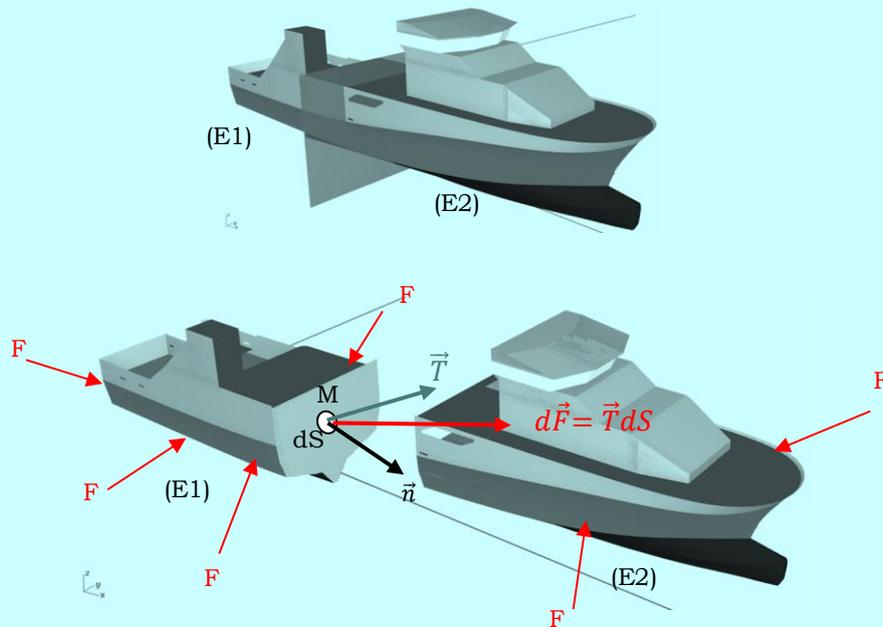




Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université Des sciences et de la Technologie MB d'Oran
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Maritime

Polycopié de

Mécanique des Milieux Continus



Cours et exercices corrigés

Fait par :

Dr. ERROUANE Lahouaria

Avril 2023.

TABLE DE MATIERE

TABLE DE MATIERE.....	I
INTRODUCTION GENERALE.....	1

Chapitre 1 : Etat de contraintes

1. Rappel sur la notion des contraintes.....	2
1.1 Notion des contraintes.....	2
1.2 Notion des forces.....	4
1.3 Tenseur des contraintes.....	4
1.4. Equation d'équilibre.....	6
1.5. Propriétés de tenseur de contraintes.....	8
1.6. Calcul des contraintes dans le plan.....	9
1.7. Contrainte principales normales.....	10
1.8. Contrainte tangentielle maximale.....	11
1.9. Détermination des contraintes principales par le Cercle de Mohr.....	13
1.10. Représentation octaédrique.....	17

Chapitre 2 : Etat de déformations

2. Introduction.....	20
2.1 Description cinématique.....	20
2.2 Déplacement et déformation d'un domaine élémentaire.....	21
2.3 Relation entre déformation et déplacements.....	24
2.4 Décomposition de la déformation pure en dilatation et glissement (déformation direct et de cisaillement).....	26
2.5 Interprétation des coefficients de tenseur de déformation.....	28
2.6 Détermination des déformations principales.....	29
2.7 Décomposition de tenseur de déformation en partie sphérique et déviatrice.....	30
2.8 Représentation octaédrique.....	31
2.9 Représentation géométrique (graphique) de l'état de déformation en un point.....	33

Chapitre 3 : Comportement élastique linéaire

3. Introduction.....	36
3.1 Essais de traction.....	36
3.2 Lois de HOOKE généralisée.....	38
3.3 Lois de HOOKE inversée (équation de LAME).....	40
3.4 Notion d'anisotropie.....	41
3.4. 1 Anisotropie.....	42
3.4. 2 Monotropie (monoclinique).....	43
3.4. 3 Orthotrope.....	43
3.4. 4 Isotropie.....	44
3.5 Influence de la température.....	44
3.6 Etat de contraintes planes.....	46
3.7 Etat de déformations planes.....	47

Chapitre 4 : Exercices et corrections

Contraintes dans un solide.....	50
Tenseur de déformation.....	62
Comportement élastique linéaire.....	79
Références bibliographique.....	99

INTRODUCTION GENERALE

La mécanique des solides parfait étudie les mouvements des corps solides et de leur assemblage, elle nomme **solide parfait** tout ensemble des particules matérielles mourant à des distances mutuelles rigoureusement constantes.

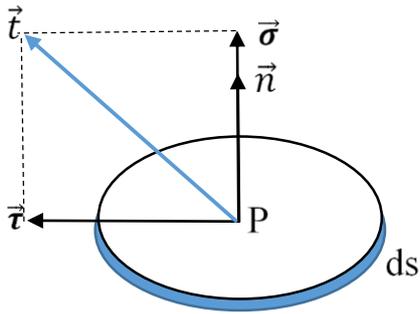
En réalité, les solides sont déformables, i.e. que sous l'action des certaines sollicitations (efforts externes ou internes, variations de température), les distances interarticulaires peuvent varier.

Nous appelons milieu continu solide un domaine de l'espace occupé par un solide et où les caractéristiques physiques du matériau uniformes (masse volumique, conductivité thermique, coefficient de dilatation thermique, module d'élasticité, chaleur spécifique...ets), un tel milieu solide est donc homogène.

Nous savons bien que la matière à une structure discontinue à l'échelle moléculaire, mais à l'échelle macroscopique où nous nous plaçons, la matière apparait bien comme continue, et nous n'avons pas à entrer dans une théorie fine, moléculaire ou cristalline, domaine des forces de cohésion.

Le volume élémentaire sur lequel nous raisonnons contient donc un très grand nombre de molécules, tout en ayant des dimensions suffisamment faibles pour pouvoir être considérée mathématiquement comme infiniment petit.

Chapitre 1 : Etat de contrainte



1. Rappel sur la notion des contraintes.....	2
1.1 Notion des contraintes.....	2
1.2 Notion des forces.....	4
1.3 Tenseur des contraintes.....	4
1.4. Equation d'équilibre.....	6
1.5. Propriétés de tenseur de contraintes.....	8
1.5.1 Bases propres pour tenseur de contraintes.....	8
1.5.2 Invariants scalaires attachés au tenseur.....	8
1.5.3 Calcul des contraintes principales $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$	8
1.6. Calcul des contraintes dans le plan.....	9
1.7. Contrainte principales normales.....	10
1.8. Contrainte tangentielle maximale.....	11
1.9. Détermination des contraintes principales par le Cercle de Mohr.....	13
1.9. 1 Décomposition de Σ en partie sphérique et déviatrice.....	14
1.10. Représentation octaédrique.....	17

1. Rappel sur la notion des contraintes

1.1 Notion des contraintes :

Soit un corps en état d'équilibre, sous l'action des forces extérieures P_1, P_2, P_3 , il produit des forces intérieures qui maintiennent le corps en équilibre. Isolons à l'intérieur d'un solide un élément de fibre de centre P et soit \vec{n} un unitaire sur son axe, la section droite ds de centre P sépare la fibre en partie amont (I) et partie aval (II).

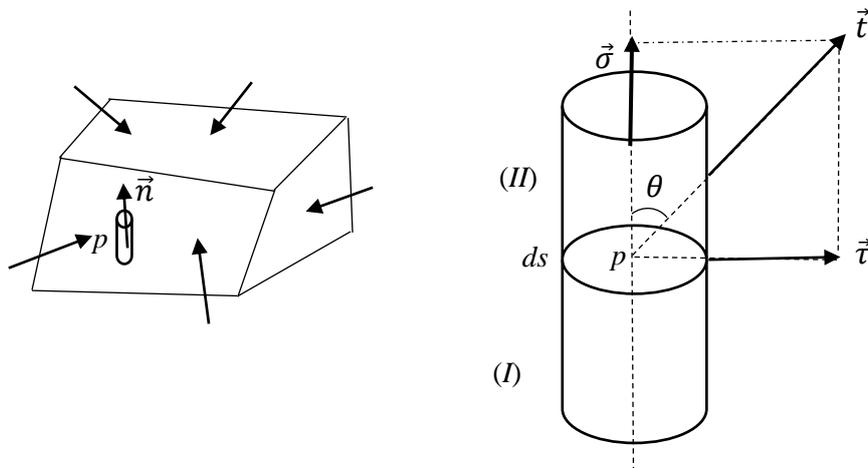


Figure 1. Solide en état d'équilibre

Le solide étant chargé, ses particules exercent des efforts les unes sur les autres. La partie (II) exerce ainsi sur la partie (I). Suivant la section ds un ensemble des forces on note $\vec{t} ds$ la résultante. Le vecteur \vec{t} grandeur vectorielle physique ayant les dimensions d'une force surfacique est le vecteur contrainte en P relatif à \vec{n}

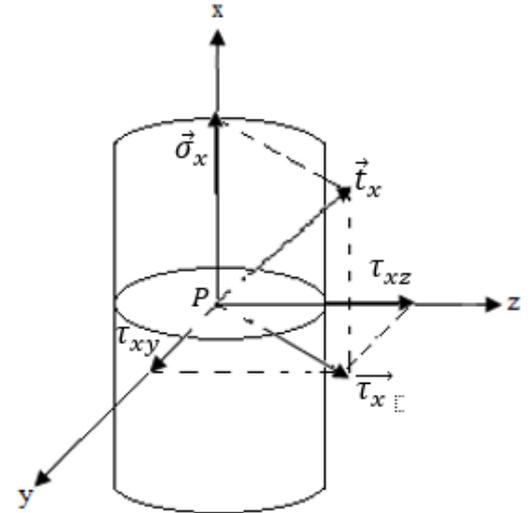
- La projection de \vec{t} sur la norme \vec{n} , produit contrainte normale $\vec{\sigma}$.
- La projection de \vec{t} sur la section AB, produit contrainte tangentielle $\vec{\tau}$ (contrainte de cisaillement).

Si l'angle θ de \vec{n} et \vec{t} est aigu, on $\sigma > 0$, la fibre est tendue, on a une tension (traction), si θ est ? on $\sigma < 0$, la fibre est comprimée (compression).

- Pour $\theta = 0$, $\tau = 0$, , la fibre est en état de **traction pure** ;
- Pour $\theta = \pi$, $\tau = 0$, , la fibre est en état de **compression pure** ;
- Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sigma = 0$, , la fibre est en état de **cisaillement pure**.

L'ensemble des vecteurs contraintes en P relatifs à toutes les directions, \vec{n} constitue la faisceaux des contraintes en P.

Considérons le repère orthonormé $\{P, x, y, z\}$, où P est centre d'un élément de fibre, d'axe $x'x$; notons \vec{t}_x le vecteur contrainte en P relatif à cette direction, $\vec{\sigma}_x$, sa composante normale et $\vec{\tau}_x$ sa composante tangentielle. $\vec{\tau}_x$ étant située dans le plan (yPz) , notons τ_{xy} et τ_{xz} ses composantes sur les axes P_y et P_z . σ_x , τ_{xy} et τ_{xz} désigne les trois (03) composantes de \vec{t}_x .



On définit de même en P :

- Pour une fibre d'axe $y'y$, le vecteur contrainte \vec{t}_y de composantes τ_{yx} , σ_y et τ_{yz} .
- Pour une fibre d'axe $z'z$, le vecteur contrainte \vec{t}_z de composantes τ_{zx} , τ_{zy} et σ_z

Pour les autres faces, on obtient finalement :

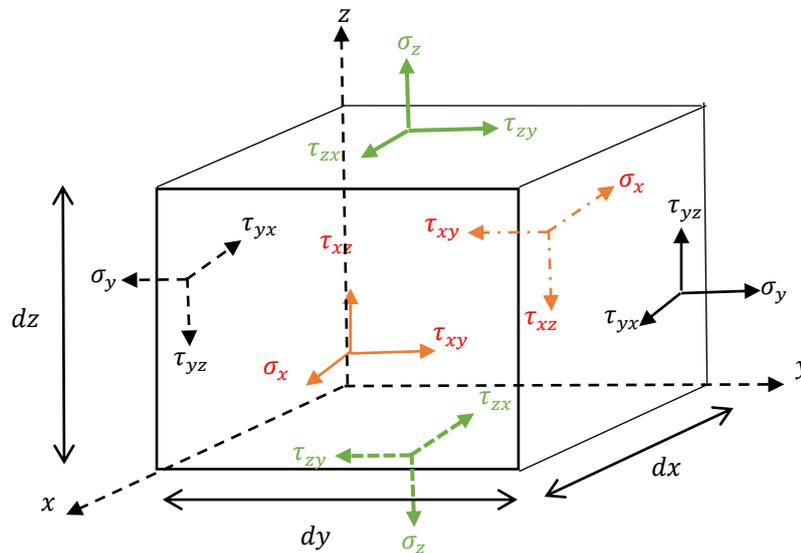


Figure 2. Cube

De cette figure, on obtient trois contraintes normales σ_x , σ_y et σ_z et six contraintes tangentielles τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{xz} et τ_{zx}

1.2 Notion des forces

Un corps peut être soumis à deux types des forces :

- Forces surfaciques : ceux sont des forces de contact, ces forces sont dues à une pression d'un corps sur l'autre ou une pression hydrostatique, elles s'expriment en forces par unité d surface $\left[\frac{N}{m^2}\right]$.
- Forces volumiques : sont réparties sur tout le volume du corps, elles peuvent être due forces gravitationnelles, forces magnétiques où dans le cas d'un corps en mouvement (forces d'inerties) elles s'expriment en forces par unité d surface $\left[\frac{N}{m^3}\right]$.

1.3 Tenseur des contraintes

Considérons un tétraèdre élémentaire formé par les trois plans de coordonnées au point P et par un quatrième plan coupant les trois axes de coordonnées en des points A,B,C voisins de P et situés sur les parties de ces axes (figure) limité par les trois triangles PBC, PCA, PAB unitaires normaux sortant i, j, k respectivement et par un triangle ABC dont la normale unitaire sortante a des cosinus directeur positifs α, β, γ .

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

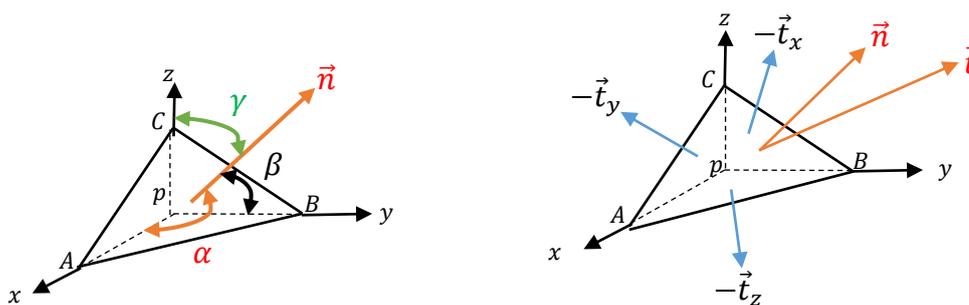


Figure 3. Tétraèdre

Si ds est l'aire du triangle ABC, sa projection sur les trois plans est donnée par :

- PBC $\rightarrow ds \cos \alpha$: cosinus entre \vec{n} et l'axe x
- PCA $\rightarrow ds \cos \beta$: cosinus entre \vec{n} et l'axe y
- PBA $\rightarrow ds \cos \gamma$: cosinus entre \vec{n} et l'axe z

Alors la projection du vecteur de la contrainte résultante \vec{t} sur les trois plans est donnés par :

\vec{t}_x = contrainte résultante suivant l'axe x

\vec{t}_y = contrainte résultante suivant l'axe y

\vec{t}_z = contrainte résultante suivant l'axe z

\vec{t}'_x = contrainte résultante suivant l'axe x'

\vec{t}'_y = contrainte résultante suivant l'axe y'

\vec{t}'_z = contrainte résultante suivant l'axe z'

Les forces de contact s'exercent sur les faces du tétraèdre sont :

- **Face PBC**

$$-\vec{t}_x \cos \alpha ds = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \cos \alpha ds \\ -\tau_{xy} \cos \alpha ds \\ -\tau_{xz} \cos \alpha ds \end{Bmatrix}$$

- **Face PCA**

$$-\vec{t}_y \cos \beta ds = \begin{Bmatrix} -\tau_{yx} \cos \beta ds \\ -\sigma_y \cos \beta ds \\ -\tau_{yz} \cos \beta ds \end{Bmatrix}$$

- **Face PAB**

$$-\vec{t}_z \cos \gamma ds = \begin{Bmatrix} -\tau_{zx} \cos \gamma ds \\ -\tau_{zy} \cos \gamma ds \\ -\sigma_z \cos \gamma ds \end{Bmatrix}$$

- **Face ABC**

$$\vec{t} ds = \begin{Bmatrix} \vec{t}_x ds \\ \vec{t}_y ds \\ \vec{t}_z ds \end{Bmatrix}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow t_x ds - \sigma_x \cos \alpha ds - \tau_{yx} \cos \beta ds - \tau_{zx} \cos \gamma ds = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow t_y ds - \tau_{xy} \cos \alpha ds - \sigma_y \cos \beta ds - \tau_{zy} \cos \gamma ds = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow t_z ds - \tau_{xz} \cos \alpha ds - \tau_{yz} \cos \beta ds - \sigma_z \cos \gamma ds = 0$$

En présentation matricielle :

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

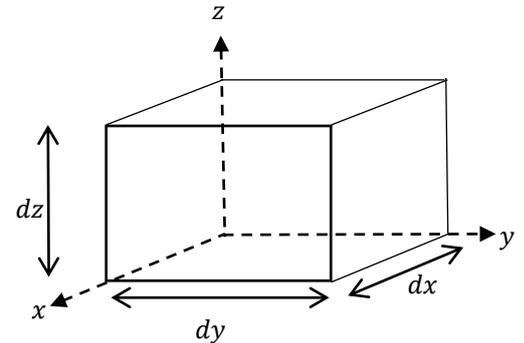
Ou bien sous la forme :

$$\boxed{(\vec{t}) = [\Sigma](\vec{n})}$$

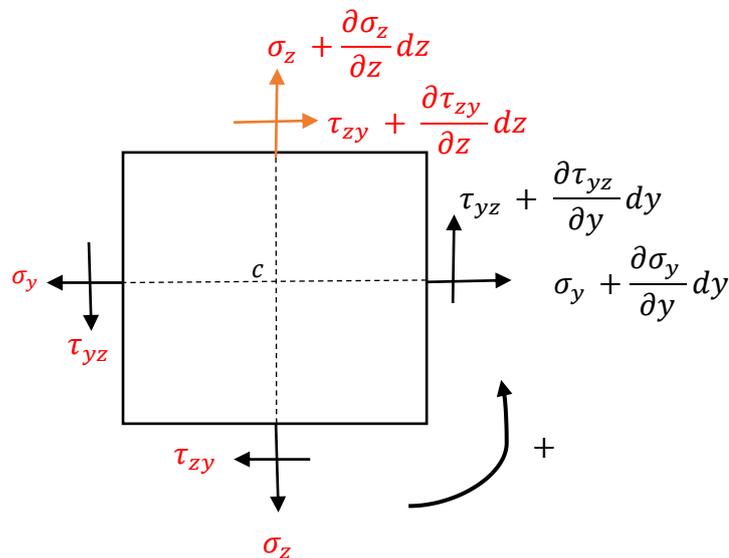
La connaissance du tenseur des contraintes permet de calculer le vecteur dans toute fibres.

1.4 Equation d'équilibre

Pour le cas général tridimensionnel, on considère l'équilibre des forces d'un élément cubique de dimension dx, dy, dz .



Pour démontrer la symétrie des contraintes tangentielles ainsi que la variation différences des contraintes normales, on prend une seule face de cube.



Une contrainte σ_y après une distance dy elle sera : $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$, de même pour σ_x et σ_z

Effectuant la somme des moments autour du point $C = 0$:

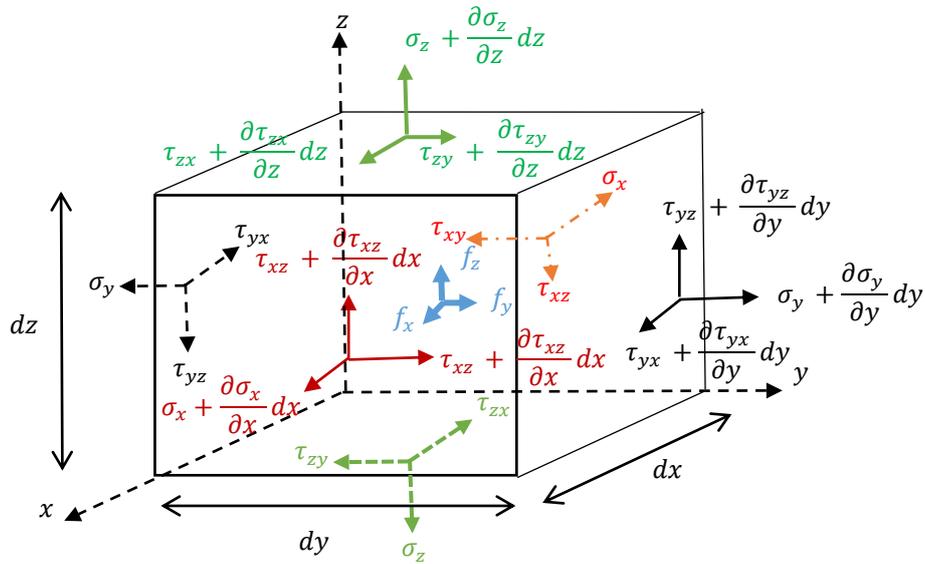
$$\sum M/C = \tau_{yz} (dz dx) \frac{dy}{2} - \tau_{zy} (dy dx) \frac{dz}{2} + \tau_{yz} (dz dx) \frac{dy}{2} - \tau_{zy} (dy dx) \frac{dz}{2} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy^2}{2} dx dz - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz^2}{2} dx dy = 0$$

Négligeant les produits doubles dy^2 , dz^2 on aura :

$$2\tau_{yz} - 2\tau_{zy} = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

De même pour $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ et $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

Prenant maintenant le cas général ; avec la présence les forces volumiques f_x, f_y, f_z (poids propre).



D'après l'équilibre des forces suivant l'axe x , $\sum F_x = 0$. On aura :

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

$$\sigma_x dy dz + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz - \sigma_x dy dz + \tau_{yx} dx dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz - \tau_{yx} dx dz + \tau_{zx} dx dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

Simplifiant $dx dy dz$ on aura : $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$ Equation d'équilibre.

Effectuant la $\sum F_y = 0$ et $\sum F_z = 0$ on obtient les deux autres équations d'équilibres, finalement on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Équations d'équilibres}$$

On peut l'écrire sous forme condensée :

$$\boxed{\overline{\text{div}} \Sigma + \vec{f} = 0}$$

1.5 Propriétés de tenseur de contraintes

1.5.1 Bases propres pour le tenseur de contrainte Σ

Le tenseur Σ étant symétrie, i.e. qu'il existe en P un repère orthonormé $\{P, xyz\}$ au moins, dans lequel la matrice des contraintes est de la forme :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $\Sigma, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ se nomment **Contrainte normales principales** en P, les directions propres P_x, P_y, P_z sont les directions principales des contraintes en point P.

Les éléments de fibres de centre P, orientés suivant ces directions (fibres principales) ne supportent aucun cisaillement et travaillent donc en traction pure ou compression pure.

