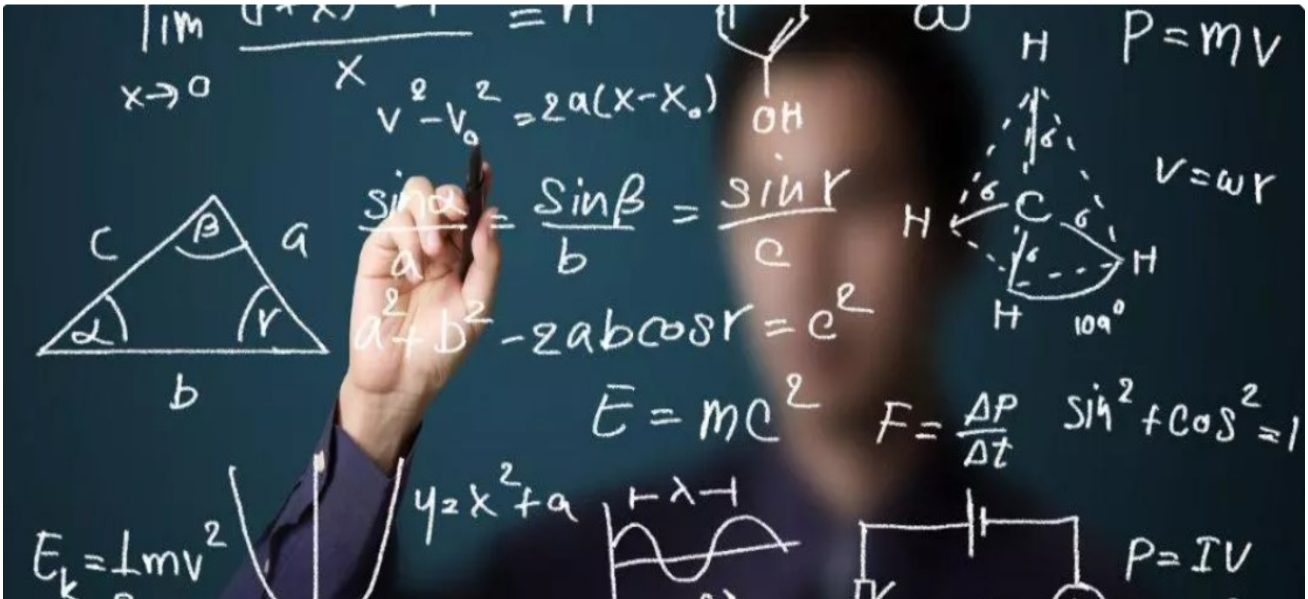
J'espère sincèrement que ce polycopié vous sera d'une grande utilité dans votre parcours académique. Que ce document devienne un allié fidèle dans votre apprentissage de la mécanique du point matériel.

Je vous souhaite une excellente lecture et un succès éclatant dans vos études.

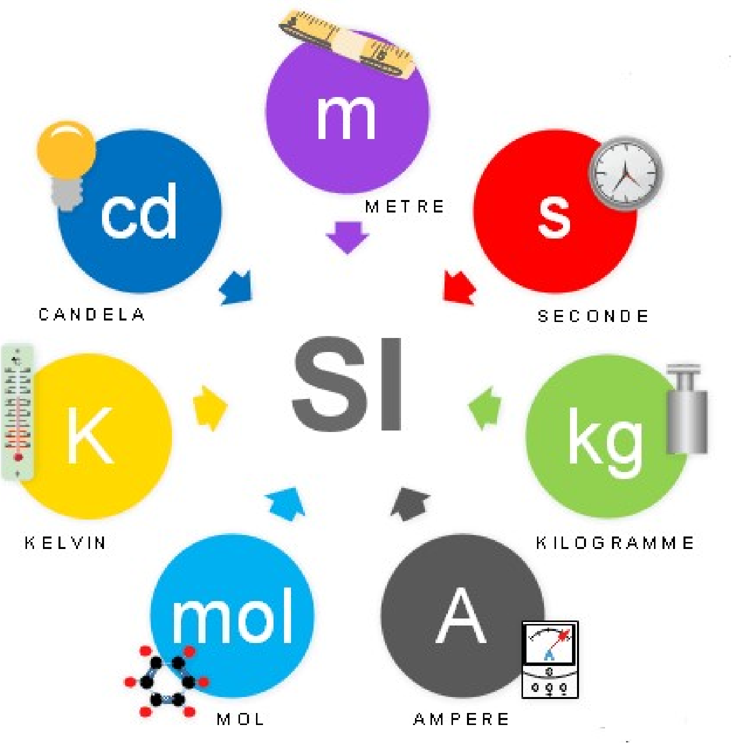
Dr Belkharroubi Fadila

Chapitre I

Rappel mathématique



Grandeurs physiques et dimension



I.1. Grandeurs physiques et dimensions

On appelle grandeur physique, ou simplement grandeur, toute propriété de la science de la nature qui peut être mesurée ou calculée, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre réel quelconque ou d'un nombre complexe, souvent accompagné d'une unité de mesure

Il existe des grandeurs physiques scalaires et vectorielles:

I.1.1 Une grandeur physique scalaire est une quantité physique qui n'est spécifié que par sa grandeur. On peut l'exprimer avec un nombre, suivi ou non d'une unité (1 kg, 30 sec, 3 °C, ...).

I.1.2 Une grandeur physique vectorielle qui est spécifié par avec une grandeur, une direction et un sens. **Exemple**: le poids $\vec{P}$, la vitesse $\vec{V}$

I.1.3 Grandeurs de base

Par convention, les grandeurs physiques sont organisées selon un système de dimensions. Chacune des sept grandeurs de base du système international d'unités (SI) est supposée avoir sa propre dimension, représentée symboliquement par une seule lettre majuscule sans empattement. Les symboles utilisés pour les grandeurs de base, et les symboles utilisés pour indiquer leur dimension, sont les suivants:

la masse (symbole: [M]), le temps (symbole:[T]), la longueur (symbole:[L]), ainsi que l'intensité électrique (symbole:[I])

Tableau I.1 : Grandeurs de base et leur dimension dans le système (SI) .

Grandeur physique	Notation usuelle	Dimension
Longueur	l	L
Masse	m	M
Temps	t	T
Intensité éléctrique	i	I
Température	θ	θ
Intensité lumineuse	I	J
Quantité de matiére	n	N

I.1.4 Grandeurs dérivées

Toutes les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées, qui peuvent être exprimées en fonction des grandeurs de base à l'aide des équations de la physique. Les dimensions des grandeurs dérivées sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions des grandeurs de base au moyen des équations qui relient les grandeurs dérivées aux grandeurs de base.

Exemples :

La *surface* [L^2], le *volume* [L^3], la *force* [MLT^{-2}], la *quantité d'électricité* [IT]

Tableau 2 : Quelques grandeurs dérivées et leurs dimensions dans le système (SI)

Grandeur physique	Notation usuelle	Dimension
Vitesse linéaire	V	LT^{-1}
Vitesse angulaire, pulsation	Ω, ω	T^{-1}
Accélération linéaire	a, γ	LT^{-2}
Accélération angulaire		T^{-2}
Fréquence	f	T^{-1}
Force	F	MLT^{-2}
Moment d'inertie	J	ML^2
Pression	P	$ML^{-1}T^{-2}$
Travail, énergie, quantité de chialeur	W, Q	$ML^2T\text{-}^2$
Puissance	P	ML^2T^{-3}
Quantité d'électricité	q	TI
Potentiel électrostatique	V	$ML^2T^{-3}I^{-1}$
Champ électrique	E	$ML^2T^{-3}I^{-1}$
Capacité	C	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$
Résistance électrique	R	$ML^2T^{-3}I^{-2}$
Champ d'induction magnétique	B	$MT^{-2}I^{-1}$
Flux	Φ	$ML^2T^{-2}I^{-1}$
Champ d'excitation magnétique	H	L^{-1} I
Coefficient d'inductance	L	$ML^2T^{-2}I^{-2}$

I.1.5 Choix des unités de mesure

Un système d'unités est basé sur des unités fondamentales (ou de base) et des unités dérivées

I.1.5.1 Le Système International

a. Unités de base:

Les unités de base du système S.I. sont données dans le .**Tableau 3**

Le **KILOGRAMME** (défini initialement comme la masse d'un décimètre cube d'eau à 4°C) correspond depuis 1889 à la masse de l'étalon en platine iridié déposé au pavillon de Breteuil. C'est la seule unité encore définie par rapport à un objet matériel, donc susceptible de s'altérer. Actuellement, des recherches ont donc lieu pour remplacer cette définition par une autre, utilisant cette fois un phénomène physique.

Le **MÈTRE** (défini initialement en 1791 comme la 40 millionième partie du méridien terrestre, puis à partir de la longueur d'onde d'une radiation du krypton) correspond depuis 1983 à la distance parcourue dans le vide par la lumière en 1/299 792 458 de seconde.

La **SECONDE** (défini initialement comme la division du jour terrestre en 24hx60minx60s) correspond depuis 1967 à 9 192 631 770 périodes de la radiation émise à l'état fondamental par le césium 133 lors d'une transition entre deux niveaux hyperfins.

L'**AMPÈRE** est défini depuis 1948 comme l'intensité du courant qui produirait une force de 2.10^{-7} N par mètre de longueur entre deux conducteurs rectilignes infinis parallèles situés à 1 m l'un de l'autre dans le vide (voir cours d'électromagnétisme).

Le **KELVIN** est défini depuis 1967 comme étant égal à $1/273{,}16^{\text{ème}}$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

La **MOLE** est définie depuis 1971 comme le nombre d'atomes contenus dans 12g de carbone 12 (soit environ $6{,}022.10^{23}$ atomes : c'est le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A$)

Le **CANDELA** est défini depuis 1967 comme l'intensité lumineuse, dans la direction perpendiculaire, d'une surface de 1 / 600 000 m^2 d'un corps noir, à la température de congélation du platine, sous la pression de 101 325 Pa.

Tableau 3 : Unités de base dans le système (SI) .

Grandeur physique	**Nom de l'unité**	**Symbole de l'unité**
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité électrique	ampère	A
Température	Kelvin	°K
Intensité lumineuse	candela	cd
Quantité de matière	mole	mol

b. Unités dérivées:

Certaines unités secondaires (ou dérivées) peuvent porter des noms particuliers (**Tableau 4**):

Tableau 4 : Unités secondaires portant des noms particuliers

	Grandeur dérivée	unité	Nom de l'unité	symbole
Temps	Fréquence	s^{-1}	hertz	Hz
mécanique	Force	$Kg\ m\ s^{-2}$	newton	N
	Pression, contrainte	$N\ m^{-2}$	pascal	Pa
	Energie, travail	N m	joule	J
	puissance	$J\ s^{-1}$	watt	W
électromagnétisme	Quantité d'électricité, charge	As	coulomb	C
	Potentiel, fem	$W\ A^{-1}$	volt	V
	Capacitance	CV^{-1}	farad	F
	résistance électrique	VA^{-1}	ohm	Ω
	conductance	AV^{-1}	siemens	S
	flux magnétique	V s	weber	Wb
	Densité du flux magnétique	$Wb\ m^{-2}$	tesla	T
	inductance	$Wb\ A^{-1}$	henry	H
optique	Flux lumineux	Cd sr	lumen	lm
	éclairement	$Cd\ sr\ m^{-2}$	lux	lx
nucléaire	Activité	s^{-1}	becquerel	Bq
	Dose absorbée	$J\ kg^{-1}$	gray	Gy
	Equivalent dose	$J\ kg^{-1}$	sievert	Sv

On peut ajouter que l'unité d'angle plan est le radian (rad) et que celle d'angle solide est le stéradian (sr), toutes deux sans dimension puisque définies comme étant le rapport de deux longueurs (angle plan) ou de deux surfaces (angle solide).

Tableau 5: Unités de mesure des angles

unité	Nom	symbole
Angle plan	Radian	rad
Angle solide	steradian	sr

I.1.5.2 Multiples et sous-multiples

Les **préfixes du** système international d'unité simplifient la manipulation des mesures qui ont des rapports élevés d'unité (par exemple, de 0,1 cm à 1000 m). Ces préfixes renvoient à des multiples et des fractions de 10 ou de 1000.

Tableau 6: Préfixes en SI

facteur	préfixe	symbole		facteur	préfixe	symbole
10^{24}	yotta	Y		10^{-24}	.yocto	y
10^{21}	zetta	Z		10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E		10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P		10^{-15}	femto	f
10^{12}	téra	T		10^{-12}	pico	p
10^{9}	giga	G		10^{-9}	nano	n
10^{6}	méga	M		10^{-6}	micro	µ
10^{3}	kilo	k		10^{-3}	milli	m
10^{2}	hecto	h		10^{-2}	centi	c
10^{1}	déca	da		10^{-1}	déci	d

I.1.5.3 Autres systèmes d’unités:

Système (CGS) (trois grandeurs et unités de base)

Le système centimètre-gramme-seconde (abrégé ou CGS) est un système métrique d'unités physiques basées sur:

C le centimètre comme unité de longueur,

G le gramme comme unité de masse,

S la seconde comme unité de temps.

Il permet d'exprimer toutes les grandeurs de la mécanique.

Tableau7: Unités essentielles du système CGS

	Unité de	nom	symbole	Valeur en SI
Unité de base	Longueur	centimètre	cm	10^{-2} m
	Masse	gramme	g	10^{-3} kg
	Temps	seconde	s	
	température	Kelvin	K	
Unité dérivée	Force	dyne	dyn	10^{-5} N
	Travail	erg	erg	10^{-7} J
	Viscosité dynamique	poise	P	0.1 Pa s
	Viscosité cinématique	stokes	St	10^{-4} m^2s^{-1}

Système (MKSA):

Le Système MKSA (quatre grandeurs et unités de base)

M: le mètre comme unité de longueur,

K: le kilogramme comme unité de masse,

S: la seconde comme unité de temps.

A: l'ampère comme unité de l'intensité du courant électrique

I.1.6 Analyse dimensionnelle

L'intérêt premier de l'analyse dimensionnelle est de vérifier l'homogénéité d'une expression physique.

Une équation est dite homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension. Par conséquent toute expression non homogène est forcément fausse, et toute expression homogène est peut-être exacte.

La dimension d'une grandeur X est notée : **[X]**

I.1.7. Equation en dimension d'une grandeur

En général la dimension d'une grandeur X s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel:

$$\boxed{dimX = [X] = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}I^{\delta}\Theta^{\varepsilon}N^{\zeta}J^{\eta}}$$

Où les exposants α, β, γ, δ, ϵ, ζ et η, qui sont en général de petits nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, sont appelés exposants dimensionnels

Les conséquences sont les suivantes :

- on ne peut additionner que des termes ayant la même dimension ;
- la dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de ces deux grandeurs ;
- l'argument d'une fonction transcendante (sinus, cosinus, tangente, exponentielle, logarithme, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique) doit être sans dimension ;

Exercices corrigés

Exercice 1: Dimension de la constante de Boltzmann

En thermodynamique l'énergie d'une particule est donnée par:

$$E = \frac{3}{2}\, k\, T$$

T est la température, k la constante de Boltzmann

Déterminer $[k]$

Solution:

La dimension de l'énergie sera déterminé a partir de la relation de l'énergie **:**

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2}$$

E_c: énergie cinétique

m: masse

v: vitesse

$\left[\frac{1}{2}\right] = 1$ Une grandeur sans dimension est une grandeur de dimension 1.

$$[m] = M$$

$$[v] = L\, T^{-1}$$

D'où:

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v^2]$$

$$[E_c] = 1\, M\, (L\, T^{-1})^2$$

$$[E_c] = M\, L^2\, T^{-2}$$

La dimension de la constante de Boltzmann

$$\boldsymbol{[k] = \frac{[E]}{[T]}}$$

$$[k] = \frac{M\, L^2\, T^{-2}}{\Theta}$$

La dimension de $[k]$ est:

$$\boldsymbol{[k] = M\, L^2\, T^{-2}\, \Theta^{-1}}$$

L'unité de k dans SI est:

Kg m^2 s^{-2} °K^{-1} (≡ J. K^{-1})

Exercice 2:

On suppose que la période d'oscillation dépend de m, l, g. Elle ne dépend pas de θ. Si θ est petit, on écrira alors:

$$T = k\, l^a\, m^b\, g^c$$

Ou k est une constante sans dimension.

Vérifier l'homogénéité de l'équation

Solution:

Soit:

$$[T] = [k]\,[l^a]\,[m^b]\,[g^b]$$

$$T = L^a\, M^b\, (L\, T^{-2})^c$$

$$T = L^{a+c} M^b\, T^{-2}$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ -2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T = k\, l^{1/2}\, g^{-1/2}}}$$

D'où:

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Sachant que: k = 2 π

La formule de la période:

$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

Exercice 3:

1 Retrouver l'expression en unité de base du joule, unité de l'énergie sachant que l'énergie cinétique est telle que: $E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

Solution:

1. Unité de base du joule

On a:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \;\Leftrightarrow\; J \;= kg\,.(m\, s^{-1})^2$$

Soit: $J \;= kg\, m^2 s^{-2}$

L'unité de $\boldsymbol{J}$ dans SI est:

$$\boldsymbol{J \;= kg\, m^2 s^{-2}}$$

Exercice 4:

Retrouver la dimension et l'unité de la masse volumique ρ sachant que: $\rho = \frac{m}{V}$

Solution:

Analyse dimensionnelle

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} \;\Longrightarrow\; [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

D'où:

$$[\rho] = M\, L^{-3}$$

La dimension de $[\rho]$ est:

$$\boldsymbol{[\rho] = M\, L^{-3}}$$

L'unité de $\boldsymbol{\rho}$ dans SI est:

$$\boldsymbol{kg\, m^{-3}}$$

Exercice 5 :

On exprime la vitesse d'un corps par l'équation: $v = At^3 - Bt$, ou t represente le temps.

Trouver les dimensions des coefficients A et B et en déduire leurs unités SI.

Solution:

At^3 et Bt doivent etre homogéne à une longueur divisée par un temps.

- $[A] \times T^3 = L\, T^{-1}\; d'ou\; [A] = \frac{L\, T^{-1}}{T^3}$

Donc

La dimension de $[A]$ est:

$$\boldsymbol{[A] = L\, T^{-4}}$$

L'unité de $\boldsymbol{A}$ dans SI est:

m.s^{-4}

- $[B] \times T = L\,T^{-1}$ d'où $[B] = \frac{LT^{-1}}{T}$

La dimension de $[\boldsymbol{B}]$ est:

$$[\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{LT^{-2}}$$

L'unité de ***B*** dans SI est:

ms^{-2}

Exercice 6:

Voici trois équations horaires décrivant le mouvement d'un corps dans lesquelles x désigne la distance parcourue (m), a l'acceleration ($m.s^{-2}$), t le temps (s) et l'indice 0 indique la valeur de la grandeur à l'instant t=0s. parmi ces équations, lesquelles sont possibles?

(a) $x = v_0 t^2$, (b) $x = v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$, (c) $x = v_0 t + 2a\, t^2$

Solution:

Pour que la relation sont possible, il faut qu'elle soit homogène.

$[x] = L \Rightarrow$ x est homogène à une longueur donc le second membre de l'équation doit être aussi homogène à une longueur.

(a): $[v_0] \times [t^2] = L.T^{-1} \times T^2 = L.T \neq \boldsymbol{L}$ $\Rightarrow$ **Relation impossible** car **non homogène**

(b): $[v_0] \times [t] + \left[\frac{1}{2}\right] \times [a] \times [t^2] = L.T^{-1} \times T + 1 \times LT^{-2} \times T^{2.} = L + L = \boldsymbol{L}$

$\Rightarrow$ **Relation possible** car **homogène.**

(c): $[v_0] \times [t] + [2] \times [a] \times [t^2] = L.T^{-1} \times T + 1 \times LT^{-2} \times T^{2.} = L + L = \boldsymbol{L}$

$\Rightarrow$ **Relation possible** car **homogène.**

Remarque: une relation non homogène est toujours fausse mais une relation homogène n'est pas toujours bonne. Ici l'homogénéité ne permet pas de choisir entre les relations (b) et (c).

Exercice 7:

Voici trois expressions pour la période de révolution d'une sonde en orbite autour de la planète Mercure ou M représente la masse de Mercure et r le rayon de l(orbite circulaire de la sonde.

(a) $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{GM}}$, (b) $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$, (c) $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

Sachant que G a pour dimension $L^3M^{-1}T^{-2}$ et s'exprime dons en $m^3kg^{-1}s^{-2}$, determiner par deux méthodes (analyse dimensionnelle et analyse unité) la bonne expression pour la période.

Solution:

La période est une durée donc elle a la dimension d'un temps et s'exprime en seconde.

Déterminons la dimension de chaque expression :

1er cas (a) $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{GM}}$

Analyse dimensionnelle

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{GM}}$$

La dimension du 1er membre: $[\boldsymbol{T}] = \boldsymbol{T}$

La dimension du 2éme membre:

$$[2\pi]\,\frac{[r^{1/2}]}{[G^{1/2}][M^{1/2}]} = 1 \times \frac{L^{1/2}}{(L^3M^{-1}T^{-2}\,)^{1/2}(M)^{1/2}} = L^{1/2}\,L^{-3/2}\,M^{1/2}M^{-1/2}\,T = \boldsymbol{L^{-1}T}$$

Puisque: $\boldsymbol{T \neq L^{-1}T}$ $\Rightarrow$ **expression incorrecte**

Analyse unité:

L'unité du 1er membre de l'expression (T): **s**

L'unité du 2éme membre de l'expression $\left(2\,\pi\sqrt{\frac{r}{GM}}\,\right)$:

$$2\,\pi\sqrt{\frac{r}{GM}} \;\Rightarrow\; \left(\frac{m}{m^3kg^{-1}s^{-2}\;kg}\right)^{1/2} = \frac{m^{1/2}}{m^{3/2}kg^{-1/2}s^{-1}kg^{1/2}} = \boldsymbol{m^{-1}\;s}$$

Puisque: $s \neq m^{-1}\;s$ $\Rightarrow$ **expression incorrecte**

2 éme cas: (b) $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$

Analyse dimensionnelle

La dimension du 1er membre: $[T] = \boldsymbol{T}$

La dimension du 2éme membre:

$$[2\pi]\frac{\left[G^{\frac{1}{2}}\right]\left[M^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[r^{\frac{3}{2}}\right]} = 1 \times \frac{(L^3M^{-1}T^{-2})^{\frac{1}{2}}(M)^{\frac{1}{2}}}{(L)^{3/2}} = L^{3/2}\,M^{-1/2}\,T^{-1}M^{1/2}\,L^{-3/2} = \boldsymbol{T^{-1}}$$

Puisque**:** $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{T^{-1}} \quad \Rightarrow$ **expression incorrecte**

Analyse unité:

L'unité du 1er membre de l'expression (T): **s**

L'unité du 2éme membre de l'expression

$$2\,\pi\sqrt{\frac{GM}{r^3}} \Rightarrow \frac{(m^3kg^{-1}s^{-2})^{\frac{1}{2}}(kg)^{\frac{1}{2}}}{(m)^{3/2}} = m^{3/2}\,kg^{-1/2}\,s^{-1}kg^{1/2}\,m^{-3/2} = \boldsymbol{s^{-1}}$$

Puisque: $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s^{-1}} \quad \Rightarrow$ **expression incorrecte**

<u>3éme</u> **cas**: $(c)\ T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

Analyse dimensionnelle

La dimension du 1er membre: $[T] = \boldsymbol{T}$

La dimension du 2éme membre:

$$[2\pi]\frac{\left[r^{\frac{3}{2}}\right]}{\left[G^{\frac{1}{2}}\right]\left[M^{\frac{1}{2}}\right]} = 1 \times \frac{(L)^{3/2}}{(L^3M^{-1}T^{-2})^{\frac{1}{2}}(M)^{\frac{1}{2}}} = L^{3/2}L^{-3/2}\,M^{1/2}\,T^{1}M^{-1/2} = \boldsymbol{T}$$

Puisque: $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \Rightarrow$ **expression correcte**

Analyse unité:

L'unité du 1er membre de l'expression (T): s

$$2\,\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow \frac{(m)^{\frac{3}{2}}}{(m^3kg^{-1}s^{-2})^{\frac{1}{2}}(kg)^{\frac{1}{2}}} = m^{\frac{3}{2}}m^{-\frac{3}{2}}\,kg^{\frac{1}{2}}\,s^{1}kg^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{s}$$

Puisque: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} \Rightarrow$ **expression correcte**

Exercice 8:

Supposons qu'un projectile soit lancé d'une hauteur y_0 au-dessus du sol. Sa portée est notée d, v_o est la vitesse initiale et θ_0 est l'angle de projection.

Montrer que l'expression suivante est homogène:

$$d = \frac{v_0^2}{2g}\left(sin2\theta_0 + \sqrt{sin^2 2\,\theta_0 + \frac{8g\,y_0}{v_0^2}\,cos^2\,\theta_0}\right)$$

Solution:

$$d = \frac{v_0^2}{2g}\left(sin2\theta_0 + \sqrt{sin^2 2\,\theta_0 + \frac{8g\,y_0}{v_0^2}\,cos^2\,\theta_0}\right)$$

On a:

$$[d] = L$$

$$[sin\,\theta] = 1$$

$$[v_0] = LT^{-1}$$

$$[g] = [a] = L\,T^{-2}$$

$$\left[\frac{v_0^2}{2g}\,sin2\theta_0\right] = \left[\frac{v_0^2}{2g}\sqrt{sin^2\,2\,\theta_0 + \frac{8g\,y_0}{v_0^2}\,cos^2\,\theta_0}\right] =$$

$$\frac{(\boldsymbol{LT^{-1}})^2}{\boldsymbol{LT^{-2}}} = \frac{(\boldsymbol{LT^{-1}})^2}{\boldsymbol{LT^{-2}}}$$

On obtient: **L= L**

L'équation est homogène

I.2 Erreurs et incertitudes

I.2.1 Erreur

L'erreur est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie de la grandeur que l'on mesure.

Il existe deux types d'erreurs

- **L'erreur systématique**

Le premier type d'erreur est ce qu'on appelle l'erreur systématique. Cette erreur est une "déviation" constante, négative ou positive introduit par l'instrument. De façon plus générale on parle d'erreur systématique quant, par rapport à une valeur de référence x, l'instrument donnera toujours comme valeur observée x+b (déviation positive ou négative). Par exemple, pour un instrument comme votre balance, si elle affiche systématiquement "+ 2 kilogrammes" par rapport au poids réel, l'erreur systématique est de +2 kg.

- **L'erreur aléatoire**

Que l'on traitera de façon statistique ou probabiliste : par exemple, la mesure répétée de la période d'un pendule avec un chronomètre manuel donne des valeurs légèrement différentes. Dans la construction des tests et l'analyse de la fidélité, quand on parle d'erreur de mesure, on fait référence à ce qu'on appelle l'erreur aléatoire. Cette erreur est le résultat d'un ensemble de facteurs (inconnus) qui font que parfois la mesure sera légèrement supérieure à la valeur réelle et parfois légèrement inférieure. Un instrument de mesure est toujours construit pour minimiser cette erreur aléatoire (la mesure observée doit être toujours proche de la mesure de référence ou plus exactement la dispersion autour de cette valeur de référence, lors d'observations multiples, est faible). Cette erreur aléatoire est celle qui est associée à la notion de fidélité et celle à laquelle on fait le plus souvent référence lorsque l'on parle d'erreur de mesure dans la construction des tests mentaux.

I.2.2 Erreur absolue-Incertitude absolue

Aucune mesure n'est parfaite. Quelque soit le soin apporté à sa mise en œuvre, la précision de l'appareil, la compétence de l'opérateur, le respect des règles de manipulation et de contrôle sévère de tous les paramètres d'influence, il restera toujours une incertitude sur la mesure. Tous les efforts accomplis dans le domaine de l'instrumentation visent à faire tendre cette incertitude vers une valeur de plus en plus faible, tout en sachant qu'il ne sera jamais possible de l'annuler. C'est pourquoi toute mesure, pour être complète, doit comporter la valeur mesurée et les limites de l'erreur possible sur la valeur donnée.

a. Erreur absolue

L'erreur absolue d'une grandeur « X » est la différence entre la valeur exacte Xe et la valeur approchée s'appelle **erreur absolue** qu'ont désignée par **δX**

L'erreur absolue est :

$$\boxed{\delta X = \text{Valeur approchée - Valeur réelle}}$$

b-Incertitude absolue : notée par ΔX incertitude absolue $\Delta X = |\sup dX|$

Nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limiteabsolue commise sous le nom de l'incertitude absolue.

$$\Delta X < sup|\delta X|$$

L'incertitude absolue ΔX à la même unité que G le résultat est donné sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{X = (Xa \pm \Delta X)}}$$

D'où X_a est la valeur approchée

Équivaut à écrire :

$$\boxed{\mathbf{Xa - \Delta X \leq X \leq Xa + \Delta X.}}$$

I.2.3 Erreur relative et incertitudes relatives

a. Erreur relative

L'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue à la valeur exacte.

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\delta X}{X_e} = \frac{X - X_e}{X_e}}$$

Comme il s'agit d'un nombre sans dimension (pas d'unité), on l'exprime généralement en pourcentage (%) :

$$\boxed{\varepsilon_r \times 100\% = \frac{\delta X}{X_e} \times 100\% = \frac{X - X_e}{X_e} \times 100\%}$$

b. L'incertitude relative

Est la limite supérieure de l'erreur relative. On note:

$$\boxed{\frac{\Delta X}{X_e} = \left|\frac{\delta X}{X_e}\right|}$$

On peut l'exprimer en % : $\frac{\Delta X}{X_e} \times 100\%$

I.2.4. Calcul des incertitudes:

a-Somme et différence :

Soit : la gradeur X

X = a x + b y – cz +k $X = a\,x + by - c\,z + k$ tel que: $a, b, c, k \in \mathcal{R}$

$$\boxed{\Delta X = |a|\,\Delta x + |b|\,\Delta y + |c|\,\Delta z}$$

b- Cas d'un produit

Soit: $X = k\, x^a y^b$ tel que: $a, b, k \in \mathcal{R}$

$\ln X = \ln k + a \ln x + b \ln y$

$\frac{dX}{X} = \frac{dk}{k} + a\, \frac{dx}{x} + b\, \frac{dy}{y}$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta X = X\left(|a|\frac{\Delta x}{x} + |b|\, \frac{\Delta y}{y}\right)}}$$

c- cas mixte:

Soit: $X = k\, (x - y)^a\, .\, z^b$ tel que: $a, b \in \mathcal{R}$ *et k constante*

$lnX = \ln k + a \ln(x - y) + \, b\, lnz$

$$\frac{dX}{X} = \frac{dk}{k} + a\, \frac{d\,(x-y)}{(x-y)} + b\, \frac{dz}{z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{a}{x-y}\right| \Delta x + \left|\frac{a}{x-y}\right| \Delta y + |b|\frac{\Delta z}{z}}}$$

Exercices corrigés

Exercice 9:

Pour mesurer l'épaisseur d'u cylindre creux, on mesure les diamètres intérieurs D_1 et extérieur D_2 et on trouve:

$D_1 = (19.05\ \pm 0.10)\, mm$, $D_2 = (26.70\ \pm 0.10)\, mm$

Donner le résultat de la mesure et sa précision

Solution:

L'épaisseur du cylindre:

$$e = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{26.70 - 19.05}{2} = 3.60\ mm$$

$$\boxed{\mathbf{e = 3.60\ mm}}$$

L'incertitude absolue: $\Delta e = \frac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2} = 0.10\ mm$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta e = 0.10\ mm}}$$

Le résultat s'écrit: $e = (3.60\ \pm 0.10)\ mm$

$$\boxed{\boldsymbol{e = (3.60\ \pm 0.10)\ mm}}$$

L'incertitude relative: $\frac{\Delta e}{e} = \frac{0.1}{3.6} = 0.03 = 3\%$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\Delta e}{e} = 3\%}}$$

Exercice 10:

X est grandeur caractéristique du pendule simple sachant que:

$$X = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1- Calculer la dimension de X. Que représente X?

2- Déterminer l'incertitude absolue ΔX connaissant Δl et Δg.

On donne: l = $(100.0\ \pm 0.1)\ cm$, $g = (9.81 \pm 0.01)\ m\ s^{-2}$ et π = 3.14

Solution:

1. La dimension de X.

$[X] = [2\pi]\ \frac{[l^{1/2}]}{[g^{1/2}]} = \frac{L^{1/2}}{(LT^{-2})^{1/2}} = T = [t]$, donc X représente un temps

$$\boxed{\boldsymbol{[X] = T = [t]}}$$

On a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ X représente la période T

2. L'incertitude absolue ΔX

$$lnT = \ln(2\pi) + ln\left(\sqrt{l}\right) + ln\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)$$

$$lnT = \ln(2\pi) + \frac{1}{2}lnl - \frac{1}{2}lng$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$$

$$\Delta T = \frac{T}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta T = \frac{T}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g}\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T = (2.000 \pm 0.002)s}}$$

Exercice 11

Soit à déterminer la masse volumique ρ de la substance d'un cube homogène a partir de la mesure de sa masse $m = (200.0 \pm 0.1)g\ et$ de son arête$a = (4.0 \pm 0.4)cm^3$.

Ecrire le résultat de la mesure.

Solution:

Calcul de la masse volumique:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}}}$$

AN: $\rho = \frac{200}{64} = 3.12\ g\ cm^{-3}$

$$\boxed{\boldsymbol{\rho = 3.12\ g\ cm^{-3}}}$$

Calcul de l'incertitude absolue:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\ \frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\ \frac{\Delta a}{a}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\ \frac{\Delta a}{a}\right)}}$$

AN: $\Delta\rho = 3.12\left(\frac{0.1}{200} + 3\,\frac{0.1}{4.0}\right) = 0.24\ g\ cm^{-3}$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\rho = 0.24\ g\ cm^{-3}}}$$

Calcul de l'incertitude relative:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{0.24}{3.12} = 0.07 = 7\%$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\Delta\rho}{\rho} = 7\%}}$$

Le résultat:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho = (3.12\ \pm 0.24)g\ cm^{-3}}}$$

Exercice 12:

La densité (δ) d'un corps solide par application du theoréme d'Archiméde est:

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$$

Ou m_1, m_2, m_3 sont les résultats de trois mesures de masses effectuées successivement, avec la même balance. Trouver l'incertitude relative $\frac{\Delta\delta}{\delta}$.

Solution:

Nous avons l'expression:

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$$

Remarquons que les trois masses sont dépendantes.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation:

$$ln\delta = \ln\left(\frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}\right) = ln(m_2 - m_1) - ln(m_3 - m_1)$$

Passons à la différentielle logarithmique:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{d(m_2 - m_1)}{(m_2 - m_1)} - \frac{d(m_3 - m_1)}{(m_3 - m_1)}$$

Développons:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{dm_2}{m_2 - m_1} - \frac{dm_1}{m_2 - m_1} - \frac{dm_3}{m_3 - m_1} + \frac{dm_1}{m_3 - m_1}$$

Factorisons:

$$\frac{d\delta}{\delta} = dm_1\left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1}\right) + \frac{dm_2}{m_2 - m_1} - \frac{dm_3}{m_3 - m_1}$$

Passons à présent aux incertitudes relatives, en remplaçant di par Δi et échangeant le signe (-) des facteurs communs par le signe (+), et en supposant $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3$ (puiqu'on utilise la meme balance).

L'incertitude relative:

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \Delta m_1\left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1}\right) + \frac{\Delta m_2}{m_2 - m_1} - \frac{\Delta m_3}{m_3 - m_1}$$

On obtient:

$$\boxed{\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{2\Delta m}{m_3 - m_1}}$$

Exercice13:

Calculer l'incertitude relative sur la mesure de la capacité (C) d'un condensateur équivalent à deux condensateurs montés**:** **(a)** en parallèle, **(b)** en série et cela en fonction des capacités (C_1) et (C_2).

