



République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Oran des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf

Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique



Rhéologie des fluides complexes
(Cours et exercices corrigés)

Rédigé par

Dr YUCEFI Sarra

Avant –propos

Ce polycopié de cours de rhéologie des fluides complexes répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la deuxième année Master LMD (1^{er} semestre) option « Installations énergétiques et turbomachines » du domaine Sciences et Technologies des universités algériennes, et des écoles d'ingénieurs. Il constitue une initiation à la rhéologie des fluides pour les étudiants du domaine Sciences et Technologies (génie mécanique, génie civil, génie maritime, hydraulique, génie climatique, aéronautique et autres...)

La rédaction de ce polycopié est le fruit des années d'enseignement de la matière "rhéologie des fluides complexes " pour les étudiants de master2 de l'option Installations énergétiques et turbomachines au département de génie Mécanique de l'université d'Oran des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf.

La rhéologie est la science qui se trouve à la frontière entre la physique, la mécanique des fluides et la mécanique des solides C'est la discipline qui étudie l'écoulement et les déformations de la matière sous l'action des contraintes.

En effet la rhéologie s'intéresse aux fluides complexes qui nécessitent la compréhension de son comportement et la définition de ses propriétés tels que les produits agroalimentaires (yaourt, sauces, mayonnaises...), les produits cosmétiques (crèmes, pâtes dentifrices, shampoings..), les produits d'entretien (gels, cires, peintures..) ainsi que le béton ; les boues de forage et les sédiments cohésifs.

L'auteur

Table des matières

- I. Introduction
- II. Objectif de la rhéologie
- III. Définitions et lois générales
- IV. Fluides visqueux
 - Fluides newtoniens
 - Fluides non newtoniens visqueux
- V. Fluides viscoélastiques
- VI. Principes et description des principaux rhéomètres à régime permanent
 - Rhéomètre capillaire (Poiseuille)
 - Viscosimètre à chute de bille
 - Viscosimètre empirique
- VII. Principes et description des principaux rhéomètres à régime transitoire
 - Rhéomètre à cylindre rotatif (Rhéomètre de couette)
 - Rhéomètre cône- plan
- VIII. Ecoulements de fluides non newtoniens dans les conduites cylindriques
- IX. Rhéologie des polymères et suspensions
- X. Exercices corrigés

Liste des symboles

Symboles latins

Désignation	Symbole	Unité
Diamètre	D	m
Rayon	R	m
Fonction fluage	f(t)	Pa ⁻¹
Complaisance élastique	J	Pa ⁻¹
Force	F	N
Surface	S	m ²
Poids	P	N
Poussée d'Archimède	A	N
Epaisseur	e	m
Vitesse	u.v.	m.s ⁻¹
Vitesse maximum	U _{max}	m.s ⁻¹
Vitesse moyenne	U _{moy}	m.s ⁻¹
Débit volumique	Q _v	m ³ .s ⁻¹
Indice d'écoulement	n	-
Consistance	K	Pa.s ⁿ
Temps	t	S
Pression	P	Pa
Température	T	°C
Indice d'écoulement	n	-
Vitesse de rotation	N	tr.mn ⁻¹
Volume	V	m ³
Hauteur	H	M
Moment (couple)	M	N.m

Symboles grecs

Vitesse angulaire	ω	s^{-1}
Viscosité dynamique	μ	Pa.s
Viscosité cinématique	ν	$m^2.s^{-1}$
Viscosité réduite	μ_{Red}	Pa.s
Viscosité relative	μ_R	Pa.s
Viscosité spécifique	μ_{sp}	Pa.s
Contrainte	τ	Pa
Contrainte seuil (critique)	τ_c	Pa
Gradient de vitesse	γ	s^{-1}
Déformation	ε	m
Masse volumique	ρ	$Kg.m^{-3}$
Temps caractéristique	λ	S
Angle de cône	ψ	°

I. Introduction

La rhéologie est un mot créé aux états unis en 1928 par Eugène Cook Bingham (1878-1945), c'est une branche de la physique qui étudie l'écoulement, les déformations des corps, et plus généralement de la viscosité des matériaux sous l'action de contraintes qui leurs sont appliquées compte tenu de la vitesse d'application de ces contraintes ou plus généralement de leur variation au cours du temps. C'est l'étude du comportement mécanique, c'est à dire les relations entre les contraintes et les déformations.

Les procédés de préparation de produits (solutions, pâtes, etc...) ou de formage de pièces (en métallurgie, en plasturgie, etc. ...) nécessitent immanquablement l'écoulement de la matière, il est donc nécessaire de connaître le comportement de cette matière pour déterminer les forces à mettre en jeu.

Cette discipline a été créée pour répondre aux questions sur les comportements complexes, car les différentes branches de la mécanique développées ne sont fondées que sur des schémas simples de comportements. La rhéologie traite tous les aspects de la matière, liquides soient-ils ou solides, elle présente un intérêt particulier par son habilité à l'analyse des problèmes liées aux substances, dont l'aspect présente un état intermédiaire entre un solide parfaitement élastique et un liquide tout à fait visqueux. La rhéologie en tant que discipline, s'intéresse à un éventail très important de corps : métaux, plastique, produits pétroliers, verres, bois, liquides biologiques, produits alimentaires et pharmaceutiques...etc.

II. L'objectif de la rhéologie

C'est de déterminer l'équation d'état rhéologique du fluide en effectuant des mesures relatives des forces et des déplacements et en exploitant ces résultats à l'aide des équations de mouvement. Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement à leur viscosité, une de leurs caractéristiques physico-chimiques. La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non-newtoniens" (quasiment tout le reste ...le sang, les gels, les boues, les pâtes...).

