République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran- Mohamed BOUDIAF

Faculté de Génie Mécanique

Polycopié de

Mécanique des Fluides I

(Cours & exercices)

Préparé par :

Dr. ***SEDDAK Mohamed***

Maitre de Conférences classe B

Département de Génie mécanique

Année Universitaire 2021-2022

Table de matières

Avant-propos

Ce polycopié de cours de Mécanique des Fluides I, est un support pédagogique destiné aux étudiants de la deuxième année LMD de la licence académique en génie mécanique (3ème semestre ST) des universités algériennes, et son contenu est strictement conforme au programme officiel en vigueur.

Ce polycopié décrit systématiquement les principes fondamentaux de la mécanique des fluides, ses méthodes et ses applications physiques les plus importantes. L'ensemble des quatre chapitres couvre les principaux domaines de la mécanique des fluides élémentaire, allant de l'hydrostatique aux écoulements réels dans les conduites.

Ce manuel aborde dans le premier chapitre les propriétés des fluides de base. Ensuite les formulations et les équations de la statique des fluides sont étudiées en deuxième chapitre. La dynamique des fluides parfaits incompressibles est prise en compte et bien détaillée dans le troisième chapitre. Le quatrième chapitre expose la dynamique des fluides réels incompressibles.

En plus, l'ensemble des problèmes résolus à la fin de chaque chapitre devrait permettre aux étudiants de consolider leurs connaissances en mécanique des fluides.

Dr. SEDDAK Mohamed

Chapitre 1

Propriétés des fluides

Sommaire

Chapitre 1 : Propriétés des fluides

En général, on classifie la matière en trois états : liquide, gaz et solide. Un liquide a un volume défini et une forme indéfinie, un solide a un volume et une forme définis, et le gaz a un volume et une forme indéfinis.

1.1- Définition d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel continu, parfaitement déformable et non rigide, qui prend la forme du récipient le contenant. On peut diviser les fluides en liquide et gaz. Les gaz représentent les fluides compressibles, par contre les liquides sont pratiquement incompressibles.

1.2- Différents types de fluides

Les fluides pris en considération dans ce document sont des corps isotropes, c'est-à-dire que leurs différentes propriétés sont identiques dans l'espace. Ainsi, les fluides n'ont pas de forme propre, c'est-à-dire qu'ils sont mobiles. Mais la déformation peut être accompagnée ou non par une résistance : dans le cas où la déformation existe- le fluide est appelé fluide réel (visqueux) et dans le cas où la déformation est absente – fluide parfait (non visqueux). On peut distinguer le liquide d'un gaz par la notion de compressibilité.

1.3- Propriétés physiques des fluides

- Masse volumique :

La masse volumique d'un corps c'est la masse de l'unité de volume, symbolisée par ρ (lire rhô). L'unité est le kilogramme par mètre cube (kg/m^3).

Exemples : pour l'eau ρ=1000 kg/m^3 ; pour l'air ρ=1,293 kg/m^3.

- Densité :

La densité d'un fluide est un nombre adimensionnel exprimant le rapport de la masse volumique du corps à la masse volumique de l'eau ou de l'air. Les solides et les liquides sont comparés à l'eau prise comme référence, par contre que les gaz sont souvent comparés à l'air.

$$d = \frac{masse\ volumique\ d'un\ corps}{masse\ volumique \begin{cases} de\ l'eau (liquide\ ou\ solide) \\ de\ l'air (pour\ les\ gaz) \end{cases}}$$

- Viscosité des fluides

La viscosité du fluide est la cause d'une contrainte tangentielle relative à l'élément de surface à un instant donné et égale à :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

τ : la contrainte exercée par le fluide, $\frac{du}{dy}$: le gradient de la vitesse.

$$viscosité\ cinématique\ (\nu) = \frac{viscosité\ dynamique\ (\mu)}{masse\ volumique\ (\rho)}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ avec $\begin{cases} \mu\ en\ Pa.s\ ou\ N.s.m^{-2} \\ \nu\ en\ m^2.s^{-1} \\ \rho\ en\ kg.m^{-3} \end{cases}$

-1st=1 stoke=$10^{-4}m^2.s^{-1}$=100Cst.

- 1 poise=0,1 Pa.s

- Poids spécifique (poids volumique) :

Le poids volumique ϖ d'une substance est le poids de l'unité de volume de la substance.

$\varpi = \rho.g$

g : accélération de la pesanteur.

- Compressibilité :

On appelle module de compressibilité le rapport entre la diminution relative de volume et l'augmentation de pression :

$$\chi = -\frac{\frac{dV}{V}}{dp} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$$

χ en $\frac{m^2}{N}$

1.4-Problèmes résolus

<u>Problème n°1</u>

Si $6m^3$ de pétrole pèsent $5080kg$, calculer son poids spécifique $\overline{\omega}$, sa masse volumique ρ et sa densité.

<u>Solution :</u>

- masse volumique $\rho = \frac{masse}{volume} = \frac{5080}{6} = 848\ kg/m^3$

- poids spécifique $\overline{\omega} = \rho.g = 848.9{,}81 = 8319\ N/m^3$

- densité $d = \frac{\rho}{1000} = 0.848$

<u>Problème n°2</u>

Déterminer le poids volumique (spécifique) de kérosène sachant que sa densité d=0,823. On prend g=9,81 m/s^2.

<u>Solution :</u>

- poids spécifique $\overline{\omega} = \rho.g$ avec $\rho = d.1000$

$\overline{\omega} = \rho.g = 0{,}823.1000.9{,}81 = 8073{,}6\ \ N/m^3$

<u>Problème n°3</u>

Déterminer la viscosité dynamique de l'essence de densité *d*= 0,68 et de viscosité cinématique $\nu = 422.10^{-2}St$.

Solution :

- la viscosité dynamique $\mu = \rho.\nu$

$\rho = d.1000 = 0{,}68.1000 = 680\ kg/m^3$

$$\nu = \frac{0{,}422.10^{-2}.10^{-4}}{1} = 0{,}422.10^{-6}\ m^2/s$$

$\mu = \rho.\nu = 680.0{,}422.10^{-6} = 287.10^{-6}Pa.s = 287.10^{-5}poise$

Problème n°4

À 20°*C*, l'eau a une viscosité de 1 milli-poise, l'air, de 0,0183 milli-poise. Calculer la viscosité cinématique de l'air et celle de l'eau en m^2/s et en Stokes.

Solution :

$\mu_{eau} = 1.10^{-3}poise = 10^{-3}poise = 10^{-3}.0{,}1 = 10^{-4}Pa.s$

$\mu_{air} = 0{,}0183.10^{-3}poise = 183.10^{-7}poise = 183.10^{-7}.0{,}1 = 183.10^{-8}Pa.s$

- viscosité cinématique de l'eau :

$$\nu_{eau} = \frac{\mu_{eau}}{\rho_{eau}} = \frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-7}m^2/s$$

$$\nu_{eau} = \frac{10^{-7}}{10^{-4}} = 10^{-3}stoke$$

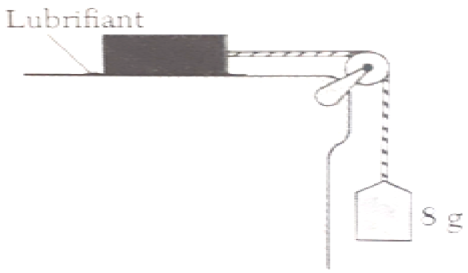
- viscosité cinématique de l'air :

$$\nu_{air} = \frac{\mu_{air}}{\rho_{air}} = \frac{183.10^{-8}}{1{,}20} = 152{,}5.10^{-8}m^2/s$$

$$\nu_{air} = \frac{152{,}5.10^{-8}}{10^{-4}} = 152{,}5.10^{-4}stoke$$

Problème n°5

Une plaque de métal de 0,15 m^2 de surface est reliée à une masse de 8 *gr* par une corde passant sur une poulie idéale (sans masse et sans frottement), comme le montre la figure.



On met une mince couche de lubrifiant de 0,3 *mm* d'épaisseur entre la plaque et la surface. On libère la masse, le gradient de la vitesse de la plaque est égal à $15 \ 1/s$. Calculer le coefficient de viscosité du lubrifiant μ.

Solution :

La plaque se déplace vers la droite sous l'action des forces de tension, *T*, et de frottement, *f*, associées à la viscosité du fluide. L'accélération de la plaque est nulle puisqu'elle glisse à vitesse constante. La tension et le poids suspendu sont donc d'égale grandeur, soit,

$$f = T = mg = 8.10^{-3}.9{,}81 = 78{,}48.10^{-3}N$$

Le lubrifiant en contact avec la surface horizontale est immobile et celui qui est en contact avec la plaque a la même vitesse que celle-ci. Si le gradient de vitesse est uniforme, on trouve :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$\frac{du}{dy} = 15 \ 1/s$

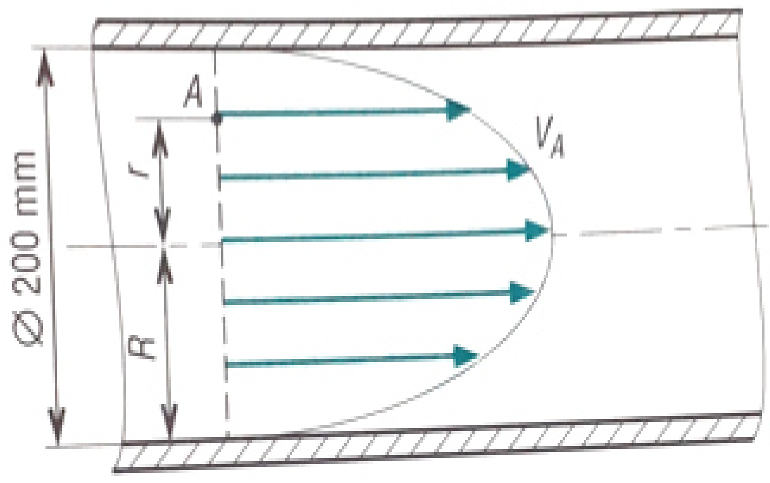
$$\tau = \frac{f}{S} = \frac{78{,}48.10^{-3}}{0{,}15} = 523{,}2.10^{-3} \ N/m^2$$

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{523{,}2.10^{-3}}{15} = 348{,}8.10^{-4} Pa.s$$

Problème n°6

La vitesse en un point A d'un écoulement laminaire est donnée par la relation :

$$V_A = 5\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) m.s^{-1}$$



- Déterminer la vitesse maximale et la vitesse moyenne de l'écoulement.

Solution :

$V_A = 5\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) m.s^{-1}$

- la vitesse est maximale est pour $r = 0 \Rightarrow V_{max} = 5\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 5\left(1 - \frac{0}{R^2}\right) = 5\ m/s$

- la vitesse moyenne $V_{moy} = \frac{V_{max}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 m/s$

Chapitre 2

Statique des fluides

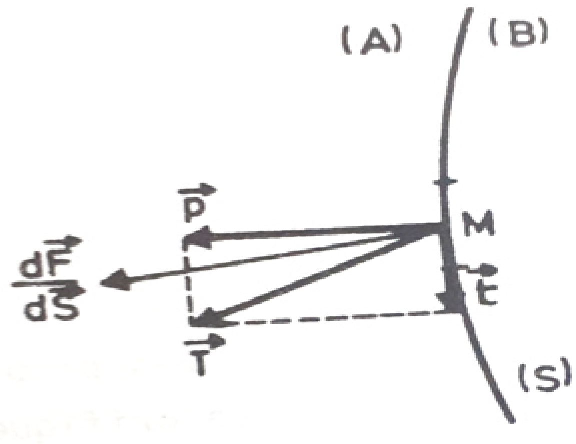
Sommaire

Chapitre 2 : Statique des fluides

2.1-Notion de pression

Soit une surface (S) séparant la masse fluide en deux régions (A) et (B). On peut, sans modifier l'équilibre de la zone (A), supprimer la partie (B) du fluide à condition de faire agir en tous les points de (S) un système de forces continues. .

Sur chaque élément *dS* de la surface entourant un point *M*, il exerce une force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ du même ordre de grandeur que *dS* et qui représente l'action du milieu *B* sur le milieu *A* à travers *dS*.



Le vecteur $\frac{\overrightarrow{dF}}{dS}$ a une grandeur finie puisqu'il est le quotient de deux infiniment petits du même ordre. Quand *dS* tend vers zéro autour de *M*, ce vecteur tend vers une position limite $\vec{T}$ qui représente la *tension* exercée en *M* par *B* sur *A*. Cette tension peut se décomposer en une composante tangentielle à la surface (S) en *M*, soit $\vec{t}$, et une composante normale le $\vec{p}$. Cette deuxième composante est appelée *pression*.

2.2- Loi fondamentale de statique des fluides

Lorsque les fluides sont au repos, on peut admettre que la viscosité est nulle et considérer le fluide comme parfait.

2.2.1- Equations générales de la statique des fluides

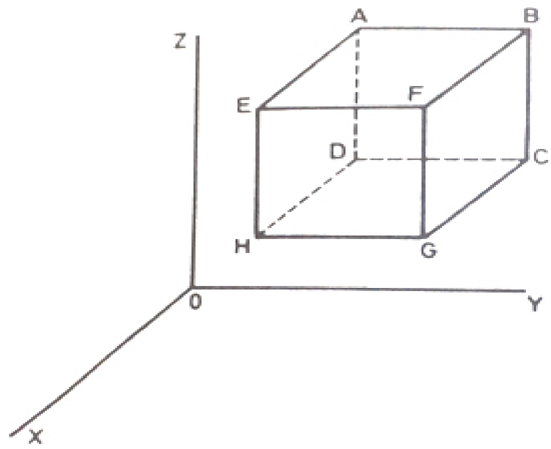
Soient trois axes de coordonnées rectangulaires *Oxyz*.

Considérons dans une masse fluide, rapportée à ces trois axes, un parallélépipède rectangle infiniment petit d'arêtes *dx,dy,dz.*

Si ρ est la masse volumique du fluide :

$$dm = \rho\, dx.dy.dz$$

Considérons les conditions d'équilibre de ce parallélépipède :



- ***Forces à distances*** :

Soient F_x, F_y, F_z les composantes suivant *Ox, Oy* et *Oz* de la résultante $\vec{F}$ des forces extérieures agissant sur la masse fluide, rapportée à l'unité de masse. Pour le parallélépipède considéré, on a donc :

$$\rho\vec{F}dV \begin{cases} \rho F_x dx\ dy\ dz \\ \rho F_y dx\ dy\ dz \\ \rho F_z dx\ dy\ dz \end{cases}$$

- ***Forces de pression*** :

Suivant *Ox* :

$$\left.\begin{aligned} face\ ABCD &: pdydz \\ face\ EFGH &: \left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz \end{aligned}\right\} résultante: -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

Autres faces : résultantes nulle puisque *Ox* n'est pas leur normal.