Solution:

(a) Groupement en parallèle:

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en parallèle est donnée par la formule:

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

$$lnC = \ln(C_1 + C_2)$$

L'incertitude relative est donc

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1 + C_2} + \frac{\Delta C_2}{C_1 + C_2} \Leftrightarrow \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1}\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{\Delta C_2}{C_2}\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)}$$

(b) Groupement en série :

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en série est donnée par la formule :

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Longrightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

$$\boxed{C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

$$\ln C = lnC_1 + lnC_2 - ln(C_1 + C_2)$$

L'incertitude relative est donc

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1} + \frac{dC_2}{C_2} - \frac{dC_1}{C_1 + C_2} - \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

Factorisons:

$$\frac{dC}{C} = dC_1\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2}\right) + dC_2\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1 + C_2}\right)$$

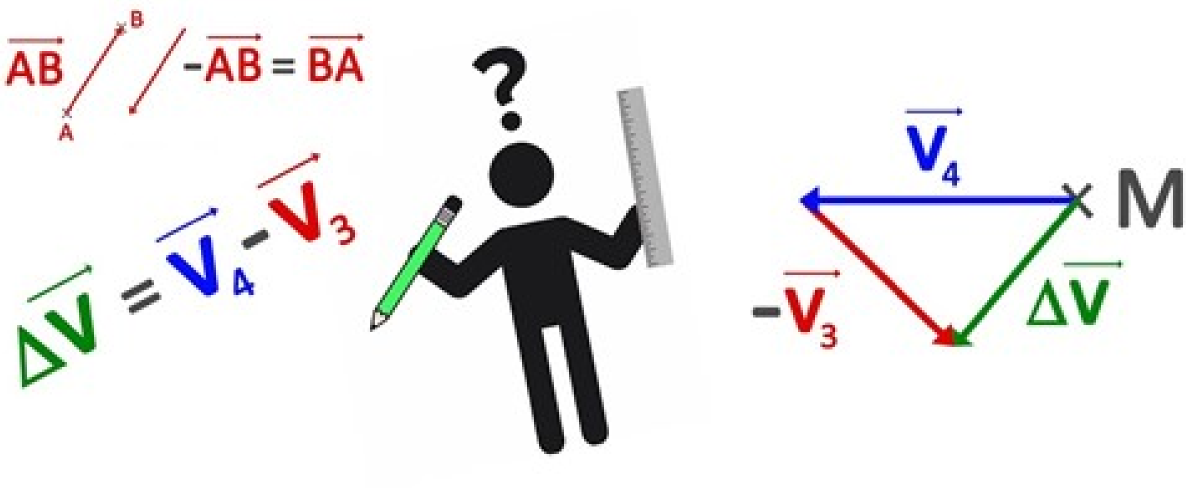
L'expression précédente peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1}\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{dC_2}{C_2}\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Finalement l'incertitude relative demandée est :

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1}\left|1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right| + \frac{\Delta C_2}{C_2}\left|1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right|}$$

Calcul vectoriel



I.3. Calcul vectoriel:

I.3.1 Scalaires et vecteurs:

Des grandeurs variées en physique, telles que la longueur, la masse et le temps, ne nécessitent pour leur caractérisation qu'un nombre réel et de leur unité. Un scalaire est représenté par une lettre telle que: Le temps (t), la masse (m), la longueur (l) etc…

Exemple:

La température d'ébullition de l'eau: $\Theta = 100°$ C

La charge élémentaire de l'électron: $q = -1.6\ 10^{-19}$ Cb

D'autres grandeurs en physique, comme un déplacement, une force, requièrent pour leur caractérisation à la fois une direction; un sens et un module. De telles grandeurs sont des vecteurs. Un vecteur est représenté symboliquement par une lettre en gras avec une flèche, comme le vecteur u noté: $\vec{u}$.

Exemple: la force ($\vec{F}$), la vitesse ($\vec{v}$), le champ électrique ($\vec{E}$) etc…

I.3.2 Représentation d'un vecteur

Un vecteur est un segment de droite portant une origine et une extrémité. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, par exemple, se caractérise par:

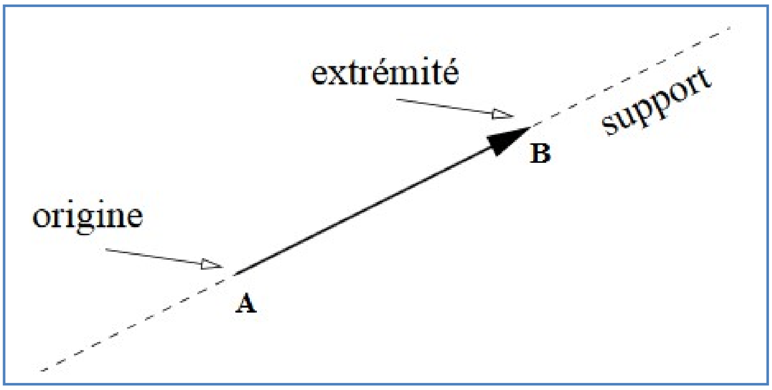


Figure I.1: Représentation d'un vecteur

- Sa direction: droite (AB) et des droites parallèles à (AB).
- Son sens: de A à B.
- Sa norme (ou module): longueur du segment [AB], noté $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

I.3.3 Propriétés des vecteurs

I.3.3.1. Vecteur libre:

Définition

Soient A et B, deux points de l'espace. Le **vecteur libre** $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ désigne l'un des bipoints équipollents au bipoint (A, B).

Il est caractérisé par:

1. une direction
2. un sens
3. une norme, ou intensité, ou module

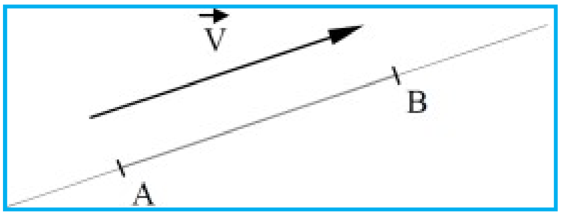


Figure I.2: Vecteur libre

I.3.3.2. Vecteur glissant:

Définition

Le vecteur glissant $(A,\vec{V})$ désigne l'un des bipoints équivalents au bipoint (A,B) qui ont la même droite support que (A,B).

Il est caractérisé par:

1. un support (une direction et un point)
2. un sens
3. une norme

I.3.3.3. Vecteur lié

Définition

Le vecteur lié $[\vec{V}]$ est le représentant du bipoint (A, B), et a pour origine A.

Il est caractérisé par:

1. une origine
2. une direction
3. un sens
4. une norme

I.3.3.4. Vecteurs unitaires

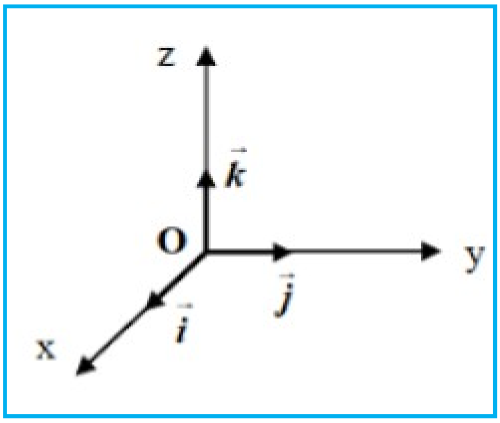


Figure I.3: Vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Définition d'un vecteur unitaire:

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1. Les vecteurs unitaires dans la direction des axes x, y et z sont respectivement noté $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Tout vecteur peut être exprimé sous la forme: x $\vec{\imath}$ + y $\vec{\jmath}$ + z $\vec{k}$

I.3.3.5. Orientation de l'espace et du plan

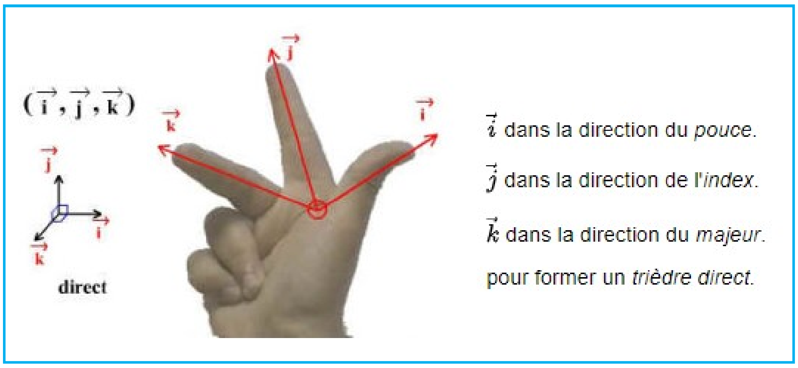


Figure I.4: Règles des trois doigts de la main droite

Soit un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ de l'espace

Orienter l'espace, c'est distingué les repères «directs» de ceux qui ne le sont pas et nommés «indirects».

Exemple: Règles des trois doigts de la main droite

On associe les vecteurs de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ aux axes d'un trièdre rectangle formé par les trois doigts de la main droite:

I.3.3.6. Vecteurs égaux

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ son égaux s'ils ont même module, même direction et même sens quelles que soient leurs origines. Sur la **Fig I.5**, on a représenté:

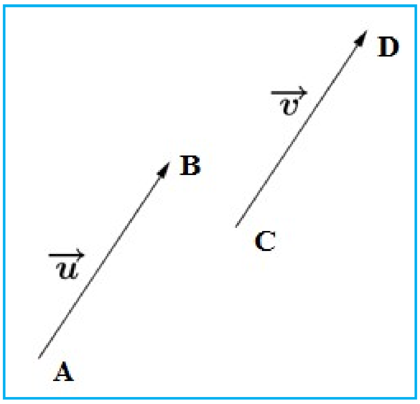


Figure I. 5: Vecteur égaux

Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont égaux s'ils ont:

- La même direction.
- Le même sens.
- La même norme (module).

I.3.3.7. Vecteurs opposés

Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la même direction et la même norme, mais qu'ils sont de sens contraire.

On note $-\vec{U}$ est l'opposé de $\vec{U}$

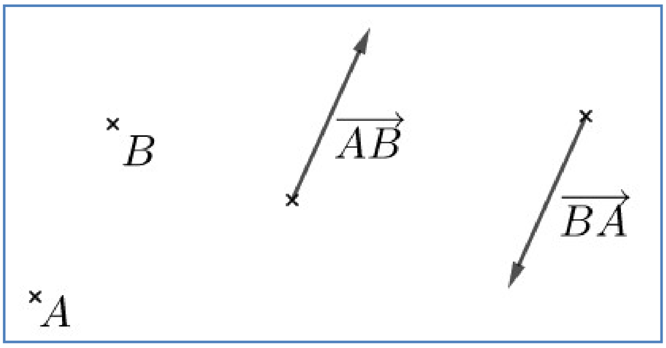


Figure I. 6: Vecteur opposés

Sur la **Fig I.6**, on a représenté $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{BA} = -\vec{V}$

I.3.4. Coordonnées d'un point

I.3.4.1. Coordonnées cartésiennes

Définition Un repère de l'espace est un quadruplet $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$formé :

1. D'un point O appelé origine du repère,
2. D'un triplet $(\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$de vecteurs non coplanaires.

❖ Si les vecteurs $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ est dit orthogonal.

❖ Si de plus on a $\|\vec{\boldsymbol{\imath}}\| = \|\vec{\boldsymbol{\jmath}}\| = \|\vec{\boldsymbol{k}}\| = \mathbf{1}$ On dit que le repère $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ est orthonormé.

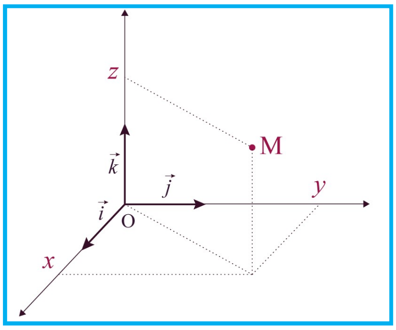


Figure I.7: Un point M repéré dans l'espace.

Un point M de l'espace est repéré par 3 coordonnées : son abscisse x_M, son ordonnée y_M et sa cote z_M.

Pour lire les coordonnées d'un point M :

1. projeter M sur le plan (xOy) en A (la droite (AM) est la perpendiculaire au plan (xOy) passant par M); tracer la droite (OA) ;
2. tracer la parallèle à (OA) passant par M, elle coupe (Oz) en B.
3. La cote z_M du point M est celle du point B.
4. L'abscisse x_M et l'ordonnée y_M du point M sont celles du point A dans le plan (xOy).

Exemple 1:

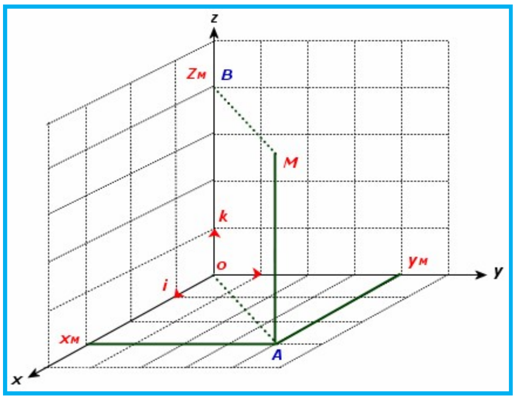


Figure I.8: Coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Ici, on lit que : $x_M = 3$; $y_M = 4$; $z_M = 4$;

Coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont: ***M* (3 ; 4 ; 4).**

Exemple 2:

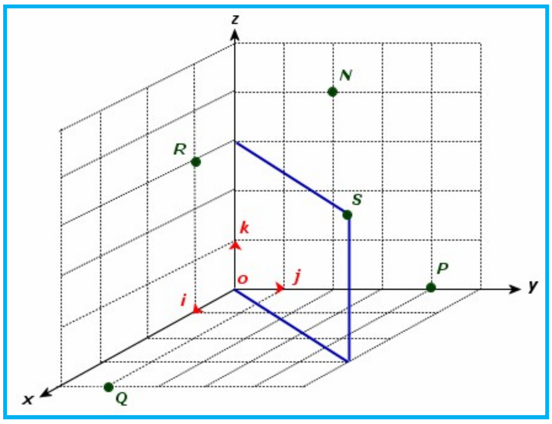


Figure I.9: Coordonnées des points *N*, *R*, *Q*, *P* et *S* dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Les points *N*, *R*, *Q*, *P* et *S* sont situés dans des plans différents. Il est possible de définir leurs coordonnées respectives.

N est dans le plan (*yOz*). *N* (0 ; 2 ; 4)

R est dans le plan (*xOz*). *R* (1 ; 0 ; 3).

Q est dans le plan (*xOy*). *Q* (4 ; 1 ; 0).

P est sur l'axe (*Oy*). *P* (0 ; 4 ; 0).

***S* (3 ; 5 ; 3).**

I.3.4.2. Coordonnées polaires

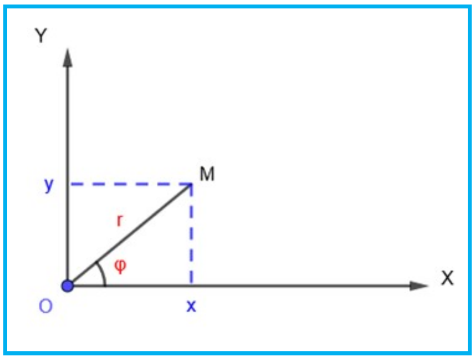


Figure I.10: Coordonnées polaires

Coordonnées polaires du point M

$$\boxed{\boldsymbol{M}\begin{cases} \boldsymbol{r = OM \ \geq 0} \\ \boldsymbol{\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})} \end{cases}}$$

Relations avec les coordonnées du repère orthonormé cartésien:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

I.3.4.3. Coordonnés cylindriques

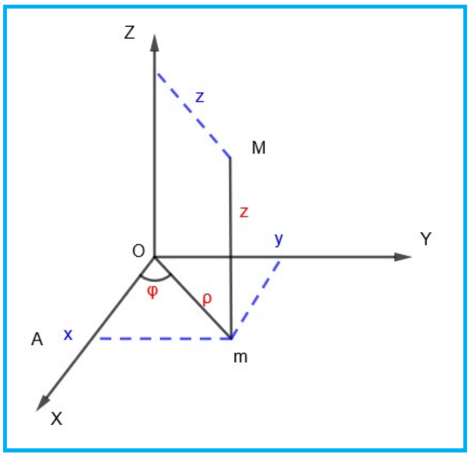


Figure I.11: Coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques du point M

$$\begin{cases} \rho = Om \geq 0 \\ \varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) \\ z = mM \end{cases}$$
$$\rho \geq 0$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$-\infty < z < +\infty$$

I.3.4.4. Coordonnés sphériques

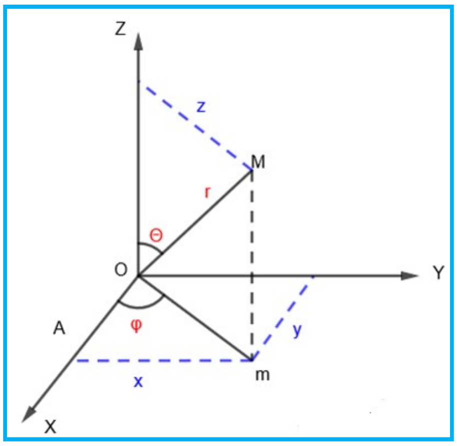


Figure I.12: Coordonnées sphériques

Coordonnés sphérique du point M:

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{M}\begin{cases} \boldsymbol{r = OM \geq 0} \\ \boldsymbol{\theta = (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM})} \\ \boldsymbol{\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})} \end{cases} \\ \boldsymbol{r \geq 0} \\ \boldsymbol{0 \leq \theta \leq 2\pi} \\ \boldsymbol{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \end{array}}$$

I.3.5. Opérations sur les vecteurs

I.3.5.1. Somme des vecteurs

L'addition de vecteurs s'appelle somme ou résultante et cela représente aussi un vecteur. Afin de trouver la somme de deux vecteurs, il existe deux méthodes pour y parvenir.

1ère méthode : **Méthode du triangle:** Il suffit de prendre l'extrémité d'un vecteur et le placer à l'origine du deuxième vecteur.

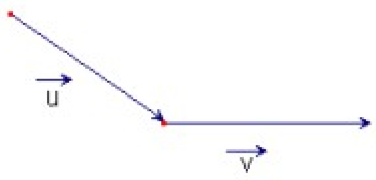
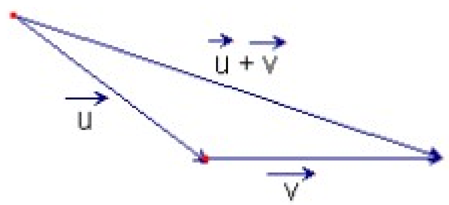
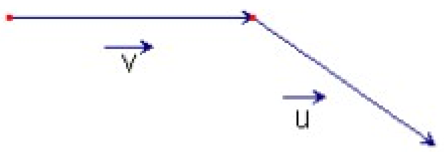
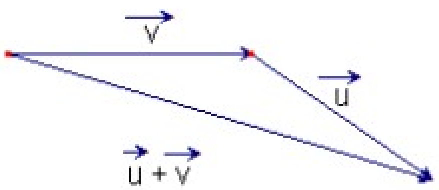
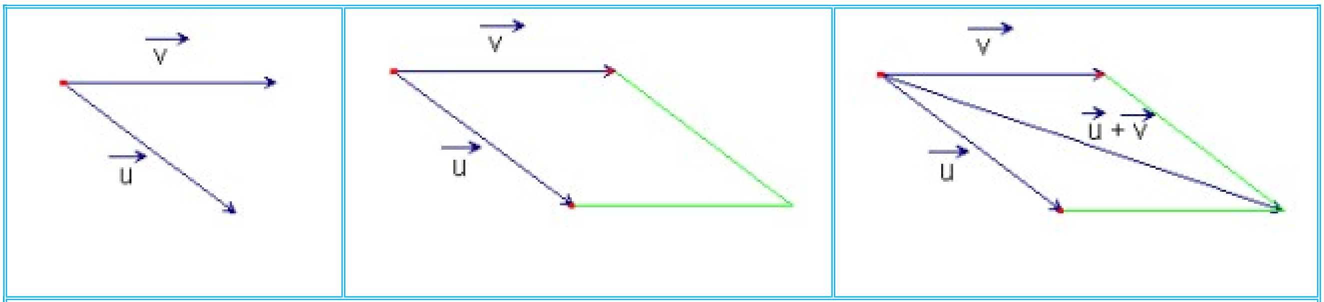
1er cas	
	
2éme cas	
	
$\overrightarrow{\boldsymbol{W}} = \overrightarrow{\boldsymbol{U}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}}$	

Figure I.18: Somme de deux vecteurs –méthode du triangle-

2$^{\text{éme}}$ méthode : Méthode du parallélogramme:

Placer les origines de chacun des vecteurs ensemble, compléter le parallélogramme et le vecteur somme est représenté par la flèche qui a comme point de départ l'origine des deux vecteurs initiaux et le sommet opposé du parallélogramme.



$$\vec{\boldsymbol{W}} = \vec{\boldsymbol{U}} + \vec{\boldsymbol{V}}$$

Figure I.19: Somme de deux vecteurs –méthode du parallélogramme

Propriétés:

L'addition vectorielle est une loi de composition interne et possède les propriétés suivante:

Associativité: $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$

Commutativité: $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$

Elément neutre: $\vec{U} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{U} = \vec{U}$ ($\vec{0}$ vecteur nul)

Elément symétrique: $\vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$ $(-\vec{U}$ vecteur opposé $de\ \vec{U})$

Relation de Chasles

En représentant les vecteurs $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ repectivement par $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ alors l'addition vectorielle $\vec{\boldsymbol{W}} = \vec{\boldsymbol{U}} + \vec{\boldsymbol{V}}$ conduit à:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$$

Or comme $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ on en déduit quels que soient les points O, A et B.

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} \quad \textbf{(Relation de Chasles)}}$$

I.3.5.2. Soustraction des vecteurs

La soustraction de deux vecteurs se fera de la façon suivante:

Pour $\vec{W} = \vec{U} - \vec{V}$

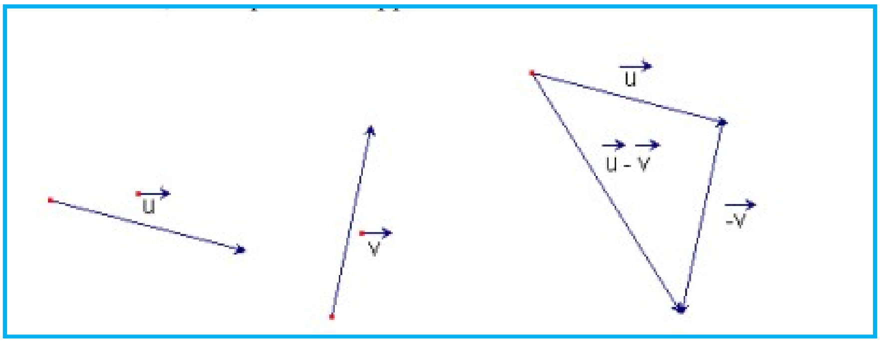


Figure I.20: Soustraction de deux vecteurs

I.3.5.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

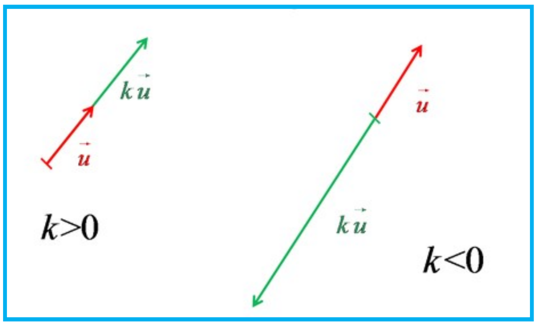


Figure I.21: Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire α a est un vecteur noté α $\vec{V}$, tel que:

Sa direction est celle de $\vec{V}$

Son sens: celui $\vec{V}$ si α >0, celui de - $\vec{V}$ si α <0

Sa norme est égale au produit de celle de $\vec{V}$ par la valeur absolue de α: $\|\alpha\vec{V}\| = |\alpha|\|\vec{V}\|$

I.3.5.4. Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{U}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}$ noté $\vec{\boldsymbol{U}}.\vec{\boldsymbol{V}}$ est on scalaire égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de leur angle $\boldsymbol{\theta} = (\vec{\boldsymbol{U}},\vec{\boldsymbol{V}})$.

$$\boxed{\vec{U}\,\vec{V} = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\,cos\theta}$$

Le produit scalaire est donc positif pour θ aigu et negatif pour θ obtu

Produit analytique

En posant $\vec{\boldsymbol{U}}\,(\boldsymbol{U_x}, \boldsymbol{U_y}, \boldsymbol{U_z})$ et $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V_x}, \boldsymbol{V_y}, \boldsymbol{V_z})$ les composantes respectives de $\vec{\boldsymbol{U}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}$ dans la base orthonormée $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{\boldsymbol{U}}\,\vec{\boldsymbol{V}} = \left(\boldsymbol{U_x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{U_y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{U_z}\vec{\boldsymbol{k}}\right).\left(\boldsymbol{V_x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{V_y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{V_z}\vec{\boldsymbol{k}}\right)$$

$$\boxed{\vec{U}\,\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z}$$

Sachant que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \\ \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \overrightarrow{k.\imath} = 0 \end{array}}$$

Disposition pratique

$$\vec{\boldsymbol{U}}\,\vec{\boldsymbol{V}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U_x} \\ \boldsymbol{U_y} \\ \boldsymbol{U_z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{V_x} \\ \boldsymbol{V_y} \\ \boldsymbol{V_z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{U_x}.\boldsymbol{V_x} + \boldsymbol{U_y}.\boldsymbol{V_y} + \boldsymbol{U_z}\boldsymbol{V_z}$$

I.3.5.5. Produit vectoriel de deux vecteurs

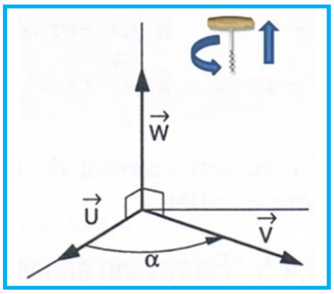


Figure I.22: Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, est un vecteur $\vec{W}$, noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ de :

- Direction: $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$
- Sens: trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ direct
- Norme: $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|\,\left|sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$

$\|\vec{\boldsymbol{W}}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants $\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{OB}$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. En effet, $AH = OA\ sin\alpha = \|\vec{U}\| sin(\vec{U}, \vec{V})$ et l'aire du parallélogramme devient : $OB \times AH$= $\|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|\,sin(\vec{U}, \vec{V})$

En posant $\vec{U}\,(U_x, U_y, U_z\,)$ et $\vec{V}(V_x, V_y, V_z\,)$ les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur défini par la relation

$$\boxed{\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = (U_yV_z - U_zV_y)\vec{i} + (U_zV_x - U_xV_z)\vec{j} + (U_xV_y - U_yV_x)\vec{k}}$$

Sachant que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}\ , \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} = 0, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{array}}$$

Pour obtenir les composantes du produit vectoriel

Disposition pratique:

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{cases} U_x \\ U_y \\ U_z \end{cases} \wedge \begin{cases} V_x \\ V_y \\ V_z \end{cases} = \begin{cases} U_yV_z - U_zV_y \\ U_zV_x - U_xV_z \\ U_xV_y - U_yV_x \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{cases} U_x \\ U_y \\ U_z \end{cases} \wedge \begin{cases} V_x \\ V_y \\ V_z \end{cases} = \begin{cases} U_yV_z - U_zV_y \\ U_zV_x - U_xV_z \\ U_xV_y - U_yV_x \end{cases}}$$

I.3.5.6. Produit mixte de trois vecteurs:

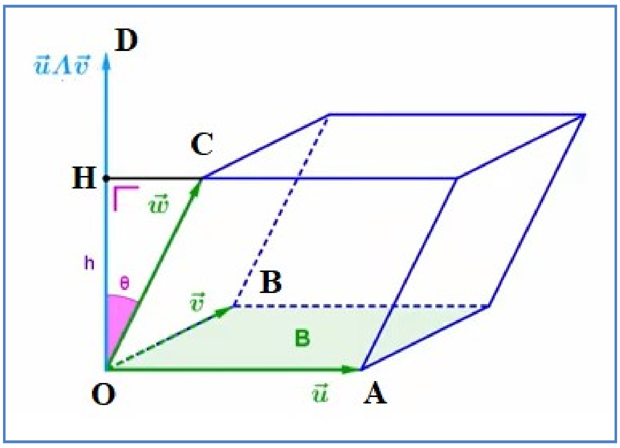


Figure I.23: Produit mixte de trois vecteurs:

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{U}$; $\vec{V}$ et $\vec{W}$, le scalaire défini par:

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\,) = (\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W}$$

Soit: $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$, $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ et $\vec{W}(W_x, W_y, W_z)$ dans un systéme de référence orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Dans la base orthonormée directe$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le produit mixte de trois vecteurs:

$$\vec{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

$$\vec{W} = W_x\vec{\imath} + W_y\vec{\jmath} + W_z\vec{k}$$

S'exprime par le scalaire:

$$\boxed{(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W} = (U_yV_z - U_zV_y)W_x + (U_zV_x - U_xV_z)W_y + (U_xV_y - U_yV_x)W_z}$$

$$\boxed{(\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W} = \begin{vmatrix} U_x & V_x & W_x \\ U_y & V_y & W_y \\ U_z & V_z & W_z \end{vmatrix}}$$

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{U}$; $\vec{V}$ et $\vec{W}$, le scalaire défini par:

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W}$$

Posons $\vec{p} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{p}.\vec{W} = \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC}$$

Si H désigne la projection orthogonale de C sur OD alors:

$$|(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})| = \|\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OD}\|\|\overrightarrow{OC}\|cos(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$$

$$|(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})| = \|\overrightarrow{OD}\|\|\overrightarrow{OH}\|$$

Avec: $\|\overrightarrow{OD}\| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$ aire du parllelogramme construit sur $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

$$\boxed{|(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})|: \textbf{Volume du parallelepipede d'arete } OA, OB, OC.}$$

Exemple:

Calculer le volume du parallélépipède de cotés adjacents:

$\vec{U} = (1, 1, 3)$, $\vec{V} = (2, 1, 4)$ et $\vec{W} = (5, 1, -2)$

Solution:

Le parallélépipède est engendré par les vecteurs $\vec{U} = (1, 1, 3)$, $\vec{V} = (2, 1, 4)$ et $\vec{W} = (5, 1, -2)$

Son volume est donné par la valeur absolue du produit mixte de ces trois vecteurs:

Volume = $\left|\vec{U}\,.\vec{V}\wedge\vec{W}\right|$.

Volume = $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{matrix}\right\| = |-6+24-9|$

Volume = 16

I.3.6. Dérivée d'un vecteur:

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

Sa dérivée est donnée par l'expression:

$$\vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Exemple:

Soit le vecteur $\vec{V}(t)$ donné par l'expression:

$$\vec{V}(t) = 4t\,\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

La dérivée de $\vec{V}(t)$ est:

$$\vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = 4\,\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$$

I.3.7. Règles de dérivation:

- $\frac{d\left(\vec{V_1}(t)+\vec{V_2}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}(t)}{dt} + \frac{d\vec{V_2}(t)}{dt}$
- $\frac{d\left(\vec{V_1}(t)-\vec{V_2}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}(t)}{dt} - \frac{d\vec{V_2}(t)}{dt}$
- $\frac{d\left(\vec{V_1}(t).\vec{V_2}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}(t)}{dt}.\vec{V_2}(t) + \frac{d\vec{V_2}(t)}{dt}.\vec{V_1}(t)$
- $\frac{d\left(\vec{V_1}(t)\wedge\vec{V_2}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V_1}(t)}{dt}\wedge\vec{V_2}(t) + \frac{d\vec{V_2}(t)}{dt}\wedge\vec{V_1}(t)$

I.3.8. Les opérateurs différentielles:

I.3.8.1. Les principaux opérateurs et leurs propriétés

-Il existe différents opérateurs différentiels principaux appelés:

- L'opérateur nabla: $\vec{\nabla}$
- L'opérateur gradient:$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f$
- L'opérateur divergence: $div(\vec{F}) = \vec{\nabla}\vec{F}$
- L'opérateur rotationnel: $rot\ (\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$
- L'opérateur Laplacien Δf

Ils généralisent la notion de dérivée - ces opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur nabla (défini uniquement en coordonnées cartésiennes)

I.3.8.2. L'opérateur nabla

Les opérateurs vectoriels que nous rencontrerons sont appliqués dans différents domaines de la physique, on note:

L'opérateur nabla: $\vec{\nabla}$

En coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}}$$

En coordonnée cylindriques

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}}$$

En coordonnée sphériques

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}}$$

I.3.8.3. L'opérateur *gradient* $\vec{\nabla}f(x, y, z)$

L'opérateur gradient est opérateur différentiel qui s'applique à un champ scalaire (fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps) et le transforme en un champ vectoriel.

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}f}$$

Système de coordonnées	f(M,t)	Expression de $\overrightarrow{grad}(f)$
Cartésiennes	f(x, y, z, t)	$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$
Cylindriques	f(r, θ, z, t)	$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{\partial f}{r\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$
Sphériques	f(r, θ, φ, t)	$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$

Exemple:

Calculer le gradient de la fonction: $f(M) = f(x, y, z) = x^2 + 2y^3 + z^4$

Solution:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f = 2x\,\overrightarrow{u_x} + 6\,y^2\overrightarrow{u_y} + 4\,z^3\overrightarrow{u_z}}$$

I.3.8.4. L'opérateur divergence: $div(\vec{A}) = \vec{\nabla}\vec{A}$

L'opérateur **divergence** est opérateur différentiel qui s'applique à un champ vectoriel et le transforme en un champ scalaire.

$$\boxed{div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A}}$$

Système de coordonnées	Expression de: $div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A}$
Cartésiennes	$div(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$div(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial (sin\theta\,A_\theta)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Cette notation permet de retenir l'expression du divergence en coordonnées cartésiennes:

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right)\left(A_x\overrightarrow{u_x} + A_y\overrightarrow{u_y} + A_z\overrightarrow{u_z}\right)$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Exemple:

Calculer la divergence du vecteur: $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + 2y\,\overrightarrow{u_y} - z\,\overrightarrow{u_z}$

Solution:

On a:

$$div(\overrightarrow{OM}) = \vec{\nabla}.\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right)\left(x\,\overrightarrow{u_x} + 2y\,\overrightarrow{u_y} - z\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

$$div(\overrightarrow{OM}) = \vec{\nabla}.\overrightarrow{OM} = 1 + 2 - 1 = 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{div(\overrightarrow{OM}) = 2}}$$

I.3.8.5. L'opérateur rotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

L'opérateur **rotationnel** est opérateur différentiel qui s'applique à un champ vectoriel et le transforme en un champ vectoriel.

$$\boxed{\boldsymbol{rot\,(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}}$$

Système de coordonnées	Expression de: $rot\,(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
Cartésiennes	$rot\,(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$
Cylindriques	$rot\,(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$
Sphériques	$rot\,(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$

Cette notation permet de retenir l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes:

$$rot\,(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$rot\,(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$rot\,(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

Exemple:

Soit le vecteur force; $\vec{F} = (x - ay)\,\overrightarrow{u_x} + (3\,y - ax)\overrightarrow{u_y}$

Ou a est une constante

Calculer le rotationnel du vecteur $\vec{F}$

Solution:

$$rot\,(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right) \wedge \left(F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y}\right)$$

$$rot\,(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

$$rot\,(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = (0)\,\overrightarrow{u_x} + (0)\overrightarrow{u_y} + (-a - -a)\vec{u}_z$$

$$rot\,(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{rot\,(\vec{F}) = 0}}$$

I.3.8.6. L'opérateur Laplacien

L'opérateur Laplacien est opérateur différentiel qui s'applique à un champ scalaire ou un champ vectoriel et le résultat est de la même nature.

Le Laplacien scalaire:

L'opérateur **Laplacien scalaire** est un opérateur différentiel d'ordre deux qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. **Le Laplacien scalaire** s'obtient en prenant la divergence du gradient et se note $\triangle$f(M,t)

$$\boxed{\Delta \mathbf{f}(\mathbf{M}, \mathbf{t}) = \vec{\nabla}^2 f = div\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)}$$

Systéme de coordonnées	Expression de Δf
Cartésiennes	$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Cylindriques	$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Sphériques	$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Le Laplacien vectoriel:

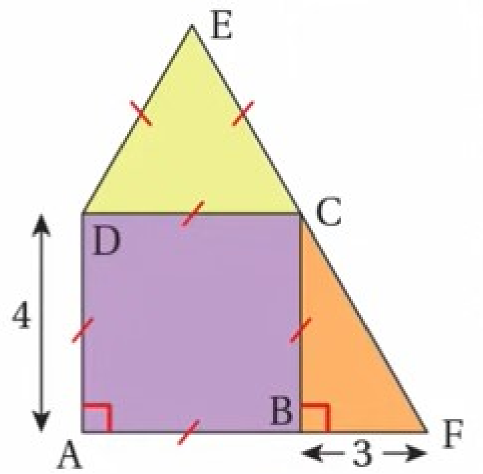
Le Laplacien vectoriel est un vecteur (comme son nom l'indique) qui prend en argument un vecteur: Il se note se la même façon que le Laplacien scalaire mais avec un vecteur

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{u} = \vec{\nabla}^2\vec{u}}$$

Exercices corrigés

Exercice 1: -Produit scalaire-

On considère la figure ci-contre:



Calculer les produits scalaires suivants: $\boldsymbol{a}$) $\overrightarrow{DC}\,.\overrightarrow{DE}$; **b)** $\overrightarrow{AF}\,.\overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{FC}\,.\overrightarrow{FA}$ **d)** $\overrightarrow{EC}\,.\overrightarrow{FB}$ **e)** $\overrightarrow{DA}\,.\overrightarrow{FC}$ **f)** $\overrightarrow{DE}\,.\overrightarrow{CB}$

Solution:

$\boldsymbol{a}$) $\overrightarrow{DC}\,.\overrightarrow{DE} = DC \times DE \times cos(\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DE})$

$\overrightarrow{DC}\,.\overrightarrow{DE} = 4 \times 4 \times cos60°$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{DC}\,.\overrightarrow{DE} = 8}$$

b) $\overrightarrow{AF}\,.\overrightarrow{CB} = AF \times CB \times cos(\overrightarrow{AF}\,,\overrightarrow{CB})$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}\,.\overrightarrow{CB} = 0 \quad (\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CB})}$$

c) $\overrightarrow{FC}\,.\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB}\,.\overrightarrow{FA}$ ($\overrightarrow{FB}$ projection de $\overrightarrow{FC}$ sur la droite passant par les points A et F)

$\overrightarrow{FC}\,.\overrightarrow{FA} = FB \times FA \times \cos(\overrightarrow{FB}\,.\overrightarrow{FA})$

$\overrightarrow{FC}\,.\overrightarrow{FA} = 3 \times 7 \times 1$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{FC}\,.\overrightarrow{FA} = 21}$$

d) $\overrightarrow{EC}\,.\overrightarrow{FB} = EC \times BF \times \cos(60°)$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{EC}\,.\overrightarrow{FB} = 6}$$

e) $\overrightarrow{DA}\,.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CB}\,.\overrightarrow{FC}$

$\overrightarrow{DA}\,.\overrightarrow{FC} = -\,\overrightarrow{CB}\,.\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{DA}\,.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CB}\,.\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{DA}\,.\overrightarrow{FC} = -\,\|\overrightarrow{CB}\|^2$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{DA}\,.\overrightarrow{FC} = -16}$$

f) $\overrightarrow{DE}\,.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{DE}\,.\overrightarrow{CB} = -ED \times CB \times cos(\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB})$

$\overrightarrow{DE}\,.\overrightarrow{CB} = -4 \times 4 \times cos(30°)$

$\overrightarrow{DE}\,.\overrightarrow{CB} = -16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{DE}\,.\overrightarrow{CB} = -8\sqrt{3}}$$

Exercice 2: Produit vectoriel:

Si $\vec{A} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{B} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, trouver: **(a)** $\vec{A} \wedge \vec{B}$, **(b)** $\vec{B} \wedge \vec{A}$, **(c)** $(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B})$.

