جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

Faculté : Faculté de Physique

Département Physique Energétique

Polycopié de Cours

Intitulé :

Résumé du Cours de Physique2

Electricité

Avec des exercices corrigés

Réalisé par :

Dr YEDJOUR Afifa

Année universitaire 2022/2023

Avant-propos

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de 1er année LMD et à ceux qui prépare un diplôme d'étude supérieur.

Ce cours regroupe l'ensemble des connaissances indispensables sur les lois de l'électrostatique et de l'électrocinétique qui sont des notions de base nécessaires pour la compréhension des effets de charges sur les matériaux. L'électrostatique vise la loi de Coulomb, le champ électrostatique et le potentiel électrostatique qui sont créés par des charges ponctuelles et par une distribution de charge continue. La relation entre charges et potentiels dans un système de conducteurs en équilibre et dans les condensateurs est aussi présentée. L'électrocinétique est le domaine de la physique où les manifestations des mouvements de charges mobiles sont étudiées en termes de courants et de tensions. Un rappel mathématique est organisé au début du cours.

Le suivi de ce cours de PHY2 nécessite une connaissance de bases à savoir

- Elément de longueur, élément de surface, élément de volume.

- Equations locales de l'électrostatique (conservation du champ, circulation du champs, équation de Laplace.

- Gradient, divergence, rotationnelle….

Sommaire :

Chapitre1
Rappels Mathématiques

1. Elément de longueur, de surface, de volume

1.1 Elément de longueur

On n'admet qu'un point matériel M se déplace dans un repère cartésien d'origine O. Le point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y et z :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

avec $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont les vecteurs unitaires :

le déplacement infinitésimal du point M(x.y.z) au point M'(x + dx. y +dy. z + dz), le vecteur de déplacement s'écrit comme :

$$\overrightarrow{MM'} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Selon l'axe Oz, l'élément de longueur $d\ell$ engendré par le déplacement de M vers M' est :

$$\overrightarrow{d\ell} = \mathrm{d}z\vec{k}$$

$\overrightarrow{d\ell}$s'exprime en m.

1.2 Elément de surface

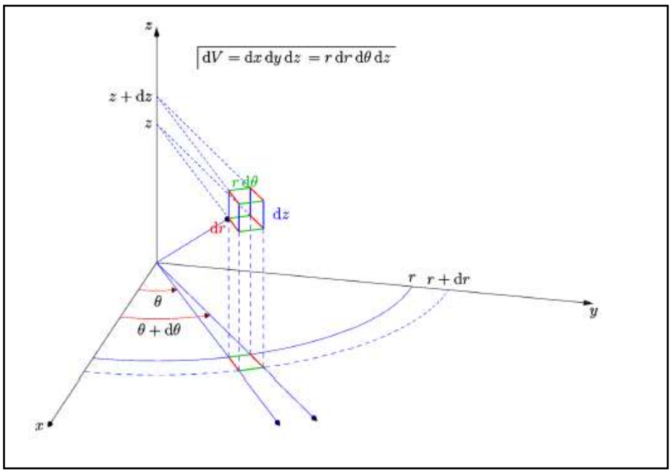
Dans le plan (xOy), l'élément de surface engendré par le déplacement de Mvers M'*décrit* l'aire d'un rectangle de longueur dx et de largeur dy :

$$dS = dxdy$$

dSs'exprime en m^2

1.3 Elément de volume infinitésimal

Dans l'espace à3D, le volume infinitésimal dV engendré par le déplacement du point M est un cube de hauteur dz.



$$dV = dx\ dy\ dz$$

Exercice1 :

1/ Calculer l'aire d'un cercle de centre O et de rayon R en coordonnées cartésiennes.

Solution

Tout d'abord nous choisissons le plan (xOy) pour déterminer l'élément de surface dS.

L'équation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon R est : $x^2 + y^2 = R^2$

$$\iint dS = dx.\ dy$$

Nous commençons d'intégrer Spar exemple, sur y qui varie suivant x.

S = $\int dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$ = $\int_{-r}^{+r} 2\sqrt{R^2 - x^2}$ dx

En faisant un changement de variable $x = Rcos\theta$ et $dx = -Rsin\theta d\theta$

En faisant la transformation trigonométrique :

$$\sin \theta^2 \;=\; \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Nous trouvons :

$$S = \pi R^2$$

S est la surface d'un cercle.

Exercice2 :

Calculer le volume d'un cylindre Vde rayon Ret de hauteur H.

Solution

Nous prenons un élément de volume un petit cube de coordonnéesr$r, d\theta, dz$, dans le plan l'élément de longueur est :

$$dV \;=\; dr.rd\theta.dz$$

L'intégrale triple de V :

$$V = \iiint rdr.d\,\theta.\mathrm{dz}$$

Séparation des variables : $V = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta. \int_0^H dz,$

$$V = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^H$$

$$V = \pi R^2 H$$

V est le volume d'un cylindre de hauteur H.

Exercice3 :

Calculer le volume d'une sphère V de rayon R. Intégrale triple de volume.

$$V = \iiint dr. r d\theta. \mathrm{r} \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

Séparation des variables :

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\,\theta. \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$V = \frac{R^3}{3} \, 2 \, 2\pi$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

V est le volume d'une sphère de rayon R.

2. Opérateurs

2.1 Gradient

On appelle gradient d'un champ scalaire U(x,y,z), le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla}U$$

La grandeur vectorielle $\vec{\nabla}$ représente l'opérateur nabla défini par:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

En coordonnées cylindriques:

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

En coordonnées sphériques:

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

2.2 Rotationnel

Soit un champ de vecteurs:

$$\vec{A} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

On appelle rotationnel du vecteur A, le vecteur:

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs A dérive d'un potentiel scalaire U est que son rotationnel soit nul:

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}U) = \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla}U) = 0$$

2.3 Divergence

Un champ de vecteurs $\vec{A}$:

$$\vec{A} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

On appelle divergence du vecteur A, le scalaire:

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

<u>En coordonnées cylindriques:</u>

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

<u>En coordonnées sphériques:</u>

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Exercice 4 :

On donne un vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, calculer :

1/ $\overrightarrow{grad}r$ et $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}$

2) $div\,\vec{r}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{r}$

Solution

1/

On a :$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Les composantes du gradient sont :

$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$ et $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$

et

$$\overrightarrow{grad}r = \frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{i}+\frac{z}{r}\vec{k}=\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$$

$$\overrightarrow{grad}r = \vec{U}$$

Le vecteur $\vec{U}$ représente le vecteur unitaire de la direction du vecteur r.

Calcul du gradient de (1/r) :

Les composantes du gradient sont :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$$

et, de même :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^3}\text{ et }\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z}{r^3}$$

d'où $\overrightarrow{grad}(\frac{1}{r})=-(\frac{x}{r^3}\vec{i}+\frac{y}{r^3}\vec{j}+\frac{z}{r^3}\vec{k})=-\frac{\vec{r}}{r^3}$

2/

Divergence du vecteur r :

$$div\,\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

C'est bien un scalaire. La divergence définit un champ de vecteurs divergent à partir de l'origine O.

Rotationnel du vecteur r :$\overrightarrow{rot}\vec{r} = \vec{0}$

Quelques Formules :

$$div\,(f\vec{r}) = f div(\vec{A}) + \vec{A}\overrightarrow{grad}\,f$$

$$\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\,f \wedge \vec{A} + f\overrightarrow{rot}\vec{A}$$

$$div\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}\overrightarrow{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\overrightarrow{rot}\vec{B}$$

Chapitre 2
Electrostatique

1. Force électrostatique

C'est en 1785 que coulomb montre expérimentalement que la force exercée sur une charge ponctuelle $q_2$par une charge ponctuelleq_1a les propriétés suivantes :

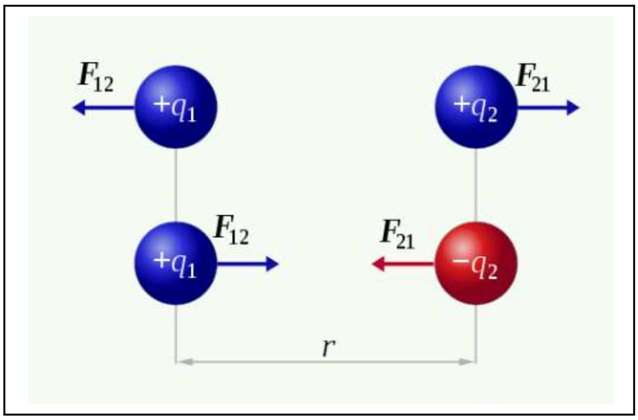
- Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance $r$séparant $q_1$et q_2

$$\left(\vec{F} \propto \frac{1}{r^2}\right).$$

- Elle est proportionnelle aux charges $q_1$et $q_2\left(\vec{F} \propto q_1, q_2\right)$.

$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$Avec $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

- $\vec{F}$s'exprime en$(Newton)$
- rs'exprime en$(metre)$
- qs'exprime en$(Coulomb)$
- $k = 9.10^9 Nm^2/C^2$



La force créée par q_1s'exerçant sur q_2s'écrira :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{r}_{12}\|^2} \vec{u}_{12}$$

$\vec{u}_{12}$ est un vecteur unitaire porté par la droite passant par $q_1$et q_2, dont le sens est de q_1 vers q_2 :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{u}_{12}}{\|\vec{u}_{12}\|}$$

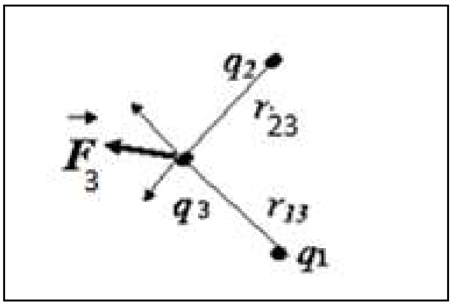
- La force créée par q_2s'exerçant sur q_1s'écrira

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{\|\vec{r}_{21}\|^2} \vec{u}_{21}$$

$\vec{u}_{21}$ est un vecteur unitaire porté par la droite passant par $q_2$et q_1, dont le sens est de q_2 vers q_1:

$$\vec{u}_{21} = \frac{\vec{u}_{21}}{\|\vec{u}_{21}\|}.$$

1.1 Principe de superposition



La résultante des forces : $\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$

$$\vec{F}_3 = K\left(\frac{q_1 \cdot q_3}{\|\vec{r}_{13}\|^2}\vec{u}_{13} + \frac{q_2 \cdot q_3}{\|\vec{r}_{23}\|^2}\vec{u}_{23}\right)$$

Pour N charges ponctuelle $(q_1, q_2, q_3 \dots \dots q_j \dots q_N)$:

$$\vec{F}_j = \; k \sum_{i \neq j} q_i . q_j \frac{\vec{r}_{ij}}{\left\|\vec{r}_{ij}\right\|^3}$$

1.2 Champ électrostatique

Une charge ponctuelle $q2$ au point (2) va créer à la distance $r21$ sur une charge ponctuelle $q1$au point (1), une force F 1ou (F 21).

$q_1q_2>0$ Force répulsive

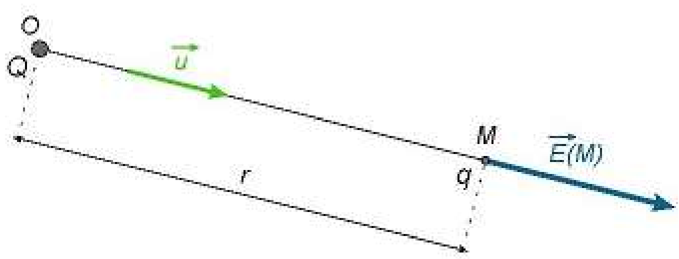
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{q_2 . q_1}{\|\vec{r}_{21}\|^2} \vec{u}_{21}$$

est le champ électrostatique noté :

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\vec{F}_{21}}{q_1}$$

C'est la perturbation de l'espace créée par la présence de la charge $q2$:

$$F\ 1 = q1\overrightarrow{E_1}$$



Q > 0 E(M) est un vecteur sortant

1.2. Représentation vectorielle du champ électrique

Le champ $\vec{E}$peut être défini en tout point Mquelconque de l'espace (sauf sur la charge q). On place une charge q_A au point A, le champ créé par cette charge au point s'ecrira:

$$\vec{E}_A = K \frac{q_A}{\|\overrightarrow{AM}\|^2} \vec{u}_{AM}$$

Unités : E en volt par mètre(Vm^{-1})

- Son module dépend des coordonnées du point M auquel on le définit puisqu'il est inversement proportionnel au carré de la distance par rapport à la charge.
- La direction du champ est radiale, elle passe toujours par la charge.
- Son sens est tel que :

  - $\vec{E}_A$s'éloigne de la charge q_A, si q_A est positive ($\vec{E}$ est colinéaire à$\vec{u}_{AM}$).
  - $\vec{E}_A$se dirige vers la charge q_A, si q_A est négative ($\vec{E}_A$ est opposé à $\overrightarrow{\vec{u}_{AM}}$)

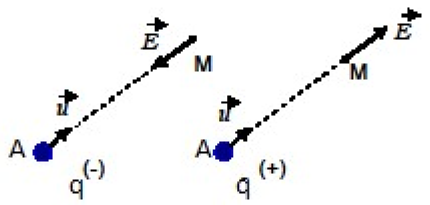


Figure 1. Notation vectorielle du champ $\vec{\boldsymbol{E}}$

1.2.b Principe de superposition :

N charges ponctuelles vont créer au point (1) le champ électrique :

$$\vec{E}(1) = k\sum_{i\neq 1}\frac{q_i}{\|\vec{r}\|_{i1}^3}\vec{r}_{i1}$$

1.3 Travail de la force électrique et énergie potentielle U

Nous envisageons un déplacement élémentaires $dr > 0$ de la chargeq_2, nous prenons dans ce cas $q_2$négative(q_2 = -$|q_2|$).Le travail élémentaire dw nécessaire au déplacement du point d'application de $\vec{F}_2$est donnée par le produit scalaire :

$$dW = \|\vec{F}_2\|.\|\overrightarrow{dr}\|\cos(\vec{F}_2.\overrightarrow{dr}).$$

Le travail total qui correspond au déplacement de q_2 de la position (2) ($r = r_{12}$) à l'infini ($r \to \infty$) est obtenu en faisant la somme de tous les travaux élémentaires.

$W_{2\to\infty} = \int_r^\infty \vec{F}_2 \,.\, \overrightarrow{\mathrm{dr}}$ = -$|q_2||\overrightarrow{E_1}|.\overrightarrow{\mathrm{dr}}$

$= -\mathrm{k}\frac{|q_2|q_1}{r^2}\cos(\vec{F}_2\,,\overrightarrow{\mathrm{dr}})$

avec $\cos(\vec{F}_2\,,\overrightarrow{\mathrm{dr}}) = -1$

Soit $W_{2\to\infty}$= k$\frac{|q_2|q_1}{r^2}\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$

$$W_{2\to\infty} = -\mathrm{k}\frac{|q_2|q_1}{r} \qquad (5)$$

le signe – indique que le travail de $\vec{F}_2$est résistant ou encore qu'il faut fournir de l'extérieur de l'énergie au système pour réaliser ce déplacement. On dit que le système a de l'énergie potentielle ou encore que q_2a l'énergie potentielle $U(r) = -W_{2\to\infty}$.

$$U(r) = \mathrm{k}\frac{|q_2|q_1}{r}$$

1.4 Champ conservatif

Lorsqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie, le travail de $F_{1\to2}$ est exprimé en variation d'énergie potentielle ΔUou U est une fonction de coordonnées (x,y,z).

