الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des sciences et de technologie MOHAMED BOUDIAF D'oran
Faculté de Génie mécanique
Département de Génie maritime

Premier cours en :

Méthodes Numériques

Conforme au programme de la 2eme année licence

Par : Dr BOUSSOUFI Mustapha

Année : 2022

Ce cours est destiné aux étudiants de 2 éme année licence assurées au département de mine et métallurgie, Il a pour but de fournir aux étudiants une variété d'outils numériques permettant la résolution efficacement d'un certain nombre de problèmes.les chapitres de ce cours sont s'éclaircissent par des exemples, et une série d'exercices est propos à la fin de chacun d'entre eux. La plupart de ces exercices étaient proposés lors des séances de travaux dirigés.

Ce cours se compose de cinq chapitres. Particulièrement, ce cours traite les sujets suivants :

Chapitre1 : Les Erreurs Numériques

1. Introduction
2. Mesure de l'Erreur
   - 2.1 Erreur absolue
   - 2.2 Erreur relative
3. Représentation décimale d'un nombre approché
   - 3.1 Chiffres significatifs exacts d'un nombre approché
   - 3.2 Arrondissement d'un nombre approché

3.3 L'erreur d'arrondi

Chapitre 2 : Résolution des équations non-linéaires

1. Introduction
2. Localisation des racines
3. Les méthodes utilisées
   - 3.1 Méthode de dichotomie (bissection)
   - 3.2 Méthode du point fixe (approximations successives)
   - 3.3 Méthode de Newton-Raphson

Chapitre 3 : Interpolation Polynomiale

1. Introduction
2. Les méthodes utilisent
   - 2.1 Polynôme de Lagrange
   - 2.2 Polynôme de Newton

Chapitre 4 : Résolution des systèmes d'équations linéaires

1. Introduction
2. Méthode de Cramer
3. Les Méthodes directes
   - 3.1. Méthode de Gauss ordinaire
   - 3.2. Méthode de Gauss - Jordan
   - 3.3. Décomposition LU
4. Les Méthodes itératives
   - 4.1 Méthode de Jacobi
   - 4.2. Méthode de Gauss Seidel

Chapitre 5 : Intégration Numérique

Enfin, merci de me signaler toute erreur éventuelle dans le contenu ou dans la forme de cette première tentative.

Chapitre 1

Les Erreurs Numériques

1. Introduction

Un résultat numérique approché n'a pas de sens que s'il est accompagné d'une estimation de l'erreur commise entre les résultats exacts et approché sans cela on ne peut rien dire.

2. Mesure de l'Erreur

On peut envisager plusieurs façons pour mesurer l'erreur E entre une valeur approchée ***x**** et une valeur exact ***x*.**

2.1 Erreur absolue :

Elle est définie comme :

$$E = |x^* - x|$$

Remarque : en pratique il est impossible d'évaluer l'erreur absolue car ***x*** est souvent inconnu par conséquent, on introduit la notion de la borne supérieure de cette erreur noté ε

$$E = |x^* - x| \leq \varepsilon$$

$$x = x^* \pm \varepsilon$$

2.2 Erreur relative :

On appelle erreur relative le nombre $r(x)$ défini par

$$r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{e}{|x|}$$

3. Représentation décimale d'un nombre approché :

Tout les nombre x^* peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$x^* = \alpha_m.10^m + \alpha_{m-1}.10^{m-1} + \alpha_{m-2}.10^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{m-n-1}.10^{m-n+1}$$

$$\alpha_m \neq 0$$

Les chiffres $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \alpha_{m-2}, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{m-n+1}$ sont appelés chiffres significatifs

Exemples : la représentation décimale de nombre 15,10359

$15.10359 = 1.10^1 + 5.10^0 + 1.10^{-1} + 3.10^{-3} + 5.10^{-4} + 9.10^{-5}$

3.1 Chiffres significatifs exacts d'un nombre approché :

On dit que les n premiers chiffres d'un nombre approché x^* sont exacts si :

$$e \leq 0{,}5.10^{m-n+1}$$

Ou m le 1^{er} exposant de 10 dans x^*

3.2 Arrondissement d'un nombre approché :

L'arrondissement est un processus qui consiste à tronquer les nombres pour n'en garder que le nombre de chiffres significatifs exacts.

Règles d'arrondissement :

* Si le 1^{er} chiffre à rejeter est $\prec 5$ le nombre est retenu

* Si le 1^{er} chiffre à rejeter est ≥ 5 on ajoute une unité au dernier chiffre significatif retenu

Exemple :

$5.32 \approx 5.3$
$5.76 \approx 5.8$

3.3 L'erreur d'arrondi :

Elle vérifie l'estimation suivante :

$$\Delta x \leq 0{,}5.10^{m-n+1}$$

Résultat final s'écrit sous forme

$$x = x^*\,arrondi \pm (2e)$$

Exercice :

Soit $x = 0.1347$ donné avec une erreur de 0,5%

1) Donner l'erreur absolue de x
2) Déterminer le nombre de chiffre significatif exact de ce nombre
3) Arrondis le résultat final

Solution :

- L'erreur absolue :

On a

$$r(x)=\frac{e}{|x|} \qquad \Rightarrow e=r(x).|x|$$

$$e=0,005.0,1347 \qquad \Rightarrow e=0,0006735$$

- Le nombre de chiffre significatif exact

Comme $e\leq 0,5.10^{m-n+1}$ $\Rightarrow$ $e=0.0006735\leq 0,5.10^{-3}$

Donc :

$$\begin{cases} m-n+1=-3 \\ m=-1 \end{cases} \qquad \Rightarrow n=3$$

Donc le nombre x a trois chiffres significatifs exacts.

- Arrondissement de résultat final :

Le 1er chiffre à rejeter est égal a 7 donc x arrondi note par x_a est égal a $0,135$

Donc le résultat final s'écrit :

$$x=x_a\pm 2\Delta x=0,135\pm 10^{-3}$$

Chapitre 2

Résolution des équations non-linéaires

1. Introduction :

Dans la pratique, la plupart des problèmes se ramenant a la résolution d'une équation de la forme $f(x)=0$

La résolution de cette équation dépend de la classe à laquelle appartient la fonction f (f est un polynôme de degré $n \geq 3$ ou l'expression f est complexe).