Solution:

(a) $\vec{A} \wedge \vec{B} = (2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}) \wedge (\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$\boldsymbol{\vec{A} \wedge \vec{B} = 10\,\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 11\,\vec{k}}$$

(b) $\vec{B} \wedge \vec{A} = (\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}) \wedge (2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$\vec{B} \wedge \vec{A} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10\,\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 11\,\vec{k}$

$$\boldsymbol{\vec{B} \wedge \vec{A} = -10\,\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 11\,\vec{k}}$$

(c)

$\vec{A} + \vec{B} = (2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}) + (\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}) = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}) - (\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}) = \vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + \vec{k}$

$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = (3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) \wedge (\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + \vec{k})$

$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$

$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{\imath}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\,\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 22\,\vec{k}$

$$\boldsymbol{(\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} - \vec{B}) = -20\,\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 22\,\vec{k}}$$

Exercice 3: Produit mixte de trois vecteurs:

Soient trois vecteurs: $\vec{A} = (1;\ 5;\ -5)$, $\vec{B} = (2;\ 4;\ 3)$, $\vec{C} = (0;\ 5;\ -4)$

Calculer: $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$

Solution:

On a:

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

En remplaçant par les coordonnées drs trois vecteurs: $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = 1 \times (-4) - 5 \times 3) - 5(2 \times (-4) - 0 \times 3) - 5(2 \times 5 - 0 \times 4)$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = -31 + 40 - 50$$

$$\boldsymbol{\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = -41}$$

Exercice 4: – Opérateurs différentiels-

Un point M(x, y, z) étant repéré par le rayon vecteur : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ de module $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Calculer: $\overrightarrow{grad}(r)$, $div\vec{r}$, $\overrightarrow{rot}\,\vec{r}$

Solution:

Calcul de $\overrightarrow{grad}(r)$:

En coordonnées cartésiennes on a:

$$\overrightarrow{grad}(r) = \vec{\nabla}r = \frac{\partial r}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial r}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial r}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$$

Donc:

$\overrightarrow{grad}(r) = \vec{\nabla}r = \frac{x}{r}\overrightarrow{u_x} + \frac{y}{r}\overrightarrow{u_y} + \frac{z}{r}\overrightarrow{u_z}$

$$\overrightarrow{grad}(r) = \vec{\nabla}.r = \frac{1}{r}\left(\mathrm{x}\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{y}\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{z}\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{grad}(r) = \vec{\nabla}.r = \frac{\vec{r}}{r}}$$

Calcul de $div(\vec{r})$

On a:

$$div(\vec{r}) = \vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right).\left(x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

$$div(\vec{r}) = \vec{\nabla}.\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$div(\vec{r}) = \vec{\nabla}.\vec{r} = 1 + 1 + 1$$

$$\boldsymbol{div(\vec{r}) = \vec{\nabla}.\vec{r} = 3}$$

Calcul de $\overrightarrow{rot}\,\vec{r}$:

$$rot\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$rot\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

$$rot\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = (0)\overrightarrow{u_x} + (0)\overrightarrow{u_y} + (0)\vec{u}_z$$

$$\boldsymbol{rot\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0}$$

Chapitre II

Cinématique du point matériel

Chapitre II. Cinématique du point matériel

II.1. Introduction :

La cinématique du point matériel est l'étude du mouvement des corps matériels en fonction du temps (la position, la distance parcouru, la vitesse, l'accélération...) sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement (les forces, l'énergie,...). On suppose que le corps étudié est un point matériel. On considère que les dimensions du corps sont très petites devant la distance parcourue. La notion du mouvement est relative. Un corps peut être, en même temps, en mouvement par rapport à un corps et en repos par rapport à un autre. Par conséquent, il est nécessaire de définir un repère pour déterminer la position, la vitesse ou l'accélération d'un mobile à un instant correspondant à la position du mobile par rapport à ce repère. On définit plusieurs systèmes de coordonnées selon la nature du mouvement du point matériel. Cartésien, polaire, cylindrique et sphérique.

II.2. Référentiels:

II.2.1. Définition du référentiel d'étude:

En mécanique, pour étudier le mouvement d'un corps, il est ainsi nécessaire de préciser par rapport à quoi nous raisonnons. Autrement dit, on se fixe un référentiel d'étude. Cela consiste à étudier le mouvement des corps par rapport à un objet de référence (un solide dans la pratique) que l'on considère immobile. À partir dudit objet, on définira un repère d'étude : une origine ainsi qu'un ou plusieurs **axes** (études 1D, 2D ou 3D).

Le mouvement d'un corps ne peut être étudié que par rapport à un solide de référence (référentiel). L'état de mouvement ou de repos d'un corps dépend du référentiel choisis. On dit que le mouvement d'un système est **relatif** au référentiel choisis.

Pour que la description du mouvement soit précise, il faut indiquer la position du point considéré et l'instant auquel il occupe cette position. Cela impose de définir un référentiel d'étude

II.2.2 Les référentiels galiléens:

Il existe potentiellement une infinité de référentiels possibles. Toutefois, nous distinguons deux types de référentiels : les galiléens et non galiléens.

Par définition, un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée.

Exemple de référentiel Galiléen:

Référentiel terrestre Galiléen

C'est le référentiel constitué à partir de n'importe quel solide de référence fixe par rapport à la Terre. C'est un référentiel adapté à l'étude des mouvements de courtes durées sur Terre. Le référentiel que l'on appelle couramment "laboratoire" en fait parti. Il existe une infinité de référentiels terrestres, autant que d'objets fixes par rapport à la Terre.

Le référentiel terrestre est galiléen pour des temps courts.

Remarque : le **référentiel du laboratoire** est fixe par rapport au référentiel terrestre. Il a donc les mêmes propriétés que lui.

Référentiel géocentrique

Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de gravité terrestre, et ses axes sont définis par rapport à trois étoiles fixes. La Terre n'est pas immobile dans le référentiel géocentrique. Ce référentiel est bien adapté à l'étude du mouvement de la Lune autour de la Terre, ainsi que celui des satellites artificiels.

Ce référentiel est un solide imaginaire constitué de la terre et d'étoiles suffisamment lointaines pour sembler immobiles

Référentiel héliocentrique

La Terre et ses planètes voisines tournent autour du soleil. Dans un référentiel terrestre, le mouvement de ces astres est très difficile à déterminer. On a donc créé le référentiel par rapport auquel le centre du soleil est fixe. Le référentiel héliocentrique est défini par le centre de gravité du soleil et des étoiles lointaines considérées comme fixes. Dans le référentiel héliocentrique, les planètes ont une trajectoire elliptique

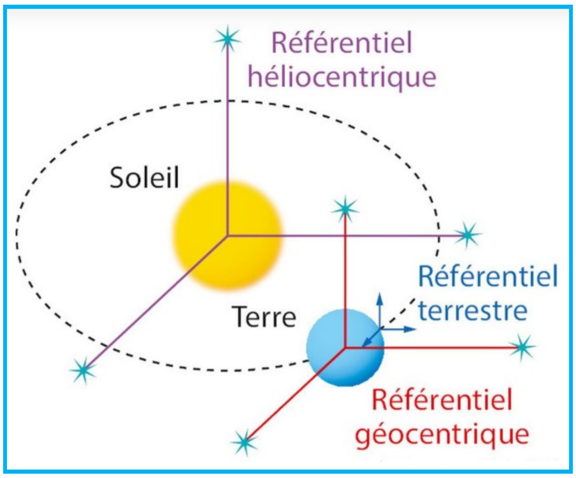


Figure II.1: Représentation des référentiels terrestre, géocentrique et héliocentrique

En résumé:

Référentiels	Repère associé
Héliocentrique	Origine au centre du Soleil et axes orientés vers trois étoiles lointaines supposées fixes
Géocentrique	Origine au centre de la Terre et axes orientés vers trois étoiles lointaines supposées fixes
Terrestre	Centré sur un objet fixe à la surface de la Terre et axes liés à la rotation de la Terre

II.3. Les repère:

II.3.1. Le repère temps:

Pour pouvoir répondre à la question « quand? » il faut un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. La durée écoulée entre 2 événements ou 2 instants est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre. Tout mouvement périodique (mouvement qui se reproduit identiquement à lui-même à intervalle de temps successifs et égaux pris comme unité de temps) peut servir d'horloge. Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie. À chaque instant, on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

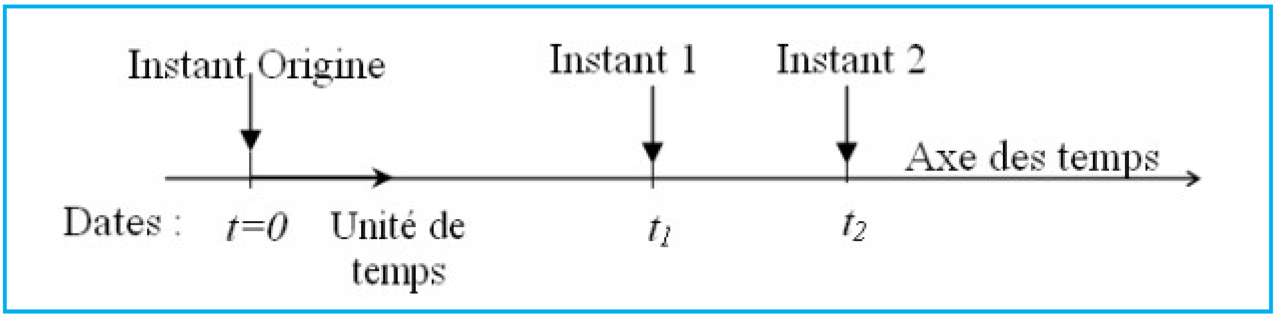


Figure II.2 : Repère de temps

La durée δt entre les instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres

II.3.2. Le repère d'espace:

Un repère d'espace est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) Les trois axes forment un trièdre direct

La position du mobile à chaque instant ne peut-être connue que par rapport à un repère dont l'origine et les directions des axes sont fixes par rapport au référentiel. Pour décrire le mouvement d'un mobile, il faut choisir le référentiel d'étude, un repère lié à ce référentiel et une origine des dates.

Le repère spatial

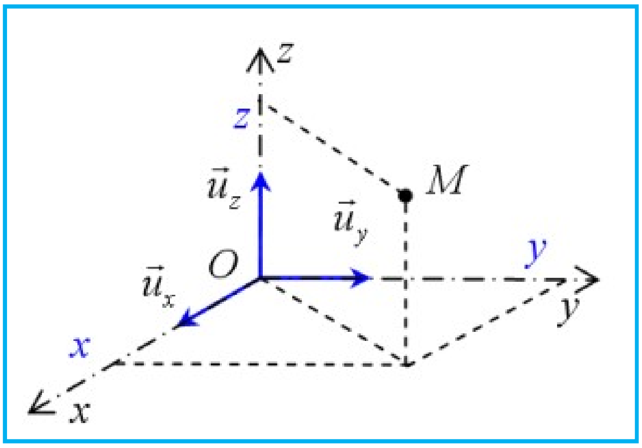


Figure II.2: Repère orthonormé à trois dimensions $\mathcal{R}(\boldsymbol{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Un repère d'espace est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1). Les trois axes forment un trièdre direct

Dans le repère d'espace (O, x, y, z) défini précédemment, un point M est repéré par ses coordonnées d'espace (x, y, z) correspondant à la mesure algébrique de la projection de M successivement sur les 3 axes du repère.

À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée.

Tous les repères que nous étudierons sont d'ailleurs orthonormés.
On a ainsi :

Dans un repère orthonormé $\boldsymbol{\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)}$

$$\overrightarrow{u_x}.\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_x}.\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_y}.\overrightarrow{u_z} = 0$$

$$\|\overrightarrow{u_x}\| = \|\overrightarrow{u_y}\| = \|\overrightarrow{u_z}\| = 1$$

Le repère plan

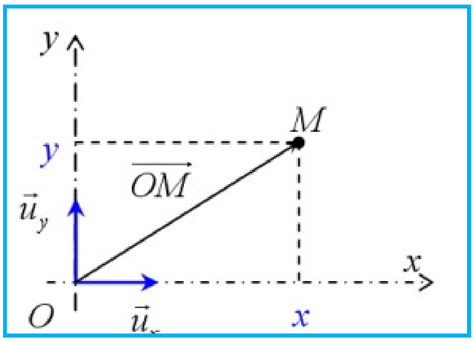


Figure II.3: Repère orthonormé à deux dimensions $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$

Dans le repère plan$(O, x, y\ )$, un point M est repéré par ses coordonnées $(x, y,)$ correspondant à la mesure algébrique de la projection de M successivement sur les 2 axes du repère.

À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ forment une base orthonormée

Le repère rectiligne

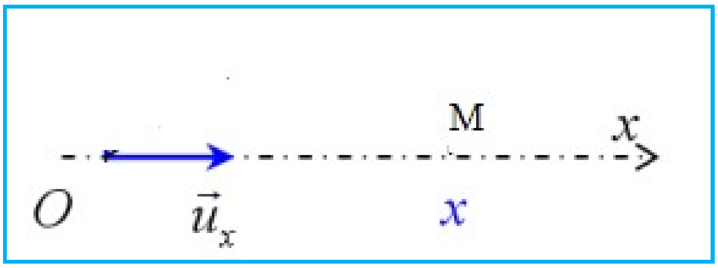


Figure II.4: Repère rectiligne à une dimension $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x)$

Dans le repère rectiligne(O, x), un point M est repéré par son abscisse (x) correspondant à la mesure algébrique de la projection de M sur l'axe du repère $\mathcal{R}$ (O, $\vec{u}_x$) .

II.4. Description du mouvement d'un point matériel:

II.4.1 Equations horaires & Trajectoires;

II.4.1.1 Equations horaires ou équations paramétriques:

Les équations horaires ou équations paramétriques sont des équations donnant les coordonnées d'un point matériel en fonction du temps.

Exemple:

x = 2t +4; y =4t^2 -2

II.4.1.2. Trajectoire:

La trajectoire d'un point mobile, est l'ensemble des positions occupées par ce point durant le mouvement.

Figure II.5: Trajectoire d'un arc en ciel

Equation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire est une relation indépendante du temps entre les coordonnées du mobile.

Exemple: y = 4x + 5

Exemples d'équations de trajectoire et nature:

- **Trajectoire rectiligne: y = ax +b**

Exemple: x = 2 t; y = 3t

$$x = 2t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{x}{2}$$

$$y = 3t \quad \Longrightarrow \quad t = 3\,\frac{x}{2}$$

D'où en éliminant t entre les deux équations:

y = 1.5 x

Cette équation vérifie la relation y = ax + b

Donc la trajectoire est rectiligne

- **Trajectoire parabolique: $y = ax^2 + bx + c \;\; avec\; a \neq 0$**

Exemple : $x = 2t;\;\; y = 8\,t^2 + 7t$

$$x = 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{2}$$

En remplaçant t dans l'équation horaire y, on obtient :

$$y = 8\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y = 2\,x^2 + 3.5\,x$$

Cette équation vérifie la relation: $y = ax^2 + bx + c \;\; avec\; a \neq 0$

Donc la trajectoire est parabolique

Trajectoire circulaire: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

Exemple: x = 2 cos(t) +1; y = 2 sin(t) -3

$$x - 1 = 2\,cos(t) \;\Longrightarrow\; (x-1)^2 = 4\,cos^2(t) \qquad (1)$$

$$y + 3 = 2\,sin(t) \;\Longrightarrow\; (y+3)^2 = 4\,sin^2(t) \qquad (2)$$

La somme des deux équations (1) et (2) donne:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4\,cos^2(t) + 4\,sin^2(t)$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

Cette équation vérifie la relation: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

Donc la trajectoire est circulaire.

II.4.2. Vecteur déplacement:

Définition:

Le vecteur déplacement est égal à la variation du vecteur position.

Le vecteur déplacement, d'un point matériel entre deux positions M_1 et M_2 est: $\overrightarrow{M_1M_2}$

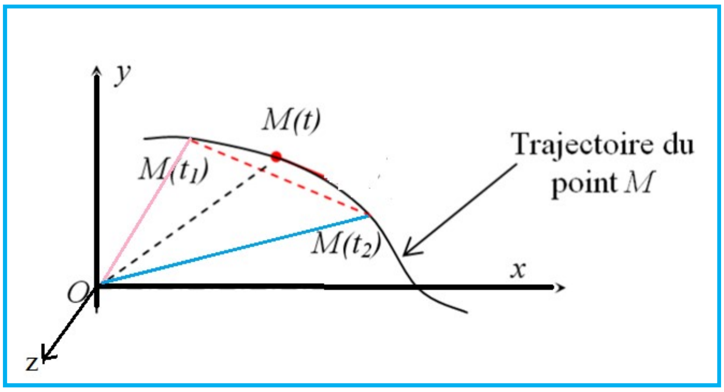


Figure II.6: Vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$

Expression du vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -\vec{r_1} + \vec{r_2}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\vec{r}}$$

Distance & déplacement:

Distance	Déplacement
La distance est une quantité scalaire, elle n'a pas de direction et elle ne peut pas être représentée par un vecteur	Le vecteur déplacement est une quantité vectorielle. Il peut être représenté par un vecteur: ✓ une norme, ✓ une direction ✓ un sens.
Dans le système SI, la norme du vecteur déplacement et la distance sont exprimés en mètre (m)	

II.4.3. Vecteur position:

Définition

Le vecteur position sert à indiquer la position d'un point dans un référentiel par rapport à un repère. L'origine du vecteur se situe à l'origine du repère, l'autre extrémité du vecteur se trouve à l'endroit du point. Si l'on note M la position du point, le vecteur se note: $\overrightarrow{OM}(t)$

II.4.3.1. Vecteur position en coordonnées cartésiennes:

On note $\Re(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un repère de l'espace

Soit M un point de l'espace

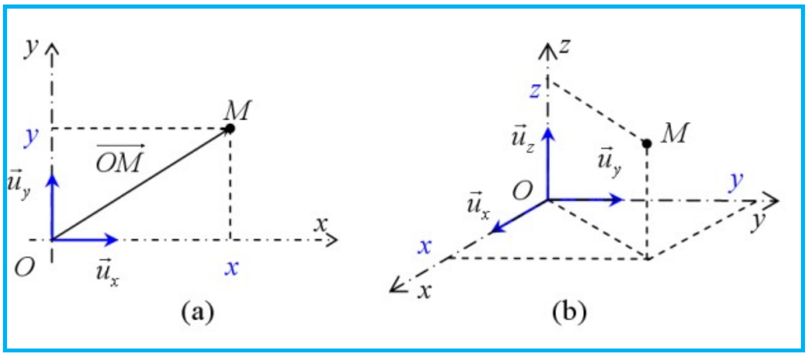


Figure II.7: Repère dans un plan **(a)** et dans l'espace **(b)**

Les coordonnées cartésiennes de P sont le triplet $(x, y, z) \in \Re^3$

Tel que

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\,\vec{\boldsymbol{u}}_x + \boldsymbol{y}\,\vec{\boldsymbol{u}}_y + \boldsymbol{z}\,\vec{\boldsymbol{u}}_z}$$

(x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du point M.

(x, y, z) sont les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donnée par la relation:

$$\boxed{\|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}}$$

II.4.3.2. Vecteur position en coordonnées polaires (dans un plan):

On note $\Re(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$un repère du plan

$\overrightarrow{u_\rho}$ le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ directement perpendiculaire (dans le sens trigonométrique): c'est le vecteur *orthoradial* (perpendiculaire au rayon)

Les vecteurs sont donnés par une distance en ligne droite par rapport à l'origine (ρ) et par l'angle (θ) par rapport à l'axe des abscisses x positives.

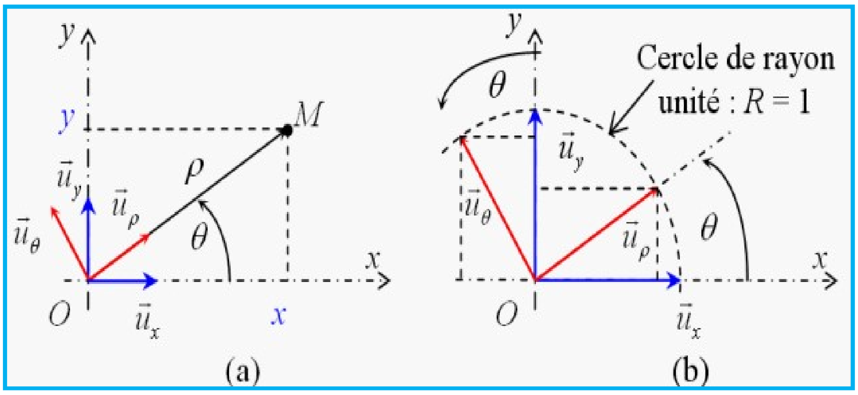


Figure II.8: Les coordonnées polaires (ρ, θ) et la base associée ($\overrightarrow{u_\rho}$, $\overrightarrow{u_\theta}$)

Vecteurs de base:

$$\boxed{\begin{array}{c}\overrightarrow{u_\rho} : \textit{radial} \\ \overrightarrow{u_\theta} ; \textit{orthoradial}\end{array}}$$

Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| \vec{u}_\rho = \rho\, \vec{u}_\rho$$

Relations avec la base cartésienne:

$$\overrightarrow{u_\rho} = \cos\varphi\, \vec{u}_x + \sin\varphi\, \vec{u}_y$$
$$\overrightarrow{u_\theta} = \sin\varphi\, \vec{u}_x + \cos\varphi\, \vec{u}_y$$

Les coordonnées polaires du point P sont

- **La coordonnée radiale** correspond à la longueur du segment $OM = \rho$ (ou r).
- **La coordonnée angulaire** correspond à l'angle θ.

Remarque:

- Les coordonnées polaires du point M sont :$(\rho,\ \theta)$
- Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $(\rho,\ 0)$

Relation entre les coordonnées polaires et cartésiennes

Les relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et polaires sont:

Passage de coordonnées polaires aux cordonnées cartésiennes
$OP = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = arccos\ \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \theta = arcsin\ \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{y}{x}$
Passage de coordonnées cartésiennes aux cordonnées polaires
$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\ sin\theta$

II.4.3.3. Vecteur position en coordonnées cylindriques (dans l'espace):

Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques il suffit de compléter le système de coordonnées polaires (dans le plan xOy) par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote)

ρ: rayon polaire:

ϑ: angle polaire

z : altitude

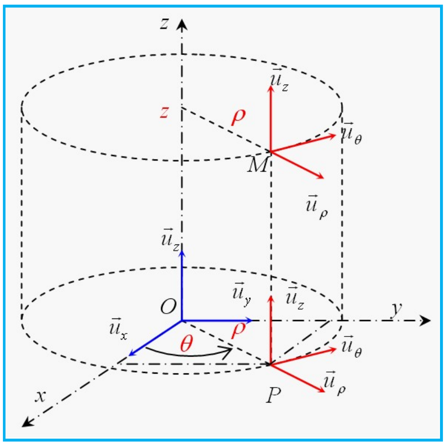


Figure II.9 : Le système de coordonnées cylindriques $(\rho,\ \vartheta, z)$ et la base associée $(\overrightarrow{u_\rho}, \vec{u}_\vartheta, \vec{u}_z)$

La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z. La projection P du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires $(\rho,\ \vartheta)$

Vecteurs de base:

$\vec{u}_\rho$: $radial$

$\vec{u}_\varphi$; $orthoradial$

$\vec{u}_z$: $axial$

Vecteur position:

$\overrightarrow{OM}$ **en coordonnées cylindriques**

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Relations avec la base cartésienne:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,u_z$$

$$\vec{u}_\varphi = -sin\varphi\,\vec{u}_x + cos\varphi\,\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_z = \vec{u}_z$$

Remarque:

- Les coordonnées cylindriques du point M sont: $(\rho,\ \vartheta, z)$
- Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont: $(\rho,\ 0, z)$

Relation entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes

Les relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques sont:

Passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\vartheta = arctan\frac{y}{x} = arcsin\frac{y}{\rho} = \arccos\frac{x}{\rho}$
z= z
Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques
$x = \rho\ cos\vartheta$
$y = \rho\ sin\vartheta$
z= z

II.4.3.4. Vecteur position en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (dans l'espace):

Les coordonnées sphériques permettent de repérer un point sur une sphère de rayon OM = r.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est définit dans le repère $\Re(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ par:

Vecteurs de base:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u}_r : radial \\ \vec{u}_\theta \,; zénithal \\ \vec{u}_\varphi : longitudinal \end{array}}$$

Vecteur position:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$$

La coordonnée radiale r correspond à la distance de l'origine O du repère au point M.

La coordonnée angulaire θ correspond à l'angle que fait OM avec l'axe Oz. Cet angle, compris entre 0 et π, est appelé colatitude (angle complémentaire de la latitude) ou zénith.

La coordonnée angulaire ϕ correspond à l'angle que fait le plan défini par l'axe Oz et OM avec l'axe Ox. Cette angle, compris entre 0 et 2π, est appelé la longitude ou l'azimut.

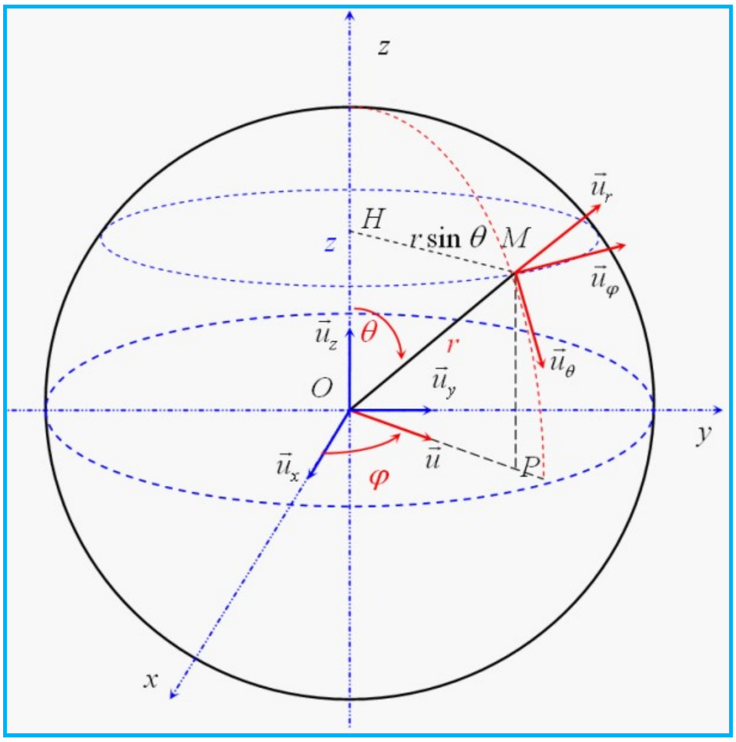


Figure II.10 : Le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$

Relation entre les coordonnées sphériques et cartésiennes

La projection H du point M sur l'axe Oz donne la cote:

$$z = OH = r\cos\theta$$

Si P est la projection de M sur le plan xOy on a: $OP = r\ \sin\theta$

Les coordonnées x et y du point M sont celles du point P c'est à dire:

$$x = OP\ \cos\phi = r\ \sin\theta\ \cos\phi$$

$$y = OP\ \sin\phi = r\ \sin\theta\ \sin\phi$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ suivant OP a pour expression:

$$\boldsymbol{\vec{u} = \cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y}$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_\phi$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}$. Il fait un angle $(\phi + \pi/2)$ avec l'axe Ox et s'écrit:

$$\boldsymbol{\vec{u}_\phi = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y}$$

Le vecteur unitaire$\vec{u}_r$ a pour expression:

$$\vec{u}_r = \sin\theta\vec{u} + \cos\theta\,\vec{u}_z = \sin\theta\left[\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y\right] + \cos\theta\,\vec{u}_z$$

$$\boldsymbol{\vec{u}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\sin\phi\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z}$$

Enfin, le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$ et s'écrit:

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{u}_z = \cos\theta[\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_z] - \sin\theta\,\vec{u}_z$$

$$\boldsymbol{\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\cos\phi\,\vec{u}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{u}_y - \sin\theta\,\vec{u}_z}$$

Relations avec la base cartésienne:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\boldsymbol{\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z}\\
&\boldsymbol{\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\cos\varphi\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{u}_y + \sin\theta\,\vec{u}_z}\\
&\boldsymbol{\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y}
\end{aligned}}$$

Remarque:

- Les coordonnées sphériques du point M sont : (r, θ, ϕ)
- Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont $(R, 0,0)$

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\varphi = arctan\dfrac{y}{x} = arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\vartheta = arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$
Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes
$x = r\, sin\vartheta\, cos\varphi$
$y = r\, sin\vartheta\, sin\varphi$
$z = r\, cos\vartheta$

II.4.3.5. Abscisse curviligne et base de Frenet (dans un plan):

Lorsque la trajectoire que suit le point M est connue il est possible de repérer le point sur la courbe représentant cette trajectoire.

On choisit sur la courbe orientée un point origine ω et on définit l'abscisse curviligne S comme la mesure algébrique sur la courbe de la distance:

$$\boxed{s = \overline{\omega M}}$$

(*s* = mesure sur la courbe)

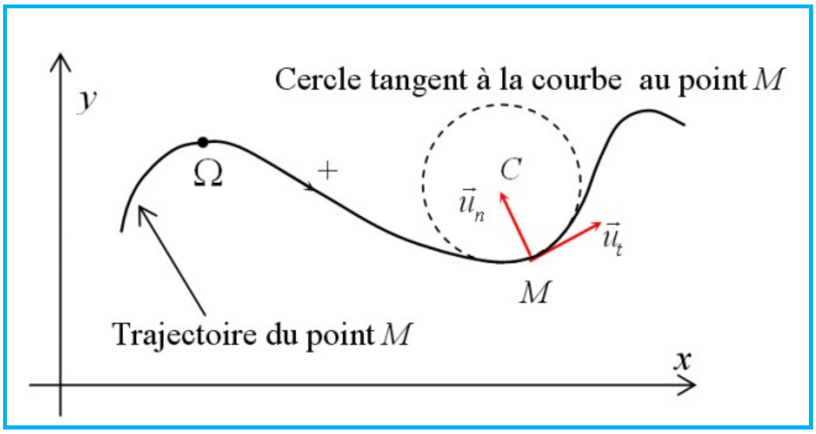


Figure 11: Abscisse curviligne (s = mesure sur la trajectoire) et base de Frenet

Le cercle de centre C et de rayon ρ qui tangente localement en M la trajectoire du point est appelée cercle osculateur. Le rayon ρ de ce cercle correspond alors au rayon de courbure de la trajectoire au point considéré (voir **fig17**) et C est le centre de courbure. En chaque point de la courbe on définit la base de Frenet ($\vec{u}_T, \vec{u}_N$) avec :

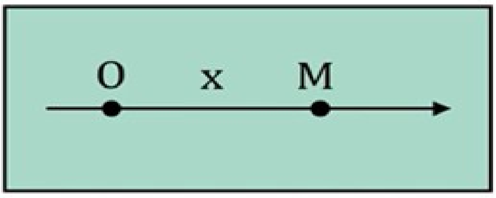
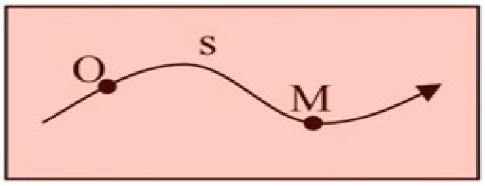
Vecteurs de base:

$\vec{u}_T$: tangentiel (sens du mouvement)

$\vec{u}_N$: normal (orthogonal à et orienté vers le centre de courbure de la trajectoire).

Remarque

Abscisse rectiligne & abscisse curviligne

Abscisse rectiligne	Abscisse curviligne
	
L'abscisse rectiligne d'un point M est la mesure algébrique du segment de droite joignant l'origine O à M	L'abscisse curviligne d'un point M est la mesure algébrique de la ligne courbe joignant l'origine O à M
$x = \overline{OM}$	$s = \overset{\frown}{OM}$

II.4.4. Vecteur vitesse moyenne:

Par définition la vitesse moyenne est le rapport d'une distance parcourue en un intervalle de temps :

$$vitesse = \frac{distance}{intervalle\ de\ temps}$$

Soit un mouvement repéré par des positions *Mi* à des instants ti espacés par des intervalles de temps (t_i- t_{i-1}).

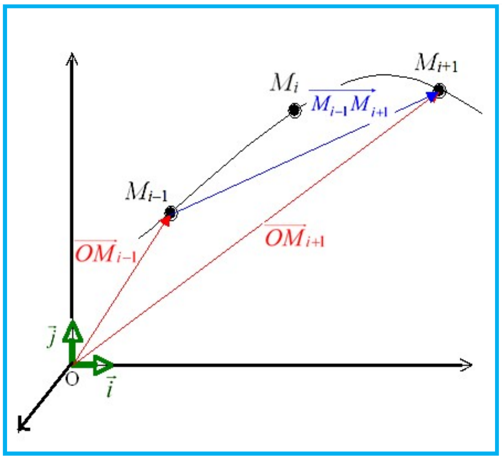


Figure II.12: Vecteur vitesse moyenne

Le vecteur vitesse moyenne au point Mi:

$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

Or :

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}} = \overrightarrow{M_{i-1}O} + \overrightarrow{OM_{i+1}}$$

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}} = \overrightarrow{OM_{i+1}} - \overrightarrow{OM_{i-1}} = \Delta\overrightarrow{OM_i}$$

On peut écrire :

$$\boxed{\vec{v}_i = \frac{\Delta\overrightarrow{OM_i}}{\Delta t}}$$

(avec: $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$)

II.4.5. Vitesse instantanée:

La vitesse instantanée est la vitesse exacte à un instant *t* précis, c'est-à-dire lorsque l'intervalle de temps Δt devient le plus petit possible, en fait lorsque l'intervalle de temps Δt s'approche de zéro. Ce qui revient à dire que l'on doit prendre les points M_{i-1} et M_{i+1} les plus près possible du point M_i.

Figure II.13: Vecteur vitesse instantanée

Définition

La vitesse instantanée (ou vitesse tout court) peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position $M_1 = M(t)$ du point mobile à la date t et la position $M_2 = M(t + \delta t)$ de ce même point à la date $t + \delta t$ où δt représente une durée très faible. Cette vitesse moyenne tend d'autant plus vers la vitesse instantanée à la date t que la durée δt tend vers zéro. Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ est une fonction du temps et la vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = lim\delta t \to 0 \ \frac{\overrightarrow{OM}(t + \delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\delta t}$$

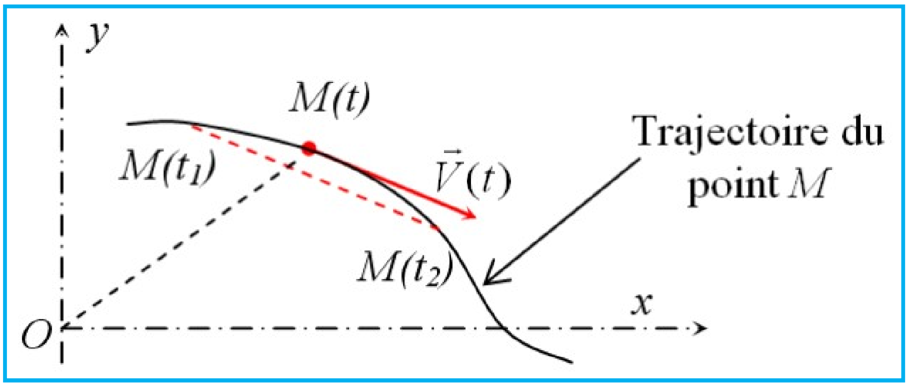


Figure II.14: Vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ tangent à la trajectoire au point M considéré.