$U(\mathrm{x,y,z})$est une fonction de point, elle depend que de la position, sa variation sur un chemin fermé est nulle. $\oint d\mathrm{U} = \Delta\mathrm{U} = 0$.

Nous avons vu en physique1(mécanique du point) que le travail de la force d'interaction masse-terre lorsque l'origine du repère est prise à l'infini est :

$$W = \int \vec{F}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{dl}} = \int_{z<0}^{z=0} -mgdz = mgz = \Delta U = \int_z^{\infty} dU = U(\infty) - U(z)$$

$U(\infty) = 0$ Soit $mg = \frac{\partial U}{\partial z}$ ou encore :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U \qquad (6)$$

Ce résultat est fréquemment utilisé pour les forces d'un champ conservatif dérivant d'un potentiel scalaire.

2. Potentiel électrostatique

Le travail électrique d'un système de deux charges pouvait être exprimé à l'aide du champ électrique$\vec{E}$.

$dW = \vec{F}\,.\overrightarrow{\mathrm{dl}} = q_2\vec{E}_1.\overrightarrow{\mathrm{dl}} = -dU$est une différentielle totale exacte.

La différence du potentiel élémentaire est définie par la quantité :

$$dV = -\vec{E}_1.\overrightarrow{dl}$$

Le calcul de la variation du potentiel entre deux points A et B consiste à résoudre l'intégrale de r à l'infini :

$$\Delta V = = -\int \vec{E}_1.\overrightarrow{dl}$$

Le potentiel Electrique

$$V(r) = \mathrm{k}\frac{q}{r}$$

$V(r)$est un champ scalaire s'exprime en volt.

Pour n charges le principe de superposition donne :

$$V(1) = k\sum_{i\neq 1}\frac{q_i}{r_{i1}}$$

Exercice 1

Calculer la force électrique et la force gravitationnelle existant entre l'électron(q_1, m_1) et le proton (q_2, m_2) formant l'atome d'hydrogène, sachant que le rayon de Bhor$r_{12} = 5.3.10^{-11}m$.

Solution

Force électrique :

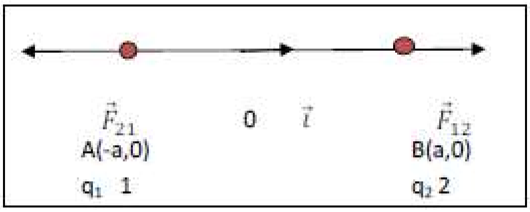
$$\|\vec{F}_e\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{\|\vec{r}\|_{12}^2} = \frac{(9.10^9)(1.6.10^{-19})^2}{(5.3.10^{-11})^2} = 8.10^{-8}N.$$

Force gravitationnelle :

$$\|\vec{F}_G\| = G.\frac{m_1.m_2}{\|\vec{r}\|_{12}^2} = \frac{(6.7.10^{-11})(9.1.10^{-31})(1.7.10^{-27})}{(5.3.10^{-11})^2} = 3.7.10^{-4}\ N.$$

Par comparaison, on trouve : $\frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{F}_G\|} \approx 10^{39}$.

Exercice2



Soient deux charges ponctuelles q >0 identiques, placées en A (-a , 0) et B (a , 0) sur un axe ox.

Représenter sur un schéma le vecteur force agissant sur les deux charges

Détermine la force répulsive entre les deux charges.

Solution

$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 . q_2}{\|\vec{r}\|_{12}^2} \vec{u}_{12}.$

$\vec{u}_{12} = \vec{\imath}\ ; q_1 = q_2 = q\ ; \|\vec{r}\|_{12} = 2a$

$\vec{F}_{12} = k\frac{q^2}{4a}\vec{\imath}.$

$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 . q_1}{\|\vec{r}\|_{12}^2} \vec{u}_{21}.$

$\vec{u}_{21} = -\vec{\imath}\ ;$

$\vec{F}_{21} = -\,k\frac{q^2}{4a}\vec{\imath}.$

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

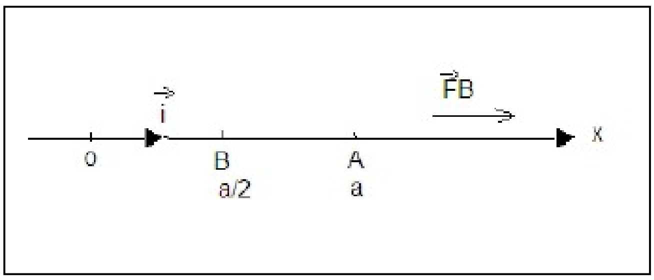
Exercice 3

Sur un axe x'ox sont placées : une charge ponctuelle q1 au point O, une charge ponctuelle q2 au point A d'abscisse x=a.

1 -donner l'expression de la force électrostatique agissante sur une charge q3 placée sur l'axe au point B x=a/2. On donne q1=3q, q2=-2q et q3=q avec q une charge positive.

1 -donner l'expression du champ et du potentiel électrostatique au point B.

Solution



$$\vec{F}_B = K\left(\frac{q_1 . q_3}{\|OB\|^2}\vec{u}_{OB} + \frac{q_2 . q_3}{\|AB\|^2}\vec{u}_{AB}\right)$$

$$\vec{u}_{OB} = a/2\vec{\imath}$$

$$\vec{u}_{AB} = -\,a/2\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_B = K\left(\frac{q_1 . q_3}{\|OB\|^2}\vec{u}_{OB} + \frac{q_2 . q_3}{\|AB\|^2}\vec{u}_{AB}\right)$$

On remplace q1=3q, q2=-2q et q3=q

On trouve

$$\vec{F}_B = 20K\left(\frac{q^2}{a^2}\vec{\imath}\right)$$

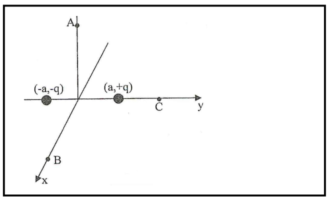
2. Le champ électrique au point B est du à la charge q1 et q2

$$\vec{E}_B = \frac{\overrightarrow{F_B}}{q_B}$$

$$\vec{F}_B = 20K\frac{q}{a^2}$$

Exercice 4

Deux charges ponctuelles –q et +q sont distantes de a, sur l'axe Oy, symétriques par rapport à l'origine O.

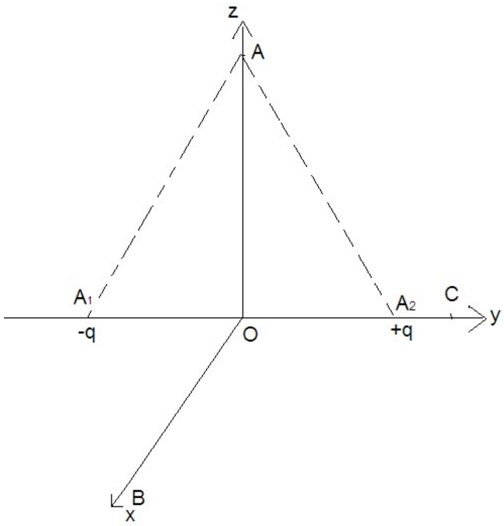


1 calculer les champs électriques aux points A, B et c à la distance b de l'origine O.

2 déterminer le potentiel V au centre O.

2 Trouver la force exercée sur la charge + Q placée au point O.

Solution :



On a deux charges aux points A1 et A2 avec des charges –q et + respective ils sont dans le plan (yoz)

Le champ électrique au point A est la superposition des champs des deux charges :

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{AA1} + \vec{E}_{AA2} = K\frac{q_{A1}}{\left|\overrightarrow{AA1}\right|^3}\overrightarrow{AA1} + K\frac{q_{A2}}{\left|\overrightarrow{AA2}\right|^3}\overrightarrow{AA2}$$

$$\overrightarrow{AA1} = (-a)\vec{\jmath} + h\vec{k}d'ou\left|\overrightarrow{AA1}\right| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Et

$$\overrightarrow{AA2} = (a)\vec{\jmath} + h\vec{k}d'ou\left|\overrightarrow{AA2}\right| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\vec{E}_A = Kq\left(\frac{(-a)\vec{\jmath} + h\vec{k}}{\left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^3} - \frac{a\vec{\jmath} + h\vec{k}}{\left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^3}\right) = \frac{-2Khqa}{(a^2 + h^2)^{3/2}}\vec{\jmath}$$

De même pour le champ au point B résulte des charges qui sont aux points A1 et A2 dans le

plan (yox)

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{BA1} + \vec{E}_{BA2} = K\frac{q_{A1}}{\left|\overrightarrow{BA1}\right|^3}\overrightarrow{BA1} + K\frac{q_{A2}}{\left|\overrightarrow{BA2}\right|^3}\overrightarrow{BA2}$$

$$\overrightarrow{BA1} = (-a)\vec{j} + h\vec{i} d'ou\left|\overrightarrow{BA1}\right| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Et

$$\overrightarrow{BA2} = (a)\vec{j} + h\vec{i} d'ou\left|\overrightarrow{bA2}\right| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\vec{E}_B = Kq\left(\frac{(-a)\vec{j} + h\vec{i}}{\left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^3} - \frac{a\vec{j} + h\vec{i}}{\left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^3}\right) = \frac{-2Khqa}{(a^2 + h^2)^{3/2}}\vec{j}$$

On retrouve les mêmes expressions.

Au point C

$$\vec{E}_C = K\frac{-q}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|^3}\overrightarrow{A_1C} + K\frac{q}{\left|\overrightarrow{A_2C}\right|^3}\overrightarrow{A_2C}$$

$$\overrightarrow{A_1C} = (h + a)\vec{j}\left|\overrightarrow{A_1C}\right| = (h + a)$$

$$\overrightarrow{A_2C} = (h - a)\vec{j}\left|\overrightarrow{A_2C}\right| = (h - a)$$

$$\vec{E}_C = Kq\left(\frac{-1}{(h + a)^2}\vec{j} + \frac{1}{(h - a)^2}\vec{j}\right)$$

On réduit au même dénominateur

$$\vec{E}_C = Kq\left(\frac{-(h^2 + a^2 - 2ah) + (h^2 + a^2 + 2ah)}{(h + a)^2.(h - a)^2}\vec{j}\right) = Kq\left(\frac{4ah}{(h^2 - a^2)^2}\right)\vec{j}$$

$$\vec{E}_C = Kq\left(\frac{4ah}{(h^2 - a^2)^2}\right)\vec{J}$$

2-

$$V(o) = \frac{-Kq}{A_1O} + \frac{Kq}{A_2O} = 0$$

Le potentiel est nul

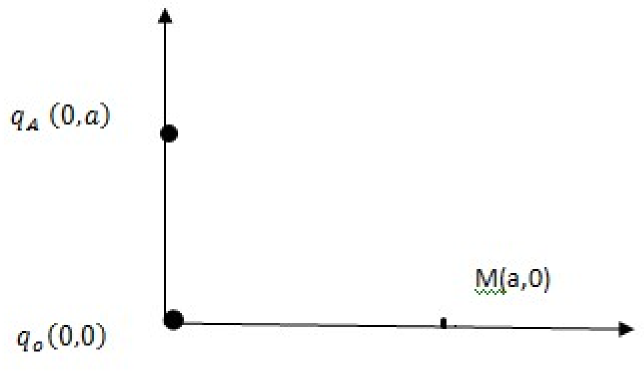
Exercice5

On considère deux charges ponctuelles q_o et $q_A$placées respectivement aux points O(0.0) et A(a,0)dans un repère cartésien (0,x,y).

1. Déterminer le champ électrique E_M créé par les deux charges dans le cas où q_0= q_A=q.

   Au point M : M(a ,0) avec a et q sont des constantes positives(figure1).

2. Calculer et représenter E_M. On donne q=10^{-9}C. a= 1cm.
3. Déterminer et calculer le potentiel électrique créé par les charges au point M.
4. On place une troisième charge q_M au point M : q_M= 2q. En déduire la valeur de la force agissant sur q_M.



<u>Solution</u>

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{OM} + \vec{E}_{AM}$$

$$\vec{E}_M = K\frac{q_O}{|\vec{a}|^2}\overrightarrow{U_{OM}} + K\frac{q_A}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2}\overrightarrow{U_{AM}}$$

$$\overrightarrow{U_{OM}} = \vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{U_{OM}} = cos\theta\vec{\imath} - sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AO}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = 2a^2$$

On remplace dans le champ électrique où $q_0 = q_A = q$.

$$\vec{E}_M = K\frac{q}{|\vec{a}|^2}\left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{4}\vec{\jmath}\right]$$

AN

$$\vec{E}_M = 910^4\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{\imath}-\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{\jmath}\right]$$

$$V(M) = V(O) + V(A)$$

$$V(M) = K\frac{q_O}{OM} + K\frac{q_A}{AM}$$

AN

$$V(M) = 910^2\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

3/ $\vec{F}_M = q\vec{E}_M$

$$\vec{F}_M = 18\ 10^{-5}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{\imath}-\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{\jmath}\right]$$

Exercice 6

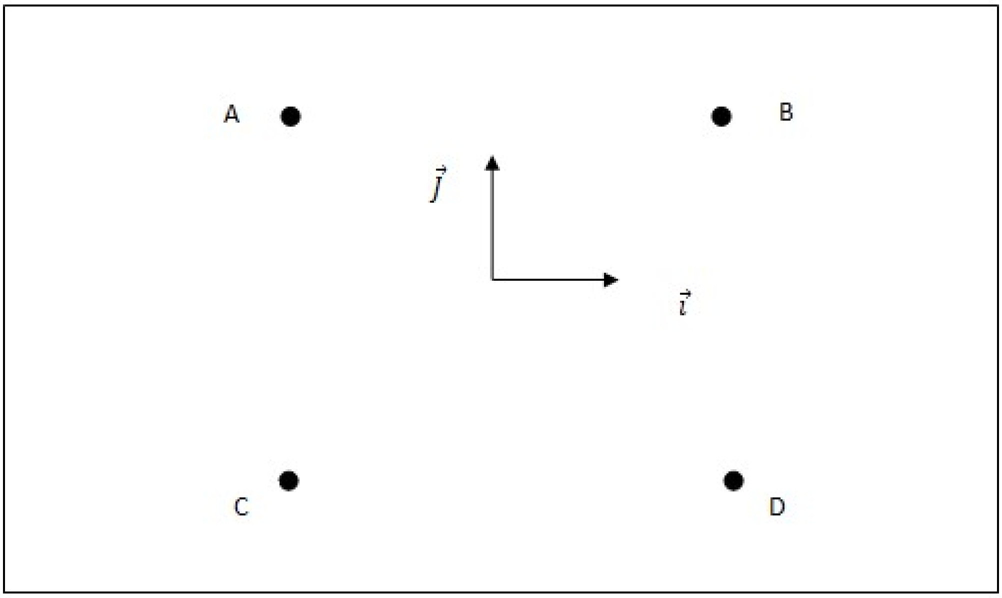
Soient quatre charges ponctuelles q_a, q_b, q_c, et q_d placées sur les sommets d'un carré de coté **a.**

1/Trouverle champ électrique exercé sur la charge q_a.

2/ trouver le potentiel électrique exercé sur la charge q_a, déduire l'énérgie potentielle de la charge q_a.