Les méthodes classiques de résolution ne permettent pas de résoudre de tels problèmes, on fait donc appel aux techniques des méthodes numériques. Les méthodes proposées sont : la méthode de la bissection, approximations successives et de Newton-Raphson.

2. Localisation des racines :

La plupart des méthodes numériques nécessite la détermination d'un intervalle $[a,b]$ contenant une seule racine dite racine séparée α de $f(x)=0$

❖ **Méthode de séparation :**

- L'étude de variation de f , puis l'utilisation du théorème de la valeur intermédiaire.
- La réécriture de f sous forme $f_1(x)=f_2(x)$ puis la recherche des points d'intersection entre f_1 et f_2

  Exemple :

  $f(x)=e^x \sin x - 1$

  Remarque :

  On suppose que f est continue et que la racine α est localisée (séparée) dans un intervalle $[a,b]$

3. Les méthodes utilisées :

3.1. Méthode de dichotomie (bissection) :

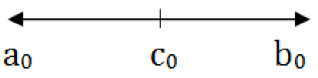
Le but de cette méthode est de construire une suite d'intervalle de plus en plus petites contenants une racine séparée de $f(x)=0$.

- **Principe de la méthode :**

La méthode de dichotomie est basée sur le théorème de la valeur intermédiaire

Soit $f(x)=0$, α une racines séparée de $f(x)$ dans $[a,b]$.

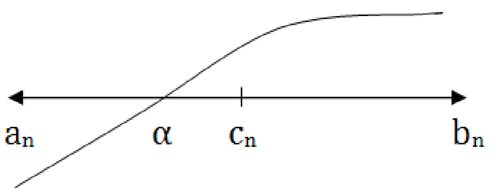
1) On pose $[a,b]=[a_0,b_0]$, on divise $[a_0,b_0]$ en deux on obtient $c_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$

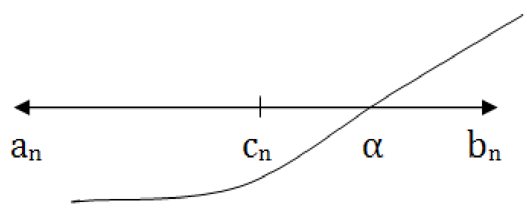


Si $f(a_0).f(c_0)\prec 0$ Alors $I_1=[a_1,b_1]=[a_0,c_0]$ si non $I_1=[c_0,b_0]$

et ainsi de suite on construit la suite d'intervalles $I_n=[a_n,b_n]$ et donc $c_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

Si $f(a_n).f(c_n)\prec 0$ Alors $I_{n+1}=[a_n,c_n]$ Sinon $I_{n+1}=[c_n,b_n]$





On prend comme approximation de α la valeur c_n en utilisant n itérations. Plus loin, on verra comment déterminer le nombre d'itération nécessaire n en se donnant une erreur d'approximation ε telle que $|c_n-\alpha|\le\varepsilon$

- **Test d'arrêt :**

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$$

D'où α est racine de $f(x)=0$ $\quad |c_n-\alpha|\le\dfrac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$

Remarque :

Si on désire de calculer le nombre d'itération suffisante n pour approcher α à ε, on procède comme suit :

$$|c_n-\alpha|\le\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\le\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad n\ge\frac{\ln\left(\dfrac{b_0-a_0}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

Il suffit de prendre $$n = \frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2} + 1$$

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = x - 0,2\sin x - 0,5$

Calculer la valeur approchée par la méthode de bissection avec $\varepsilon = 0,5.10^{-1}$ dans $[0,2]$

Solution :

On calcule le nombre d'itérations suffisants

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{2-0}{2.0,5.10^{-1}}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n \geq 4,32 \Rightarrow \text{n=5}$$

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$
0	0	2	1	-	+
1	0	1	0 ,5	-	-
2	0 ,5	1	0,75	-	+
3	0,5	0,75	0,625	-	+
4	0,5	0,625	0 ,5625	-	-
5	0 ,5625	0,625	0,59375	-	-

3.2. Méthode du point fixe (approximations successives).

Soit g une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$, le point qui vérifie $X = g(X)$ est dit point fixe de la fonction g avec $X \in [a,b]$.

- **Principe de la méthode :**

Le principe de cette méthode consiste à transformer l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $X = g(X)$, pour chercher le point fixe X de la fonction g (x) on crée la suite

$x_{n+1} = g(x_n)$ $(n = 0,1,2,...)$ avec une valeur initiale x_0 donnée

La Méthode des approximations successives utilise une procédure itérative simple

On démarre de x_0 , on calcule $x_1 = g(x_0)$ ensuite $x_2 = g(x_1), \ldots\ldots, x_{n+1} = g(x_n)$

Le problème principal est de savoir si la suite des mesures $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$ converge vers la solution X de $g(X)$

Exemple : Ecrire l'équation $f(x)=0$ sous la forme $x=g(x)$ si $f(x)=\ln x - x^2 + 2$

On peut écrire $$x = g_1(x) = \ln x - x^2 + 2 + x$$

$$x = g_2(x) = e^{x^2-2}$$

$$x = g_3(x) = \sqrt{\ln x + 2}$$

Pour pouvoir choisir la forme de g adéquate pour le calcul, un critère de convergence de cette méthode doit être vérifié.

- **Critère de convergence**

Soit g une fonction dérivable définie sur l'intervalle $[a,b]$ tel que

$$|g'(x)| \le k < 1 \qquad \forall x \in [a,b]$$

Le processus itératif $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n = 0,1,2,...)$ converge indépendamment de la valeur de x_0 vers l'unique point fixe X de $g(X)$

Si plusieurs formes de g vérifient cette condition, on aura plusieurs valeurs de k.

On choisit celle avec la valeur minimale de k. En pratique, la valeur de k est :

$$k = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)|$$

- **Critère d'arrêt**

On peut arrêter les calcules lorsque la différence absolue entre deux itérations successives est inférieure à une certaine précision ε donnée.