Lorsqu'on considère une durée élémentaire dt « infiniment petite » le point mobile passe d'une position *M* à une position *M* « infiniment proche » de *M*. Le déplacement élémentaire correspondant peut s'écrire $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$

La durée élémentaire est choisi suffisamment petite pour que la vitesse moyenne sur le déplacement élémentaire coïncide avec la vitesse instantanée. Avec ces notations, le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$, dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, s'écrit:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Lorsque le point *M'* tend vers le point *M* la corde *MM'* tend vers la tangente à la trajectoire au point *M*. Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

Conclusion:

- Le vecteur vitesse peut s'écrire comme la dérivée du vecteur position ou bien comme le rapport d'un déplacement élémentaire sur la durée élémentaire correspondante.
- Unité : mètre/seconde symbole m.s^{-1}.
- Ce vecteur vitesse peut avoir différentes expressions suivant le système de coordonnées choisi pour étudier le mouvement du point dans un repère donné.

II.4.5.1. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes:

La base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est constituée de vecteurs « fixes » dans le repère : leur direction, leur sens, leur norme ne changent pas au cours du temps. En utilisant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes et les règles de dérivation d'une somme de fonctions, on a :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z)}{dt}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\,\vec{u}_z \\ \vec{v}(t) = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z\end{gathered}}$$

Par convention et pour alléger les expressions, la « dérivation d'une variable x par rapport au temps t » est notée par la variable surmontée d'un point pour la dérivée première, de 2 points pour la dérivée seconde etc...

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Conclusion:

La valeur v de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur:

$$\boxed{\|\vec{v}(t)\| = v = \sqrt{\dot{x}^3 + \dot{y}^3 + \dot{z}^2}}$$

II.4.5.2. Vecteur vitesse en coordonnes polaires:

La base $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ est constituée de vecteurs « mobiles » dans le repère : ces vecteurs changent de direction au cours du temps. En utilisant l'expression du vecteur position en coordonnées polaires et les règles de dérivation d'un produit de fonctions, on a :

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

D'après l'expression le vecteur $\vec{u}_\rho$ apparaît comme une fonction de la coordonnée angulaire θ elle-même fonction du temps au cours du mouvement du point *M*. La dérivation d'une fonction composée permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \omega\,\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$$

La quantité θ caractérise la variation de l'angle polaire au cours du temps et correspond à la définition de la vitesse angulaire. Elle est souvent notée ω (lettre grecque oméga) et s'exprime en radian/seconde ($rad.s^{-1}$).

Dérivation par rapport à l'angle θ d'un vecteur tournant de norme constante

L'application des règles de dérivation sur l'expression du vecteur $\vec{u}_\rho$ donne:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \frac{d\left[(cos\theta)\vec{u}_x + (sin\theta)\vec{u}_y\right]}{d\theta} = \frac{d(cos\theta)}{d\theta}\,\vec{u}_x + \frac{d(sin\theta)}{d\theta}\vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -sin\theta\,\vec{u}_x + cos\theta\,\vec{u}_y$$

On obtient finalement:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta}$$

De même pour le vecteur $\vec{u}_\theta$:

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\ \frac{d[(-sin\ \ )\vec{u}_x + (cos\theta)\vec{u}_y]}{d\theta} = -cos\theta\,\vec{u}_x - \ sin\theta\,\vec{u}_y = -\left[cos\theta\,\vec{u}_x + sin\theta\,\vec{u}_y\right]$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho}$$

Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire
La dérivée par rapport à l'angle polaire θ d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ (qui ne dépend que de l'angle θ) est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de π/2 dans le sens positif).

Dérivation par rapport au temps d'un vecteur tournant de norme constante

D'après la relation on a:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = \omega\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \omega\vec{u}_\theta}$$

De même:

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho = \omega\vec{u}_\rho$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \omega\vec{u}_\rho}$$

Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport au temps
La dérivée par rapport au temps t d'un vecteur $\vec{u}$ de norme constante est un vecteur dont la norme est obtenue en multipliant celle de $\vec{u}$ par la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ et qui est directement perpendiculaire à $\vec{u}$ (rotation de π/2 dans le sens positif).

Expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires

En reprenant l'expression et en utilisant le résultat on a :

$$\vec{v}(t) = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Vecteur vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Norme du vecteur vitesse en coordonnées polaires

$$\|\vec{v}(t)\| = v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$$

Les grandeurs v_ρ et v_θ sont respectivement les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse dans la base polaire.

II.4.5.3. Vecteur vitesse en coordonnes cylindriques:

Il suffit de rajouter la composante suivant l'axe Oz au système de coordonnées polaires pour obtenir l'expression du vecteur vitesse. Le vecteur de base $\vec{u}_z$ $\vec{u}_\theta$ne dépendant pas du temps

on a :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z)}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d(z\,\vec{u}_z)}{dt}$$

Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{v}(v_\rho = \dot{\rho};\ v_\theta = \rho\dot{\theta};\ v_z = \dot{z})$$

Norme du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

$$\|\vec{v}(t)\| = v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

II.4.5.4. Vecteur vitesse en coordonnes sphériques:

L'expression du vecteur vitesse peut s'obtenir à partir de l'expression du déplacement élémentaire. En s'aidant de la figure II.10 un déplacement élémentaire peut se décomposer en :

- Déplacement élémentaire radial dr suivant $\vec{u}_r$ (le point s'éloigne de l'origine)
- La coordonnée radiale passe de r à r+dr.
- Déplacement élémentaire suivant (le point se déplace sur le méridien)
- La colatitude passe de θ à $\theta+d\theta$
- Déplacement élémentaire $r\,sin\theta\,d\phi$ suivant $\vec{u}_\phi$ (le point se déplace suivant le parallèle)
- La longitude passe de ϕ à $\phi+ d\phi$.

On obtient donc l'expression :

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\,sin\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$

On en déduit l'expression du vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{O}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{rd\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{r\,sin\theta\,d\phi}{dt}\,\vec{u}_\phi$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\,sin\theta\,\dot{\phi}\,\vec{u}_\phi}$$

II.4.5.5. Vecteur vitesse dans la base de Frénet:

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point M en décrivant la trajectoire, l'abscisse curviligne du point *M* passe de *s* à *s +ds* entre l'instant *t* et l'instant *t +dt* (voir figure II.15). Le déplacement élémentaire du point *M* est tangent à la trajectoire et s'écrit alors :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{u}_t$$

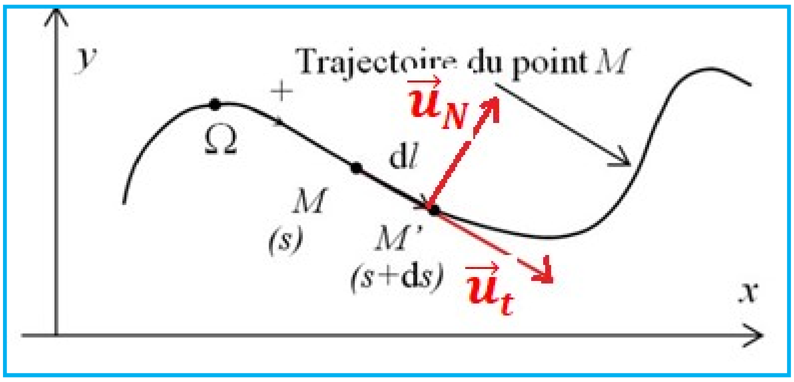


Figure II.15: *Déplacement élémentaire dans le repère de Frenet*

Le vecteur vitesse a pour expression:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t = \dot{s}\,\vec{u}_t = v\,\vec{u}_t}$$

La grandeur $v = \dot{s}$ correspond à la valeur algébrique de la vitesse (positive si le point se déplace dans le sens positif choisi).

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \|\dot{s}\,\vec{u}_t\| = \lfloor\dot{s}\rfloor\|\vec{u}_t\| = \lfloor\dot{s}\rfloor = \lfloor v\rfloor = v}$$

II.4.5.6. Vecteur vitesse angulaire:

Définition

Nous avons vu que la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est une base mobile. Les vecteurs de cette base tourne autour de l'axe *Oz* avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. Pour caractériser cette rotation il suffit de se donner la valeur de la vitesse angulaire et la direction autour de laquelle les vecteurs tournent. Il est donc pratique d'introduire un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ dont la direction est celle de l'axe de rotation et le module la valeur de la vitesse angulaire. Le sens de ce vecteur oriente automatiquement les rotations dans le plan par la règle habituelle du tire-bouchon (voir figure II.16).

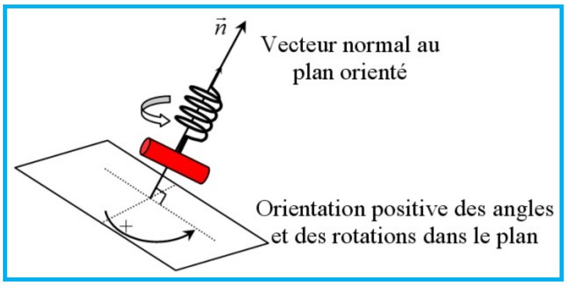


Figure II.16: *Règle du « tire-bouchon ». Le sens positif de rotation dans le plan est celui qu'il faut donner au tire-bouchon (ou à une vis) pour qu'il se dirige suivant le vecteur unitaire normal au plan.*

Le vecteur vitesse angulaire caractérisant la rotation des vecteurs de la base polaire est donc un vecteur suivant l'axe *Oz* et de module correspondant à la valeur algébrique de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ (une valeur positive donne une rotation dans le sens positif).

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega\, \vec{u}_z = \dot{\theta}\vec{u}_z}$$

Attention

Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ d'un point M se déplaçant dans le plan (O, x,y,z) est un vecteur dans ce plan alors que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ est un vecteur perpendiculaire à ce plan.

$$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$$

Dérivée des vecteurs de la base polaire en fonction du vecteur vitesse angulaire

La dérivée du vecteur $\vec{u}_\rho$ est donnée par l'expression: $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \omega\, \vec{u}_\theta$

La base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ des coordonnées cylindriques est une base orthonormée directe. Cela signifie qu'il est toujours possible d'exprimer l'un de ces vecteurs par un produit vectoriel des deux autres en respectant l'ordre. On a par exemple :

$\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z; \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_\rho; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$

Dans chacun des cas précédents l'ordre $(\rho,\ \theta,\ z)$ est respecté. Dans le cas contraire il suffit de mettre un signe moins :

$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\rho = -\vec{u}_z; \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_\rho; \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_\theta$

Dans ce cas, l'expression devient:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \omega\,\vec{u}_\theta = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) = (\omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\rho$$

De même:

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\omega\,\vec{u}_\rho = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = (\omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta$$

II.4.6.Vecteur accélération moyenne:

L'accélération correspond à la variation de la vitesse pendant le même intervalle de temps Par analogie avec le vecteur vitesse, on a pour l'accélération moyenne:

$$\boxed{\vec{a}_i = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t}}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}_i$ a la direction et le sens du vecteur $\Delta\vec{v}_i$

II.4.7.Vecteur accélération instantanée:

Définition

Le vecteur accélération instantanée (accélération tout court) correspond donc à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse c'est-à-dire aussi à la dérivée seconde du vecteur position.

Ainsi le vecteur accélération instantanée, s'écrit:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad (en\ m.s^{-2})}$$

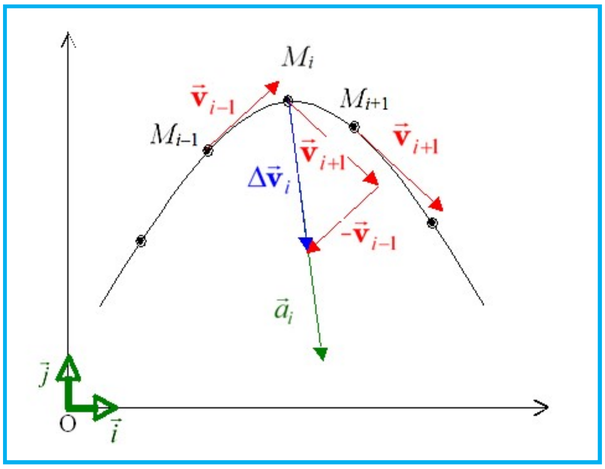


Figure II.17 : Le vecteur accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée (accélération tout court) correspond donc à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse c'est-à-dire aussi à la dérivée seconde du vecteur position

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

Le vecteur accélération correspond à la variations du vecteur vitesse par unité de temps. L'accélération s'exprime, dans le système international, en mètres divisés par des secondes au carré : symbole m.s^{-2}.

II.4.7.1. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes:

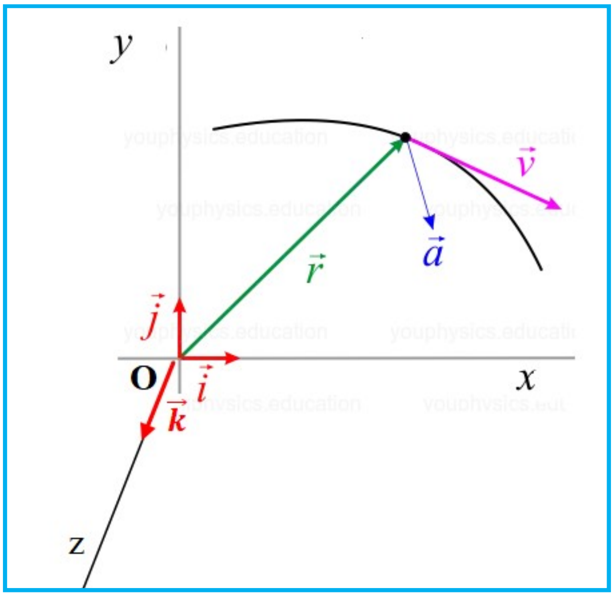


Figure II.18 : Le vecteur accélération instantanée dans le repére $\Re\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

À partir de la définition du vecteur accélération et de l'expression du vecteur vitesse on a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d[\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z]}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z}$$

II.4.7.2. Vecteur accélération en coordonnées polaires:

À partir de la définition du vecteur accélération et de l'expression du vecteur vitesse on a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)}{dt} = \frac{d\left(\dot{\rho}\vec{u}_\rho\right)}{dt} + \frac{d\left(\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)}{dt}$$

En utilisant les règles habituelles de dérivations d'un produit on a

$$\frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho})}{dt}\ \vec{u}_\rho + \dot{\rho}\ \frac{d(\vec{u}_\rho)}{dt} = \ \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\left[\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right] = \ \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \frac{d(\rho)}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \frac{d(\dot{\theta})}{dt}\rho\vec{u}_\theta + \frac{d(\vec{u}_\theta)}{dt}\rho\dot{\theta} = \ \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\left[-\dot{\theta}\vec{u}_\rho\right] =$$

$$\frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \ -\rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + \ (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

En regroupant et ordonnant les différents résultats on obtient l'expression :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Le premier terme: $\boldsymbol{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)}$ correspond à la **composante radiale** de l'accélération

Le second terme: $\boldsymbol{(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})}$ est sa **composante orthoradiale**

II.4.7.3. Vecteur accélération en coordonnées cylindriques:

Il suffit de rajouter le terme correspondant à la dérivation de la cote z on a :

$$\boldsymbol{\vec{a}} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ \ddot{z}\vec{u}_z)$$

$$\vec{a} = \left(a_\rho = \ \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2;\ a_\theta = \ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\ ;\ a_z = \ \ddot{z}\right)$$

II.4.7.4. Vecteur accélération en coordonnées curvilignes:

En base de FRENET

Dans la base de Frenet la vitesse s'écrit : $\vec{v} = \ \dot{s}\,\vec{u}_t = v\,\vec{u}_t$

Le vecteur l'accélération s'obtient en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse:

$$\boldsymbol{\vec{a} = \frac{d\dot{s}}{dt}\,\vec{u}_t + \ \dot{s}\ \frac{\vec{u}_t}{dt}}$$

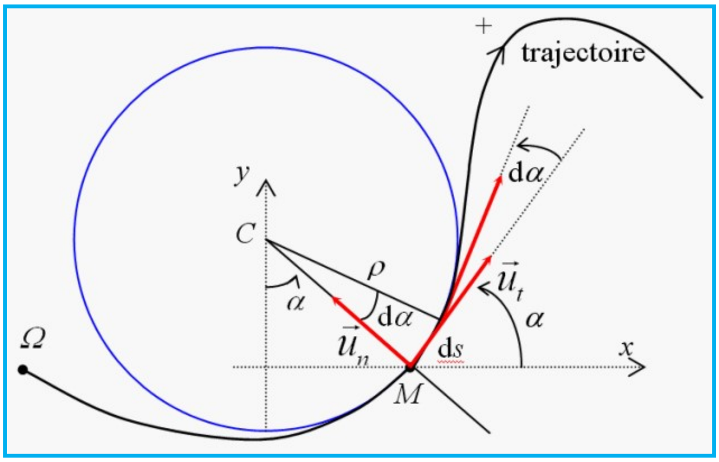


Figure II.19: Base de Frenet et déplacement *ds* élémentaire

À un instant t, au point M de la trajectoire, le vecteur de base $\vec{u}_t$ fait un angle α avec la direction de l'axe des x (voir figure 1I.19). À l'instant $t+ dt$, ce vecteur tourne d'un angle dα. La dérivée, par rapport au temps, de ce vecteur unitaire est donc donnée par (voir règle de dérivation par rapport au temps d'un vecteur tournant de norme constante):

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \dot{\alpha}\vec{u}_n$$

Avec $CM = \rho$, le rayon du cercle osculateur tangent à la courbe au point M, on a

$$ds = CM\, d\alpha = \rho d\alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} = \frac{v}{\rho}$$

$$\dot{s}\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \dot{s}\dot{\alpha}\vec{u}_n = \dot{s}\frac{\dot{s}}{\rho}\vec{u}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{u}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

Finalement:

L'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet est:

$$\boxed{\vec{a} = \dot{s}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n}$$

La composante normale et tangentielle de l'accélération

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$**: elle** est toujours dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré. Elle indique que la direction du vecteur vitesse change et est d'autant plus important que le rayon de courbure est faible. Si le mouvement est rectiligne (rayon de courbure infini) ce terme est nul.

La composante tangentielle de l'accélération

$a_t = \frac{dv}{dt}$, indique si la valeur de la vitesse change. Si le mouvement est uniforme ce terme est nul.

Exercices corrigés

Exercice 1:

Un point M est repéré, par rapport au repère $\mathscr{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, à l'instant tpar les coordonnées suivantes ;

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^2 - t + 2 \\ y(t) = 3t \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire du point M..

2. Calculer les normes des vecteurs position et vitesse à l'instant t =1.5 s

3. Donner l'expression de l'accélération du point M et en déduire la nature du mouvement du point M.

4. Déterminer les composantes tangentielle et normale de $\vec{a}$ .en déduire l'expression du rayon de la courbure R de la trajectoire en fonction du temps t. calculer R à l'instant t= 1.5 s

Solution:

1. Déterminer la nature de la trajectoire:

On a: $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\,t^2 - t + 2 & (1) \\ y(t) = 3t & (2) \end{cases}$

A partir de l'équation (2); $t = \frac{y}{3}$

On remplace t dans l'équation (1) et on obtient:

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right) + 2$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{27}y^2 - \frac{y}{3} + 2} : \boldsymbol{parabole\ de\ concavité\ tourné\ vers\ le\ haut.}}$$

2. Calculer les normes des vecteurs position et vitesse à l'instant t =1.5s

Norme du vecteur position à t =1.5s

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = \left(\frac{1}{3}\,t^2 - t + 2\right)\vec{\imath} + (3t)\vec{\jmath}$$

à t =1.5s

$$\overrightarrow{OM} = 1.25\,\vec{\imath} + 4.5\,\vec{\jmath}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1.25^2 + 4.5^2}$$

$\|\overrightarrow{OM}\|$ = 4.67 m

$$\boxed{\|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\| = \mathbf{4.67\ m}}$$

Norme du vecteur vitesse à t =1.5s

On a: $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\,t^2 - t + 2 \\ y(t) = 3t \end{cases}$ soit $\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}\,t - 1 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 3 \end{cases} \Longrightarrow \vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$

$$\vec{v} = \left(\frac{2}{3}\,t - 1\right)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

à t =1.5s

$$\vec{v} = 0\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

La norme:

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v_x^2 + v_y^2}} = \sqrt{\mathbf{3^2}} = \mathbf{3m.s^{-1}}}$$

3. L'expression de l'accélération du point M et la nature du mouvement du point M

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{2}{3} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = 0.67\,\vec{\imath}$$

La norme:

$$\boxed{\mathbf{a = 0.67\ m\ s^{-2}}}$$

Nature du mouvement du point M

a = cste > 0 et v >0: M.R.U.A

4-Composante tangentielle et normale de l'acceleration $\vec{a}$

Accélération tangentielle a_t:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \ \ or\ \ \vec{v} = \left(\frac{2}{3}\,t - 1\right)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \ \text{ alors } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\,t - 1\right)^2 + 3^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10} = \left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sachant que: $\dfrac{d(u^n)}{dt} = n\,u^{n-1}\dfrac{du}{dt}$

$$a_t = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\,t - 1\right)\right)$$

Composante tangentielle a_t:

$$a_t = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\,t - 1\right)\right) \Longrightarrow a_t = \frac{2}{3} \times \frac{\left(\frac{2}{3}\,t - 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_t = \frac{2}{3} \times \frac{\left(\frac{2}{3}\,t - 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)}}}}$$

Composante normale a_n:

$$\vec{a} = a_t\,\vec{T} + a_n\,\vec{N} \Longrightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Longrightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}\ \ or\ a = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)}} = 2\left(\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = 2\left(\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)\right)^{-\frac{1}{2}}}}$$

Détermination du rayon de courbure R:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right) \times \sqrt{\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 10\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

A la date t= 1.5s:

$$\boxed{\boldsymbol{R = 13.5\ m}}$$

Exercice 2:

Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel à l'instant t est donné dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par:

$$\begin{cases} x = 2\,t \\ y = \sqrt{4(1 - t^2)} \end{cases}$$

1. Trouver l'équation de la trajectoire du point M et préciser sa nature.

2. Donner l'expression du vecteur et son module.

3.1 Calculer l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ et l'accélération normale $\vec{a}_n$ de la trajectoire

3.2 En déduire les composantes cartésiennes du vecteur accélération

3.3 En déduire que le module de l'accélération est indépendant du repère étudié.

Solution:

1. Equation de la trajectoire du point M:

On a:

$$\begin{cases} x = 2\,t \\ y = \sqrt{4(1 - t^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4\,t^2 \\ y^2 = 4(1 - t^2) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4}}$$

La trajectoire est un cercle de centre O(0,0) et de rayon R= 2 m

2. Vecteur vitesse et son module:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -2t\,(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v} = 2\,\vec{i} - \left(2t\,(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\vec{j}}$$

La norme de $\vec{v}$:

$$v = \sqrt{4 + \frac{4t^2}{1 - t^2}} = 2(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{v = 2(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

3.1 calcul de la composante tangentielle a_t la composante normale a_n. de l'acceleration:

$a_t = \frac{dv}{dt}$ avec $v = 2(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$

Alors

$$\boxed{a_t = 2t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4(1-t^2)^{-1}}{2}$

Soit:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{(1-t^2)}}$$

3.2 Les composantes cartésiennes du vecteur accélération:

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d(2)}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d\left(2t\,(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{dt} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\,2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}}$$

3.3 deduction de l'indépendance de l'acceleration du repére:

Dans la base cartesienne:

$a^2 = a_x^2 + a_y^2$ or $\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\,2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$a = \frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$$

Dans la base de FRENET:

$a^2 = a_t^2 + a_n^2$ or $\vec{a} = \begin{cases} a_t = 2t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \\ a_n = \frac{2}{(1-t^2)} \end{cases}$

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}}}$$

On en déduit que le module de l'accélération a est indépendant du repère d'étude.

II.5 Exemples de mouvements:

II.5.1 Généralités sur les mouvements rectilignes:

En physique, un mobile est dit en mouvement uniforme si ce mobile parcourt, dans un référentiel donné, des distances proportionnelles aux temps de trajet - en d'autres termes, si sa vitesse est constante, ou plutôt si la valeur de sa vitesse est constante.

II.5.1.1. Mouvement rectiligne uniforme:

Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme, c'est le vecteur vitesse qui est constant. C'est-à-dire que la valeur, la direction et le sens de la vitesse restent inchangés. Le mobile se déplace le long d'une ligne droite avec une accélération nulle. La somme des forces qui lui sont appliquées est elle aussi nulle.

Figure II.20: Mouvement rectiligne uniforme

Vecteur vitesse constant:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x = C\vec{u}_x \Rightarrow \dot{x} = C$$

Ce qui conduit à l'équation horaire suivante: $x = C\,t + x_0$

Équation différentielle:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x = v_0\vec{u}_x \Rightarrow \dot{x} = C$$

Accélération nulle:

$$\boldsymbol{a = \ddot{x} = 0}$$

Équation horaire: $$\boldsymbol{x(t) = v_0 t + x_0}$$

Remarque sur le signe de la vitesse

- **Si $x > x_0$** , alors v>0, la vitesse est positive: mobile se déplace dans le sens positif de la trajectoire
- **Si $x < x_0$** , alors v<0, la vitesse est négative: mobile se déplace dans le sens négatif de la trajectoire
- **Si $x = x_0$** , alors v=0, la vitesse est nulle: le mobile est à l'arrêt

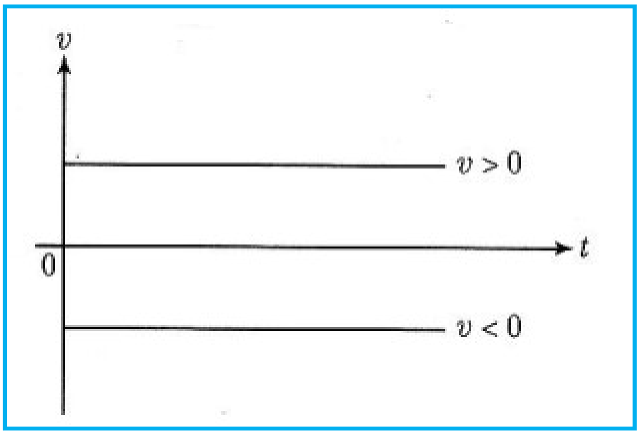


Figure II.21: Le graphe v = f(t) est une droite horizontale

Loi de la position **$X = X_0 + V . t$**

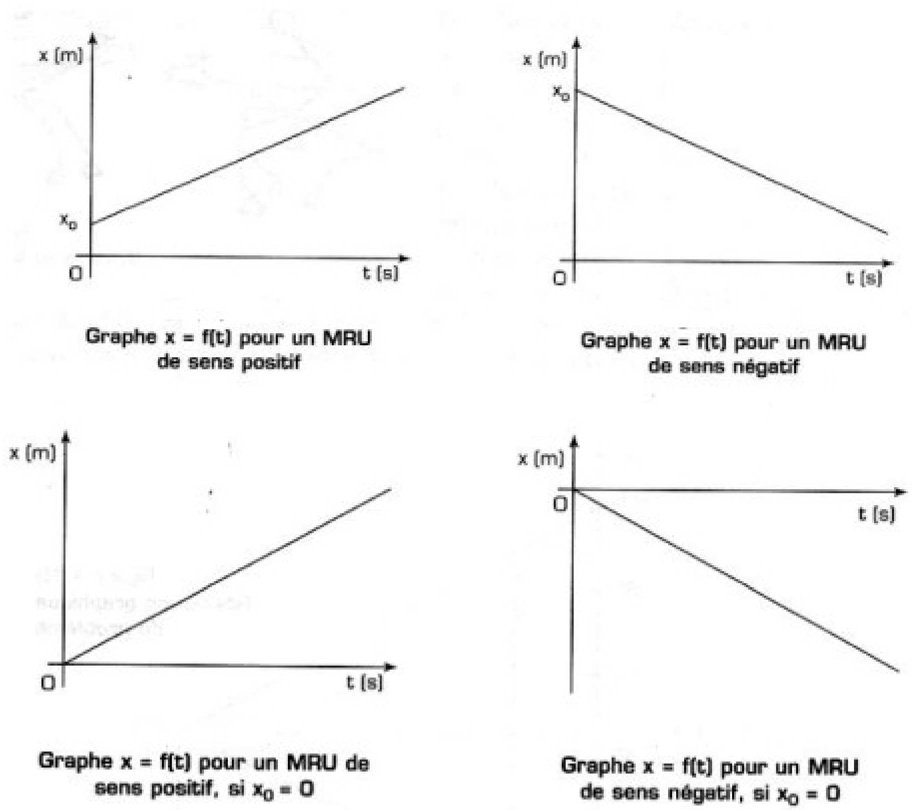


Figure II.22: Le graphe x = f(t) est une droite

Résumé

Mouvement rectiligne uniforme

Accélération nulle $\boldsymbol{a = \ddot{x} = 0}$
vitesse constante $\boldsymbol{v(t) = v_0 = C}$
Équation horaire: $\boldsymbol{x(t) = v_0 t + x_0}$

II.5.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement est rectiligne et uniformément varié lorsque la trajectoire est une portion de droite et la valeur de l'accélération est constante. La valeur de la vitesse est une fonction affine du temps. Le vecteur accélération a toujours même direction, même sens et même valeur : il est constant.

Mouvement rectiligne uniformément varié $\Leftrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{cste}$ ***et*** **trajectoire rectiligne**

$\vec{a}(t) = \overrightarrow{cste} = a\,\vec{u}_x \;\Rightarrow\; \ddot{x} = a$ et **trajectoire rectiligne**.

L'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} = a$

La vitesse : primitive de l'accélération :

La vitesse : primitive de l'accélération : $v(t) = \dot{x} = \int a\,dt = a\,t + v_0$ (v_0 constante d'intégration)

$$v(t) = \dot{x} = a\,t + v_0$$

L'équation horaire x(t) s'obtient par intégration de la vitesse v(t):

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (at + v_0)dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0$$

Les constantes x_0 et v_0 sont déterminées par 2 conditions ou par les conditions initiales (conditions à t=0). Par exemple, si à t=0, le point M est en O sans vitesse, on aura les conditions v(t=0) = 0 et x (t=0) = 0. En reportant dans les expressions de la vitesse et position on obtient très simplement$v_0 = 0$ et $x_0 = 0$. alors l'équation horaire devient

$$x(t) = \frac{1}{2}a\,t^2$$

Remarque 1:

Le mouvement est uniformément accéléré si la norme du vecteur est une fonction croissante de t, soit v^2 fonction croissante. La dérivée de v^2 doit donc être positive. La condition sera :

$$\frac{dv^2}{dt} > 0 \;\Rightarrow 2\,\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} > 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}\,.\,\ddot{x} > 0$$

Remarque 2:

En exprimant le temps t en fonction de la vitesse et en reportant dans l'expression de x(t) il est possible d'obtenir une relation entre position et vitesse

$$v(t) = \dot{x} = \int a\,dt = a\,t + v_0 \Rightarrow \frac{(v - v_0)}{a} = t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0 t = \frac{1}{2}\,\frac{(v - v_0)^2}{a} + \frac{v_0}{a}\,(v - v_0)$$

$$2a(x - x_0) = (v - v_0)^2 + 2v_0(v - v_0)$$

$$\boldsymbol{v^2 - v_0^2 = 2\,a(x - x_0)}$$

Résumé

Mouvement rectiligne uniformément varié

Accélération nulle $\boldsymbol{a = \ddot{x} = C}$

vitesse constante $\boldsymbol{v(t) = \dot{x} = a\,t + v_0}$

Équation horaire: $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0}$

$$\boldsymbol{v^2 - v_0^2 = 2\,a(x - x_0)}$$

II.5.1.3. Mouvement rectiligne quelconque

L'accélération est une fonction quelconque du temps. En intégrant une première fois cette fonction, on obtient la vitesse à une constante près. En l'intégrant une deuxième fois on obtient l'équation horaire.

$$\boldsymbol{a = \ddot{x} = f(t) \Rightarrow v(t) = \dot{x} = \int f(t)dt \Rightarrow x(t) = \int v(t)dt}$$

Les constantes d'intégration se déterminent suivant les conditions initiales (vitesse et position à t= 0) ou à un instant t quelconque.

II.5.1.4. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Définition

Un mobile est en mouvement rectiligne sinusoïdal lorsque l'équation horaire de son élongation est une fonction sinusoïdale du temps.

Expressions de l'équation horaire de l'élongation L'équation horaire de l'élongation d'un mobile en mouvement rectiligne sinusoïdal s'écrit

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = x_m \cos(\omega t + \Phi)}}$$

a, $\boldsymbol{\omega}$ ***et*** $\boldsymbol{\Phi}$ sont des constantes dont il faut déterminer les natures physiques.

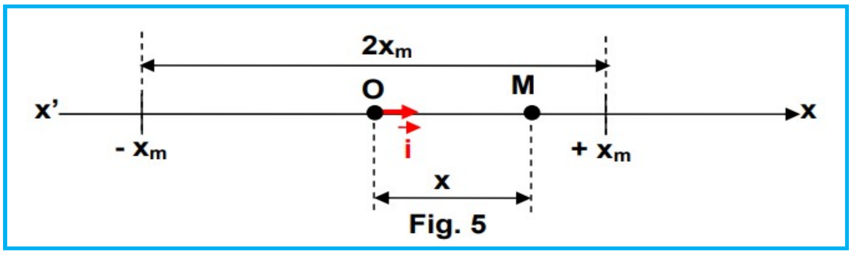


Figure II.23: Mouvement rectiligne sinusoïdal

- Amplitude x_m du mouvement rectiligne sinusoïdal
- La constante x_m est un espace et l'élongation x du mobile est comprise entre $-x_m$ et $+x_m$: $-x_m < x < x_m$
- La valeur maximale positive x_m de l'élongation x du mobile est appelée amplitude du mouvement rectiligne sinusoidal**.** L'amplitude s'exprime en mètre.
- Les oscillations du mobile se font de part et d'autre du point O d'abscisse $x_O = 0$, milieu du segment de longueur $2x_m$ sur lequel le mobile M effectue ses oscillations est considéré comme l'origine des espaces.
- Les positions pour lesquelles l'élongation du mobile M a sa valeur maximale : $x = -x_m$ et $x = +x_m$ sont appelées les extremums de l'élongation.

La pulsation ω du mouvement est appelée la pulsation du mouvement sinusoïdal. Elle s'exprime en radians par seconde (symbole : rad/s ou $rad.s^{-1}$).

Les phases du mouvement sinusoïdal

L'angle ($\omega t + \Phi$) représente la phase à l'instant t.

L'angle Φ représente la phase à l'instant origine t=o.

Périodicité du mouvement sinusoïdal – Période T du mouvement

Périodicité du mouvement sinusoïdal

Un mouvement est dit périodique, lorsqu'il se répète identique à lui-même, à des intervalles de temps successifs de même durée T, appelée période.

Période T du mouvement

La période T est l'intervalle de temps constant qui sépare deux passages consécutifs du mobile au même point, dans le même sens. La période T s'exprime en seconde (s).

Entre l'instant t et t+T la phase a augmenté de 2π, c'est-à-dire que :

$$\omega(t+T) + \Phi = \omega t + \Phi + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

D'où:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Oscillation – Battement

On appelle oscillation (ou cycle) le mouvement effectué par le mobile pendant une période. Un battement est une demi-oscillation. Sa durée est la demi-période.