1.5.2 Invariants scalaires attachés au tenseur Σ

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{trace}[\Sigma]$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$S_2 = (\sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2) + (\sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2) + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)$$

$$S_3 = \det[\Sigma]$$

1.5.3 Calcul du $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$

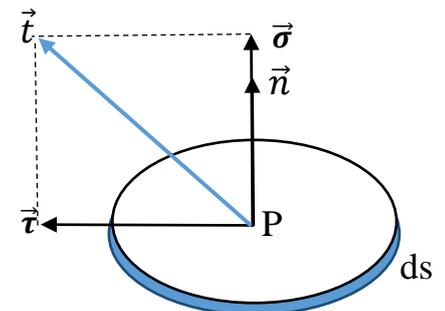
D'après la figure, et la formule $(\vec{t}) = [\Sigma](\vec{n})$ et l'application des opérateurs de projection sur \vec{n} et ds ; on obtient :

- **Projection sur l'axe \vec{n} :**

$$\vec{\sigma} = (\vec{n})(\vec{n})^t [\Sigma](\vec{n})$$

D'où : $\sigma = (\vec{n})^t [\Sigma](\vec{n})$ mesure algébrique de $\vec{\sigma}$ sur \vec{n}

$(\vec{n})(\vec{n})^t$: Opérateur de projection sur \vec{n}



- **Projection sur le plan (ds) :**

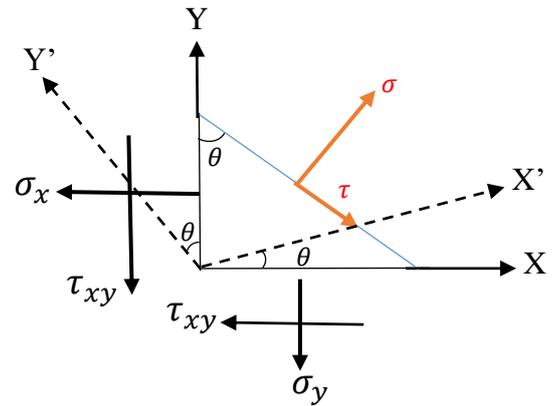
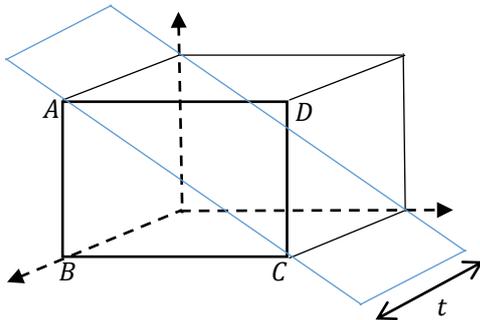
$$\bar{\tau} = -(*n)^2 [\Sigma](\bar{n}) = [\Sigma - \sigma I](\bar{n}) \equiv \Sigma \bar{n} - \sigma \bar{n} \equiv \bar{t} - \bar{\sigma} = \bar{\tau}$$

$$\tau = |(*n)[\Sigma](\bar{n})|$$

$|\bar{\tau}|$ module de $\bar{\tau}$ et $-(*)^2$ se nomme opérateur de projection sur (ds).

1.6 Calcul des contraintes dans le plan

Soit un corps plan d'épaisseur 't'



$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma ACt - \sigma_x ABt \cos \theta - \sigma_y BCt \sin \theta - BCt \cos \theta - \tau_{xy} ABt \sin \theta = 0$$

$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow \sigma ACt - \sigma_x ABt \cos \theta - \sigma_y BCt \sin \theta - \tau_{xy} BCt \cos \theta - \tau_{xy} ABt \sin \theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \tau ACt - \sigma_x ABt \sin \theta - \sigma_y BCt \cos \theta - \tau_{xy} BCt \sin \theta + \tau_{xy} ABt \cos \theta = 0$$

Sachant que :

$$\frac{BC}{AC} = \sin \theta$$

$$\frac{AB}{AC} = \cos \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Simplifiant « t » et divisant par 'AC' :

$$\sigma_\theta - \sigma_x \frac{AB}{AC} \cos \theta - \sigma_y \frac{BC}{AC} \sin \theta - \tau_{xy} \frac{BC}{AC} \cos \theta - \tau_{xy} \frac{AB}{AC} \sin \theta = 0$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_\theta - \sigma_x \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - \sigma_y \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) - \tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

$$\sigma_\theta - \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x \cos 2\theta}{2} - \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y \cos 2\theta}{2} - \tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

La contrainte normale

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \tau_\theta ACt - \sigma_x ABt \sin \theta - \sigma_y BCt \cos \theta - \tau_{xy} BCt \sin \theta + \tau_{xy} ABt \cos \theta = 0$$

$$\tau_\theta = \sigma_x \frac{AB}{AC} \sin \theta - \sigma_y \frac{BC}{AC} \cos \theta + \tau_{xy} \frac{BC}{AC} \sin \theta - \tau_{xy} \frac{AB}{AC} \cos \theta = 0$$

$$\tau_\theta = \sigma_x \cos \theta \sin \theta - \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \sin^2 \theta - \tau_{xy} \cos^2 \theta$$

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

La contrainte tangentielle

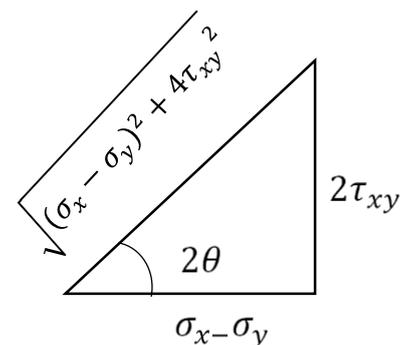
1.7 Contrainte principales normales

Les contraintes principales sont les contraintes maximales et minimales pour lesquels les contraintes tangentielles sont nulles.

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) (-2 \sin 2\theta) + \tau_{xy} (2 \cos 2\theta) = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 2\tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Sachant que $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-\sin 2\theta}{-\cos 2\theta}$, $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

Alors :

$$\begin{cases} \sin 2\theta = \pm \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \cos 2\theta = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{cases}$$

Remplaçant $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$ dans σ :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \left(\pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right) \pm \left(\frac{\tau_{xy} 2\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\pm \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 \pm 2\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Contraintes principales normales

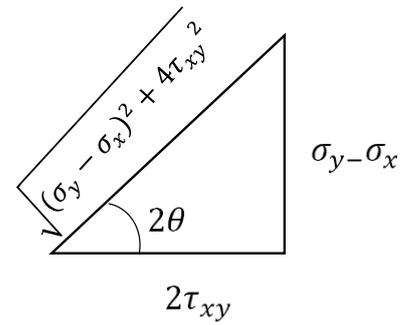
$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

1.8 Contrainte tangentielle maximales

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) (2\cos 2\theta) - \tau_{xy} (-2\sin 2\theta) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

$$\begin{cases} \sin 2\theta = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \cos 2\theta = \pm \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{cases}$$



Remplaçant $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$ dans τ :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right) - \frac{\tau_{xy} \cdot 2\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\tau_{max} = \frac{-\left(\pm \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right) \pm 2\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Puisque $(\sigma_y - \sigma_x)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2$ on peut écrire :

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} \text{ est égale aussi } \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{Contraintes tangentielle maximale}$$

- Vérification

Si σ_1 et σ_2 sont des contraintes sont des contraintes principales, la contrainte tangentielle est nulle.

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} - \frac{\tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\tau_\theta = 0$$

Si τ_{max} est la contrainte principale, la contrainte normale admet une valeur $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

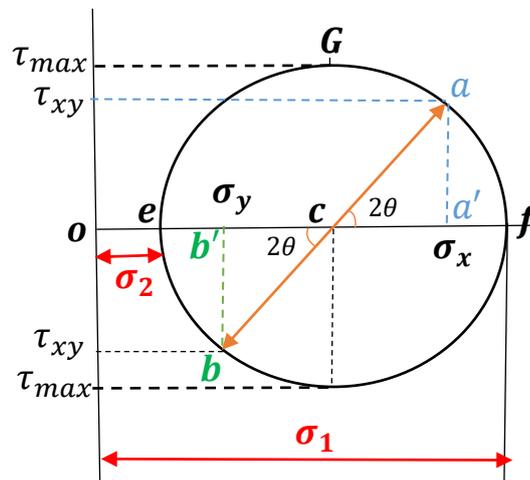
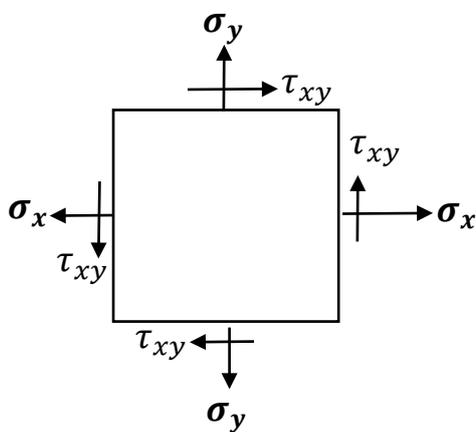
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \frac{\tau_{xy}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

1.9 Détermination des contraintes principales par le Cercle de Mohr.

Soit un point 'P' dans le plan pour lequel on a les contraintes $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$

Si $\sigma_x > \sigma_y$



$$\sigma_1 = oc + cf \quad , \quad \sigma_2 = oc - ce \quad \text{avec} \quad cf = ce = ca \quad , \quad oc = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$ca^2 = ca'^2 + a'a^2 \Rightarrow ca^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$aa' = \tau_{xy} \text{ et } ca' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{ alors } ca = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = CG = Ca = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

1.9.1 Décomposition de Σ en partie sphérique et déviatrice

- Définition des axes et contraintes principales

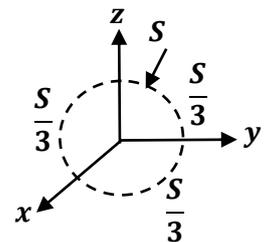
Soit le tenseur des contraintes principales $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ qui peut être

décomposé en $\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_D$

- Le tenseur $\Sigma_s = \frac{S}{3} \mathbf{I}$ est dit partie sphérique de Σ de trace nulle, ayant même trace S

que Σ , trois valeurs propre égale à $\frac{S}{3}$ et admettent toutes direction propres.

$$\Sigma_s = \begin{bmatrix} \frac{S}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{3} \end{bmatrix} = \frac{S}{3} [\mathbf{I}]$$



- Le tenseur Σ_D est dit partie déviatrice de Σ de trace nulle, ayant les mêmes directions propres que Σ et dont les valeurs propres sont :

$$\Sigma_D = \begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{S}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y - \frac{S}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \frac{S}{3} \end{bmatrix}$$

- Le vecteur contrainte en un point P , dû à Σ_s est normal à la facette considérée et son intensité ne dépend pas de l'orientation de la facette, puisqu'on trouve :

On a alors deux cas :

1^{er} cas :

- Si la partie Σ_D est nulle.

$$\Sigma = \Sigma_s = \begin{bmatrix} \frac{S}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{3} \end{bmatrix} = \frac{S}{3} [\mathbf{I}]$$

$$\sigma = (\vec{n})' [\Sigma_s] (\vec{n}) = (n_1 \ n_2 \ n_3) \begin{bmatrix} \frac{S}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (n_1 \ n_2 \ n_3) \begin{bmatrix} \frac{S}{3} n_1 \\ \frac{S}{3} n_2 \\ \frac{S}{3} n_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{S}{3}$$

$$\sigma = \frac{S}{3}$$

Sachant que $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ et $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$

$$\tau = (*n) [\Sigma_s] (\vec{n}) \text{ avec } (*n) = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = (*n) \begin{bmatrix} \frac{S}{3} n_1 \\ \frac{S}{3} n_2 \\ \frac{S}{3} n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{S}{3} n_1 \\ \frac{S}{3} n_2 \\ \frac{S}{3} n_3 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} -\frac{S}{3} n_3 n_2 + \frac{S}{3} n_3 n_2 \\ \frac{S}{3} n_3 n_1 - \frac{S}{3} n_3 n_1 \\ -\frac{S}{3} n_2 n_1 + \frac{S}{3} n_2 n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = 0$$

Remarque :

La partie sphérique produit uniquement les contraintes normales σ tandis que les contraintes tangentielles sont nulles. Donc changement de volume sans changement de forme.

2^{eme} cas :

- Si la partie sphérique est nulle $\Sigma_s = 0$

$$\Sigma = \Sigma_D = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma = (\vec{n})^t [\Sigma_D] (\vec{n}) = (n_1 \ n_2 \ n_3) \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (n_1 \ n_2 \ n_3) \begin{bmatrix} \sigma_x n_1 \\ \sigma_y n_2 \\ \sigma_z n_3 \end{bmatrix} = n_1^2 \sigma_x + n_2^2 \sigma_y + n_3^2 \sigma_z$$

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\tau = (*n) [\Sigma_D] (\vec{n}) = (*n) \begin{bmatrix} \sigma_x n_1 \\ \sigma_y n_2 \\ \sigma_z n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x n_1 \\ \sigma_y n_2 \\ \sigma_z n_3 \end{bmatrix}$$

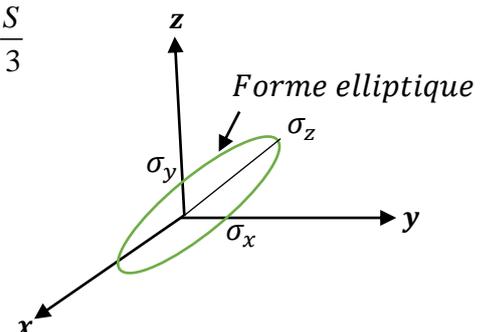
$$\tau = \begin{bmatrix} -\sigma_y n_3 n_2 + \sigma_z n_3 n_2 \\ \sigma_x n_3 n_1 - \sigma_z n_3 n_1 \\ -\sigma_x n_2 n_1 + \sigma_y n_2 n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_3 n_2 (\sigma_z - \sigma_y) \\ n_1 n_3 (\sigma_x - \sigma_z) \\ n_1 n_2 (\sigma_y - \sigma_x) \end{bmatrix}$$

On a $\sigma = \sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z \Rightarrow \tau \neq 0$

- Demonstration:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{S}{3} + \frac{S}{3} + \frac{S}{3} = 0 \text{ et on déjà : } \sigma_x = \frac{S}{3}, \sigma_y = \frac{S}{3}, \sigma_z = \frac{S}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y = -\sigma_z a$$



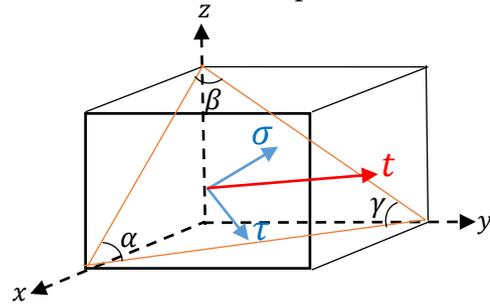
Remarque :

La partie déviatrice produit les contraintes normales σ et les contraintes tangentielles τ , donc on a un changement de volume et de forme.

1.10 Représentation octaédrique

Considérons en un point P du solide (cube), les huit unitaires \vec{n} de composantes dans le repère principal ($\tau = 0$)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Dans un cube (octaédrique) $n_1 = n_2 = n_3$, ou bien on note $k = l = m$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow k = l = m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow n_1^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = n_2 = n_3$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

Sachant que :

$$(I) \begin{cases} \sigma = (\vec{n})^t [\Sigma] (\vec{n}) \\ t^2 = \sigma^2 + \tau^2 \\ \vec{n} = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = k^2 + l^2 + m^2 = 1 \end{cases}$$

Effectuant le déroulement de système d'équation (I).

$$(I) \begin{cases} \sigma_x n_1^2 + \sigma_y n_2^2 + \sigma_z n_3^2 = \sigma \\ \sigma_x^2 n_1^2 + \sigma_y^2 n_2^2 + \sigma_z^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2 \\ \vec{n} = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = k^2 + l^2 + m^2 = 1 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer pour résoudre le système d'équation (II)

$$(III) \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_y^2 & \sigma_z^2 \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_y)(\sigma - \sigma_z)}{(\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - \sigma_z)}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_z)(\sigma - \sigma_x)}{(\sigma_y - \sigma_z)(\sigma_y - \sigma_x)}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_x)(\sigma - \sigma_y)}{(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_z - \sigma_y)}$$

Supposant que $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ et puisque $n_1^2 \geq 0$, $n_2^2 \geq 0$, $n_3^2 \geq 0$, alors :

$$n_1^2 \geq 0 \rightarrow \text{dénominateur positif} \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_y)(\sigma - \sigma_z) \geq 0 \dots (a)$$

$$n_2^2 \geq 0 \rightarrow \text{dénominateur négatif} \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_z)(\sigma - \sigma_x) \leq 0 \dots (b)$$

$$n_3^2 \geq 0 \rightarrow \text{dénominateur positif} \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_x)(\sigma - \sigma_y) \geq 0 \dots (c)$$

Effectuant par exemple le déroulement de l'équation (c)

$$\sigma^2 - (\sigma_x - \sigma_y)\sigma + \sigma_x\sigma_y + \tau^2 = 0 \dots \dots \dots (IV)$$

Ajoutant et retranchant la quantité $\frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2$

$$(IV) \Rightarrow \sigma^2 - 2\frac{1}{2}\sigma + (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{4}{4}\sigma_x\sigma_y + \tau^2$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 - \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{4}{4}\sigma_x\sigma_y$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 - \frac{1}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y)$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 - \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \dots \dots \dots (IV)$$

L'équation (IV) est similaire à une *équation de cercle* $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$$\Rightarrow \text{Le rayon} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{ et le centre} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

De la même manière pour les deux autres équations (a) et (b) :

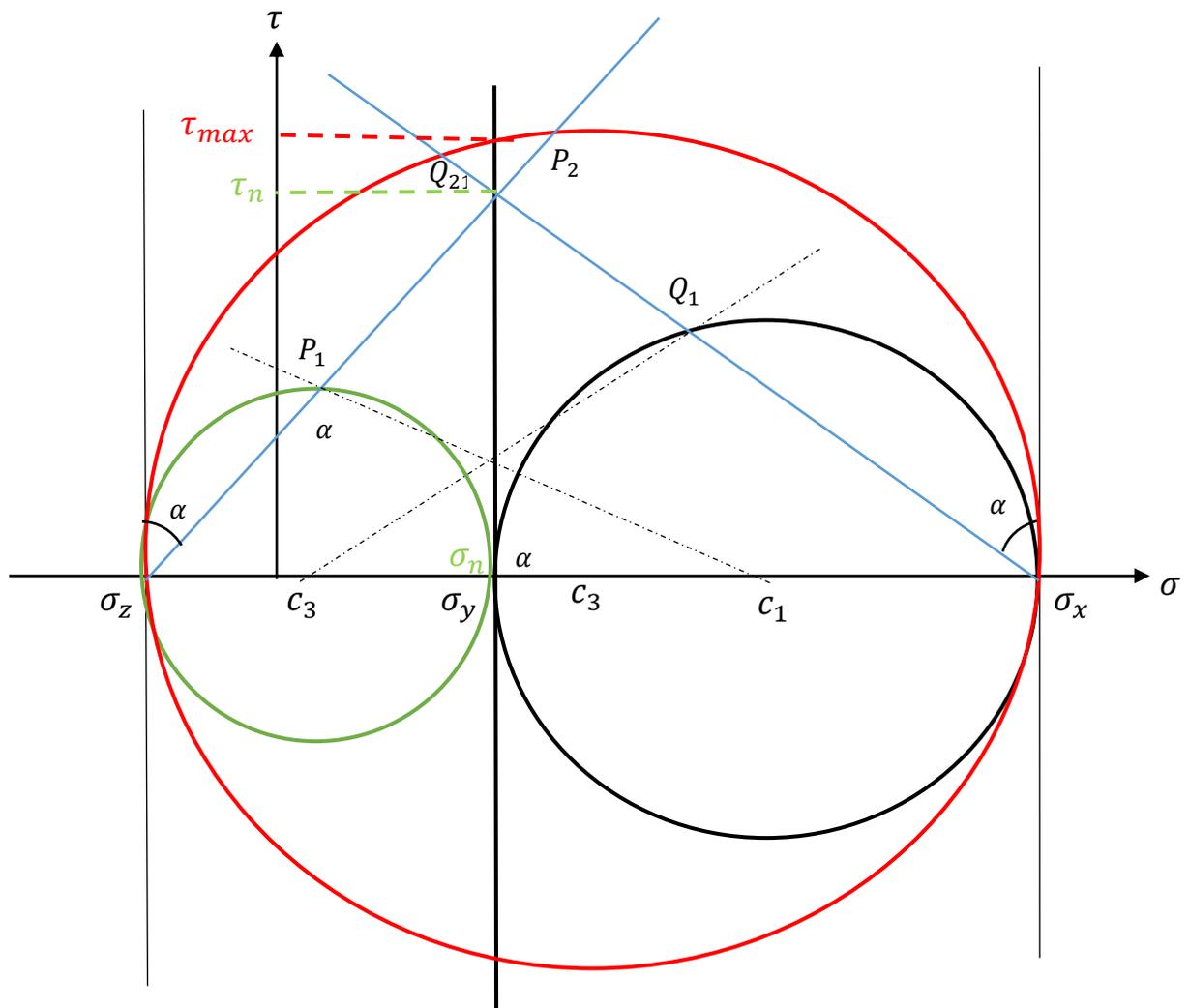
$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \right)^2 \Rightarrow \text{Le rayon} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \text{ et le centre} \left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}, 0 \right).$$

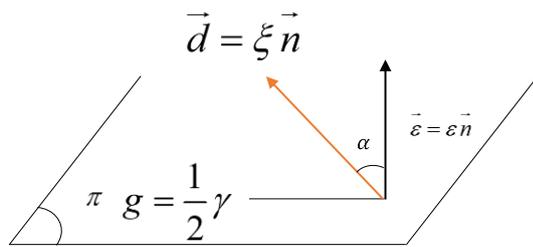
$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 \Rightarrow \text{Le rayon} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \text{ et le centre} \left(\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}, 0 \right).$$

On a donc 3 centres et 3 rayons, donc 3 cercles

Finalement, on peut tracer le cercle de Mohr tridimensionnel pour un cas octaédrique.

$$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$$





Chapitre 2 : Etat de déformation

2. Introduction.....	20
2.1 Description cinématique.....	20
2.1.1 Description LAGRANGIENNE.....	20
2.1.2 Description EULERIENNE.....	20
2.2 Déplacement et déformation d'un domaine élémentaire.....	21
2.3 Relation entre déformation et déplacements.....	24
2.3.1 Déformations directe (normale).....	24
2.3.2 Déformation de cisaillements.....	25
2.4 Décomposition de la déformation pure en dilatation et glissement (déformation direct et de cisaillement).....	26
2.5 Interprétation des coefficients de tenseur de déformation.....	28
2.6 Détermination des déformations principales.....	29
2.7 Décomposition de $[\xi]$ en partie sphérique et déviatrice.....	30
2.8 Représentation octaédrique.....	31
2.9 Représentation géométrique (graphique) de l'état de déformation en un point....	33

2. Introduction

Etant donné un solide (S) lié à un repère $\{0, x, y, z\}$. Considérons un état d'équilibre initial de ce solide, pris comme état de référence. Soumettons-le à une sollicitation qui passe progressivement de la valeur zéro à sa valeur finale. Après un régime transitoire, les déformations prennent leurs valeurs définitives et le solide se trouve dans l'état d'équilibre final.