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Ou bien on calcule le nombre d'itérations n suffisantes pour avoir une valeur approchée de α a ε prés avec même principe que la dichotomie

D'où si α est racine de $f(x)=0$ $\quad |x_n - \alpha| \le \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| < \varepsilon$

$$k^n < \frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|} \Rightarrow n < \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln k}$$

On obtient :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln k} + 1$$

Exemple : trouver la première racine de l'équation $f(x) = x^2 + 3e^x - 12$ qui appartient a $[1,2]$ avec une précision $\varepsilon = 0,01$

On écrit cette fonction sous la forme $x = g(x)$. On peut écrire :

$$x = x^2 + 3e^x - 12 + x = g_1(x)$$

$$x = \sqrt{12 - 3e^x} = g_2(x)$$

$$x = \ln\left(\frac{12 - x^2}{3}\right) = g_3(x)$$

Vérifions la condition de convergence pour la fonction $g_3(x)$

$k = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)|$

$k_3 = \max_{x\in[1,2]} |g_3'(x)| = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{-2x}{12 - x^2}\right|$ On a $g_3'(1) = -0,181$ et $g_3'(2) = -0,5$

Donc $k_3 = \max_{x\in[1,2]} |g_3'(x)| = 0,5 < 1$ cette forme converge.

Donc on écrit : $x_{n+1} = g_3(x_n) = \ln\left(\frac{12 - x^2}{3}\right)$ $(n = 0,1,2,....)$

La valeur initiale $x_0 = 1,5$ (le milieu de l'intervalle donné)

$n = 0$ $x_1 = g_3(x_0) = \ln\left(\frac{12 - x_0^{\ 2}}{3}\right) = 1,179$

On calcule $|x_1 - x_0| = 0,321 > 0,01$

$n=1$ $$x_2 = g_3(x_1) = \ln\left(\frac{12 - x_1^{\,2}}{3}\right) = 1,263$$

On calcule $|x_2 - x_1| = 0,084 > 0,01$

$n=2$ $$x_3 = g_3(x_2) = \ln\left(\frac{12 - x_2^{\,2}}{3}\right) = 1,244$$

On calcule $|x_3 - x_2| = 0,019 > 0,01$

$n=3$ $$x_4 = g_3(x_3) = \ln\left(\frac{12 - x_3^{\,2}}{3}\right) = 1,248$$

On calcule $|x_4 - x_3| = 0,009 < 0,01$, **la solution est** $x_3 = 1,244$

3.3. Méthode de Newton-Raphson :

On s'interesse à trouver la racine α de l'équation non-linéaire $f(x)=0$ sur $[a,b]$ ou f est deux fois dérivable sur $[a,b]$.

Soit α racine exacte de l'équation $f(x)=0$. si est continue et dérivable au voisinage de α alors le développement en série de Taylor autour de x_0 s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ...$$

Donc on peut écrire $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R$$

On pose $x = \alpha$

$$f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + R = 0$$

$$\alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + R_1$$

En ignorant R_1 on obtient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$$

De la même manière on trouve une nouvelle valeur x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^{'}(x_1)}$$

Ainsi on obtient la relation suivante :

$$\begin{cases} x_0 \quad donné \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f^{'}(x_{k-1})} \end{cases}$$

- **Interprétation géométrique**

D'après l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ donnée par

$y = f^{'}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Dans la figure 1 et 2 on prend $x_0 = b$. le point x_1 constitue une première approximation de α alors

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f^{'}(x_{k-1})} \qquad k = 1, n$$

Remarque : on constate que le choix de la condition initial x_0 peut influencer sur la convergence de la méthode.

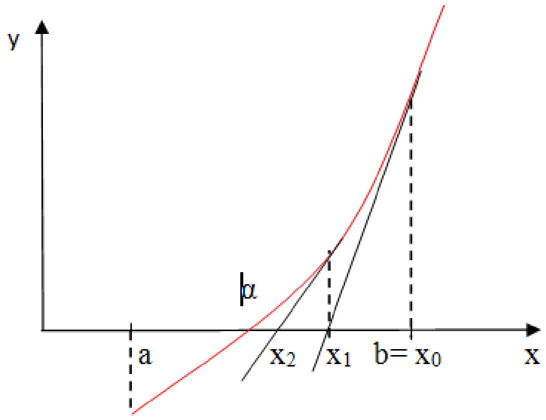


Figure 2 : Schéma convergente

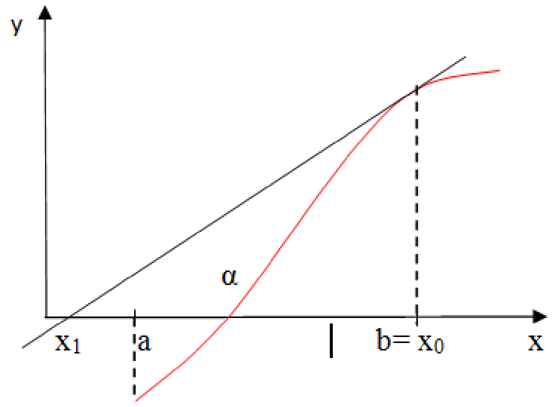


Figure 3 : Schéma divergente

➢ Les conditions convergence de la méthode de Newton :

Soit $[a,b]$ un intervalle telle que :

1) $f(a).f(b) \prec 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in]a,b[$

2) $f^{'}(x) \neq 0$

3) $f^{''}(x) \neq 0$ et gardent des signes constants

D'après 1,2 et 3 la méthode de Newton-Raphson est applicable

Le choix de x_0

Si $f(x_0).f^{''}(x_0) \prec 0$ alors $x_0 = b$ sinon $x_0 = a$

Donc la suit x_k définie par

$x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f^{'}(x_{k-1})} \quad k = 1, n$ Converge vers l'unique solution de $f(x) = 0$

➢ Evaluation de l'erreur :

Supposons que la méthode converge vers l'unique solution de $f(x) = 0$

On a l'estimation d'erreurs suivant :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \varepsilon$$

Ou $M = \sup_{[a,b]} \left| f^{''}(x) \right|$ et $m = \inf_{[a,b]} \left| f^{'}(x) \right|$

Chapitre 3

Interpolation Polynomiale

1. Introduction

A partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n+1)$ point de la forme $\left(x_i, f(x_i)\right), i = 0,....,n$, peut on construire une approximation de $f(x)$ pour tout x ?

Les point $\left(x_i, f(x_i)\right)$ sont appelés points d'interpolation et peuvent provenir des données expérimentales ou d'une table.