Fréquence N ou f du mouvement

La fréquence est le nombre de périodes ou d'oscillations (ou encore de cycles) par seconde. La fréquence s'exprime en hertz (Hz)

$$\boxed{N = f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

La vitesse a du mobile

La vitesse est obtenue en dérivant la fonction x(t)

$$x = X_m \cos(\omega t + \Phi) \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -X_m\omega \sin(\omega t + \Phi)$$

$$\boxed{\dot{x} = -X_m\omega \sin(\omega t + \Phi)}$$

Accélération a du mobile

L'accélération est obtenue en dérivant la fonction v(t):

$$v = -X_m\omega \sin(\omega t + \Phi) \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -X_m\,\omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$$

$$a(t) = \ddot{x} = -X_m\,\omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$$

Aussi:

$$a(t) = -\omega^2\, x(t)$$

L'Équation différentielle du mouvement est donc

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

Ceci correspond à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

Diagrammes:

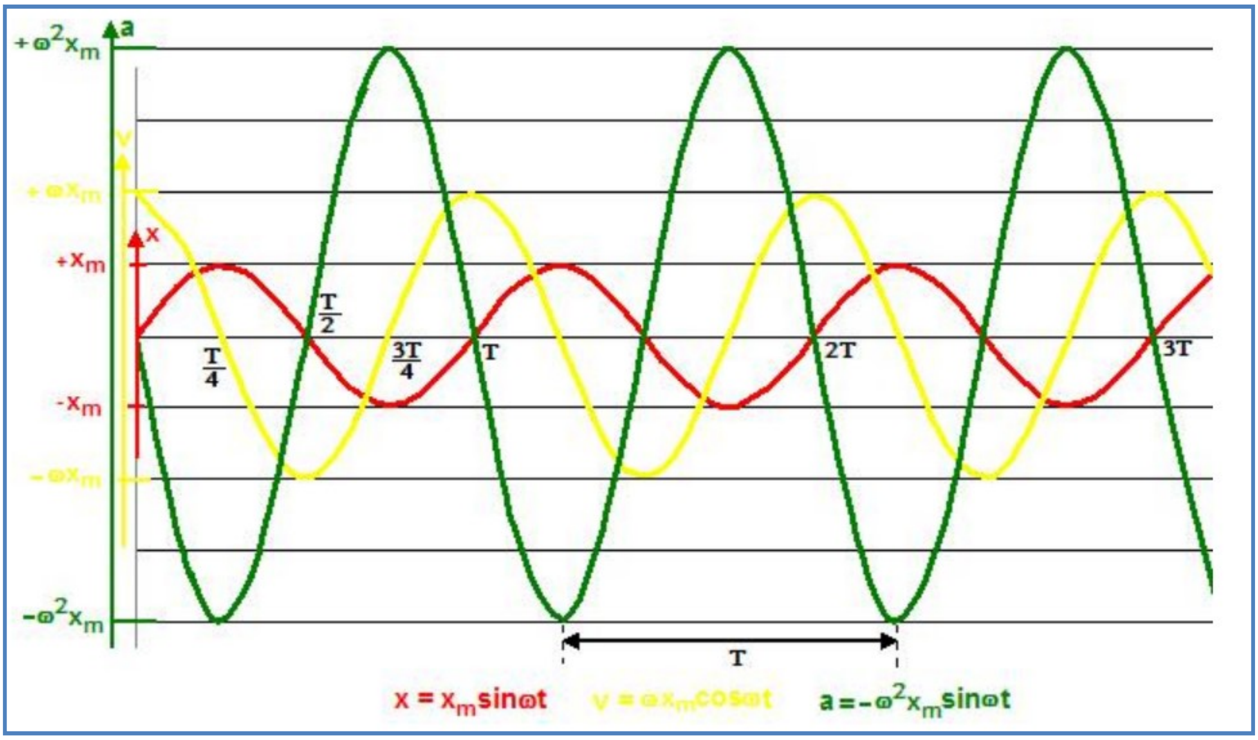


Figure II.24: La variation x(t), v(t) et a(t) d'un mouvement rectiligne sinusoidal

Résumé

Mouvement rectiligne uniformément varié

Accélération nulle $a(t) = -\omega^2\, x(t)$

vitesse constante $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -X_m\omega\, sin(\omega t + \Phi)$

Équation horaire**:** $x(t) = x_m \cos(\omega t + \Phi)$

L'Équation différentielle du mouvement: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

II.5.2.Mouvement plan:

Si la trajectoire appartient à un plan, il est possible de repérer la position d'un mobile soit par les coordonnées cartésiennes ou soit par les coordonnées polaires.

II.5.2.1. Mouvement circulaire uniforme:

Le mouvement d'un point est dit circulaire uniforme si :

- le point se déplace sur un cercle ;
- sa vitesse angulaire de rotation ω est constante $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega = cste$

Caractéristiques cinématiques en coordonnées cartésiennes

Vecteur position

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\overrightarrow{u_y}}$$

Le vecteur vitesse:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}}$$

Le vecteur accelération:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y}}$$

Caractéristiques cinématiques en coordonnées polaires:

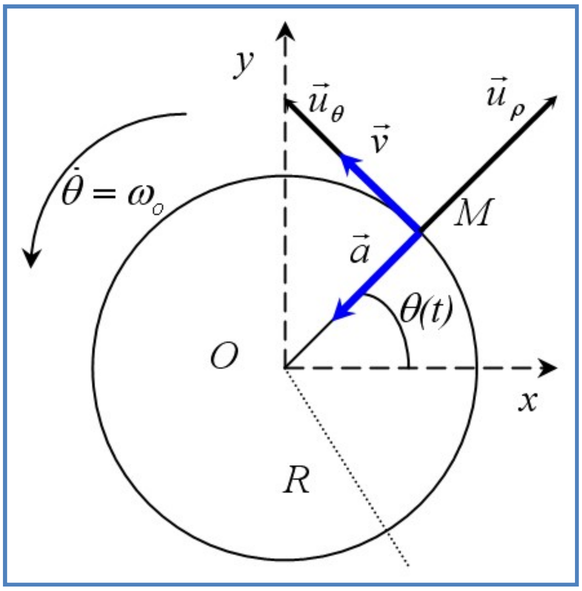


Figure II.25: Vecteur vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme

Vecteur position

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = R\,\vec{u}_\rho}$$

Le vecteur vitesse:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\vec{u}_\rho)}{dt} = R\,\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\,\omega\vec{u}_\theta}$$

Le vecteur accélération:

L'expression du vecteur accélération se simplifie. La vitesse angulaire étant constante la composante **orthoradiale** $\vec{a}_{ort}$ du vecteur accélération est nulle. Il ne reste que la composante **radiale**: $\vec{a}_r$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\rho\omega\vec{u}_\theta)}{dt} = \rho\omega\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \rho\omega\left(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho\right) = -\rho\omega^2\vec{u}_\rho$$

La composante radiale:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_r = \rho\omega^2\vec{u}_\rho}$$

Expressions générales des vecteurs vitesse et accélération en fonction du vecteur vitesse angulaire pour un mouvement circulaire

Les vecteurs vitesses et accélération peuvent s'exprimer en introduisant le vecteur vitesse angulaire

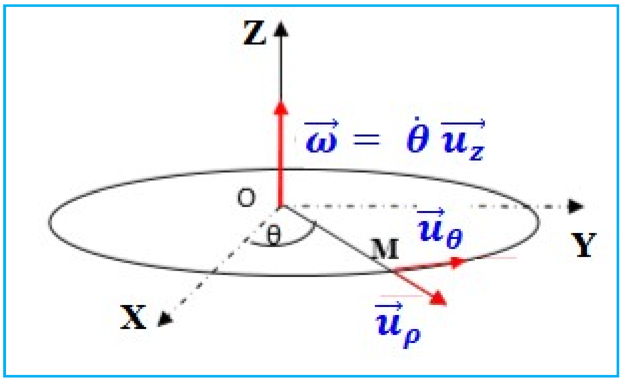


Figure 26 : Lien entre vecteur vitesse v et vecteur vitesse angulaire ω

Le vecteur vitesse:

En utilisant la relation: $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$

$$\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta = R\omega\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho\right) = \omega\vec{u}_z \wedge R\,\vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

L'expression permet d'exprimer le vecteur vitesse indépendamment de la base choisie.

Le vecteur accélération:

La composante radiale $\vec{a}_r$

$$\vec{a}_r = -R\,\omega^2\,\vec{u}_\rho = R\,\omega^2(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = R\,\omega^2\left[\vec{u}_z \wedge \left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho\right)\right]$$

$$\vec{a}_r = \omega\,\vec{u}_z \wedge \left(\omega\vec{u}_z \wedge R\,\vec{u}_\rho\right) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\boldsymbol{\vec{a}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{v}}$$

En utilisant la relation de $\vec{v}$, on peut encore écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}}$$

La composante orthoradiale $\vec{a}_{ort}$:

$$\boldsymbol{\vec{a}_{ort}} = R\dot{\omega}\vec{u}_\theta = R\,\frac{d\omega}{dt}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho\right) = \frac{d(\omega\vec{u}_z)}{dt} \wedge \overrightarrow{Ru_\rho}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a}_{ort} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}}$$

Le vecteur accélération:

$$\vec{a} = \boldsymbol{\vec{a}_{ort}} + \boldsymbol{\vec{a}_r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \left(\boldsymbol{\vec{\omega} \wedge \vec{v}}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \left[\boldsymbol{\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}\right]$$

Pour le mouvement circulaire uniforme:

$$\boldsymbol{\vec{a}_{ort} = \vec{0}}$$

D'où:

$$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{a}_r = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Mouvement\ circulaire\ unifor\grave{u}e \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_r = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}}$$

II.5.2.2. Mouvement parabolique

Considérons le cas où le vecteur accélération est un vecteur constant et qu'à un instant choisi comme origine t = 0 le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est connu.

Pour simplifier l'étude, on peut définir le repère à partir des données du problème.

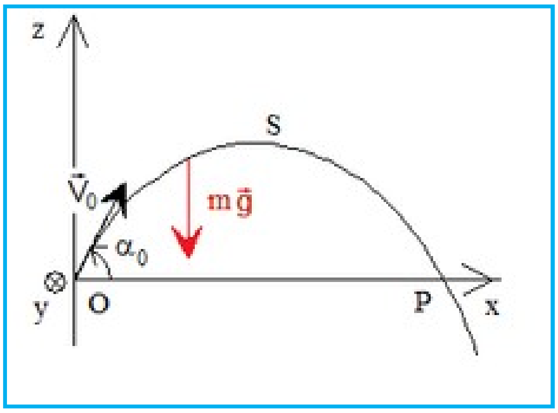


Figure II.27: Mouvement parabolique

L'origine du repère : position du point à t= 0

L'axe z suivant le vecteur accélération, soit

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}\,\vec{u}_z = \vec{g} = -g\,\vec{u}_z \Rightarrow a = -g}$$

L'axe x perpendiculaire à l'axe z et dans le plan contenant $\vec{a}$ et $\vec{v}_0$.

Pour t = 0 on a

L'axe y est défini de sorte que $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée directe.

On obtient par intégrations successives:

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = v_{ox} \\ \dot{y} = v_{0y} = 0 \\ \dot{z} = -g\,t + v_{0z} \end{cases}$$

on a:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x \to x = v_{0x}t + x_{0x} = v_{ox}t \\ y \to y = y_{0y} = 0 \\ z \to z = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + v_{0z}t + z_{0z} = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + v_{0z}t \end{cases}$$

Avec:

Dans le cas où $v_{0x} = \mathbf{0}$, on retrouve le mouvement rectiligne uniformément varié suivant l'axe des z.

Pour $\boldsymbol{v_{0x}} \neq \mathbf{0}$, le mouvement est un mouvement plan, dans le plan défini par le vecteur accélération et le vecteur vitesse à l'instant t = 0.

Le mouvement projeté suivant l'axe des x est un mouvement uniforme de vitesse v_{0x}.

Le mouvement projeté suivant l'axe des z est uniformément varié, d'accélération constante a.

Equation de la trajectoire

$$\boldsymbol{t = \frac{x}{v_{ox}}\, z}$$

$$\boldsymbol{z = -\frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{v_{0x}^2} + v_{ox}\, \frac{x}{v_{0x}}}$$

Si α est l'angle que fait le vecteur vitesse v_0 avec l'axe des x et v_0 la norme de ce vecteur vitesse, on peut écrire :

$$v_{ox} = v_0 cos\alpha$$

$$v_{oz} = v_0 sin\alpha$$

$$\frac{v_{0z}}{v_{0x}} = \frac{v_0 sin\alpha}{v_0 cos\alpha} = tan\alpha$$

$$\boxed{\boldsymbol{z = -\frac{1}{2}\, \frac{g}{v_0^2\, cos^2\alpha}\, x^2 + x\, tan\alpha}}$$

La trajectoire est une portion de parabole.

La flèche h; correspond à l'altitude maximale que peut atteindre le point mobile. La portée *d* correspond à la distance maximale que peut atteindre le point lorsqu'il revient à l'ordonnée *z* = 0.

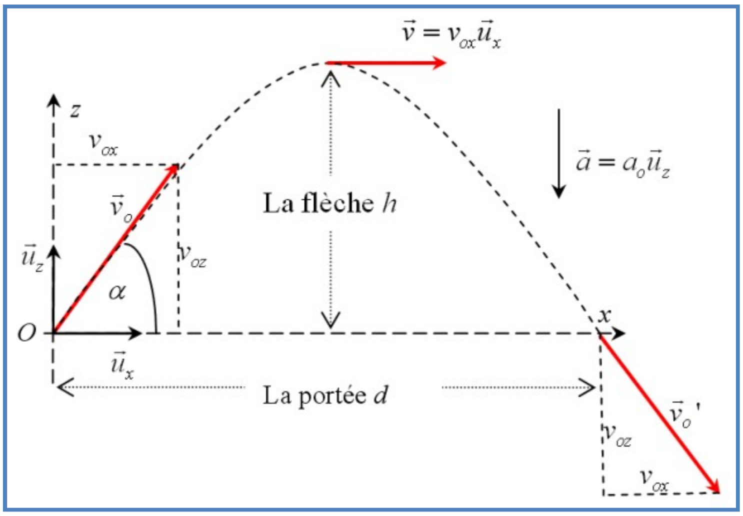


Figure II.28 : Chute parabolique. L'accélération $\vec{a}$ correspond ici à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

Calcul de la portée

Z =0

$$\boxed{x = d = -\frac{v_0^2}{a}\, 2\, sin\alpha\, cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\, sin2\alpha}$$

La portée est maximale pour $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, soit pour un angle de tir correspondant à $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$.

Calcul de la flèche

Elle peut être obtenue de différentes façons. On peut rechercher, par exemple, l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x = \frac{d}{2}$.

On obtient alors :

$$h = \frac{1}{2}\frac{-g}{v_0^2\, cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2}{g}\, sin\alpha\, cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{v_0^2}{g}\, sin\alpha\, cos\alpha\right)\tan\alpha$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{g}\, sin^2\alpha}$$

Exercices corrigés

Exercice 1:

Ube automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération a = 3m.s^{-2} pendant une durée t = 6s; ensuite le conducteur maintient la vitesse constante.

Lorsque le feu passe au vert, un camion roulant à la vitesse v =54 km/h est situé à une distance d = 30 m du feu avant celui-ci, il maintient sa vitesse constante.

Dans un premier temps, celui-ci va le dépasser.

1. Faire l'étude cinématique de l'automobile et du camion.

2. Calculer les dates (t_1 et t_2) et les abscisses (x_1 et x_2) des dépassements.

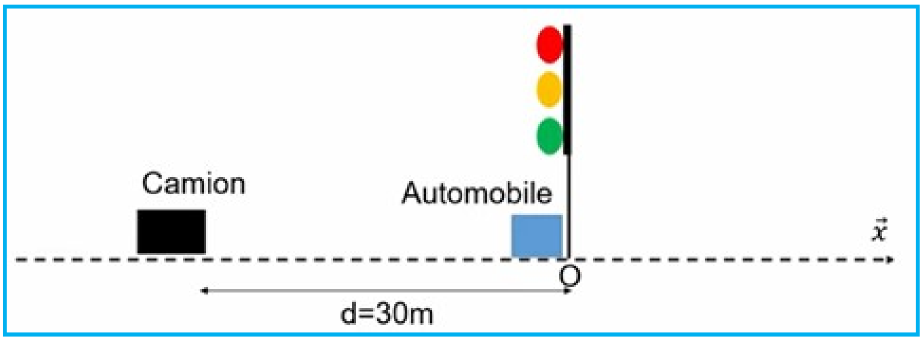
3. Représenter graphiquement les fonctions vitesse v(t) et l'accélération a(t) de l'automobile

4. Si le camion roulait a la vitesse v'= 35 km/h pourrait-il rattrapait l'automobile pour t <6s?

Si oui calculer l'instant pour lequel la distance qui sépare le camion et l'automobile est minimale. En déduire cette distance

Solution:

1. Etude cinématique de l'automobile et du camion:



Etude cinématique de l'automobile:

Pour $t \in [0; 6s]$, le M.R.U.A car a = 3m.s^{-2}

$x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$, or à t_0 =0, v_0= 0 et x_0= 0

$v_1(t) = \dfrac{dv}{dt} = 3t$

A l'instant t = 6 s:

$x_1 = 1.5 \times 6^2 = 54\, m$

$v_1 = 3 \times 6 = 18\, m.s^{-2}$

Pour $t > 6\, s$, le M.R.U car v = 18 m.s^{-1} = cste

$x'_1(t) = v(t - t_0) + x_0$ à t0 = 6s, x0 =

$\Rightarrow \boldsymbol{x'_1(t) = 18(t-6) + 54 = 18\,t - 54}$

$$\boxed{\boldsymbol{x'_1(t) = 18(t-6) + 54 = 18\,t - 54}}$$

Etude cinématique du camion:

Le camion roule à v = 15m.s^{-1}

$\boldsymbol{x_2(t) = vt + x_0 = 15\,t - 30}$

$$\boxed{\boldsymbol{x_2(t) = vt + x_0 = 15\,t - 30}}$$

2. calcul des dates (t_1 et t_2) et les abscisses (x_1 et x_2) des dépassements.

Dates de dépassements t_1 et t_2

Pour $t \in [0; 6s]$, $x_1 = x_2 \Rightarrow 1.5\,t^2 = 15\,t - 30 \Rightarrow 1.5\,t^2 - 15\,t + 30 = 0$

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \times 1.5 \times 30 = 45 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6.71\ soit\ t = \frac{15 \pm 6.71}{2 \times 1.5}$$

Les deux solutions sont:

$$t' = \frac{15-6.71}{3} = 2.76\, s \in [0; 6s]$$

$$t'' = \frac{15+6.71}{3} = 7.23\, s \notin [0; 6s]$$

Donc

La date du dépassement est: $t' = 2.76\, s$

Pour $t \in [6s; +\infty[$, $x'_1 = x_2 \Rightarrow 18t - 54 = 15\,t - 30 \Rightarrow t = \frac{24}{3} = 8\,s$

D'où: $\boldsymbol{t_2 = 8s\ t \in [6s; +\infty[}$,

$$\boldsymbol{t_2 = 8s\ t \in [6s; +\infty[},$$

Abscisses de dépassements x_1 et x_2:

Pour $t_1 = 2.76$ s, $x_1 = 1.5 \times (2.76)^2 =$ **11.43 m**

$x_1 = 11.43$ m

Pour $t_2 = 8$ s, $x_2 = 15 \times 8 - 30 = \boldsymbol{90\ m}$

$x_2 = 90\ m$

Pour l'automobile:

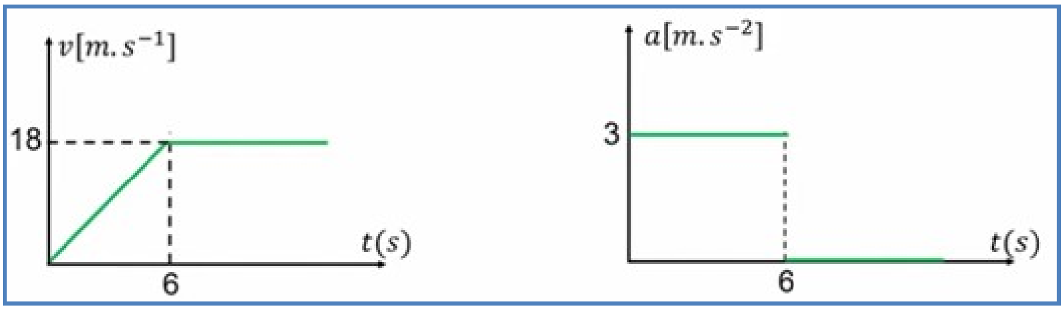
Pour $t_1 = 2.76$ s, $v_1 = 3t =$ **8.28 m.s^{-1}**

$v_1 = 8.28$ m.s^{-1}

Pour $t_2 = 8s \in [6s; +\infty[$, le mouvement est uniforme: **v = 18 m.s^{-1} =cste**

v = 18 m.s^{-1} =cste

3. Représentation graphique de la vitesse v(t) et de l'accélération a(t) de l'automobile:

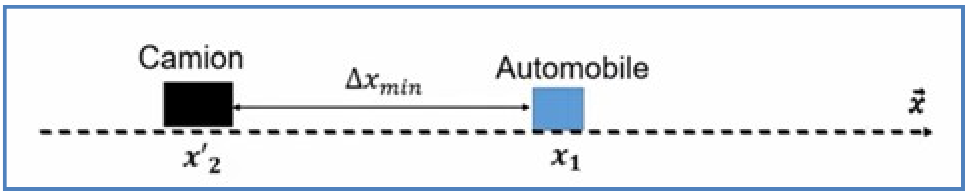


4. le camion avec v' = 38 km/h pourrait il rattrapé l'automobile pour t< 6s

Si $v' = 38\ km.h^{-1} = 10.56\ m.s^{-1}$ alors $x'_2(t) = 10.56\,t - 30$, et x1 $1.5\ t^2$

Il y'a depassement si, $x_1 = x'_2$, $1.5\ t^2 - 10.56t + 20 = 0 \Rightarrow \Delta = -68.5 < 0$

Alors pas de rencontre et donc pas de ratrapage.



$$\Delta x = x_1 - x'_2 = 1.5\,t^2 - 10.56\,t + 30$$

$$\Delta x\ est\ minimale\ \Leftrightarrow \frac{d\Delta x}{dt} = 0$$

$$\frac{d\Delta x}{dt} = 3\,t - 10.56 = 0\ alors:\ t_{min} = \frac{10.56}{3} = 3.52\ \text{s}$$

$$\Delta x_{min} = 1.5 \times (3.52)^2 - 10.56 \times 3.52 + 30 = 11.41\ m$$

$$\Delta x_{min} = 11.41\ m$$

$$\boxed{\Delta x_{min} = 11.41\ m}$$

Exercice 2:

Sur une piste d'essai rectiligne de longueur AB = 13.72 km, une voiture expérimentale part du point A sans vitesse initiale, se déplace le long ABCD selon les phases suivantes:

Phase 1: AB de démarrage d'accélération a1= 0.1m/s2;

Phase 2: BC: mouvement uniforme pendant 14 min;

Phase 3: CD de ralentissement d'accélération

La vitesse de la voiture est nulle en D.

1. Calculer la vitesse maximum acquise par la voiture au cours de son parcours.

2. Déterminer la vitesse moyenne de la voiture sur le trajet AD.

3. Calculer les distances AB, BC et CD.

4. Ecrire les équations horaires du mouvement correspondant aux trois phase

5. Construire les diagrammes de la vitesse v(t) et de l'accélération a(t) dans l'ensemble.

Solution:

1. Calcul de la vitesse maximum acquise par la voiture au cours de son parcours:

Phase 1: AB (M.R.U.A): $v_B^2 - v_A^2 + \ 2\ a_1\ AB$ or $v_A = 0\ \Rightarrow AB = \frac{v_B^2}{2a_1}$

Phase 2: BC (M.R.U): $v_B = \ v_c = \frac{BC}{T_{BC}} \Rightarrow BC = \ v_B t_{BC}$

Phase 3: CD (M.R.U.D): $-\ v_B^2 = 2\ a_2\ CD\ \ \Rightarrow CD = \frac{-\ v_B^2}{2\ a_2}$

Or AB + BC + CD = AD $\Rightarrow \frac{v_B^2}{2a_1} + v_B t_{BC} + \frac{-\ v_B^2}{2\ a_2} = AD$

Soit

$$\frac{v_B^2}{0.2} + v_B(14\times 60) + \frac{-\ v_B^2}{-0.2} = 13720\ \ \Rightarrow v_B^2 + \ 84\ v_B - 1372 = 0$$

$$\Delta = \ 84^2 + \ 4\times 1372 = 12544 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 112\ alors\ v_B = \frac{-84 \pm 112}{2}$$

Soit: $v_B = 14\ m.s^{-1}$

La vitesse maximale acquise par la voiture: $v_B = 14\ m.s^{-1}$

La vitesse maximale acquise par la voiture: $v_B = 14\ m.s^{-1}$

2. Déterminons la vitesse moyenne de la voiture sur le trajet AD

$v_{moy} = \frac{AD}{t_{AD}}$ avec t_{AB} la durée totale du parcours ABCD

Phase 1: AB (M.R.U.A): $v_B = \ a_1 t_{AB}\ \ \Longrightarrow\ t_{AB} = \frac{v_B}{a_1} = \frac{14}{0.1} = 140s$

Phase 2: BC (M.R.U): $t_{BC} = 14\,\text{min} = 840\ s$

Phase 3: CD (M.R.U.D): $v_D - v_C = a_2\ t_{CD} \Longrightarrow\ t_{CD} = \frac{-v_B}{a_2} = \frac{-14}{-0.1} = 140\ s$

$t_{AD} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD}$ = 140+840+140= 1120 s

$$v_{moy} = \frac{AD}{t_{AD}} = \frac{13720}{1120} = 12.25m.s^{-1}$$

$$\boxed{v_{moy} = \ 12.25m.s^{-1}}$$

Calcul des distances AB, BC et CD:

$$AB = \frac{v_B^2}{2\ a_1} = \frac{14^2}{2\times 0.1} = 980m$$

$$BC = v_B t_{BC} = 14 \times 840 = 11760\ m$$

$$CD = \frac{-v_B^2}{2a_2} = \frac{-14^2}{-2 \times 0.1} = 980m$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \mathbf{980}\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{BC} &= \mathbf{11760}\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{CD} &= \mathbf{980}\boldsymbol{m} \end{aligned}}$$

4. équations horaires du mouvement correspondant aux trois phases

A	B	C	D
$t_A = 0$	$t_B = 140s$	$t_C = 140 + 840 = 980s$	$t_D = 1120s$
$x_A = 0$	$x_B = 980m$	$x_C = 980 + 11760 = 12740m$	$x_D = 13720m$
$v_A = 0$	$v_A = 14m.s^{-1}$	$v_C = 14m.s^{-1}$	$v_D = 0$

Phase 1: AB (M.R.U.A): $x_1(t) = \frac{1}{2}\, a_1 t^2 + v_A t + x_A$, or à $t_0 = 0$, $x_A = 0$ et $v_A = 0$

$x_1(t) = \frac{1}{2}\, a_1 t^2 = 0.05\, t^2$ et $v_1(t) = 0.1t$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x_1(t)} &= \mathbf{0.05}\ \boldsymbol{t^2} \\ \boldsymbol{v_1(t)} &= \mathbf{0.1}\boldsymbol{t} \end{aligned}}$$

Phase 2: BC (M.R.U): de vitesse $v_B = v_C = 14m.s^{-1}$

$$x_2(t) = v_B(t - t_B) = 14\,(t - 140) + 980 \Rightarrow x_2(t) = 14t - 980$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_2(t)} = \mathbf{14}\boldsymbol{t} - \mathbf{980}}$$

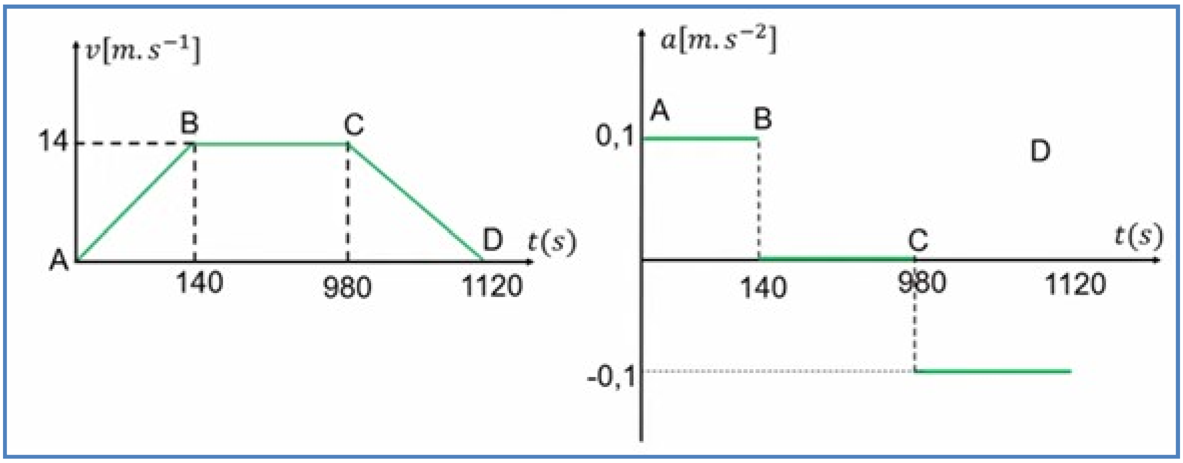
Phase 3: CD (M.R.U.D): $x_3(t) = \frac{1}{2} a_3 (t - t_C)^2 + v_C\,(t - t_C) + x_C$

$$x_3(t) = \frac{1}{2} 0.1 (t - 980)^2 + 14\,(t - 980) + 12740$$

$$x_3(t) = -0.05t^2 + 112\,t - 49000$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_3(t)} = -\mathbf{0.05}\boldsymbol{t^2} + \mathbf{112}\ \boldsymbol{t} - \mathbf{49000}}$$

5. construction des diagrammes de vitesse v(t) et des accélérations a(t)



Exercice 3 :

Soit un mobile M en mouvement tel que :$\overrightarrow{OM} = 3\,cos2t\,\vec{\imath} + 3\,sin2t\,\vec{\jmath} + (8t-4)\vec{k}$

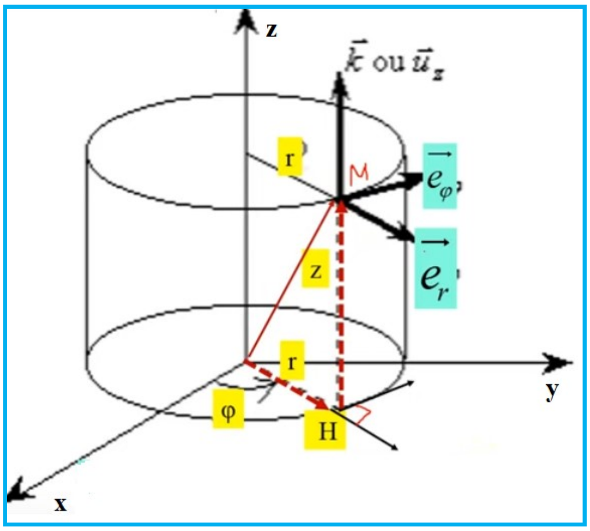
1-Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z).

2-Donner en coordonnées cylindriques l'expression de la vitesse. Calculer sa norme.

3-Donner en coordonnées cylindriques l'expression de l'accélération. Calculer sa norme.

4-Trouver la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet ?

5-En déduire le rayon de courbure r ?



Solution:

Nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z)

La trajectoire dans le plan (O, x, y):

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 9\,cos^2 2t + 9\,sin^2 2t = 9(cos^2 2t + sin^2 2t) = 9$$

La trajectoire dans le plan (O, x, y) est circulaire de rayon R = 3 m et de centre (0,0).

La trajectoire suivant l'axe Oz:

z = 8t -4

C'est l'équation d'une droite donc suivant Oz le mouvement est rectiligne.

En conclusion:

Le mouvement a une trajectoire hélicoïdal

2. vitesse en coordonnées cylindriques ainsi que son module:

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r + z\vec{k} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = 3\,\vec{e}_r + (8t-4)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\,\vec{u}_r + z\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{e}_r + R\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{z}\vec{k} = \dot{R}\vec{e}_r + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

Avec: $\begin{cases} R = 3 \\ \theta = Artg\left(\frac{y}{x}\right) = Arctg\left(\frac{3\,sin2t}{3\,cos2t}\right) = Arctg\,(tan2t) = 2t \\ z = 8t-4 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} R = 3 \\ \theta = \quad 2t \\ z = 8t-4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{R} = 0 \\ \dot{\theta} = \quad 2 \\ \dot{z} = 8 \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse:

$$\boldsymbol{\vec{v} = 6\vec{e}_\theta + 8\,\vec{k}}$$

Le module du vecteur vitesse:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{6^2+8^2} = 10\,m.s^{-1}$

$$\boldsymbol{\|\vec{v}\| = 10\,m.s^{-1}}$$

3- accélération en coordonnées cylindriques:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{R}\vec{e}_r + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{a} = \ddot{R}\vec{e}_r + \dot{R}\frac{\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{R}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{R}\vec{e}_r + \dot{R}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{R}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\,\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} R = 3 \\ \theta = 2t \\ z = 8t-4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{R} = 0 \\ \dot{\theta} = 2 \\ \dot{z} = 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{R} = 0 \\ \ddot{\theta} = 2 \\ \ddot{Z} = 8 \end{pmatrix}$$

Le vecteur accélération:

$$\boxed{\vec{a} = -12\vec{e}_r}$$

Le module du vecteur accélération:

$$\boxed{\|\vec{a}\| = 12\ m.s^{-2}}$$

4.Vecteur vitesse et accélération dans la base de Frenet:

$\vec{v} = v.\vec{u}_T = 10\ \vec{u}_T$ et $\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$

Avec: $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{a}_T = \vec{0}}$$

$$a^2 = a_N^2 + a_T^2 \Longrightarrow a_N^2 = a^2 \Longrightarrow a_N = 12\ m.s^{-2}$$

$$\boxed{a_N = 12\ m.s^{-2}}$$

5. Rayon de courbure R:

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{10^2}{12} = 8.33\ m$$

$$\boxed{R = 8.33\ m}$$

II.6. Le mouvement relatif:

Le mouvement est absolu s'il est étudié par rapport à un repère fixe par contre le mouvement est relatif s'il est étudié par rapport à un repère mobile.

Soit un point M en mouvement par rapport à un repère mobile R'(*O*', x', y', z') lui même en mouvement par rapport à un repère fixe R (*O*, x, y, z)

L'état de mouvement d'un corps dépend du référentiel utilisé pour le décrire. Le mouvement relatif est la partie de la cinématique qui permet de trouver les relations (équations) entre les vecteurs position, vitesse et accélération que mesurent différents observateurs.

Mouvement relatif de translation uniforme: Un des deux observateurs (*O*) est au repos alors que l'autre (*O'*) se déplace avec une vitesse constante **V** par rapport au premier. Les deux observateurs sont en conséquence **inertiels**, car ils n'ont pas d'accélération ni de rotation.

Mouvement relatif de rotation uniforme: Un des deux observateurs (*O*) est au repos (observateur inertiel) et l'autre (*O'*) tourne avec une vitesse angulaire constante **ω** par rapport au premier. Le second observateur est **non inertiel**.

Les équations qui font le lien entre les vecteurs position, vitesse et accélération mesurés par les deux observateurs s'appellent les transformations de Galilée.

La figure suivante représente les deux observateurs inertiels et le vecteur position d'une particule en mouvement pour chacun des deux

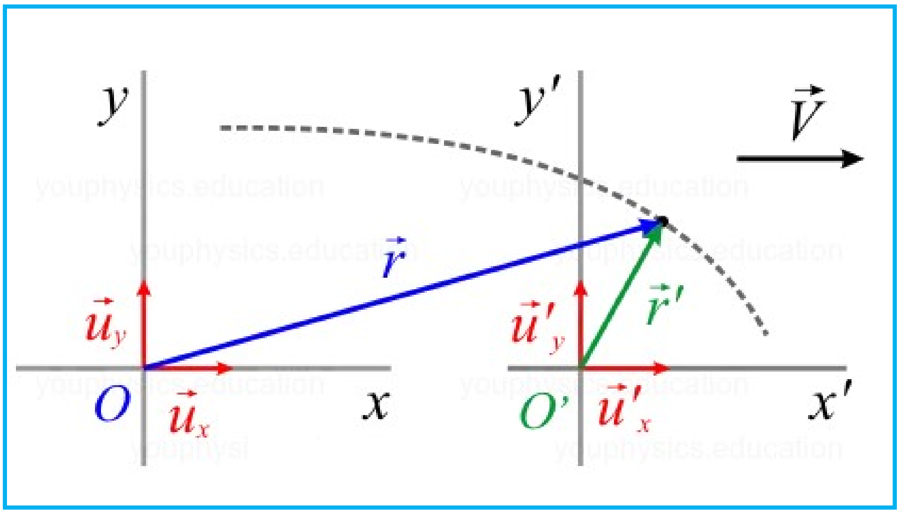


Figure II.29: Mouvement de translation relatif

II.6.1. Vecteur position

La position de M dans $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est la position absolue:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$$

Sa position dans $\mathcal{R}'\left(O', \overrightarrow{u'}_{x'}, \overrightarrow{u'}_{y'}, \overrightarrow{u'}_{z'}\right)$ c'est sa position relative

$$\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{u}'_x + y'\,\overrightarrow{u'}_y + z'\,\overrightarrow{u'}_z$$

On a le vecteur position:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}}$$

II.6.2 Vecteur vitesse:

La vitesse absolue est la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

Cette vitesse peut être calculée d'une autre façon :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{u'}_x}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{u'}_y}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{u'}_z}{dt} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{u'}_x + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{u'}_y + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{u'}_z$$

On pose:

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{u'}_x}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{u'}_y}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{u'}_z}{dt}$$

Et $$\vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{u'}_x + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{u'}_y + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{u'}_z$$

D'où:

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r}$$

$\vec{v}_r$: C'est la vitesse relative c'est-à-dire la vitesse du mobile M par rapport au repère R'

$\vec{v}_e$: Représente la vitesse d'entrainement c'est-à-dire la vitesse du repère R' par rapport au repère R. Deux cas de mouvement de R' peuvent être, en translation et en rotation, la vitesse absolue et relative garde la même expression par contre la vitesse d'entrainement se met différemment.