III. Définitions et lois générales

3.1. Lois de comportement

3.1.1. Notions de viscosité

Soit un fluide homogène dans lequel chaque élément de fluide glisse parallèlement l'un sur l'autre sans se mélanger. Si le fluide est visqueux et s'il existe un gradient de vitesse entre les deux filets adjacents, le flux de quantité de mouvement entre les deux éléments de fluide parallèles et adjacents est donné par la loi de Newton.

Dans le cas le plus général τ représente le tenseur des contraintes, mais pour un écoulement unidirectionnel et présentant une symétrie cylindrique, la relation de Newton se réduit à la relation algébrique :

$$\tau = -\mu \left(\frac{du}{dy} \right) \quad (3.1)$$

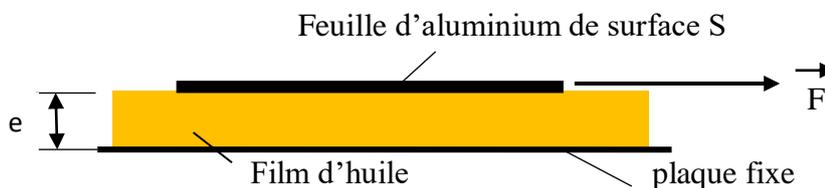
Où y désigne une variable d'espace normale à la direction de l'écoulement. La grandeur μ est la viscosité dynamique du milieu.

Si la viscosité est indépendante du gradient de vitesse, le fluide est dit newtonien. Dans le cas contraire, le fluide sera dit non newtonien. Il existe plusieurs familles de fluides non newtoniens que l'on peut différencier par la forme de la courbe donnant en fonction de $\left(\frac{du}{dy}\right)$, que l'on appelle un rhéogramme, et que l'on obtient généralement expérimentalement à l'aide d'un rhéomètre.

En outre, pour certains fluides, la viscosité varie en fonction du gradient vitesse de cisaillement $\left(\frac{du}{dy}\right)$ et du temps. Si la viscosité augmente avec le temps, le fluide est dit rhéopecte. Dans le cas inverse le fluide est dit thixotrope.

L'analyse des fluides non newtoniens reste encore très empirique et malgré le très grand nombre de fluides non newtoniens, nous nous limiterons dans ce chapitre aux fluides homogènes newtoniens. Signalons que les écoulements dispersés (solide- liquide, ou solide gaz) sont également des écoulements des fluides non newtoniens dès que la fraction volumique de solide dans la dispersion devient supérieure à 0,5%

On considère l'expérience suivante où le mouvement de cisaillement que subit le fluide peut être considéré comme laminaire plan :



On tire sur la feuille d'aluminium afin que celle-ci soit animée de la vitesse V_0 .

On montre que V_0 augmente avec F , avec e (épaisseur du film fluide) et diminue avec S .

1. Contrainte de cisaillement

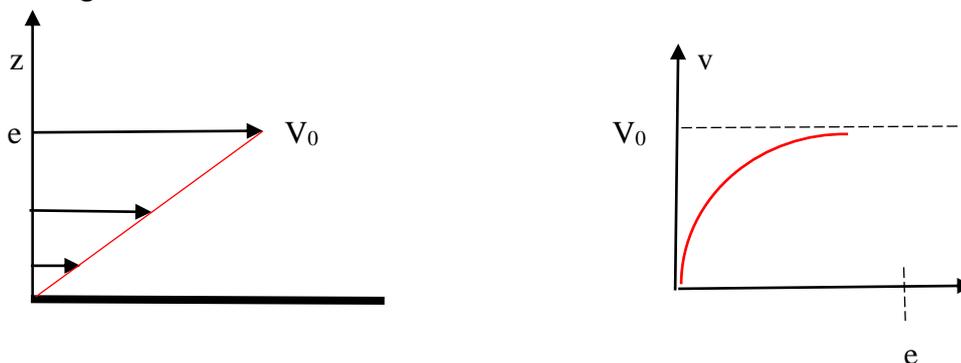
C'est la force que l'on exerce par unité de surface du fluide exprimée en Pa ($\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$)

$$\tau = \frac{F}{S} \quad (3.2)$$

2. Gradient de vitesse

Si V_0 n'est pas trop grande, les molécules de miel en contact avec l'aluminium sont entraînées par lui à la vitesse V_0 , en une couche mince.

Les forces de Van Der Waals permettent de transférer une partie de l'énergie cinétique de cette couche aux molécules en dessous qui sont entraînées mais à une vitesse moindre : plus ces forces d'interactions sont fortes, plus le fluide est visqueux et plus la vitesse décroît vite quand on s'éloigne de la couche du dessus.



Le mouvement se propage en s'atténuant au sein du liquide : il est nul au contact de la plaque support qui est fixe.

Le gradient de vitesse va traduire l'évolution de la vitesse au sein du fluide exprimé en s^{-1}

$$\dot{\gamma} = \frac{dV}{dz} \quad (3.3)$$

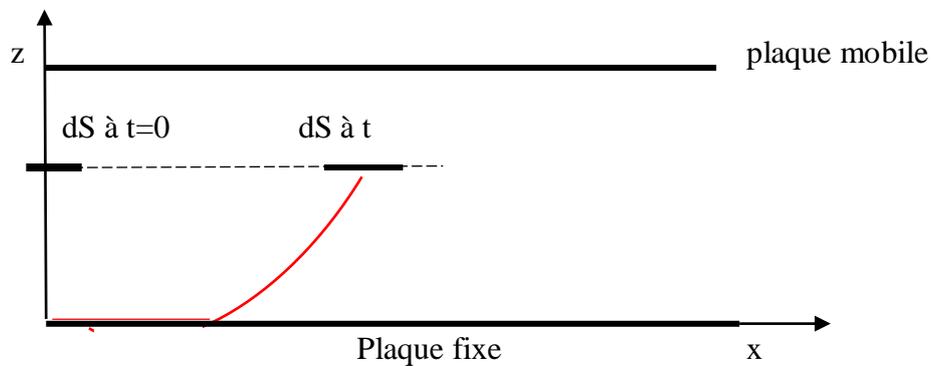
Cette grandeur dépend de la contrainte de cisaillement appliquée et de la nature du fluide.