- **Définition :**

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,b]$ contenant $(n+1)$ points distincts $x_0, x_1, ..., x_n$.

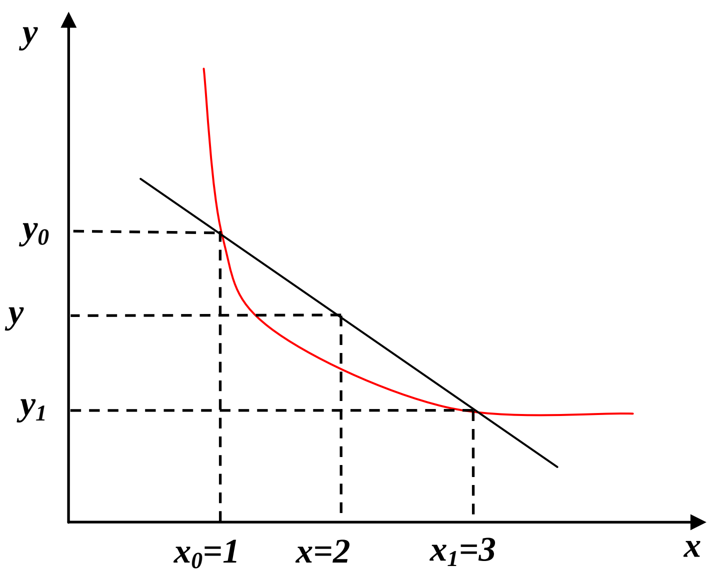
Soit P_n un polynôme de degré inferieur ou égale n .on dis que P_n est interpolant de f ou interpole f on $x_0, x_1, ..., x_n$

$$P_n(x) = f(x_i) \qquad i = 0,...,n$$

2. Les méthodes utilisées :

2.1. Polynôme de Lagrange

Soit à calculer $f(x)$ pour $x=2$, connaissant $f(1)=3,716$ et $f(3)=1,623$ (figure 1)



Les propriétés de la droite dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ nous permettent d'écrire :

$$\frac{y_0 - y}{x_0 - x} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

y étant la valeur approchée de $f(2)$

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

On peut alors calculer la valeur approchée de $f(2)$

Cette formule est appelée polynôme de Lagrange

- **Formule générale**

On appelle interpolant de Lagrange les polynômes L_i définis pour $i = 0,...,n$ par

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

si on prend $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f(x_i)$ alors $P_n(x) = f(x_i) \qquad i = 0,..,n$

Exemple :

$x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

$f(x_0) = -4$; $f(x_1) = 2$; $f(x_2) = 2$

Calculer le polynôme de Lagrange

Solution :

On a 3 points donc le degré de polynôme est ≤ 2

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = (-x^2 + 2x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}(x^2-x)$$

Donc

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-3x+2).(-4)+(-x^2+2x).(2)+\frac{1}{2}(x^2-x).(2)$$

$$P_2(x) = -2x^2+6x-4-2x^2+4x+x^2-x$$

$$P_2(x) = -3x^2+9x-4$$

- **Estimation de l'erreur :**

On démontre que l'erreur commise en interpolant $f(x)$ par le polynôme de Lagrange $P_n(x)$ en $(n+1)$ points vérifie :

$$\left|f(x)-P_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right|$$

Avec $M = \max\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \qquad \xi \in [x_0, x_n]$

2.2. Polynôme de Newton

On appelle interpolant de Newton le polynôme $P_n(x)$ donnée par

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots\dots\dots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_{n-1})$$

L'aspect intéressant de cette formule apparait lorsqu'on essaie de déterminer les $(n+1)$ coefficients C_i, de telle sorte que $P_n(x)$ passe par les $(n+1)$ points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$.

- **Calcul des coefficients C_i :**

Pour calculer les coefficients, on utilise les différences divisées. on définit les différences divisées d'ordre i de f au point x_i comme suit :

$$C_0 = \delta\left[f(x_0)\right] = f(x_0)$$

$$C_1 = \delta\left[f(x_0), f(x_1)\right] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$C_i = \delta\left[f(x_0), f(x_1), \ldots\ldots\ldots, f(x_i)\right] = \frac{\delta\left[f(x_1), \ldots\ldots, f(x_i)\right] - \delta\left[f(x_0), \ldots\ldots, f(x_{n-1})\right]}{x_i - x_0} \quad \text{Pour } i \geq 2$$

Pour calculer les différences divisées on peut construire le tableau suivant :

i	x_i	$f(x_i)$	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
0	x_0	$f(x_0)$ **C0**			
			C1 $\delta[f(x_0), f(x_1)]$		
				C2 $\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2)]$	
1	x_1	$f(x_1)$			**C3** $\delta[f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)]$
			$\delta[f(x_1), f(x_2)]$		
				$\delta[f(x_1), f(x_2), f(x_3)]$	
2	x_2	$f(x_2)$			
			$\delta[f(x_2), f(x_3)]$		
3	x_3	$f(x_3)$			
n-2	x_{n-2}	$f(x_{n-2})$			
			$\delta[f(x_{n-2}), f(x_{n-1})]$		$\delta[f(x_{n-3}), f(x_{n-2}), f(x_{n-1}), f(x_n)]$
n-1	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$\delta[f(x_{n-2}), f(x_{n-1}), f(x_n)]$	
			$\delta[f(x_{n-1}), f(x_n)]$		
n	x_n	$f(x_n)$			

Exemple :

Trouver le polynôme de Newton qui passe par les points suivants :

$x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$

$f(x_0) = 1$; $f(x_1) = 4$; $f(x_2) = 8$; $f(x_3) = 14$

Solution

On a 4 points donc le degré de polynôme est 3

$$P_3(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

On construire le tableau pour calcule les coefficients

i	x_i	$f(x_i)$	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
0	$x_0=0$	$f(x_0)=1$ C_0	C_1 $\delta[f(x_0),f(x_1)]=3$	C_2 $\delta[f(x_0),f(x_1),f(x_2)]=\frac{1}{2}$	C_3 $\delta[f(x_0),f(x_1),f(x_2),f(x_3)]=\frac{1}{6}$
1	$x_1=1$	$f(x_1)=4$	$\delta[f(x_1),f(x_2)]=4$	$\delta[f(x_1),f(x_2),f(x_3)]=1$	
2	$x_2=2$	$f(x_2)=8$	$\delta[f(x_2),f(x_3)]=6$		
3	$x_3=3$	$f(x_3)=14$			