2.1 Description cinématique

2.1.1 Description LAGRANGIENNE

Lorsqu'on connaît un état initial, il est commode de définir le mouvement, on considérant à chaque instant (t), les coordonnées (x, y, z) , en fonction des coordonnées initiales (x_0, y_0, z_0) à l'instant ($t = 0$). La fonction $X = X(x, y, z, t)$ seront considérées différentielle.

Les équations suivantes définissent les trajectoires des points matériels.

- Champ de déplacement : $\vec{X} = X(x, y, z, t)$
- Champ de vitesse : $\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt}$
- Champ d'accélération : $\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

2.1.2 Description EULERIENNE

Dans certain cas, on connaît les forces qui s'exercent sur le milieu comme des fonctions de coordonnées (x, y, z) à l'instant (t). On est donc amené à considérer la masse volumique et toutes les autres propriétés physiques du matériau.

L'état cinématique sera définie par un champ de déplacement $x(x, y, z, t)$ ou un champ de vitesse $V(X_1, X_2, X_3, t)$, la description LAGROGIENNE par les équations des trajectoires suit

un champ de déplacement donnée par $X(x_1, x_2, x_3, t)$ ou $\Rightarrow x \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$

Les champs de vitesse seront : $V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{du}{dt} = dx \frac{\partial u}{\partial x} + dy \frac{\partial u}{\partial y} + dz \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ V_y = \frac{dv}{dt} = dx \frac{\partial v}{\partial x} + dy \frac{\partial v}{\partial y} + dz \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ V_z = \frac{dw}{dt} = dx \frac{\partial w}{\partial x} + dy \frac{\partial w}{\partial y} + dz \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{cases}$

x, y, z : variables indépendants d'EULER

Les coordonnées d'accélération seront donc :

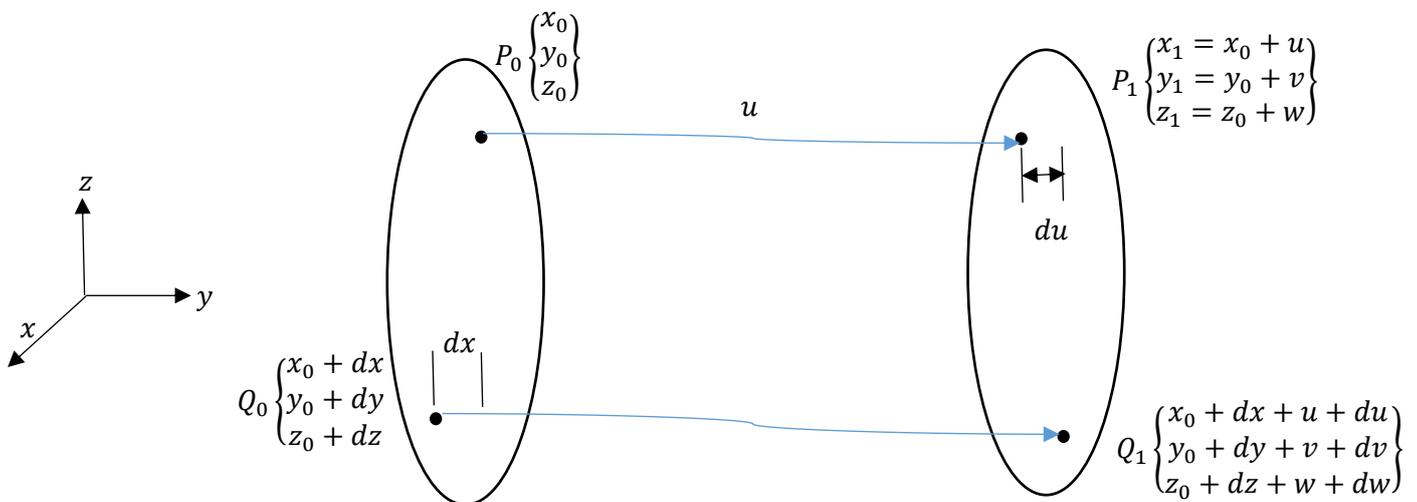
$$\gamma = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_x = \frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \\ \gamma_y = \frac{dV_y}{dt} = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_y}{\partial t} \\ \gamma_z = \frac{dV_z}{dt} = V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \end{cases}$$

2.2 Déplacement et déformation d'un domaine élémentaire

Une particule P occupe dans l'état initial (0) une position $P_0 \{x_0, y_0, z_0\}$ et dans l'état final (1) la position $P_1 \{x_1, y_1, z_1\}$.

Soient u, v, w les composantes du vecteur déplacement $\overline{P_0 P_1}$ de la particule P.

Une particule Q voisine de P occupe dans l'état (0) et (1) les positions $Q_0(x + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ et Q_1 son vecteur déplacement $\overline{Q_0 Q_1}$ a pour composante $u + du, v + dv, w + dw$



On a donc les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} \begin{cases} u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases}$$

Qui peuvent s'écrire matriciellement :

$$\begin{Bmatrix} u + du \\ v + dv \\ w + dw \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\{\overrightarrow{Q_0Q_1}\} = \{\overrightarrow{P_0P_1}\} + \left[\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} \right] \{\overrightarrow{P_0Q_0}\} \quad (1)$$

Remarque :

Suivant les hypothèses des petites déformations, les 09 composantes du tenseur $\left[\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} \right]$ sont très petites a une unité (1).

Le tenseur d'ordre deux, $\left[\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} \right]$ peut se décomposer en les somme d'un tenseur symétrique $[\xi]$ et d'un tenseur antisymétrique $[\Omega]$, on peut écrire :

$$\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} = [\xi] + [\Omega]$$

$$[\xi] = \frac{\left[\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} \right] + \left[\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} \right]^t}{2}$$

$$[\Omega] = \frac{\left[\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} \right] - \left[\text{grade } \overrightarrow{P_0P_1} \right]^t}{2}$$

La partie symétrique s'écrit donc :

$$[\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: déformation normales

$\gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{xz}, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}$: déformation de cisaillement (tangentielle).

La partie antisymétrique est donnée par :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Posons :

$$[\vec{\omega}] = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot} \left(\overrightarrow{P_0 P_1} \right); \quad [* \omega] = [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Alors :

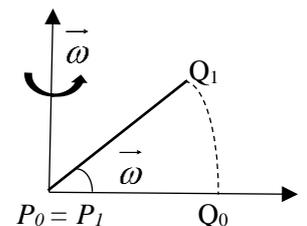
$$[\Omega] = (*\omega)$$

L'équation fondamentale devient :

$$\{ \overrightarrow{Q_0 Q_1} \} = \overrightarrow{P_0 P_1} + [\Omega] \overrightarrow{P_0 Q_0} + [\xi] \overrightarrow{P_0 Q_0}$$

(1) (2) (3)

(1) Translation du vecteur directeur $\overrightarrow{P_0 P_1}$ de P_0 à P_1



(2) Une rotation autour de P_0 d'un angle $[\vec{\omega}]$. Sachant que : $(n \wedge u) = (*n)\vec{u}$

$$[\Omega] \overrightarrow{P_0 Q_0} = (*\omega) \overrightarrow{P_0 Q_0} = (\vec{\omega}) \wedge (\overrightarrow{P_0 Q_0})$$

(3) La transformation ponctuelle qui définit l'opérateur symétrique $[\xi]$ qui traduit une **déformation pure** du domaine élémentaire entourant P .

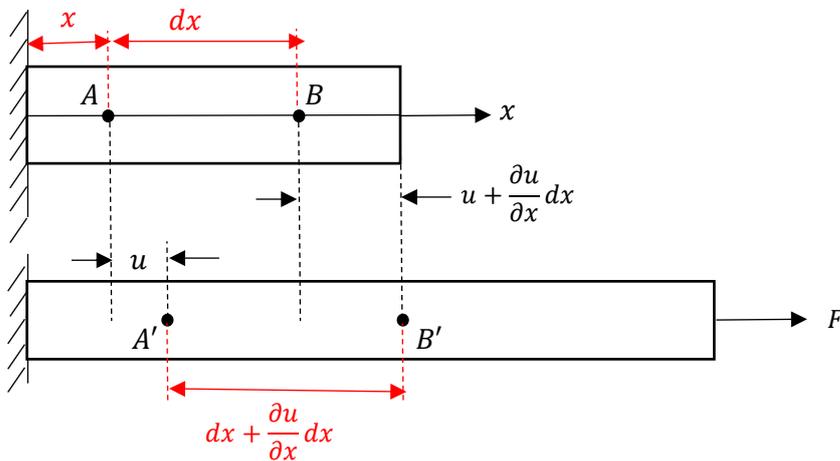
Pour étudier cette déformation pure, on utilise un repère (P, x, y, z) et l'équation fondamentale se réduit à :

$$\{\overrightarrow{Q_0 Q_1}\} = [\xi] \{\overrightarrow{P_0 P_1}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}$$

2.3 Relation entre déformation et déplacements

Le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position initiale de sa position finale. On dit qu'un corps est déformé quand les positions relatives entre ces points changent en fonction des systèmes des forces appliquées. Dans le cas générale deux types de déformations se produisent.

2.3.1 Déformations directe (normale)



La déformation directe dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de longueur par la longueur.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_f - l_0}{l_0}$$

Sur la partie AB :

$$\varepsilon_x = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dans le cas tridimensionnel, on a 03 composantes de la déformation directe.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

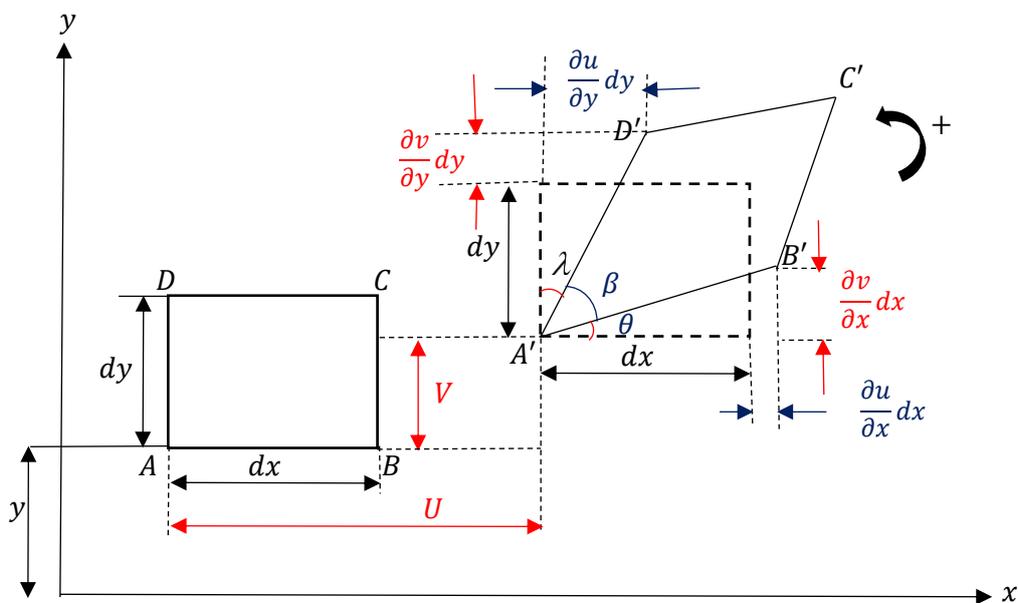
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

u, v, w Sont respectivement les déplacements suivant x, y, z .

2.3.2 Déformation de cisaillements

La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes.

Avant de passer au cas tridimensionnelle, on considère le problème planes, en prenant une face $ABCD$ d'un cube.



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

Dans le cas des petits déplacements : $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$ et $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$

$$\text{On aura donc : } \theta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

De la même manière pour λ :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \ll 1$$

$$\operatorname{tg} \lambda \approx \lambda$$

$$\lambda = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta \equiv \theta + \lambda$$

$$\gamma_{xy} = \theta - \lambda = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dans le cas tridimensionnel :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{Déformations de cisaillement}$$

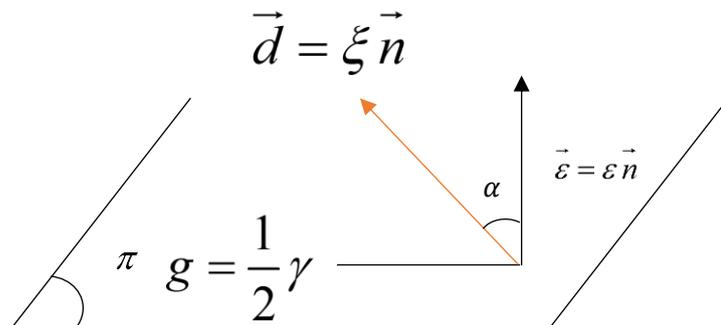
2.4 Décomposition de la déformation pure en dilatation et glissement (déformation direct et de cisaillement)

Pour déterminer la décomposition de la déformation d'un point P en composantes direct et de cisaillement, on doit suivre la même que le chapitre 1 (état de contrainte).

Soit le point P , son vecteur de déformation « d » fait un angle α avec la normale « n »

$[\xi]$: tenseur de déformation

$$\vec{d} = \vec{\varepsilon} + \vec{g}$$



- La projection du vecteur déformation « d » sur la normale n , nous permet de déterminer les déformations de dilatation (directe) $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{\varepsilon} = [I + (*n)^2] d = (\vec{n})(\vec{n})^t d$$

$$\vec{\varepsilon} = [I + (*n)^2] [\xi] \vec{n} = (\vec{n})(\vec{n})^t [\xi] \vec{n}$$

$$\boxed{\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = (\vec{n})^t [\xi] \vec{n}} \quad \text{Déformation direct (dilatation)}$$

- La projection du vecteur déformation « d » sur le plan π , nous permet de déterminer les déformations de cisaillement (glissement).

$$\vec{g} = -(*n)^2 \vec{d} = -(*n)^2 [\xi] \vec{n}$$

$$\boxed{g = |\vec{g}| = (*n) [\xi] \vec{n}} \quad \text{Déformation de cisaillement (glissement)}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\varepsilon : (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ Composante direct (dilatation normale)

$g : (\frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yx}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zy})$ Composante de cisaillement (glissement)

2.5 Interprétation des coefficients de tenseur de déformation $[\xi]$

Considérons un élément uniquement dans la direction (x) , donc le vecteur normal n correspondent a pour cosinus directeurs $(1,0,0)$.

$$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant la formule $\varepsilon = (\vec{n})^t [\xi] \vec{n}$, on aura :

$$\varepsilon = (n_1 \ n_2 \ n_3) \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_x$$

La même chose pour ε_y si $(0 \ 1 \ 0)$ et ε_z si $(0 \ 0 \ 1)$

D'une façon générale, si $n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$, on peut écrire :

$$\varepsilon = (\vec{n})^t [\xi] \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{yz} n_y n_z + \gamma_{xz} n_x n_z$$

Pour calculer la déformation de cisaillement en applique : $g = (*n) [\xi] \vec{n}$

Pour $n = (1,0,0)$, on peut écrire :

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} \end{pmatrix}$$

2.6 Détermination des déformations principales

Soit un tenseur de déformation défini par :

$$\xi = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

- Si le problème est plan, ou bien certain paramètre sont nulles, on utilise la résolution de système d'équation de 2eme ordre.
- Si le problème est complexe, on utilise l'équation caractéristique avec :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = 0 \equiv -\lambda^3 + \lambda^2 e_1 - \lambda e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1 = \text{trace}(\xi) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \det[\xi] = \det \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

2.7 Décomposition de $[\xi]$ en partie sphérique et déviatrice

Soit le tenseur des contraintes principales $\xi = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$ qui peut être

décomposé en $\xi = \xi_s + \xi_D$

$$\xi_s = \begin{bmatrix} \frac{e}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \end{bmatrix}$$

Avec : $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Dans la base principale :

$$\xi_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{e}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y - \frac{e}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z - \frac{e}{3} \end{bmatrix}$$

Dans le cas général :

$$\xi_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{e}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{e}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{e}{3} \end{bmatrix}$$

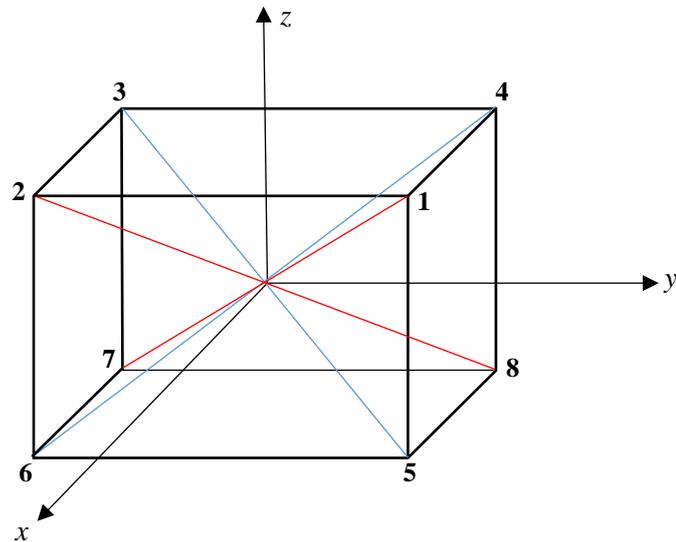
2.8 Représentation octaédrique

Considérons comme centre principal l'intersection des quatre (04) droites des points équidistances des axes principaux dans cube, la direction octaédrique de ces droites dites directions octaédrique est définissent 08 vecteurs.

$$\vec{n}_{01} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{02} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{03} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{04} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{05} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{06} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{07} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{08} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{01} = \frac{\vec{n}_{01}}{|\vec{n}_{01}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$



Ou bien :

$$\begin{aligned} \vec{n}_{01} &= \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, & \vec{n}_{02} &= \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 \\ \vec{n}_{03} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, & \vec{n}_{04} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 \\ \vec{n}_{05} &= \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, & \vec{n}_{06} &= \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 \\ \vec{n}_{07} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, & \vec{n}_{08} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 \end{aligned}$$

En un point « P », la dilatation direct (relative), dans une direction octaédrique à pour valeur :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{oct} &= (\vec{n}_{oct})' [\xi] (\vec{n}_{oct}) = \begin{pmatrix} n_{oct\ x} & n_{oct\ y} & n_{oct\ z} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{oct\ x} \\ n_{oct\ y} \\ n_{oct\ z} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_{oct} &= \varepsilon_x n_{oct\ x}^2 + \varepsilon_y n_{oct\ y}^2 + \varepsilon_z n_{oct\ z}^2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \end{aligned}$$

$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$: est une constante égale « e » alors $\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{e}{3}$

$$\begin{aligned} \vec{g}_{oct} &= (* \vec{n}_{oct}) [\xi] (\vec{n}_{oct}) = \begin{bmatrix} 0 & -n_{oct3} & n_{oct2} \\ n_{oct3} & 0 & -n_{oct1} \\ -n_{oct2} & -n_{oct1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{oct\ 1} \\ n_{oct\ 2} \\ n_{oct\ 3} \end{bmatrix} \\ \vec{g}_{oct} &= \begin{bmatrix} 0 & -n_{oct3} & n_{oct2} \\ n_{oct3} & 0 & -n_{oct1} \\ -n_{oct2} & -n_{oct1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{oct\ 1} \varepsilon_x \\ n_{oct\ 2} \varepsilon_y \\ n_{oct\ 3} \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{oct2} n_{oct3} \varepsilon_y + n_{oct2} n_{oct3} \varepsilon_z \\ n_{oct3} n_{oct1} \varepsilon_x - n_{oct1} n_{oct3} \varepsilon_z \\ -n_{oct2} n_{oct1} \varepsilon_x + n_{oct1} n_{oct2} \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\varepsilon_z - \varepsilon_y) \\ \frac{1}{3}(\varepsilon_x - \varepsilon_z) \\ \frac{1}{3}(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$g_{oct} = |\vec{g}_{oct}| = \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_z - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_x)^2}$$

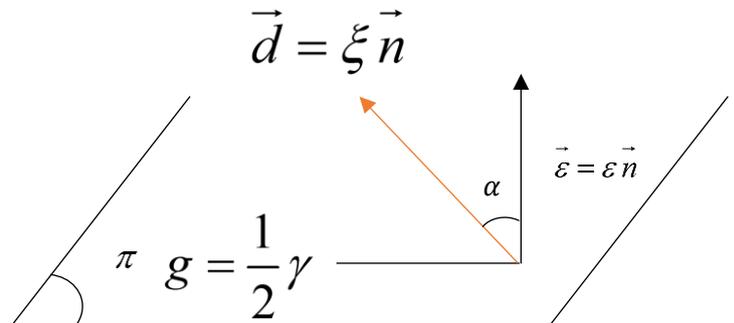
2.9 Représentation géométrique (graphique) de l'état de déformation en un point

Soit un état de déformation d'un point « P » de coordonnées (ε, g) avec : $g = \frac{1}{2}\gamma$. Dans le cas

général, on aura :

Sachant que :

$$(I) \begin{cases} \varepsilon = (\vec{n})^t [\xi] (\vec{n}) \\ d^2 = \varepsilon^2 + g^2 \\ \vec{n} = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = k^2 + l^2 + m^2 = 1 \end{cases}$$



Effectuant le déroulement de système d'équation (I).

$$(I) \begin{cases} \varepsilon_x n_1^2 + \varepsilon_y n_2^2 + \varepsilon_z n_3^2 = \varepsilon \\ \varepsilon_x^2 n_1^2 + \varepsilon_y^2 n_2^2 + \varepsilon_z^2 n_3^2 = \varepsilon^2 + g^2 \\ \vec{n} = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = k^2 + l^2 + m^2 = 1 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer pour résoudre le système d'équation (II)

$$(III) \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x^2 & \varepsilon_y^2 & \varepsilon_z^2 \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^2 + g^2 \\ \varepsilon^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n_1^2 = \frac{g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_y)(\varepsilon - \varepsilon_z)}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_z)}$$

$$n_2^2 = \frac{g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_z)(\varepsilon - \varepsilon_x)}{(\varepsilon_y - \varepsilon_z)(\varepsilon_y - \varepsilon_x)}$$

$$n_3^2 = \frac{g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_x)(\varepsilon - \varepsilon_y)}{(\varepsilon_z - \varepsilon_x)(\varepsilon_z - \varepsilon_y)}$$

Supposant que $\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z$ et puisque $n_1^2 \geq 0, n_2^2 \geq 0, n_3^2 \geq 0$, alors :

$$n_1^2 \geq 0 \rightarrow \text{dénominateur positif} \Rightarrow g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_y)(\varepsilon - \varepsilon_z) \geq 0 \dots (a)$$

$$n_2^2 \geq 0 \rightarrow \text{dénominateur négatif} \Rightarrow g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_z)(\varepsilon - \varepsilon_x) \leq 0 \dots (b)$$

$$n_3^2 \geq 0 \rightarrow \text{dénominateur positif} \Rightarrow g^2 + (\varepsilon - \varepsilon_x)(\varepsilon - \varepsilon_y) \geq 0 \dots (c)$$

Effectuant par exemple le déroulement de l'équation (c)

$$\varepsilon^2 - (\varepsilon_x - \varepsilon_y)\varepsilon + \varepsilon_x\varepsilon_y + g^2 = 0 \dots\dots\dots (IV)$$

Ajoutant et retranchant la quantité $\frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2$

$$(IV) \Rightarrow \varepsilon^2 - 2\frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon + \frac{1}{4}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \frac{4}{4}\varepsilon_x\varepsilon_y + g^2$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 + g^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \frac{4}{4}\varepsilon_x\varepsilon_y$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 + g^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - 2\varepsilon_x\varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 + g^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 + g^2 \geq \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 \dots\dots\dots (IV)$$