Déformation de cisaillement

Considérons un petit élément de surface d'une nappe du fluide dS situé à la cote z .

A l'instant t après le début de l'expérience, elle a parcouru une distance x qui dépend de z (et de t)

A la cote $z + dz$, elle aurait parcouru $x + dx$.



La déformation de cisaillement traduit la variation de la distance parcourue par dS en fonction de son éloignement à la plaque support fixe.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{dx}{dz}} \quad (3.4)$$

Vitesse de cisaillement

Calculons la variation de la déformation au cours du temps appelée vitesse de cisaillement

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \varepsilon = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dv}{dz}$$

Cette grandeur est donc identique au gradient de vitesse (tout du moins dans le cas simple ici traité d'un mouvement laminaire plan)

Viscosité dynamique

Dans l'expérience, lorsqu'on augmente F , en fait on augmente τ on sein du fluide, lorsqu'on augmente V_0 , on augmente ε au sein du fluide.

La façon dont τ varie en fonction de ε dépend de la viscosité. On appelle viscosité dynamique

$$\boxed{\mu = \frac{\tau}{\gamma}} \quad (3.5)$$

unité : Pa.s ou Poiseuille dans le S.I. (symbole Pl)

unité usuelle : le poise : 1 poise = 10^{-1} Pl (symbole Po)

Viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

(3.6)

Où ρ est la masse volumique du fluide en kg.m^{-3}

unité dans le système international : le $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$

unité usuelle : 1 stokes = $10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ou son sous-multiple, le centistoke.

Cette dernière unité est pratique pour des fluides de viscosités proches de celle de l'eau qui a une viscosité de 1 centistoke.

Remarque : il existe d'autres façons d'exprimer la viscosité. Par exemple en Degré Engler (sans dimension), c'est le rapport :

$$\frac{\nu}{\nu_{\text{eau}}} = \frac{t}{t_{\text{eau}}}$$

(3.7)

Où t et t_{eau} sont des temps d'écoulement du fluide et de l'eau respectivement mesurés dans les mêmes conditions expérimentales.

Remarque : la viscosité est liée aux interactions de Van Der Waals existant au sein des fluides

Ainsi, comparons l'eau et l'hexane, qui ont des volumes moléculaires similaires : on sait que l'eau présente des interactions moléculaires fortes (liaisons hydrogènes) alors que pour l'hexane elles sont très faibles. On observe effectivement que la viscosité de l'hexane est beaucoup plus faible que celle de l'eau.

3.1.2. Paramètres influençant la viscosité :

1. La pression

- pour les liquides : son influence est négligeable.
- pour les gaz : si la pression augmente, il y a plus de frottements au sein du fluide, la viscosité augmente un peu.

Exemple : air à 20°C : $\mu = 1.72.10^{-5} \text{ Pa.s}$ sous 1 atm. $\mu = 1.82.10^{-5} \text{ Pa.s}$ sous 20 atm.

2. La température

a. Pour les gaz :

La viscosité augmente un peu avec la température.

Exemple : air sous 1 atm : $\mu = 1.72.10^{-5} \text{ Pa.s}$ à 20°C $\mu = 2.29.10^{-5} \text{ Pa.s}$ à 100°C

b. Pour les liquides :

La viscosité varie beaucoup avec la température (de l'ordre de 0.5 à 10 % par $^\circ\text{C}$!)

Pour les liquides purs comme l'eau, l'huile, l'alcool, ... on montre qu'elle suit une loi exponentielle croissante

Exemples :

- eau : $\mu = 1,008.10^{-3}$ Pa.s à 20°C $\mu = 0,660.10^{-3}$ Pa.s à 40°C
- miel : si on augmente la température de 1°C, la viscosité est divisée par 10

Expérimentalement, il est donc très important de réguler la température lorsqu'on veut faire une mesure précise de viscosité. La plupart des appareils permettent de travailler à 0.01°C près.

IV. Fluides visqueux

4.1 Fluides newtoniens

Dans les fluides visqueux newtoniens, le tenseur des contraintes de cisaillement τ augmente proportionnellement avec le tenseur de cisaillement « gradient de vitesse $\frac{du}{dy}$ noté $\dot{\gamma}$ soit :

$$\tau = -\mu \dot{\gamma} \quad (4.1)$$

C'est la loi de Newton où la viscosité μ est constante. Cette loi n'est valable que pour un certain nombre de substances caractérisées par des structures de basse molécularité, comme l'eau par exemple. La courbe d'écoulement reliant la contrainte de cisaillement au gradient de vitesse est une droite de pente μ . Pour un fluide newtonien, la viscosité est indépendante du taux de cisaillement et du temps pendant lequel le fluide est sollicité. Elle dépend que de la température et de la pression. Les fluides pour lesquels il n'existe pas de relation linéaire entre contraintes et déformations sont appelés fluides non-Newtoniens. De nombreux matériaux entrent dans cette catégorie.