On donne : a=2.8 $10^{-10}m$, $q_a = 1.6\ 10^{-19}C$

On prend $q_b = q_c = -q_a$ e $q_d = 2\sqrt{2}q_a$



Solution

1/Selon le principe de superposition

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{BA} + \vec{E}_{CA} + \vec{E}_{DA}$$

$\vec{E}_{BA} = k\frac{q_B}{a^2}\vec{u}_{BA}$ avec $\vec{u}_{BA} = -\vec{\imath}$

$\vec{E}_{CA} = k\frac{q_C}{a^2}\vec{u}_{CA}$ avec $\vec{u}_{CA} = -\vec{j}$

$\vec{E}_{DA} = k\frac{q_D}{DA^2}\vec{u}_{DA}$ avec $\vec{u}_{DA} = -\cos\frac{\pi}{4}\vec{\imath} + sin\frac{\pi}{4}\vec{j}$ (carré)

$$DA^2 = AC^2 + CD^2$$

$$DA^2 = 2\,a^2$$

$$\vec{E}_{DA} = k\frac{q_D}{2\,a^2}(-\cos\frac{\pi}{4}\vec{\imath} + sin\frac{\pi}{4}\vec{j})$$

On remplace :$q_b = q_c = -q_a$ e $q_d = 2\sqrt{2}q_a$

$$\vec{E}_{BA} = -k\frac{q_B}{a^2}\vec{\imath}$$

$$\vec{E}_{BA} = k\frac{q_a}{a^2}\vec{\imath}$$

Ainsi $$\vec{E}_{CA} = k\frac{q_C}{a^2}(-\vec{\jmath})$$

$$\vec{E}_{CA} = -k\frac{q_a}{a^2}$$

alors

$$\vec{E}_{DA} = kq_a\frac{2\sqrt{2}}{2\,a^2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath})$$

$$\vec{E}_{DA} = k\frac{q_a}{a^2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

En fin

$$\vec{E}_A = \vec{0}$$

2/ le potentiel électrique

$$V_A = V_B + V_C + V_D$$

$$V_B = k\frac{q_B}{a}$$

$$V_C = k\frac{q_C}{a}$$

$$V_D = k\frac{q_D}{a\sqrt{2}}$$

En remplaçant les charges par leurs valeurs

$$V_A = -2k\frac{q_a}{a} + k\frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}q_a$$

$$V_A = 0$$

Le potentiel est nul au point A.

Exercices supplémentaires

Exercice1

_Deux charges électriques Qa et Qb , placées en A et B, sont telles que Qa= 1µC Qb= -3µC et AB = 20 cm .

1. Calculer la valeur F de la force électrique par Qa sur Qb. (faire un schéma précis)
2. Déterminer les caractéristiques (direction et module) du vecteur champ électrique au point M milieu du segment AB.
3. En quel point de la droite passant par A et B, le champ électrique est-il nul?

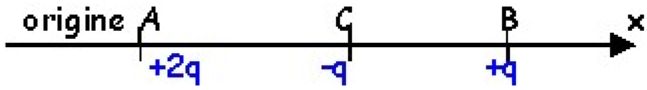
Exercice 2 :

Une boule d'un petit pendule électrostatique, de masse 2,5 g, porte une charge de 0,5µC. Elle est placée dans un champ électrique uniforme et horizontal. A l'équilibre, le fil du pendule s'incline d'un angle de 30° par rapport à la verticale. Donner la valeur du champ électrique (faire un schéma).

Exercice3

Soit trois charges q_A= q_A=+q_B ,q_C=+2q ; la distance AB=d= 0,2 m ;Les deux charges placées en A et B sont fixes; par contre la charge placée en C est mobile sur la droite AB.

Quelle est la position d'équilibre de la charge placée en C, si elle existe ?



Exercice4 : Soient deux charges ponctuelles identiques q>0 fixes placées en A(-a,0) et B(+a,0).

-Déterminer la position d'équilibre d'une charge ponctuelle Q pouvant se déplacer dans ce champ.

Exercice 5 : Deux charges ponctuelles sont fixées au point A et B distants de 2q.

1. Trouver l'expression et la direction du champ électrique $\vec{E}_M$ en un point M de la médiatrice de AB situé a une distance de $y$de o le milieu de AB.
   A quelle(s) position(s) le champ est maximal ?
2. Représenter graphiquement l'allure de la valeur algébrique de E.
3. Trouver l'expression du potentiel électrique V_M au point M

   A quelle(s) position(s) le potentiel est maximal ?
4. Représenter graphiquement l'allure du potentiel électrique V.
5. On considère qu'une charge ponctuelle $q_0$est placée au point M.
   - Trouver la force appliquée sur cette charge
   - Déduire l'énergie potentielle de cette charge.

Exercice 6: soient 4 charges ponctuelles $q_{a,}$, $q_{b,}$ $q_{c,}$ q_d, disposés sur les sommets d'un carré de coté a.

1. Trouver la force exercée sur la charge q_a.
2. Trouver l'énergie potentielle de la charge q_a.

On donne

$q_{b,}=q_{c}=- q_a$ et $q_d = 2\sqrt{2}q_a$ $q_a=1.6.10^{-19}$C , a=2.8.10A

Chapitre3

Champ crée par une distribution de charges continues

1. Densité de charges continues

Nous considérons cette fois une charge électrique Qdans un volume V. nous pouvons définir une densité volumique de charge $\rho(x',y',z')$, telle que :

$$Q = \int_V \rho(x',y',z')\,dx',dy',dz' \tag{11}$$

A condition d'avoir dans l'élément de volume $dV' = dx',dy',dz'$, autour du point $M(x',y',z')$ un grand nombre de charges élémentaires bien que $dV' \ll V$.

2. Les trois types de charges continues sont :

- $dQ = \rho dV$ pour une distribution volumique.
- $dQ = \sigma dS$ pour une distribution surfacique
- $dQ = \lambda d\ell$ pour une distribution linéique.

L'élément de champ électrique s écrit :

1/ L'intégrale sur un volume V :

$$E = k \iiint \frac{dQ}{r^2} dr$$

2/ L'intégrale sur une surface S

$$E = k \iint \frac{dQ}{r^2}$$

3/ L intégrale sur une longueur L

$$E = k \int \frac{dQ}{r^2}$$

Le champ électrique n'est autre que le gradient d'une fonction scalaire qui est le potentiel électrique $V(r)$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Le potentiel électrique s'écrit :

$$V(r) = k \int \frac{dQ}{r}$$

Exercice1

Calculer en un point M le champ et le potentiel électrostatiques créés par un fil rectiligne infiniment long , uniformément chargé de densité linéique λ.

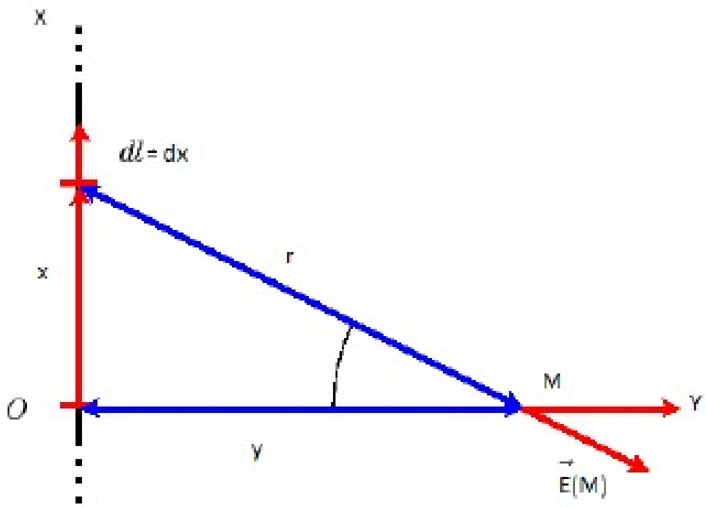


Figure 2.Application fil infini

Solution

1/ Selon le principe de superposition

$d\vec{E} = d\overrightarrow{E_X} + \mathrm{d}\,\overrightarrow{E_Y}$

Par symétrie le champ total est porté par l'axe OY.

$$d\vec{E} = 2\,\|E\|\cos\alpha\,\vec{j}$$

Avec $\cos\alpha = \frac{r}{Y}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Après l'intégration, on trouve :

$$\overrightarrow{E_Y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\vec{J}$$

si

$$\lambda > 0 \qquad \overrightarrow{E_y} estradialdeMversl'exterieur$$
$$\lambda < 0 \qquad \overrightarrow{E_y} estradialdeMversl'interieur$$

2/ Pour calculer le potentiel électrostatique dans le cas d'un fil infini, nous somme obliger de définir le potentiel à partir d'une origine prise arbitraire. Pour cela, nous calculons d'abord la variation du potentiel électrostatique entre deux points M_1 et M_2 distants du fil respectivement de $r_1$et r_2.

$$dV = -\vec{E}_Y.\overrightarrow{dy}$$

$$V(y_2) - V(y_1) = -\int_{y_1}^{y_2}\vec{E}_y.\overrightarrow{dy} = -\int_{y1}^{y2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}dy$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Log y_2 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Log y_1$$

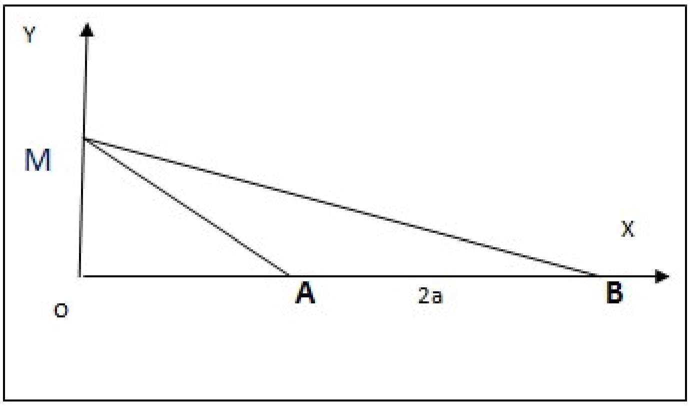
Si y2 tend vers l'infini, le potentiel à l'infini est nul $V(y_2) = 0$.

le potentiel électrostatique devient :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Logy$$

Exercice 2

1/ Calculer le champ électrique E créé par un fil rectiligne AB de longueur finie 2a, portant une densité linéique de chargesλ au point M.



On posera :

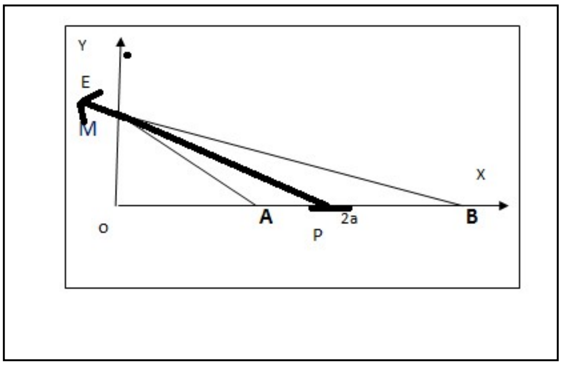
$OM = y$, $OA = xA$, $OB = Xb$

2) déduire E dans les cas particuliers suivants :

a) le point *M* est dans le plan médiateur de *AB*, *b) le fil a une longueur infini.*

Solution

On a $dq = \lambda d\ell$



$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{dq}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\vec{U}_{PM}$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = k\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{PM} = -x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\,;\, \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Le champ total

$$\vec{E} = k\int_{X_A}^{X_B} \frac{\lambda\, dx}{(c + y^2)^{3/2}}(-x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\,)$$

$$\vec{E} = \lambda k\int_{X_A}^{X_B} \frac{-x\ \ dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{\imath} + \lambda k\int_{X_A}^{X_B} \frac{ydx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{\jmath}$$

En Faisant la transformation suivante

$$\frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

On trouve :

$$\vec{E} = k\lambda\left[\left(\frac{1}{\sqrt{{X_B}^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{{X_A}^2 + y^2}}\right)\vec{\imath} + \frac{1}{y}\left(\frac{X_B}{\sqrt{{X_B}^2 + y^2}} - \frac{X_A}{\sqrt{{X_A}^2 + y^2}}\right)\vec{\jmath}\right]$$

2/

a/ M est dans le plan médiateur $X_A = X_B$

$$\vec{E} = 2\,k\lambda\left[\left(\frac{X_B}{\sqrt{{X_B}^2 + y^2}}\right)\vec{\jmath}\right]$$

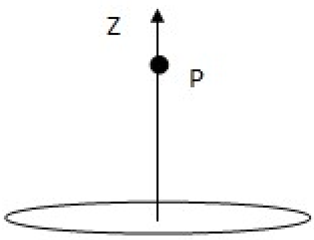
b/cas d'un fil infini $X_B \to \infty$

$$\vec{E} = \frac{2\,k\lambda}{y}\vec{\jmath}$$

Exercice 3

On consider un disque de rayon R, portant une densié de charge surfacique uniforme $\sigma > 0$.

Determiner le potentiel en un point P de son axe Oz. En déduire le champ $\vec{E}$ crée par un plan portant une densité de charge surfacique σ.



Solution

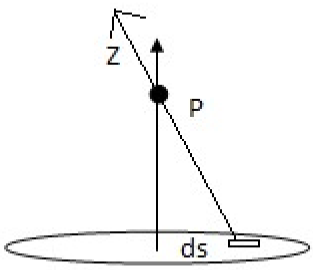
Potentiel électrique

$$V(r) = k\int \frac{dq}{r}$$

$$dq = \sigma ds$$

Avec l élément de surface $ds = 2\pi y dy$; dr = dy

$$V(r) = k\int \frac{dq}{r}$$



$$r^2 = z^2 + y^2$$

On remplace dans l’expression du potentiel électrique :

$$V(z) = k\sigma 2\pi \int_0^R \frac{2ydy}{(z^2 + y^2)^{1/2}}$$

Le potentiel total

$$V(R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]$$

Nous déduisons le champ électrique $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\partial\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]}{\partial z}$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1\right]$$

Lorsque $R \to \infty$, On trouve le champ crée par un plan infini

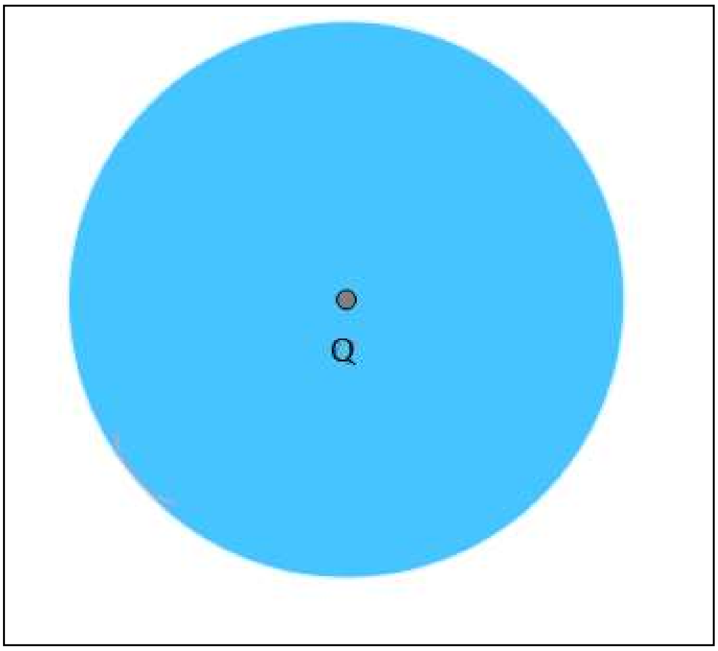
$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Chapitre 4
Flux du champ électrique

1. Définition :

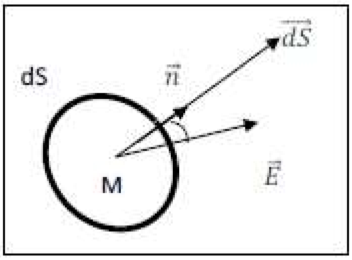
Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface S, noté $\emptyset_S(\vec{E})$ est la quantité scalaire définie comme :

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} \tag{18}$$



On place une charge Q dans l'espace, elle va crée autour d'elle un champ électrique$\vec{E}$.