L'équation (IV) est similaire à une **équation de cercle** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$$\Rightarrow \text{Le rayon} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \text{ et le centre} \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0\right)$$

De la même manière pour les deux autres équations (a) et (b) :

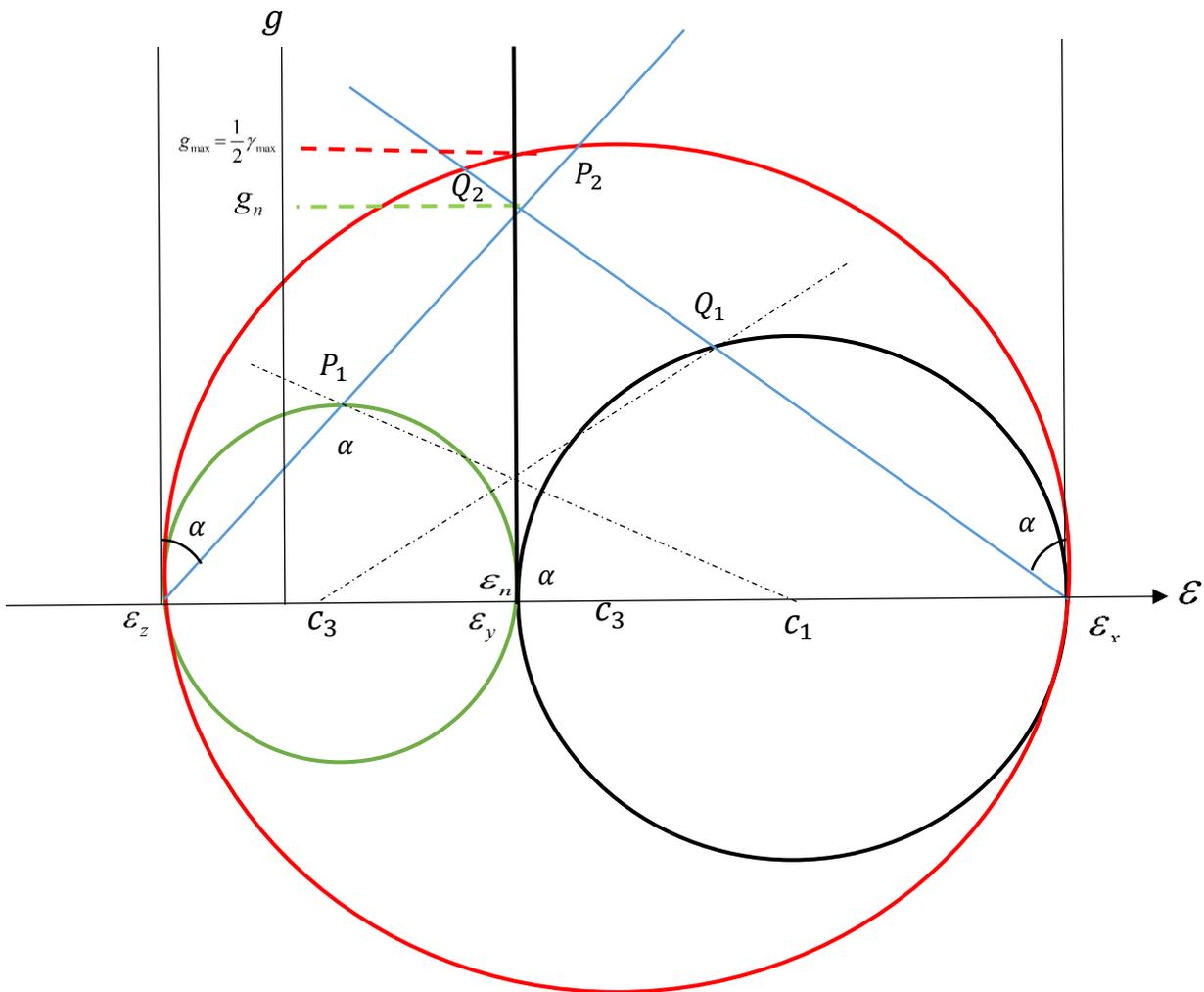
$$\Rightarrow \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2}\right)^2 + g^2 = \left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{Le rayon} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2} \text{ et le centre} \left(\frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2}, 0\right).$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2}\right)^2 + g^2 = \left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{Le rayon} = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2} \text{ et le centre} \left(\frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2}, 0\right).$$

On a donc 3 centres et 3 rayons, donc 3 cercles

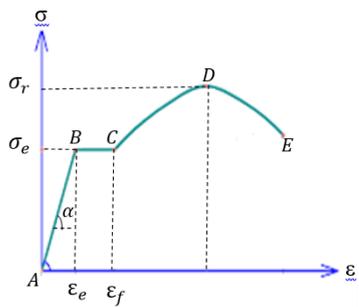
Finalement, on peut tracer le cercle de Mohr tridimensionnel pour un cas octaédrique.

$$\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z$$



La représentation tensorielle s'écrit :

$$\text{grad } \overrightarrow{\text{div}} \xi + \text{grad}^t \text{div } \xi - \text{grad } \text{grad} (\text{tr } \xi) - \Delta \xi = 0$$



Chapitre 3 : Comportement élastique linéaire

3. Introduction.....	36
3.1 Essais de traction.....	36
3.2 Lois de HOOKE généralisée.....	38
3.3 Lois de HOOKE inversée (équation de LAME).....	40
3.4 Notion d'anisotropie.....	41
3.4. 1 Anisotropie.....	42
3.4. 2 Monotropie (monoclinique).....	43
3.4. 3 Orthotrope.....	43
3.4. 4 Isotropie.....	44
3.5 Influence de la température.....	44
3.6 Etat de contraintes planes.....	46
3.7 Etat de déformations planes.....	47

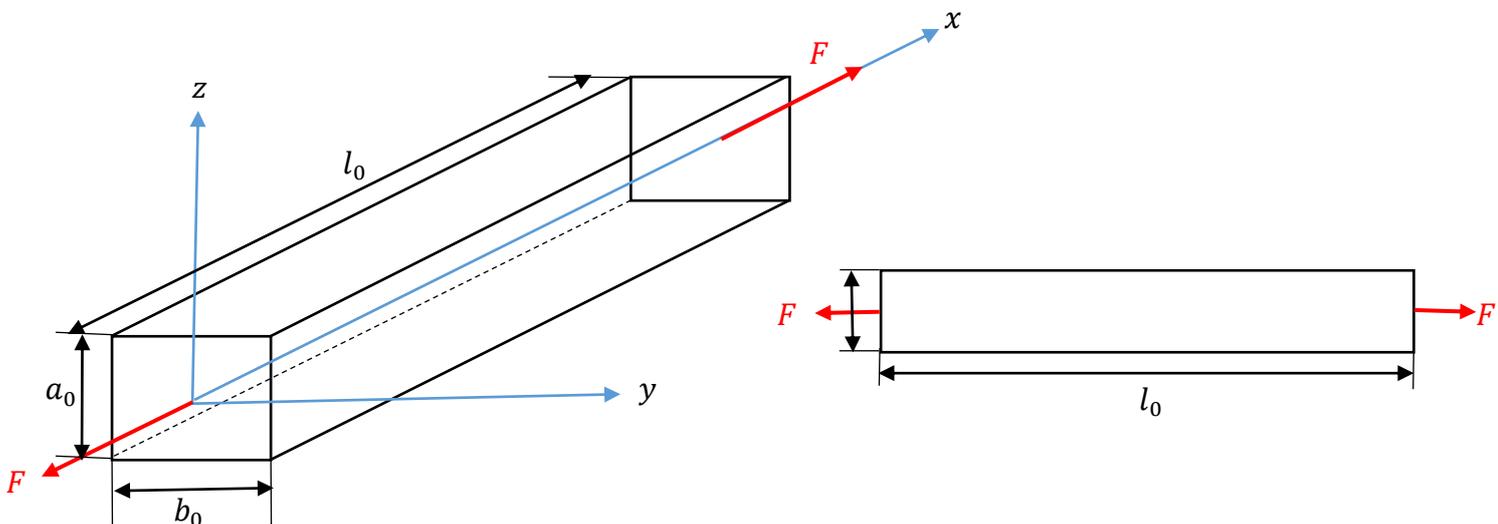
3. Introduction

Sous l'action d'une sollicitation donnée, un solide devient le siège d'un champ de déformation et d'un champ de contrainte déterminés, ce qui implique l'existence de relations entre ces deux champs. Nous établirons notamment la loi mathématique liant les tenseurs Σ et ζ , en point P, dit « *loi de comportement* », obtenue à partir des résultats d'expériences simple.

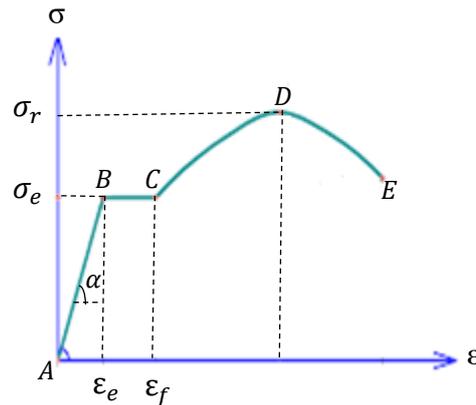
3.1 Essais de traction

Considérons une éprouvette d'un matériau solide, homogène, isotrope, ayant la forme d'un parallélépipède rectangulaire d'arêtes l_0 , a_0 , b_0 (arête parallèle aux axes P_x, P_y, P_z respectivement).

Appliquant par l'intermédiaire d'une machine de traction, deux système de forces opposées, uniformément répartie sur les deux bases distante de l_0 , normales à celle-ci, de résultantes \vec{F} et $-\vec{F}$, tendant à allonger l'éprouvette.



L'éprouvette tend à s'allonger après un certain temps, elle se casse (rampe). La courbe ci-dessous montre les phases sur les quelles est passé l'éprouvette avant être rompu.



AB: zone élastique

BC: zone de fluage

CD: zone plastique

DE: zone de rupture

Dans cette étude, on se limite uniquement à la zone élastique dans laquelle la relation contrainte-déformation est linéaire.

Dans cette zone élastique AB, on a :

$$\epsilon_x = \frac{l_f - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{F}{a \cdot b}$$

D'après HOOKE la relation contrainte-déformation est exprimé par :

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow \sigma = \text{tg} \alpha \cdot \epsilon$$

$\text{tg} \alpha = E$, E : module de Young

$$\boxed{\sigma_x = E \cdot \epsilon}$$

On peut aussi définir la déformation suivant y et z.

$$\epsilon_y = \left| \frac{b_0 - b}{b_0} \right|$$

$$\epsilon_z = \left| \frac{a_0 - a}{a_0} \right|$$

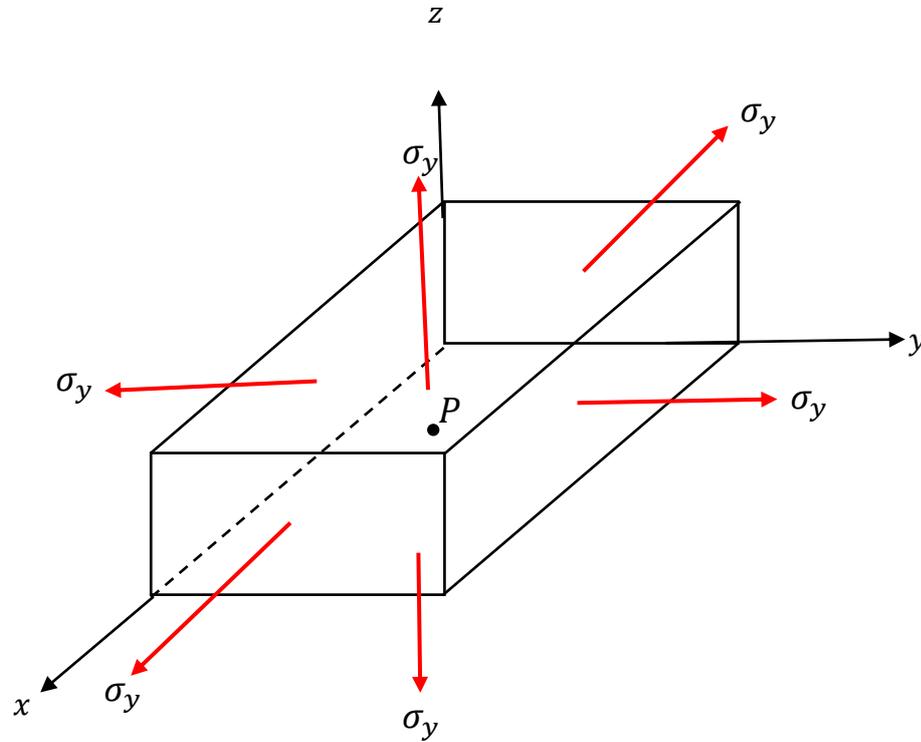
Le rapport entre deux déformations, nous définit le coefficient de poisson

$$\nu_{xy} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}, \nu_{xz} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}, \nu_{yz} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_z}, \quad 0 \leq \nu \leq 0.5$$

Si le matériau est isotrope $\nu = \nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{xz}$

3.2 Lois de HOOKE généralisée :

Nous allons maintenant déduire la relation générale liant les tenseurs Σ et ζ , en tout point d'un solide élastique quelle que soient la forme de ce solide et celle du chargement appliqué. Isolant un parallélépipède, ces facettes sont soumises aux efforts de traction ou de compression



D'après les résultats du paragraphe précédent, les relations contraintes-déformations suivant x sont données par :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

De la même manière si les efforts sont appliqués suivant l'axe y ou Z

$$\sigma_y = E \varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

On définit pour chaque déformation deux coefficients de poisson

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1)$$

$$\nu_{xy} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \nu \Rightarrow \varepsilon_x = \nu \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad (2)$$

$$\nu_{xz} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \nu \Rightarrow \varepsilon_x = \nu \varepsilon_z = \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (3)$$

Sachant que : $\varepsilon_x > 0, \varepsilon_y$ et ε_z sont négatif, la déformation totale suivant x est exprimée par la somme algébrique des trois équations (1,2 et 3).

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

De la même manière pour les deux autres directions y et z , on peut donc écrire :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

On peut aussi écrire :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_x - \nu S \right] \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_y - \nu S \right] \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_z - \nu S \right] \quad (6)$$

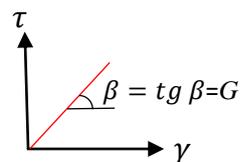
Avec : $S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

Dans le cas du cisaillement ou de la torsion, la relation contrainte déformation est donnée par :

$$\tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G_{yz} \gamma_{yz}$$



Dans le cas d'un matériau isotrope :

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Donc, la relation déformation contrainte est donnée par :

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xz} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz} \quad (9)$$

Matriciellement les équations (4...9) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu S}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou bien :

$$\boxed{\xi = \frac{1+\nu}{E}\Sigma - \frac{\nu S}{E}I} \quad (10)$$

3.3 Lois de HOOKE inversée (équation de LAME):

En inversant la loi (10), on obtient l'expression du tenseur des contraintes en fonction des déformations :

$$\boxed{\Sigma = \lambda e I + 2\mu\xi} \quad (11)$$

Avec λ et μ , homogènes à une force surfacique s'appellent coefficients de LAME du matériau exprimé par :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad (12) \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (13) \quad \text{et} \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (14)$$

A partir des équations (12) et (13), E et ν peuvent être exprimés uniquement en fonction des coefficients de LAME :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Sous forme matricielle, l'équation (11) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Où

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \mu\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 2\mu \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \mu\gamma_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = 2\mu \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \mu\gamma_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$S = (3\lambda + 2\mu)e$$

$$3\lambda + 2\mu = \frac{E}{(1-2\nu)} \Rightarrow \boxed{S = \frac{E}{(1-2\nu)}e}$$

3.4 Notion d'anisotropie

Pour les matériaux élastiques, linéaire, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations, ses relations sont appelées « lois de comportements) et se traduisent par la lois de HOOKE inversé (lois de LAME).

$$\boxed{\sigma = \Delta \varepsilon}$$

σ : Champs de contraintes

ε : Champs de déformation

Δ : Matrice de rigidité.

Ou bien par la loi de HOOKE généralisée :

$$\boxed{\varepsilon = S \sigma}$$

S : matrice de souplesse ou de flexibilité.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix}$$

$$S = [D]^{-1}$$

3.4.1 Anisotropie

A cause de la symétrie, le nombre des composantes de la matrice de rigidité se réduit au (21) dans le cas le plus générale d'anisotropie :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & & & & & \\ & D_{22} & & & & \\ & & D_{33} & & & \\ & & & D_{44} & & \\ & & & & D_{55} & \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}$$

symétrie

Un matériau anisotrope ne possède aucune propriété ou aucun plan de symétrie. Un tel matériau est appelé « triclinique ».

3.4. 2 Monotropie (monoclinique)

Un matériau monotrope possède un plan de symétrie (x,y), le nombre des composantes se réduit donc au (13), la matrice de rigidité s'écrit donc :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & 0 & 0 \\ & & D_{33} & D_{34} & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & \text{symétrie} & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}$$

3.4. 3 Orthotrope

Un matériau orthotrope possède 03 plans de symétrie perpendiculaire deux à deux. Le nombre des composantes se réduit donc au (09), la matrice de rigidité s'écrit donc :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & \text{symétrie} & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse à la même forme, elle est donnée par :

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu}{E_2} & \frac{-\nu}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

3.4. 4 Isotropie

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de références (les mêmes dans tous les directions). La matrice de rigidité ou de souplesse reste inchangée dans une base orthonormée. L'application de cette propriété conduit :

- **Matrice de rigidité :**

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

- **Matrice de souplesse:**

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}$$

3.5 Influence de la température :

Les contraintes totales en chaque point peuvent résulter de différents effets, soit :

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_0 + \sigma_{th}$$

σ_e : Contraintes élastique correspond aux contraintes dues aux déformations élastique $[\varepsilon]$

$$\sigma_e = D \varepsilon$$

D : matrice de rigidité

σ_0 : Contraintes initiales, elles peuvent être des contraintes résiduelles à la fabrication ou après la déformation

L'influence d'un champ de température peut se traduire par un comportement thermoélastique qui conduit à une variation des propriétés élastiques du matériau et une dilatation thermique, les contraintes dues à cette température s'écrivent :

$$\sigma_{th} = -D \varepsilon_{th}$$

Pour un matériau isotrope, les déformations thermiques ε_{th} dépendent des coefficients de dilatation thermique α et de la variation de la température ΔT .

$$\varepsilon_{th} = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Remplaçant ε_{th} dans σ_{th} , on obtient :

$$\sigma_{th} = \begin{Bmatrix} \frac{E\alpha \Delta T}{(1-2\nu)} \\ \frac{E\alpha \Delta T}{(1-2\nu)} \\ \frac{E\alpha \Delta T}{(1-2\nu)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dans le cas d'un matériau orthotrope, les déformations ε_{th} dépendent des coefficients de dilatations thermiques α_i dans les directions d'orthotropes (1,2 et 3).

$$\varepsilon_{th} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \Delta T \\ \alpha_2 \Delta T \\ \alpha_3 \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Multipliant ε_{th} par D d'un matériau orthotrope, on aura σ_{th} .

3.6 Etat de contraintes planes :

Dans certaines applications, le problème 3 dimensions peut se résoudre en un problème en 2 dimensions.

Un état de contraintes planes est caractérisé par le fait que la dimension suivant l'axe Z, est très petite par rapport aux deux autres. L'état de contrainte plane est défini par (03) composantes (σ_x, σ_y et τ_{xy}) qui sont indépendants de Z.

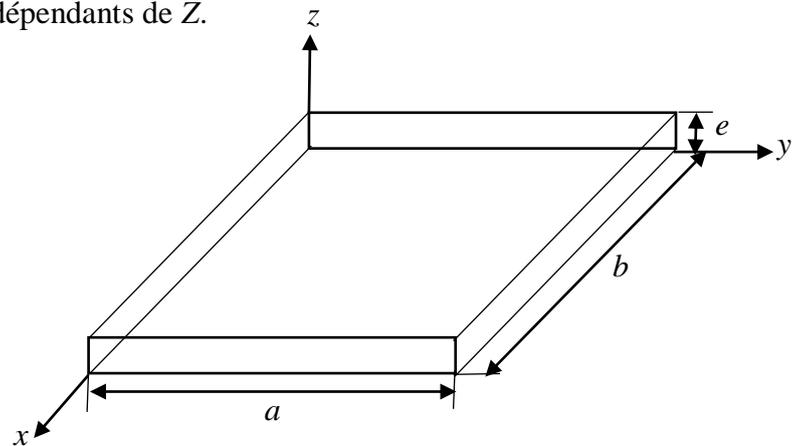
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$

$$e \ll a \text{ et } b$$

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y)$$

$$\sigma_y = \sigma_y(x, y)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$$



L'équation d'équilibre se réduit :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

La loi de comportement se réduit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{E2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{th} = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{E2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si le matériau est orthotrope avec la présence des contraintes thermiques :

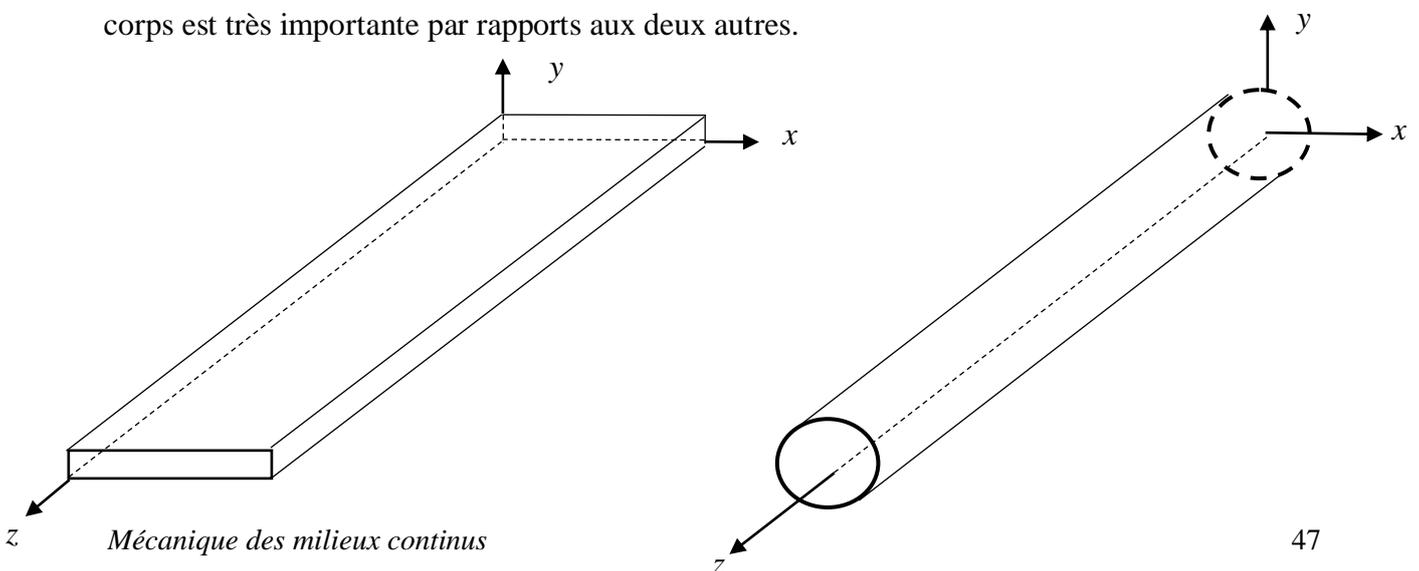
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E1} & \frac{-\nu21}{E2} & 0 \\ \frac{-\nu21}{E1} & \frac{1}{E2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu12)}{E1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Inversement :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E1}{1-\nu12\nu21} & \nu21 \frac{E1}{1-\nu12\nu21} & 0 \\ \nu12 \frac{E2}{1-\nu12\nu21} & \frac{E1}{1-\nu12\nu21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E1}{2(1+\nu12)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{E1(\alpha1+\alpha2\nu12)}{1-\nu12\nu21} \\ \frac{E2(\alpha2+\alpha1\nu12)}{1-\nu12\nu21} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.7 Etat de déformations planes :

On dit que nous avons un état de déformations planes, lorsque l'une des dimensions d'un corps est très importante par rapports aux deux autres.