Donc

$$P_3(x)=1+3(x-0)+\frac{1}{2}(x-0)(x-1)+\frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$P_3(x)=1+3x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$$

$$P_3(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{17}{6}x+1$$

❖ **Estimation de l'erreur :**

On démontre que l'erreur commise en interpolant $f(x)$ par le polynôme de Newton $P_n(x)$ en $(n+1)$ points vérifie :

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|\le\left|C_n\right|.\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right|$$

Chapitre 4

Résolution des systèmes d'équations linéaires

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons aborder deux principales méthodes de résolution des systèmes linéaire à savoir (méthodes directes, méthodes itératives) pour une matrice carrée. De façon générale, un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues.

En général, un système de n équation linéaires à n inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11} \quad x_1 + a_{12} \quad x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n} \quad x_n = b_1 \\ a_{21} \quad x_1 + a_{22} \quad x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n} \quad x_n = b_2 \\ \\ a_{n1} \quad x_1 + a_{n2} \quad x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{nn} \quad x_n = b_n \end{cases}$$

Ou $x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots, x_n$ sont les inconnues

Un système d'équations linéaires peut aussi s'écrire sous la forme matricielle

$Ax = b$

Ou A est une matrice de taille $n \times n$, x est un vecteur de taille n et b est un vecteur de taille n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ & & \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix} \; ; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}$$

La résolution du système précédent ($Ax = b$) peut s'effectuer par plusieurs méthodes :

- Une méthode classique (Cramer).
- Les méthodes directes.
- Les méthodes itératives.

2. Méthode de Cramer

C'est certainement la méthode la plus connue de résolution des systèmes linéaires. Cette méthode repose sur les déterminants

Si $\det A = |A| \neq 0 \Rightarrow$ le système admet une solution unique x donnée par $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$

Ou A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans A la i^{eme} colonne par b

Remarque : Cette méthode exige un grand nombre d'opérations de calcul. Par exemple pour $n = 10$, cramer nécessite 3.10^8 opérations.

Donc notre objectif, on va aborder d'autres méthodes qui nécessitent un nombre limité d'opérations de calcul.

3. Les Méthodes directes

Une méthode est dite directe, si elle donne au bout d'un nombre fini d'opérations une solution exacte du problème. Cette méthode est utilisée généralement lorsque $n \leq 100$

3.1. Méthode de Gauss ordinaire :

Cette méthode est basée sur la transformation du système linéaire $Ax = b$ en un système équivalent $A'x = b'$, A' est une matrice triangulaire supérieure.

Principe :

$[A, b] \xrightarrow{transformation} [A^{(n)}; b^{(n)}]$ $A^{(n)}$ Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots\ldots a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \ldots\ldots a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n1}^{(1)} & \ldots\ldots a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \ldots\ldots a_{1n}^{(n)} & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \ldots\ldots a_{2n}^{(n)} & b_2^{(n)} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Puis on résoudre le système $A^{(n)}x = b^{(n)}$

Dont x la solution exacte du système $Ax = b$

Les étapes :

On pose $A = A^{(1)} ; b = b^{(1)}$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on fait l'opération suivante

$$\begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\left[A^{(2)} ; b^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & ....a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ....a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & .... & & \\ 0 & a_{n1}^{(2)} & ......a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

Et ainsi de suite :

A la k$^{\text{ème}}$ étapes
$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \dfrac{a_{i1}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \end{cases} ; a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

Résolution de $A^{(n)} x = b^{(n)}$
$$\begin{cases} a_{11}^{(n)}.x_1 + a_{12}^{(n)}.x_2 + ... + a_{1n}^{(n)}.x_n = b_1^{(n)} \\ 0 + a_{22}^{(n)}.x_n + ... + a_{2n}^{(n)}.x_n = b_2^{(n)} \\ \\ 0 + 0 + ... + a_{nn}^{(n)}.x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

Exemple 1:

Soit le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x_1 + 3.x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

Résoudre le système par la méthode de Cramer et Gauss

Solution :

La solution par la méthode de Cramer et $x_1 = 3 \;\; ; x_2 = -2 \;\; ; x_3 = 1$

La méthode de Gauss :

Les étapes :

- 1ère étape On pose $A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} ; b = b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

$a_{11}^{(1)} \neq 0$ On fait l'opération suivante

$$\begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)} \end{cases}$$

On obtient alors : $\left[A^{(2)} ; b^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & ;0 \\ 0 & -3 & -6 & ;0 \\ 0 & -7 & -3 & ;11 \end{bmatrix}$

- 2ème étape :

$a_{22}^{(2)} \neq 0$ On fait l'opération suivante

$$\begin{cases} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2^{(2)} = L_3^{(2)} - \dfrac{7}{3} L_1^{(1)} \end{cases}$$

On obtient alors : $\left[A^{(3)} ; b^{(3)} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & ;0 \\ 0 & -3 & -6 & ;0 \\ 0 & 0 & 11 & ;11 \end{bmatrix}$

Résolution de $A^{(3)}x = b^{(3)}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 - 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ 0 + 0 + 11x_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Donc, la solution est $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2. Méthode de Gauss - Jordan :

Cette méthode est basée sur la transformation de la matrice A en une matrice identité

$$[A, b] \xrightarrow{transformation} [I; b']$$

D'ou $A.x = b$ $I.x = b'$ $x = b'$

Les étapes

1ère étape

On pose $A = A^{(1)}; b = b^{(1)}$

$$[A;b] = [A^{(1)}; b^{(1)}] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ....a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & ....a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & .... & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n1}^{(1)} & ......a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \\ L_n^{(1)} \end{array}$$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on fait l'opération suivante

$$\begin{cases} L_1^{(2)} = \dfrac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} L_1^{(2)} \quad ; i = 2, n \end{cases}$$

$$[A^{(2)}; b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & a_{12}^{(2)} & ....a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ....a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & .... & & \\ 0 & a_{n1}^{(2)} & ......a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \\ L_n^{(2)} \end{array}$$