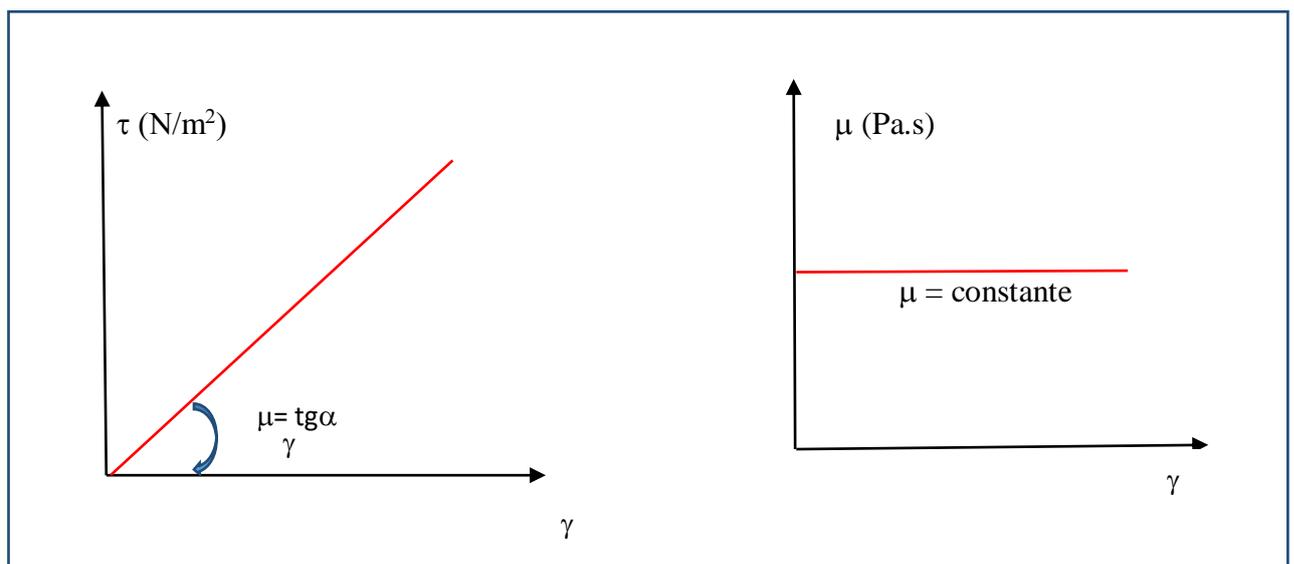


Figure 4.1. Rhéogrammes et courbe de viscosité dynamique d'un fluide newtonien.

4.2. Fluides non-newtoniens visqueux

a) Généralités

On dit qu'un fluide est non-newtonien lorsque sa viscosité dépend du taux de cisaillement, sinon le fluide est newtonien, sa viscosité est alors constante. Le plastique, le caoutchouc, les dentifrices sont par exemple des fluides non-newtoniens.

Il existe plusieurs modèles pour simuler la viscosité des fluides non-newtoniens car il n'y a pas de modèle universel. Ces fluides n'ont pas tous les mêmes comportements, certains ont aussi une mémoire de forme ou d'autres caractéristiques spéciales qui leur confèrent un comportement difficile à simuler. Il est du domaine de la rhéologie de déterminer quel modèle convient à tel ou tel fluide. Pour de tels fluides, il n'est pas possible de définir une viscosité constante. On définit alors, de façon plus générale, une viscosité apparente, qui dépend de nombreux paramètres et en particuliers du gradient de vitesse, du temps d'application des contraintes et du module d'élasticité du fluide.

Les matériaux non-newtoniens peuvent être classés en matériaux à viscosité décroissante et matériaux à viscosité croissante avec le cisaillement.

D'autre part, ils peuvent être classés en matériaux aux propriétés indépendantes ou dépendantes du temps.

On peut trouver ces fluides dans l'industrie chimique, pharmaceutique et agroalimentaire. (par exemple : suspensions, pommades, pâtes, émulsions...)

Pour de tels fluides, il n'est pas possible de définir une viscosité constante. On définit alors, de façon générale, une viscosité apparente, qui dépend de nombreux paramètres et en particulier du gradient de vitesse, du temps d'application des contraintes et du module d'élasticité du fluide. Le classement des fluides complexes peut être présenté comme suit :

Fluides non newtoniens :

- Fluides purement visqueux
 - Comportement indépendant du temps
 - Fluides rhéofluidifiants (pseudoplastiques)
 - Fluides rhéoépaississants (dilatants)
 - Fluides plastiques (Bingham, Herschel Bulkley)
 - Comportement dépendant du temps
 - Fluides thixotropes
 - Fluides rhéopectes
 - Fluides viscoélastiques

b) Fluides non- newtoniens au comportement indépendant du temps de cisaillement sans contrainte critique

1- Fluides rhéofluidifiants (ou pseudoplastiques)

Ces fluides ont une viscosité qui diminue lorsque le taux de cisaillement augmente. Le comportement rhéofluidifiant est défini par un rhéogramme dont la concavité est tournée vers le bas. De nombreux fluides montrent ce comportement : sang, shampoing, peintures ou encore solutions de polymères. Pour les solutions de polymères, ce comportement est attribuable à la séparation de macromolécules enchevêtrées puis à leur alignement dans le sens de l'écoulement au fur et à mesure de l'augmentation du taux de cisaillement. Dans les suspensions la diminution de la viscosité provient de la disparition progressive des structures organisées. L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la Fig. 1.3. De nombreux modèles ont été élaborés pour rendre compte de l'écoulement rhéofluidifiant d'un fluide, donnant autant de modèles phénoménologiques pour la viscosité. Bien que ce modèle permette de résoudre un grand nombre de problèmes d'écoulement, il faut garder à l'esprit qu'il décrit assez mal le comportement à bas et haut taux de cisaillement et que les paramètres K et n n'ont pas d'interprétation physique claire. En réalité un fluide rhéofluidifiant ne l'est que pour une certaine gamme de taux de cisaillement.

Ces fluides sont représentés, en général, par une loi de puissance ou encore appelée loi d'Ostwald de Waele.

$$\tau = K \left(\frac{du}{dy} \right)^n = K (\dot{\gamma})^n \quad (4.2)$$

Où K représente l'indice de consistance et n représente l'indice de comportement, dont la valeur $n < 1$ est un exposant qui traduit l'écart avec le comportement newtonien pour lequel $n = 1$ (ou indice de structure du fluide).