L'élément de surface ds : $\overrightarrow{dS} = \vec{n}dS$, est un vecteur porté par la normale $\vec{n}$ en un point de surface S considérée. Lorsque S est une surface fermée,$\overrightarrow{dS}$ est toujours portée par la normale extérieure.



La valeur du flux quand la charge **q** est à l'intérieur de la surface fermée

Pour cela nous remarquons d'abord que est radial : $\vec{E} = K\frac{q}{r^3}\vec{r}$, son module est constant à la distance est radial r, de plus $EetS$ sont parallèle et de même sens.alors,

$$\emptyset_{S'}(\vec{E}) = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS'} = \int \|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{dS'}\| \cos 0$$

$$\emptyset_{S'}(\vec{E}) = K\frac{q}{R^2}\int dS' = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\right) 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \emptyset_S(\vec{E})$$

En résumé

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \begin{cases} 0 & siqestexterieur\ de\ la\ surface\ de\ Gausshhhhhhh \\ \frac{q}{\varepsilon_0} & siqestexterieur\ de\ la\ surface\ de\ Gauss \end{cases}$$

Le flux du charges électrique créé par une charge électrique Q , à travers une surface fermée est égal :

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

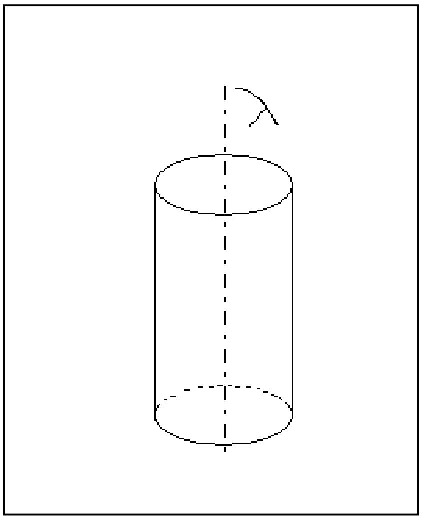
Dans ce système :

- la charge électrique$q$ s'exprime en Coulomb.
- ρen coulomb par m^3.
- σen coulomb par m^2.

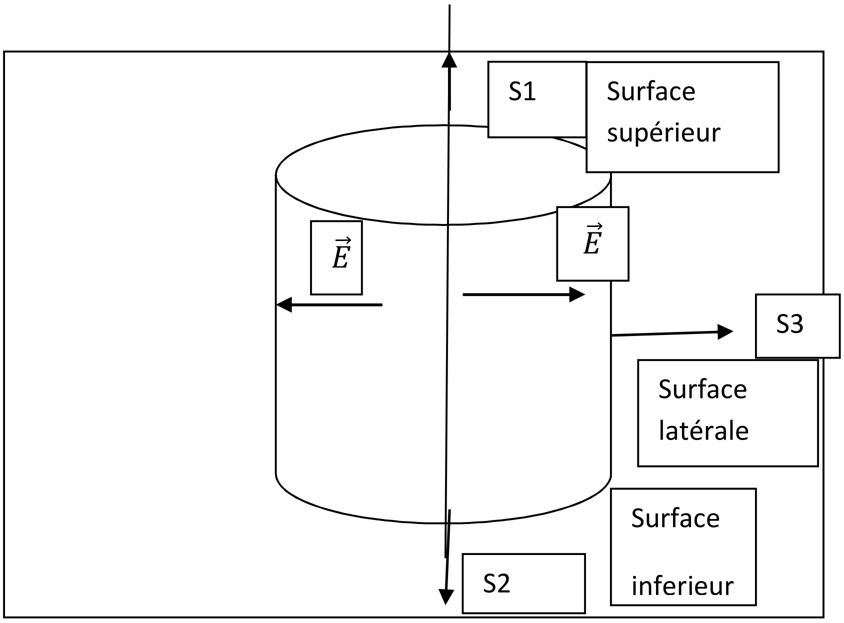
- λen coulomb par m.
- La force F en Newton.
- Le travail W en joule
- Le potentiel Ven joule par coulomb ou en volt.
- Le champ électrique E en volt par mètre.

Exercice1

Calculer le champ électrique créé par un fil rectiligne infiniment long uniformément chargé de densité linéique $\lambda > 0$



Solution



En raison de la symétrie, la surface la plus adaptée est un cylindre.

Le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface fermée :

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \emptyset_{S1}(\vec{E}) + \emptyset_{S2}(\vec{E}) + \emptyset_{Slatérale}(\vec{E})$$

Les deux premières intégrales sont nulles puisque $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{S1}$ et $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{S2}$.

La troisième intégrale $\emptyset_S(\vec{E}) = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int\int E.dS$, E est constant à la distance r

$$\emptyset_S(\vec{E}) = E\int\int dS = ES = E2\pi rH$$

Or d'après le théorème de Gauss

$$E2\pi rH = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^H \lambda d\ell}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda H}{\varepsilon_0}$$

Donc :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Exercice 2

Donner l'expression du champ électrostatique E et du potentiel V créés par une charge

Sphérique de rayon R uniformément répartie en volume (p). Tracer les courbes E(r) et V(r).

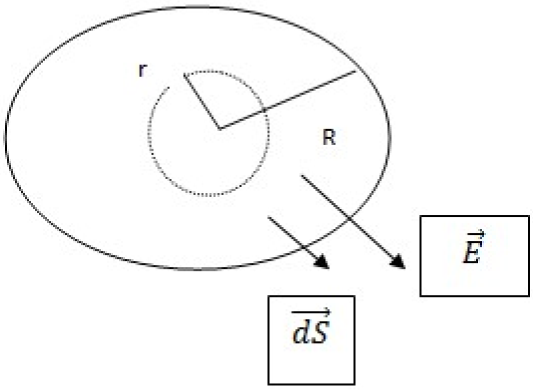
Solution

Théorème de Gauss

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\mathrm{Q_{int}}}{\varepsilon_0}$$

La surface de Gauss est une sphère de rayon r.

La symétrie est radiale



On distingue 2cas

1er cas r<R

$\emptyset_S(\vec{E})= \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int E.dS$ E est constant à la distance r

$\emptyset_S(\vec{E}) = \iint \|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{ds}\| \cos 0 = \|\vec{E}\| \iint \|\overrightarrow{ds}\| = \|\vec{E}\| \|\vec{s}\|$

La surface de la sphère de Gauss = $4\pi r^2$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 4\pi r^2$……………..(1)

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Pour une distribution volumique

$$Q_{int} = \iiint \rho dV = \rho \iiint dV = \rho V$$

$$Q_{int} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3}$$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$………………………..(2)

(1)=(2)

$$\|\vec{E}\| 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

Enfin

$$\|\vec{E}\| = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

b/ le potentiel électrique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$V(r) = -\int E_r \mathrm{dr}$$

$$V(r) = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, dr$$

$$V_1(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

2cas r>R

$\emptyset_S(\vec{E})$= $\oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int E.dS$ E est constant à la distance r

$\emptyset_S(\vec{E}) = \iint \|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{ds}\| \cos 0 = \|\vec{E}\| \iint \|\overrightarrow{ds}\| = \|\vec{E}\| \|\vec{s}\|$

La surface de la sphère de Gauss = $4\pi r^2$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 4\pi r^2$……………..(1)

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}$$

(1)=(2)

$$\|\vec{E}\|4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}$$

Enfin

$$\|\vec{E}\| = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

le potentiel électrique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$V(r) = -\int E_r \mathrm{dr}$$

$$V(r) = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

$$V_2(r) = +\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

<u>Détermination des constantes d'intégration C_1 et C_2.</u>

$r \to \infty V(\infty) = 0$ Implique $C_2 = 0$.

$$V_2(r) = +\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Pour calculer C_1on utilise la continuité du potentiel dans la région où r=R.

$$V1(r = R) = V2(r = R)$$

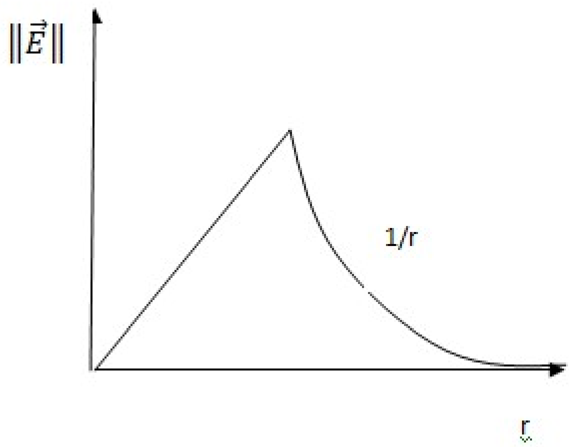
$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Par substitution

$$C_1 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

Enfin

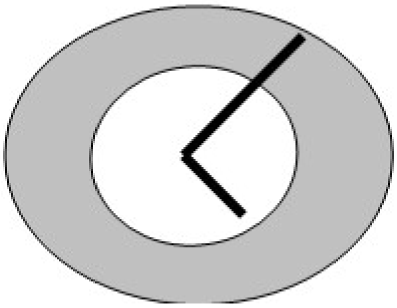
$$V_1(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$



Exercice 3

Soit deux sphères concentriques A et B de rayons respectifs R, et R5 telles que la sphère Ra < Rb, Les sphères A et B sont dotées d'une charge uniformément réparties sur leur surfaces extérieurs avec $\sigma_A = \sigma$ et $\sigma_B = -\sigma$.

Trouver l'expression donnant la variation du champ électrostatique E en fonction du rayon r.



Solution

La symétrie radiale $\vec{E}//\overrightarrow{dS}$

On distingue 3 régions

1/ r<a

$\emptyset_S(\vec{E})= \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int E.dS$ E est constant à la distance r

$\emptyset_S(\vec{E}) = \iint \|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{ds}\| \cos 0 = \|\vec{E}\| \iint \|\overrightarrow{ds}\| = \|\vec{E}\| \|\vec{s}\|$

La surface de la sphère de Gauss = $4\pi r^2$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 4\pi r^2$……………..(1)

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charhe totale à l'interieur de la sphere est nulle. $Q_{int} = 0$

Ceci implique

$$E = 0$$

2/ a<r<b

$\emptyset_S(\vec{E}) = \iint \|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{ds}\| \cos 0 = \|\vec{E}\| \iint \|\overrightarrow{ds}\| = \|\vec{E}\| \|\vec{s}\|$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 4\pi r^2 \ldots(1)$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{int} = \text{la charge surfacique}$$

$$Q_{int} = \iint \sigma ds$$

$$Q_{int} = \sigma \iint ds$$

$Q_{int} = \sigma s = \sigma 4\pi a^2$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

(1) = (2)

$$\|\vec{E}\| 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

3/ $\emptyset_S(\vec{E}) = \iint \|\vec{E}\| . \|\overrightarrow{ds}\| \cos 0 = \|\vec{E}\| \iint \|\overrightarrow{ds}\| = \|\vec{E}\| \|\vec{s}\|$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 4\pi r^2 \ldots(1)$

$$Q_{int} = \iint \sigma ds$$

$$Q_{int} = \sigma \iint ds$$

$Q_{int} = \sigma s = \sigma 4\pi (a^2 - b^2)$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{\sigma 4\pi(a^2-b^2)}{\varepsilon_0} \text{……………………(2)}$$

(1) = (2)

$$\|\vec{E}\|4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi(a^2-b^2)}{\varepsilon_0}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma 4\pi(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2}$$

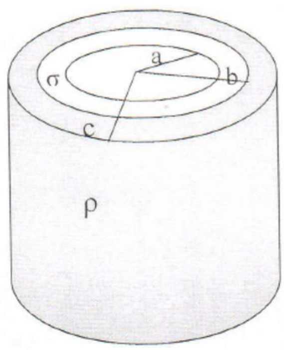
En résumé

$$\|\overrightarrow{E(r)}\| \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} & a < r < b \\ \dfrac{\sigma(a^2-b^2)}{\varepsilon_0 r^2} & r > b \end{cases}$$

Exercice 4

Soient trois cylindres coaxiaux de hauteur infinie A, B, C de rayons respectifs a, b, c

tels que a< b < c (Fig). Le cylindre A est chargé en surface avec une densité σ>0. L'espace compris entre les deux cylindres B et C est chargé avec une densité volumique constante ρ> 0.



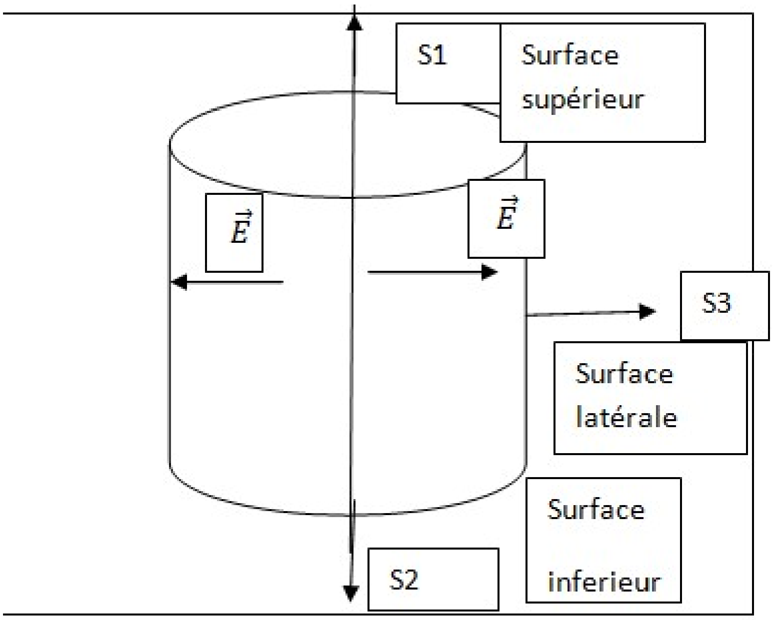
Fig

1. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique en tout point de I ‘espace'

2. Sachant que V(O) =V_0, en déduire le potentiel dans les deux régions :r< a et a < r<b

Solution

La surface de Gauss est un cylindre de rayon r et de hauteur H.



Théorème de Gauss

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

1 er cas r< a

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \emptyset_{S1}(\vec{E}) + \emptyset_{S2}(\vec{E}) + \emptyset_{Slatérale}(\vec{E})$$

Le champ est radial, pour un cylindre, il existe 3 flux.

$$\vec{E} \; // \; \overrightarrow{dS}_{latérale}$$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \iint \|\vec{E}\|.\|\overrightarrow{dS}_{latérale}\| \cos 0 = \|\vec{E}\| \iint \|\overrightarrow{dS}_{latérale}\| = \|\vec{E}\|\|\overrightarrow{dS}_{latérale}\|$$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 2\pi r H \ldots (1)$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge totale à l'intérieur de la sphère est nulle $Q_{int} = 0$

Ceci implique

$$E = 0$$

2eme cas a<r<b

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 2\pi r H \ldots (1)$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge est surfacique

$$Q_{int} = \iint \sigma ds$$

$$Q_{int} = \sigma \iint ds$$

$Q_{int} = \sigma s = \sigma 2\pi a H$

$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{\sigma 2\pi a H}{\varepsilon_0}$ …………………..(2)

Théoreme de Gauss

(1)=(2)

$$\|\vec{E}\| 2\pi r H = \frac{\sigma 2\pi a H}{\varepsilon_0}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

3eme cas b<r<c

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 2\pi r H \ldots(1)$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge est surfacique+ volumique

$$Q_{int} = \sigma \iint ds + \rho \iiint dV$$

$Q_{int} = \sigma S_a + \rho\,(V_r - V_b)$

$$Q_{int} = \sigma 2\pi a H + \rho\pi(r^2 - b^2)H$$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{\sigma 2\pi a H + \rho\pi(r^2 - b^2)H}{\varepsilon_0}$$

Théoreme de Gauss

(1)=(2)

$$\|\vec{E}\| 2\pi r H = \frac{\sigma 2\pi a H + \rho\pi(r^2 - b^2)H}{\varepsilon_0}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\rho(r^2 - b^2)}{2\varepsilon_0\, r}$$

4eme cas r>c

$\emptyset_S(\vec{E}) = \|\vec{E}\| 2\pi r H \ldots (1)$

$$\emptyset_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge est surfacique+ volumique

$$Q_{int} = \sigma \iint ds + \rho \iiint dV$$

$Q_{int} = \sigma S_a + \rho\,(V_c - V_b)$

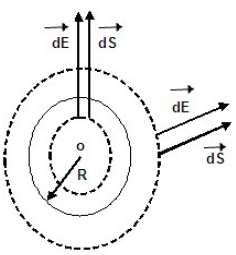
Exercice5

On considère une sphere de rayon R=10cm e de centre O chargée en surface avec une charge Q=3q. au centre, on place une autre charge ponctuelle q=10 □□.