Suivant *Oy*: de même ⇒ $-\frac{\partial p}{\partial y}\ dxdydz$

Suivant *Oz*: $-\frac{\partial p}{\partial z}\ dxdydz$

La condition d'équilibre, suivant *Ox,* s'écrit donc :

$$\rho F_x dx\ dy\ dz - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz = 0 \Rightarrow \rho F_x = \frac{\partial p}{\partial x}$$

En projetant suivant les autres axes, on obtient 2 relations analogues, d'où les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \rho F_x = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho F_y = \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho F_z = \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad \text{soit } \vec{F} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}p$$

Cette expression montre que, dans un fluide en équilibre, la pression croît dans le sens du champ de force.

En multipliant ces équations respectivement par *dx, dy, dz*, et divisant par ρ, on obtient :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \frac{dp}{\rho} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

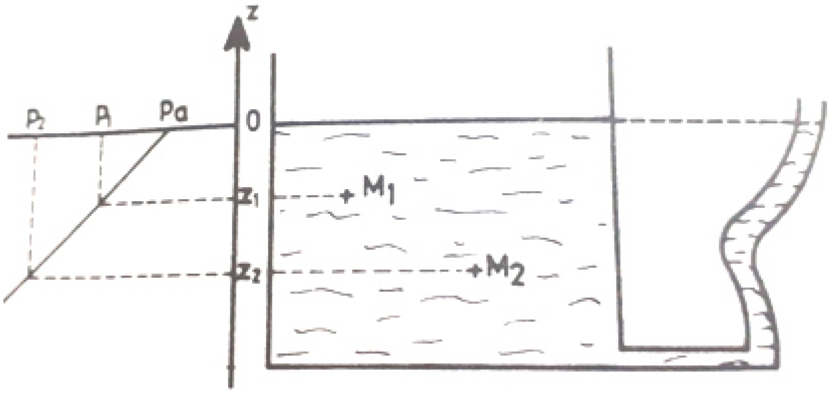
$$\boxed{\frac{dp}{\rho} = F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

C'est l'équation fondamentale de la statique des fluides.

2.2.2- Statique des fluides à masse volumique constante : Hydrostatique

a)Relation fondamentale de l'hydrostatique

Choisissons l'axe des *Z* vertical et positif vers le haut.



z est alors l'altitude par rapport à l'origine de l'axe. Les relations générales s'écrivent :

$$\begin{cases} F_y = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = -g \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ soit $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\overline{\omega}$

donc $$\boxed{p + \rho g z = c^{te}} \qquad (2.1)$$

Les surfaces d'égale pression d'un fluide homogène en équilibre sont des plans horizontaux. En particulier, la surface libre, qui est une surface de niveau particulier ($\rho = \rho_a = c^{te}$ est donc horizontale. Ce résultat est encore valable si le vase est formé de plusieurs parties réunies par des canalisations (vase communiquant).

b) Différence de pression entre deux points d'un fluide en équilibre

Soient z_1 et z_2 les cotes des points M_1 et M_2 dans une masse fluide en équilibre. L'équation fondamentale (2.1) permet d'écrire :

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

Où : $p_1$et p_2 étant les pressions en M_1 et M_2

Ainsi

$p_2 - p_1 = \rho g(z_1 - z_2) = \rho g h$ si h est la différence de côte entre M_1 et M_2.

La différence de pression entre deux points d'une même masse liquide au repos est égale au poids d'une colonne verticale de liquide ayant pour base l'unité de section et pour hauteur la différence de niveau entre les deux points considérés.

Nous poserons

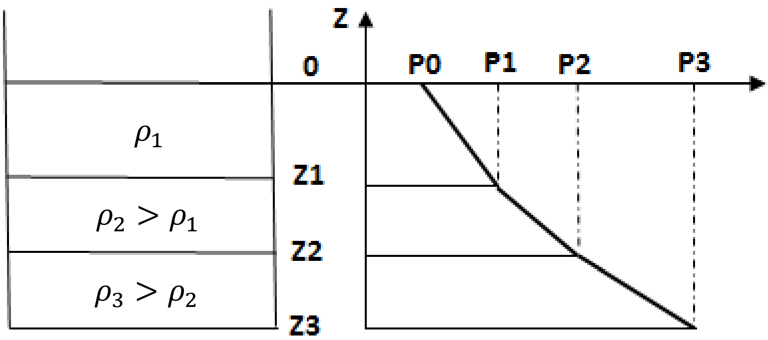
$$z + \frac{p}{\rho g} = H$$

H : dite hauteur piézométrique (on exprime souvent les pressions en hauteur d'eau équivalente).

**** Pression pour des fluides non miscibles (non homogènes) superposés***

Pour $\rho = \rho(z)$, l'équation $dp = \rho(z)gdz$ reste intégrable.

Si l'on considère plusieurs liquides non miscibles de densités différentes, ceux-ci se superposent par ordre de densité croissante, et les lignes de niveau, toujours perpendiculaires à la pesanteur, seront horizontales ; il en est de même pour les surfaces de séparation de ces différents liquides.



c) Transmission des pressions- Principe de Pascal.

Considérons une masse liquide au repos dans une enceinte ; nous pouvons écrire :

$$\frac{p}{\rho g} + z = cte$$

Si on augmente par un moyen quelconque la pression en un point M_1 du liquide, nous augmentons de la même quantité les pressions qui règnent en tous les points. En effet, supposons que :

En M_1, la pression devient $p_1' = p_1 + \Delta p_1$

En M_2, $p_2' = p_2 + \Delta p_2$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$p_1 + \Delta p_1 - (p_2 + \Delta p_2) = \rho g(z_1 - z_2)$$

Comme auparavant, nous avions

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_1 - z_2)$$

Il en résulte que $\Delta p_1 = \Delta p_2$

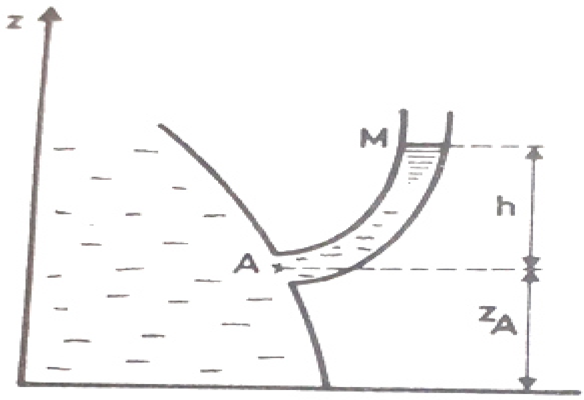
D'où le principe de Pascal :

Dans un liquide en équilibre, les variations de pressions se transmettent intégralement en tous les points de la masse fluide.

2.2.3 Mesure de la pression

a) Le tube piézométrique

Le dispositif le plus simple et le plus pratique pour la mesure de la pression d'un liquide est le tube piézométrique, constitué par un tube ouvert au sommet et dont l'extrémité inférieure est placée au point *A* où l'on veut mesurer la pression : le niveau du liquide s'établit dans le tube en *M*.



Appliquons l'équation fondamentale de l'hydrostatique en *A* et *M* :

$$p_A + \rho g z_A = p_M + \rho g z_M$$

soit

$$\boxed{p_A = p_{atm} + \rho g h}$$

b) Le manomètre différentiel

Pour mesurer la différence de pression entre 2 points *A* et *B* d'un fluide de masse spécifiqueρ, on met en communication le fluide en ces deux points avec les deux branches d'un tube en *U* contenant un liquide de masse spécifiqueρ'.

On a alors les relations :

Dans la branche AA' : $p_A + \rho g z_A = p_{A'} + \rho g z_{A'}$

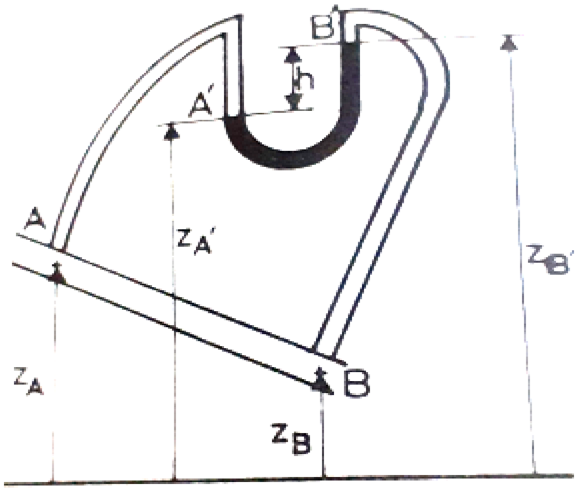
Dans la branche $A'B'$: $p_{A'} + \rho' g z_{A'} = p_{B'} + \rho' g z_{B'}$

Dans la branche $B'B$: $p_{B'} + \rho g z_{B'} = p_B + \rho g z_B$

En additionnant les trois équations,

$$p_A + \rho g z_A + g(\rho - \rho')(z_{B'} - z_{A'}) = p_B + \rho g z_B$$

Posons $h = z_{B'} - z_{A'} \Rightarrow \left(z_A + \frac{p_A}{\rho g}\right) - \left(z_B + \frac{p_B}{\rho g}\right) = \frac{\rho' - \rho}{\rho} h$



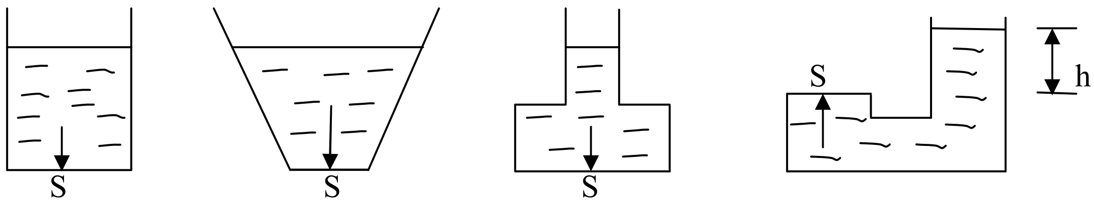
Soit

$$\boxed{H_A - H_B = \frac{\rho' - \rho}{\rho} h}$$

H : hauteur piézométrique.

2.2.4- Force de pression exercée par un liquide au repos sur de parois solides

a) Surfaces planes horizontales



Les forces qui s'exercent sur les surfaces d'aire S sont dans tous les cas égales à:

$$\vec{F} = \rho \vec{g} h S$$

Elles sont verticales et dirigées du liquide vers la paroi.

Elles sont indépendantes de la forme du vase.

La poussée est indépendante du poids du liquide contenu dans les vases.

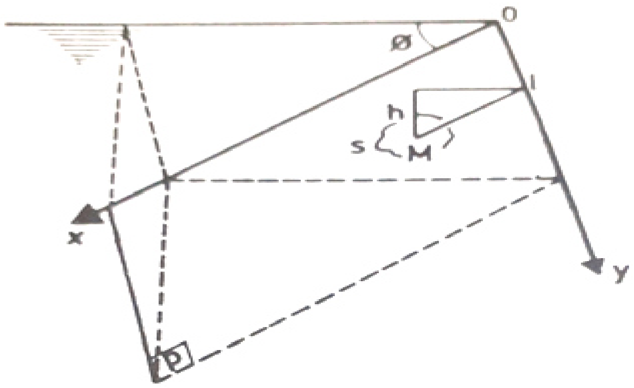
b) parois planes non horizontales

Soit une surface plane d'aire *S* située dans le plan *P* incliné d'un angle φ sur l'horizontale et baignée d'un côté par un liquide pesant, l'autre face étant à la pression atmosphérique, que l'on prend comme zéro des pressions.

Cherchons la poussée *F* (la résultante des forces exercées par un liquide sur une paroi plane) et son point d'application.

$$p_M = \rho g h = \rho g x sin\varphi$$

$$F = \int_S \rho g x sin\varphi \, ds = \rho g sin\varphi \int_S x ds$$



En désignant par ξ l'abscisse du centre de gravité géométrique G de la surface S, on a par définition :

$$S\xi = \int xdS$$

donc $F = \rho g S \xi sin\varphi$

et comme $\xi sin\varphi = h_G$, on a

$$\boxed{F = \rho g S h_g}$$

centre de poussée

On appelle ainsi le point d'application de la résultante des forces de pression sur la paroi. En général, il n'est pas confondu avec le centre de gravité. On obtient sa position par une équation de moments.

$$\boxed{d = \frac{I_y sin\varphi}{Sh}}$$

d : la distance du centre de poussée C à l'horizontale passant par le centre de gravité. I_y : moment d'inertie de la surface S.

c) parois courbe cylindrique

Le principe : sur chaque élément de surface s'exerce une force $dF = pdS$, normale à cet élément. dF est décomposée en deux composantes, parallèles à un système d'axes. La sommation des composantes élémentaires nous donne les composantes de la résultante.

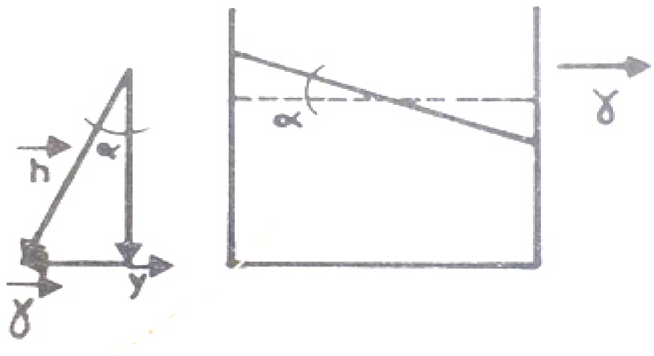
2.2.5- équilibre d'un liquide par rapport à son récipient mobile

La superposition entre le champ de pesanteur et champ d'inertie, va montrer que le liquide dans un vase en mouvement peut parfois être considéré en équilibre hydrostatique qui n'est autre que l'équilibre relatif du liquide par rapport au vase.

a) équilibre d'un liquide soumis à une accélération constante

Soit $\vec{\gamma}$ l'accélération constante horizontale du vase. Il se superpose donc au champ de gravité, le champ d'accélération $-\vec{\gamma}$, la résultante étant donc $\vec{R} = \vec{g} - \vec{\gamma}$ dont la direction fait un angle $\alpha = Arctg\left(\frac{\gamma}{g}\right)$ avec la verticale.