La viscosité apparente pour un fluide suivant la loi en puissance se calcule comme suit :

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = K \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} = K (\dot{\gamma})^{n-1} \quad (4.3)$$

La loi de puissance permet de résoudre bon nombre de problèmes d'écoulement de fluides non- newtoniens mais elle décrit très mal le comportement à faible taux de cisaillement et les paramètres (K) et (n) n'ont pas d'interprétation claire en termes de paramètres microscopiques.

Les limites de ce type de loi interviennent lorsque le rhéogramme présente deux régions newtoniennes :

- Une viscosité infinie aux faibles valeurs du taux de cisaillement (notée μ_0)
- Une viscosité nulle pour les fortes valeurs du taux de cisaillement (notée μ_∞)

Ces comportements rhéologiques particuliers sont ajustés par des relations à trois ou quatre paramètres. (modèle de Carreau). Ce modèle comporte trois paramètres, l'indice de comportement n , le temps caractéristique λ et la viscosité apparente pour un gradient de

vitesse nul, s'écrit :

$$\mu_a = \frac{\mu_0}{(1 + \lambda^2 \cdot \dot{\gamma}^2)^s} \quad (4.4)$$

avec : $s = \frac{n-1}{2}$, paramètre de Carreau avec n indice de comportement fluide et λ temps caractéristique.

Le rhéogramme de la plupart des fluides à comportement pseudoplastique possèdent une ou deux régions où la viscosité apparente est indépendante de la vitesse de cisaillement. Ces deux zones de variations correspondent aux valeurs de $\dot{\gamma}$ très faibles (souvent inférieures à 10^{-2} s^{-1}) et très élevées (parfois supérieures à 10^8 s^{-1}). Ces deux régions, dites première et deuxième région newtonienne, sont caractérisées respectivement par les coefficients de viscosité μ_0 et μ_∞ . Les exemples courants de fluides rhéofluidifiants sont fréquents chez les fluides alimentaires : émulsions peu chargées, suspensions, dispersions sont les yaourts, certaines crèmes et pommades cosmétiques, certains gels d'amidon, plusieurs types de peintures, le sang, jus de fruits concentrés, moutarde, purée de fruits, concentré de protéines, solutions de gommes....

2- Les fluides rhéoépaississants (ou dilatants)

Le comportement rhéoépaississant (encore appelé dilatant) est défini par un rhéogramme dont la concavité est tournée vers le haut : le liquide devient plus visqueux et donc plus «épais» lorsque le cisaillement croît. La loi de comportement est similaire à celle d'un fluide rhéofluidifiant représentée par la loi d'Ostwald de Waele sauf que dans ce cas l'indice d'écoulement $n > 1$. Pour les polymères, n varie entre 0 et 1 (1 étant le cas newtonien).

Le modèle de la loi de puissance peut être utilisé pour des fluides comme le caoutchouc, la colle, les polymères ou certains liquides biologiques pour un écoulement isotherme.

Des modèles plus sophistiqués comme la loi de puissance généralisée (ou de second degré) avec ou sans seuil, le modèle de carreau, etc., peuvent permettre une meilleure approximation de la viscosité suivant le matériau. On voit avec la loi de puissance, et aussi avec les autres lois, que la viscosité diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement. Cela implique en particulier que l'écoulement d'un fluide non newtonien entre deux plaques ne présente pas un profil parabolique comme pour un fluide newtonien, mais un profil plus aplati.

Ce sont des fluides dont la viscosité croît avec le taux de cisaillement. Le caractère rhéoépaississant est beaucoup plus rarement observé que le caractère rhéofluidifiant. Toutefois certaines suspensions concentrées (amidon de maïs par exemple) et le sable mouillé ont un comportement rhéoépaississant. Un fluide peut être rhéoépaississant pour une certaine gamme de taux de cisaillement, et rhéofluidifiant. L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la Fig. 3.2. Le rhéoépaississement a été observé pour la première fois par le phénomène de dilatance mis en évidence par l'expérience de Reynolds en 1885. Depuis, différentes théories ont été développées pour expliquer le phénomène de rhéoépaississement. Actuellement on pense que le rhéoépaississement est dû à la formation temporaire d'agrégats de particules sous cisaillement dont les conditions d'apparition peuvent différer suivant le type de suspensions. On utilise une loi puissance pour les représenter avec un exposant $n > 1$, qui est d'autant plus grand que le matériau s'écarte du comportement newtonien

Il existe un certain nombre de fluides (liquides), surtout dans le domaine agroalimentaire, qui ont des comportements non newtoniens, c'est à dire qu'il n'existe pas de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement τ et le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$. Dans ce cas, la viscosité dynamique μ dépend non seulement des propriétés thermodynamiques du fluide, comme pour les fluides newtoniens, mais elle dépend également de la viscosité dynamique apparente μ_a défini par :

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (4.5)$$

Si $\mu_a = 0$, le fluide se comporte comme un fluide parfait.

Comportement rare chez les fluides alimentaires : suspensions à concentration élevée (> 50%)
Exemples: empois d'amidon, huiles polymériques

Dans la plupart des cas, la connaissance d'une loi générale liant les contraintes τ aux vitesses de cisaillement $\dot{\gamma}$ est trop complexe pour être explicitée. On est alors amené à utiliser des lois approchées appelées lois de comportement. Ces lois qui sont d'origine expérimentales, ne sont valables que dans le domaine pour lequel elles ont été établies et ne doivent pas être extrapolées.

Pour certains fluides visqueux incompressibles en écoulement de cisaillement pur, on peut les classer soit dans la catégorie des « fluides de Bingham » soit dans la catégorie des « fluides d'Ostwald ».