1/ En utilisant le théoreme de Gauss, calculer le champ électrique en fonction de r et q en tout point de l'espace.

2/ deux points AetB sont à une distance de 5cm et 15 cm de O respectivement. Calculer le potentiel à ces deux points.

Solution



$$\Phi = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oint E.dS = ES = \frac{Q_{\text{int erieur}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = E 4\pi r^2$$

REGION 1 r<R

$$\frac{Q_{\text{int}erieur}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Cas ou r>R

$$\frac{Q_{\text{int}erieur}}{\varepsilon_0} = \frac{q+Q}{\varepsilon_0} = \frac{q+3q}{\varepsilon_0} = \frac{4q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{\pi r^2 \varepsilon_0}$$

2- CALCUL DU POTENTIEL

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \Longrightarrow V = -\int \vec{E}.d\vec{r}$$

Comme le champ électrique est parallèle avec le vecteur position

$$V = -\int E.dr$$

Cas r<R

$$V_1 = -\int \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}.dr = \frac{q}{4\pi r\, \varepsilon_0} + C_1$$

Cas r<R

$$V_2 = -\int \frac{q}{\pi r^2 \varepsilon_0}.dr = \frac{q}{\pi r\, \varepsilon_0} + C_2$$

Calcul des constances

le potentiel est nul à l'infini

$$\lim_{r\to\infty} V_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{q}{\pi r\, \varepsilon_0}$$

Au point r=R on est au même potentiel donc le potentiel de la region 1 est égal au potentiel de la région 2

$$V_1(R)=V_2(R)$$

$$\frac{q}{4\pi r\,\varepsilon_0}+C_1=\frac{q}{\pi R\,\varepsilon_0}\Rightarrow C_1=\frac{3q}{4\pi R\,\varepsilon_0}$$

$$V_1=\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{3}{R}\right)$$

3-

$$V_1(r=5)=\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)=\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\right)$$

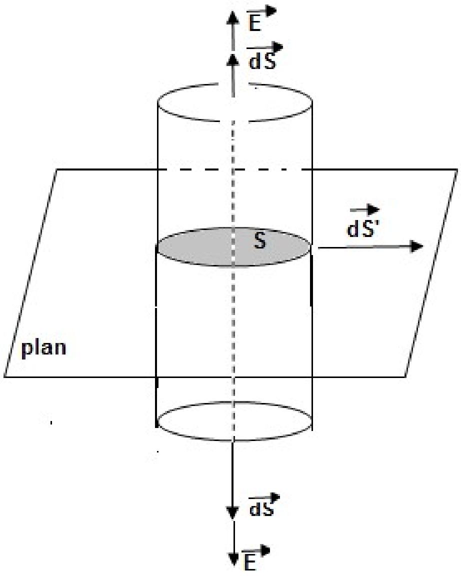
$$V_2(r=15)=\frac{q}{15\pi\,\varepsilon_0}$$

Exercice6

Un plan infini, parallèle au plan (x0y), a une charge surfacique□ = 2.8010^{-4}C/□^{2}.

Une charge ponctuelle □ = *8.90*□□ est placée à une distance de 4.50cm au dessus du plan.

Calculer la force électrique exercée sur la charge par le plan.



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \oiint_S \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dS} + \oiint_S \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dS} + \oiint_{S\prime} \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dS'}$$

On a choisi la surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h

Le champ électrique est parallèle aux surfaces S qui sont en face du plan chargé et il est perpendiculaire à la surface latérale du cylindre (surface de Gauss)

D'où le flux se réduit à la somme des deux flux des surfaces d'en face du plan

$$\Phi = 2 \iint E.dS = 2ES$$

La charge intérieure est égale

$$Q_{inter} = \iint \sigma dS = \sigma S$$

D'où

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La force électrique est

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u} = \frac{8{,}9.10^{-6}.2{,}8.10^{-4}}{2.8{,}854.10^{-1}}\vec{u} = 141\vec{u}$$

Exercices supplémentaires

Exercice1

Une boule de centre O et de rayon R est chargé volumiquement. La densité volumique de charge ρ dépend de la distance r au centre o suivant la loi

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

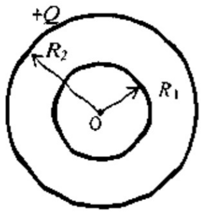
Ou ρ_0 désigne une constante positive.

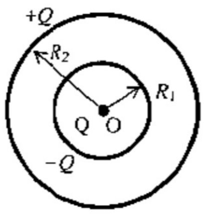
1- Exprimer la charge Q totale portée par la boule en fonction de ρ_0 et de R.

2- Déterminer l'expression du champ électrique, en distinguant les cas r<R et r>R.

Exercice2

On considère deux sphères S1 et S2 concentriques, creuses, de rayon respectifs R1 et R2 figure1. Et de charges totales respectives +Q et –Q. ces charges sont distribuées uniformément sur les surfaces des sphères correspondantes.





1- Exprimer le champ électrique et le potentiel en tout point de l'espace.
2- On place une charge ponctuelle +Q au centre des deux sphères figure 2. Exprimer le champ électrique total en tout point de l'espace.

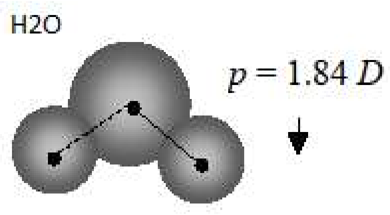
On suppose maintenant que les deux sphères sont chargées uniformément en surface avec des densités respectives - σ et +σ figure 1.

3- Calculer l'intensité du champ électrique en tout point de l'espace.
4- Tracer la courbe E pour les trois cas et la V(r) pour le premier cas seulement.

Chapitre 5
Dipôle électrique

1. Definition :

Un exemple de dipole est la molécule d'eau. La molécule d'eau contient deux charges H_3O^+ , OH^-).



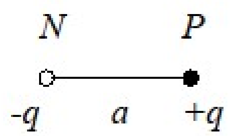
Molécule d'eau

Notre but dans cette section est de calculer le potentiel créé en un point M par un dipôle électrique.

2. Dipôle électrique :

2.1 Définition

Nous supposons un système de deux charges $(-q, +q)$ placées en N et P respectivement distant de a telle que $a = \|\overrightarrow{NP}\|$
Et $a \ll PM$ ou NM



Moment dipolaire

On définit le moment dipolaire le vecteur $\vec{p}$ par :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP} \tag{14}$$

$\vec{p}$ s'exprime en Cm.

2.2 Potentiel créé par un dipôle électrique.

Nous utilisons les coordonnées polaires afin de calculer le potentiel créé par le dipôle électrique$\vec{p}$. nous prenons comme origine O milieu de NP, et la droite NP comme origine des angles. Dans le cas d'un dipôle : $OM = r \gg a$.

Par définition $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$

$$PM \approx r - \frac{a}{2}\cos\theta \; PM \approx r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

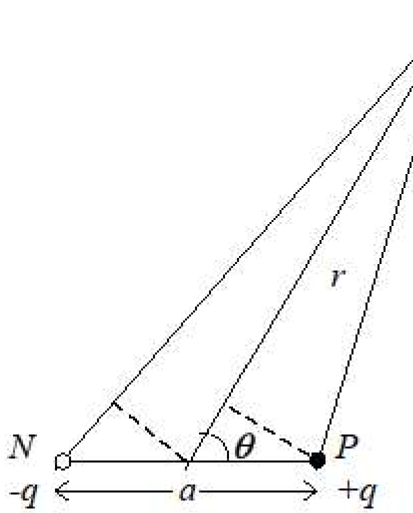


Figure 3.dipôle électrique

$$NM \approx r + \frac{a}{2}\cos\theta$$

$$NM \approx r\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

Série de Taylor : $(1 + X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$......si $X \ll 1$
Dans ce cas$\frac{a}{r} \ll 1$
Nous obtenons :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\cos\theta}{r^2}\right) \quad (15)$$

Nous introduisons $\vec{p}$ le moment dipolaire, nous écrivons :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\,.\vec{u}}{r^2}\right)$$

Où $\vec{u}$est un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$

Le potentiel électrique du dipôle dépend de(r, θ)et c'est une fonction décroissante en $1/\ r^2$.

Exemple :

- Donner les expressions du champ électrique créé par ce dipôle.
- Quelle est l'équipotentielle$V = cste$.
- Nous rappelons la relation entre le champ électrique et le potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

En coordonnées polaires

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

Nous obtenons

$$E_r = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta}{r^3}\right) \quad (16)$$

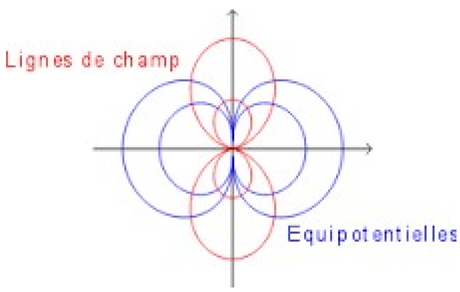
$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta}{r^3}\right)$$

L'équipotentielle$V = cste$

$$V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = \ cste$$

Nous donne

$$r^2 = k'\cos\theta \qquad (17)$$



Lignes de champ créé par un dipôle électrique et équipotentiel

Chapitre 6
Conducteurs en équilibre

1. Champ électrique dans le conducteur

Lorsque nous plaçons un métal tel que le cuivre dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_{ext}$

Il va y avoir un déplacement des charges négatives jusqu'à la surface du conducteur, qu'elles ne pourront pas franchir. Nous aurons un empilement des charges positives d'un côté et de charges négatives de l'autre côté.

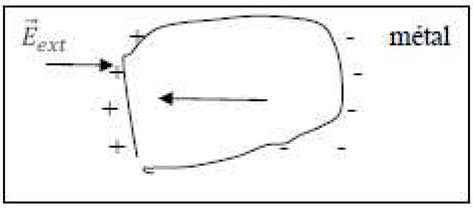
Cette nouvelle répartition des charges va engendrer un nouveau champ $\vec{E}_N$ de sens opposé $\vec{E}_{ext}$. Plus l'empilement de charges augmente plus $\vec{E}_N$ augmente.

L'état stationnaire ou état d'équilibre est attient quand le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul :

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_N = 0 \qquad (22)$$

à ce moment les charges électrique ne sont plus soumis à aucune force.

Par conséquent la surface du conducteur est recouverte de charges.



Empilement des charges positives d'un côté et de charges négatives de l'autre côté.

Nous avons montré que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique est nul

$$\vec{E}_{int} = 0$$

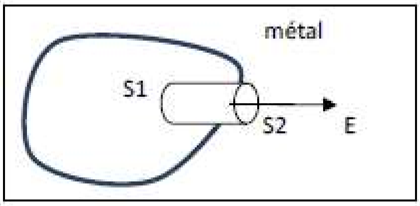
En effet

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Alors le potentiel Vest constant.

Ce résultat a pour conséquent que tout le conducteur et en particulier sa surface est une équipotentielle. Les charges électriques sont accumulées en surface avec une densité superficielle de charge σ.

Nous appliquons le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique$\vec{E}_s$ au voisinage immédiat du conducteur. Nous choisissons la surface de Gauss un cylindre très plat dont les génératrices sont perpendiculaires à la surface du conducteur.



$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$est approximativement à la surface extérieure du conducteur

$$\emptyset_{SF}(\vec{E}) = \emptyset_{S1}(\vec{E}) + \emptyset_{S2}(\vec{E}) + \emptyset_{S\ latérale}(\vec{E})$$

Les deux premières intégrales sont nulles puisque $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{S1}$ et $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{S2}$.

La troisième intégrale $\emptyset_{S\, latérale}(\vec{E})= \oiint \vec{E}_s.\overrightarrow{dS} = \int E_s.dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$E_s$est constant à la distance r

$$\emptyset_{S\, latérale}(\vec{E}) = E_s \int dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_s\, S = \frac{\int \sigma dS}{\varepsilon_0}$$

Nous prenons σ comme une constante, nous obtenons finalement

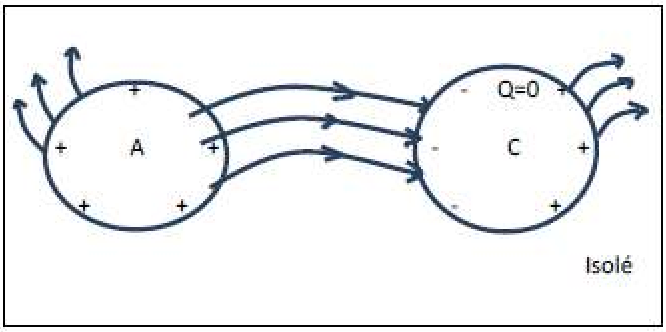
$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Nous remarquons que l'existence d'une discontinuité du champ électrique qui passe de zéro à l'intérieur du conducteur vers la valeur $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ est approximativement à la surface extérieure du conducteur. Cette discontinuité provient de l'accumulation des charges en surface.

2. Influence subie par un conducteur isolé

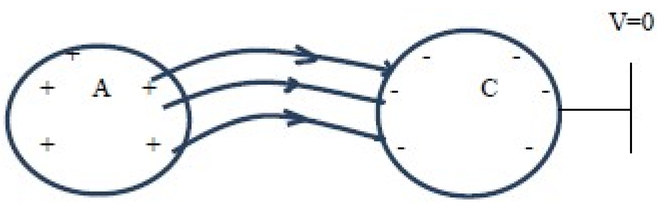
Soit Cun conducteur isolé et non chargé. Il n'y a aucune charge nulle part, donc $V = 0$

partout et $E = 0$. Aucune ligne de champ n'existe.On approche de Cun autre conducteur Achargé positivement. Les charges de Afont régner un champ électrique qui agit sur les charges mobiles de C. Dans C, les charges négatives se déplacent apparaissent sur la partie de C proche de A et des charges positives sur la partie la plus éloignée de Ajusqu'à ce que l'on arrive à une situation d'équilibre .



Les charges négatives se déplacent apparaissent sur la partie de $\boldsymbol{C}$ proche de $\boldsymbol{A}$ et des charges positives sur la partie la plus éloignée de $\boldsymbol{A}$

3. Influence subie par un conducteur maintenu à un potentiel constant



Lors que conducteur C est maintenu à un potentiel $\boldsymbol{V} = \mathbf{0}$, il apparait que des charges négatives sur $\boldsymbol{C}$,

Influence électrostatique sur un conducteur maintenu à $V = 0$

Nous partons toujours d'un conducteur seul face à un plan de masse, mais cette fois, il est relié par un fil conducteur à ce plan de masse.