La surface libre est inclinée de cet angle (α) sur l'horizntale.



b) équilibre d'un liquide dans un vase en rotation uniforme

Considérons un réservoir vertical de rayon *R*, contenant un liquide pesant homogène sa surface libre est à la hauteur *h*, tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire (ω).

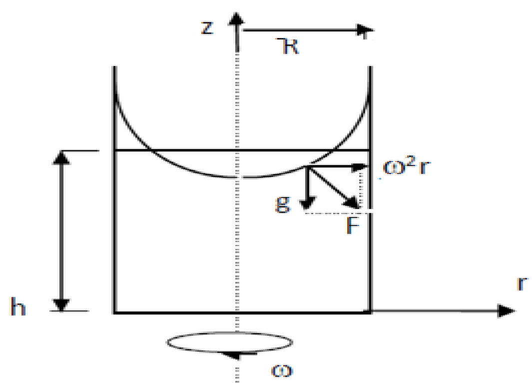
Soit une particule fluide à la distance *r* de l'axe Z. Les composantes de la force active par unité de masse sont :

$$F_x = \omega^2 r, F_y = 0, F_z = -g$$

d'où :

$$dp = \rho(F_x dr + F_y dy + F_z dz$$

$$dp = \rho(\omega^2 r dr - g dz)$$



en intégrant :

$$\boxed{\frac{\omega^2}{2} r^2 - gz = Cte}$$

Les surfaces d'égale pression sont donc les paraboloïdes de révolution

$$\boxed{p = \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 - \rho g z + Cte}$$

La surface libre a donc la forme d'un paraboloïde de révolution dont l'axe est l'axe de rotation et dont l'excentration ne dépend que de la quantité $\frac{\omega^2}{2}$.

2.3-Problèmes résolus

Problème n°1

Un lit d'eau mesure 2*m* de côté et 30*cm* d'épaisseur. (a) Déterminer le poids.

Pour une telle charge, on recommande de placer un lit d'eau au sous-sol ou sur un plancher bien soutenu. (b) Déterminer la pression qu'exerce le lit sur le plancher. Supposez que toute la surface inférieure du lit touche la plancher.

Quelle serait la pression exercée sur le plancher si le lit reposait sur le côté ?

Solution :

La masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1000\ kg/m^3$, la masse du lit est de

$M_{eau} = \rho_{eau}.Vol = 1000.(2.2.0,3) = 1200\ kg$

et son poids,

$$G_{eau} = M_{eau}.g = 1200.9,81 = 11772N$$

Le lit d'eau pèse 11772*N* et la surface de contact en position normale mesure $4m^2$. La pression résultante est,

$$p = \frac{G_{eau}}{Surface} = \frac{11772}{4} = 2943\ Pa$$

La surface du côté = 2.0,3 $= 0,6m^2$,

$$p = \frac{G_{eau}}{Surface\text{ du côté}} = \frac{11772}{0,6} = 19620\ Pa$$

Problème n°2

L'air comprimé de l'élévateur hydraulique d'une station-service exerce une force sur un petit piston de 5*cm* de rayon. La pression est transmise à un second piston ayant un rayon de 15*cm*. Quelle force doit exercer l'air comprimé pour soulever une automobile pesant 13300*N* ? Quelle pression d'air produira cette force ?

Solution :

La pression de l'air comprimé étant transmise sans perte par intermédiaire du fluide,

La pression exercée sur le petit piston (p_1)= la pression exercée sur le petit piston (p_2)

$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \quad F_1 = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)F_2$

avec F_2 = le poids de l'automobile

$F_1 = \left(\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}\right) F_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 F_2 = \left(\frac{0{,}05}{0{,}15}\right)^2 13300 = 1477{,}7N$

La pression d'air qui produit cette force :

$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{1477{,}7}{\pi(0{,}05^2)} = 188156{,}5\ Pa$

Le travail fourni (travail fait par F_1) étant égal au travail exécuté (travail fait par F_2), l' énergie est conservée.

Problème n°3

Calculer la pression absolue qui s'exerce à 1000m de profondeur sous la mer, en supposant que la masse volumique de l'eau soit de $1000\ kg/m^3$ et que la pression atmosphérique $p_{atm} = 1{,}01.10^5\ N/m^2$.

Calculer la force totale exercée à cette profondeur sur l'extérieur d'un hublot sous-marin circulaire de 30cm de diamètre.

Solution :

Pression absolue = Pression relative + pression atmosphérique

$p_{abs} = p_{rela} + p_{atm}$

$p_{abs} = \rho g h + p_{atm}$

$p_{abs} = 1000.9{,}81.1000 + 1{,}01.10^5 = 9911000\ N/m^2$

La force totale exercée à cette profondeur :

$$p_{abs} = \frac{Force}{surface} \Rightarrow Force = p_{abs}.surface$$

$Force = p_{abs}.\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = 9911000.\frac{\pi 0{,}3^2}{4} = 700567{,}3N.$

Problème n°4

Combien faut-il de mètres d'essence pour avoir une différence de pression de 0,5bar?

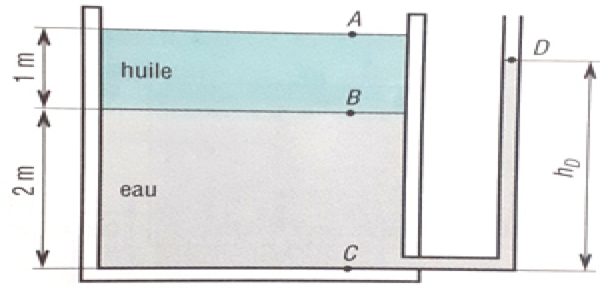
Solution :

$$\Delta p = \rho g h \Rightarrow h = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

$h = \frac{0{,}5.10^5}{680.9{,}81} = 7{,}5m$

Problème n°5

Un réservoir est rempli avec l'eau ($\rho_{eau} = 1000kg.m^{-3}$) sur une hauteur $h_{BC} = 2m$ et avec de l'huile ($\rho_{huile} = 870kg.m^{-3}$) sur une hauteur $h_{BA} = 1m$.



Déterminer la hauteur d'eau $h_D$dans le tube piézométrique relié à la masse d'eau si : $p_A = p_D = p_{atm}$.

Solution :

La pression en *C* est p_c

$$\begin{cases} p_c = p_D + \rho_{eau} g h_D \\ p_c = p_A + \rho_{huile} g h_1 + \rho_{eau} g h_2 \end{cases} \Rightarrow p_D + \rho_{eau} g h_D = p_A + \rho_{huile} g h_1 + \rho_{eau} g h_2$$

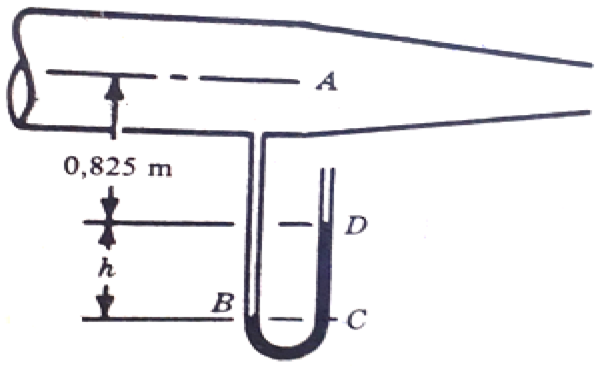
d'où

$h_D = \frac{\rho_{huile}}{\rho_{eau}} . h_1 + h_2$ avec $h_1 = 1m$ et $h_2 = 2m$.

$h_D = \frac{870}{1000} . 1 + 2 = 2{,}87m.$

Problème n°6

De l'huile de densité 0,75 coule à travers la buse représentée dans la figure ci-dessous et fait monter le mercure dans le manomètre en ***U***. Calculer la valeur de *h* si la pression en *A* est de 1,40 kg/cm^2.



Solution :

Pression en *B* = pression en *C*

$$p_A + \rho_{huile} g (h_1 + h) = p_D + \rho_{mercure} g h$$

$$h = \frac{(p_A - p_D)}{(\rho_{mercure} - \rho_{huile}) g} + \frac{\rho_{huile} h_1}{(\rho_{mercure} - \rho_{huile})}$$

$p_D = p_{atm} = 1{,}01 . 10^5 Pa$, $h_1 = 0{,}825m$

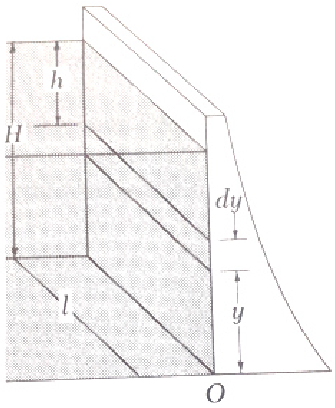
$p_A = 1{,}4 \ kg/cm^2 = 1{,}4 . 9{,}81 . 10^4 = 13{,}734 . 10^4 Pa$

$$h = \frac{(13{,}734.10^4 - 1{,}01.10^5)}{(13{,}57.1000 - 0{,}750.1000).9{,}81} + \frac{0{,}750.1000}{(13{,}57.1000 - 0{,}750.1000)} 0{,}825$$

$h = 0{,}336m.$

Problème n°7

Le niveau de l'eau s'élève à une hauteur H derrière un barrage de largeur l. Déterminer la force résultante s'exerçant sur le barrage.



Solution :

À la profondeur h sous la surface, la pression qui s'exerce sur une section du barrage est $p = \rho g h = \rho g(H - y)$

La force qui s'exerce sur la section du barrage est donnée par

$dF = pdA = \rho g(H - y)ldy$

Par conséquent, la force résultante s'exerçant sur le barrage est

$$F = \int pdA = \int_0^H \rho g(H - y)ldy = \frac{1}{2}\rho g l H^2$$

Si H=30m et l=100m, on trouve $F = \frac{1}{2}.1000.9{,}81.100.30^2 = 441450\ kN.$

Problème n°8

Un réservoir rectangulaire de 8m de long, 3m de profondeur et 2m de large contient 1,5m d'eau. S'il est soumis à une accélération linéaire de 2,45 m/s^2dans le sens de la longueur. Calculer la force totale provoquée par l'action de l'eau sur chaque extrémité du réservoir.

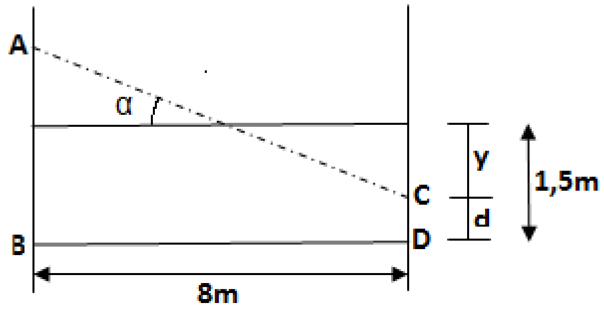
Solution :

$tg\alpha = \frac{accélération\ linéaire}{accélération\ de\ la\ pesanteur} = \frac{2{,}45}{9{,}81} = 0{,}249 \Rightarrow \alpha = 14°{,}02$

La profondeur d à l'extrémité la moins profonde est

$d = 1{,}5 - y = 1{,}5 - 4tg(14°{,}02) = 0{,}5m$

$d' = 1{,}5 + y' = 1{,}5 + 4tg(14°{,}02) = 2{,}5m$



Alors

$F_{AB} = \rho g h_{cg} S$

h_{cg} : hauteur du centre de gravité de la surface latérale mouillée,

S : la surface latérale mouillée.

$F_{AB} = 1000.9{,}81.\left(\frac{2{,}5}{2}\right)(2{,}5.2) = 61312{,}5N$

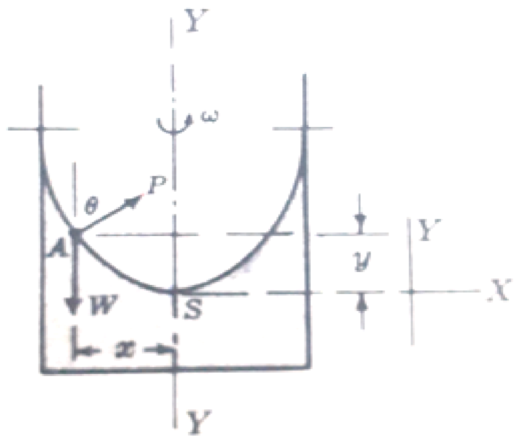
$F_{CD} = \rho g h_{cg} S' = 1000.9{,}81.\left(\frac{0{,}5}{2}\right)(0{,}5.2) = 2452{,}5N$

Problème n°9

Un récipient ouvert, partiellement rempli de liquide tourne autour d'un axe vertical à une vitesse angulaire constante. Déterminer l'équation de la surface libre du liquide une fois qu'il a acquit la même vitesse angulaire que le récipient.

Solution :

Les coordonnées de la particule A (x,y), les forces agissant sur le point matériel A sont le poids $w = \rho g$ dirigé verticalement vers le bas et P qui est normale à la surface puisqu'aucun frottement n'a lieu. L'accélération du point matériel A est dirigé vers l'axe de rotation, comme le montre la figure.



D'après la 2ème loi de Newton,

$F_x = M\gamma_x$

$psin\theta = M.x.\omega^2$ (1)

De $F_y = 0$

$pcos\theta = M.g$ (2)

Divisant (1) par (2), $tg\theta = \frac{x\omega^2}{g}$ (3)

avec $tg\theta = \frac{dy}{dx}$, substituant dans (3),

$\frac{dy}{dx} = \frac{x\omega^2}{g}$ d'où, par intégration, $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$

Pour la constante c : pour $x = 0\ , y = 0$ et $c = 0$

L'équation finale : $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$

Chapitre 3

Dynamique des fluides parfaits incompressibles

Sommaire

Chapitre 3 : Dynamique des fluides incompressibles parfaits

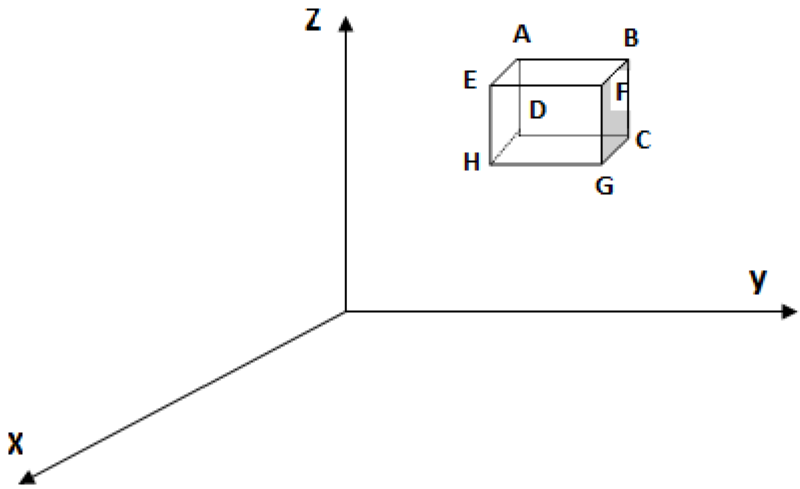
3.1-Écoulement permanent

Un écoulement est permanent est un mouvement fluide où les grandeurs physiques en un point donné ne dépendent pas du temps.