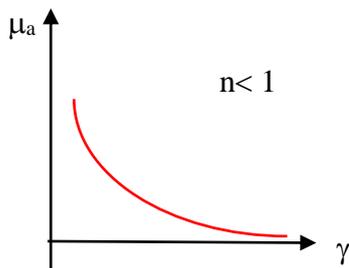


Figure 4.2. Fluide rhéofluidifiant

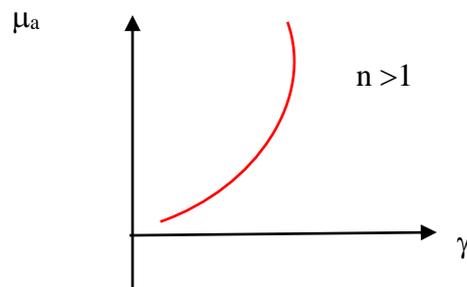
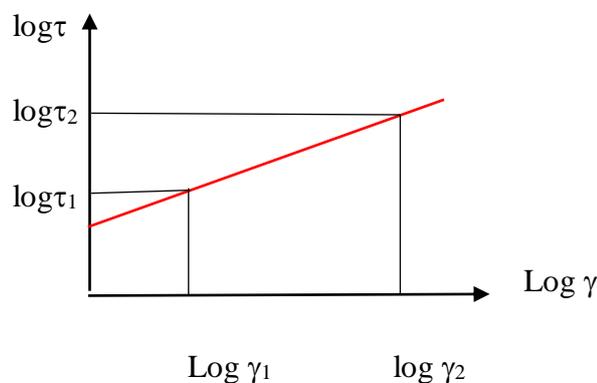


Figure 4.3. Fluide rhéoépaississant

Quand on se réfère à la loi de puissance, on préfère tracer les rhéogrammes expérimentaux en coordonnées log-log, car dans cette représentation les droites de la loi de puissance nous permet d'écrire en effet. La loi de puissance permet d'évaluer l'exposant n et la constante K .

On peut écrire cette loi sous forme logarithmique : $\log \tau = \log K + n \log \gamma$ qui est de la forme : $y = B + Ax$



La pente de la droite expérimentale permet de déterminer l'exposant n

$$n = \frac{\log \tau_2 - \log \tau_1}{\log \gamma_2 - \log \gamma_1} \quad (4.6)$$

La constante K est donné par le point d'intersection de la courbe d'écoulement avec l'axe correspondant à $\log \gamma = 1$

c) Fluides non newtoniens au comportement indépendant du temps de cisaillement avec contrainte critique

1. Fluides plastiques ou fluides à contrainte critique

Ces fluides ne s'écoulent qu'à partir d'une certaine contrainte, dite contrainte seuil. En dessous de celle-ci, ils se comportent comme des solides et au-delà ils s'écoulent comme un fluide newtonien ou rhéofluidifiant. Cette propriété se rencontre dans certaines solutions de polymères et suspensions très concentrées, et dans la vie courante avec le dentifrice, le yaourt, le ketchup ou encore les argiles (laponite et bentonite par exemple) et les boues de forage. Ce comportement peut être interprété par la présence d'agrégats dans le matériau ou de gels qui subsistent jusqu'à la contrainte seuil. Pour une suspension concentrée, un réseau d'interactions peut en effet exister et doit être brisé pour provoquer l'écoulement de la suspension. L'existence du seuil d'écoulement est controversée par certains auteurs. Plusieurs modèles existent pour décrire le comportement rhéologique d'un fluide à seuil. La représentation la plus simple est le modèle de Bingham (1922).

L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la Fig. 3.3. Le matériau ne commence qu'à s'écouler qu'au-delà du seuil et présente ensuite un comportement newtonien.

✓ Fluide plastique idéal ou fluide de Bingham

L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la Fig. 3.3. Le matériau ne commence qu'à s'écouler qu'au-delà du seuil et présente ensuite un comportement newtonien.

Un régime proportionnel existe entre la vitesse de cisaillement et la contrainte de cisaillement.

Il est défini par la loi de comportement suivante :

$$\tau = \tau_c + \mu_p \left(\frac{du}{dy} \right) = \tau_c + \mu_p (\dot{\gamma}) \quad (4.7)$$

Où τ_c est la contrainte minimale appelée aussi « contrainte seuil ou contrainte critique » provoquant l'écoulement et μ_p est la viscosité plastique. Au-delà du seuil d'écoulement τ_c , ils se comportent comme des liquides newtoniens, toute augmentation de τ se traduit par une augmentation proportionnelle de $\dot{\gamma}$

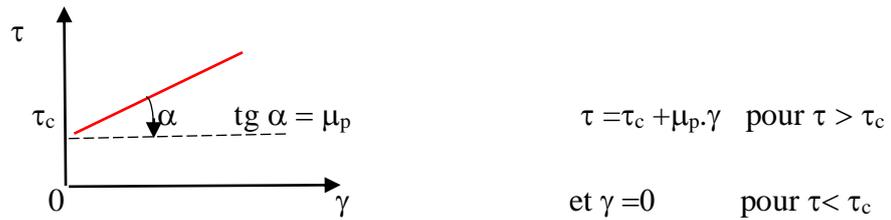


Fig. 4.4. Fluide de Bingham

✓ **Fluide de Herschel- Bulkley**

Les matériaux présentant un comportement non newtonien rhéofluidifiant au-delà du seuil peuvent être décrit par la relation d'Herschel-Bulkley (1926) :

$$\tau = \tau_c + K \left(\frac{du}{dy} \right)^n = \tau_c + K (\dot{\gamma})^n \quad (4.8)$$

✓ **Fluide de Casson**

Ce type de fluide ne présente pas un comportement newtonien au-delà du seuil d'écoulement c'est-à-dire que la courbe d'écoulement n'est pas linéaire. Casson a proposé pour ce type de fluide une loi rhéologique, qui est la suivante :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_c} + \sqrt{\mu_c} \cdot \sqrt{\dot{\gamma}} \quad (4.9)$$