Il n'y a aucune charge nulle part, donc $V = 0$ partout,$E = 0$. Aucune ligne de champ n'existe.

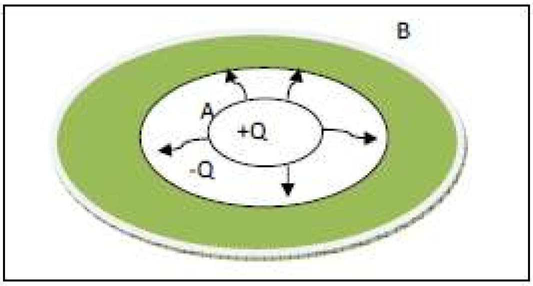
Quand nous approchons de Cle conducteur Achargé positivement, nous avons un effet très voisin du précédent, mais cette fois, comme Vest maintenu à 0 sur C , aucune ligne de champ ne peut plus sortir de Ccar aucun endroit n'est à un potentiel plus faible. Donc aucun point de la surface de Cne peut porter de charges positives.

il apparaît que des charges négatives sur C, alors qu'il y'a déplacement des charges positives vers la terre (c .à.d déplacement des électrons de la Terre vers C).

Or toutes les lignes de champ qui arrivent sur C viennent de A, tandis que celles qui partent de A ne viennent pas toutes sur C.

4. L'influence totale

L'influence totale se produit lorsque le conducteur B entoure le conducteur A. nous aurons le phénomène suivant : si le conducteur B est isolé et initialement neutre. Puisque la charge totale doit rester nulle, il apparaît sur la face externe la charge +Q.



Par contre si le conducteur B est isolé et porte initialement une charge Q′, par influence totale sa charge va augmenter et va s'ajouter à la charge initiale , il apparaît donc sur sa face externe la charge Q + Q′ .

Finalement, le conducteur B est relié au sol, aucune charge sur sa face externe (déplacement des électrons de la terre vers le conducteur B). B devient isolé.

5. Pression électrostatique.

Soit un conducteur C de charge surfacique σ. Le champ électrostatique est nul à l'intérieur de C tandis que le champ électrique au voisinage de la surface du conducteur C est

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Le champ moyen dans l'épaisseur de la couche e est :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Nous montrons que la force élémentaire ainsi exercée sur une portion de surface dS du conducteur a pour expression $\overrightarrow{dF} = P\overrightarrow{dS}$.

Or

$dF = EdQ$.

Et donc à la force $dF = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sigma dS$

Nous trouvons que

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \tag{24}$$

La pression P est toujours positive quel que soit le signe de la charge.

6. Capacité d'un conducteur et d'un condensateur

6.1 Conducteur

La charge Q d'un conducteur isolé Qest proportionnelle à son potentiel V

$$Q = C_i V \tag{25}$$

Le coefficient de proportionnalité C_i est appelé capacité du conducteur isolé. La capacitéC_i du conducteur isolé ne dépend que de sa géométrie. C_i s'exprime en farads.

1farads correspond à une charge de 1Coulomb quand le potentiel est de 1Volt .

$$\mu F = 10^{-6} F$$

$$nF = 10^{-9} F$$

$$pF = 10^{-12} F$$

Exercice 1

Quelle est la charge d'une sphère isolée de rayon $5cm$.

Solution

Si on prend comme surface de Gauss une sphère concentrique à la première et de rayon r le champ Een tout point est radial et de module constant. Donc, le flux de E est égal à $E4\pi r^2$. Ce flux est donc égal à la charge $\frac{Q}{\varepsilon_0}$.

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Alors,

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

soit le même que si la charge Q était ponctuelle. Le potentiel donc lui aussi le même que pour une charge ponctuelle :

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r}$$

A la surface, $r = R$ on a donc $V = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R}$

Où : $Q = 4\pi\varepsilon_0 R\ V$ en comparant avec $Q = C\ V$

Nous trouvons

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{5.10^{-2}}{9.10^{9}} = 0.5.55\ 10^{-11}F = 5.55\ pF.$

Exercice 2

Une sphère conductrice de rayon R1 porte une charge Q1 positive, calculer son potentiel, sa capacité et sa densité.

2 une seconde sphère conductrice S2 initialement neutre, de rayon R2<R1 est placée à une distance de S1 suffisamment éloignée pour que l'on puisse négliger les phénomènes d'influences. Elles sont reliées par un fil conducteur de capacité négligeable.

Calculer les charges des deux sphères lorsque l'équilibre est atteint, en déduire les densités surfaciques calculer leurs rapport

Solution

une sphère conductrice de rayon R, le champ électrique produit à une distance r de la sphère est donnée par

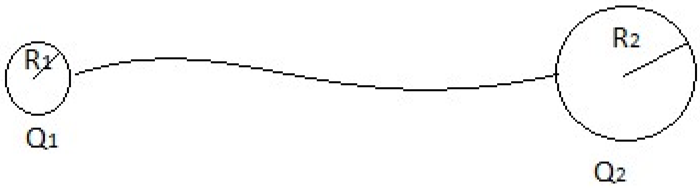
$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

$$V = k\frac{Q}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

2 les deux sphères S_1 et S_2 de rayon R_1 et R_2 respectives ($R_1<R_2$), relient entre elles par un fil, assez long pour éviter les influences.



Cet ensemble est un conducteur en équilibre électrostatique, tous ses points sont au même potentiel électrique, on suppose que Q_1 est la charge de la sphère S_1 et Q_2 est la charge de la sphère S_2, leur potentiels sont égaux :

$$K\frac{Q_1}{R_1} = K\frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Le champ électrique au voisinage de chaque sphère est donné par $E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}etE_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$

Le rapport entre ces deux champ est ;

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Sachant que $\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}$ et $\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$

Donc

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1}{Q_2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{Q_1}{R_1}\frac{R_2}{Q_2}\frac{R_2}{R_1}$$

D'où le rapport entre les deux champs :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Chapitre 7
Condensateurs

1. Définition :

Un condensateur est constitué de deux conducteurs en influence totale. Nous supposons que le conducteur 2 entoure complètement le conducteur1.

Le conducteur 1 s'appelle l'armature interne et le conducteur 2 l'armature externe.

2. Capacité d'un conducteur

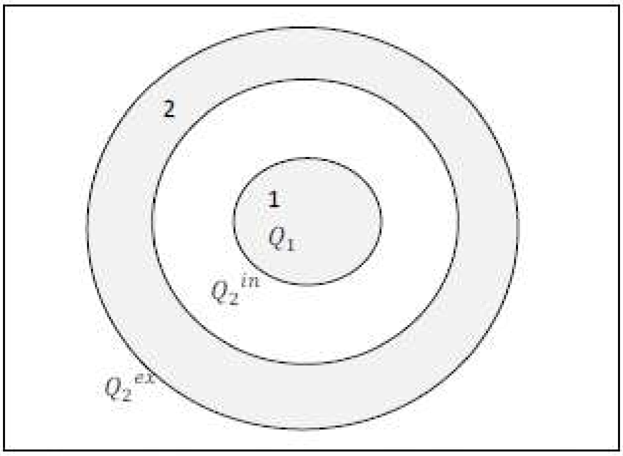


Figure 4 Par influence total, il apparait des charges sur la surface externe du conducteur 2

Soit Q_1la charge totale du conducteur 1.

Q_2la charge totale du conducteur 2. Avec $Q_2 = Q_2{}^{in} + Q_2{}^{ex}$

Nous remarquons déjà que $Q_2{}^{in} = -Q_1$, D'après le théorème de Gauss et puisque$\vec{E} = 0$ à l'intérieur d'un conducteur, on a

$$Q_1 = -Q_2^{in}$$

Les relations entre les charges et les potentiels s'écrit :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \quad (26)$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \quad (27)$$

Nous sommes dans un cas d'influence totale alors : $C_{ii} = \left|\sum_{j\neq i} C_{ji}\right|$

Qui devient $C_{11} = -C_{21} = -C_{12}$ car

$$C_{21} = C_{12} \quad (28)$$

C_{22} est le coefficient de l'armature externe en influence avec une armature dont le potentiel tend vers l'infini si $V_2 \neq 0$.

$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$

$$Q_1 = C_{11}(V_1 - V_2) \quad (29)$$

Q_1 depend de la ddp entre les armatures.

Maintenant, pour trouver Q_2 , il suffit de chercher Q_2^{ex} en fonction de Q_2^{ex}.

Q_2^{ex}est la charge portée par la surface extérieur du conducteur 2.

$Q_2{}^{ex} = Q_2 - Q_2{}^{in} = Q_2 + Q_1$

Nous trouvons

$Q_2 = -C_{11}(V_1 - V_2) + (C_{22} - C_{11})V_2.$

Par définition C_{11} est la capacité du condensateur

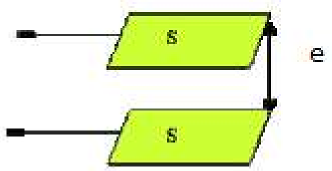
$$C_{11} = \frac{Q_1}{(V_1 - V_2)}.$$

3. Exemple de condensateur

1/ un condensateur plan

un condensateur plan est formé de deux plaques parallèles de surface S distant de e.

$e \ll S$, le champ qui règne entre les armature est uniforme : $E = \frac{V_1 - V_2}{e}$.



La capacité du condensateur plan

Es'exprime aussi en fonction de la densité de charge surfacique: $\sigma = \frac{Q}{S}$, tel que

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$

Le théorème de Gauss nous permet de connaitre le champ, créé par un plan infini portant une charge de densité surfaciqueσ. $|\overrightarrow{E_1}| = |\overrightarrow{E_2}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

D'après le principe de superposition, le champ créé par deux plans infinis portant respectivement de densité $+\sigma, -\sigma$

Nous revenons au calcul de la capacité du condensateur plan $C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)}$.

En expriment la charge Qen fonction de la d.d.p. $Q = \sigma S$

En remplaçons l'expression de $E\varepsilon_0 = \sigma$ dans Q

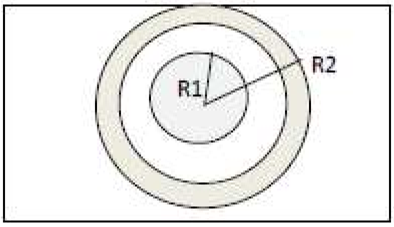
d'où :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} C \gg \varepsilon_0$$

2/Condensateur sphérique

Un condensateur sphérique se présente comme deux sphères conductrices concentriques de rayon R_1 et R_2respectivement $R_1 < R_2$ jouant le role d'armature interne et externe. C'est le cas d'une influence totale.

Si Qest la charge de l'armature interne, et $(V_1 - V_2)$la d.d.p, nous déduisons l'expression de la capacité $C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)}$.



Capacité d'un condensateur sphérique

d'après la définition

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr$$

Avec $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

D'où $V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$

Nous obtenons

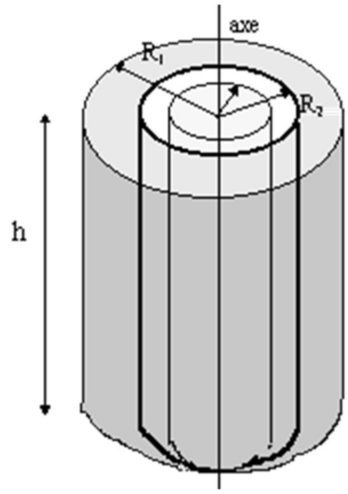
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Remarque :

$R_2 \rightarrow \infty C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$c'est la capacité d'une sphère isolé.

Si $R_2 = R_1 + e$ telle que $e \ll R_1$alors$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ c'est l capacité d'un condensateur plan.

4. Capacité d'un condensateur cylindrique.



Capacité d'un condensateur cylindrique

d'un condensateur cylindrique est formé de deux conducteurs cylindrique coaxiaux de rayon respectifs R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$ de hauteur h.

en supposant que le champ qui régne entre les armatures est le meme que celui produit par un cylindre infiniment long portant une charge Q.

Alors $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$ avec λest une charge linéique telle que $Q = \lambda h$.

Nous déduisons la capacité

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\log\frac{R_2}{R_1}}$$

Dans cas, si la distance entre les armatures est très petite

$R_2 = R_1 + e avec e \ll R_1$ alors : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

Nous retrouvons l'expression de la capacité d'un condensateur plan.

5. Groupements de condensateurs

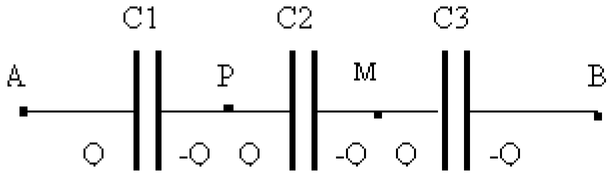
Un condensateur est caractérisé par sa capacité et la d.d.p qu'il peut supporter.

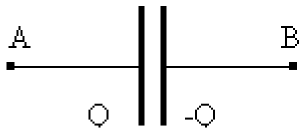
Objectif du groupement de condensateurs :

- avoir un condensateur capable de supporter les d.d.p élevées,
- ou avoir un condensateur de capacité très grande.

- Groupement en série.

Pour un groupement en série de n condensateurs, la capacité du condensateur équivalent sera :





Capacité $\boldsymbol{C}$ du conducteur équivalent au montage des condensateurs en série

Nous appliquons une d.d.p. $V_A - V_B$ entre les bornes A et . B L'armature du condensateur C_1, reliée à la borne A, reçoit une certaine quantité d'électricité Q, positive. Les autres armatures portent les charges Q ou $-Q$, qui sont réparties comme il est indiqué . En effet, les deux armatures d'un condensateur portent des quantités d'électricité opposées.

Déterminons la capacité C du conducteur équivalent au montage des condensateurs en série. Si l'on applique la même d.d.p. $V_A - V_B$ au condensateur équivalent, les mêmes quantités d'électricité Q et $-Q$ sont reçues par ses armatures . Sa capacité C est donc telle que : $Q = C.(V_A - V_B)$.

Considérant le montage en série (figure 1) des condensateurs de capacités C_1 , C_2 et C_3, on peut écrire pour chacun d'eux :

on peut écrire pour chacun d'eux :

$Q = C_1(V_A - V_P)$;

$Q = C_2(V_P - V_M)$:

$Q = C_3(V_M - V_B)$

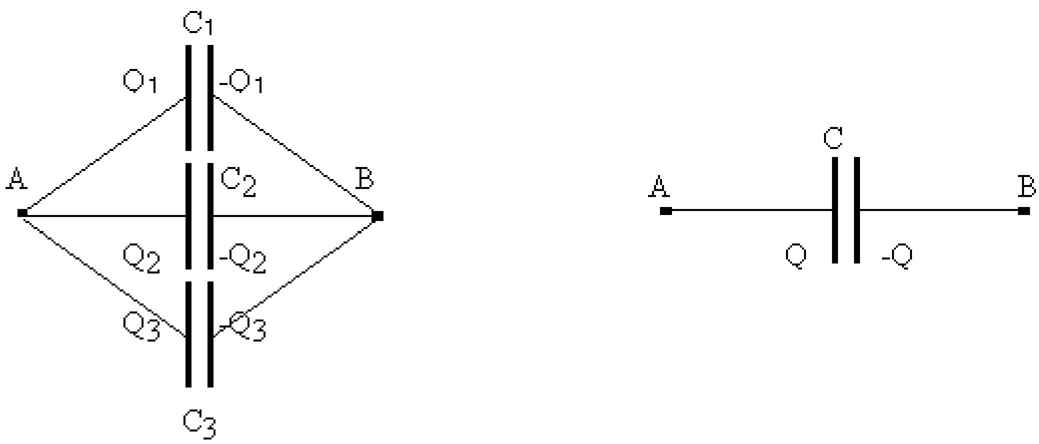
Et par suit : $\frac{Q}{C_1}(V_A - V_P) +: \frac{Q}{C_2}\left(V_p - V_M\right) + \frac{Q}{C_3}(V_M - V_B) = \frac{Q}{C}$

On obtient $\quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$C_1, C_2, C_3 \dots \dots . . C_n$, sont montés en série, le condensateur équivalent a la capacitéCtelle que

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \text{Groupement en série}$$

- Groupement en parallèle



Capacité$\boldsymbol{C}$du conducteur équivalent au montage des condensateurs en parallèle

On a représenté (figure 1) le montage en parallèle de 3 condensateurs de capacité C_1 , C_2et C_3La même d.d.p. est appliquée à tous les condensateurs. Les armatures reliées au point Aprennent les quantités d'électricité Q_1, Q_2, et Q_3, positives si . $V_A > V_B$. Les armatures reliées au point Bprennent les quantités d'électricité $-Q_1$, $-Q_2$et $-Q_3$.