II.6.3 Vecteur accélération

L'accélération absolue c'est l'accélération du point M dans le repère R :

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{u}_z$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O\prime O}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{u\prime}_x}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{u\prime}_y}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{u\prime}_z}{dt^2} + 2\left(\frac{dx\prime}{dt}\frac{\overrightarrow{u'}_x}{dt} + \frac{dy\prime}{dt}\frac{\overrightarrow{u\prime}_y}{dt} + \frac{dz\prime}{dt}\frac{\overrightarrow{u'}_z}{dt}\right) +$$

$$\frac{d^2x\prime}{dt^2}\overrightarrow{u'}_x + \frac{d^2y\prime}{dt^2}\overrightarrow{u'}_y + \frac{d^2z\prime}{dt^2}\overrightarrow{u'}_z$$

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

L'accélération absolue est la somme de trois accélérations :

L'accélération relative

$$\vec{a}_r = \frac{d^2x\prime}{dt^2}\overrightarrow{u'}_x + \frac{d^2y\prime}{dt^2}\overrightarrow{u'}_y + \frac{d^2z\prime}{dt^2}\overrightarrow{u'}_z$$

L'accélération d'entrainement

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{u'}_x}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{u'}_y}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{u'}_z}{dt^2}$$

et l'accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx\prime}{dt}\frac{d\overrightarrow{u'}_x}{dt} + \frac{dy\prime}{dt}\frac{d\overrightarrow{u\prime}_y}{dt} + \frac{dz\prime}{dt}\frac{d\overrightarrow{u'}_z}{dt}\right)$$

Exercices corrigés

Exercice 1:

Soit un repère mobile R'(O', x', y', z') en mouvement de translation par rapport à un autre repère fixe R (O, x, y, z) avec une vitesse $\vec{v}_e$ (1,0,0) et R // R'. On suppose que les coordonnées de M par rapport à R' sont : x'= $6t_2$+3t, y'=-3t^2, z'=3 et on suppose qu'à t=0s, les coordonnées de M par rapport à R sont O (0,0,0)

1. Donner la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue ?

2. En déduire les coordonnées du point M par rapport à R ?

3. Déterminer l'expression de l'accélération relative et absolue ?

Solution:

1. la vitesse relative et la vitesse absolue:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v}_e = \vec{\imath}$$

$$\vec{v}_r = (12t + 3)\,\vec{\imath} - 6t\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}_a = (12t + 4)\,\vec{\imath} - 6t\,\vec{\jmath}$$

R // R' donc:

$$\boxed{\vec{v}_a = (12t + 4)\,\vec{\imath} - 6t\,\vec{\jmath}}$$

2. Les coordonnées du point M par rapport à R:

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\int d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \vec{v}_a\,dt$$

$x(t) = 6\,t^2 + 4\,t + c1$

$y(t) = -3\,t^2 + c2$

$z = c3$

A l'instant t=0: x=y=z=0, donc: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 6\,t^2 + 4\,t \\ y(t) &= -3\,t^2 \\ z &= 0 \end{aligned}}$$

3. l'expression de l'accélération relative et absolue:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = 12\,\vec{\imath} - 6\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = 12\,\vec{\imath} - 6\,\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_a &= 12\,\vec{\imath} - 6\,\vec{\jmath} \\ \vec{a}_r &= 12\,\vec{\imath} - 6\,\vec{\jmath} \end{aligned}}$$

Exercice 2:

Deux trains A et B roulent sur des voies parallèles à 70 km/h et 90km/h respectivement.

1. Calculer la vitesse de B par rapport à A s'ils :

a. se déplacent dans la même direction

b. se déplacent dans des directions opposées.

Solution:

1. Calcul de la vitesse de B par rapport à A

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \Longrightarrow \vec{V}_{B/sol} = \vec{V}_{B/A} + \vec{V}_{A/sol} \Longrightarrow \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_{B/sol} - \vec{V}_{A/sol}$$

a. Même direction:

$$\vec{V}_{B/sol} = 90\,\vec{\imath}$$

$$\vec{V}_{A/sol} = 70\,\vec{\imath}$$

$\vec{V}_{B/A} = 90\,\vec{\imath} - 70\,\vec{\imath} = 20\,\vec{\imath}$

La norme:

$$\boxed{\|\vec{V}_{B/A}\| = 20m.s^{-1}}$$

b- Direction opposée:

$$\vec{V}_{B/sol} = 90\,\vec{\imath}$$

$$\vec{V}_{A/sol} = -70\,\vec{\imath}$$

$\vec{V}_{B/A} = 90\,\vec{\imath} - (-70\,\vec{\imath}) = 160\,\vec{\imath}$

La norme:

$$\boxed{\|\vec{V}_{B/A}\| = 160m.s^{-1}}$$

Exercice 3:

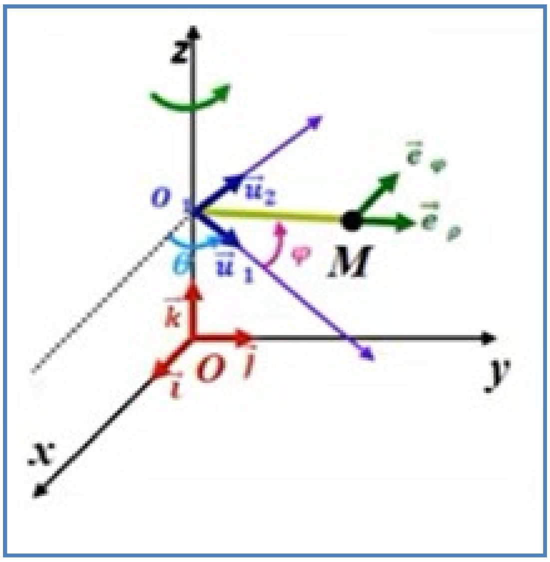
Soient $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $\mathcal{R}_1(O_1,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{k})$ le référentiel relatif dont l'origine O_1 est en mouvement rectiligne sur l'axe (Oz). On donne $\overrightarrow{OO_1} = a.t.\vec{k}$ ou a est une constante positive, t est le temps.

En plus R1 tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω1 telle que :

$\vec{\omega}_1(R_1/R) = \omega_1\vec{k}\;(\omega_1 = \dot{\theta})$.

Dans le plan horizontal $(O_1,\vec{u}_1,\vec{u}_2)$; *une tige* (T) *tourne autour de l'axe* (O_1z) avec une vitesse angulaire constante ω_2 tel que $\varphi = \omega_2 t = (\vec{u}_1,\vec{e}_\rho)$ ou $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire porté par la tige (T).

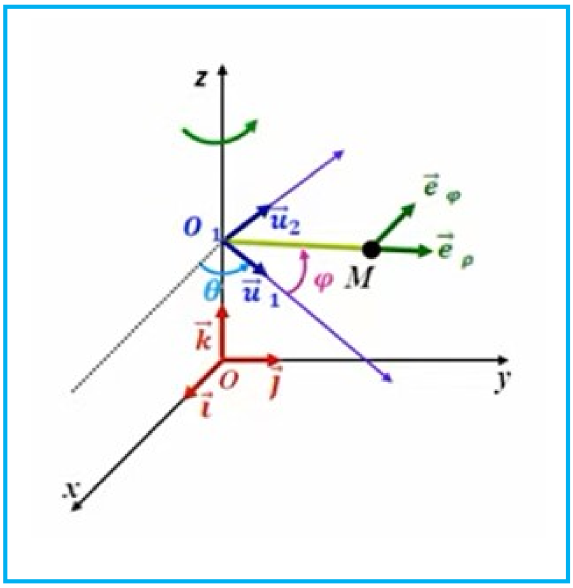
Un point M assujetti à se déplacer sur la tige (T). il est repéré par: $\overrightarrow{O_1M} = \rho\ \vec{u}_\rho$ ou $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est une base mobile dans R_1



1. Déterminer $\vec{V}_r(M)$ le vecteur vitesse relative de M.
2. Déterminer $\vec{V}_e(M)$ le vecteur vitesse d'entrainement de M.
3. Déduire $\vec{V}_a(M)$ le vecteur vitesse absolue de M.
4. Déterminer $\vec{a}_r(M)$ le vecteur accélération relative de M.
5. Déterminer $\vec{a}_e(M)$ le vecteur accélération d'entrainement de M.
6. Déterminer $\vec{a}_c(M)$ le vecteur accélération de coriolis de M.
7. Déduire $\vec{a}_a(M)$ le vecteur accélération absolue de M.

Solution:

1. Détermination de $\vec{V}_r(M)$ le vecteur vitesse relative de M



$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\rho\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_1}$$

$$\vec{V}_r(M) = \frac{d(\rho cos\varphi\vec{u}_1 + \rho sin\varphi\vec{u}_2)}{dt}$$

$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d(\rho cos\varphi\vec{u}_1 + \rho sin\varphi\vec{u}_2)}{dt}\right|_{R_1}$$

$$\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\ cos\varphi\vec{u}_1 - \rho\dot{\varphi}\ sin\varphi\ \vec{u}_1 + \dot{\rho}\ \ sin\varphi\ \vec{u}_2 + \rho\dot{\varphi}\ cos\varphi\vec{u}_2$$

$$\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\ (cos\varphi\vec{u}_1 + \ sin\varphi\ \vec{u}_2) + \rho\dot{\varphi}\ \ (-sin\varphi\ \vec{u}_1 + cos\varphi\vec{u}_2$$

$\vec{V}_r(M) = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$

$\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$

$\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi.$

$\dot{\varphi} = \omega_2$

$$\boxed{\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\omega_2\,\vec{e}_\varphi.}$$

2- Le vecteur vitesse d'entrainement

$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_R(O_1) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

$\vec{V}_e(M) = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1M}$

$\vec{V}_e(M) = \frac{d(at\vec{k})}{dt} + \omega_1\vec{k} \wedge \rho\vec{e}_\rho$

$\vec{V}_e(M) = \frac{d(at\vec{k})}{dt} + \omega_1\vec{k} \wedge \rho\vec{e}_\rho$

vitesse d'entrainement:

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = a\,\vec{k} + \omega_1\rho\vec{e}_\varphi}$$

3. Vitesse absolue:

$\vec{V}_a = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$

$\vec{V}_a = \left(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\omega_2\,\vec{e}_\varphi.\right) + \left(a\,\vec{k} + \omega_1\rho\vec{e}_\varphi\right)$

$$\boxed{\vec{V}_a = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho(\omega_2 + \omega_1)\vec{e}_\varphi + a\,\vec{k}}$$

4. Le vecteur accélération relative de M s'écrit:

$$\vec{a}_r(M) = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d(\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)}{dt}\right|_{R_1}$$

$$\vec{a}_r(M) = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\,\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$\vec{a}_r(M) = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

$\vec{a}_r(M) = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$

On a: $\ddot{\varphi} = 0 = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$ et $\omega_2 = \dot{\varphi} = cste$

$$\boxed{\vec{a}_r(M) = (\ddot{\rho} - \rho\omega_2^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega_2\vec{e}_\varphi}$$

5. Accélération d'entrainement:

$$\vec{a}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2}\right]_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \left(\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{a}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2}\right]_{R_1} + \frac{d\omega_1\vec{k}}{dt} \wedge \rho\,\vec{e}_\rho + \omega_1\vec{k} \wedge \left(\omega_1\vec{k} \wedge \rho\,\vec{e}_\rho\right)$$

$$\vec{a}_e(M) = \frac{da\vec{k}}{dt} + \rho\omega_1^2\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho\right) = \rho\omega_1^2\left(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho\right) = -\rho\omega_1^2\vec{e}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a}_e(M) = -\rho\omega_1^2\vec{e}_\rho}$$

6. Accélération de Coriolis:

$$\vec{a}_c(M) = 2\,\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r = 2\,\vec{\omega}_1 \wedge \vec{V}_r = 2\,\omega_1\vec{k} \wedge \left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega_2\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_c(M) = 2\,\omega_1\,\dot{\rho}\vec{e}_\varphi - 2\rho\,\omega_1\,\omega_2\,\vec{e}_\varphi}$$

7. Le vecteur accélération absolue de M:

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

$$\vec{a}_a(M) = (\ddot{\rho} - \rho\omega_2^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega_2\vec{e}_\varphi - \rho\omega_1^2\vec{e}_\rho + 2\,\omega_1\,\dot{\rho}\vec{e}_\varphi - 2\rho\,\omega_1\,\omega_2\,\vec{e}_\varphi$$

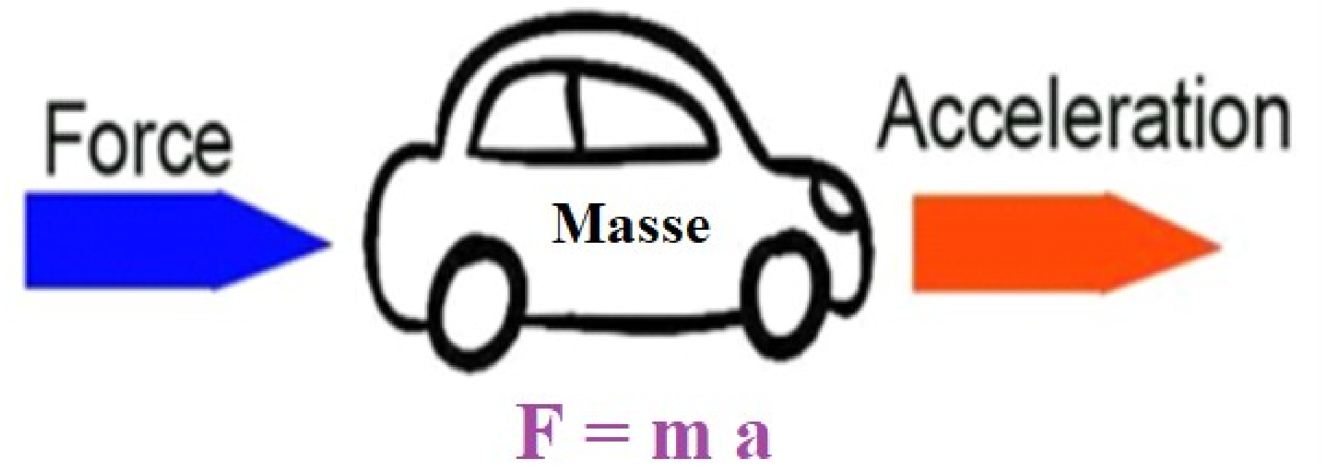
$$\vec{a}_a(M) = [\ddot{\rho} - \rho(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\,\omega_2)]\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}(\omega_1 \dot{+} \omega_2)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_a(M) = [\ddot{\rho} - \rho(\omega_1 + \omega_2)^2]\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}(\omega_1 \dot{+} \omega_2)\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{a}_a(M) = [\ddot{\rho} - \rho(\omega_1 + \omega_2)^2]\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}(\omega_1 \dot{+} \omega_2)\vec{e}_\varphi}$$

Chapitre III

Dynamique du point matériel



Chapitre III: Dynamique du point matériel

III.1 Introduction

La dynamique est une branche de la mécanique qui étudie les causes des changements de mouvement mécanique. Cette science étudie la relation entre les forces qui agissent sur les objets et les effets qu'elles vont produire sur le mouvement qui résulte de leur action

III.2 Généralités:

III.2.1 Concept de masse:

La masse est une propriété physique fondamentale d'un corps. Elle rend compte, dans une bonne approximation, de la quantité de matière contenue dans ce corps indépendamment de l'endroit où il se trouve.

La masse se représente par le symbole m et, dans le Système international, son unité est le kilogramme (kg).

III.2.2. Système isolé:

Un système est mécaniquement isolé s'il n'est soumis à aucune force. Ce genre de système n'existe pas en pratique (il y a toujours le poids du système et des frottements).

III.2.3. Système pseudo-isolé:

Un système est pseudo-isolé si la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur lui est égale au vecteur nul.

III.2.4. Référentiel Galiléen:

On appelle référentiel galiléen tout référentiel au sein duquel le principe d'inertie est vérifié, dans lequel un point matériel isolé, c'est-à-dire soumis à aucune force, possède un mouvement rectiligne uniforme. Même s'il n'existe aucun référentiel galiléen au sens strict. Il est cependant possible de considérer certains référentiels usuels comme galiléen si certaines conditions sont vérifiée :

a. Le référentiel terrestre peut être considéré galiléen si on considère un mouvement dont la durée ne dépasse pas quelques minutes dans le but de s'affranchir du mouvement de rotation propre de la Terre.

b. Le référentiel géocentrique peut également être considéré comme étant galiléen si on considère un mouvement dont la durée ne dépasse quelques heures dans le but de s'affranchir du mouvement de rotation de la Terre autour du Soleil.

c. Le référentiel héliocentrique peut aussi être considéré comme étant galiléen car l'impact du mouvement de rotation du Soleil au sein de la galaxie est négligeable.

III.3. Notion de forces:

Une force désigne, en physique, l'interaction entre deux objets ou systèmes, une action mécanique capable d'imposer une accélération, ce qui induit une modification du vecteur vitesse.

Définition : On appelle force, toute cause capable de:

- modifier l'état de repos ou de mouvement d'un objet
- produire des déformations

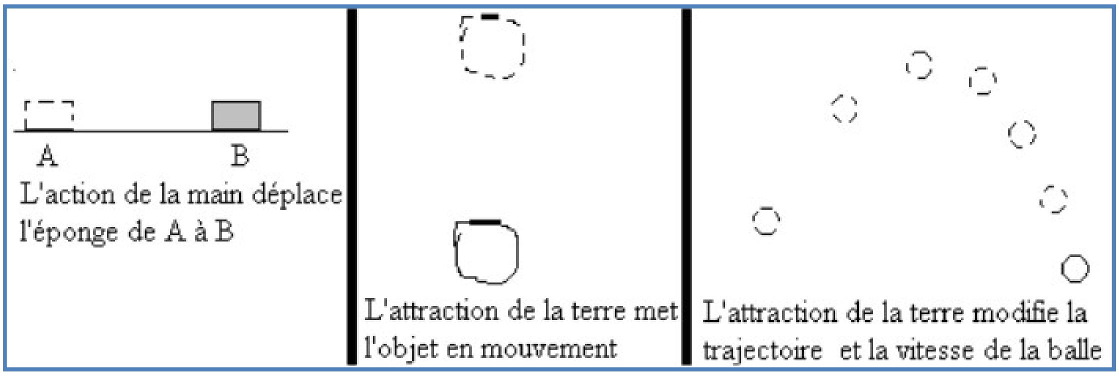


Figure III.1 : Effet dynamique ou effet de mouvement

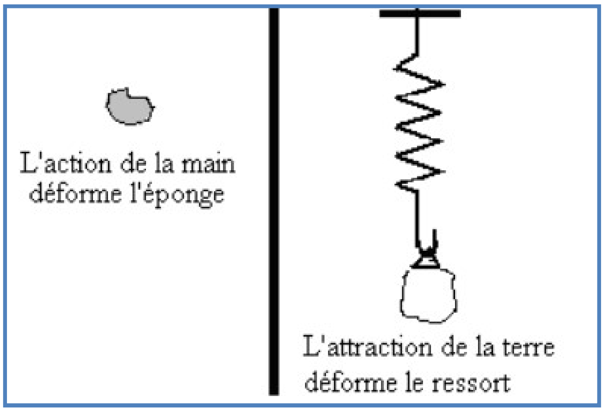


Figure III.2 : Effet statique ou effet de déformation

Les quatre caractéristiques d'une force sont :

- direction,
- sens, intensité
- point d'application.
- Son intensité **:** en Newton

Pour représenter une force, on doit dessiner une flèche qui possède les mêmes caractéristiques que la force (direction, sens, valeur) et qui commence au point d'application.

III.4. Les différents types de force:

Les types de forces peuvent être mis en deux catégories: les **forces à contact** et les **forces à distance.** Les forces à contact doivent toucher les objets sur lesquels ils agissent. Les forces à distance ne doivent pas être en contact avec les objets.

III.4.1. Les types de forces à contact:

a. La tension d'un fil:

La tension est la force dans une ficelle ou une corde quand vous tirez sur un bout. Imaginez que vous tenez un bout d'une corde et votre ami tient l'autre. Si vous tirez les deux bouts, vous mettez de la tension dans les cordes.

Exemple:

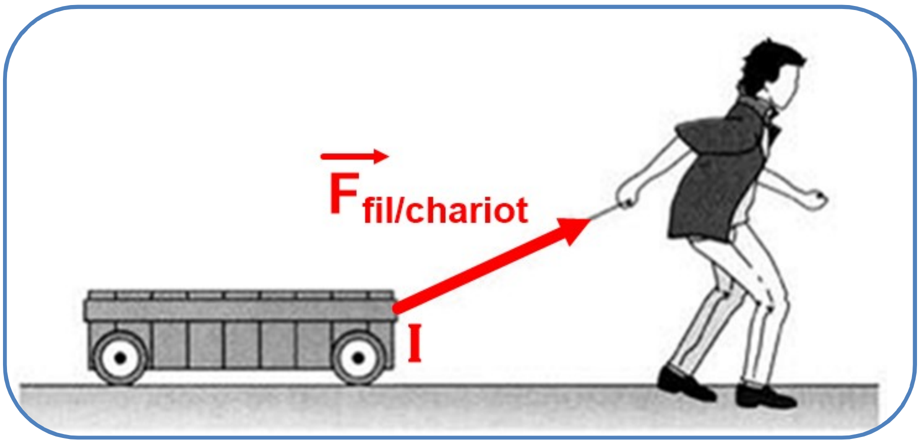


Figure III.3: la tension $\vec{F}$ appliquée à un chariot

La tension d'un fil est la force exercée par ce fil sur le corps qui lui est attaché.

Caractéristiques de $\vec{F}$

Le système étudié est {le chariot} dans **le référentiel terrestre** supposé galiléen.

Le fil exerce une action mécanique localisée pour laquelle on peut préciser:

- Un ***point d'application*** **I** (le point d'attache entre le fil et le chariot)
- Une ***direction*** (celle du fil)
- Un ***sens*** (du chariot vers le fil)
- Une ***intensité*** (qui dépend de l'effort réalisé en N).

b. Tension d'un ressort

La tension d'un ressort de masse nulle est la force exercée par un objet sur l'une des extrémités du ressort.

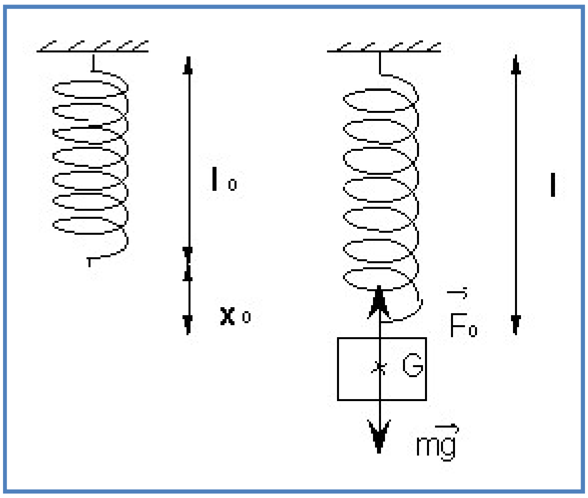


Figure III.4: Tension d'un ressort

Elle est notée généralement $\vec{T}$ et a pour expression vectorielle

$$\vec{T} = k\,\overrightarrow{\Delta l}$$

Et pour module::

$$\|\vec{T}\| = k\,|(l - l_0)| = k\,|\Delta l|$$

k constante de raideur N/m, Δl l'allongement du ressort au repos (m)

Ses caractéristiques sont les suivantes

- **Point d'application**: l'extrémité du ressort
- **Sens**: de l'extrémité vers l'extérieur du ressort
- **Direction**: celle du ressort
- **Valeur**: elle est notée $F_{\text{objet / ressort}}$ ou T et mesurée en newton (N).

c. Force d'action et de réaction d'un support

C'est la force qu'un objet solide agit sur votre main quand vous essayez de le bouger.

Exemple 1 le cas d'une surface plane

La force de gravité devrait normalement amener l'objet vers le sol (ou vers le centre de la Terre). Toutefois, la table garde l'objet immobile en exerçant une force vers le haut qui vient annuler la force de gravité. Cette force exercée par la table est appelée force normale.

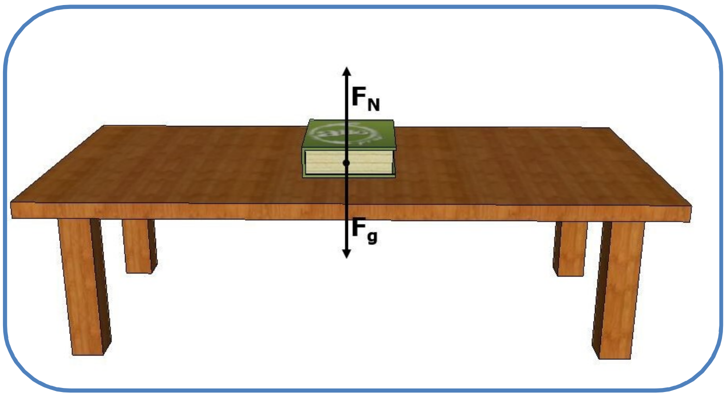


Figure III.5: Forces agissant sur un livre sur une surface plane

Exemple 2 le cas d'une surface incliné

La force normale doit être toujours perpendiculaire ç la surface. Or, lorsque la surface est inclinée, la force normale n'est pas égale à la force gravitationnelle, mais plutôt à la composante de la force gravitationnelle qui est perpendiculaire à la surface. La force normale sera de la même grandeur, mais de sens opposé à cette composante.

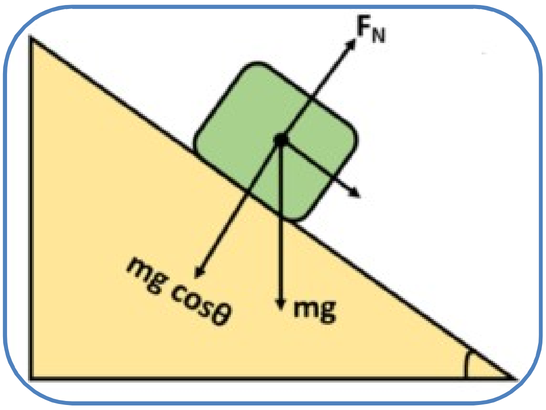


Figure III.6: Forces agissant sur un corps sur une surface incliné

Pour déterminer la force normale sur un plan incliné, on utilise la formule suivante:

$F_N = m \times g \times \cos\theta$

Où

F_N représente la force normale (N)

m représente la masse de l'objet (kg)

g représente l'accélération gravitationnelle (N/kg ou m/s^2)

θ représente l'angle d'inclinaison (∘)

d. La force frottement

Les forces de frottement existent en deux formes l'une qui accompagne le support sur lequel l'objet est posé (ou en contacte avec en tout cas) donc sans glissement: frottement statique. La deuxième frottement dynamique est un frottement avec glissement, donc qui ne suit pas le mouvement du support

Adhérence ou frottement statique

Le frottement statique est une force FFS qui empêche un mouvement de démarrer. C'est lui qui nous permet, en s'appuyant sur le sol, d'avancer et de tenir la route dans un virage. La bicyclette se déplace vers l'avant quand le pneu arrière pousse sur la route, vers l'arrière, grâce au frottement. Par réaction, le sol pousse le pneu vers l'avant, et par la suite le vélo et son cycliste.

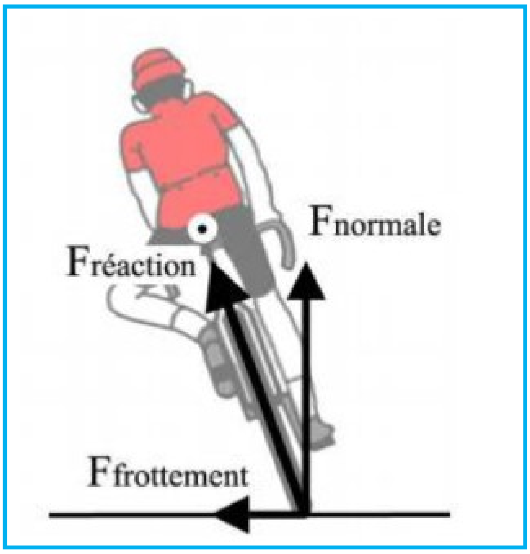


Figure III.7: Forces de frottement statique $\vec{F}_{frott}$.

La force maximale de frottement statique, au-delà de laquelle il y a glissement, est proportionnelle à la force normale F_N selon un coefficient de frottement statique μs dépendant des deux matériaux en contact.

$$\boxed{F_{frott} = \mu_0 \times F_N}$$

$\vec{F}_{frott}$ est la composante tangentielle de $\vec{F}_{reaction}$

$\vec{F}_N$ est la composante normale de $\vec{F}_{reaction}$

μ_0 coefficient de frottement statique

Glissement ou frottement dynamique:

Un frottement dynamique est une force de frottement qui s'exerce sur un objet qui se déplace avec une vitesse v dans un fluide (liquide ou gazeux).

Lorsque les solides glissent l'un contre l'autre ou dans un fluide la composante tangentielle T est indépendante de la vitesse de glissement et déterminée par la loi suivante :

$$\boxed{\vec{F} = -k\,\vec{v}}$$

k est le coefficient de frottement dynamique ou de glissement, dont la valeur dépend, entre autres, des deux matériaux en présence et de l'état de leurs surfaces.

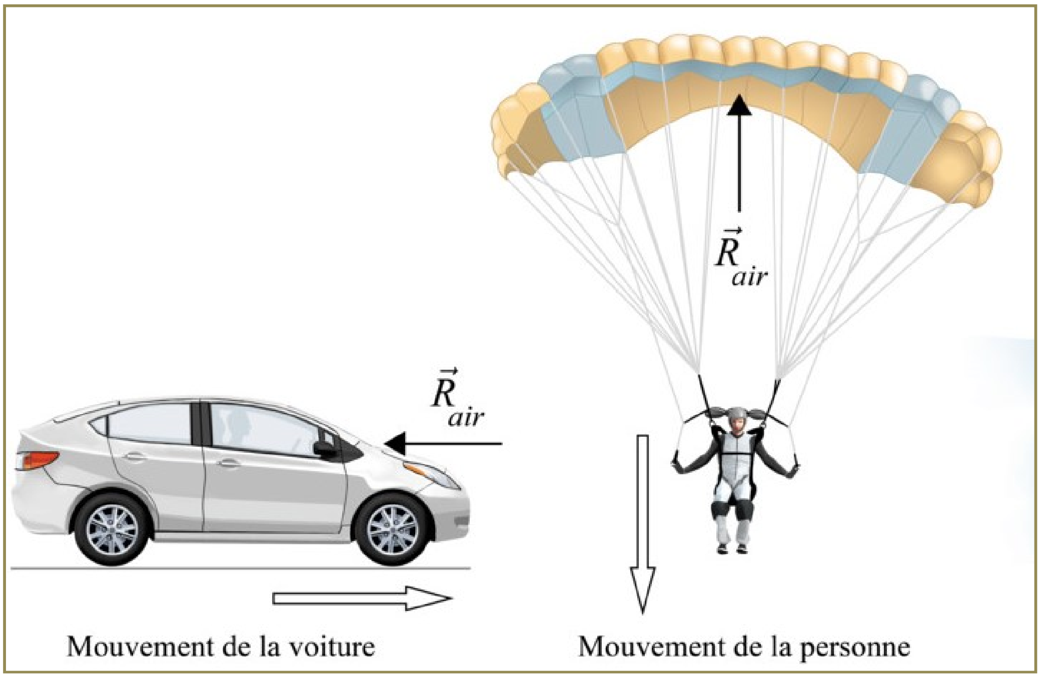


Figure III.8: Force de frottement dynamique

e. La force élastique: (Force de rappel):

La force de rappel d'un ressort de masse nulle est la force exercée par le ressort sur un objet lié à l'une de ses extrémités.

Elle est notée généralement $\vec{F}$ et a pour expression vectorielle:

$$\boxed{\vec{F} = -k\left(l(t) - l_{eq}\right)\vec{i} = -k\,x\,\vec{i}}$$

Le module de la force de rappel: $\|\vec{F}\| = k\,|x|$

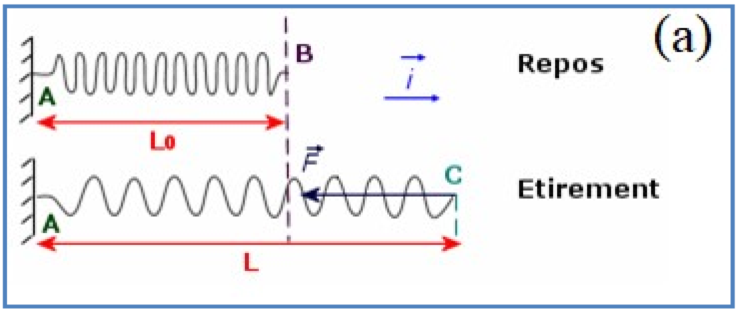
k constante de raideur N/m, Δl=x l'allongement du ressort au mouvement(m)

Ses caractéristiques sont les suivantes:

- **point d'application**: l'extrémité du ressort
- **sens**:
  - de l'extrémité vers l'extérieur du ressort si le ressort est comprimé;
  - dans le sens contraire si le ressort est étiré
- **direction**: celle du ressort
- **valeur**: la valeur de cette force est notée $F_{\text{ressort / objet}}$ ou T et mesurée en newton (N). Elle est proportionnelle à l'allongement du ressort.

Cas de l'étirement:

$\vec{F}$ *et* $\vec{\imath}$ *sont opposés*



Cas de compression:

$\vec{F}$ *et* $\vec{\imath}$ *ont le même sens*

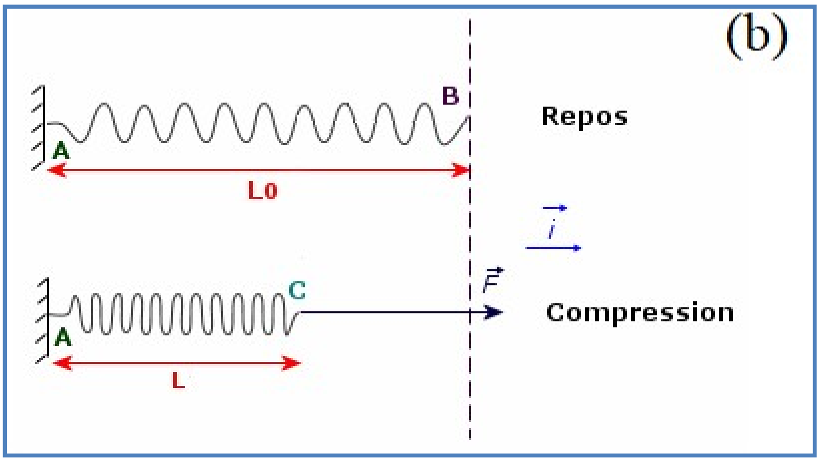


Figure III.9: Force de rappel d'un ressort **(a)** cas d'étirement, **(b)** cas de compression d'un ressort

III.4.2. Les types de forces à distance

a. La force gravitationnelle

L'interaction gravitationnelle correspond à l'attraction qui existe entre deux corps qui ont une masse.

Elle intervient, entre autre :

- entre les corps célestes, et permet d'expliquer le mouvement elliptique des astres.
- dans la pesanteur terrestre, dont elle est la cause

La loi d'attraction universelle a été formulée par Isaac Newton (physicien, mathématicien et astronome britannique, 1642 - 1727). Cette loi traduit, par une formule mathématique, la notion d'interaction gravitationnelle.

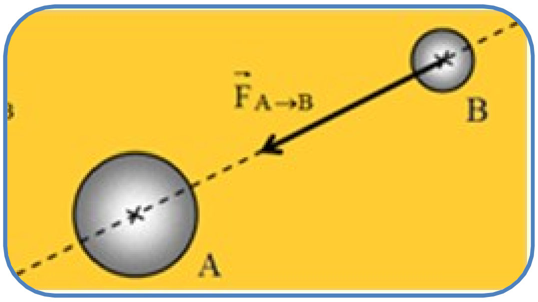


Figure III.10: La force gravitationnelle

Soient deux corps A et B de masses respectives m_A et m_B, distants de AB.

Alors, le vecteur force gravitationnelle exercée par A sur B est opposé au vecteur force gravitationnelle exercée par B sur A, et a pour expression :

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = \vec{F}_{B\to A} = -G\frac{m_A m_B}{AB^2}\vec{u}_{A\to B}}$$

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·kg^{-2}·m^2; m_A et m_B s'expriment en kg et AB en m. La force est en N.