Exemple : le champ de vitesse ne dépend pas du temps$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0\right)$, ainsi que la pression et la masse volumique ne dépendent pas du temps.

3.2-Équation de continuité

C'est l'expression que l'écoulement est conservatif.



Considérons un parallélépipède élémentaire de fluide, ayant un volume $dx.dy.dz$. Au cours le temps *dt*, par la face *ABCD*, une masse fluide entre qui est égale à :

$$dydz\ u\ \rho dt = \rho u\ dydz\ dt$$

Pendant ce même temps, par *EFGH* sort :

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz\ dt$$

La différence entre ces deux expressions représente l'accroissement de masse correspondant à la composante du mouvement suivant la direction *Ox*. De même, en considérant les composantes suivant les deux autres directions, on établit que l'accroissement total de masse est :

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dxdydz\ dt$$

Entre *t* et *t+dt*, masse du petit élément pris en considération passe de $\rho dxdydz$ à $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dxdydz$, donc s'accroit de :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz\, dt$$

par variation de sa masse spécifique en fonction du temps.

On exprime la conservation de la masse en écrivant que l'accroissement de la masse correspond à celle qui rentre dans l'élément :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz\, dt = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dxdydz\, dt$$

Soit

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ou

$$\boxed{div\rho\vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$ - équation de continuité.

Remarque :

Quand le fluide est incompressible et homogène, cette équation se réduit à :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad \text{soit} \quad \boxed{div\,\vec{V} = 0}$$

3.3-Débit masse et débit volume

Le débit en masse à travers une surface *S* est donné par l'intégrale :

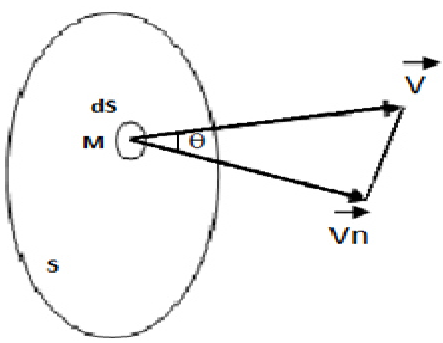
$$q_m = \int_s \rho V_n\, dS = \int_s \rho V cos\theta\, dS$$

ρ : la masse volumique.

V_n est la projection sur la normale à *dS* de la vitesse $\vec{V}$ au centre de l'élément.

Le débit en volume est :

$$q_v = \int_s V_n\, dS$$



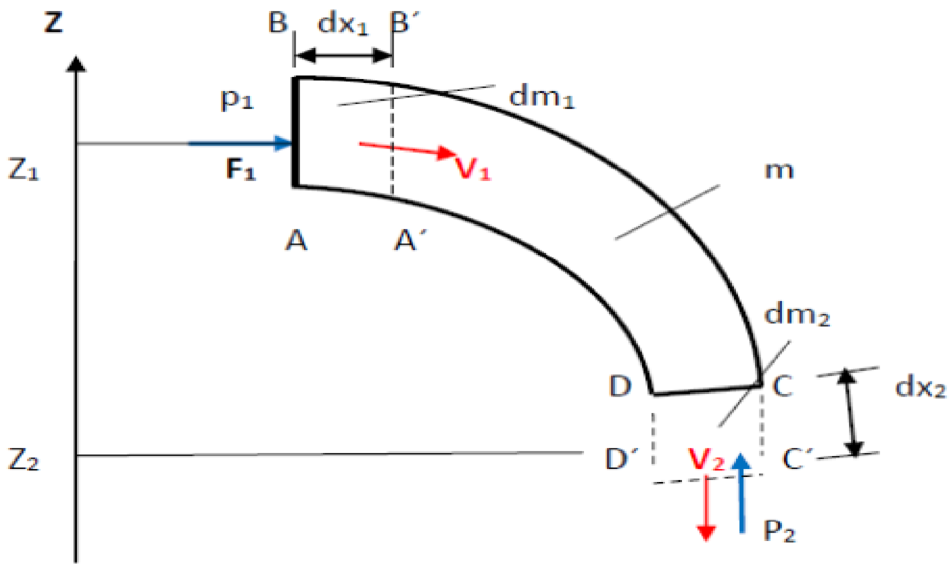
3.4-Théorème de Bernoulli

a) sans échange de travail

- Étude d'un tube de courant

Considérons, en régime permanent, toutes les trajectoires passant par une surface S_1, et elles seules passant toutes par S_2 : elles constituent donc un filet ou *tube de courant*.

Soient V_1, V_2, p_1, p_2, z_1 et z_2, les vitesses, pressions et côtes moyennes dans les sections S_1et S_2.



Entre les temps *t* et *t+dt*, on a le déplacement du tube considéré ; ses faces S_1et S_2 se déplacent de dx_1 et dx_2.

Par raison de continuité :

$$\rho S_1 V_1 dt = \rho S_2 V_2 dt = dm \Rightarrow \; S_1 V_1 = S_2 V_2$$

Exprimons la conservation de l'énergie :

l'augmentation d'énergie cinétique de la masse *dm* : $\frac{1}{2}dm(V_2^2 - V_1^2)$ est égale :

- au travail des forces extérieures, à savoir le travail des pressions s'exerçant sur les faces S_1et S_2(le travail de la force de pression contre les parois latérales du tube de courant est nul) :

$$p_1 S_1 V_1 dt - p_2 S_2 V_2 dt$$

- plus le travail des forces de pesanteur (qui correspondent au passage de la masse *dm* de la côte z_1 à côte z_2) :

$$(z_1 - z_2)dm$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}dm(V_2^2 - V_1^2) = (p_1 S_1 V_1 - p_2 S_2 V_2)dt + (z_1 - z_2)gdm$$

Compte-tenu de la relation de continuité, on a donc :

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = (p_1 - p_2) + \rho g(z_1 - z_2)$$

Soit :

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2}$$ Théorème de *Bernoulli.*

L'équation de Bernoulli peut aussi s'écrire :

$$\boxed{p_1+\rho\frac{V_1^2}{2}+\rho g z_1=p_2+\rho\frac{V_2^2}{2}+\rho g z_2}$$

Elle est relative à l'unité de volume du fluide ou, en introduisant le poids volumique $\varpi=\rho g$

$$\boxed{\frac{p_1}{\varpi}+\frac{V_1^2}{2}+z_1=\frac{p_2}{\varpi}+\frac{V_2^2}{2}+z_2}$$

Elle est alors relative à l'unité de poids.

- Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli exprime la conservation de l'énergie le long de la trajectoire de la particule :

* $\frac{V^2}{2}$ est l'énergie cinétique de l'unité de volume du fluide,
* $\rho g h$ représente l'énergie potentielle de cette unité de volume fluide sous la pression *p.*

b) avec échange de travail

Une machine placée dans le tube de courant et échangeant de l'énergie avec le fluide modifie les caractéristiques de l'écoulement.

Si $W_{1/2}$ est l'énergie échangée entre la machine et le fluide, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1+W_{1/2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2}\quad (\text{en } J.kg^{-1})$$

Lorsque la machine est motrice (pompe, etc.), elle fournit de l'énergie au fluide ($W_{1/2}>0$) qui s'ajoute à celle de la section d'entrée.

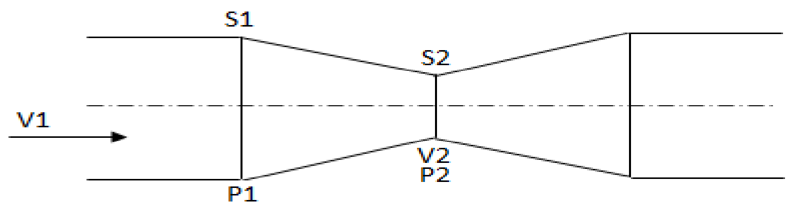
Si la machine est réceptrice (turbine, moteur hydraulique, etc.), elle prend l'énergie au fluide $(W_{1/2}<0)$ qui se retranche à celle de la section d'entrée.

3.5-Applications du théorème de Bernoulli

a) Venturi

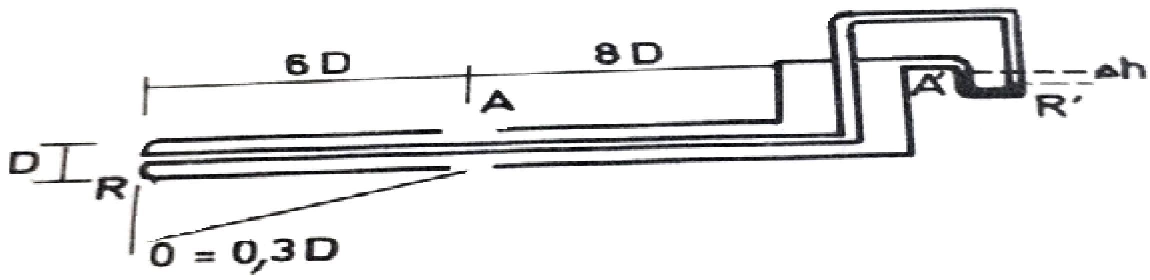
Il est utilisé pour la mesure du débit circulant dans une conduite. Il est constitué d'un ajutage convergent suivi d'un divergent. La perte de charge entre les sections S_1et S_2 est négligeable, et par l'application du théorème de Bernoulli, on peut donc écrire :

$$V_2 = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \times \sqrt{\frac{p_1^* - p_2^*}{\rho g}}$$



b)Tube de Pitot

Il permet de mesurer la vitesse en un point de l'écoulement. Il comporte une prise de pression totale *R* et une prise de pression statique *A*.



Ses caractéristiques dimensionnelles doivent respecter les rapports indiqués sur la figure précédente, afin de garantir une mesure correcte ; lors des mesures, il faut orienter l'appareil dans l'écoulement de façon à ne pas y produire de perturbations.

Soit ρ la masse volumique du fluide où l'on fait la mesure, ρ' celle du liquide contenu dans le manomètre. On a :

$$V = \sqrt{2.\left(\frac{\rho' - \rho}{\rho}\right).g.\Delta h}$$

c)Tube piézométrique

La vitesse reste parallèle aux génératrices, et les lignes de courant sont des droites parallèles à ces génératrices, pour une conduite cylindrique ou prismatique.

La répartition des pressions est donc hydrostatique dans une section normale aux lignes de courant :

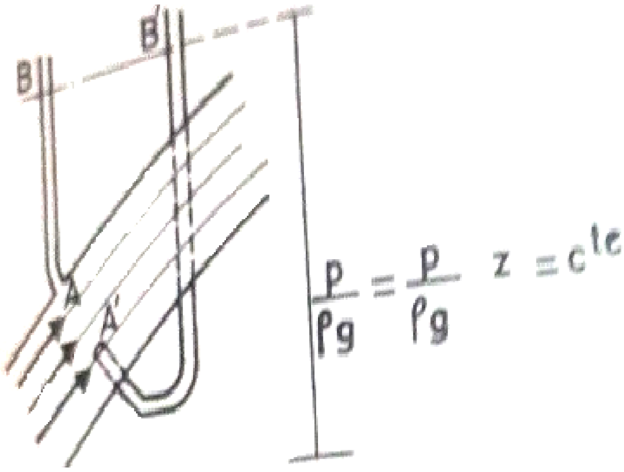
$$p^* = p + \rho g z = cte$$

On peut mesurer cette quantité à l'aide d'un tube piézométrique, débouchant dans la conduite en un point *A* appelé *prise de pression statique*. Ainsi, une partie du fluide monte dans le tube piézométrique jusqu'au point *B*. Par application du théorème de Bernoulli, on sait que dans le tube *AB* :

$$\frac{p_A^*}{\rho g} = \frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + z_B$$

p_B − pression atmosphérique.

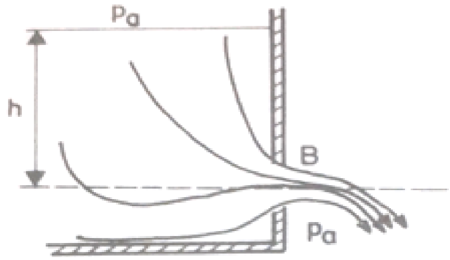
La mesure de la côte du point *B* permet donc de mesurer la quantité $\frac{p_A^*}{\rho g}$. Par ailleurs, comme la pression étoilée p_A^* reste constante dans la section *AA'* qui est normale aux lignes de courant, la côte du point *B* reste constante avec le déplacement de la prise de pression statique dans cette section normale.

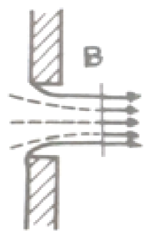


d) Formule de Torricelli

Un réservoir contient un fluide qu'il laisse échapper par un orifice étroit de section *S*.

$\boxed{V_B = \sqrt{2gh}}$ c'est la formule de Torricelli.





e) Débit d'un orifice

Le débit à travers une section contractée est égal à :

$$q_v = \sigma V$$

σ : l'aire de cette section contractée.

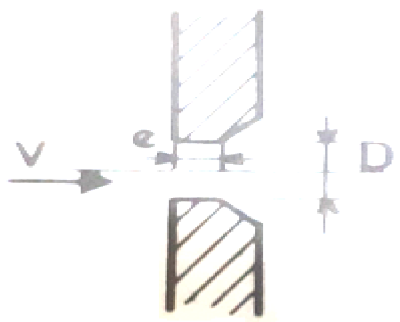
En général σ est inconnu car elle dépend de divers facteurs. On introduit pour la caractériser le rapport :

$$C_c = \frac{section\ contact\acute{e}e}{section\ de\ l'orifice} = \frac{\sigma}{S} = coefficient\ de\ contraction$$

**** Orifice à mince paroi***

Un orifice est dit en mince paroi si la veine fluide qui le traverse ne le touche que suivant une arête : cela se produit quand l'épaisseur *e* de la paroi est petite devant les dimensions transversales de l'orifice.