Si la même d.d.p. .$V_A - V_B$ est appliquée au condensateur équivalent , à ce montage, son armature chargée positivement reçoit la quantité d'électricité Q_1+Q_2+ Q_3. La capacité C de ce condensateur est donc telle que :

$Q_1+Q_2+ Q_3 = C(V_A - V_B)$

On peut écrire pour chaque condensateur du montage en parallèle :

$Q_1 = C_1(V_A - V_B)$

$Q_2 = C_2(V_A - V_B)$

$Q_3 = C_3(V_A - V_B)$

donc :$Q_1+Q_2+ Q_3 = C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B) + C_3(V_A - V_B) = C(V_A - V_B)$

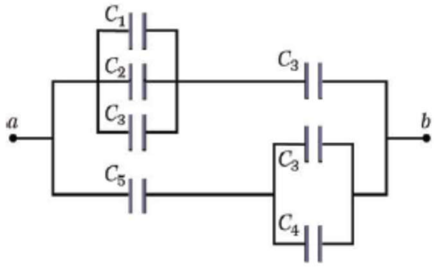
Il vient après simplification :

$$C = C_1+C_2+ C_3$$

D'une manière générale, la capacité C du condensateur équivalent à n condensateurs montés en parallèle, de capacité C_1, C_2, C_3…C_n……est :

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i \text{ Groupement en parallèle}$$

Exercice 3



Dans le circuit suivant, les condensateurs ont les capacités suivantes : C1 = 3,00 µF, C2 = 5,00 µF,

C3 = 4,00 µF, C4 = 2,00 µF et C5 = 3,00 µF.

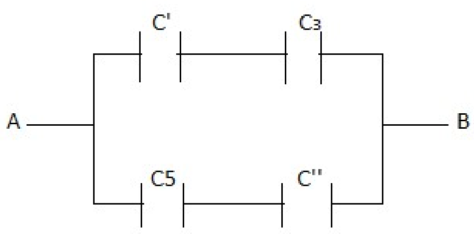
a. Quelle est la capacité équivalente entre les points AetB?

b. Si la charge sur C2 est de 120 µC, quelle est la différence de potentiel aux bornes du condensateur C5 ?

En se basant le fait que la différence de potentiel (ddp) est la même aux bornes des condensateurs reliés en parallèles ainsi que la charge est la même sur les condensateurs en séries.

Dans le cas de ce circuit on a une association de plusieurs condensateurs reliés entre eux d'une façon mixte c'est-à-dire en parallèle et en série. Pour calculer la capacité équivalente on doit passer par plusieurs étapes.

Sur la branche du haut on a C_1 , C_2 ET C_3qui sont reliés enparallèle, leurs capacités s'ajoutent



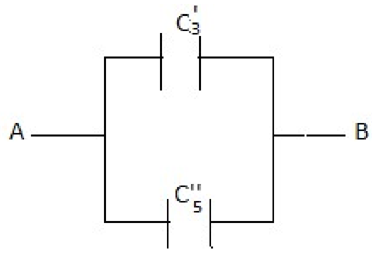
$$C' = C_1 + C_2 + C_3 = 12\mu F$$

De même sur la banche du bas on procède de la même façon pour C_3 ET C_4

$$C" = C_4 + C_3 = 6\mu F$$

Le circuit ainsi se réduit à deux branches à quatre condensateurs, la branche du haut est formée par le condensateur C′ et C_3et celle du bas formée par le condensateur C′′ et C_5

On simplifie encore le circuit toujours à deux branches avec un condensateur dans chaqu'une .



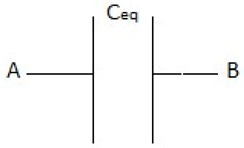
$$\frac{1}{C_3'} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$C_3' = 3\mu F$$

$$\frac{1}{C_5''} = \frac{1}{C''} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$C_5'' = 2\mu F$$

A la fin on peut calculer la capacité équivalente entre les deux point A et B



$$C_{eq} = C_3' + C_5'' = 5\mu F$$

2- Comme C_1 , C_2 ET C_3 qui sont reliés en parallèle leurs ddp sont égales à la ddp de C_2 qu'on notera par V_2, sachant qu'on a la valeur de la charge sur cette capacité Q_2 on peut calculer sa ddp par la relation

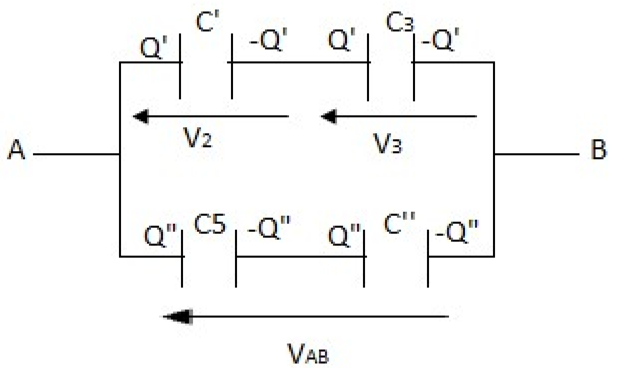
$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{120}{5} = 24\, V$$

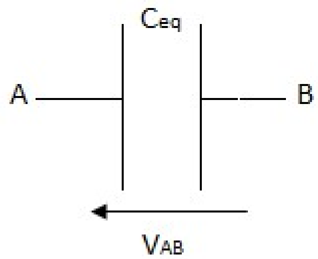
Cette ddp est aussi égale la ddp au borne de leur condensateur équivalent de capacité équivalente C', donc on peut déduire sa charge qu'on notera par Q'

$$Q' = C'.V_2 = 12 \times 24 = 288\mu C$$

Cette charge est aussi la charge du condensateur C_3 et aussi la charge de la branche du haut , connaissant la capacité équivalente de cette branche $C_3' = 3\mu F$ on peut calcule sa ddp

$$\frac{Q'}{C_3'} = \frac{288}{3} = 96\, V$$





Les deux branches sont parallèles leurs ddp sont égales entre eux et égales à la ddp du circuit équivalent entre les point A et B.on la notera par V_{AB}

$$V_{AB} = 96\, V$$

On peut déduire la valeur de la charge de la branche du bas Q''

$$Q'' = V_{AB}.C_5'' = 96 \times 2 = 192\mu C$$

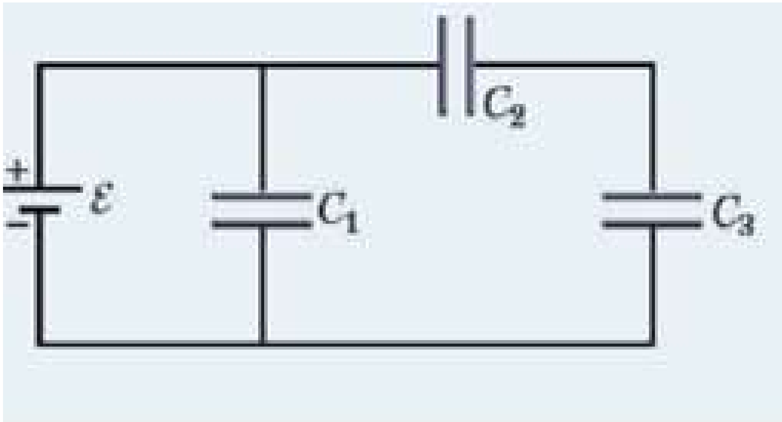
Elle est aussi la charge du condensateur C_5 sa ddp vaut $\frac{Q''}{C_5} = \frac{192}{3} = 64\ V$

Exercice4

Trois condensateurs ($C1 = 4{,}0\ nF, C2 = 3{,}0\ nF\ et\ C3 = 6{,}0\ nF$) sontbranchés dans un circuit à une batterie ($E = 12\ V$), comme le montrela figure ci-contre.

a. Quelle est la capacité équivalente dans le circuit ?

b. Quelle est la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur ?



CHAPITRE 8

Electrocinétique

1. LOI d'OHM

Les travaux pratiques montrent que le rapport entre la tension u(t) aux bornes d'une résistance R métallique (conducteur) et le courant qui le traverse$i(t)$, est constant (la température de la salle est maintenue constante). La constante R est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms Ω.

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}$$

C'est la Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.

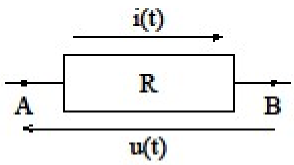


Figure 5.Résistance électrique du conducteur

À l'échelle microscopique.

En tout point M d'un conducteur de conductivité σ , il existe un champ $\vec{E}$entraîne l'apparition d'une densité de courant $\vec{J}$: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$; $\quad E = \frac{J}{\sigma}$

Cette expression est générale, elle constitue la forme locale de la loi d'Ohm.

La constanteσ, dépend de la nature du matériau. On utilise σpour caractériser le matériau où sa résistivité.$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{I/S}$; $\quad E = \rho\frac{I}{S}$

Pour un conducteur de longueur L, de section constante S, on définit la résistance Rpar : $\mathrm{R} = \rho \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{S}}$.

Si $\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}$désignent les potentiels entre deux points Aet Bdistant de Ldans le conducteur, la norme du champ électrique est égale aussi à

$\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B} = \int_0^L \mathrm{E}\,\mathrm{dl}.$: $\qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{V_A}-\mathrm{V_B}}{\mathrm{L}}$

Ainsi, La loi d'Ohm traduit l'**effet** du déplacement des charges au champ électrique E auquel correspond une différence de potentiel en fonction du matériau caractérisé par sa résistance.

Exercice 1

Dans le Cu : densité volumique d'atomes: $n = 8.4\ 1028\ m^{-3}$.

on admet que chaque atome fournit 1 é au courant :

n_e = 8.4 1028 m^{-3}.

$\Rightarrow q = -e = -1.6\ 10 - 19\ C$

$v = ?$

Solution

pour $\boldsymbol{I} = \mathbf{10}\boldsymbol{A}$ et $= \mathbf{10}\ \boldsymbol{mm}^{2}$. on calcule $\boldsymbol{I}$:$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}.\boldsymbol{S} = \boldsymbol{eqvS}$

On trouve $v \approx 7.4\ 10 - 4\ m/s$.

2. Loi de Joule.

Nous avons montré dans le paragraphe précèdent (2) que le travail de la force électrique lors du déplacement d'une charge q entre deux points A et B prend la forme suivante : $W = q\ \big(V(A) - V(B)\big)$.

Si un élément de charge dq passe d'un point A à un point B à travers une résistance$R$, le travail des forces électriques est : $dW = dq\ \big(V(A) - V(B)\big)$.

Nous remplaçons $dq = idt$ et $V(A) - V(B) = u$ est lad.d.p.

D'où $dW = Ri^2dt$

Ce travail est l'énergie dissipée sous forme de chaleur : c'est l'effet Joule

A l'état stationnaire. Elle correspond à une puissance

$$\mathbf{P} = \frac{dW}{dt} = Ri^2 \tag{39}$$

Soit

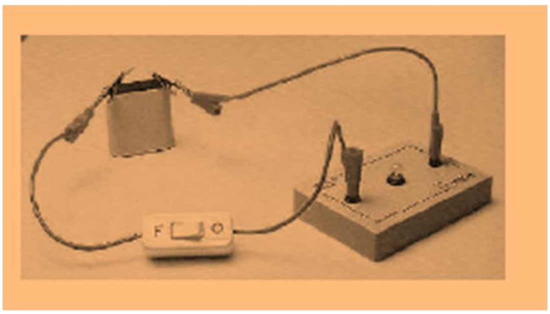
$$\mathbf{P} = \frac{u^2}{\boldsymbol{R}}$$

$$\mathbf{P} = u\, i$$

Une puissance s'exprime généralement en watts, ou en joule par seconde.

3. Les Circuits électriques.

Un circuit électronique simple est constitué d'un générateur qui fournit l'énergie électrique, un récepteur qui reçoit l'énergie du générateur et interrupteur qui permet de commander le passage du courant dans le circuit



Circuit électronique simple

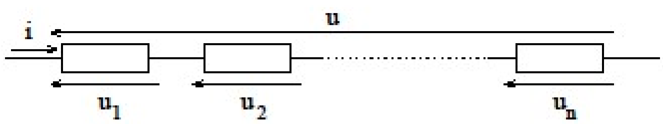
Circuit électronique simple

On distingue deux types de circuit.

- Un circuit électrique passif est un circuit composé de (résistance, bobine, condensateur …….). un circuit passsif consomme de l'énergie.
- Un circuit électrique actif comporte de (diode, circuit intégré…..). un circuit actif fourni de l'énergie au circuit dans lequel il est connecté.

Groupement de résistances.

Association en série de résistance



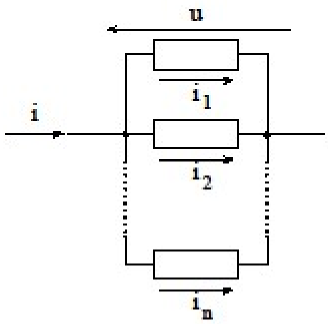
Association en série de résistance

Chaque résistance est traversée par la même intensité et la tension aux bornes de la résistance équivalente est égale à la somme des tensions partielles

$$\boldsymbol{u = \sum_{k}^{N} u_k}$$

Où $\boldsymbol{u = Ri}$

Association en parallèle de résistance



Association en parallèle de résistance

Les résistances sont soumises à la même tension. Le courant total qui traverse l'ensemble des résistances est égal à la somme des courants individuels

$$\boldsymbol{i} = \sum_{k}^{n} \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{k}} \qquad (43)$$

4. Lois de Kirchhoff

Un circuit comportant des générateurs de tension, des récepteurs et de fil de connexion.

Nous définissons :

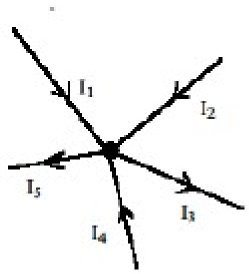
- un nœud est un point du circuit relié à deux dipôles ou plus.
- Une branche de réseau est la partie de circuit comprise entre deux noeuds.
- Une maille est un parcours fermé de branches passant au plus une seule fois par un noeud donné.

5. Loi des nœuds

En tout nœud d'un circuit, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui sortent. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de la charge électrique.

$$\sum i_{entrant} = \sum i_{sortant} \tag{44}$$

$$\boldsymbol{I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5}$$



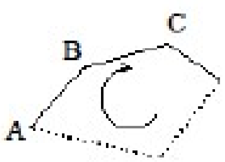
Loi des Noeuds

6. Loi des mailles

Le long de toute maille d'un circuit électrique, à tout instant, la somme algébrique des tensions est nulle.