Kème étape : $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} L_k^{(k+1)} \quad i \neq k \end{cases}$$

A la dernière étape on obtient

$A.x = b \quad \Leftrightarrow I.x = b^{(n+1)} \quad ; b^{(n+1)} = b_i^{(n+1)} \quad 1 \le i \le n$

Remarque :

Cette méthode est aussi conseillée pour inverser une matrice, il suffit d'effectuer les opérations précédentes sur le système $[A; I] \xrightarrow{transformation} [I; A^{-1}]$

Exemple 2:

Trouver la solution de système par la méthode de gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solution :

Les étapes

- ❖ 1ère étape

On pose $A = A^{(1)}; b = b^{(1)}$ $\qquad [A; b] = [A^{(1)}; b^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4; 0 \\ 2 & 2 & 0; 4 \\ 3 & 3 & 6; 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} \end{matrix}$

$a_{11}^{(1)} \neq 0$ On fait l'opération suivante $\begin{cases} L_1^{(2)} = \dfrac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - a_{21}^{(1)} L_1^{(2)} = L_2^{(1)} - 2L_1^{(2)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - a_{31}^{(1)} L_1^{(2)} = L_3^{(1)} - 3L_1^{(2)} \end{cases}$

On obtient alors : $[A^{(2)}; b^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & ;0 \\ 0 & -4 & -8 & ;4 \\ 0 & -6 & -6 & ;12 \end{bmatrix}$

- ❖ 2ème étape

$a_{22}^{(2)} \neq 0$ On fait l'opération suivante

$$\begin{cases} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} - a_{12}^{(2)} L_2^{(3)} = L_1^{(2)} - 3L_2^{(3)} \\ L_2^{(3)} = \dfrac{1}{a_{22}^{(2)}} L_2^{(2)} = \dfrac{1}{-4} L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - a_{32}^{(2)} L_2^{(3)} = L_3^{(2)} + 6L_2^{(3)} \end{cases}$$

On obtient alors : $\left[A^{(3)}; b^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & ;3 \\ 0 & 1 & 2 & ;-1 \\ 0 & 0 & 6 & ;6 \end{bmatrix}$

- 3ème étape

$a_{33}^{(3)} \neq 0$ On fait l'opération suivante

$$\begin{cases} L_1^{(4)} = L_1^{(3)} - a_{13}^{(3)} L_2^{(3)} = L_1^{(3)} + 2L_3^{(4)} \\ L_2^{(4)} = L_2^{(3)} - a_{23}^{(3)} L_2^{(3)} = L_2^{(3)} - 2L_3^{(4)} \\ L_3^{(4)} = \dfrac{1}{a_{33}^{(3)}} L_3^{(3)} = \dfrac{1}{6} L_3^{(3)} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\left[A^{(4)}; b^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & ;5 \\ 0 & 1 & 0 & ;-3 \\ 0 & 0 & 1 & ;1 \end{bmatrix}$$

Donc : $I.x = b^{(4)} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.3. Décomposition LU :

On suppose que le système $Ax = b$ admet une solution unique et que A soit une matrice carrée. L'idée de la décomposition L U et de décomposer $A = L.U$ avec

L matrice triangulaire inferieure

U matrice triangulaire supérieure

Pour pouvoir faciliter la résolution de $Ax = b$ en deux étapes simple

$$\begin{cases} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{cases}$$

La matrice U est obtenue par la méthode Gauss ($A^{(n)}x = b^{(n)}$) telle que on pose $U = A^{(n)}$

La matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$; telle que $\alpha_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

Remarque : la décomposition LU n'existe pas toujours sur A même si elle est inversible.

Si $\alpha_{kk}^{(k)} \neq 0$ la méthode de Gauss est applicable et donc A se factorise sous forme LU

Exemple 3 :

Résoudre le système par la décomposition LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Solution

Déterminer la matrice $U = A^{(n)}$ par la méthode de Gauss d'après exemple 1 on obtient :

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

La matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ donc $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$

la résolution de $Ax = b$ en deux étapes simple

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ 3y_1 + \frac{7}{3} y_2 + y_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 11 \end{cases}$$

$$U.x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \\ 11x_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Les Méthodes itératives :

Lorsque n est très grand (n≥100) la résolution des systèmes $Ax = b$ pour les méthodes directes deviennent toujours compliqués, on fait appel donc à des méthodes dites itératives.

D'une manière générale : on décompose A sous la forme.

$$A = L_A + U_A - D_A$$

D_A La matrice diagonale avec $(D_A)_{ii} = a_{ii}$

L_A La matrice triangulaire inferieure avec $(L_A)_{ij} = a_{ij} \quad ; i \geq j$

U_A La matrice triangulaire supérieure avec $(U_A)_{ij} = a_{ij} \quad ; i \leq j$

La différence entre la solution exacte et la solution approchée notée

$e = x - x^k$ ....(1)

On multiplie l'équation (1) par A on obtient

$A.e = A.x - A.x^k$ ....(2)

$r^{(k)} = A.x^k$.

Le nombre $r^{(k)}$ est appelé résidu

Plusieurs méthodes itératives utilisant une approximation $B \approx A$ et résolvent

$B.e = b - A.x^k$ ....(3)

Au lieu (A) la correction $e^{(k)}$ obtenue n'étant en général pas exacte, elle définit une nouvelle approximation

$x^{k+1} = x^k + e^k$ ....(4)

La résolution du système peut s'effectuer par plusieurs méthodes

4.1 Méthode de Jacobi :

On suppose que $a_{ii} \neq 0$ en utilisant $B_j = D_A$ ce qui mène à la suite des solutions approchées

$$x^{k+1} = x^k + D_A^{-1}.(b - A.x^k)$$

Ou encore (comme les éléments diagonaux de $D_A^{-1}.A$ valent 1)

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}.x_j^k\right) \quad ; i = 1,..,n$$

4.2. Méthode de Gauss Seidel :

On suppose que $a_{ii} \neq 0$ en utilisant $B_j = L_A$ ce qui mène à la suite des solutions approchées

$$x^{k+1} = x^k + L_A^{-1}.(b - A.x^k)$$

Ou encore

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \prec i}^{n} a_{ij}.x_j^{k+1} - \sum_{j \succ i}^{n} a_{ij}.x_j^k\right) \quad ; i = 1,..,n$$