Ce type de fluide est dit aussi fluide plastique non idéal

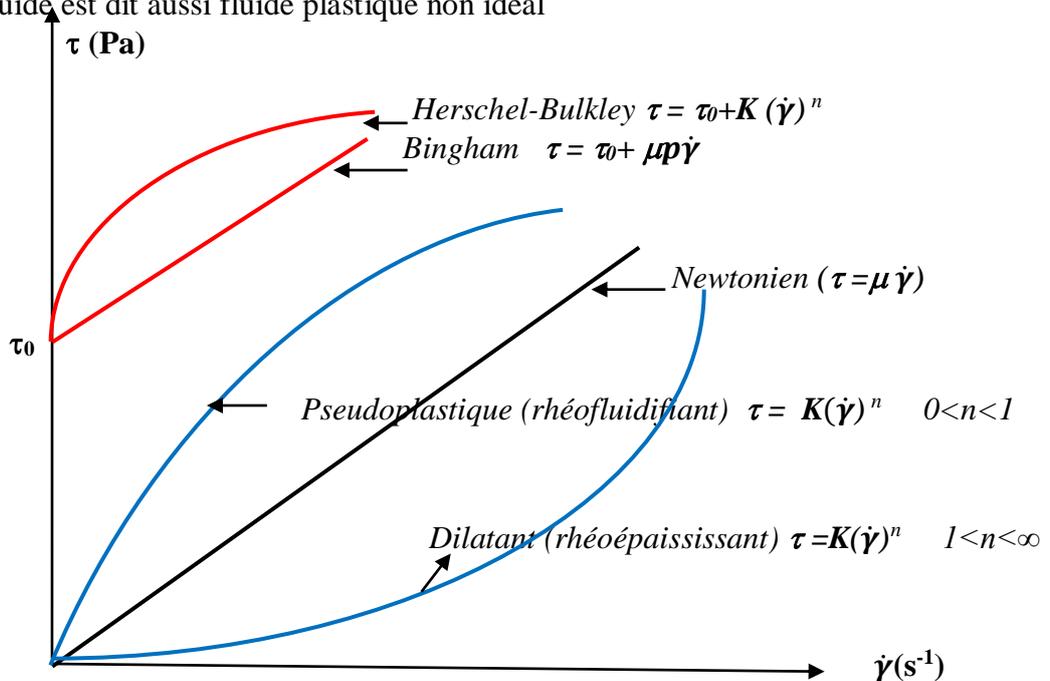


Figure 4.5. Rhéogramme des fluides à comportement indépendant du temps

Tableau 4.1 : Paramètres rhéologiques de l'équation rhéologique d'état

Types	n	τ_0	Exemples
Newtonien	1	0	Eau, jus de fruit, lait, huile
Rhéofluidifiant	$0 < n < 1$	0	Compote de pomme, purée de banane, jus d'orange concentré
Rhéopaisissant	$1 < n < \infty$	0	Miel (certains types), solution à 40% d'amidon natif
Plastique de Bingham	1	> 0	Dentifrice, purée de tomates
Herchel-Bulkley	$0 < n < \infty$	> 0	Pate de poisson, mouts de raisin

4.3. Fluides au comportement dépendant du temps

Dans l'étude du comportement des précédents fluides ; les modifications de leur structure interne sont très rapides, c'est pour cela que le temps n'intervient pas de façon apparente dans les équations d'écoulement, mais si ces déformations sont suffisamment lentes la viscosité apparente mesurée dépendra du temps. Alors on dit que ces fluides ont un comportement dépendant du temps

Lorsqu'il y a désorganisation de structure par cisaillement, on a un fluide thixotrope s'il y a organisation de structure, un fluide rhéopexe.

a) Fluides thixotropes

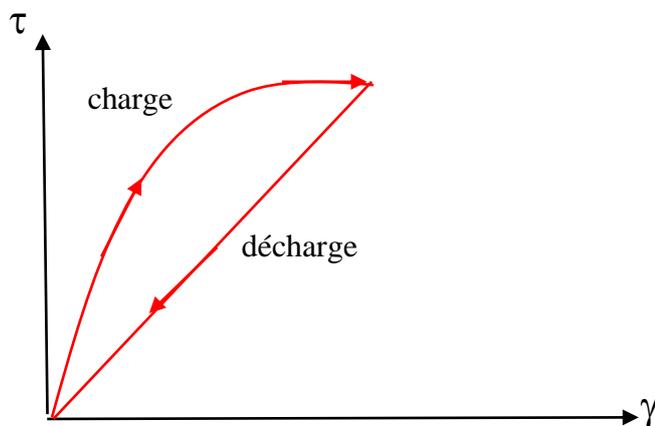
Si ce fluide est soumis à un cisaillement après une période de repos sa structure se désorganise peu à peu et sa viscosité apparente décroît avec le temps. Au fur et à mesure que le nombre de liaisons détruites augmente, la vitesse de décroissance de la viscosité apparente diminue et la structure se tend à se réorganiser, donc la thixotropie est un phénomène réversible au repos, la structure détruite se reforme graduellement

Si on trace la courbe d'écoulement en augmentant puis en diminuant la vitesse de cisaillement, on obtient un cycle d'hystérésis.