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_?) + \cdots \ldots \ldots \ldots (V_? - V_A) = 0 \tag{45}$$

Les deux lois de Kirchhoff permettent l'analyse les réseaux électriques.

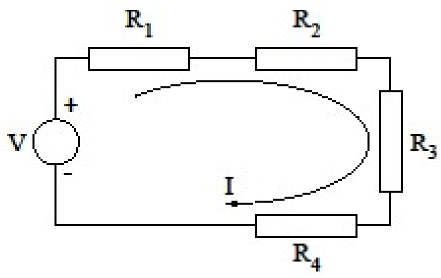


Loi des mailles

7. Application de la Loi d'Ohm aux réseaux

Nous considérons maintenant un circuit fermé comportant un générateur de tension et N résistances en série. Selon la loi des mailles nous pouvons écrire :

$$-V + \sum_{k}^{N} R_k \, i = 0 \qquad (46)$$



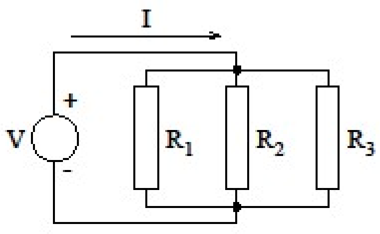
Circuit électrique fermée

Par définition la résistance équivalente est telle que : $V = R\,i$, donc :

$$R = \sum_{k}^{N} R_k$$

Nous supposons N résistances en parallèle, elles sont soumises à la même tension,

chacune est parcourue par un courant



Association en série et en parallèle

$$i_1 = \frac{V}{R_1}$$

La loi des nœuds nous donne.

$$I = \sum_{k}^{N} \frac{V}{R_k}$$

Exercice2 de TD 2022

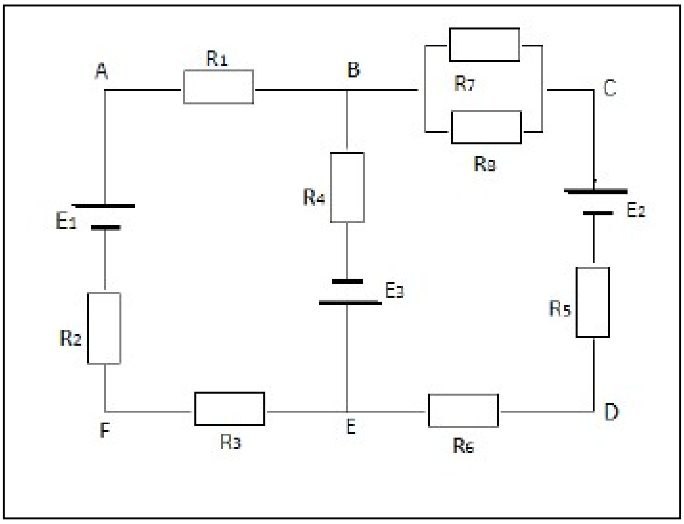
Soit le circuit suivant, tel que les résistances ont les valeurs suivant :

R1= 1Ω , R2= 1Ω, R3=4Ω, R4= 3Ω, R5= 1Ω, R6= 2Ω, R7= 12Ω et R8= 4Ω .

Les f.e.m sont :

E1= E2= 3V E3= 6V.

Calculer les courants traversant chaque résistance.



Solution

$$R' = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R' = 6\Omega$$

$$\frac{1}{R_{7,8}} = \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8}$$

$$R_{7,8} = 3\Omega R_{7,8} = 3\Omega$$

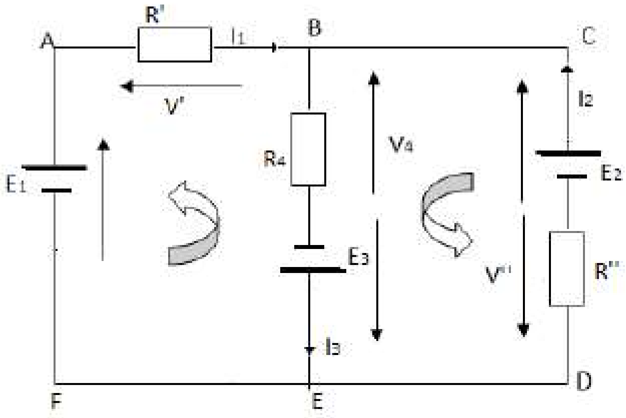
$$R'' = R_5 + R_6 + R_{7,8}$$

$$R'' = 6\Omega$$

En appliquant les lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

$I_1 + I_2 = \ I_3$



Maille ABEFA

$$V_4 + V' - \ E_1 - E_3 = 0$$

Maille BCDEB

$$-V_4 - V'' \ +E_2 + E_3 = 0$$

Maille ABCDEFA

$$V' - \ V'' \ +E_2 - E_1 = 0$$

De la maille ABCDEFA, nous trouvons $V' - \ V' = 0$ cela implique $V' = V'$

Et puisque R' = R''

Alors $I_1 = I_2$

On remplace

$$-V_4 - V'' + E_2 + E_3 = 0$$

$$-3I_3 - 6I_1 + 9 = 0$$

De la loi des nœuds, $I_3 = 2I_1$

En remplaçant dans l'équation de la maille ABCDEFA , on trouve $I_1 = I_2 = \frac{3}{4}$A et $I_3 = \frac{3}{2}\ A$.

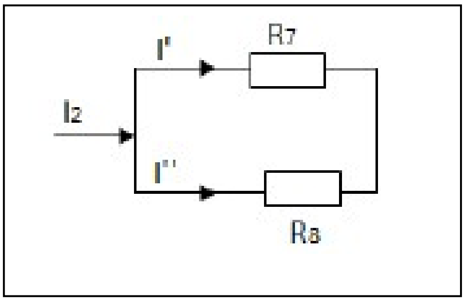
I_1traverse les résistances $R1, R2\ et\ R3$

I_3 traverse la résistance $R4$

R_7et R_8 sont en //.

$V_7 = V_8 = V_{7,8}$

$R_7 I' = R_8\ I'' = R_{7,8}\ I_2$



$$I' = \frac{R_{7,8}}{R_7} I_2$$

$$I' = \frac{3}{12}\frac{3}{4} = \frac{3}{16}\ A$$

$$I' = \frac{3}{16} A$$

$$I'' = I_2 - I'$$

$$I'' = \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16} A$$

$$I'' = \frac{9}{16} A$$

Exercice 3

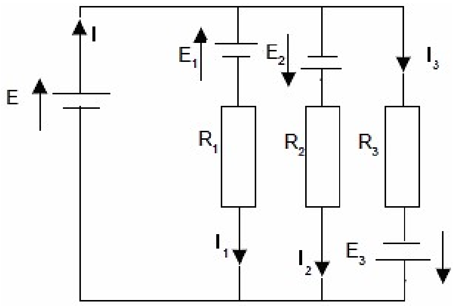


Figure 6. Calcul du courant principal***I***

Calculer le courant principal$I$. On donne :

$$E = 10\,V, E1 = 5V, E2 = 3V, E3 = 6V, R1 = 1k, R2 = 2{,}2kR3 = 3{,}3k.$$

Solution :

La loi des nœuds

$I = I_1 + I_2 + I_3$

La tension est la même (groupement parallèle) :

$$E = +R_1 I_1 = -E_2 + R_2 I_2 = -E_3 + R_3 I_3$$

Dans la 1er branche

$$I_1 = (E - E_1)/ R_1 = (10V - 5V) / 1k = 5mA$$

Dans la 2eme branche

$$I2 = (E + E2)/ R2 = (10V + 3V) / 2{,}2k = 5{,}91mA$$

La 3eme branche

$$I3 = (E + E3)/ R3 = (10V + 6V) / 3{,}3k = 4{,}85mA$$

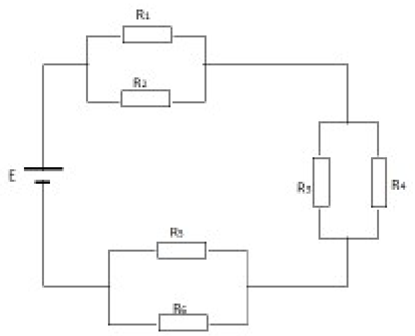
Nous obtenons

I = 5mA + 5,91mA + 4,85mA = 15,76mA.

Exercice 4

Dans le circuit suivant ; les résistances ont les valeurs suivantes : R1=25 Ω R2=45 Ω R3=150 Ω R4=78Ω R5=18 Ω R6= 55 Ω , le courant traversant la résistance R1 est égale à 0,98 A.

-Calculer la résistance équivalente du circuit, déduire la f .e .m E de la batterie.



Solution

1/ Les résistances R1 et R2 sont en //

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{1,2} = \frac{25\ 45}{25 + 45}$$

$$R_{1,2} = 16.1\Omega$$

Les résistances R3 et R4 sont en parallèle en les combinant on trouve une résistance

$$R_{3,4} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_{3,4} = \frac{150\ 78}{150 + 78}$$

$$R_{3,4} = 51.3\Omega$$

Les résistances R5 et R6 sont en parallèle en les combinant on trouve une résistance

$$R_{3,4} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}$$

$$R_{3,4} = \frac{18\ \ 55}{18 + 55}$$

$$R_{3,4} = 51.3\Omega$$

La résistance équivalente du circuit est :

$$R_{equi} = R_{1,2} + R_{3,4} + R_{5,6}$$

$$R_{equi} = 81\Omega$$

2/ comme $R_1\ et\ \ R_2$ sont en // alors

$$V_1 = \ V_2$$

$$R_1\, I_1 = \mathrm{R}_2 I_2$$

$$I_2 = \frac{\mathrm{R}_1}{R_2} I_1$$

$$I_2 = \frac{25_1}{45}\ 0.98$$

$$I_2 = 0.54A$$

D après la loi des nœuds :

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = 1.52A$$

La loi d'Ohm

$$E = R_{equi}\ I$$

AN :

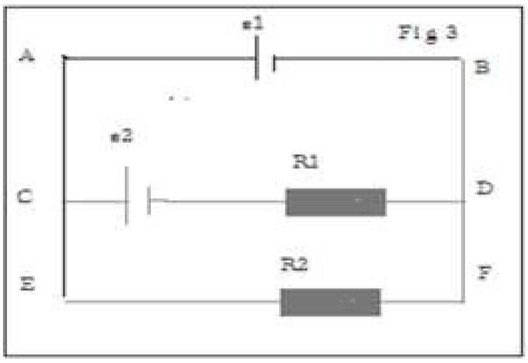
$$E = 81\ \ 1.52$$

La fem vaut

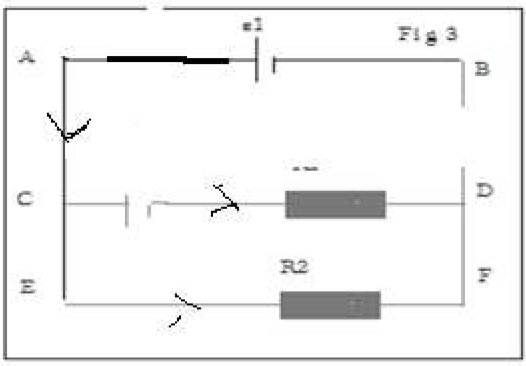
$$E = 123.1\, Volt$$

Exercice 5:

On considère le circuit de la figure 3, sachant que $R_1=R_2=5\ \Omega$ et e1=2e2=10v, déterminer les courants des branches AB, CD et EF.



Solution



On admet que le courant I1 circule dans la branche AB

Le courant I2 passe par la branche CD

Et le courant I3 passe par la branche EF

Sachant que les points C et D sont des nœuds$I_1 = I_2 + I_3$

Alors,

Les équations des mailles sont :

$$I_2 \ R1 - I_3 R2 + e2 = 0$$

$$I_2 \ R1 + e2 - e1 = 0$$

Nous tirons :

$$I_2 = \frac{e1 - e2}{R_1}$$

$$I_2 = 1A$$

Et

$$I_3 = \frac{I_2 \ R1 + e2}{R_2}$$

$$I_3 = 1A$$

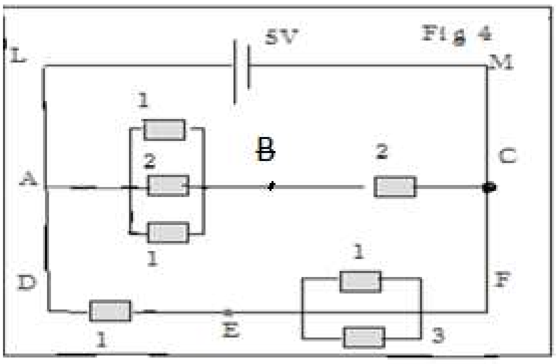
Alors

$$I_1 = 2A$$

Exercice 6

On considère le circuit suivant.

Déterminer les courants des mailles 1 et 2. Déterminer les ddp: V_{AB}, V_{BC}, V_{DE}, V_{EF} et V_{LM} .En déduire les courants qui traversent les résistances AB et EF.



Solution

D'abord il faut simplifier le circuit :

Les résistances 1, 2 et 1 entre A et B sont en // :

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$R_{AB} = 0.4\ \Omega$$

Entre E et F, les résistances sont en //

$$\frac{1}{R_{EF}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1}$$

$$R_{AB} = 0.75\ \Omega$$

Dans la branche AC la résistance est

$$R_{AC} = R_{AB} + \ 2$$

$$R_{AC} = 2.4\ \Omega$$

Les equations de Mailles donnent :

$$2.4I_{AC} - 5 = 0$$

$$1.75I_{FD} - 2.4I_{AC} = 0$$

Avec l'équation de nœud :

$$I_{ML} = \ I_{AC} + I_{DF}$$

On trouve

$$I_{AC} = 2.08A$$

$$I_{DF} = 2.85A$$

$$I_{ML} = 5.7A$$

2/ les tensions aux bornes de chaque résistance :

$$V_{AB} = \ R_{AB}I_{AC}$$

$$V_{AB} = 0.83\ V$$

$$V_{BC} = \ 2I_{AC}$$

$$V_{BC} = 4.16V$$

$$V_{DE} = 1I_{DF}$$

$$V_{BC} = 2.85V$$

$$V_{DE} = R_{DF}I_{DF}$$

$$V_{DE} = 2.13V$$

$$V_{LM} = 5V$$

Dans la branche AB, les Resistances 1,2 et 3 (Ω) sont en //.

Ce qui donne

$$V_{AB} = 1I'_{AC} = 2I''_{AC} = 3I'''_{AC}$$

Dans la résistance 1Ω

$$I'_{AC} = 0.83A$$

Dans la résistance 2Ω

$$I''_{AC} = 0.415A$$

Dans la résistance 3Ω

$$I'''_{AC} = 0.835A$$

Les tensions sont les mêmes dans la branche EF

$$V_{EF} = 1I'_{DE} = 3I''_{DE}$$

Alors les courants dans la résistance 1Ω et 3 Ωdans la branche EF sont :

$$V_{EF} = 1I'_{DE}$$

On trouve :

$$V_{EF} == 3I''_{DE}$$

On trouve :

$$I'_{DE} = 2.13A$$

$$I''_{DE} = 0.71A$$

Références

PHYSIQUE tout-en-un pour la licence. Laurent Gautron et al DUNOD.

PHYSIQUE 2. Electricité et magnétisme, 6eme édition David Hallyday et al DUNOD.

Electricité Notion de Base, Electrostatique, Electrocinétique, Electromagnétisme.Dr. Samir Khene