Exemple 4:

Calculer les 4 premières itérations par les deux méthodes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad avec \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

- On utilise la méthode de Jacobi

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}.x_j^k\right) \quad ; i = 1,..,n$$

Le système s'écrite

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \left(a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k\right)\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \left(a_{21}x_1^k + a_{23}x_3^k\right)\right) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - \left(a_{31}x_1^k + a_{32}x_2^k\right)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x_2^k\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{4}\left(1 + x_1^k + x_3^k\right) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x_2^k\right) \end{cases}$$

A partir de $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on trouve :

k	0	1	2	3	4
x_1	0	0,5	0 ,625	0 ,75	0 ,78125
x_2	0	0,25	0, 5	0 ,5625	0,625
x_3	0	0,5	0,625	0 ,75	0,78125

❖ On utilise la méthode de Gauss Seidel

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \prec i}^{n} a_{ij}.x_j^{k+1} - \sum_{j \succ i}^{n} a_{ij}.x_j^k\right) \quad ; i = 1,..,n$$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \left(a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k\right)\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - \left(a_{21}x_1^{k+1} + a_{23}x_3^k\right)\right) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - \left(a_{31}x_1^{k+1} + a_{32}x_2^{k+1}\right)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x_2^k\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{4}\left(1 + x_1^{k+1} + x_3^k\right) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x_2^{k+1}\right) \end{cases}$$

A partir de $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on trouve :

k	0	1	2	3	4
x_1	0	0,5	0 ,6875	0,796875	0,82421875
x_2	0	0,375	0, 59375	0,6484375	0,66210938
x_3	0	0,6875	0,796875	0,82421875	0,83105469

❖ Critère d'arrêt :

Les critères largement utilisés pour les méthodes itératives sont données par les formules suivantes:

$\left|x_i^n - x_i^{n-1}\right| \le \varepsilon \qquad ; i = 1,....,n$

$\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| \le \varepsilon$ Erreur absolue

$\dfrac{\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|}{\left\|x^{(n)}\right\|} \le \varepsilon$ Erreur relative

❖ Condition de Convergence

D'après ce qui précède des conditions nécessaire et suffisante (CNS) sur L_A et D_A pour qu'elles soient inversibles.

Il y a aussi des conditions suffisantes si la matrice A est une matrice à diagonale strictement dominante, la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel est convergente quel que soit le vecteur initial $x^{(0)}$ ce qui veut dire:

$$\forall \quad i = 1,..,n \qquad \left|a_{ii}\right| \succ \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

Chapitre 5

Intégration Numérique

1. Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier quelques méthodes approximatives pour le calcul des intégrales limitées. Aussi ces méthodes permettent le calcul des intégrales qui n'ont pas de solution directe ou analytique.

On peut aussi calculer l'intégrale d'une fonction donnée sous forme tabulaire ou discrète.

1.1. Position de problème :

Il s'agit de calculer $\int_a^b f(x)\ dx$

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

On général, on ne connait pas la primitive F de f

- f est compliqué
- Si f résulte de résultats pratiques elle ne sera connue qu'aux abscisses x_i de l'intervalle$[a,b]$

Pour cela les méthodes numériques sont importantes.

2. Les méthodes utilisées :

2.1. Méthode des Trapèzes :

- **Formule simple**

Cette formule permet de remplacer la courbe de la fonction $f(x)$ par une ligne droite qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ ce qui donne un trapèze (figure 1).

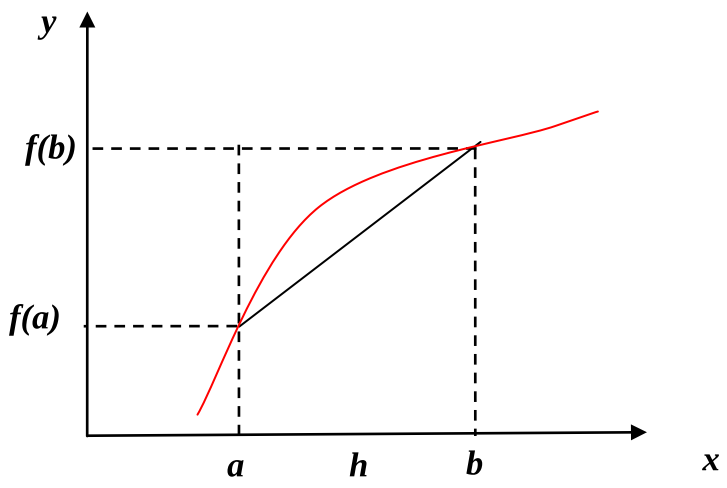


Figure 1

L'intégrale est donc remplacée par la surface du trapèze

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

On peut remarquer qu'il y'a une différance importante entre la courbe de la fonction et la ligne droite.

Cela veut dire qu'on commet une erreur de calcul. Pour minimiser cette erreur, on utilise une autre forme plus adaptée de cette formule.

- **Formule généralisée :**

On divise l'intervalle $[a,b]$ en n parties égales de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ (figure 2), on a donc les sous intervalles $[x_0, x_1]$............$[x_{n-1}, x_n]$.

La formule des trapèzes donne

$$I = \int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + ... + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

$$I = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

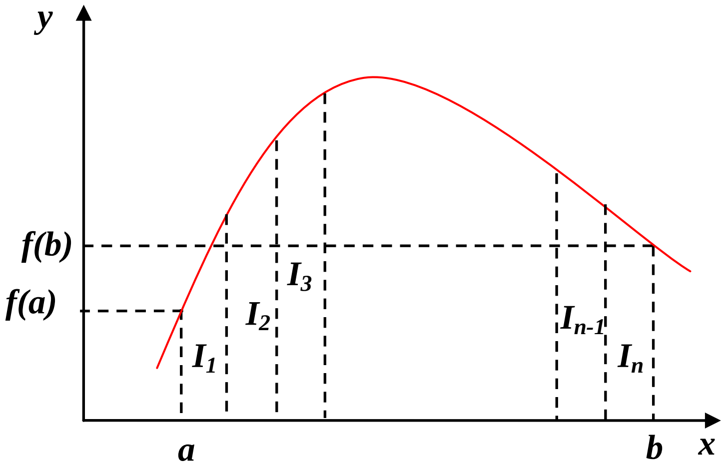


Figure 2

2.2. Méthode de Simpson :

❖ **Formule simple**

Dans cette formule on remplace la fonction $f(x)$ par une parabole de degré inferieur ou égale 2 (figure 3).