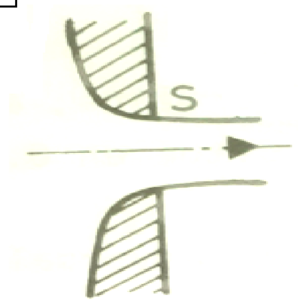
C_c est de l'ordre de 0,6. $\boxed{C_c = 0{,}6}$



**** Orifice à veine moulée***

Si les parois inférieures de l'orifice épousent la forme de la veine jusqu'à contenir la section contractée, il n'y a plus de contraction à l'aval, et ainsi :

$\boxed{q_v = S\sqrt{2gH}}$ H : charge au droit de l'orifice.



En pratique, il subsiste toujours une légère perte de charge par suite des frottements du liquide contre les parois intérieures de l'orifice, de sorte que l'on a pratiquement :

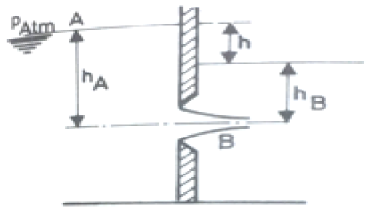
$$\boxed{q_v = 0{,}98.S.\sqrt{2gH}}$$

**** Orifice noyé***

Soit un orifice noyé de section S :

$$\boxed{q_v = C_c.S.\sqrt{2gH}}$$

C_c coefficient de contraction de la veine noyée.



3.6- Théorème d'Euler

Les forces qui agissent sur un élément de volume fluide sont :

- Les forces de volume, qui sont proportionnelles à l'élément de volume,
- Les forces de pression, qui sont proportionnelles aux éléments de surfaces frontières et normales à ces éléments,
- Les forces d'inertie, qui sont proportionnelles à l'accélération$\vec{\gamma}$.

Et toutes ces forces satisfont à l'équation :

$$\sum \vec{f} = m\vec{\gamma}$$

En statique$\vec{\gamma} = 0$, donc $\sum \vec{f} = 0$

$$\begin{cases} \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \text{soit } \vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}p = \sum \vec{f}/unité\, de\, masse = 0$$

En dynamique $\vec{\gamma} \neq 0$; partant des équations précédentes, on en déduit donc :

$$\sum \vec{f} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}p = \vec{\gamma}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}p}$$

Ou

$$\boxed{\begin{cases} \gamma_x = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \gamma_y = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \gamma_z = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}}$$ ce sont les équations d'***Euler***

Il existe une autre forme des équations d'*Euler* :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\overrightarrow{grad}V^2+\overrightarrow{rot}(\vec{V}\wedge\vec{V})=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}p}$$

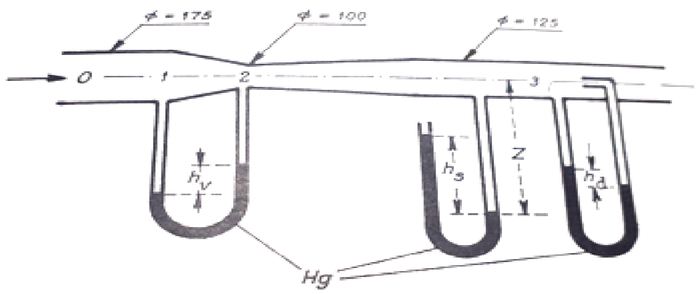
Ou

$$\boxed{\begin{cases}\gamma_x=\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=F_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\ \gamma_y=\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=F_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}\\ \gamma_z=\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=F_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}\end{cases}}$$

3.7-Problèmes résolus

<u>Problème n°1</u>

Un circuit hydraulique horizontal a les dimensions indiquées sur la figure.



Il comporte un venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double.

Ces divers appareils sont reliés à des manomètres à mercure. Les tubes de liaison aux manomètres sont remplis d'eau. Masse volumique du mercure $\rho_m = 13600\ kg/m^3$. On donne pression absolue en O : $p_0 = 1{,}5\ bar$, pression atmosphérique $p_a = 1\ bar$, $z = 1m$.

- Sachant que la dénivellation $h_v = 40mm$, calculer le débit volumétrique dans la conduite ;
- Calculer h_s et h_d.

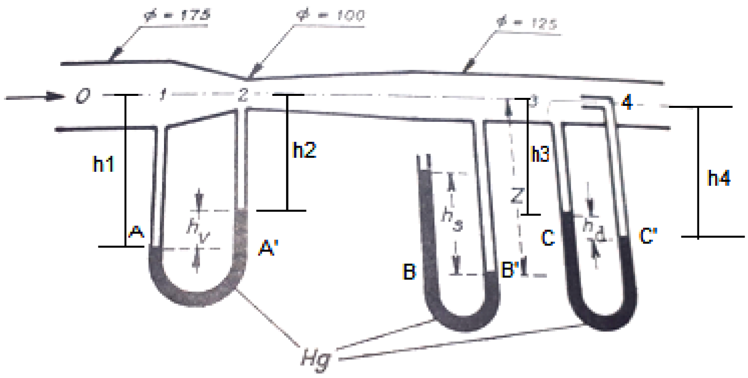
<u>Solution :</u>

1- Si on admet que l'écoulement s'effectue sans perte d'énergie, appliqué l'équation de Bernoulli de 1à 2, avec pour référence l'axe de la conduite :

$p_1+\frac{\rho_e}{2}V_1^2+\rho_e g z_1=p_2+\frac{\rho_e}{2}V_2^2+\rho_e g z_2$ avec $z_1=z_2$

$$p_1+\frac{\rho_e}{2}V_1^2=p_2+\frac{\rho_e}{2}V_2^2$$

$$p_1-p_2=\frac{\rho_e}{2}V_2^2-\frac{\rho_e}{2}V_1^2=\frac{\rho_e}{2}(V_2^2-V_1^2)$$



L'équation de continuité donne : $V_1S_1 = V_2S_2 \Rightarrow V_2 = V_1\frac{S_1}{S_2} = V_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho_e}{2}\left(V_1^2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - V_1^2\right) = V_1^2\frac{\rho_e}{2}\left(\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right) \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho_e}(p_1 - p_2)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}$$

Pour trouver$(p_1 - p_2)$,

Le niveau isobare AA': $p_1 + \rho_e g h_1 = p_2 + \rho_e g h_2 + \rho_m g h_v$

$p_1 - p_2 = \rho_e g(h_2 - h_1) + \rho_m g h_v$

$h_1 = h_2 + h_v \Rightarrow h_2 - h_1 = -h_v$

$p_1 - p_2 = \rho_e g(-h_v) + \rho_m g h_v = g h_v(\rho_m - \rho_e)$

$$V_1 = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho_e}(p_1 - p_2)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho_e}g h_v(\rho_m - \rho_e)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} = \sqrt{\frac{2 g h_v\left(\frac{\rho_m}{\rho_e} - 1\right)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} = V_1$$

Le débit volumétrique q_v

$$q_v = V_1S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2 g h_v\left(\frac{\rho_m}{\rho_e} - 1\right)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} = \frac{\pi.(0{,}175)^2}{4}\sqrt{\frac{2.9{,}81.0{,}04\left(\frac{13600}{1000} - 1\right)}{\left(\frac{175}{100}\right)^4 - 1}} = 0{,}0261\, m^3/s$$

$$\boxed{q_v = 0{,}0261\, m^3/s}$$

2-h_s ?

Appliquant l'équation de Bernoulli entre *O* et 3, avec pour référence l'axe de la conduite :

$p_0 + \frac{\rho_e}{2}V_0^2 + \rho_e g z_0 = p_3 + \frac{\rho_e}{2}V_3^2 + \rho_e g z_3$ avec $z_0 = z_3$

$$p_0 + \frac{\rho_e}{2}V_0^2 = p_3 + \frac{\rho_e}{2}V_3^2$$

$$p_3 = p_0 - \frac{\rho_e}{2}(V_3^2 - V_0^2)$$

Le niveau isobare BB': $p_3 + \rho_e g Z = p_{atm} + \rho_m g h_s$

$$h_s = \frac{p_3 - p_{atm} + \rho_e g Z}{\rho_m g}$$

Appliquant l'équation de continuité: $V_0 S_0 = V_3 S_3 \Rightarrow V_3 = V_0 \frac{S_0}{S_3} = V_0 \left(\frac{d_0}{d_3}\right)^2$

avec $V_0 = V_1$ et $d_0 = d_1$ donc $V_3 = V_1 \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^2$

$$p_3 = p_0 - \frac{\rho_e}{2} V_1^2 \left(\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 - 1\right)$$

$$h_s = \frac{p_0 - \frac{\rho_e}{2} V_1^2 \left(\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 - 1\right) - p_{atm} + \rho_e g Z}{\rho_m g}$$

$$h_s = \frac{1{,}5.\,10^5 - \frac{1000}{2}.\,1{,}086^2.\left(\left(\frac{175}{125}\right)^4 - 1\right) - 10^5 + 1000.9{,}81.1}{13600.9{,}81} = 0{,}436m$$

$$\boxed{h_s = 0{,}436m}$$

- h_d ?

Appliquant l'équation de Bernoulli entre 3 et 4, avec pour référence l'axe de la conduite :

Point 4 c'est un point d'arrêt donc V_4=0,

$p_3 + \frac{\rho_e}{2} V_3^2 + \rho_e g z_3 = p_4 + \frac{\rho_e}{2} V_4^2 + \rho_e g z_4$

avec $z_3 = z_4$ et V_4=0,

On trouve

$$p_3 + \frac{\rho_e}{2} V_3^2 = p_4 \Rightarrow p_4 - p_3 = \frac{\rho_e}{2} V_3^2$$

Pour le niveau isobare CC': $p_4 + \rho_e g h_4 = p_3 + \rho_e g h_3 + \rho_m g h_d$

$$h_d = \frac{p_4 - p_3 + \rho_e g (h_4 - h_3)}{\rho_m g}$$

$$h_d = \frac{\frac{\rho_e}{2} V_3^2 + \rho_e g (h_4 - h_3)}{\rho_m g}$$

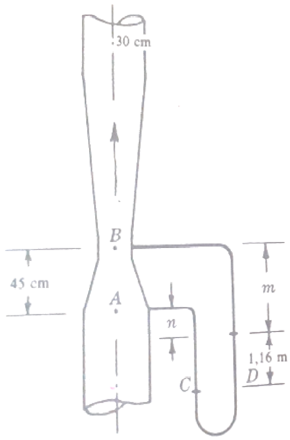
$$h_4 = h_3 + h_d \Rightarrow h_d = h_4 - h_3$$

$$h_d = \frac{\rho_e V_3^2}{2g(\rho_m - \rho_e)} = \frac{1000 \left(\frac{175}{125}\right)^4 1{,}086^2}{2.9{,}81.\,(13600 - 1000)} = 0{,}183m$$

$$\boxed{h_d = 0{,}183m}$$

Problème n°2

De l'eau circule vers le haut dans un tube de Venturi de $30cm\times 15cm$ dont le coefficient est de 0,98. La dénivellation du liquide de densité 1,25 du manomètre différentiel est de $1,16m$ comme le montre la figure. Calculer le débit volumétrique.



Solution :

On applique l'équation de Bernoulli de A à B :

$$p_A + \frac{\rho_e}{2}V_A^2 + \rho_e g z_A = p_B + \frac{\rho_e}{2}V_B^2 + \rho_e g z_B$$

$$p_A - p_B = \frac{\rho_e}{2}(V_B^2 - V_A^2) + \rho_e g(z_B - z_A)$$

avec $z_B - z_A = 0,45m$; $m = n + 0,45$

L'équation de la continuité : $V_A.S_A = V_B.S_B \Rightarrow V_B = V_A\frac{S_A}{S_B} = V_A\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2$

$$p_A - p_B = \frac{\rho_e}{2}\left(\left(V_A\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2\right)^2 - V_A^2\right) + \rho_e g(z_B - z_A)$$

$$p_A - p_B = \frac{\rho_e}{2}V_A^2\left(\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^4 - 1\right) + \rho_e g(z_B - z_A)$$

On a $p_C = p_D$

$$p_A + \rho_e g(n + 1,16) = p_B + \rho_e g m + \rho g 1,16$$

$$p_A - p_B = \rho_e g(m - n - 1,16) + \rho g 1,16 = 7259,4\ Pa$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2[(p_A - p_B) - \rho_e g(z_B - z_A)]}{\rho_e\left[\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^4 - 1\right]}} = \sqrt{\frac{2[7259,4 - 1000.9,81.0,45]}{1000.\left[\left(\frac{0,3}{0,15}\right)^4 - 1\right]}} = 0,615 m/s$$

$$q_v = c_c\frac{\pi D_A^2}{4}V_A = 0,98.\frac{3,14.(0,3)^2}{4}.0,615 = 0,0426\ m^3/s$$

$$\boxed{q_v = 0,0426\ m^3/s}$$

Problème n°3

Un réservoir parallélépipédique de 10m de longueur, 5m de largeur et 2m de profondeur se vide par un orifice percé dans un fond horizontal débouchant à l'air libre, et dont la section contractée vaut $s = 0{,}5dm^2$.

- Quel est le temps nécessaire à sa vidange totale ?

On prendra $g = 10m/s^2$.

Solution :

Appliquant le théorème de Bernoulli entre la surface totale et la section contractée de cet orifice. La pression atmosphérique est la même en ces deux points :

$$\rho g z = \frac{1}{2}\rho V^2$$

d'où

$$V = \sqrt{2gz}$$

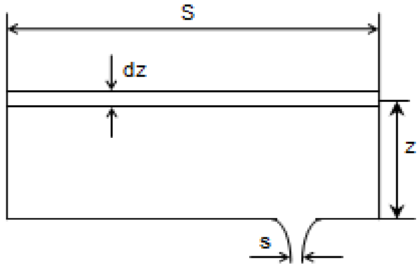
Le débit de vidange égal : $s\sqrt{2gz}$.

L'équation de continuité nous donne $-S.\frac{dz}{dt} = s\sqrt{2gz}$

S :la section horizontale constante du réservoir.