Le déplacement dans la direction z est nulle $W = 0$, les déplacements U et V dépendent uniquement de x et y

$$U = U(x, y)$$

$$V = V(x, y)$$

$$W = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \Rightarrow (V(x, y), W = 0)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \Rightarrow (U(x, y), W = 0)$$

Les conditions d'équilibre redeviennent

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Pour un matériau isotrope et avec la présence des contraintes thermiques, les relations contraintes déformations s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Dans le cas d'un matériau orthotrope, on peut écrire :

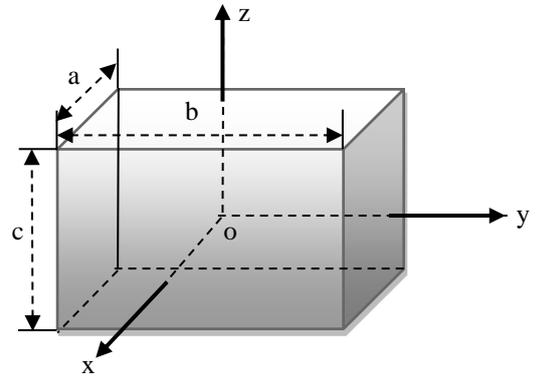
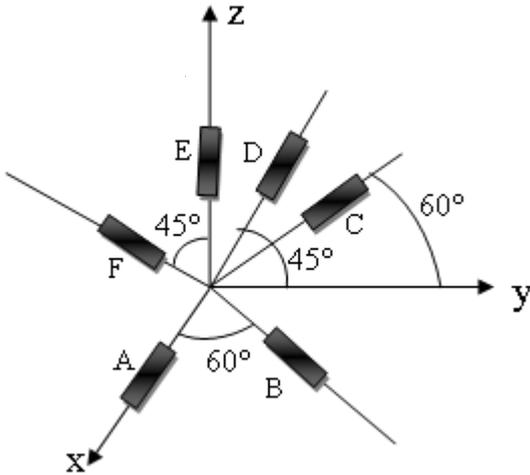
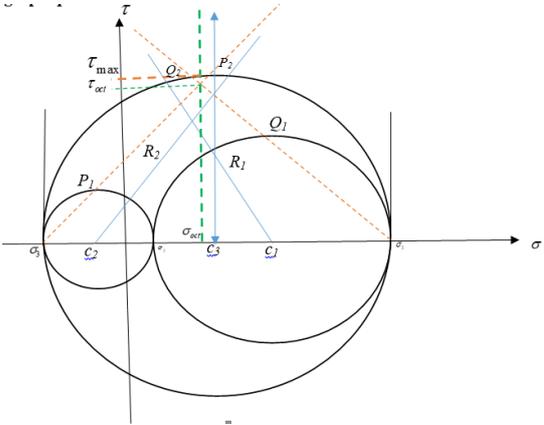
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_1}{(1+\nu_{12})(1-\nu_{12}-2n\nu_{21}^2)} \begin{bmatrix} n(1-n\nu_{12}^2) & n\nu_{21}(1+\nu_{12}) & 0 \\ n\nu_{21}(1+\nu_{12}) & (1-\nu_{12}^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_{12})(1-\nu_{12}-2n\nu_{21}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1}(1-\nu_{13}\nu_{31}) & -\frac{1}{E_2}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}) & 0 \\ -\frac{1}{E_2}(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & \frac{1}{E_2}(1-\nu_{32}\nu_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu_{12})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$\frac{E_1}{E_2} = n \text{ et } \frac{G_2}{E_2} = m$$

Chapitre 4 : Exercices et corrections



Contraintes dans un solide.....	50
Tenseur de déformation.....	62
Comportement élastique linéaire.....	79

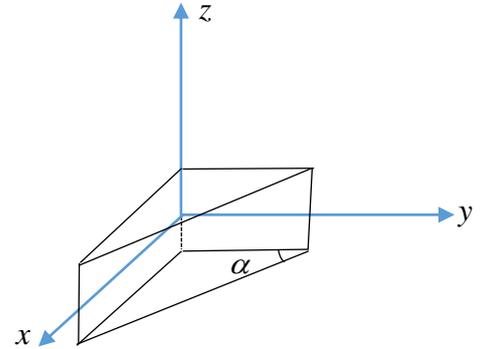
Contraintes dans un solide

Exercice N° 1 :

En un point du corps se manifestent les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

et $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, les contraintes $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ sont nulles.

- a) Déterminer les contraintes normales principales σ_i par les méthodes analytique et graphique.
- b) Déterminer les contraintes s'exerçant sur élément de surface parallèle à l'axe z et dont la normale forme avec l'axe x un angle α



Exercice N° 2 :

Dans un corps se manifeste un état des contraintes tridimensionnelles. Les valeurs des contraintes principales sont : 280MPa, 50 MPa et -120 MPa. Déterminer analytiquement et graphiquement :

- a) La valeur limite de la contrainte tangentielle maximale.
- b) Les contraintes σ_n normale et tangentielle τ_n sollicitant l'élément de surface également incliné par rapport aux axes principaux.

Exercice N° 3 :

En un point du corps les contraintes sont :

$$\sigma_x = 50N/cm^2, \sigma_y = 0, \sigma_z = -30N/cm^2$$

$$\tau_{xy} = 50N/cm^2, \tau_{yz} = -75N/cm^2, \tau_{xz} = 80N/cm^2$$

- Déterminer les contraintes normales principales et la plus grandes contrainte tangentielle, ainsi que les directions principales.

Exercice N° 4 :

Le tenseur de contraintes pour un état de contraintes traditionnelle :

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 0 & 20 \\ 20 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

- Déterminer les 03 contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
- Déterminer les 03 directions principales

Solution**Sol. N° 1**

- Tenseur de contrainte considéré est :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- La détermination des contraintes principales se résume à la détermination des valeurs propres.

$$\{\vec{t}\} = [\Sigma] \{\vec{n}\} = \sigma_i \{\vec{n}\}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

La solution est obtenue quand l'équation caractéristique :

$$\det[\Sigma - \sigma_i I] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \sigma_i \end{bmatrix} = 0$$

$$(\sigma_z - \sigma_i) [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2] = 0$$

Soit $(\sigma_z - \sigma_i) = 0$ ou bien $(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2 = 0$.

Alors :

$$(\sigma_z - \sigma_i) = 0 \Rightarrow \sigma_z = \sigma_i = \sigma_3 \text{ (Contrainte principale)}$$

$$\sigma_i^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_i + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\Delta = (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2$$

$$\Delta = 4 \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right] \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

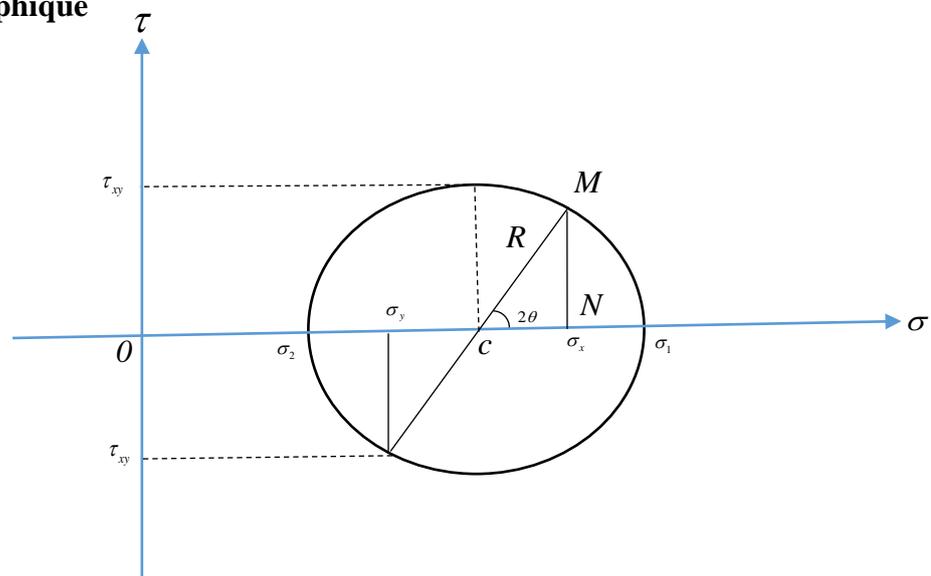
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Contrainte tangentielle

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- Méthode graphique



$CM = R$ (rayon)

$$\sigma_1 = OC + CM \rightarrow OC = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad CM = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = OC - CM = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

b) Les contraintes s'exerçant sur élément de surface parallèle à l'axe z :

- **La contrainte normale principale**

$$\sigma_n = \{\vec{n}\}^t [\Sigma] \{\vec{n}\}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{n}\}^t = \{\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad 0\}$$

$$\sigma_n = \{\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad 0\} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_n = \{\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad 0\} \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$$

$$= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

- La contrainte tangentielle

$$\tau_n = \left| (*n)[\Sigma]\{\vec{n}\} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \right|$$

$$[\Sigma]\{\vec{n}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(*n)[\Sigma]\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{Bmatrix} = \sqrt{0+0+A^2} = A = \tau_n$$

$$A = \sigma_x \cos \alpha (-\sin \alpha) - \tau_{xy} \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Sol. N° 2

$$\sigma_1 = 280 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 50 \text{ MPa}$$

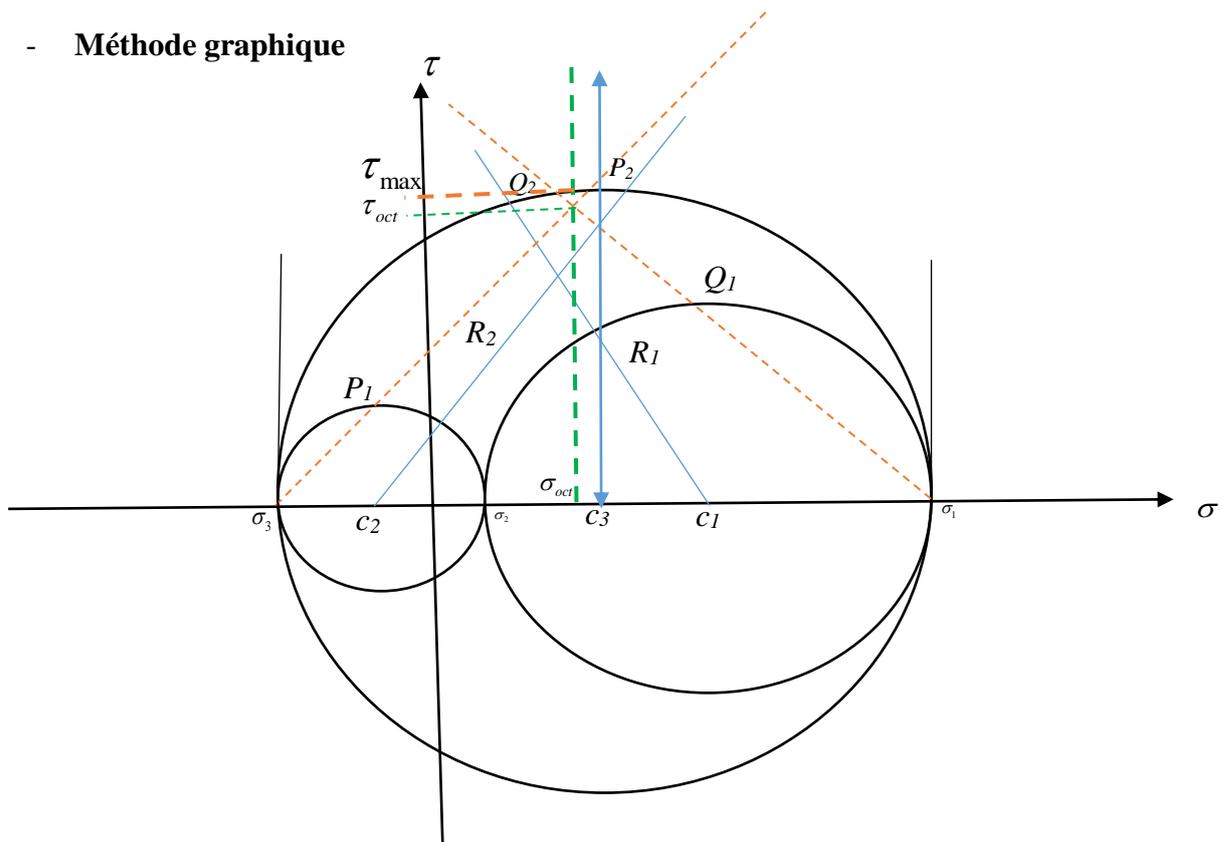
$$\sigma_3 = -120 \text{ MPa}$$

a) La valeur limite de la contrainte tangentielle maximale.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{280 - (-120)}{2}$$

$$\tau_{\max} = 200 \text{ MPa}$$

- Méthode graphique



L'élément de surface également incliné par rapport aux axes principaux veut dire que cet élément a la même angle d'inclinaison par rapport aux axes principaux (élément de surface octaédrale) \Rightarrow les cosinus directeurs sont égaux $k=l=m$.

Sachant que $k^2 + l^2 + m^2 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dans ce cas $\sigma_n = \sigma_{oct}$ (Contrainte normale octaédrique) et $\tau_n = \tau_{oct}$ (Contrainte tangentielle octaédrique).

$$\sigma_n = \{\vec{n}\}^t [\Sigma] \{\vec{n}\} \Rightarrow \{\vec{n}\}^t \{\vec{n}\} : \text{Opérateur de projection sur un axe.}$$

$$\vec{\tau}_n = -(*n)^2 [\Sigma] \{\vec{n}\} = -\{\vec{n}\} \wedge [\{\vec{n}\} \wedge [\Sigma] \{\vec{n}\}] \Rightarrow -(*n)^2 \text{ Opérateur de projection sur un plan.}$$

$$|\vec{\tau}_n| = |-\vec{n}| \cdot |\vec{n} \wedge \Sigma \vec{n}| \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{\tau}_n| &= \tau_n = \left| \{\vec{n}\} \wedge \right. \\ &= \left. [(*n) [\Sigma] \{\vec{n}\}] \right| \end{aligned}$$

Ou encore $\tau_n = \sqrt{t^2 - \sigma^2}$ car $\vec{t} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$

$$\sigma_n = \{\vec{n}\}^t [\Sigma] \{\vec{n}\} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1) \begin{bmatrix} 280 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{3} (280 + 50 - 120)$$

$$\sigma_n = 70 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = (*n)[\Sigma]\{\vec{n}\}$$

$$\tau_n = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 280 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \right|$$

$$\tau_n = \left| \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} -170 \\ 400 \\ -230 \end{Bmatrix} \right| = \frac{1}{3} \sqrt{170^2 + 400^2 + 230^2}$$

$$\tau_n = 164 \text{ MPa}$$

Sol. N° 3

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & -75 \\ 80 & -75 & -30 \end{bmatrix}$$

a) Contraintes principales

$$\det[\Sigma - \sigma_i I] = 0$$

$$-\sigma_i^3 + \sigma_i^2 S_1 - \sigma_i S_2 + S_3 = 0$$

- Calcul des invariants scalaires :

$$S_1 = \text{tr}[\Sigma] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 50 - 30 = 20$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 0 & -75 \\ -75 & -30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 50 & 80 \\ 80 & -30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 0 \end{vmatrix} = -16025$$

$$S_3 = \det[\Sigma] = -806250$$

- Méthode proposée pour résolution :

La solution du polynôme caractéristique est de la forme :

$$\sigma_i = \lambda_m + \frac{2}{3} \lambda_H \cos \left[\frac{2}{3} \pi (i-1) - \varphi \right], \quad i = 1, 2, 3$$

Avec :

$$\lambda_m = \frac{S_1}{3} = \frac{20}{3} = 6.66$$

$$\lambda_H = \sqrt{S_1^2 - 3S_2} = 220.17$$

$$\cos 3\varphi = \frac{2S_1^3 - 9S_1S_2 + 27S_3}{2\lambda_H^3} = -0.8839$$

$$3\varphi = (152.12)^\circ \Rightarrow \varphi = (50.7)^\circ$$

$$\sigma_1 = 6.66 + \frac{2}{3} 220.17 \cos(-50.7) = 99.6 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 6.66 + \frac{2}{3} 220.17 \cos(120 - 50.7) = 58.6 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 6.66 + \frac{2}{3} 220.17 \cos(240 - 50.7) = -138.2 \text{ N/cm}^2$$

b) La contrainte tangentielle

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{99.6 + 138.2}{2} = 118.9 \text{ N/cm}^2$$

c) Les directions des axes principaux

- Le 1^{er} axe principal : $\sigma_1 = 99.6 \text{ N/cm}^2$

$$\begin{bmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & -75 \\ 80 & -75 & -30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = 99.6 \begin{Bmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$$

Avec : $k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1$

$$\begin{cases} 50k_1 + 50l_1 + 80m_1 = 99.6k_1 \\ 50k_1 + 0l_1 - 75m_1 = 99.6l_1 \\ 80k_1 - 75l_1 - 30m_1 = 99.6m_1 \\ k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -49.6k_1 + 50l_1 + 80m_1 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ 50k_1 - 99.6l_1 - 75m_1 = 0 \dots\dots\dots(2) \\ 80k_1 - 75l_1 - 129.6m_1 = 0 \dots\dots\dots(3) \\ k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1 \dots\dots\dots(4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{1}{50} [49.6k_1 - 50l_1] \dots\dots\dots(1')$$

$$50k_1 - 99.6l_1 - \frac{75}{50} [49.6k_1 - 50l_1] = 0$$

$$\Rightarrow 50k_1 - 9.6l_1 - 46.5k_1 + 46.875l_1 = 0$$

$$\Rightarrow 3.5k_1 - 52.725l_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 15.064l_1 \Rightarrow$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} 15.064l_1 \\ l_1 \\ 8.715l_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow (15.064l_1)^2 + l_1^2 + (8.715l_1)^2 =$$

$$149.6k_1 + 50l_1 + 80m_1 = 0$$

$$50k_1 - 99.6l_1 - 75m_1 = 0 \Rightarrow 80m_1 = 49.6k_1 - 50l_1$$

$$80k_1 - 75l_1 - 129.6m_1 = 0$$

$$k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1 \quad m_1 \frac{49.6k_1 - 50l_1}{80} = 0.62k_1 - 0.625l_1 =$$

Remplacent dans (2)

$$50k_1 - 99.6l_1 - 75(0.62k_1 - 0.625l_1) = 0$$

$$3.5k_1 - 52.725l_1 = 0 \Rightarrow l_1 = + \frac{3.5}{52.725} k_1 \Rightarrow l_1 0.0663k_1$$

Remplacent dans (5)

$$m_1 = 0.62k_1 - 0.625 \cdot (0.0663l_1) = 0.578k_1$$

Remplacent (6) est (7) dans (4)

$$k_1^2 + (0.0663k_1)^2 + (0.578l_1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow k_1^2 (1 + (0.0663)^2 + (0.578)^2) = 1$$

$$k_1^2 = \frac{1}{1.3383} \Rightarrow k_1 = 0.864$$

$$l_1 = 0.0663 \times k_1 \Rightarrow l_1 = 0.057$$

$$m_1 = 0.578k_1 \Rightarrow m_1 = 0.499$$

$$\mathbf{r}_{n_1} = \begin{Bmatrix} 0.864 \\ 0.057 \\ 0.499 \end{Bmatrix}$$

On fait la même chose pour la deuxième et la troisième direction principale

- **Le 2^{er} axe principal** : $\sigma_2 = 58.6 \text{ N/cm}^2$

$$\begin{cases} 50k_2 + 50l_2 + 80m_2 = 58.6 k_2 \\ 50k_2 + 0l_2 - 75m_2 = 58.6 l_2 \\ 80k_2 - 75l_2 - 30m_2 = 58.6 m_2 \\ k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8.6 k_2 + 50l_2 + 80m_2 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ 50k_2 - 58.6 l_2 - 75m_2 = 0 \dots\dots\dots(2) \\ 80k_2 - 75l_2 - 88.6 m_2 = 0 \dots\dots\dots(3) \\ k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1 \dots\dots\dots(4) \end{cases}$$

Par addition (2.1) \times 3 et (2.3) \times 2, on trouve

$$134.2k_2 + 62.8m_2 = 0 \dots\dots\dots(2.1') \Rightarrow m_2 = -2.1369427k_2$$

Remplaçant m_2 dans équation (2.2)

$$50k_2 - 58.6 l_2 - 75(-2.1369427k_2) = 0 \dots\dots\dots(2.2') \Rightarrow l_2 = -3.588237k_2$$

$$\mathbf{r}_n = \begin{Bmatrix} k_2 \\ -3.588237k_2 \\ -2.1369427k_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow k_2^2 + (-3.588237k_2)^2 + (-2.1369427k_2)^2 = 1$$

$$18.441969k_2^2 = 1 \Rightarrow k_2^2 = 0.054224$$

$$\Rightarrow k_2 = 0.23286$$

$$\Rightarrow m_2 = -0.497608$$

$$\Rightarrow l_2 = -0.83555$$

$$\mathbf{r}_{n_2} = \begin{Bmatrix} 0.23286 \\ -0.83555 \\ -0.497608 \end{Bmatrix}$$

- **Le 3^{er} axe principal :** $\sigma_3 = -138.2 \text{ N/cm}^2$

$$\begin{bmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & -75 \\ 80 & -75 & -30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_3 \\ l_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = -138.2 \begin{Bmatrix} k_3 \\ l_3 \\ m_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Avec : } k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1$$

$$\begin{cases} 50k_3 + 50l_3 + 80m_3 = -138.2k_3 \\ 50k_3 + 0l_3 - 75m_3 = -138.2l_3 \\ 80k_3 - 75l_3 - 30m_3 = -138.2m_3 \\ k_3^2 + l_3^2 + m_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 188.2k_3 + 50l_3 + 80m_3 = 0 \dots\dots\dots(3.1) \\ 50k_3 + 138.2l_3 - 75m_3 = 0 \dots\dots\dots(3.2) \\ 80k_3 - 75l_3 + 108.2m_3 = 0 \dots\dots\dots(3.3) \\ k_3^2 + l_3^2 + m_3^2 = 1 \dots\dots\dots(3.4) \end{cases}$$

Par addition (3.1) \times (3) et (3.3) \times (2), on trouve

$$724.6k_3 + 456.4m_3 = 0 \dots\dots\dots(3.1') \quad \Rightarrow m_3 = 1.5876424k_3$$

En remplace m_3 dans l'équation (3.2)

$$50k_3 + 138.2l_3 - 75(1.5876424k_3) = 0 \dots\dots\dots(2') \Rightarrow l_3 = -0.499806k_3$$

$$\mathbf{\hat{n}} = \begin{Bmatrix} k_3 \\ -0.499806k_3 \\ 1.5876424k_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow k_3^2 + (-0.499806k_3)^2 + (1.5876424k_3)^2 = 1$$

$$3.770414k_3^2 = 1 \Rightarrow k_3^2 = 0.2652229$$

$$\Rightarrow k_3 = 0.514998$$

$$\Rightarrow m_3 = 0.8176326$$

$$\Rightarrow l_3 = -0.257399$$

$$\mathbf{\hat{n}}_3 = \begin{Bmatrix} 0.514998 \\ -0.257399 \\ 0.8176326 \end{Bmatrix}$$

Tenseur de déformation

Exercice N° 1 :

Soit un vecteur déplacement défini par :

$$\bar{U} = (6x^5 y^4 + 5z^9) \bar{e}_1 + (3x^4 y^5 + 5z^9) \bar{e}_2 + 4x^2 y^2 z^5 \bar{e}_3$$

- a) Déterminer le tenseur de déformation puis démontrer que ce tenseur vérifie les équations de compatibilité

Exercice N° 2 :

Soit un état de déformation en un point défini par :

$$\varepsilon_x = 400 \times 10^{-6}, \varepsilon_y = 200 \times 10^{-6}, \gamma_{xy} = 350 \times 10^{-6}$$

- a) Déterminer les déformations principales ainsi que leurs directions.
 b) Déterminer la déformation normale suivant l'axe incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'axe x dans le sens des aiguilles d'un montre.