Cette force est une force attractive.

	Intensité de la force gravitationnelle	Intensité de la force électrique
Entre la Terre et la Lune	$F = 1{,}98\times10^{15}$ N (attractive)	F = 0 N
Entre le noyau et l'électron de l'atome d'hydrogène	$F=3{,}6\times10^{-47}$ N (attractive)	$F=8{,}2\times10^{-8}$ N (attractive)
Entre deux proton d'un noyau	$F=10^{-34}$ N (attractive)	$F=10^{2}$ N (répulsive)

Au voisinage de la Terre, la force de gravitation universelle correspond au **poids** de l'objet, noté $\vec{P}$.
P=m×g avec P en N et m : la masse de l'objet, en kg

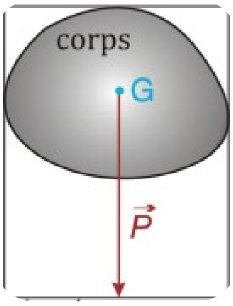


Figure: III.11: Le poids représenté par un vecteur

Caractéristiques de $\vec{P}$:

- **Point d'application** : centre de gravité (G)
- **Direction** : la verticale
- **Sens** : vers le centre de la Terre
- **Intensité** : exprimée en Newton (N)

b. La force électrique:

Cette force attire ou repousse deux objets avec une charge électrique. La charge est une propriété des matériaux à cause du nombre d'électrons et de protons dans un objet. Les électrons sont des petits objets avec une charge électrique. Les électrons ont une charge négative. Les protons sont aussi des petits objets mais avec une charge positive. La charge est la propriété d'un objet. Deux objets avec la même charge se repoussent de leur fore électrique. Deux objets de charge opposés s'attirent par leur force électrique.

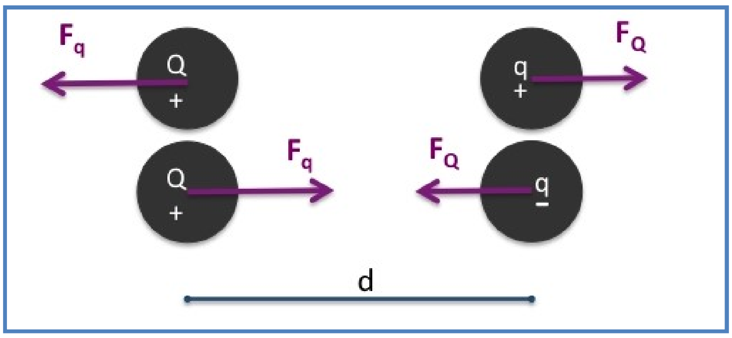


Figure **III.12:** Force électrique

La force électrique d'attraction ou de répulsion entre deux charges est inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

$$\boxed{\overrightarrow{F_{12}} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{q\,Q}{d^2}\vec{u}}$$

F est la force coulombienne exprimée en Newtons (N)

Q est la première charge ponctuelle exprimée en Coulombs (C).

q est la deuxième charge ponctuelle (C).

d est la distance entre deux charges ponctuelles exprimée en mètres (m).

$k_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\,\times 10^9 Nm^2C^{-2}$est une constante électrostatique

c. La force magnétique:

La force magnétique est la force d'un matériel magnétique dans un champ magnétique. Les aimants sont des objets avec un pôle magnétique nord et sud. Le pôle sud est attiré par le pôle nord d'autres aimants et repoussé par les pôles sud par le champ magnétique.

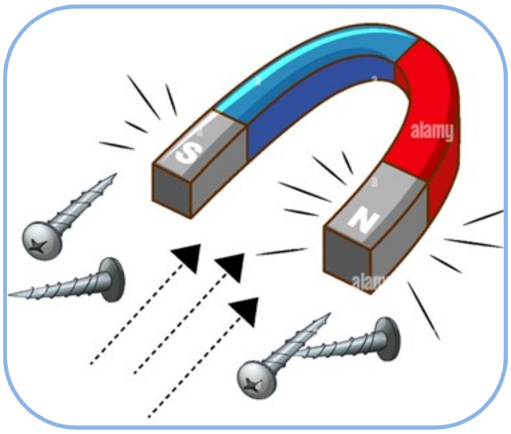


Figure III.13: Force magnétique

III.5. Quantité de mouvement:

La quantité de mouvement d'un objet se définit comme le produit de sa masse par sa vitesse. Lorsque deux objets entrent en collision, la quantité de mouvement de chacun d'eux varie, mais la quantité de mouvement *totale* du système reste constante

La quantité de mouvement par rapport au référentiel R d'un point matériel M, de masse m et de vitesse v est donnée par:

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}}$$

III.6.Lois de Newton:

III.6.1. Première loi de Newton – Principe d'inertie:

Loi: Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel n'est soumis à aucune force – système isolé – ou s'il est soumis à un ensemble de forces de résultante nulle $\left(\sum \vec{F} = \vec{0}\right)$– système pseudo-isolé – alors il est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Réciproquement, si le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un solide ne varie pas, la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur ce solide est nulle. Pour un système isolé ou pseudo-isolé, la vitesse est constante et la quantité de mouvement se conserve.

III.6.2. Deuxième loi de Newton – Principe fondamental de la dynamique:

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \mathrm{m}\,\vec{a}_G = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

C'est la relation fondamentale de la dynamique.

Si, au cours du mouvement, la masse du système est constante, cette loi se réduit au produit de la masse du solide par le vecteur accélération de son centre d'inertie ; en effet :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}}$$

Si m = Cte, on a :

$$\boxed{\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}_G}$$

L'accélération d'un point matériel M en mouvement est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui et inversement proportionnelle à sa masse : C'est la deuxième loi de Newton.

III.6.3. Troisième loi de Newton – Principe des actions réciproques:

Deux corps sont en interaction, de contact ou à distance, si l'état de repos ou de mouvement de l'un dépend de l'existence de l'autre.

Si un corps A exerce sur un corps B une force $\vec{F}_{A/B}$, alors B exerce sur A une force $\vec{F}_{B/A}$ telle que :

$$\boxed{\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}}$$

Ces deux forces ont ces deux forces ont alors :

- **La même direction** : la droite (AB)
- **La même intensité** : $F_{A/B} = F_{B/A}$
- **Des sens opposés**

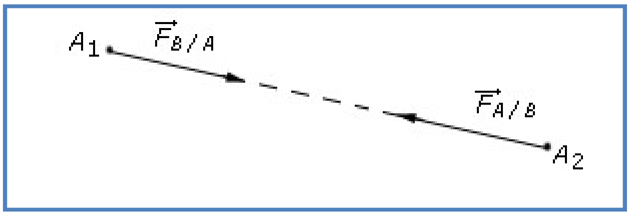


Figure III.14: Les actions réciproques entre deux corps

Ces interactions mécaniques peuvent être des interactions **de contact ou à distance** et interagir entre deux corps au repos ou en mouvement.

III.7. La conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement peut intervenir lors d'une collision entre deux ou plusieurs objets ou particules. Lorsqu'il y a conservation, l''addition vectorielle des quantités de mouvement de chaque corps faisant partie du milieu conserve la même valeur avant et après la collision.

On dira que: Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé (soumis à aucune force) ou pseudo isolé (les forces se compensent) est une quantité conservée (constante en fonction du temps)

Démonstration

Quand un système est **isolé** ou **pseudo-isolé**

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

D'après la seconde loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, , donc dans ce cas, cela revient à dire que $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$,

Autrement dit, la variation de la quantité de mouvement en fonction du temps est nulle, et donc $\vec{p}$ **est une constante en fonction du temps**, c'est une quantité conservée**.**

III.8. Moment cinétique:

III.8.1. Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point:

Soit M un point matériel de masse m, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$.

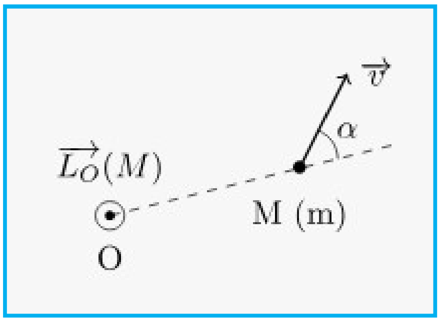


Figure III.15: Moment cinétique de M en un point O

Son moment cinétique en un point O est définit par:

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_0(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}}$$

On peut exprimer la norme de ce moment cinétique en fonction de l'angle que forme la droite (OM) et le vecteur

$$\boxed{\mathcal{L}_O(M) = \left\|\vec{\mathcal{L}_O}(M)\right\| = OM.mv.sin\alpha}$$

Le moment cinétique s'exprime donc en kg.m^2.s^{-1}

Sens du vecteur moment cinétique

Le vecteur $\vec{\mathcal{L}}_0(M)$ semble venir vers nous dans la figure ci-dessus : ce sens est obtenu par le fait que la base ($\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{\mathcal{L}}_0(M)$) est directe. Pour le retrouver, on peut utiliser les trois doigts de la main droite (pour former le trièdre) ou la règle du tire-bouchon.

Exemple du moment cinétique en coordonnées polaires

Soit un point M se déplaçant dans un mouvement circulaire par rapport au référentiel R

Sa position en coordonnées polaires est : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$

Sa vitesse est : $\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

En effet, la composante suivant $\vec{e}_r$ ($\dot{r}\,\vec{e}_r$) est nulle puisque r est constant (mouvement circulaire).

Son moment cinétique s'écrit donc :

$$\vec{\mathcal{L}}_0(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{\mathcal{L}}_0(M) = m\, r\, \vec{e}_r \wedge \left(\dot{r}\, \vec{e}_r + r\, \dot{\theta}\, \vec{e}_\theta\right)$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_0(M) = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{e}_z}$$

III.8.2. Moment cinétique en O’ différent de O:

Le moment cinétique dépend du point où on le calcule. On peut établir une relation entre le moment cinétique en un point O’ et celui en un point O :

$$\vec{\mathcal{L}}_{0'}(M) = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\mathcal{L}}_{0'}(M) = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\mathcal{L}}_{0'}(M) = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\mathcal{L}}_{0'}(M) = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p} + \vec{\mathcal{L}}_0(M)$$

Donc:

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{0'}(M) = \vec{\mathcal{L}}_0(M) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}}$$

III.8.3. Moment cinétique par rapport à un axe:

Cette grandeur n’est plus un vecteur mais une grandeur algébrique.

Soit Δ un axe orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.

Soit O un point de cet axe et M un point dont on connaît le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_0(M)$ par rapport à O.

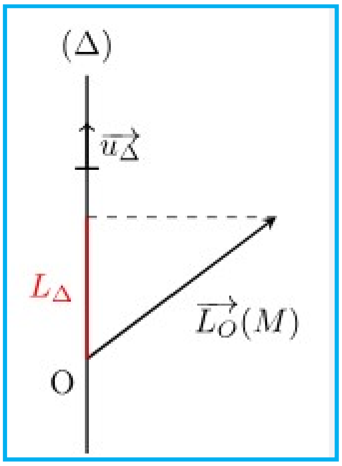


Figure III.16: Moment cinétique de M par rapport à l’axe Δ

Le moment cinétique de M par rapport à l’axe Δ est:

$$\boxed{\mathcal{L}_\Delta = \vec{\mathcal{L}}_0(M).\overrightarrow{u_\Delta}\ .}$$

Il est la projection du moment cinétique par rapport à un point de l'axe sur celui-ci.
Cette projection est indépendante du point de l'axe choisi.

III.9. Moment d'une force:

Le moment cinétique est relié au moment des forces dans le théorème du moment cinétique.

III.9.1. Moment d'une force par rapport à un point:

On considère une force $\vec{F}$ agissant en un point M quelconque de l'espace. Le moment de la force au point A est :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$$

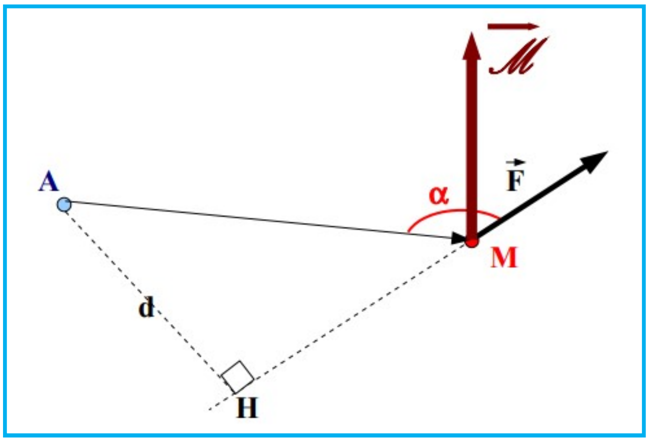


Figure III.17: Moment d'une force par rapport à un point

Remarques : Le moment d'une force est un vecteur: La direction de ce vecteur moment est orthogonal à la fois à la force $\vec{F}$ et au vecteur $\overrightarrow{AM}$

Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$ d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point a est: $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$ est le produit vectoriel de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$, où M est le point d'application de la force.

Cette grandeur caractérise l'aptitude de la force $\vec{F}$ à tourner autour du point.

On l'exprime en Newton. Mètre (Nm) et elle a la même dimension qu'une énergie.

Son sens donne le sens de la rotation.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$ est normal aux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$. Il est donc normal au plan contenant la force et le point A.

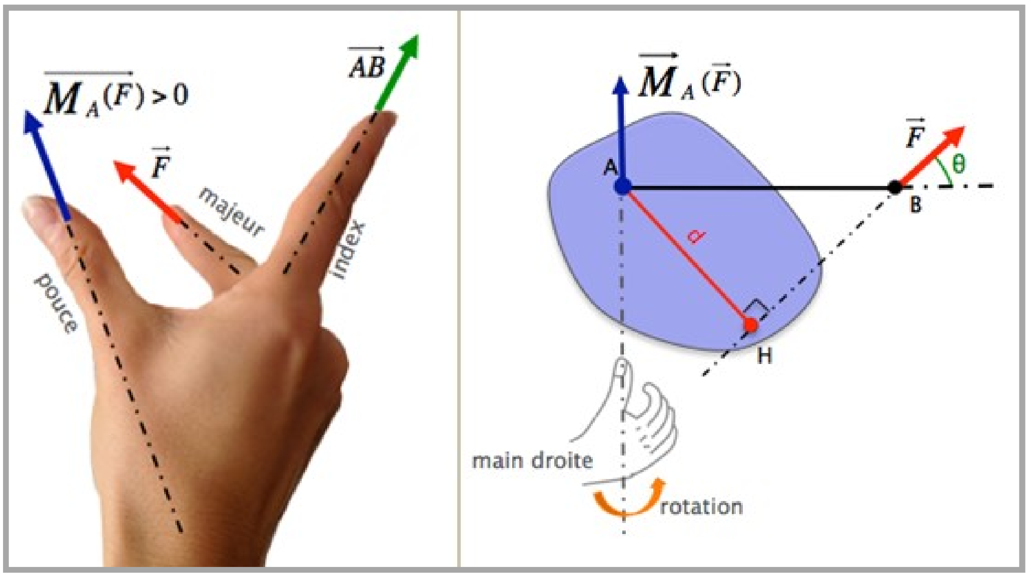


Figure III.18: Caractéristiques du moment d'une force par rapport à un point

Si d est la distance du point A à la droite d'action de la force $\vec{F}$, la norme de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$ est

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{AM}\| \, \|\vec{F}\| \, sin\alpha$$

Ou encore:

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{AH}\| \, \|\vec{F}\| = F\,d$$

Le moment est nul si AM = 0, si F = 0 ou si d = 0 ($\overrightarrow{AM}$et $\vec{F}$ sont colinéaires).

III.9.2. Moment de force en A' différent de A:

Avec le même raisonnement que celui utilisé pour le moment cinétique, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{A'}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) + \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{F}$$

III.9.3. Moment d'une force par rapport à un axe:

C'est la projection du moment par rapport à un point de l'axe sur cet axe. C'est donc une grandeur scalaire dont le signe indique le sens de rotation autour de l'axe.

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe (Δ), dont un vecteur directeur $\vec{u}$ (unitaire) est $\vec{u}$, est égal au produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u_\Delta}$par le vecteur moment en A de la force $\vec{F}$ ou A est un point quelconque de l'axe (Δ).

L'expression du moment par rapport à l'axe (Δ) est donnée par:

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}) = \overrightarrow{u_\Delta}\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$$

Avec A un point fixe.

C'est donc une grandeur scalaire dont le signe dépend du sens de rotation du solide par rapport à l'axe (Δ).

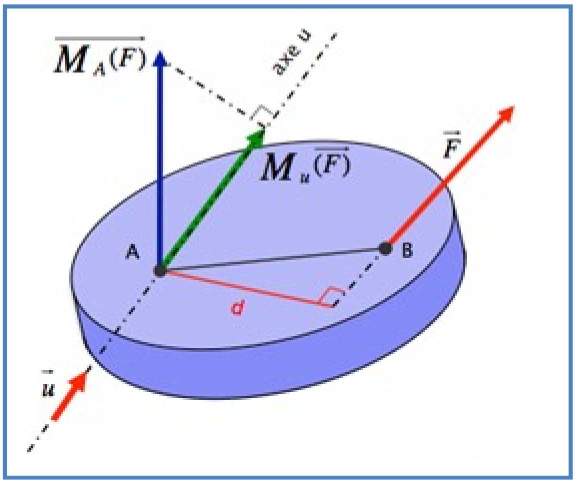


Figure III .19: Moment d'une force par rapport à un axe

III.9.4. Interprétation physique du moment de force:

Le moment de force, également connu sous le nom de couple, est un concept important en physique qui décrit la tendance d'une force à faire tourner un objet autour d'un point ou d'un axe donné. Son interprétation physique dépend du contexte dans lequel il est appliqué. Voici quelques exemples d'interprétation physique du moment de force :

Ouverture d'une porte : Si vous poussez ou tirez une porte autour de ses charnières, vous appliquez un moment de force. Plus la force que vous appliquez est éloignée des charnières, plus le moment de force est important, ce qui facilite l'ouverture ou la fermeture de la porte.

Rotation d'un levier : Lorsque vous utilisez un levier pour soulever un objet, le moment de force dépend de la force que vous appliquez et de la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation du levier. Un levier long permet de soulever des objets plus lourds avec moins d'effort.

Tourner une clé : Lorsque vous tournez une clé dans une serrure, vous appliquez un moment de force. Si vous utilisez une clé plus longue, cela nécessitera moins d'effort pour faire tourner la serrure.

Dans chaque cas, le moment de force dépend de deux facteurs principaux : la force appliquée et la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation. Plus cette distance est grande, plus le moment de force est important. C'est pourquoi les leviers et les outils sont souvent conçus avec des poignées ou des manches longs pour maximiser l'efficacité du moment de force.

III.10. Notion de mécanique du solide : moment d'inertie:

Le moment cinétique est relié à une quantité représentant l'inertie de rotation d'un corps, appelée moment d'inertie, et à la vitesse angulaire.

III.10.1. Le moment d'inertie:

Le moment d'inertie, souvent noté $\boldsymbol{J}$, est une grandeur physique qui mesure la répartition de la masse d'un objet par rapport à un axe de rotation donné. Il quantifie la manière dont la masse d'un objet est distribuée autour de cet axe et influence sa capacité à résister à une rotation.

En général, on cherche à faire tourner un corps autour d'un axe, on utilise alors le moment d'inertie par rapport à cet axe que l'on note J_Δ

On peut alors exprimer le moment cinétique d'un corps par rapport à un axe de la façon suivante :

$$\boxed{\mathcal{L}_\Delta = J_\Delta \times \omega}$$

Ce moment cinétique caractérise la tendance d'un objet à continuer à tourner autour de Δ, du fait de son inertie.

III.10.2. Exemples de moment d'inertie:

Au vu de sa définition, le moment d'inertie dépend de la répartition de masse du corps en question. Cependant pour des corps homogènes et de formes géométriques simples, l'expression du moment d'inertie est simple :

Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'un cerceau de masse m et de rayon R:

$$\boxed{J_\Delta = m\,R^2}$$

Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'un cylindre ou d'un disque de masse m et de rayon R :

$$\boxed{J_\Delta = \frac{1}{2} m\,R^2}$$

Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'une sphère de masse m et de rayon R :

$$\boxed{J_\Delta = \frac{2}{5} m\,R^2}$$

III.11. Théorème du moment cinétique

III.11.1. Par rapport à un point fixe

Soit O un point fixe du référentiel d'étude R. Écrivons ce théorème mathématiquement :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_i})}$$

Littéralement, cela devient : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M par rapport à un point O est égale à la somme des moments des forces par rapport à O appliquées à ce point M.

Démonstration

Montrons que ce théorème est une conséquence directe du principe fondamental de la dynamique.

On dérive l'expression du vecteur moment cinétique, donc le produit vectoriel :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Or: $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}$ donc $\frac{d\overrightarrow{O}}{dt} \wedge m\,\vec{v} = \vec{0}$

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} = \sum_i \vec{F_i}$$

D'où:

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F_i} = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_i} = \sum_i \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_i})$$

Par rapport à un axe

Pour obtenir son expression, il suffit de projeter le théorème par rapport à un point fixe.

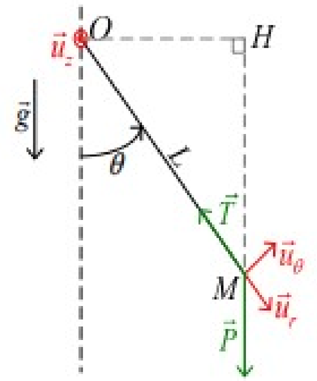
On obtient:

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_\Delta}(M)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{M_\Delta}(\overrightarrow{F_i})$$

III.11.2. Exemple du pendule simple:

Référentiel : du laboratoire considéré galiléen ;

Système : masse m considérée ponctuelle en un point M ;



Forces:

Poids $\vec{\boldsymbol{P}}$

Tension du fil $\vec{T}$

On utilisera les coordonnées cylindriques:

Appliquons le théorème du moment cinétique au point d'attache fixe O du pendule:

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_\Delta}(M)}{dt} = \overrightarrow{M_O}(\vec{P}) + \overrightarrow{M_O}(\vec{T})$$

Moment cinétique et sa dérivée

Exprimons tout d'abord le moment cinétique en O:

$$\vec{\mathcal{L}}_0(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ ml\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ ml^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M)}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\,\vec{u}_z$$

Pour le moment de la tension $\vec{T}$:

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}$$

Puisque $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaire, alors: $\overrightarrow{M_O}(\vec{T}) = \vec{0}$

Pour le moment du poids $\vec{P}$:

$$\vec{M}_0(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg\,l\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{M_O}(\vec{T}) + \boldsymbol{\vec{M}_0}(\vec{P})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{ml^2\ddot{\theta}\,\vec{u}_z = -mg\,l\sin\theta\ \vec{u}_z}$$

Enfin l'équation:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

L'équation est une équation bien connue qui peut être retrouvée facilement à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique ou à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique (car $\vec{T}$ ne travaille pas et $\vec{P}$ est conservative).

III.12. Conservation du moment cinétique –forces centrales:

III.12.1. Forces centrales:

En mécanique du point, un mouvement à force centrale est le mouvement d'un point matériel M soumis uniquement à une force centrale, c'est-à-dire une force toujours dirigée vers le même point noté O, appelé centre de force

III.12.2. Conservation du moment cinétique:

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps s'annule si:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}}$$

- **Si la particule est isolée :**$\vec{F} = \vec{0}$ ce qui signifie que le moment cinétique d'une particule libre est constant.
- Si **la force** $\vec{F}$ **est centrale :** $\vec{F}$ est parallèle à $\vec{r}$ Donc le moment cinétique par rapport au centre de forces est constant. Le contraire est vrai c'est à dire si le moment cinétique est constant donc la force est centrale.

Exercices corrigés

Exerxice1:

Un pendule simple est constitué d'une masse m considérée ponctuelle fixée à l'extrémité libre M d'un fil (l'autre O étant fixe par rapport à la Terre). La longueur du fil est l.

Déterminer la position d'équilibre du système On écarte la masse de sa position d'équilibre et on la lâche sans lui donner de vitesse (vitesse initiale nulle).Étudier le mouvement de la masse

Solution

Le système est le point matériel M de masse m. Le référentiel est le référentiel terrestre galiléen dans lequel le point O est fixe.

Bilan des forces extérieures appliquées sur M : Le poids (force à distance) et une seule force de contact la tension du fil

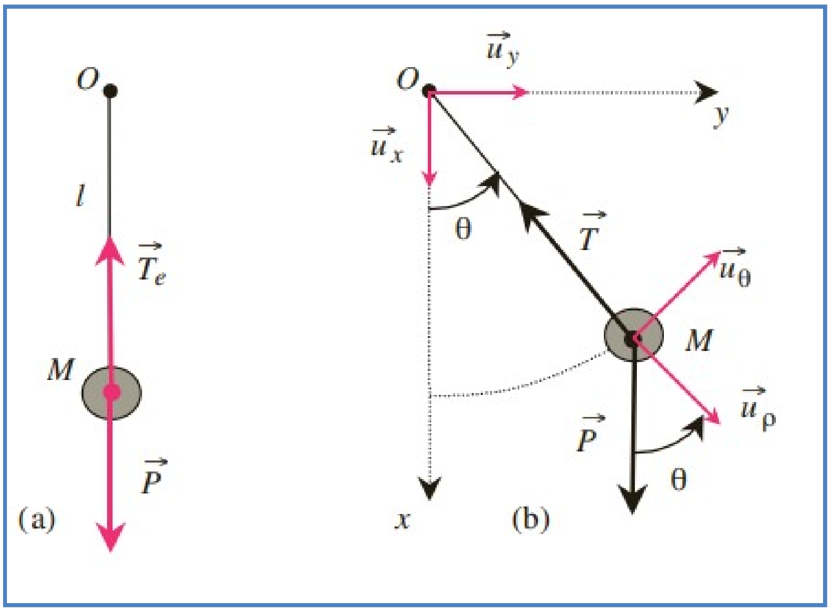


Figure:1

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système:

. **a) Position d'équilibre (voir figure (1(a)):**

La tension du fil $\vec{T}$à la même direction que le poids $\vec{P}$ de M. Dans la position d'équilibre le fil prend donc la direction verticale

b) En mouvement (voir figure 1 (b)) :

L'équation traduisant le principe fondamental de la dynamique est une équation vectorielle.

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Dans la position (a):

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{T} = -\vec{P}$$

Dans la position (b):

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Le système de coordonnées polaires est approprié et la base utilisée sera $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. En exprimant le vecteur accélération dans cette base on peut écrire :

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m(-l\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta)$

Par projection:

Selon $\vec{u}_\rho$: $mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$

Selon $\vec{u}_\theta$: $-mg\ cos\theta = ml\ddot{\theta}$

L'équation différentielle du mouvement:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta = 0}$$

Dans le cas ou l'angle θ $est\ petit, on a$: $sin\theta \approx \theta$

En posant: $\omega^2 = \frac{g}{l}$ la solution de l'équation s'écrit:

$$\boxed{\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)}$$

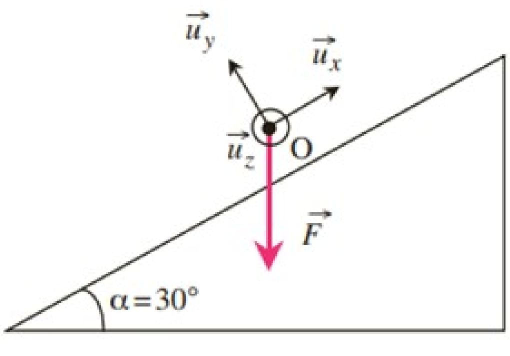
L'expression de la tension du fil:

$$mg\cos\theta - T = -ml\,\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = m(\,g\,cos\theta + l\,\dot{\theta}^2)$$

$$\boxed{T = m(\,g\,cos\theta + l\,\dot{\theta}^2)}$$

Exercice2:

Soit la base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ associé au repère (O, x, y, z). On considère une force F représentée par le vecteur $\vec{F}$ de norme: $\|\vec{F}\| = F = 3N$



1. Donner en utilisant le produit scalaire, les coordonnées du vecteur $\vec{F}$ dans la base$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

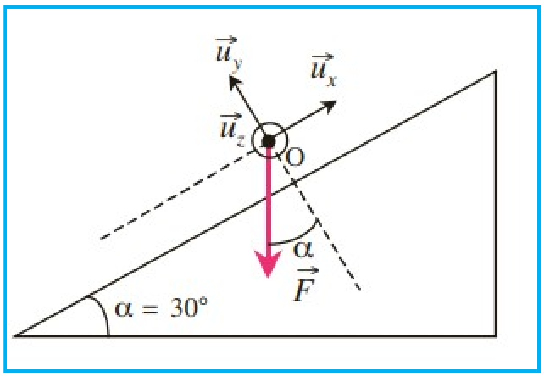
2. On veut calculer le moment $\vec{M}_0\,(\vec{F})$, par rapport au point O, de la force $\vec{F}$ appliquée en un point M, dont les coordonnées dans le repère (O, x, y, z) sont (–1; 2; 1) (unité m).

Sachant que $\vec{M}_0\,(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$, calculer les coordonnées de $\vec{M}_0\,(\vec{F})$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$..

3. En déduire l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$

4. Comment peut-on vérifier que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{F}$?

Solution:



1. composante de vecteur $\vec{F}$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}.\vec{u}_x \\ \vec{F}.\vec{u}_y \\ \vec{F}.\vec{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{F}\|.\|\vec{u}_x\|.cos\,(\vec{F},\vec{u}_x) \\ \|\vec{F}\|.\|\vec{u}_y\|.cos\,(\vec{F},\vec{u}_y) \\ \|\vec{F}\|.\|\vec{u}_z\|.cos\,(\vec{F},\vec{u}_z) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ 3 \times 1 \times \cos(\pi - \alpha) \\ 3 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ -3\cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ -3\cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin(30°) \\ -3\cos(30°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times \left(\frac{1}{2}\right) \\ -3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{F} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -2.6 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2 composante de vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O, x, y, z).

Connaissant les coordonnées des points O(0; 0; 0) et M(–1; 2; 1) on obtient pour les composantes de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_M - x_O \\ y_M - y_O \\ z_M - z_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_0\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1.5 \\ -2.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 2.0 - 1 \times 2.6 \\ 1 \times (-1.5) - 1.0 \\ (-1) \times (2.6) - 2 \times (-1.5) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{+2.6} \\ \mathbf{-1.5} \\ \mathbf{+5.1} \end{pmatrix}}$$

3. Déduction de l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$

$$\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right\| = \sqrt{(2.6)^2 + (-1.5)^2 + (5.1)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right\| = 5.9\ N.m$$

Par definition:

$$\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\left\|\vec{F}\right\|.\sin(\overrightarrow{OM};\vec{F})$$

Avec: $\left\|\vec{F}\right\| = F = 3N$ et $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 2.6\ m$$

On obtient:

$$\sin(\overrightarrow{OM};\vec{F}) = \frac{5.9}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\left\|\vec{F}\right\|} = \frac{5.9}{2.4 \times 3}\ 0.8053$$

C'est-à-dire:

$$\boxed{(\widehat{\overrightarrow{OM};\vec{F}}) = \mathbf{53.64°}}$$

4. Vérifions que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{F}$

Il suffit de montrer que le produit scalaire

$$\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right).\vec{F} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right).\vec{F} = \begin{pmatrix} +2.6 \\ -1.5 \\ +5.1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1.5 \\ -2.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right).\vec{F} = 2.6 \times (-1.5) + (-1.5)(-2.6) + 5.1 \times 0$$

$$\boxed{\left(\boldsymbol{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}\right).\boldsymbol{\vec{F}} = \mathbf{0}}$$

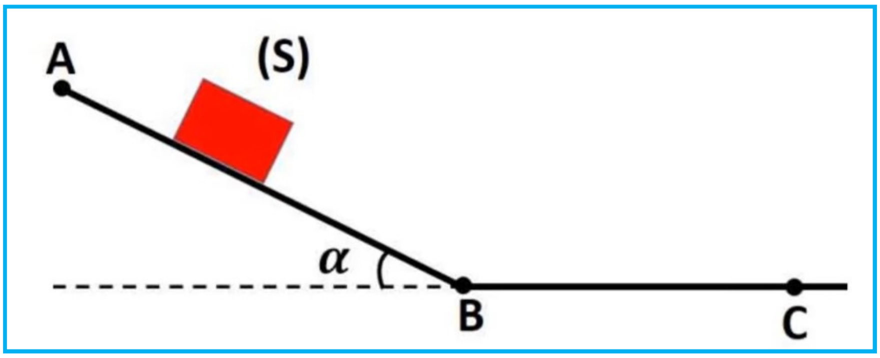
Exercice3:

Un skieur de masse m = 70 kg, décrit une piste formée par deux parties:

- AB une piste inclinée de 30° avec le pan horizontal ;
- BC, une voie rectiligne horizontale

les forces de frottements sont supposées constantes sur les deux parties et valent f = 10N.

le skieur atteint le point B avec une vitesse VB = 40 m/s puis il s'arrête en C. g= 10N/kg



1. Sur la pente AB:

1.1. Faire le bilan des actions agissant sur le skieur

1.2. Déterminer l'accélération du mouvement du skieur, en déduire la nature du mouvement

1.3. Prendre comme origine des abscisses le point A et comme instant de repère du temps l'instant de passage par A.

Ecrire les équations horaires du mouvement du skieur

1.4. Le skieur décrit la pente AB pendant 7 secondes.

1.4.1. Calculer la vitesse V_A, la vitesse de passage par le point A.

1.4.2. Déterminer la longueur de la pente AB.

2. sur la pente BC le skieur à utiliser son bâton pour freiner, f de freinage est égale à 60N

2.1. Faire le bilan des actions agissant sur le skieur.

2.2. Déterminer l'accélération du skieur, en déduire la nature du mouvement

2.3. Prendre comme origine des abscisses le point B et comme instant de repère du temps l'instant de passage par B

Ecrire les équations horaires du mouvement du skieur

2.4. Le skieur s'arrête au point C**.**

2.4.1. Déterminer a quel instant le skieur s'arrête t-il?

2.4.2. Calculer la distance BC.

Solution:

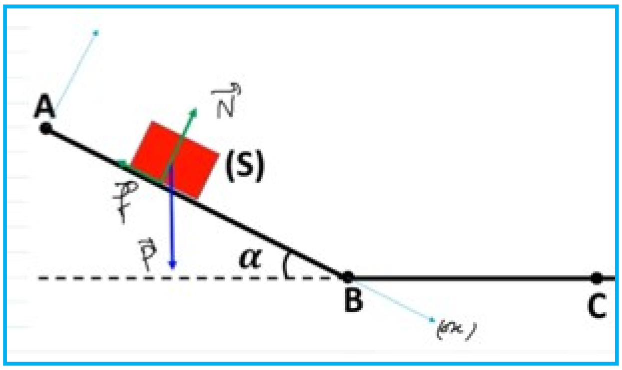
1. Sur la pente AB:

1.1. Le bilan des actions agissant sur le skieur

Bilan des forces:

Le skieur est soumis à l'action des forces suivantes :

- $\vec{P}$: Son poids
- $\vec{f}$: La force de frottement parallèle au plan horizontale et de sens opposé à celui du mouvement.
- $\vec{N}$: Reaction du plan perpendiculaire au plan horizontal



1.2. Déterminons l'accélération du mouvement du skieur, en déduire la nature du mouvement

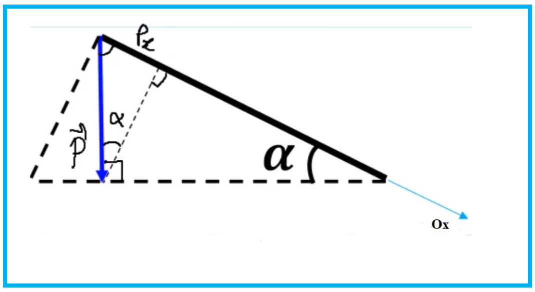
Le système étudié: (m)

Référentiel terrestre supposé Galiléen

2éme loi de Newton :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{f} + \vec{N} = m\,\vec{a}$



Projection sur Ox:

$P_x - f + 0 = ma_x$

P sin α –f = ma

$$a = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

AN:

$$a = 10\sin 30° - \frac{10}{70}$$

$$\boxed{a = 4.86\ m/s^2}$$

On a $\vec{a} = cste\ \ et\ a.v > 0$

Le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré.**

1.3. Ecrivons les équations horaires du mouvement du skieur

On a: a= cste

$V(t) = a\,t + V_0$

$V(t=0) = V_A$

$V(t) = a\,t + V_A$

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + V_A t + x_0$$

$x(t=0) = x_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + V_A t$$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}\,2.43\,t^2 + V_A t}}$$

1.4.1. Calculons la vitesse VA, la vitesse de passage par le point A.

$V(t) = a\,t + V_0$

a $t = t_B = 7$ s

$$V(t_B) = a\,t_B + V_A$$

$$V_B = a\,t_B + V_A$$

$$V_A = V_B - a\,t_B$$

AN:

$$V_A = 40 - 4.86 \times 7$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_A = 6\,m.s^{-2}}}$$

1.4.2. déterminons la longueur de la pente AB.

$$AB = x_B - x_A = x_B = x\,(t_B)$$

$$AB = \frac{1}{2}at_B^2 + V_A t_B$$

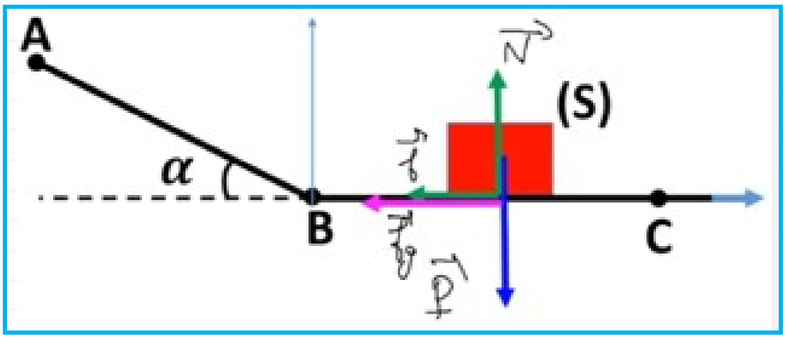
A.N:

$$AB = \frac{1}{2}4.86 \times 7^2 + 6 \times 7$$

$$\boxed{\textbf{AB = 161 m}}$$

2. Sur la pente BC

2.1. Le bilan des actions agissant sur le skieur.



Bilan des forces:

Le skieur est soumis à l'action des forces suivantes:

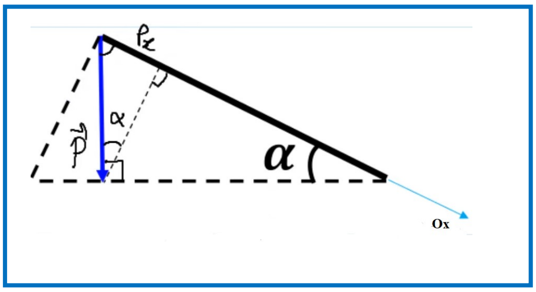
- $\vec{P}$: Son poids
- $\vec{f}$: La force de frottement parallèle au plan horizontale et de sens opposé à celui du mouvement.
- $\vec{N}$: Reaction du plan perpendiculaire au plan horizontal
- $\vec{f_g}$: Force de freinage parallèle au plan horizontal horizontale et de sens opposé à celui du mouvement.