Cette méthode est applicable que pour un nombre pair de tranches. La formule s'écrite :

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

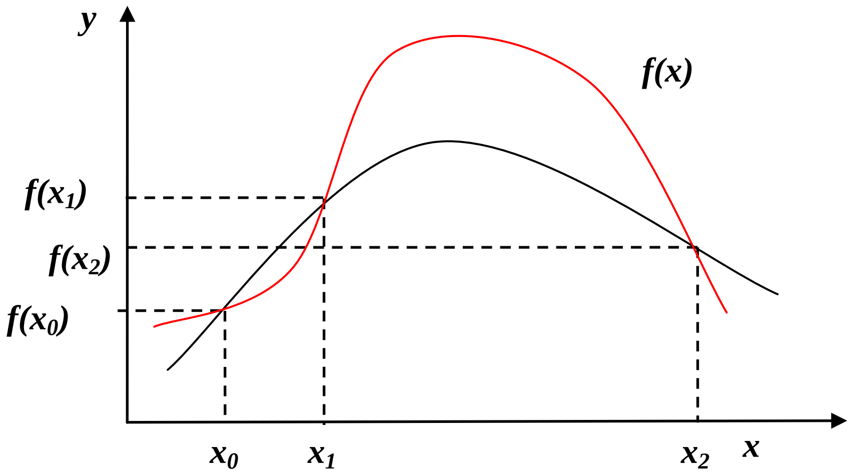


Figure 3

- **Formule généralisée :**

Si on généralise la formule de Simpson pour $2n$ sous intervalles avec un pas d'intégration $h=\dfrac{b-a}{2n}$, $x_0 = a \prec x_1 \prec .... \prec x_{2n-1} \prec x_{2n} = b$;

$x_k = a + h.k \qquad k = 0,.........., 2n$

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{i_{pair}} f(x_i) + 4\sum_{i_{impair}} f(x_i) + f(x_{2n}) \right)$$

3. Estimation d'erreur :

- ✓ **Erreur des Trapèze :**

C'est la différence entre l'intégrale exacte et celle calculée par la méthode de trapèzes

$$R_T \le E_{\max} = \frac{nh^3}{12}.M \quad \text{ou} \quad M = Max\left[\left| f''(\xi)\right|\right]_{[a,b]}$$

- ✓ **Erreur de Simpson :**

$$R_s \le E_{\max} = \frac{h^5}{90}.M \quad ;h = \frac{b-a}{2} \quad \text{ou} \quad M = Max\left[\left| f^{(4)}(\alpha)\right|\right] \quad ;\alpha \in [a,b]$$

- ✓ **Erreur de Simpson généralisée:**

$$R_s \le E_{\max} = \frac{n.h^5}{180}.M \quad ;h = \frac{b-a}{2m}, m = \frac{n}{2} \;;$$

$$M = Max\left[\left| f^{(4)}(\alpha)\right|\right] \quad ;\alpha \in [a,b]$$

Exemple :

Soit $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

- Trouver le nombre d'intervalles n nécessaire pour obtenir une erreur de $\varepsilon = 0.01$
- Calculer cette intégrale

Solution :

On a : $E_{\max} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{n.h^3}{12}.M \leq 0.01$

$n = \frac{1}{h}$ alors $\frac{h^2}{12}.M \leq 0.01$

$h^2 \leq \frac{0.01 \times 12}{M} \quad \Rightarrow h \leq \sqrt{\frac{0.01 \times 12}{M}}$

$M = Max\left[\left| f^{(2)}(x) \right|\right]$

$f^{(1)} = -2x.e^{-x^2}$

$f^{(2)} = -2.e^{-x^2} + 4x^2.e^{-x^2} \qquad f^{(2)}(0) = -2 \quad f^{(2)}(1) = 0,738$

Donc $M = 2$

$h \leq \sqrt{\frac{0.01 \times 12}{2}} \quad \Rightarrow h \leq 0,245$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq 0,245 \quad \Rightarrow n \geq \frac{1}{0,245} \quad \Rightarrow n \geq 4,08$

Alors $n = 5$

Pour calculer cette intégrale on utilise la méthode des trapèzes généralisés car $n = 5$ est impaire

$$I = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

$$I = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right) + f(x_5) \right) \quad ; \quad h = \frac{1}{5} = 0,2$$

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_i)$	1	0,6703	0,4493	0,3012	0,2019	0,1353

$$I = \frac{1}{10}\left(1 + 2\left(0,6703 +, 4493 + 0,3012 + 0,2019\right) + 0,1353\right)$$

$I = 0,4381$

Bibliographie

1. K. MEBARKI , Analyse Numérique, Cours, 2éme année licence mathématiques , Université Abderrahmane Mira de Béjaia.

2. A. Boutayeb , M. Derouich , M. Lamlili et W. Boutayeb , Analyse Numérique : SMA-SMI S4.

3. P. GOATIN , Analyse Numérique , Université du Sud Toulon-Var ISITV - 1ère année.

4. R. Herbin, Cours d'Analyse numérique, Licence de mathématiques, Université Aix Marseille ,2016.

5. M. Pierre et A. Henrot, Cours de Takéo Takahashi, Cours électif CE33, Semestre S7 : 2013-2014

6. A. MAMERI, Méthodes numériques ST L 2 S4 , Dép. GM, FSSA, ULBM , université de Larbi Ben MHIDI Oum El Bouaghi .

7. D. Pastre , Méthode Numérique , licence de mathématiques et licence MASS , Université René Descartes , 2003-2004

8. T. Cluzeau, Analyse numérique. École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges

9. M . Dalah , Partie 2 Chapitre 3: Résolution de Systèmes Linéaires ,université de Constantine 1, Algeria , 2017

10. M. GILLI , Méthode Numérique , Département d'économétrie Université de Genéve , 2006

11. S . Makdeche, Méthodes numériques. Département d'informatique – Cellule LMD, Boumerdés 2009