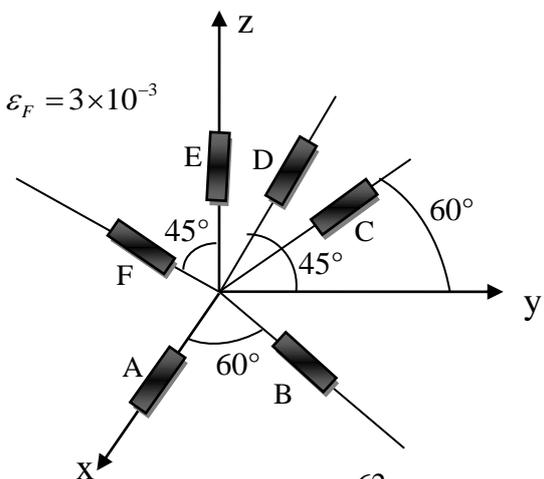
Exercice N° 3 :

En vue de déterminer expérimentalement le tenseur de déformations en un point M d'un solide. On place autour de ce point un dispositif expérimental (6 jauges extensométrique) permettant la mesure directe des allongements unitaires suivant les 06 directions considérées.

Les 06 mesures, nous donnent :

$$\varepsilon_A = 6 \times 10^{-3}, \varepsilon_B = 4.5 \times 10^{-3}, \varepsilon_C = 3 \times 10^{-3}, \varepsilon_D = 1.5 \times 10^{-3}, \varepsilon_E = 0, \varepsilon_F = 3 \times 10^{-3}$$

- B, C dans le plan xy
- D dans le plan yz
- F dans le plan xz



- a) Déterminer le tenseur de déformations de ce point.
 b) Déterminer les déformations principales ainsi que leurs directions.

Exercice N° 4 :

Soit un état de déformation en un point défini par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0.001 = 10^{-3} & , & \frac{1}{2}\gamma_{xy} = 0.0015 = 1.5 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_y &= -0.0005 = -0.5 \times 10^{-3} & , & \frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0.0005 = 0.5 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_z &= 0.0005 = 0.5 \times 10^{-3} & , & \frac{1}{2}\gamma_{xy} = 0.0004 = 0.4 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

- Déterminer les déformations principales directes ainsi que leurs directions principales.

Exercice N° 5 :

Chercher les déformations et montrer qu'elles satisfassent aux équations de continuité de la matière si on donne les déplacements :

$$w = -\frac{xz}{a} \quad , \quad V = \frac{vxy}{a} \quad , \quad u = \frac{1}{2a} \left[z^2 + v(x^2 - y^2) \right]$$

Exercice N° 6 :

Chercher les déformations et montrer qu'elles satisfassent aux équations de continuité de la matière si on donne les déplacements

$$2GU = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_1)$$

$$2GV = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)$$

$$2GW = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)$$

Où G = constante

$\varphi_i = \varphi_i(x, y, z)$ Fonction continues

Solution

- Les équations de compatibilité

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

- **Sol. N° 1**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 30x^4 y^4$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 15x^4 y^4$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 20x^2 y^2 z^4$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 24x^5 y^3 + 12x^3 y^5$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 45z^8 + 8xy^2 z^5$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 45z^8 + 8x^2 yz^5$$

L'équation de compatibilité :

$$(1) \quad \varepsilon_x = 30x^4 y^4$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = 120x^4 y^3 ; \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 16x y z^5 ; \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 16x y z^5 ; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$$

Donc on trouve :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} (-16x y z^5 + 16x y z^5) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{(Vérfiée)}$$

$$(2) \quad \varepsilon_y = 15x^4 y^4$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = 15x^4 y^4 ; \quad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 16x y z^5 ; \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 16x y z^5 ; \quad \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} = 0 \quad \text{(Vérfiée)}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} (16x y z^5 - 16x y z^5) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$(3) \quad \varepsilon_z = 20x^2 y^2 z^4$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = 40x y^2 z^4 ; \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = 80x y z^4 ; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 16x y z^5 ; \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 16x y z^5 ; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = 160x y z^4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} (16x y z^5 + 16x y z^5) = \frac{\partial}{\partial z} 2(16x y z^5) = \frac{\partial}{\partial x} 32x y z^5$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = 160x y z^4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} (16x y z^5 + 16x y z^5) = 160x y z^4 \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

(Vérfiée)

$$(4) \quad \gamma_{xy} = 24x^5 y^3 + 12x^3 y^5$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = 120x^4 y^3 + 36x^2 y^5 ; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = 360x^4 y^2 + 180x^2 y^4 ;$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 360x^4 y^2 + 180x^2 y^4;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 180x^2 y^4$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 360x^4 y^2$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

$$60x^4 y^2 + 180x^2 y^4 = 60x^4 y^2 + 180x^2 y^4 \text{ (Vérfiée)}$$

$$(5) \gamma_{xz} = 45z^8 + 8xy^2 z^5$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} = 8y^2 z^5; \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = 40y^2 z^4;$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 40y^2 z^4;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 40y^2 z^4$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

$$40y^2 z^4 = 40y^2 z^4 \text{ (Vérfiée)}$$

$$(6) \gamma_{yz} = 45z^8 + 8x^2 yz^5$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} = 8x^2 z^5; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = 40x^2 z^4;$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 40x^2 z^4;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 40x^2 z^4$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

$$40x^2 z^4 = 40x^2 z^4 \text{ (Vérfiée)}$$

Sol. N° 2

Nous avons les déformations suivantes :

$$\varepsilon_x = 400 \times 10^{-6}, \varepsilon_y = 200 \times 10^{-6}, \gamma_{xy} = 350 \times 10^{-6}$$

On doit déterminer les déformations principales, leurs directions et la déformation suivant l'axe incliné de 30° par rapport à x dans le sens des aiguilles d'une montre.

- Détermination des déformations principales :

$$\text{On calcul } \det[\xi - \varepsilon_i] = 0$$

Le tenseur de déformations d'après les données sera :

$$[\xi] = \begin{bmatrix} 400 \times 10^{-6} & 175 \times 10^{-6} & 0 \\ 175 \times 10^{-6} & 200 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On aura :

$$\det \begin{bmatrix} 400 \times 10^{-6} - \varepsilon_i & 175 \times 10^{-6} & 0 \\ 175 \times 10^{-6} & 200 \times 10^{-6} - \varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_i \end{bmatrix} = 0$$

Comme c'est le cas des déformations planes, on aura les déformations principales :

$$(400 \times 10^{-6} - \varepsilon_i)(200 \times 10^{-6} - \varepsilon_i) - (175 \times 10^{-6})^2 = 0$$

$$80000 \times 10^{-12} - 400 \times 10^{-6} \varepsilon_i - 200 \times 10^{-6} \varepsilon_i + \varepsilon_i^2 - (175 \times 10^{-6})^2 = 0$$

$$\varepsilon_i^2 - 600 \times 10^{-6} \varepsilon_i + 49375 \times 10^{-12} = 0$$

$$\Delta = (-600 \times 10^{-6})^2 - 4(49375 \times 10^{-12})$$

$$\Delta = 162500 \times 10^{-12}$$

$$\sqrt{\Delta} = 403.113 \times 10^{-6}$$

Les déformations principales sont notées en $\varepsilon_x, \varepsilon_y$

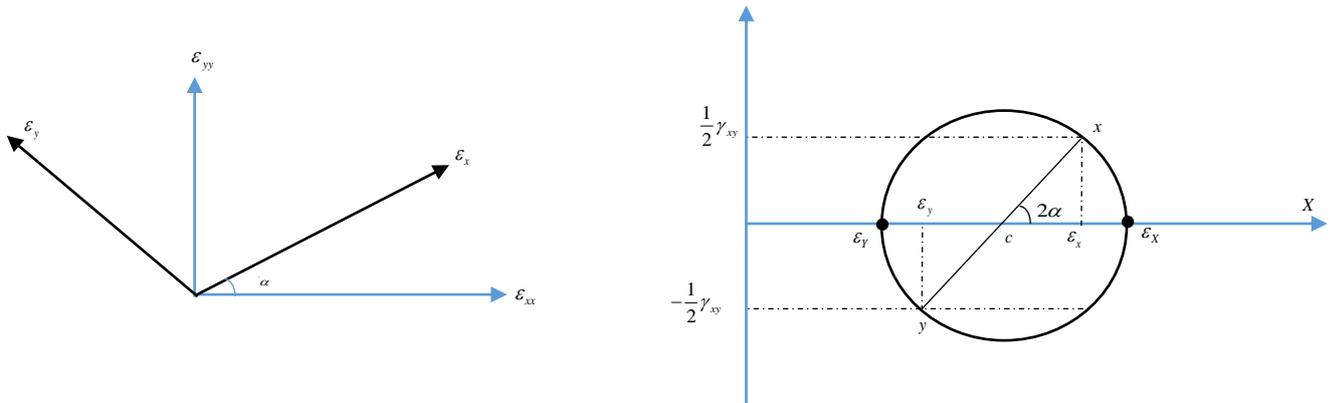
$$\varepsilon_{x,y} = \frac{-600 \times 10^{-6} \pm 403.113 \times 10^{-6}}{2}$$

Comme on doit prendre $\varepsilon_x > \varepsilon_y$ donc :

$$\varepsilon_x = \frac{-600 \times 10^{-6} + 403.113 \times 10^{-6}}{2} = 501.556 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{-600 \times 10^{-6} - 403.113 \times 10^{-6}}{2} = 98.44 \times 10^{-6}$$

- D'après le cercle de Mohr, on peut calculer les directions principales, on aura :



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1/2 \gamma_{xy}}{\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}} = \frac{175 \times 10^{-6}}{(400 - 200) \times 10^{-6}} = 1.75$$

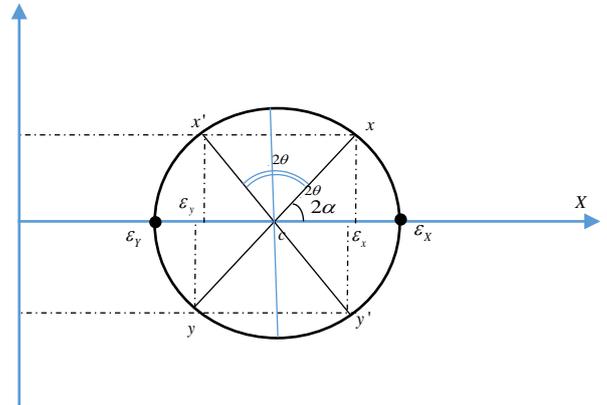
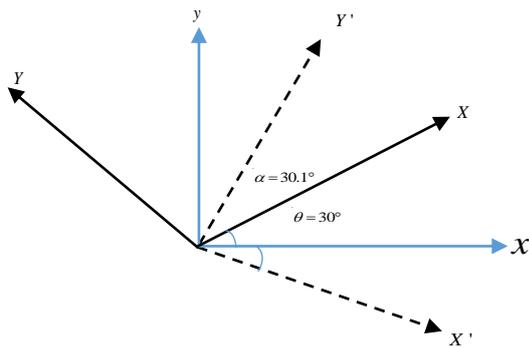
$$\Rightarrow 2\alpha = 60.26 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 30.13^\circ$$

La seconde direction principale sera donc la complémentaire de la première c'est-à-dire :

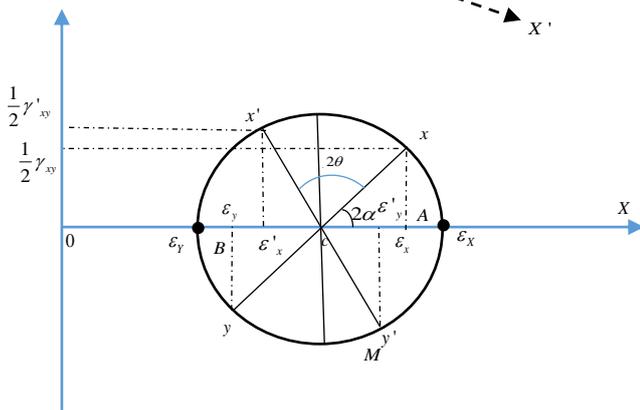
$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1 = 90^\circ + 30.13^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 120.13^\circ$$

Détermination des déformations suivant l'axe incliné de 30° par rapport à x dans le sens des aiguilles d'une montre :



On note le point A ou figure ϵ'_y
et le point B ou figure ϵ'_x



$$\epsilon_{yy'} = OC + CA \quad OC = \epsilon_y + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

Angle compris entre l'axe X et y' est : $(\pi - 2\theta - 2\alpha)$

D'où $CA = CM \cos(\pi - 2\theta - 2\alpha)$

$$M = \text{le rayon du cercle} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}$$

$$CA = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(\pi - 2\theta - 2\alpha) \cong 100.77 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_{yy'} = OC + CA = 300 \times 10^{-6} + 100.779 \times 10^{-6} \cong 401.5 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_{xx'} = OC - CB = 300 \times 10^{-6} - 100.779 \times 10^{-6} \cong 199 \times 10^{-6}$$

De la même manière géométriquement,

$$\operatorname{tg}(\pi - 2\theta - 2\alpha) = \frac{1/2 \gamma_{xy'}}{CA}$$

$$\Rightarrow 1/2 \gamma_{x'y'} = 172.724$$

$$\Rightarrow \gamma_{x'y'} = 345.45$$

- **Sol. N° 3**

$$\{\vec{n}_A\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{n}_B\} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{n}_C\} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{n}_D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{n}_E\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{n}_F\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

- Calcul les déformations suivant la direction \vec{n}

-

$$\varepsilon = \{\vec{n}\}^t [\xi] \{\vec{n}\}$$

$$= \begin{Bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{yz} n_y n_z + \gamma_{xz} n_x n_z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_A = \{\vec{n}_A\}^t [\xi] \{\vec{n}_A\} = \varepsilon_x 1^2 \\ \varepsilon_B = \{\vec{n}_B\}^t [\xi] \{\vec{n}_B\} = \varepsilon_x \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon_y \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \gamma_{xy} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varepsilon_C = \{\vec{n}_C\}^t [\xi] \{\vec{n}_C\} = \varepsilon_x \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \varepsilon_y \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \gamma_{xy} \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \varepsilon_D = \{\vec{n}_D\}^t [\xi] \{\vec{n}_D\} = \varepsilon_y \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \varepsilon_z \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \gamma_{yz} \sqrt{\frac{2}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon_E = \{\vec{n}_E\}^t [\xi] \{\vec{n}_E\} = \varepsilon_z 1^2 \\ \varepsilon_F = \{\vec{n}_F\}^t [\xi] \{\vec{n}_F\} = \varepsilon_x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \varepsilon_z \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \gamma_{xz} \sqrt{\frac{2}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

On fait le calcul

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A = 6 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_E = 0$$

$$\varepsilon_F = \varepsilon_x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \varepsilon_z \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \gamma_{xz} \sqrt{\frac{2}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\varepsilon_F}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} - \varepsilon_x = \frac{3 \times 10^{-3}}{0.5} - 6 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-3} - 6 \times 10^{-3} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$\varepsilon_B = \varepsilon_C$ On trouve :

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = 2.16 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = 1.5 \times 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{yz} = 0.75 \times 10^{-3}$$

Le tenseur de déformation sera :

$$[\xi] = \begin{bmatrix} 6 & 2.16 & 0 \\ 2.16 & 1.5 & 0.75 \\ 0 & 0.75 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

- Détermination des déformations principales ainsi que leurs directions :

$$\det[\xi - \varepsilon_i I] = 0$$

$$\det[\xi - \varepsilon_i I] = \begin{bmatrix} 6 - \varepsilon_i & 2.16 & 0 \\ 2.16 & 1.5 - \varepsilon_i & 0.75 \\ 0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & 0 - \varepsilon_i \end{bmatrix} \times 10^{-3} = 0$$

$$(\varepsilon - 6.88 \times 10^{-3})(-\varepsilon^2 + 0.62 \times 10^{-3} \varepsilon + 0.49 \times 10^{-6}) = 0$$

$$-\varepsilon_i^3 + \varepsilon_i^2 I_1 - \varepsilon_i I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 = \text{trc}[\xi] = 6 \times 10^{-3} + 1.5 \times 10^{-3}$$

$$I_1 = 7.5 \times 10^{-3}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1.5 & 0.75 \\ 0.75 & 0 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 6 & 2.16 \\ 2.16 & 1.5 \end{vmatrix} \times 10^{-3}$$

$$I_2 = 3.77 \times 10^{-6}$$

$$I_3 = \det[\Sigma]$$

$$I_3 = -3.3 \times 10^{-9}$$

$$\lambda_m = \frac{I_1}{3} = \frac{7.5}{3} = 2.5 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_H = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} = 6.7 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_1 = 6.88 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = 1.07 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_3 = -0.45 \times 10^{-3}$$

Les directions principales :

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 0.92 \\ 0.38 \\ 0.04 \end{Bmatrix}, \quad x_2 = \begin{Bmatrix} -0.34 \\ 0.76 \\ 0.55 \end{Bmatrix}, \quad x_3 = \begin{Bmatrix} 0.18 \\ -0.52 \\ 0.83 \end{Bmatrix}$$

- **Sol. N° 4**

$$\xi = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

- Invariants scalaires :

$$I_1 = \text{tr}[\xi] = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad I_1 = 10 \times 10^{-4}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix}, \quad I_2 = -2.91 \times 10^{-6}$$

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = 0, \quad I_3 = -0.945 \times 10^{-9}$$

- L'équation caractéristique $\det \left[[\xi] - \varepsilon_i [I] \right]$

$$\det \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_i & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_i & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_i \end{bmatrix} = 0$$

$$-\varepsilon_i^3 + \varepsilon_i^2 I_1 - \varepsilon_i I_2 + I_3 = 0$$

- Les valeurs propres sont (solution de l'équation caractéristique) :

$$\varepsilon_i = \lambda_m + \frac{2}{3}\lambda_H \cos \left[\frac{2}{3}\pi(i-1) - \varphi \right], \quad i = 1, 2, 3$$

Où :

$$\lambda_m = \frac{I_1}{3} = 0.333 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_H = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} = 3.1193 \times 10^{-3}$$

$$\cos 3\varphi = \frac{2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3}{2\lambda_H^3} = -0.0440684$$

$$3\varphi = (87.474)^\circ \Rightarrow \varphi = (29.158)^\circ$$

$$\varepsilon_1 = 21.5 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = 3 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = -14.5 \times 10^{-4}$$

- Détermination des orientations des axes principaux :
- Détermination de la direction dans laquelle agit ε_1

En supposant que les cosinus directeurs de cette direction par rapport à x, y et z sont α, β, γ respectivement

$$[\xi] \{\vec{n}\} = \varepsilon_1 \{\vec{n}\}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \times 10^{-4} & 15 \times 10^{-4} & 4 \times 10^{-4} \\ 15 \times 10^{-4} & -5 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} \\ 4 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = 21.5 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -11.5 \alpha + 15 \beta + 4 \gamma = 0 \\ 15 \alpha - 26.5 \beta + 5 \gamma = 0 \\ 4 \alpha + 5 \beta - 16.5 \gamma = 0 \end{cases}$$

Et en utilisant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

- ✓ Par soustraction $3 \times (3)$ et (1), on trouve α en fonction γ

$$23.5 \alpha - 61.5 \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{61.5}{23.5} \gamma = 2.61702128 \gamma \dots (*)$$

- ✓ En remplace la valeur α équation (2), on trouve β en fonction γ

$$15 (2.617021 \gamma) - 26.5 \beta + 5 \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 1.67 \gamma \dots (**)$$

- ✓ En remplace (*) et (**) (4), on trouve γ

$$(2.61702 \gamma)^2 + (1.67 \gamma)^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 = 0.0941187$$

$$\gamma = 0.306, \quad \alpha = 0.8, \quad \beta = 0.511$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.511 \\ 0.306 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.7872, \beta = 0.5108, \gamma = 0.3456$$

Même chose pour les deux autres directions.

2/ Détermination de la direction dans la quelles agit ε_2 ($\varepsilon_2 = 3 \cdot 10^{-4}$)

$$[\xi] \times \{\vec{n}\} = \varepsilon_2 \times \{\vec{n}\}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \times 10^{-4} & 15 \times 10^{-4} & 4 \times 10^{-4} \\ 15 \times 10^{-4} & -5 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} \\ 4 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = 3 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix}$$

- **Ecrire la matrice sous forme équations**

$$\Rightarrow \begin{cases} 7\alpha + 15\beta + 4\gamma = 0 \dots\dots(1) \\ 15\alpha - 8\beta + 5\gamma = 0 \dots\dots(2) \\ 4\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \dots\dots(3) \end{cases}$$

Et utilisant

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

- **Résoudre le système des équations**

Par subtraction (1) et (3) $\times 2$, on trouve α en fonction β

$$-\alpha + 5\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 5\beta \dots\dots(*)$$

En remplace la valeur α équation (2), on trouve γ en fonction β

$$15(5\beta) - 8\beta + 5\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{67}{5}\beta = -13.5\beta \dots(**)$$

✓ En remplace (*) et (**) dans (4), on trouve β

$$(5\beta)^2 + (-13.5\beta)^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta^2 = 0.004994$$

$$\gamma = -0.93324, \alpha = 0.3535, \beta = 0.0707$$

$$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0.3535 \\ 0.0707 \\ -0.93324 \end{pmatrix}$$

2/ détermination de la direction dans la quelles agit $\varepsilon_3 = -14.5 \times 10^{-4}$

$$[\xi] \times \{\vec{n}\} = \varepsilon_3 \times \{\vec{n}\}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \times 10^{-4} & 15 \times 10^{-4} & 4 \times 10^{-4} \\ 15 \times 10^{-4} & -5 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} \\ 4 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = -14 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

On écrit la matrice sous forme équations

$$\Rightarrow \begin{cases} 24.5\alpha + 15\beta + 4\gamma = 0 \dots\dots(1) \\ 15\alpha + 9.5\beta + 5\gamma = 0 \dots\dots(2) \\ 4\alpha + 5\beta + 19.5\gamma = 0 \dots\dots(3) \end{cases}$$

Et utilisant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

- **Résoudre le système des équations**

✓ Par subtraction (1) et (3) $\times 3$, on trouve α en fonction γ

$$12.5\alpha - 7.5\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0.6 \gamma \dots\dots(*)$$

✓ En remplace la valeur α dans équation(2), on trouve β en fonction γ

$$15(0.6\gamma) + 9.5\beta + 5\gamma = 0 \Rightarrow \beta = \frac{14}{9.5} \gamma = 1.47368 \dots\dots(**)$$

✓ En remplace (*) et (**) dans (4), on trouve γ

$$(0.6\gamma)^2 + (1.47368\gamma)^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 = 0.283146138$$

$$\gamma = 0.5321148 \quad \alpha = 0.3192 \quad \beta = 0.7817$$

$$\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 0.3192 \\ 0.7817 \\ 0.5321148 \end{pmatrix}$$

- **Sol. N° 5**

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a} \nu 2x = \frac{\nu x}{a} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu x}{a} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-x}{a} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2a} (-\nu) 2y + \frac{\nu y}{a} \right] = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = [0 + 0] = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \left[\frac{2z}{2a} + \left(-\frac{z}{a} \right) \right] = 0 \end{array} \right.$$

Ces déformations satisferont aux équations de compatibilité, les dérivées de chaque membre de chaque équations égale à zéro.