D'où

$$-S.\frac{dz}{dt} = s\sqrt{2gz}$$



Le temps de vidange T est donné par l'intégration de la dernière équation :

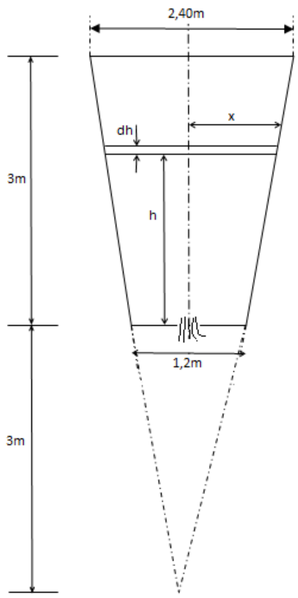
$$T = \frac{S}{s}\int_{Z_m}^{0}\frac{-dz}{\sqrt{2gz}} = \frac{2S}{s}\sqrt{\frac{Z_m}{2g}}$$

$$T = \frac{2(5.10)}{0{,}5.10^{-2}}\sqrt{\frac{2}{2.10}} = 6324s = 1h45mn24s$$

$$\boxed{T = 1h45mn24s}$$

Problème n°4

Un réservoir a la forme d'un tronc de cône, de 2,4m de diamètre supérieur et de 1,2m de diamètre inférieur. Au fond est ménagé un orifice à bord mince dont le coefficient de contraction peut être pris pour valoir 0,6.



Quelle est la taille d'un orifice permettant de vider le réservoir en 6 minutes si la profondeur quand il est plein est de 3,0m ?

Solution :

L'équation de continuité nous donne :

$q_v . dt = -A(x). dh$

$c_c . S_0 . \sqrt{2.g.h} . dt = -\pi . x^2 . dh$

et, par les triangles semblables, $\frac{x}{1,2} = \frac{(3+h)}{6}$, alors

$$\left(0,6.\frac{\pi d_0^2}{4}\sqrt{2.g}\right)dt = -\pi.\frac{(3+h)^2}{25}h^{-1/2}dh$$

$$d_0^2\int dt = \frac{-4.\pi}{25.\pi.0,6\sqrt{2.g}}\int_3^0 (3+h)^2\,h^{-1/2}dh$$

Puisque $\int dt = 360\ secondes$

$$d_0^2 = \frac{4}{360.25.0,6\sqrt{2.g}}\int_0^3 \left(9h^{-1/2} + 6h^{1/2} + h^{3/2}\right).dh$$

Intégrant et résolvant, nous obtenons $d^2 = 0,00975$ et $d = 0,0987m$.

On utilisera un orifice de $d = 10cm$.

Problème n°5

Un siphon permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir de grandes dimensions, il est constitué par un tuyau de 0,1m de diamètre dont la ligne centrale s'élève à 4m au-dessus du niveau de la surface libre.

Calculer :

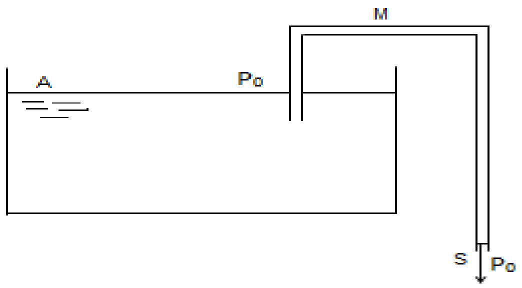
- le débit maximal peut-on espérer obtenir avec ce dispositif sans qu'il se produise de cavitation.

- la cote de la sortie *S*.

Solution :

Nous avons :

$$p_A + \frac{\rho_e}{2}V_A^2 + \rho_e g z_A = p_M + \frac{\rho_e}{2}V_M^2 + \rho_e g z_M$$



Nous prenons le plan de surface libre comme plan de référence,

$$p_0 + 0 + 0 = p_M + \frac{\rho_e}{2}V_M^2 + \rho_e g z_M$$

Pour $p_M = 0$ on obtient :

$$\frac{\rho_e}{2}V_M^2 = p_0 - \rho_e g z_M \Rightarrow V_M = \sqrt{\frac{2(p_0 - \rho_e g z_M)}{\rho_e}}$$

$$V_M = \sqrt{\frac{2(10^5 - 1000.9{,}81.4)}{1000}} = 11{,}02\ m/s$$

Le débit maximal :

$$q_v = V_M.S = V_M.\frac{\pi D^2}{4} = 11{,}02.\frac{3{,}14.\,0{,}1^2}{4} = 0{,}0865m^3 = 86{,}5\ l/s$$

$$\boxed{q_v = 86{,}5\ l/s}$$

- Nous avons dans ces conditions :

$$p_A + 0 + 0 = p_S + \frac{\rho_e}{2}V_S^2 + \rho_e g z_S$$

avec $p_A = p_S$ et $V_S = V_M$.

D'où

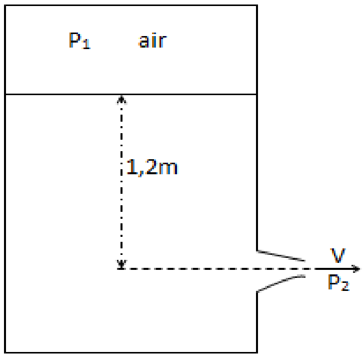
$z_S = -\frac{V_M^2}{2g} = -\frac{(11{,}02)^2}{2.9{,}81} = -6\ m$

$$\boxed{z_S = -6\ m}$$

L'extrémité inférieure *S* est alors située à 6*m* au-dessous du niveau de la surface libre.

Problème n°6

Un réservoir clos de grande dimension contient un liquide surmonté d'ai à la pression de 70*mbars* au-dessus de la atmosphère. A 1,20*m* au-dessous de la surface libre se trouve un orifice de petite dimension par où s'échappe le fluide.



-Calculer la vitesse *V* d'écoulement dans la section contractée dans les trois cas suivants :

* le liquide est de l'eau ;
* le liquide est de l'huile de masse volumique $700 kg/m^3$;
* le liquide est formé d'une couche de 30cm d'eau surmontée d'une couche de 90cm d'huile de masse volumique $700kg/m^3$.

Solution :

Application de l'équation de Bernoulli entre la surface libre et la section contractée :

$p_1 + \frac{\rho}{2}V_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}V_2^2 + \rho g z_2$

Donc :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) + 2g(z_1 - z_2)}$$

1-Cas de l'eau : $\rho = \rho_e = 1000\ kg/m^3$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{1000}(0{,}07.10^5) + 2.10.(1{,}2)} = 6{,}16 m/s$$

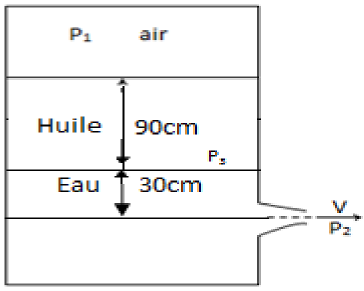
2-Cas de l'huile : $\rho = \rho_h = 700\ kg/m^3$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{700}(0{,}07.10^5) + 2.10.(1{,}2)} = 6{,}63m/s$$

3-Cas de l'eau surmontée d'huile :

Formule de Bernoulli entre les points 3 et 2

$$p_3 + \frac{\rho_e}{2}V_3^2 + \rho_e g z_3 = p_2 + \frac{\rho_e}{2}V_2^2 + \rho_e g z_2 \qquad V_3 \approx 0$$



$$\frac{2}{\rho_e}(p_3 - p_2) + 2g(z_3 - z_2) = V_2^2$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho_e}(p_3 - p_2) + 2g(z_3 - z_2)}$$

avec $p_3 = \rho_h g h + p_1$ $\qquad h = 0{,}9m$,$p_1 = 7.10^3 Pa$, $z_3 - z_2 = 0{,}3m$

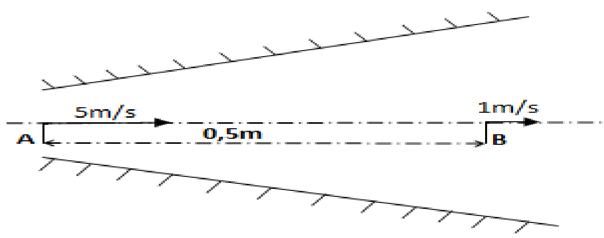
$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho_e}(p_3 - p_2) + 2g(z_3 - z_2)} = \sqrt{\frac{2}{1000}(700.10.0{,}9 + 7.10^3) + 2.10.0{,}3}$$

$$V_2 = 5{,}7m/s$$

Problème n°7

Une conduite divergente est dessinée de telle sorte que le long de l'axe, supposé horizontal, la vitesse varie linéairement de 5*m/s* à 1*m/s* sur distance *AB* de 0,5*m*.

Le fluide de masse volumique $\rho = 800\ kg/m^3$.



-Déterminer la variation de pression correspondant à cette diminution de vitesse de 4*m/s*.

- Calculer la valeur du gradient de pression aux points *A* et *B*.

Solution :

- appliquée en *A* et *B* l'équation de Bernoulli donne :

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2}(V_A^2 - V_B^2) = \frac{800}{2}(25 - 1) = 9600\ Pa$$

$$\boxed{p_B - p_A = 0{,}096 bar}$$

- La vitesse étant une fonction linéaire de la distance, on a :

$$V = 5 - \frac{4}{0{,}5}x = (5 - 8x)\ m/s$$

x étant l'abscisse, comptée en mètres, de A vers B, à partir de A.

Si nous dérivons l'équation de Bernoulli $p + \frac{\rho V^2}{2} = C^{te}$, par rapport à x, nous avons :

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx} = -800(5 - 8x)(-8) = 6400(5 - 8x)$$

en A <u>$x=0$</u> :

$$\frac{dp}{dx} = 6400.5 = 32000 Pa/m = 0{,}32\ bar/m \qquad \boxed{\frac{dp}{dx} = 0{,}32 bar/m}$$

en B <u>$x=0{,}5$</u> :

$$\frac{dp}{dx} = 6400.(5 - 4) = 6400 Pa/m = 0{,}064\ bar/m \qquad \boxed{\frac{dp}{dx} = 0{,}064 bar/m}$$

La pression augmente naturellement de A en B, mais le gradient de pression est 5 fois plus fort en A qu'en B.

Chapitre 4

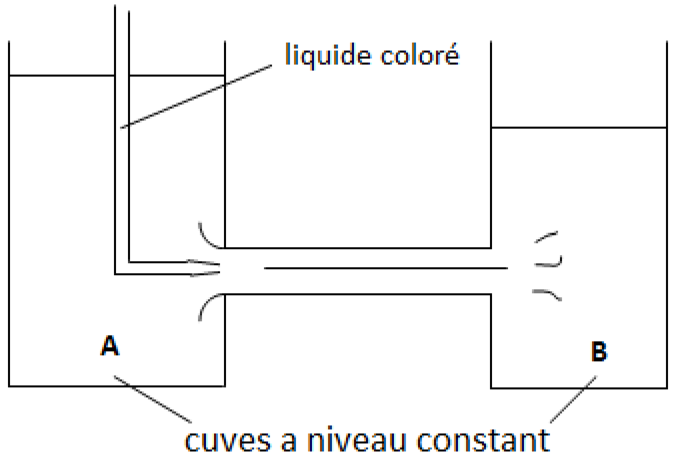
Dynamique des fluides réels incompressibles

Sommaire

Chapitre 4 : Dynamique des fluides incompressibles réels

4.1-Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds

Le dispositif expérimental utilise un tube horizontal reliant deux réservoirs à niveau constant. Ce tube comporte un entonnoir profilé à l'entrée. On injecte dans ce pavillon d'entrée un filet de liquide coloré (à débit constant). A cause de la dénivellation entre les deux réservoirs, l'eau s'écoule à travers le tube et entraîne avec elle ce filet de liquide coloré.



Lorsque le débit qui s'écoule à travers le tube est faible, le filet coloré est parfaitement rectiligne et parallèle à l'axe du tube. L'écoulement paraît indépendant du temps ; il s'établit sous forme de lignes parallèles. On dit qu'il est ***laminaire*** (1).

Lorsque la vitesse d'écoulement augmente, le filet coloré devient sinueux ; il oscille et s'élargit (2). Si la vitesse croit encore, le filet ne reste net que sur une petite longueur à partir de l'entrée puis il diffuse dans toute la section aval du tube (3).

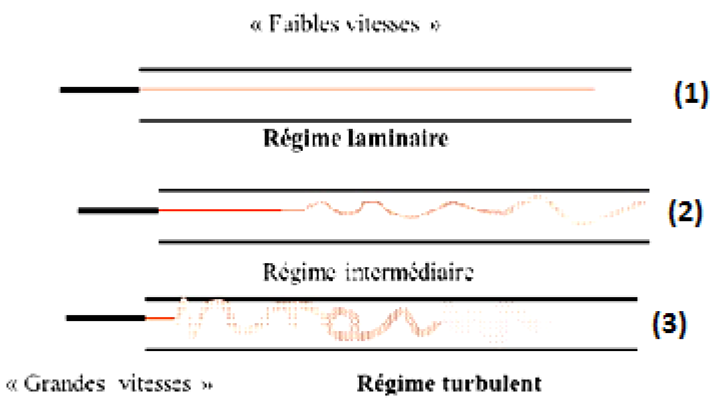


Figure. Différents types d'écoulements

Si de plus on observe les trajectoires de particules colorées, on constate qu'elles sont soumises à des moments désordonnés, et imprévisibles. On dit que l'écoulement est ***turbulent***.

Reynolds a établi, en faisant varier la vitesse *V* de l'écoulement, le diamètre *D* du tube, et en changeant de liquide (masse volumique ρ, viscosité μ) que le régime laminaire est toujours stable tant que le rapport

$$\frac{\rho V D}{\mu} < 2000$$

pour des valeurs de ce rapport comprises entre 2500 et 4000, l'écoulement est critique, et pour des valeurs supérieures, le régime est turbulent.

Ce rapport $R_e = \frac{\rho V D}{\mu}$ est dit nombre de *Reynolds* : cette quantité adimensionnelle permet par conséquent de caractériser la nature de l'écoulement.

Physiquement, on constate que l'écoulement laminaire est caractérisé par des vitesses d'écoulement faibles. Il se produit par ailleurs pour des fluides assez visqueux et lorsque les dimensions de l'écoulement sont assez faibles : les forces de frottement au sein du fluide sont alors dues essentiellement à la viscosité du fluide.

Dans l'écoulement turbulent, on observe d'incessantes fluctuations de vitesse locale radiale qui permettent la diffusion du liquide coloré : il est à prévoir que des contraintes de frottement supplémentaires agissent alors précisément du fait que les particules fluides ont des trajets plus tortueux, et reçoivent constamment des impulsions de la part des particules voisines.

Très généralement, on observe pratiquement que les écoulements d'eau sont turbulents, en particulier en canalisations.

4.2-Nombre de Reynolds

Pour caractériser l'importance relative de ces deux quantités : inertie et viscosité, on définit le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{du/dt}{\nu \Delta u} = \frac{forces\ d'inertie}{forces\ de\ viscosité}$$

Si *D* est une grandeur caractéristique de la géométrie de l'écoulement, et *V* sa vitesse :

$$R_e = \frac{V^2/D}{\nu V/D^2}$$

$$\boxed{R_e = \frac{VD}{\nu}}$$

Plus les forces de viscosité sont prépondérantes devant les forces d'inertie, plus la valeur du nombre de Reynolds est faible.