2.2. Déterminons l'accélération du skieur, en déduire la nature du mouvement

Le système étudié: (m)

Référentiel terrestre supposé Galiléen

2éme loi de Newton:



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{f_g} + \vec{N} = m\,\vec{a}$$

Projection sur Ox:

$$P_x - f - f_g + 0 = ma_x$$

$$-\left(f + f_g\right) = ma_x$$

$$\boxed{a = -\frac{1}{m}\left(f + f_g\right)}$$

AN: $a = -\frac{1}{70}\,(10 + 60)$

$$\boxed{a = -1\ \mathrm{m.s^{-2}}}$$

On a: $\vec{a} = cste\ \ et\ a.v < 0$

Le mouvement est **rectiligne uniformément retardé**.

2.3. Les équations horaires du mouvement du skieur

On a: $a = -1\ m.s^{-2}$

$V(t) = a\,t + V_0$

$V(t=0) = V_B$

$V(t) = -\,t + V_B$

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + V_B t + x_0$$

$x(t=0) = x_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + V_B t$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}\,t^2 + V_B t}$$

2.4. Le skieur s'arrête au point C

2.4.1. L' instant d'arrête du skieur

On a: $v(t) = at + V_B$

$$V(t_C) = a\,t_C + V_B$$

$$0 = a\,t_C + V_B$$

$$\boxed{t_C = -\frac{V_B}{a}}$$

AN:

$t_C = -\frac{40}{-1}$

$$\boxed{t_C = 40\ s}$$

2.4.2. Calcul de la distance BC.

$BC = x_C - x_B = x_C = x(t_C)$

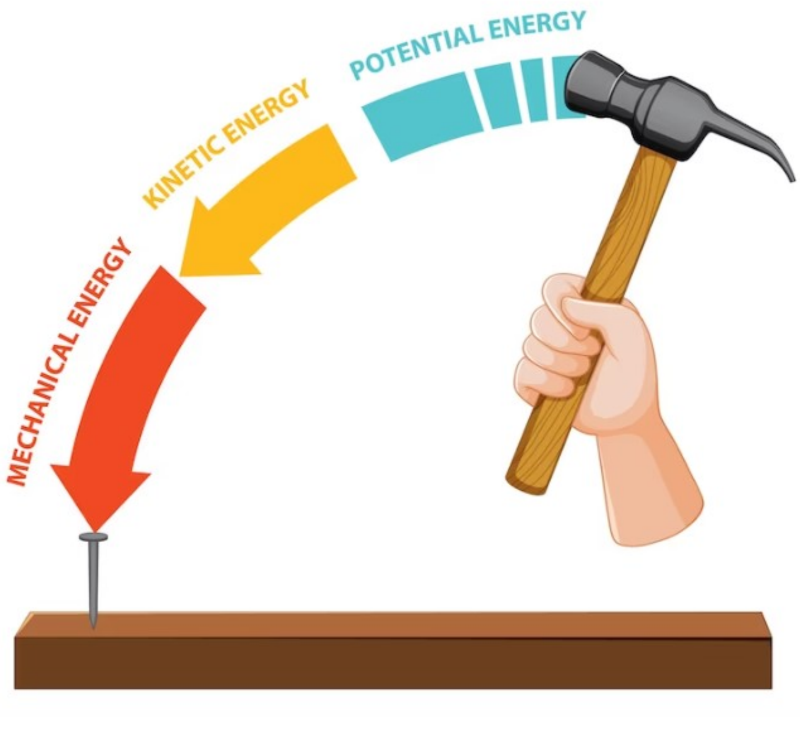
$$\boxed{BC = -\frac{1}{2}\,t_C^2 + V_B t_C}$$

$$BC = -\frac{1}{2}\,40^2 + 40 \times 40$$

$$\boxed{BC = 800\ m}$$

Chapitre IV

Travail et énergie



Chapitre V: Travail et énergie

V.1. Le travail d'une force.

Définition: Le travail élémentaire dW effectué par une force $\vec{F}$ sur une masse ponctuelle m pendant un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est défini par:

$$dW = \vec{F}d\vec{r} = F\ dr\ cos(\vec{F}\ d\vec{r}),$$

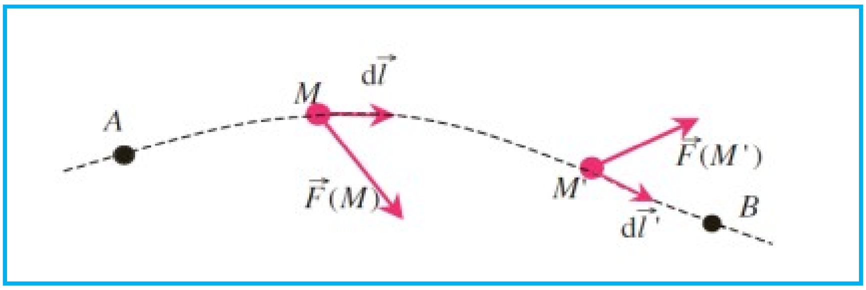


Figure V.1: Travail élémentaire sur un déplacement quelconque

Le travail total W nécessaire pour déplacer m le long d'un chemin C entre deux point A et B est :

$$\boxed{\boldsymbol{W = \int \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}d\vec{r}}}$$

W a pour unité le Joule (J)

Cas particulier: travail d'une force quelconque sur un déplacement rectiligne

Soit M un point matériel qui se déplace sur une ligne rectiligne AB et soumis à une force $\vec{F}$. On définit le travail de la force par :

$$\boxed{\boldsymbol{W = \vec{F}\,\overrightarrow{AB} = F\ \ AB\ \ cos\alpha}}$$

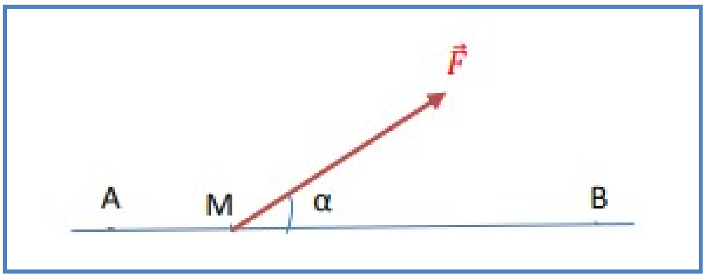


Figure V.2: : Travail d'une force quelconque sur un déplacement rectiligne

Propriétés du travail

- Le travail est une grandeur scalaire, positive, négative ou nulle.
- Seule la composante de la force parallèle au déplacement intervient dans le calcul du travail.
- $[W] = [F]\,[d] = M\,L^2\,T^{-2}$
- Le travail fourni par unité de temps est appelé puissance

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}}$$

La puissance a pour unité le Watt

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{MLT^{-2}L}{T}$$

$$\boxed{[P] = M\,L^2T^{-3}}$$

V.2. Énergie cinétique

Définition

Afin d'accélérer une masse ponctuelle et l'amener à une vitesse définie, on doit fournir du travail. Ce travail est alors emmagasiné dans cette masse ponctuelle sous la forme d'énergie cinétique

$$W = \int \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\,\vec{v}\,dt$$

$$W = \int m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}\,m\int d(\vec{v}\,\vec{v})$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\,m\,(v_2^2 - v_1^1) = E_{c2} - E_{c1}}$$

Avec $E_c = \frac{1}{2}m\,v^2$ est l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique:

$$\boxed{W = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c.}$$

La variation en énergie cinétique d'une masse ponctuelle pendant un temps quelconque est égal au travail fourni à cette masse pendant ce temps

V.3 Forces conservatives ou force dérivant d'un potentiel:

Une force est dite **conservative** lorsque le travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi par son point d'action. Si ce n'est pas le cas elle alors dite **non-conservative**.

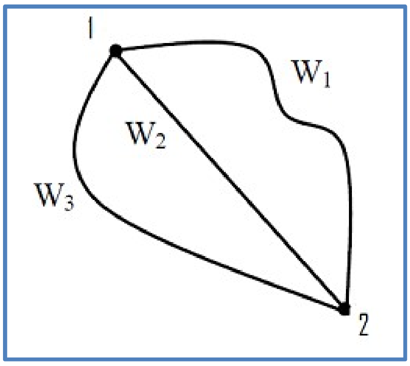


Figure V.3: Travail suivant trois chemins différents

$$W_1 = W_2 = W_3$$

Si la force est conservative, on dira que le chemin est fermé et W est donné par l'expression:

$$\boxed{\boldsymbol{W = \oint \vec{F}\, d\,\vec{r} = 0}}$$

V.4. L'énergie potentielle

En général, une énergie qui ne dépend que de la position du corps dans l'espace et ne dépend pas de son mouvement est appelée énergie potentielle.

V.4.1. Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur, transférée pour augmenter la hauteur d'un objet de h est donnée par $E_p = mgh$, où m est la masse de l'objet et g est l'intensité du champ gravitationnel à la position de l'objet.

Si m est mesurée en kilogrammes, h en mètres, et g en newtons par kilogramme (N/kg) ou mètres par seconde carrée (m/s^2), alors E_p est mesurée en joules

Variation de l'énergie potentielle de pesanteur:

L'énergie potentielle est une fonction des coordonnées de l'espace telle que la différence entre ses valeurs initiale et finale soit égal au travail fourni au corps pour le déplacer d'un point à un autre.

$$W_{grav} = \int \vec{F}\ d\vec{r} = \vec{F} d\,\vec{r} = -mg\,(h_2 - h_1)$$

$$W_{grav} = -m\,g\,h_2 + mg\,h_1$$

$$- W_{grav} = E_{p2} - E_{p1}$$

$$\Delta E_P = - W_{grav}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta E_P = - W_{grav}}}$$

V.4.2. Énergie potentielle élastique

Un ressort tendu constitue, comme une masse soulevée, une réserve d'énergie.

La force de rappel d'un ressort est F = −kx. Le travail fourni, quand l'allongement du ressort passe de x_1 à x_2, est :

$$W_{elast} = \int_{x1}^{x2} F\, dx = - \int_{x1}^{x2} k\, x\, dx$$

$$W = - \frac{1}{2} k \left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{W = \frac{1}{2} k\, x_1^2 - \frac{1}{2} k\, x_3^2}}$$

On définit alors l'énergie potentielle d'un ressort par

$$\boxed{\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2} k\, x^2.}}$$

Variation de l'énergie potentielle élastique

Elle est égale au travail qu'il a fallu fournir pour amener le ressort de sa position de repos à son élongation finale x

$- W_{elast} = E_{p2} - E_{p1}$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta E_P = - W_{elast}}}$$

V.5. Expression du champ de force conservative à partir de l'énergie potentielle

On sait que: $dW = -dE_p$

$$dW = \vec{F}\, d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

$$dE_p = - \vec{F}\, d\vec{r} = -\left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz\right)$$

$$E_p(x, y, z) = f(x, y, z)$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{\partial E_p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial E_p}{\partial Y}\,dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,dz$$

Donc:

$$F_x = -\frac{\eth E_p}{\partial x}\ ;\ F_y = -\frac{\eth E_p}{\partial y}\ ;\ F_z = -\frac{\eth E_p}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathbf{E_p} \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p}$$

V.6. Energie mécanique totale ou énergie totale:

L'énergie mécanique désigne l'énergie d'un système emmagasinée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle mécanique.

$$\boxed{E_T = E_C + E_P = E_m}$$

V.7. Principe de la conservation de l'énergie totale:

Dans un champ de force conservative, l'énergie totale se conserve

$$E_{TA} = E_{TB}$$

$$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$$

Le travail d'une force conservative d'un corps se déplaçant de A à B est donnée par:

$$\begin{cases} W_{AB} = \Delta E_c = E_{CB} - E_{CA} \\ W_{AB} = \Delta E_p = E_{PB} - E_{PA} \end{cases}$$

D'où:

$$E_{CB} - E_{CA} = E_{PB} - E_{PA} \Rightarrow E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$$

$$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$$

$$E_{TA} = E_{TB}$$

On dira que l'énergie totale se conserve.

L'énergie mécanique d'un système soumis uniquement à l'action de forces conservatives est conservée.

Le théorème de l'énergie totale stipule que :

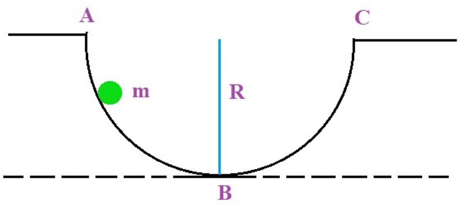
«La variation de l'énergie totale entre un point finale et un point initial est égale au travail des forces non conservatrices. On parle de la non conservation de l'énergie. Dans le cas où on n'a que les forces conservatrices, l'énergie se conserve, l'énergie totale de l'état initial est égale à l'énergie totale de l'état final».

$$\boxed{\boldsymbol{W_{A-B}\left(\vec{F}_{\text{non-conservatice}}\right) = E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_M}}$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Un point matériel de masse m = 2 kg glisse sans frottements à l'intérieur d'une cuve semi-circulaire ABC de rayon R = 80 cm. On le lâche au point A sans vitesse initiale.



1- Calculer sa vitesse au point B

2- A quelle hauteur remonte t-il

Solution:

1. La vitesse au point B

$$E_T = Cste$$

$$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$$

$$mgh_A = \frac{1}{2} m\, v_B^2 \implies v_B = \sqrt{2g\, h_A}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v_B = \sqrt{2g\, h_A}}}$$

$$v_B = \sqrt{(2) \times (10) \times (0.8)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v_B = 4 m.s^{-1}}}$$

2. La hauteur maximale:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_{max}$$

A la hauteur maximale $v_D = 0\ m.s^{-1}$

D'où: $h_{max} = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{(4)^2}{2\times 10} = 0.8\ m$

$$\boxed{\boldsymbol{h_{max} = \frac{v_B^2}{2g} = 0.8\ m}}$$

La masse (m) arrive a une hauteur maximale au point C: $\boldsymbol{h_{max} = R}$

Exercice 2:

Une force conservative $\vec{F} = (6\,x - 12)\vec{\imath}\ (N)$, ou x est exprimée en mètre, agit sur une particule en mouvement le long de l'axe x. L'énergie potentiel U associée avec cette force correspond a une valeur de 27 joules a $x = 0$.

1. Ecrire l'expression de U en fonction de x.

2. Quelle est la valeur maximale de l'énergie potentielle U ?

3. Quelles sont les valeurs de x pour que l'énergie potentielle U soit nulle ?

Solution:

1. L'expression de U en fonction de x.

Une force est dite conservative si elle dérive d'un potentiel

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$$

$$F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{dU}{dx}\vec{\imath} + \frac{dU}{dy}\vec{\jmath} + \frac{dU}{dz}\vec{k}\right)$$

$\Longrightarrow \quad F_x\vec{\imath} = -\frac{dU}{dx}\vec{\imath} \Longrightarrow dU = -F_x.dx$

$\Longrightarrow U = -\int F_x.dx = -(3x^2 - 12\,x + C) = -3x^2 + 12\,x - C$

Détermination de la constante d'intégration C :

$U(0) = 27 \Longrightarrow -3(0)\,2 + 12(0) - C = 27 \Longrightarrow C = 27$

$$\boldsymbol{U(x) = -3x^2 + 12x + 27}$$

2-Détermination de la valeur maximale de U

$$\frac{dU}{dx} = -6x + 12 = 0 \implies \mathrm{x} = 2\mathrm{m}$$

$U_{max} = U(2) = 3(2)\ 2 + 12(2) + 27 = 39\ Joules$

$$\mathbf{x = 2m}$$

$$\boldsymbol{U_{max} = 39\ Joules}$$

3. Les valeurs de x pour que U soit nulle

$(x) = -3x^2 + 12x + 27 = 0$

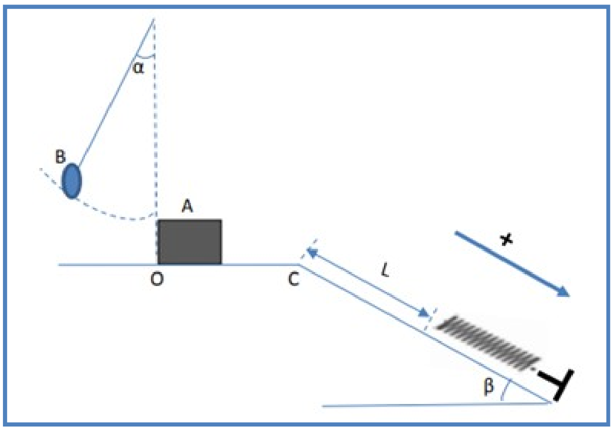
La résolution de cette équation permet de trouver deux solutions x_1 et x_2:

$x_1 = 2 - \sqrt{13} \approx -1.60$ $x_2 = 2 + \sqrt{13} \approx 5.60$

La solution possible est: $x_2 \approx 5.60$ m

Exercice 3:

Une boule B de masse m, accrochée à un fil inextensible de longueur l, est écartée de sa position d'équilibre d'un angle α et est abandonnée sans vitesse initiale (voir la figure ci-dessous). Durant son passage par la position verticale, la boule percute un corps A de même masse et s'arrête. Le corps A glisse sur une piste OCD. La partie OC = d est un plan horizontal rugueux de coefficient de frottement dynamique μ_d. La portion CD = L, parfaitement lisse, est inclinée d'un angle β = 30° par rapport à l'horizontale.



1. Dessiner les forces exercées sur le corps A en une position entre O et C

2. Calculer l'accélération du corps A entre O et C. Déduire la nature du mouvement.

3. Donner l'expression de la vitesse de la boule B juste avant de toucher le corps A

4. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, calculer la vitesse du corps A après l'interaction.

5. Exprimer la vitesse du corps A au point C en fonction de g, l, d, α et μ_d.

6. De quel angle α_m doit-on écarter la boule B pour que le corps A arrive en C avec une vitesse nulle.

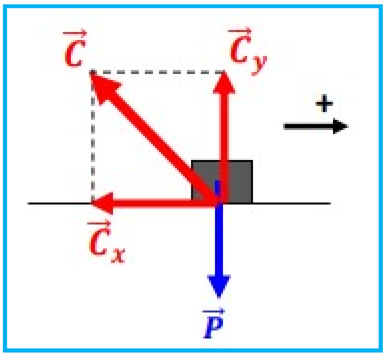
7. A partir du point C, le corps A aborde la partie CD avec une vitesse nulle. Il arrive sur un ressort parfait de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Représenter les forces exercées sur A au cours de la compression du ressort.

8. Quelle est la valeur de la compression maximale du ressort.

On donne : m = 200g, d = 1m, l = 10cm, L = 1m, $\mu_d = 0.1$, g = 10m/s^2 et k = 140N/m.

Solution:

1. Figure:



2. Calcul de l'accélération du corps A entre O et C.

$$P + \vec{C} = m\vec{a}$$

Projection: $\begin{cases} Ox: -\ C_x = m\,a \\ Oy: \quad C_y = m\,g \end{cases} \Rightarrow a = -\mu_d\,g$

a = (-0.1). 10

a = -1 m.s^{-2}

Déduction de la nature du mouvement

Nature du mouvement: a.v < 0 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{M.R.U.D}$

3. Pas de frottement:

$$E_{Ti} = E_{Tf} \Longrightarrow \frac{1}{2} m\, V_B^2 = mgl(1 - cos\alpha) \Longrightarrow V_B = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}$$

$$\boldsymbol{V_B = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}}$$

4. Conservation de la quantité de mouvement:

$$m\vec{V}_B + 0 = 0 + m\vec{V}_A \Rightarrow V_B = V_A = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}$$

$$\boldsymbol{V_B = V_A = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}}$$

5. Vitesse au point C:

$$\Delta E_T = W(\vec{C}_x) \Longrightarrow \frac{1}{2} m\, V_C^2 - \frac{1}{2} m\, V_A^2 = -C_x\,.OC = -\mu_d.m.g.d$$

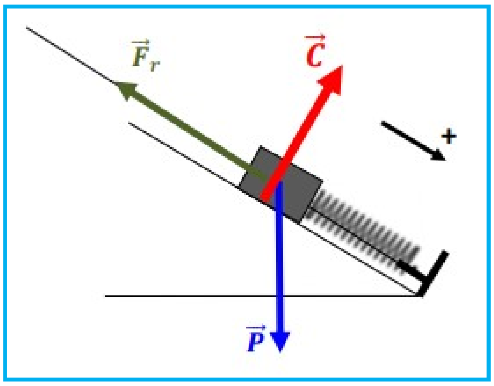
$$\boldsymbol{V_C = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha) - 2\,\mu_d.g.d}}$$

6. L'angle α_m

$$V_C = 0 \Longrightarrow cos\alpha_m = 1 - \frac{\mu_d d}{l} \Longrightarrow \alpha_m = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha_m = \frac{\pi}{2}}$$

7. Forces:



8. Compression maximale:

$$E_{T1} = mgh = mg\,(L+x)\,sin\beta \;\; et \;\; E_{T2} = \frac{1}{2}\,K\,x^2$$

Pas de frottements:

$$mg\,(L+x)\,sin\beta \;=\; \frac{1}{2}\,K\,x^2 \;\Rightarrow 70\,x^2 - x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 12.7\ m}$$

Exercice 4:

La barre AB, considérée dans ce problème est rigide et homogène.

Elle est conductrice et mesure AB = 2 l = 20 cm, sa masse est M= 100 g.

On prendra g = 10m.s^{-2} et π^2 =10

Les parties A et B sont largement indépendantes:

Partie A:

Les extrémités A et B de la barre sont soudées aux extrémités inferieurs de deux ressorts élastiques, linéaires, à spires non jointives, identiques, de même longueur à vide, de même raideur k = 25 N.m^{-1}. Les extrémités des ressorts sont fixés en deux points M et N distantes de 2l ; O étant la position du centre d'inertie de la barre à l'équilibre. Ce point O est également le niveau de référence, à énergie potentielle de pesanteur nulle; c'est aussi l'origine des altitudes.

1. Calculer l'allongement et Δl_E de chaque ressort et l'énergie potentielle du système (barre, ressorts, terre) à l'équilibre de la barre.

2. On abaisse la barre parallèlement à elle-même, d'une longueur a = 4 cm de sa position d'équilibre puis on l'abandonne.

a. Etablir l'expression de l'énergie mécanique du précédent système à un instant t quelconque ou la barre s'écarte de x de sa position d'équilibre animée d'une vitesse $\dot{x}$ en fonction de x ,$\dot{x}$, M, k et Δl_E

b. Montrer que la barre forme un système conservatif (ou que le système (barre, ressorts, terre) est isolé). En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de translation de la barre et former l'équation horaire du mouvement de la barre.

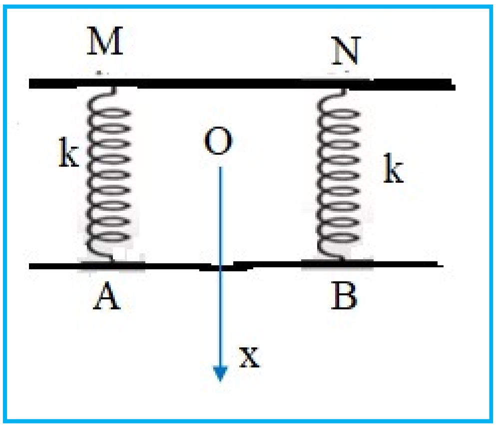
c. Donner l'expression de la tension instantanée T = f(T) de chaque ressort. A quels instants est-elle nulle?

Partie B:

En réalité, la barre est soumise à une force de frottement $\vec{f} = -h\,\vec{v}$, h =0.4 u.S.I. a l'instant t= 0, x0 = 4 cm et $\dot{x}$ = 0.

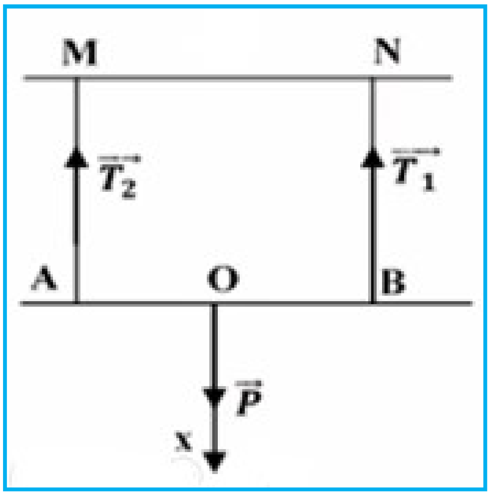
1. En posant $\lambda = \frac{h}{M}$, etablir la nouvelle équation différentielle. Calculer la pseudo-période T.

2. Déterminer la loi horaire du mouvement.



Solution:

1. Calculer l'allongement et Δl_E de chaque ressort et l'énergie potentielle du système (barre, ressorts, terre) à l'équilibre de la barre.



Allongement à l'équilibre:

à l'équilibre:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Par projection selon Ox:

$$-T_1 - T_2 + Mg = 0$$

$$\Longrightarrow -k\,\Delta l_E - k\,\Delta l_E + Mg = 0$$

$$\Longrightarrow 2\,k\,\Delta l_E = Mg$$

$$\boxed{\Longrightarrow \boldsymbol{\Delta l_E = \frac{Mg}{2\,k}}}$$

A.N:

$$\Delta l_E = \frac{0.1 \times 10}{2 \times 25} = 0.02\ m$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta l_E = 2\ cm}}$$

Energie potentielle du système à l'équilibre:

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

A l'équilibre:

$E_{pp} = 0 \quad \Longrightarrow \; E_p = \frac{1}{2} k\,\Delta {l_E}^2 + \frac{1}{2} k\,\Delta {l_E}^2 = k\,\Delta {l_E}^2$

$$\boxed{\boldsymbol{E_p = k\,\Delta {l_E}^2}}$$

A.N: $E_p = 25 \times 0.02^2 = 10^{-2}\,J$

$$\boxed{\boldsymbol{E_p = 10^{-2}\,J}}$$

2.a. Etablir l'expression de l'énergie mécanique du précédent système à un instant t quelconque ou la barre s'écarte de x de sa position d'équilibre animée d'une vitesse $\dot{x}$ en fonction de x ,$\dot{x}$, M, k et Δl_E

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

$$E_m = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + Mg(-x) + \frac{1}{2} k(\Delta l_E + x)^2 + \frac{1}{2} k(\Delta l_E + x)^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 - Mgx + k(\Delta l_E + x)^2}}$$

2.b. Donner l'expression de la tension instantanée T = f(T) de chaque ressort. A quels instants est-elle nulle?

Le système n'est soumis à aucune force extérieure, donc le système est isolé. L'énergie mécanique du système se conserve ; on dit que le système est conservatif.

$$\Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - Mgx + \ k(\Delta l_E + x)^2 = cste$$

$$\Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}M\ \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} - \ Mg\frac{dx}{dt} + \ k\ \frac{d((\Delta l_E + x)^2)}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = M\ \dot{x}\ddot{x} - Mg\ \dot{x} + 2k\ (\Delta l_E + x)\dot{x} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = \dot{x}\ (M\ \ddot{x} - Mg + 2k\Delta l_E + 2k\ x\ ) = 0$$

Or: $-Mg + \ 2k\Delta l_E = 0$ équation d'équilibre:

$$\Longrightarrow \ \ddot{x} + \frac{2\ k}{M}\ x = 0$$

On pose:

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{M}$$

D'où l'équation différentielle:

$$\ddot{x} + \ \omega_0^2 x = 0$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = \ x_m cos(\omega_0 t + \ \varphi)$$

A t= 0s, x= $x_m \Rightarrow \varphi = 0$

La solution de cette équation différentielle devient:

$$x(t) = \ x_m cos(\omega_0 t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{M} \ \Longrightarrow \ \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

AN: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\times25}{0.1}} = \ 22.36\, rad.s^{-1}$

La solution de cette équation différentielle du mouvement:

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = \ 0.04\, cos(22.36\ t)\ \ (m)}}$$

2.c Donner l'expression de la tension instantanée T = f(T) de chaque ressort. A quels instants est-elle nulle

Appliquons le PFD:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = M\vec{a}$$

Projection suivant Ox: $-T_1 - T_2 + Mg = Ma = M\ddot{x} \Longrightarrow -2\,T + Mg = M\ddot{x}$

Donc: $T = \frac{M}{2}(g - \ddot{x})$

Avec: $\dot{x} = -x_m\omega_0 sin(\omega_0 t)$ et $\ddot{x} = -x_m{\omega_0}^2 cos(\omega_0 t)$

On trouve:

$$\boldsymbol{T = \frac{M}{2}(g + x_m{\omega_0}^2 cos(\omega_0 t))}$$

$$T = \frac{M}{2}(g + x_m{\omega_0}^2 cos(\omega_0 t))$$

$$T = 0 \Leftrightarrow (g + x_m{\omega_0}^2 cos(\omega_0 t)) = 0$$

$$\Rightarrow cos(\omega_0 t) = -\frac{g}{x_m{\omega_0}^2} = -\frac{Mg}{a \times 2k}$$

AN:

$$cos(\omega_0 t) = -\frac{1}{0.04 \times 50} = -\frac{1}{2} \Rightarrow cos(\omega_0 t) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_0 t = \frac{2\pi}{3} + 2\,n\,\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(\frac{1}{3} + n\right) \quad avec\ n \geq 0$$

$$\boldsymbol{t = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(\frac{1}{3} + n\right) \quad avec\ n \geq 0}$$

Partie B:

1. En posant $\lambda = \frac{h}{M}$, etablir la nouvelle équation différentielle. Calculer la pseudo-période T.

La barre est soumise à une force de frottement, $\vec{f} = -h\vec{v}$

Appliquons le PFD:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{P} = M\vec{a}$$

Par projection selon Ox:

$$-T_1 - T_2 - f_1 - f_2 + P = Ma = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow -2T - 2f + Mg = Ma = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow -2\,k\,(\Delta l_E + x) + Mg - 2h\,\dot{x} = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow -2\,k\Delta l_E - 2\,kx + Mg - 2h\,\dot{x} = M\ddot{x}$$

Or: $\Rightarrow -2\,k\Delta l_E + Mg = 0$

$$\ddot{x} + \frac{2h}{M}\dot{x} + \frac{2k}{M}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\,\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\boldsymbol{\ddot{x} + 2\,\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0}$$

Avec:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{h}{M} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{2k}{M}}$$

Comme: $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$, zlors cette equation differentielle caractérise un mouvement oscillatoire rectiligne amorti.

Valeur de la pseudo-période T:

$$\boxed{\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{M}-\left(\frac{h}{M}\right)^2}}}}$$

AN: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{2\times 25}{0.1}-\left(\frac{0.44}{0.1}\right)^2}}$

$$\boxed{\boldsymbol{T = 0.286\ s = 286\ ms}}$$

2. Déterminer la loi horaire du mouvement.

Equation différentielle du système non harmonique: $\ddot{x} + 2\,\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

La solution de l'équation différentielle avec Δ<0, s'écrit sous la forme:

$$x(t) = e^{-\lambda}\ \cos\left(\Omega\, t + \varphi\right)$$

Avec: $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Longrightarrow \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x_m e^{-\lambda t}\cos\left(\Omega\, t + \varphi\right) - \Omega\, x_m e^{-\lambda t}\sin\left(\Omega\, t + \varphi\right)$$

Conditions initiales: $x(t = 0) = x_0 = x_m \cos\varphi$

et $\dot{x}(t = 0) = -\lambda x_m \cos\left(\varphi\right) - \Omega\, x_m \sin\left(\varphi\right) = 0$

$$-\lambda x_m \cos\left(\varphi\right) = \Omega\, x_m \sin\left(\varphi\right)$$

$$tan\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$\begin{cases} x_0^2 = x_m^2\cos^2\varphi \\ \lambda^2 x_m^2 \cos^2\varphi = \Omega^2 x_m^2 \sin^2\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0^2 = x_m^2\cos^2\varphi \\ \lambda^2 x_m^2 \cos^2\varphi = \left(\omega_0^2 - \lambda^2\right) x_m^2 \sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_0^2 = x_m^2\cos^2\varphi \\ \lambda^2 x_m^2 = \omega_0^2\, x_m^2 \sin^2\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0^2 = x_m^2\cos^2\varphi \\ \dfrac{\lambda^2 x_m^2}{\omega_0^2} = x_m^2 \sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x_m^2 = x_0^2 + \frac{\lambda^2 x_m^2}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x_m^2 = x_0^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\lambda^2}\right) = x_0^2\left(\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right)$$

$$x_m = x_0\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)$$

Equation différentielle du système non harmonique: $\ddot{x} + 2\,\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

La solution de l'équation différentielle avec Δ<0, s'écrit sous la forme :

$$x(t) = x_m\,e^{-\lambda t}\cos(\Omega\,t + \varphi)$$

$\omega_0^2 = \frac{2k}{M} = \frac{2\times 25}{0.1} = 500\,rad.s^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{500} = 22.36\,rad.s^{-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{M} = \frac{0.44}{0.1} = 4.4\,rad.s^{-1}$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} = \sqrt{500-4.4^2} = 21.92\,rad.s^{-1}$$

$x_m = x_0\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right) = x_m = 0.04\left(\frac{22.36}{21.92}\right) = 4.08 \times 10^{-2}$ m

$$tan\varphi = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{4.4}{21.92} = -0.2 \Rightarrow \varphi = -0.197\,rad = -11{,}29\,°$$

L'équation horaire:

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = 4.08 \times 10^{-2}\,e^{-4.4\,t}\cos(21.92\,t - 0.197)\ \ \text{(m)}}}$$

Références:

1. Mécanique du point Michel Henry Maître de conférences à l'IUFM des Pays de Loire (Le Mans) Agrégé de physique Nicolas Delorme Maître de conférences à l'université du Maine (Le Mans) Dunod 2008

2. Mécanique du point matériel (Physique I) Cours avec Exercices corrigés Dr Belaroussi Université des sciences et de la technologie USTO-MB Oran 2020

3. Mécanique du point matériel, recueil d'exercices avec rappels de cours, premiére année SM, MI, ST, STU Louail Ayachi, Roumili Abdekrim, Maouche Djamel, Mosbah Ammar, Université Sétif 1 office des publications universitaires 2016

4. Cinématique et dynamique du point matériel (Cours et exercices corrigés) École Normale Supérieure d'Oran (ENSO) Année Universitaire : 2018/2019

Mécanique du point matériel Cours et exercices Élaboré par : Dr ZEBBAR Souhila CENTRE UNIVERSITAIRE EL-WANCHARISSI DE TISSEMSILT 2018

PolycopiÈ de cours : Physique I "MÈcanique du point matÈriel" UniversitÈ Yahia FarËs de MÈdÈa : Dr. RADJAI Missoum AnnÈe universitaire: 2019/2020