- **Sol. N° 6****Les déplacements**

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_1) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_1) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) \right) \\ &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_1) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \right) \\ &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \right) \\ &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial z}\end{aligned}$$

Vérification des équations de continuité :

- **Equation de compatibilité**

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (1) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (2) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (3) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \dots\dots\dots (4) \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \dots\dots\dots (5) \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \dots\dots\dots (6) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = 2 \frac{1}{2G} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y \partial z} (\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) = -\frac{1}{G} \left(-\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y \partial z} \right)$$

$$(2) \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = 2 \frac{1}{2G} \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x \partial z} (\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^2 \partial x \partial z} - \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^2 \partial x \partial z} + \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial y^2 \partial x \partial z} \right)$$

$$(3) \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{1}{2G} \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x \partial y} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial z^2 \partial x \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z^2 \partial x \partial y} - \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial z^2 \partial x \partial y} \right)$$

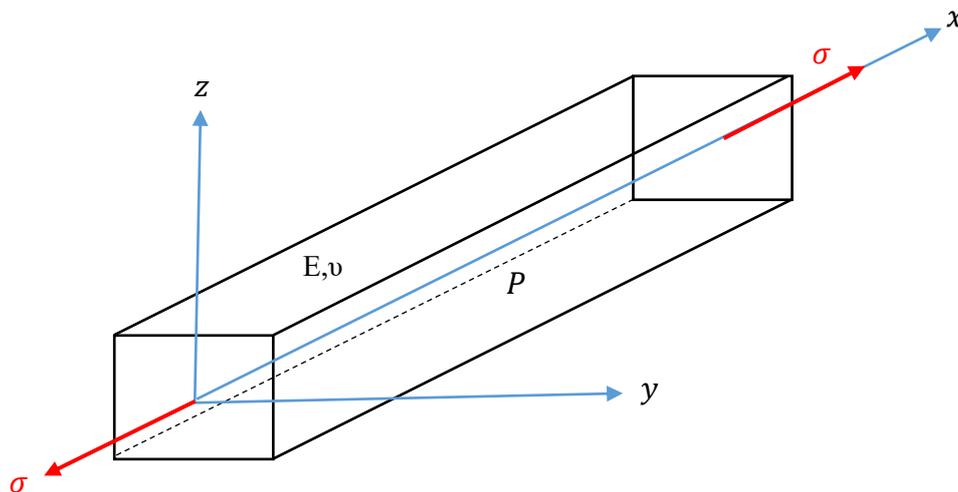
La même chose pour (4), (5) et (6)

Par conséquent ces déformations satisfont les équations de continuités

Comportement élastique linéaire

Exercice N° 1 :

- On considère une plaque rectangulaire chargée en traction uniaxiale, comme le montre la figure 1 :

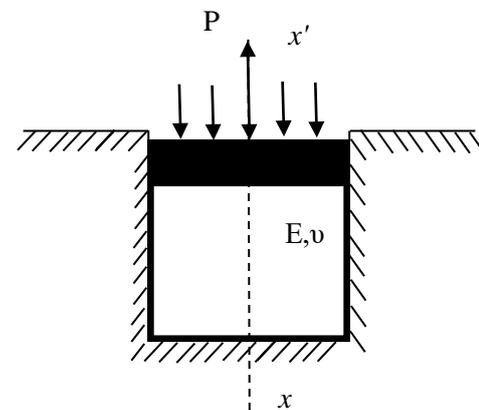


Le matériau a pour caractéristiques élastiques E, ν .

- 1) Montrer qu'il existe en chaque point P deux directions parallèles au plan $(x \ o \ y)$ suivant lesquelles la dilatation linéaire est nulle. Calculer le glissement \mathbf{g} suivant ces deux directions. Y-a-t'il d'autres directions de dilatation nulle, non parallèle à $(x \ o \ y)$?
- 2) En un point P d'un solide de forme quelconque, soumis à un chargement quelconque, existe-t-il toujours des directions de dilatation nulle ?-Sinon, à quelles conditions ces directions existent-elles ?, Existe-t-il toujours des directions suivant lesquelles le glissement \mathbf{g} est nul ?

Exercice N° 2 :

Dans une cavité cylindrique de révolution, de rayon R indéformable, on introduit un élément cylindrique de révolution, de hauteur h , et le rayon R de caractéristique E, ν . Par l'intermédiaire d'un piston indéformable on applique une pression uniforme P .



x désigne l'axe du cylindre (r, θ, x)

- Calculer les composantes de matrice des contraintes et de déformations.
- Calculer la pression exercée pour le matériau élastique par sur la paroi cylindrique
- A quelle condition a-t-on $q = p$,
- A quelle condition a-t-on $q = 0$.

Exercice N° 3 :

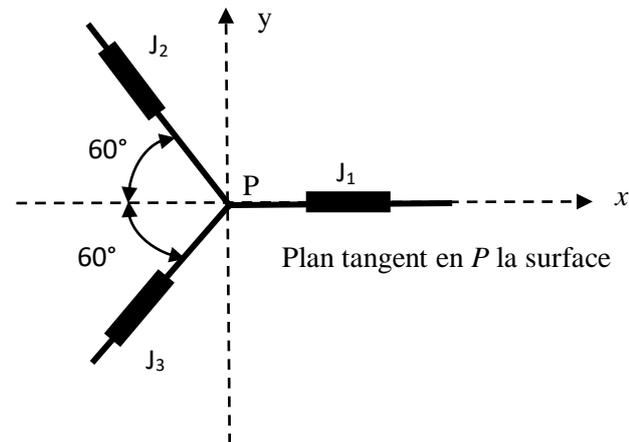
En un point P de la surface libre (c'est -à-dire non chargée) d'une structure au repos, on a collé une rosette comme l'indique la figure. Le matériau de la structure, un alliage d'aluminium, a pour caractéristiques élastique $E = 70 \text{ EI}0^9 \text{ Pa}$ et $\nu = 1/3$. Sous l'action du chargement, les jauges indiquent les allongements relatifs suivants :

$$\varepsilon_1 = 200 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = 500 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_3 = 200 \times 10^{-6}$$

- Calculer la matrice des déformations $[\xi]$.
- Trouver les déformations principales et les axes associés.
- Calculer la matrice des contraintes $[\Sigma]$.
- Calculer les contraintes principales.



Exercice N° 4 :

En un point P de la surface libre d'une structure au repos, on a collé une rosette comme l'indique la figure, dessinée dans le plan tangent en P à cette surface. Le matériau est un acier de caractéristiques élastiques, à la température ordinaire $E = 210.10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.3$.

Sous l'action du chargement appliqué, les jauges indiquent les allongements relatifs suivants :

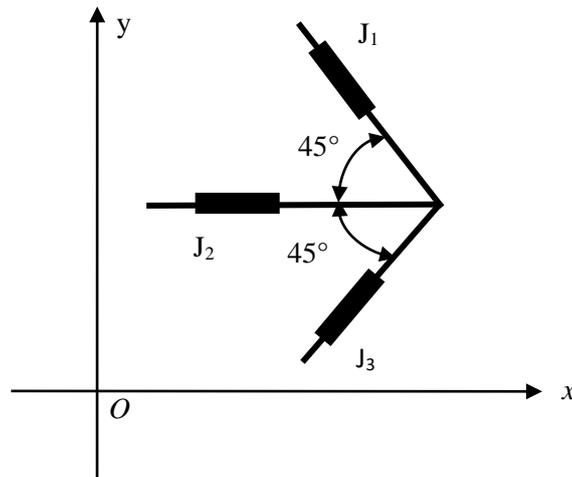
$$\varepsilon_1 = 100 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = 200 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_3 = 300 \times 10^{-6}$$

- Calculer, dans les axes $\{o, x, y, z\}$ la matrice des déformations $[\xi]$.
- Trouver les axes principaux et les déformations principales.

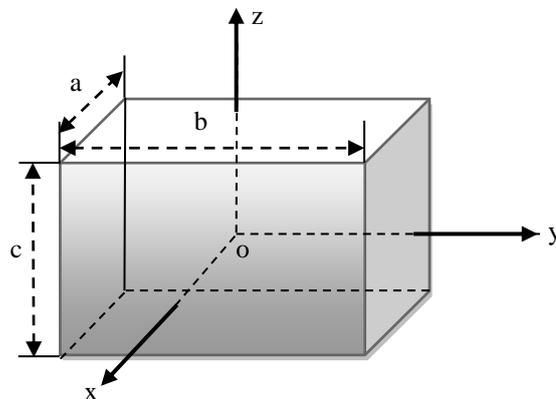
- Calculer la matrice de contrainte $[\Sigma]$, puis les contraintes principales.



Exercice N° 5 :

Un pavé, d'axes de symétrie : Ox, Oy, Oz a pour longueurs d'arêtes a, b, c (resp). Ses caractéristiques élastiques sont E et ν .

Les facettes d'équation $x = \pm \frac{a}{2}$ sont soumises à une pression d'intensité P



On impose à la face d'équation $y = -\frac{b}{2}$ un déplacement normal de mesure algébrique $-\alpha > 0$

sur Oy et à celle d'équation $y = \frac{b}{2}$ un déplacement normal de mesure algébrique $-\alpha$ sur Oy

Les faces d'équations $z = \pm \frac{c}{2}$ sont libres.

- Calculer la matrice des contraintes au point courant P .
- Calculer la matrice de déformation $[\xi]$ au point courant P .
- Calculer la dilatation volumique relative $\frac{\delta V}{V}$

- Calculer la contrainte normale σ_0 et la contrainte tangentielle τ_0 dans la fibre de centre o et de paramètres directeurs : l, l, l .
- Calculer l'allongement relatif ε_0 et le glissement g_0 dans cette même fibre .

Exercice N° 6 :

En un point P de la surface libre d'une structure au repos, on a collé une rosette comme l'indique la figure. Le matériau est du cuivre, de caractéristiques élastiques $E = 100 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 1/3$. Sous l'action du chargement appliqué, les jauges indiquent les allongements relatifs suivants :

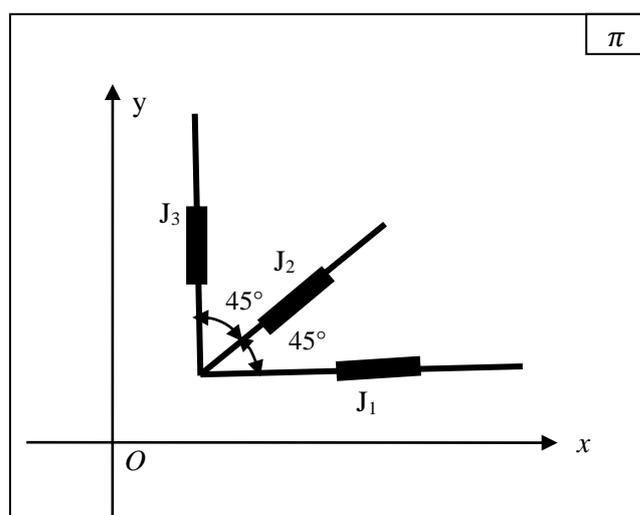
$$\varepsilon_1 = 250 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = -160 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_3 = -50 \times 10^{-6}$$

Calculer, en P , dans les axes $\{P, x, y, z\}$:

- Les six composantes du tenseur des déformations
- Les six composantes du tenseur de contraintes
- Les directions principales
- Les trois déformations principales.
- Les trois contraintes principales
- Les trois invariants scalaires du tenseur des déformations
- Les contraintes normales « octaédriques » et la cission « octaédrique » c.-à-d. que relative à la direction $(1, 1, 1)$, dans les axes principaux.



Figures dans le plan tangent (π) en P à la structure.

Exercice N° 7 :

En un point P de la structure libre d'une structure au repos, on a collé une rosette comme l'indique la figure (effectuée dans le plan tangent en P de la structure).

Sous l'action du chargement appliqué, on trouve les dilatations linéiques suivantes :

$$\varepsilon_1 = 140 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = 106 \times 10^{-6}$$

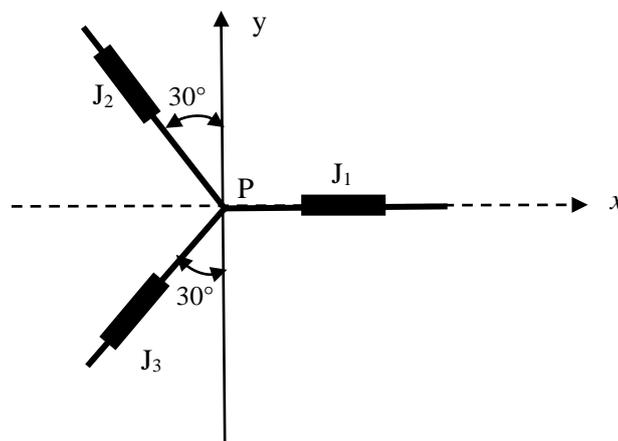
$$\varepsilon_3 = 54 \times 10^{-6}$$

Le matériau est un alliage d'aluminium, de caractéristiques élastiques $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 1/3$.

Calculer, en P , dans les axes $\{P, x, y, z\}$:

- Les six composantes de la matrice des déformations
- Les six composantes de la matrice de contraintes
- Les directions principales P_x, P_y, P_z
- Les trois déformations principales et les trois contraintes principales.
- Tracer les diagrammes de Mohr des déformations et des contraintes.

En déduire γ_{\max} et τ_{\max}



Exercice N° 8 :

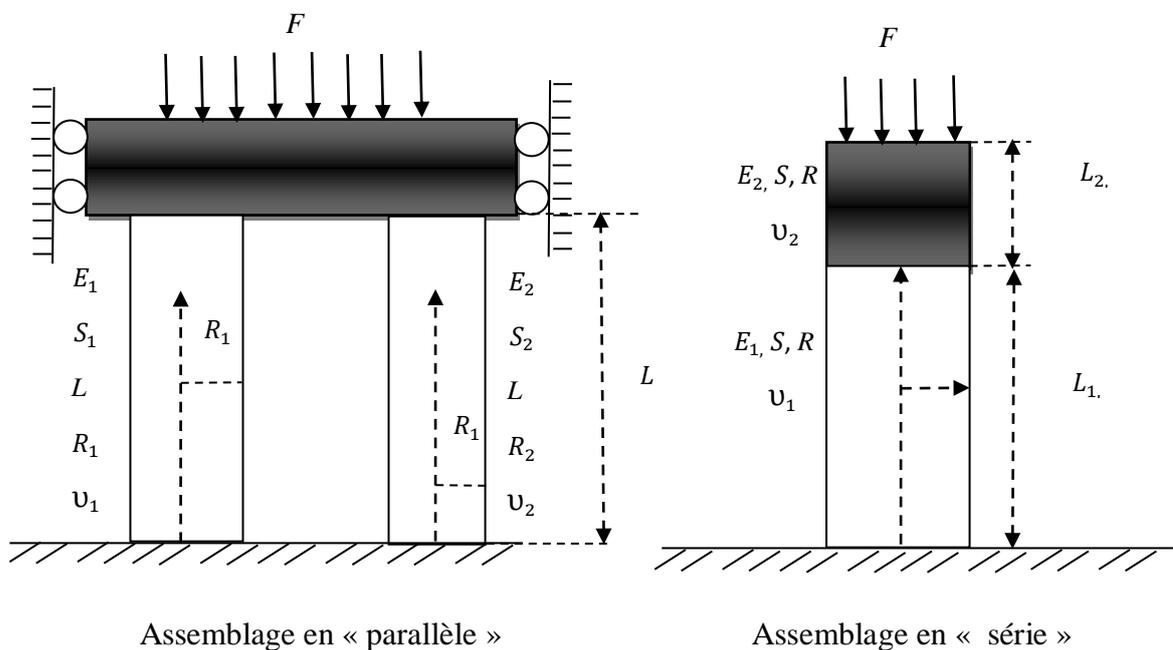
Dans les deux cas, on assemble deux barreaux cylindriques pleins, réalisés en matériaux élastiques différents. Les interfaces sont supposés parfaitement lubrifiés pour permettre des déplacements radiaux relatifs sans frottement.

Le piston de l'assemblage « en parallèle » est indéformable.

On appelle rigidité de compression d'un barreau le rapport $K = \frac{F}{(-\delta L)}$, entre l'effort de compression qui lui est appliqué et l'accourcissement $(-\delta L)$ qu'il subit.

Dans chacun des deux cas, calculer dans chaque solide, les champs de contrainte, déformation et déplacements.

Calculer ensuite de l'assemblage K en fonction des rigidités K_1 et K_2 de chacun des deux solides élastiques.

**Exercice N° 9 :**

La plaque est rapportée à ses axes de symétrie Ox, Oy, Oz . Les côtés parallèles à Ox et Oy ont pour longueurs d'arêtes $2a$ et $2b$. L'épaisseur est h .

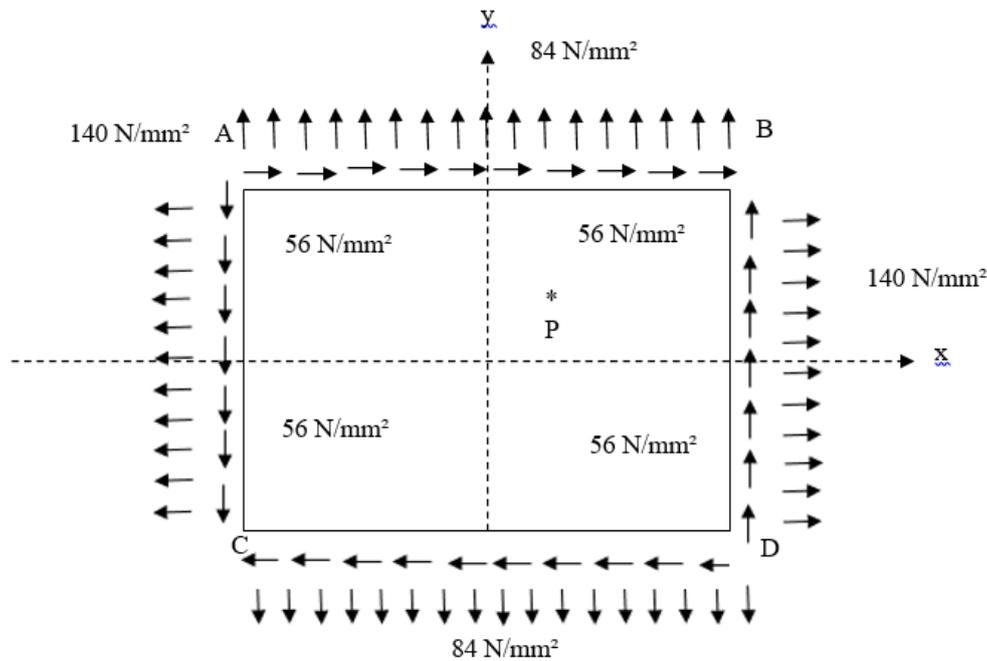
Les coefficients élasticité sont notés E et ν . Le chargement a lieu exclusivement sur les bords sous forme de forces surfaciques uniformément réparties. Comme l'indique la figure. On prendra :

$$a = 1\text{ m}; b = 0.5\text{ m}; h = 0.01\text{ m}; E = 200\text{ GPa}; \nu = 0.25$$

Donner au point courant $P(x,y,z)$, les composantes des tenseurs de contrainte et de déformation, celles du vecteur translation et du pseudo-vecteur rotation.

- Quelles sont en particulier les déplacements des sommets du rectangle ?

On considérera que le voisinage de la particule 0 ne subit ni translation ni rotation, c'est-à-dire que les axes sont liés à ce voisinage.



Solution

Sol N° 1 :

1) En P. la matrice des contraintes, dans les axes $\{o, x, y, z\}$ a une seule composante non nulle : $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ (donné). d'après la loi de Hooke, la matrice de déformation s'écrit donc :

$$[\xi] = \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

Dans une fibre parallèle au plan (x, y) , d'angle polaire α par rapport à Ox , la dilatation linéaire relative est :

$$\varepsilon = \vec{n}^T [\xi] \vec{n} = \frac{\sigma}{E} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \text{ on a donc : } (\varepsilon = 0) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\nu} \right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\nu}} \right)$$

Suivant ces directions. On a $\{\vec{g}\} = [\xi] \vec{n}$ soit :

$$\{\vec{g}\} = \frac{\sigma}{E} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ -\nu \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } g = |\vec{g}| = \frac{|\sigma|}{E} (\cos^2 \alpha + \nu^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{On a ici : } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\nu}{1 + \nu} \text{ et } \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \nu}$$

$$\text{Donc : } g = \frac{|\sigma|}{E} \sqrt{\nu}$$

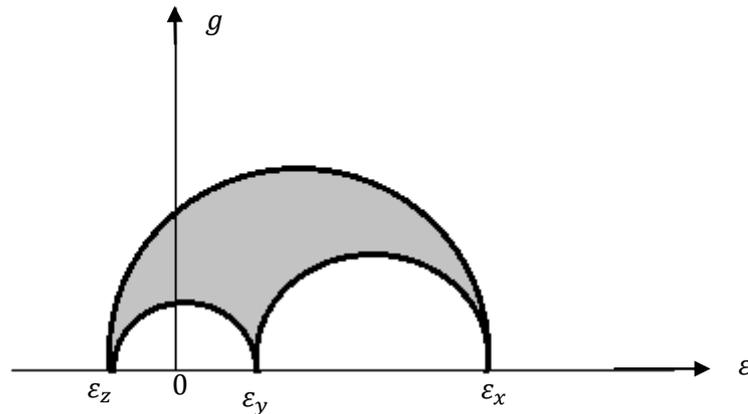
Cherchons s'il existe des directions $\vec{n}(\alpha, \theta, \gamma)$ de dilatation nulle, autres que celles trouvées plus haut. On a :

$$\varepsilon = \vec{n}^T [\xi] \vec{n} = \frac{\sigma}{E} [\alpha^2 - \nu(\beta^2 + \gamma^2)]$$

$$(\varepsilon = 0) \Leftrightarrow \alpha^2 = \nu(\beta^2 + \gamma^2)$$

Les fibres de dilatation nulle sont donc situées sur un cône de sommet P , d'axe de révolution

$$P_x \text{ et de demi-angle au sommet } \theta \text{ telle que } \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{1}{\nu}}$$



- 2) Le diagramme de Mohr des déformations montre qu'il existe des fibres de dilatation nulle si (et seulement si) l'axe g coupe le domaine de Mohr, donc si les trois déformations principales ne sont pas de même signe (ni toutes les trois positives, ni toutes les trois négative).