4.3-Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est constituée par le calcul des dimensions des grandeurs ; de plus c'est un outil supplémentaire de grande utilité dans la mécanique des fluides moderne. Dans une équation exprimant une relation physique entre grandeurs, l'égalité absolue des nombres et des dimensions doit avoir lieu. En général, toute relation physique de ce genre peut être réduite aux grandeurs fondamentales que sont la force *F*, la longueur *L* et le temps *T* (ou la masse *M*, la longueur *L* et le temps *T*). Les applications de cette technique comprennent :

- le passage d'un système d'unité à un autre,
- l'établissement des équations,
- réduction du nombre des variables nécessaire à un programme expérimental,
-l'établissement des principes de la conception d'un modèle.

Le résultat obtenu par la méthode d'analyse dimensionnelle peut être également obtenu en application du théorème de *Vashy-Buckingham* (appelé encore théorème des π) qui s'énonce ainsi :

Étant donné :

- un phénomène faisant intervenir ***n*** variables indépendantes,
- un système d'unités comportant ***p*** grandeurs fondamentales, le phénomène peut être décrit par une relation entre (***n- p***) variables sans dimensions indépendantes constituées à partir des ***n*** variables intervenant dans le phénomène, appelées souvent termes π.

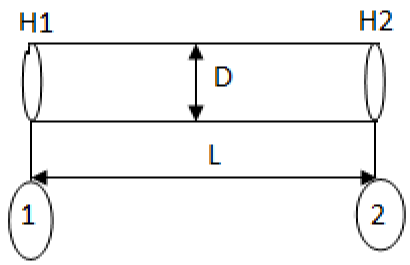
4.4-Pertes de charge

4.4.1-Pertes de charge linéaires dans les conduites

a) Définition du coefficient de perte de charge

Soit un tronçon de conduite circulaire de diamètre *D*, de section *S*, de longueur *L*, parcouru par un débit de fluide Q(de vitesse moyenne $V_m = \frac{Q}{S}$).

Une perte de charge $H = H_1 - H_2$ existe entre les sections 1 et 2, du fait de la dissipation d'énergie par viscosité résultant de cet écoulement.



La perte de charge par unité de longueur de conduite droite et de diamètre constant peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta H}{L} = \lambda \frac{V_m^2}{2g}\frac{1}{D}$$

λ est appelé coefficient de perte de charge linéaire. Il est adimensionnel et caractérise globalement la dissipation.

b) Évaluation de coefficient de perte de charge linéaire (λ)

-Cas d'une conduite lisse $\begin{cases} en\ régime\ laminaire: \lambda = \frac{64}{R_e} \\ en\ régime\ turbulent\ lisse\ \lambda = \frac{0{,}3164}{{R_e}^{1/4}} \end{cases}$

-Cas des conduites rugueuses : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(3{,}71\frac{D}{\varepsilon}\right) = 2\log\left(\frac{D}{2\varepsilon}\right) + 1{,}14$

ε : diamètre des grains de sable collés ;

D : diamètre de la conduite.

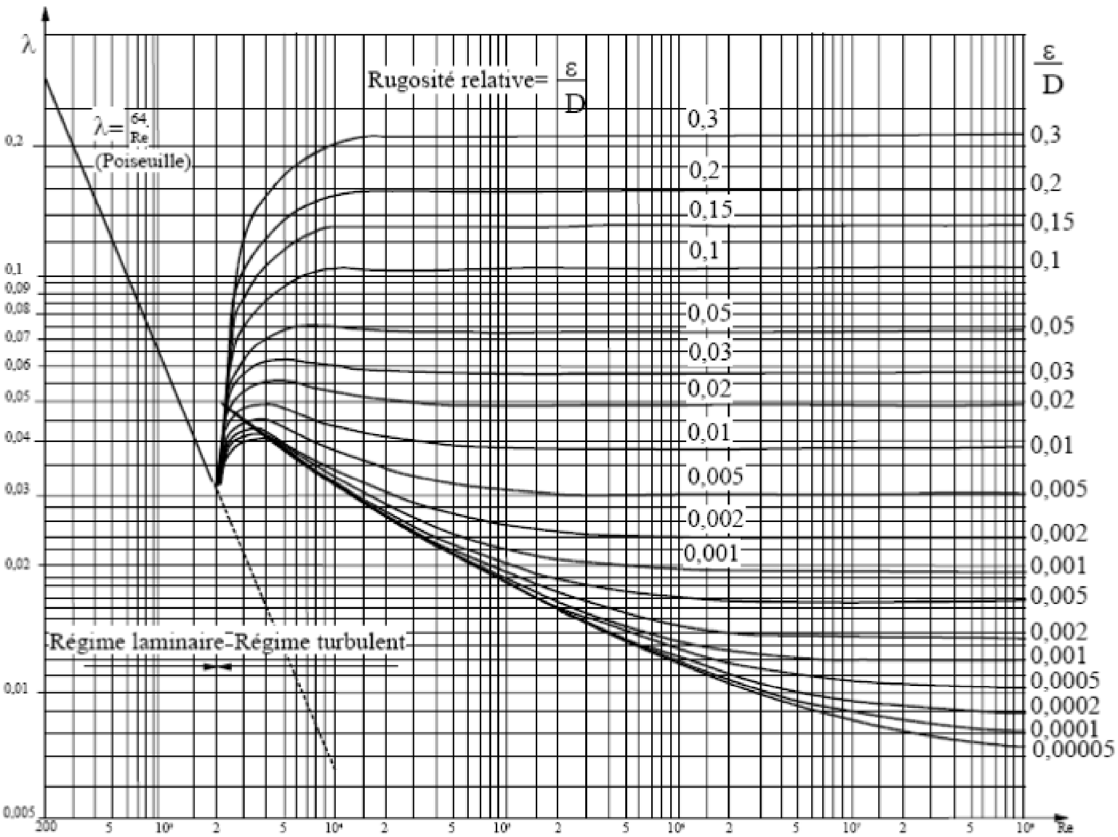


Figure. Diagramme de *Moody.*

4.4.2-Pertes de charge singulières

Les écoulements en canalisations sont le siège de pertes de charge proportionnelles à leur longueur qui sont *uniformément réparties* sur cette longueur. Des pertes de charge supplémentaires peuvent cependant apparaitre *localement* à la suite de perturbations très localisées dues à la modification de la configuration du champ d'écoulement. Ces pertes de charge sont dites singulières et on les suppose concentrées au droit des sections de canalisation où se produisent ces phénomènes locaux. Pour chaque singularité, la ligne de charge présentera un abaissement localisé au droit de la singularité.

Les perturbations locales sont dues :

- à des effets de changement de section : élargissements et rétrécissements ;
- à des effets de changement de direction : conduite coudée ;
- à des effets de mise en vitesse à l'entrée d'une conduite : modification progressive du profil des vitesses jusqu'à l'établissement du régime dynamiquement établi.

En somme, elles se produisent chaque fois que l'écoulement n'est plus rectiligne ou uniforme.

4.5-Théorème de BERNOULLI pour fluides réels

Les fluides réels opposent donc au mouvement relatif de leurs particules les unes par rapport aux autres une certaine résistance qui est fonction de leur viscosité appelées tensions visqueuses, et un frottement contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie ; cette perte appelée « perte de charge ».

La relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

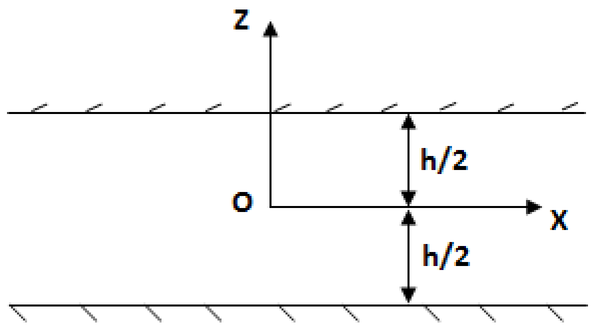
$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + \Delta H_{1,2}$$

$\Delta H_{1,2}$: c'est l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimée en hauteur.

Écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans parallèles (écoulement de Poiseuille)

Considérons deux plans parallèles distants de h. Les forces extérieures sont la pesanteur et la pression p. L'écoulement est supposé en charge (pas de surface libre).

On suppose que les forces de pesanteur sont négligeables devant celles de pression, les plans qui limitent l'écoulement n'ont en conséquence pas besoin d'être horizontaux.



Les équations de Navier sont :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{du}{dt} + \nu\Delta u \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = -\dfrac{dv}{dt} + \nu\Delta v \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\dfrac{dw}{dt} + \nu\Delta w \end{cases}$$

Oz est perpendiculaire aux deux plans.

Faisons les 3 hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement se fait par lames parallèles ; il n'y a pas de mouvements transversaux. On dit que l'écoulement est laminaire. Ainsi : $w = 0$;

- Le mouvement est plan : $v = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

- Le mouvement est permanent : $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Ainsi, l'équation de continuité $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ se réduit à $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

donc $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dx^2}$ et $\Delta v = \Delta w = 0$.

Les équations de Navier se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \nu\dfrac{d^2 u}{dz^2} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation montre que la pression est indépendante de *z* : elle reste constante dans chaque section perpendiculaire à *Ox*.

Prenons comme conditions aux limites, un mouvement nul le long de la paroi : $u = 0$ pour $z = \pm\frac{h}{2}$.

d'où :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dz} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}(z + c) \Rightarrow u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{z^2}{2} + cz + c'\right)$$

$z = \pm\frac{h}{2}, u = 0 \Rightarrow c = 0 \; et \; c' = -\frac{h^2}{8}$

d'où :

$$\boxed{u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{4z^2 - h^2}{8}\right)}$$

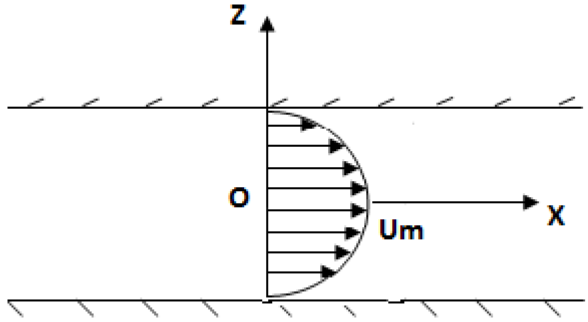


Figure Répartition des vitesses dans la conduite.

La répartition des vitesses est parabolique. La vitesse maximale est $U_{max} = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{8}$, et la vitesse moyenne $U = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} udz = -\frac{1}{\mu}\frac{h^2}{12}\frac{dp}{dx}$

Notons que la vitesse u et $\frac{dp}{dx}$ sont de signe contraire : l'écoulement a lieu dans le sens de la pression décroissante.

Le débit qui s'écoule par tranche de largeur unité est :

$$Q = hU = -\frac{1}{12}\frac{h^3}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

et la perte de charge par unité de longueur est :

$$J = -\frac{dH}{dx} = -\frac{1}{\rho g}\frac{dp}{dx} = 12\ \frac{\nu Q}{gh^3}$$

Elle est proportionnelle à Q.

4.6-Problèmes résolus

Problème n°1

Déterminer la vitesse critique (a) pour du fuel moyen à $15^\circ C$ circulant dans un tuyau de $15cm$ et (b) pour de l'eau à $15^\circ C$ circulant dans un tuyau de $15cm$.

Solution :

La valeur maximum du nombre de Reynolds est 2000.

A $15^\circ C \begin{cases} viscosité\ cinématique\ de\ fuel\ moyen, \nu = 4{,}47.10^{-6} m^2/s \\ viscosité\ cinématique\ de\ l'eau, \nu = 1{,}142.10^{-6} m^2/s \end{cases}$

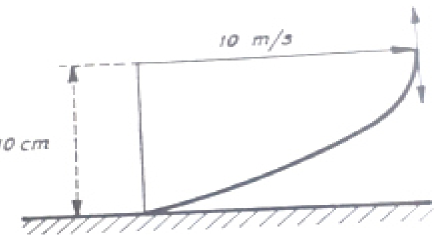
$$R_e = \frac{VD}{\nu} \Rightarrow V = \frac{R_e \nu}{D}$$

- pour le fuel moyen : $V_{cr} = \frac{2000.4{,}47.10^{-6}}{0{,}15} = 0{,}059 m/s$

- pour l'eau : $V_{cr} = \frac{2000.1{,}142.10^{-6}}{0{,}15} = 0{,}015 m/s$

Problème n°2

Dans un écoulement plan horizontal, on suppose la répartition des vitesses représentée sur la figure (répartition parabolique, vitesse maximale=10*m/s* à 10*cm* de la paroi fixe). La viscosité dynamique de l'huile est $\mu = 20cPo$.



Calculer les contraintes tangentielles τ dans l'huile, à la paroi et tous les 2*cm*.

Solution :

Les contraintes tangentielles $\tau = \mu.\frac{du}{dz}$

$\mu = 20cPo = 20.0.01Po = 0,2Po = 0,02Pa.s = 0,02\frac{N.s}{m^2}$

$u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{z^2}{2} + cz + c'\right)$ $\quad$ $c\ et\ c'$: sont des constantes.

Nous avons $U_{max} = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{8}$ $\quad$ avec $U_{max} = 10m/s,$ $\quad \frac{h}{2} = 10cm \Rightarrow h = 20cm$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8.\mu.U_{max}}{h^2} = -\frac{8.0,02.10}{0,2^2} = -40\ Pa/m$$

- pour $z = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow c' = 0$

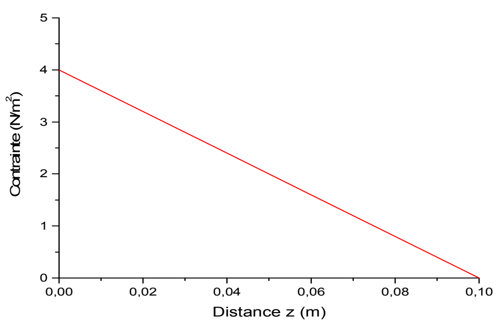
- pour $z = 10cm = 0,1m \Rightarrow u = 10m/s \ \Rightarrow 10 = \frac{1}{0,02}\frac{dp}{dx}\left(\frac{0,1^2}{2} + c.0,1\right) \Rightarrow c = -0,1$

$$u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{z^2}{2} + cz + c'\right) = \frac{1}{0,02}(-40)\left(\frac{z^2}{2} - 0,1z\right) = -2000\left(\frac{z^2}{2} - 0,1z\right) = u$$

$$\frac{du}{dz} = -2000(z - 0,1)$$

On trouve : $\tau = \mu.\frac{du}{dz} = 0,02.(-2000(z - 0,1)) = -40.(z - 0,1) = 4 - 40z$

$$\boxed{\tau(z) = 4 - 40z}$$



Problème n°3

Soit un tube cylindrique de 3*km* de long, de 10*cm* de diamètre, parcouru par un liquide de viscosité dynamique $\mu = 0{,}4\, poise$.