Suivant les directions principales du tenseur des déformations E , le glissement est nul.

Sol N° 2 :

Le problème est axisymétrique méridien. Au point courant P du matériau élastique, on a donc :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \text{ et } [\xi] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_x \end{bmatrix}$$

Avec les relations :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_x + \sigma_r)]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\sigma_x = -p, \varepsilon_r = 0, \varepsilon_\theta = 0$$

On a alors les équations :

$$\sigma_r - \nu(\sigma_\theta - p)$$

$$\sigma_\theta - \nu(\sigma_r - p) = 0$$

D'où l'on tire : $\sigma_r = -q = -p \frac{\nu}{1-\nu} = \sigma_\theta$

Puis $\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{p}{E}$

- On a $p = q$, si $\nu = 0.5$ (cas du caoutchouc) c'est-à-dire si le matériau est incompressible.
- On a $q = 0$, si $\nu = 0$ (cas du liège).

Le déplacement vertical du piston se calcule à partir de l'équation $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$, u désignant le déplacement de la particule courante parallèlement à x .

On obtient :

$$\delta L = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{p}{E} L$$

Sol N° 3 :

P appartenant à la surface libre de la structure, de normale Pz , le vecteur contrainte \overline{C}_z y est nul, donc aussi ses composantes $\tau_{xy}, \tau_{zy}, \sigma_z$

Les matrices $[\Sigma]$ et $[\xi]$ sont donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Avec les relations de Hooke entre contraintes et déformations.

$$\begin{cases} E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x \\ E\gamma_{xy} = (1+\nu)\tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} (1-\nu^2)\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ (1-\nu^2)\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \text{et } \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{cases}$$

1) \overline{n}_2 et \overline{n}_3 désignant les unitaires de j_2 et j_3 , on a les équations $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$,

$$\varepsilon_2 = \overline{n}_2^t [\xi] \overline{n}_2$$

$$\varepsilon_3 = \overline{n}_3^t [\xi] \overline{n}_3$$

La résolution donne : $\varepsilon_x = 200 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 400 \times 10^{-6}$

$$\gamma_{xy} = -100\sqrt{3} \times 10^{-6} \text{ et } \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} 600 \times 10^{-6} = 300 \times 10^{-6}$$

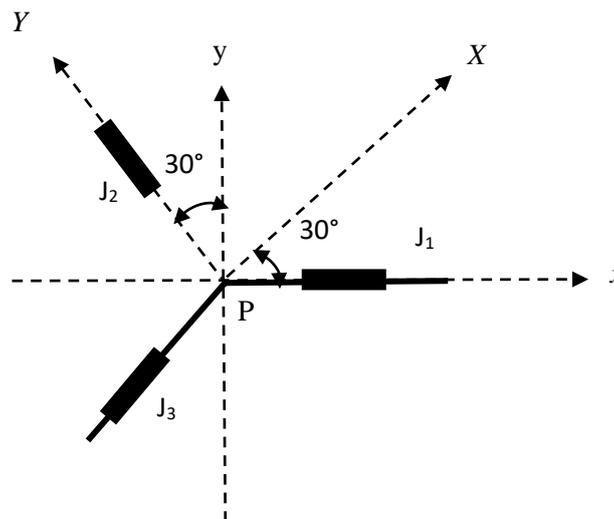
2) PZ est manifestement direction principale associée à la dilatation principale ε_z . Les directions principales PX et PY du plan (xPy) ont pour angles polaires θ_x et θ_y à partir de

$$Px, \text{ solutions de l'équation } \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \sqrt{3}$$

On peut prendre $\theta_x = 30^\circ$ et $\theta_y = 120^\circ$ la direction de j_2 est principale.

Les dilations principales correspondantes sont :

$$\varepsilon_y = 500 \times 10^{-6} \text{ et, puisque } \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z : \varepsilon_x = 100 \times 10^{-6}$$



3) Les directions principales X, Y, Z le sont à la fois pour les déformations et les contraintes.

$$\sigma_x = \frac{210}{8} \text{ MPa} = 26.25 \text{ MPa}; \sigma_y = \frac{210.4}{8} \text{ MPa} = 36.75 \text{ MPa}; \text{ et } \tau_{xy} = -\frac{21\sqrt{3}}{4} \text{ MPa} = -9.09 \text{ MPa}$$

4) Dans les axes principaux, les mêmes relations de Hooke donnent :

$$\sigma_x = 21 \text{ MPa}; \sigma_y = 42 \text{ MPa}$$

Sol N° 4 :

P étant sur la frontière libre de la structure de normale sortante Pz , le vecteur contrainte

$\vec{C}_x(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)_y$ est nulle les matrices $[\Sigma]$ et $[\xi]$ sont donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Les relations entre contraintes et déformations sont données par la loi de Hooke.

$$\begin{cases} E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x \\ E\gamma_{xy} = (1+\nu)\tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} (1-\nu^2)\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ (1-\nu^2)\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \text{et } \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{cases}$$

1) \vec{n}_1, \vec{n}_2 et \vec{n}_3 désignant les unitaires des jauges, on a les équations :

$$\varepsilon_1 = \vec{n}_1^t [\xi] \vec{n}_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_3 = \vec{n}_3^t [\xi] \vec{n}_3$$

La résolution donne :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x ; \quad \varepsilon_y - 2\gamma_{xy} = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 ; \quad \varepsilon_y + 2\gamma_{xy} = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_2$$

$$\text{d'où : } \varepsilon_x = 2 \times 10^{-4} ; \quad \varepsilon_y = 2 \times 10^{-4} ; \quad \gamma_{xy} = 10^{-4}$$

$$\text{et } \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(4 \times 10^{-4}) = -\frac{1.2}{0.7} \times 10^{-4} = -1.714 \times 10^{-4}$$

2) Les directions principales PX et PY du plan (xoy) ont pour angles polaires θ_X et θ_Y à partir de o_x , solutions de l'équation :

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2}{"0"} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} (\pi)$$

On peut prendre $\theta_x = \frac{\pi}{4}$: PX porté par j_3 , et $\theta_y = \frac{3\pi}{4}$: PY porté par j_1 à ces directions correspondent les déformations principales : $\varepsilon_x = 300 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_y = 100 \times 10^{-6}$.

PY est manifestement direction principale, associée à la valeur $\varepsilon_z = \varepsilon_Z = -171.4 \times 10^{-6}$

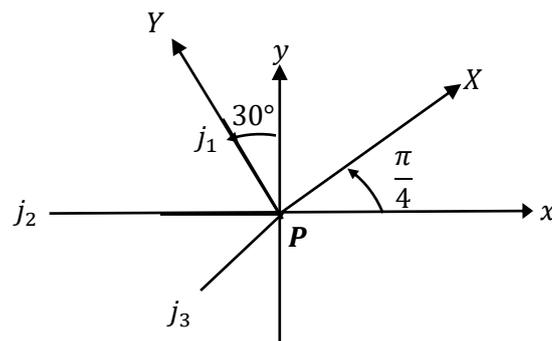
3) La loi de Hooke nous permet maintenant de calculer les contraintes :

$$\sigma_x = \frac{21 \times 2 \times 1.3}{0.91} \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_x = 60 \text{ MPa}$$

Puis les contraintes principales :



$$\sigma_x = \frac{21 \times 3.3}{0.91} \text{ MPa} = 76.15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{21 \times 1.9}{0.91} \text{ MPa} = 43.85 \text{ MPa}$$

Sol exercice 5 :

Les états de contraintes et déformations dans le pavé sont uniformes, celui-ci se trouvant en état de compression bi axiale. Les directions des axes OX, OY, OZ sont de plus directions principales. On a enfin, par hypothèse :

$$\sigma_z = 0; \sigma_x = -p \text{ et } \varepsilon_y = -\frac{2\alpha}{b}, \text{ les relations de Hooke s'écrivent donc ici :}$$

$$E\varepsilon_x = -p - \nu\sigma_y; \quad E\frac{2\alpha}{b} - (\sigma_y + \nu p); \quad E\varepsilon_z = -\nu(-p + \sigma_y)$$

La résolution donne :

$$\sigma_y = -\nu p - \frac{2\alpha E}{b}; \quad \varepsilon_x = 2\alpha \frac{\nu}{p} \frac{P}{E} (1 - \nu^2); \quad \varepsilon_z = 2\alpha \frac{\nu}{b} + \nu(1 - \nu) \frac{P}{E}$$

Rappelons que l'on a : $\sigma_x = -p$; $\sigma_z = 0$; $\varepsilon_y = -\frac{2\alpha}{b}$

$$1) \quad [\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_x = -p \quad \text{et} \quad \sigma_y = -\nu p - \frac{2\alpha E}{b}$$

$$2) \quad [\xi] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{2\alpha\nu}{b} - \frac{p}{E}(1 - \nu^2) \\ \varepsilon_y = \frac{2\alpha}{b} \\ \varepsilon_z = \frac{2\alpha\nu}{b} - \frac{p}{E}(1 - \nu)\nu \end{cases}$$

$$3) \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{3} \left[(1 + \nu)p + 2 \frac{\alpha E}{b} \right]$$

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$$

$$4) \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = -\frac{1}{3} \left[\frac{p}{3}(1 - \nu - 2\nu^2) + \frac{2\alpha}{b}(1 - 2\nu) \right]$$

$$g_0 = (1 + \nu) \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{p^2}{E^2}(1 - \nu + \nu^2) + \frac{2^2 \alpha^2}{b^2} - \frac{2\alpha p}{Eb}(1 - 2\nu)}$$

$$5) \quad \frac{\delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = - \left[\frac{p}{E}(1 - \nu + \nu^2) + \frac{2\alpha}{b}(1 - 2\nu) \right]$$

Sol exercice 6

$$\text{On } \varepsilon_x = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 \ 1 \ 0 \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Puisque, en P , l'état de contraintes est plan, le vecteur contrainte relatif à la normale Pz , étant nul, donc ses composantes $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$ aussi. Les matrices de contraintes et déformations ont la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Les relations entre contraintes et déformations sont données par la loi de Hooke.

$$\begin{cases} E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x \\ E\gamma_{xy} = (1+\nu)\tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} (1-\nu^2)\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ (1-\nu^2)\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \text{et } \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{cases}$$

On a donc ici : $\varepsilon_x = 250 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_y = -50 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_z = -100 \times 10^{-6}$ et $\gamma_{xz} = -260 \times 10^{-6}$

On a donc ici : $\varepsilon_x = 250 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_y = -50 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_z = -100 \times 10^{-6}$ et $\gamma_{xz} = -260 \times 10^{-6}$

-PZ est direction principale associée à la déformation principale $\varepsilon_z = 100 \times 10^{-6}$ (ou à la contrainte principale ($\sigma_z = 0$)). Les directions principales PX et PY du plan (xoy) ont pour angles polaires θ_x et θ_y , solutions de l'équation

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \left(\text{ou } = \frac{2\gamma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \text{ soit :}$$

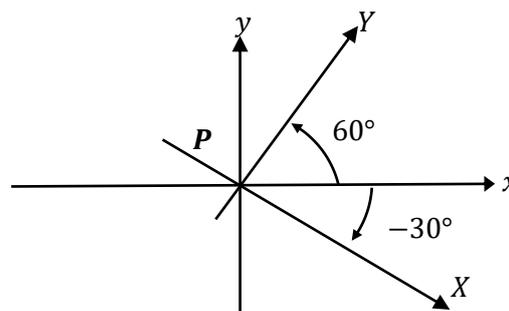
$$\operatorname{tg} 2\theta = -1.733 = -\sqrt{3}$$

On a alors : $\theta_x = -30^\circ$

On peut calculer les valeurs principales correspondantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 400 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_y &= -200 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_z &= -100 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\sigma_x = 37.5 \text{ MPa} ; \sigma_y = 7.5 \text{ MPa} ; \sigma_z = 0$$



Les suivantes scalaires de la tenseur déformation sont :

$$\begin{aligned}e_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 100 \times 10^{-6} \\e_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z = -10^{-7} \\e_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 8 \times 10^{-12}\end{aligned}$$

Dans la direction (1, 1, 1), relativement aux axes principaux, on a :

$$\sigma_0 = \frac{S}{3} = \frac{1}{3} \text{tr}[\Sigma] = 10 \text{ MPa}$$

$$\text{Et } \tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} = 19.7 \text{ MPa}$$

Sol exercice 7 :

En P, le vecteur contrainte $\vec{C}_z(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$ est nul puisque la surface est libre (non contrainte).

On y est donc en contraintes planes. Les matrices $[\xi]$ et $[\Sigma]$, y sont donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Les relations entre contraintes et déformations sont données par la loi de Hooke.

$$\begin{cases} E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x \\ E\gamma_{xy} = (1+\nu)\tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} (1-\nu^2)\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ (1-\nu^2)\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \text{et } \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{cases}$$

1) On a ici :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x = 140 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \vec{n}_2^t [\xi] \vec{n}_2 = 106 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_3 = \vec{n}_3^t [\xi] \vec{n}_3 = 54 \times 10^{-6}$$

\vec{n}_2 et \vec{n}_3 désignant les unitaires de j_2 et j_3 respectivement on en déduit le système d'équations :

$$\varepsilon_x = 140 \times 10^{-6} ; 3\varepsilon_y - 2\sqrt{3} ; \gamma_{xy} = 4\varepsilon_2 - \varepsilon_x ; 3\varepsilon_y + 2\sqrt{3} ; \gamma_{xy} = 4\varepsilon_3 - \varepsilon_x$$

La résolution donne :

$$\varepsilon_y = \frac{2}{3}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \frac{1}{3}\varepsilon_x = 60 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) = -52 \frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^{-6} \square -30.02 \times 10^{-6}$$

$$\text{On a ensuite } \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x - \varepsilon_2) = -\frac{3}{7} \times 200 \times 10^{-6} \square -85.71 \times 10^{-6}$$

2) Les relations de Hooke, rappelées ci-dessus, nous donnent alors :

$$\sigma_x = 12.154 \text{ MPa} ; \sigma_y = 7.846 \text{ MPa} ; \tau_{xy} = -1.617 \text{ MPa}$$

3) PZ est axe principal associé aux valeurs propres ε_z et $\sigma_z = 0$

Les axes principales PX et PY , du plan (P_{xy}) ont pour angles polaires θ_x et θ_y par rapport à Px , solutions de l'équation :

$$\text{tg}2\theta = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = -\frac{13\sqrt{3}}{30} = -0.75056$$

$$2\theta = -36.90^\circ + n \times 180^\circ \Rightarrow \theta_x = -18.45^\circ \text{ et } \theta_y = 71.55^\circ$$

4) Les déformations principales ont pour valeurs :

$$\varepsilon_x = 150 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 50 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = 85.71 \times 10^{-6}$$

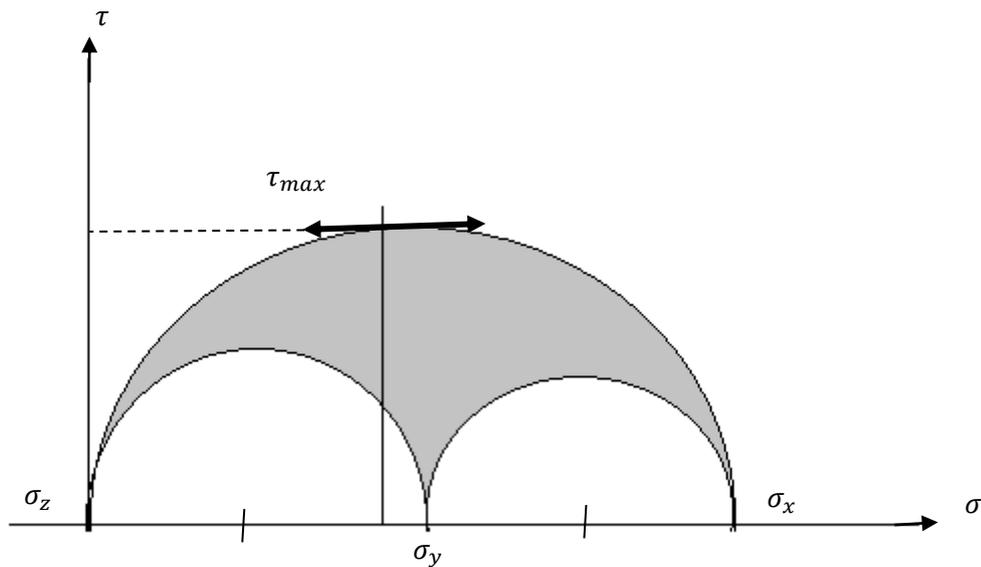
Les contraintes principales ont pour valeurs:

$$\sigma_x = 12.69 \text{ MPa} ; \sigma_y = 7.308 \text{ MPa} ; \sigma_z = 0$$

5) Les diagrammes de Mohr des contraintes et déformations donnent :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = 6.35 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2} = 119 \times 10^{-6}$$

**Sol exercice 8 :**

Chaque cylindre travaille en compression pure ; les matrices de contraintes $[\Sigma_1]$ et $[\xi_2]$ dans les solides (1) et (2) ,sont pour les deux cas proposés de la forme :

$$[\Sigma_1] = \begin{bmatrix} \sigma_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\Sigma_2] = \begin{bmatrix} \sigma_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De même les matrices de déformations sont de la forme :

$$[\xi_1] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{r1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\theta1} \end{bmatrix} \quad [\xi_2] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\theta2} \end{bmatrix}$$

Les coefficients sont uniformes dans chaque cylindre et on a d'après la loi de Hooke :

$$\sigma_{x1} = E_1 \varepsilon_{x1} ; \sigma_{x2} = E_2 \varepsilon_{x2} ; \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = -\nu_1 \varepsilon_{x1} ; \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{\theta2} = -\nu_2 \varepsilon_{x2}$$

Les déplacements radiaux μ_r sont donnés par $r\varepsilon_\theta = \mu_r$ et les déplacements axiaux par

$$X\varepsilon_x = \mu_x$$

1^{er} cas : assemblage en parallèle :

Dans ce cas, l'accourcissement $(-\delta L)$ est le même dans les deux cylindres : $\frac{\delta L}{L} = \varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2}$.

L'équilibre de l'ensemble suivant $X'X$ donne :

$$-F = S_1 \sigma_{x1} + S_2 \sigma_{x2} = (S_1 E_1 + S_2 E_2) \frac{\delta L}{L}$$

On en déduit :

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} = \frac{\delta L}{L} = \frac{-F}{S_1 E_1 + S_2 E_2} ; \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \frac{\nu_1 F_1}{S_1 E_1 + S_2 E_2} ; \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \frac{\nu_2 F_2}{S_1 E_1 + S_2 E_2}$$

$$\sigma_{x1} = \frac{-F E_1}{S_1 E_1 + S_2 E_2} ; \sigma_{x2} = \frac{-F E_2}{S_1 E_1 + S_2 E_2} \text{ et enfin : } K = \frac{-F}{\delta L} = \frac{S_1 E_1}{L} + \frac{S_2 E_2}{L} = K_1 + K_2$$

2^{er} cas : assemblage en série :

Dans ce cas, la contrainte σ_x est la même dans les deux cylindres : $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \frac{F}{S}$; on a

comme déplacement résultant:

$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2$ Avec $\varepsilon_{x1} = \frac{\delta L_1}{L_1}$ et $\varepsilon_{x2} = \frac{\delta L_2}{L_2}$ soit encore :

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\delta L_1}{L_1} = \frac{-F}{E_1 S}, \varepsilon_{x2} = \frac{\delta L_2}{L_2} = \frac{-F}{E_2 S} \Rightarrow \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \frac{\nu_1 F}{E_1 S}, \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{\theta2} = \frac{\nu_2 F}{E_2 S}$$

$$\text{Et enfin : } K = \frac{F}{\delta L_1 + \delta L_2} = \frac{1}{\frac{L_1}{E_1 S} + \frac{L_2}{E_2 S}} \Rightarrow \frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

Sol exercice 9 :

Nous pouvons superposer trois chargements :

- 1) Un chargement de traction simple parallèlement à $x'x$ qui donne au point courant P , comme seule composante non nulle de Σ : $\sigma_x = 140 \text{ MPa}$ d'où les trois seules composantes non nulles de ξ :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 700 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -175 \times 10^{-6}$$

Pour le vecteur déplacement $\overrightarrow{P_0 P_1}$: $u = x \varepsilon_x$; $v = y \varepsilon_y$; $w = z \varepsilon_z$.

Le pseudo-vecteur rotation $\vec{\omega}$ est identiquement nul.

- 2) Un chargement de traction pure parallèlement à $y'y$ qui donne en P, comme seule composante non nulle de Σ : $\sigma_y = 84 \text{ MPa}$ d'où les trois seules composantes non

$$\text{nulles de } E : \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = 420 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = \varepsilon_x = -\nu \varepsilon_y = -105 \times 10^{-6}$$

Enfin ,le vecteur translation $\overrightarrow{P_0P_1}$ a pour composantes

$$u = x \varepsilon_x ; v = y \varepsilon_y ; w = z \varepsilon_z \text{ et } \vec{w} = 0 \text{ est nul (champ de translations irrotationnel)}$$

- 3) Un chargement de cisaillement pure qui donne en P, comme seule composante non nulle de Σ : $\tau_{xy} = 56 \text{ MPa}$.

On en déduit la seule composante non nulle de tenseur ξ :

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} = 350 \times 10^{-6} .$$

Le vecteur translation en P a pour composantes :

$$u = \gamma_{xy} \times y ; v = \gamma_{xy} \times x ; w = 0 ; \text{ champ irrotationnel qui donne par conséquent :}$$

$$\vec{w} = 0$$

Par superposition des trois cas, on obtient en P :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} 140 & 56 & 0 \\ 56 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad , \quad [\xi] = \begin{bmatrix} 1595 & 305 & 0 \\ 305 & 245 & 0 \\ 0 & 0 & -280 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} \begin{cases} u = 595 \times 10^{-6} x + 305 \times 10^{-6} y \\ v = 305 \times 10^{-6} x + 245 \times 10^{-6} y \\ w = -280 \times 10^{-6} z \end{cases} \quad \vec{w} = 0$$

$$\overrightarrow{A_0A_1} \begin{cases} 747.5 \mu\text{m} \\ 427.5 \mu\text{m} \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{B_0B_1} \begin{cases} -442.5 \mu\text{m} \\ -182.5 \mu\text{m} \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{C_0C_1} \begin{cases} -747.5 \mu\text{m} \\ -427.5 \mu\text{m} \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{D_0D_1} \begin{cases} 442.5 \mu\text{m} \\ 182.5 \mu\text{m} \\ 0 \end{cases}$$

Référence bibliographique

SERGE LAROZE , Mécanique des structures. Solide élastique, plaques et coques. Tome 1. N° éditeur : 710. Dépôt légal : septembre 2005.

J-J. BARREA , SERGE LAROZE , Mécanique des structures. Solide élastique, plaques et coques. Exercices. Tome 4. N° éditeur : 711. Dépôt légal : septembre 2005.

ARTHUR P. BORESI. RICHARD J. SCHMIDT Advanced mechanics of materials. Univesity of Illinois, Urbana- Champaign. Six Edition.2003