On suppose que la distribution des vitesses dans la section droite du tube est donnée par l'équation parabolique :

$u = 10z - z^2$ u : étant la vitesse à la distance *y* de la paroi.

- Calculer la force de frottement visqueux par unité de surface contre la paroi ;
- Calculer la force de frottement visqueux par unité de surface à 2*cm* de la paroi ;
- La force totale de frottement s'exerçant sur le tube.

Solution :

$\mu = 0{,}4\, poise = 0{,}04\, Pa.s = 0{,}04\ \dfrac{N.s}{m^2}$

- la force de frottement par unité de surface est donnée par :

$\tau = \mu\left(\dfrac{du}{dz}\right) = \mu(10 - 2.z)$

*Contre la paroi $z = 0$ ou$z = 10cm = 0{,}1m \Rightarrow \tau_p = 0{,}04.(10 - 2.0) = 0{,}4\, N/m^2$.

* Pour $z = 2cm$, $\tau_p = 0{,}04.(10 - 2.0{,}02) = 0{,}398\ N/m^2$.

- La force totale de frottement :

S :surface totale de la paroi.

$F = \tau_p.S = \tau_p.\pi.d.L = 0{,}4.3{,}14.0{,}1.3000 = 376{,}8\, N$

Problème n°4

En admettant que la résistance exercée par un fluide en mouvement sur un corps est fonction de la masse volumique, de la viscosité dynamique et de la vitesse du fluide, et d'une longueur caractéristique du corps, établir l'équation générale, en utilisant le théorème en π de Buckingham.

Solution :

On peut exprimer le problème par :

$$\phi(F, \rho, \mu, L, V) = 0$$

Les quantités physiques exprimées en fonction des grandeurs fondamentales F, L et T sont :

La force $F = F$

La longueur $L = L$

La masse volumique $\rho = F\, T^2\, L^{-4}$

La vitesse $V = L\, T^{-1}$

La viscosité dynamique $\mu = F\ T\ L^{-2}$

Il y a 5 grandeurs physiques et 3 unités fondamentales, d'où (5-3) soit deux termes en π.

Choisissant la longueur L, la vitesse V, et la masse volumique ρ comme les trois variables de référence qui se répètent avec exposants inconnus, nous établissons les termes en π comme suit :

$\pi_1 = (L^{a_1})(L^{b_1}T^{-b_1})(F^{c_1}T^{2c_1}L^{-4c_1})(F)$ .... (1)

Egalant les exposants de F, L et T respectivement, nous obtenons :

$0 = c_1 + 1$; $0 = a_1 + b_1 - 4c_1$; $0 = -b_1 + 2c_1$ d'où $c_1 = -1, b_1 = -2, a_1 = -2$

Reportant dans (1) $\pi_1 = \frac{F}{L^2V^2\rho}$

Pour calculer le deuxième terme en π, reprendre les trois premières grandeurs physiques et ajouter une autre grandeur, dans le cas présent, la viscosité dynamique μ.

$\pi_2 = (L^{a_2})(L^{b_2}T^{-b_2})(F^{c_2}T^{2c_2}L^{-4c_2})(F\ T\ L^{-2})$ .... (2)

Egalant les exposants en F, L et T respectivement, nous obtenons :

$0 = c_2 + 1$; $0 = a_2 + b_2 - 4c_2 - 2$; $0 = -b_2 + 2c_2 + 1$ d'où $c_2 = -1, b_2 = -1, a_2 = -1$.

Ainsi $\pi_2 = \frac{\mu}{LV\rho}$. Cette expression s'écrit $\pi_2 = \frac{LV\rho}{\mu}$ qu'on reconnaît être le nombre de Reynolds.

La nouvelle relation écrite en fonction de π_1 et π_2 est

$$f_1\left(\frac{F}{L^2V^2\rho}, \frac{LV\rho}{\mu}\right) = 0$$

Où

La force $F = (L^2V^2\rho)f_2\left(\frac{LV\rho}{\mu}\right)$

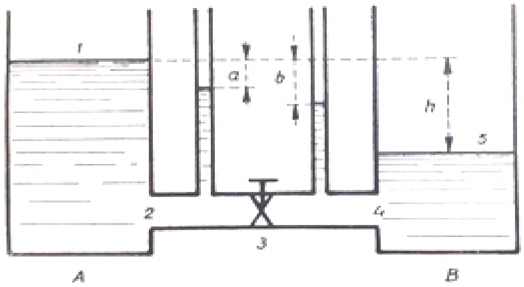
qui peut s'écrire $F = \left(2KR_{ey}\right)\rho L^2\frac{V^2}{2}$

Avec L^2 est une aire, l'équation finale peut s'écrire $F = C_D\rho A\frac{V^2}{2}$

C_D: coefficient de trainée, qui est un nombre sans dimensions.

Problème n°5

Deux réservoirs *A* et *B* de grande section et contenant de l'eau sont reliés par une conduite horizontale de diamètre constant égal à 150mm, comportant une vanne.



Les coefficients de perte charge singulière sont :

$\zeta_2 = 0{,}5$; $\zeta_4 = 1$; $\zeta_3 = 0{,}4 + \delta/(1-\delta)^2$,

δ étant un paramètre, variable de 0 à 1, caractérisant l'abaissement de l'opercule de la vanne.

On néglige les autres pertes de charge.

On suppose les niveaux 1 et 5 constants. On donne $h = 2m$.

- Calculer la vitesse *V* dans la conduite en fonction de *h* et des coefficients de perte de charge singulière ;
- Calculer le débit volumétrique quand la vanne est ouverte ($\delta = 0$) et quand elle est fermée aux trois quarts ($\delta = 0{,}75$) ;
- Pour $\delta = 0{,}75$, calculer les dénivellations *a* et *b* dans les prises de pression statiques représentées.

Solution :

- appliquée en 1 et 5 l'équation de Bernoulli donne :

$p_1 + \frac{\rho}{2}V_1^2 + \rho g z_1 = p_5 + \frac{\rho}{2}V_5^2 + \rho g z_5 + \Delta H_{1-5}$ ....(1)

$p_1 = p_5 = p_{atm}, V_1 = V_5 \approx 0$ (Deux réservoirs de grande section),

$\Delta H_{1-5} = \sum \zeta \rho \frac{V^2}{2}$ les pertes linéaires sont négligées.

$(1) \Rightarrow \rho g (z_1 - z_5) = \Delta H_{1-5}$

$z_1 - z_5 = h,$

$\Delta H_{1-5} = \sum \zeta \rho \frac{V^2}{2} = \zeta_2 \rho \frac{V_2^2}{2} + \zeta_3 \rho \frac{V_3^2}{2} + \zeta_4 \rho \frac{V_4^2}{2}$ avec $V_2 = V_3 = V_4 = V$

$\Delta H_{1-5} = \rho \frac{V^2}{2}(\zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4)$

$(1) \Rightarrow \rho g h = \rho \frac{V^2}{2}(\zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4) \Rightarrow gh = \frac{V^2}{2}(\zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4)$

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{\zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4}}$$

- $q_v = V.S = \frac{\pi d^2}{4}. \sqrt{\frac{2gh}{\zeta_2 + \left(0{,}4 + \frac{\delta}{(1-\delta)^2}\right) + \zeta_4}}$

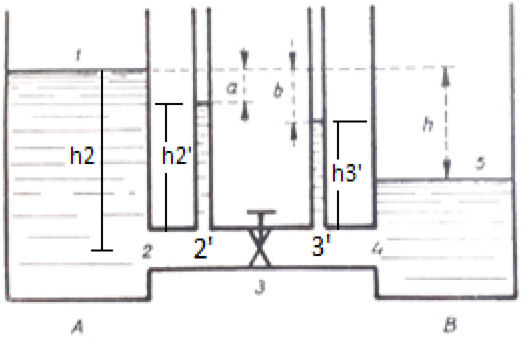
* $\underline{\delta = 0}$

$$q_v = \frac{\pi. 0{,}15^2}{4} \sqrt{\frac{2.9{,}81.2}{0{,}5 + \left(0{,}4 + \frac{0}{(1-0)^2}\right) + 1}} = 0{,}08\ m^3/s$$

* $\underline{\delta = 0{,}75}$

$$q_v = \frac{\pi.0{,}15^2}{4}\sqrt{\frac{2.9{,}81.2}{0{,}5 + \left(0{,}4 + \frac{0{,}75}{(1-0{,}75)^2}\right) + 1}} = 0{,}0296\ m^3/s$$

- Pour $\delta = 0{,}75$, calculer les dénivellations a et b .



* On applique l'équation de Bernoulli entre 2 et 2':

$p_2 + \frac{\rho}{2}V_2^2 + \rho g z_2 = p_{2'} + \frac{\rho}{2}V_{2'}^2 + \rho g z_{2'} + \Delta H_{2-2'}$ ....(2)

avec $z_2 = z_{2'}$, $V_2 = V_{2'} = V$,

$$\begin{cases} p_2 = p_{atm} + \rho g h_2 \\ p_{2'} = p_{atm} + \rho g h_{2'} \end{cases} \Rightarrow p_2 - p_{2'} = \rho g(h_2 - h_{2'}) = \rho g a$$

$$\Delta H_{2-2'} = \zeta_2 \rho \frac{V^2}{2}$$

$(2) \Rightarrow (p_2 - p_{2'}) = \Delta H_{2-2'} \Rightarrow \rho g a = \zeta_2 \rho \frac{V^2}{2} \Rightarrow a = \zeta_2 \frac{V^2}{2g}$

$$a = 0{,}5.\frac{1{,}68^2}{2.9{,}81} = 0{,}072m$$

* On applique l'équation de Bernoulli entre 2 et 3':

$p_2 + \frac{\rho}{2}V_2^2 + \rho g z_2 = p_{3'} + \frac{\rho}{2}V_{3'}^2 + \rho g z_{3'} + \Delta H_{2-3'}$ ....(3)

avec $z_2 = z_{3'}$, $V_2 = V_{3'} = V$,

$$\begin{cases} p_2 = p_{atm} + \rho g h_2 \\ p_{3'} = p_{atm} + \rho g h_{3'} \end{cases} \Rightarrow p_2 - p_{3'} = \rho g(h_2 - h_{3'}) = \rho g b$$

$$\Delta H_{2-3'} = \zeta_2 \rho \frac{V^2}{2} + \zeta_3 \rho \frac{V^2}{2} = \rho \frac{V^2}{2}(\zeta_2 + \zeta_3)$$

$(3) \Rightarrow (p_2 - p_{3'}) = \Delta H_{2-3'} \Rightarrow \rho g b = (\zeta_2 + \zeta_3)\rho \frac{V^2}{2} \Rightarrow b = (\zeta_2 + \zeta_3)\frac{V^2}{2g}$

$$b = \left(0{,}5 + \left(0{,}4 + \frac{0{,}75}{(1-0{,}75)^2}\right)\right)\frac{1{,}68^2}{2.9{,}81} = 1{,}85m$$

Problème n°6

De l'huile circule du réservoir *A* par 150*m* de tuyau neuf de fonte asphaltée de 15*cm* de diamètre jusqu'au point *B* de cote 30*m*, comme le montre la figure. Quelle devra être la pression en *A* pour que le débit de l'huile soit de 13 *l/s* ?

On donne la densité $= 0{,}84$, la viscosité cinématique $\nu = 2{,}1.10^{-6} m^2/s$ et la rugosité $\varepsilon = 0{,}012cm$.

Solution :

Vitesse d'écoulement : $V = \frac{q_v}{S} = \frac{4q_v}{\pi d^2} = \frac{4.13.10^{-3}}{3{,}14.(0{,}15)^2} = 0{,}736\ m/s$

Nombre de Reynolds : $R_e = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}736.0{,}15}{2{,}1.10^{-6}} = 52571$ écoulement turbulent.

Rugosité relative : $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0{,}012}{0{,}15} = 0{,}08$; ($R_e$et $\frac{\varepsilon}{d}$ donne $\lambda = 0{,}0235$ (abaque Moody))

En appliquant l'équation de Bernoulli entre *A* et *B*, avec pour référence *A*, on obtient :

$p_A + \frac{\rho}{2}V_A^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{\rho}{2}V_B^2 + \rho g z_B + \Delta H_{A-B}$ ....(1)

$V_A \approx 0m/s$, $p_B = p_{atm}$, $z_A - z_B = 24 - 30 = -6m$, $V_B = V = 0{,}736m/s$

$p_A - p_B = p_A - p_{atm} = 55016{,}4\ Pa$

Bibliographie

Bibliographie

- Raymond A. SERWAY. Mécanique et thermodynamique. Éditions Études Vivantes, 1992.
- Michel A. MOREL, Jean-Pierre LABORDE. Exercices de mécanique des fluides. Éditions Chihab- Eyrolles, 1994.
- Edmond A. BRUN, André MARTINOT-LAGARDE, Jean MATHIEU. Mécanique des fluides-1. Éditions Dunod, 1968.
- Jean-Louis FANCHON. Guide de mécanique sciences et technologies industrielles. Éditions Nathan, 2003.
- Ranald V. GILES. Mécanique des fluides et hydraulique. Série Schaum, 1983.
- R. COMOLET, J. BONNIN. Mécanique expérimentale des fluides, tomes 1,2 et 3. Éditions Masson, 1985.
- R. OUZIAUX, J. PERRIER. Mécanique des fluides appliquée. Éditions Dunod, 1978.
- J.M. BREBEC. Mécanique des fluides. Hachette, 1998.
- H. LUMBROSO. Problèmes résolus de mécanique des fluides. Éditions Dunod, 1989.
- C. FÉDIAEVSKI, I. VOITKOUNSKI, Y. FADDÉEV. Mécanique des fluides. Éditions Mir, 1974.
- J. PADET. Fluides en écoulement. Éditions Masson, 1990.
- L. LANDAU, E. LIFCHITZ. Mécanique des fluides. Éditions Mir, 1971.
- S. CANDEL. Mécanique des fluides. Éditions Dunod, 1990.