Exemple : le phénomène d'hystérésis :

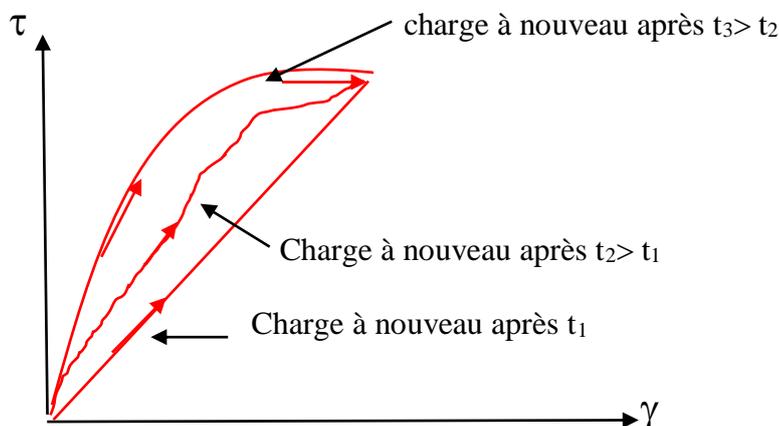
On trace un rhéogramme $\tau = f(\gamma)$ en faisant croître puis décroître régulièrement γ afin de revenir à la valeur initiale. On réalise ce qu'on appelle une " charge " puis une " décharge ".

Si on applique des valeurs de vitesse de cisaillement assez fortes pendant assez longtemps, on obtient le diagramme suivant : la structure a été modifiée durablement lors de la charge et le comportement du produit est affecté (rhéogramme de décharge différent, liquide globalement moins visqueux)



Pour certains corps, si après ce cycle de charge et décharge, on laisse au repos pendant un temps assez long, la structure se réorganise et si on recommence une charge, on obtient le premier rhéogramme à nouveau.

Ainsi, sur les expériences suivantes, on voit que si le temps de repos est supérieur ou égal à t_3 on a retrouvé le comportement rhéologique du produit avant toute charge. On dit alors que le fluide est thixotrope.



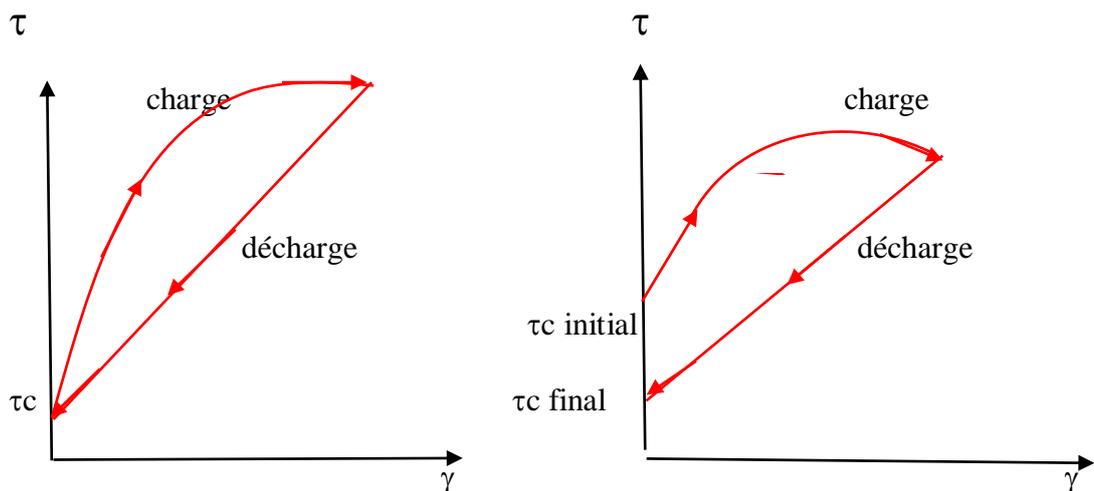
b) Fluides anti- thixotropes (rhéopectes)

Un fluide est thixotrope si, sa viscosité, à vitesse de cisaillement constante, diminue au cours du temps à condition que ce phénomène soit réversible.

Le comportement thixotrope concerne les corps fluidifiants et les corps plastiques (plus rarement les épaississants).

Pour les corps plastiques, on peut avoir au cours de la modification de structure, un changement de contrainte seuil ou pas.

Si un fluide rhéopexique est soumis à un cisaillement, sa structure s'organise, il devient plus visqueux en fonction du temps c'est-à-dire sa viscosité apparente croît avec le temps. La rhéopexie est un phénomène extrêmement complexe



5. Fluides viscoélastiques linéaires

Un fluide viscoélastique est un fluide qui possède à la fois des propriétés visqueuses et élastiques. Les matériaux viscoélastiques, parmi lesquels se trouvent les polymères à l'état fondu, manifestent un comportement intermédiaire entre celui d'un solide élastique et celui d'un fluide newtonien. L'emploi d'analogies mécaniques permet de déterminer commodément la contribution visqueuse ou élastique intervenant dans le modèle d'un corps viscoélastique. Pour simplifier la résolution des problèmes de viscoélasticité, des analogies formelles sont également employées.

Le comportement des matériaux viscoélastiques varie en fonction du temps : au début et après leur mise sous contrainte, ils réagissent comme des solides élastiques. Ensuite, ils deviennent de plus en plus visqueux pour avoir enfin le comportement des fluides newtoniens.

Un fluide viscoélastique se trouve à l'interface du fluide visqueux et du solide élastique. Ces fluides ont un comportement rhéologique qui peut être décrit par une équation du type (modèle simple de Maxwell)

Modèles viscoélastiques élémentaires

Le comportement d'un corps viscoélastique linéaire est intermédiaire entre le comportement d'un solide élastique parfait et d'un liquide visqueux newtonien. Nous allons voir les propriétés de ces deux matériaux et construire des modèles de comportement intermédiaire.

a) Solide élastique parfait :

L'expression de la loi de Hooke donne les informations suivantes :

- Dès qu'une contrainte est appliquée, instantanément une déformation prend naissance proportionnelle à la contrainte. Inversement, si la contrainte est ramenée à zéro immédiatement la déformation s'annule. On dit que la déformation est élastique instantanée et récupérable.
- Le comportement est bien un comportement solide, soumis à une contrainte constante, le matériau atteint instantanément un état d'équilibre.
- La fonction fluage qui caractérise la réponse du matériau a pour expression :

$$f(t) = J \text{ pour } t \geq 0$$

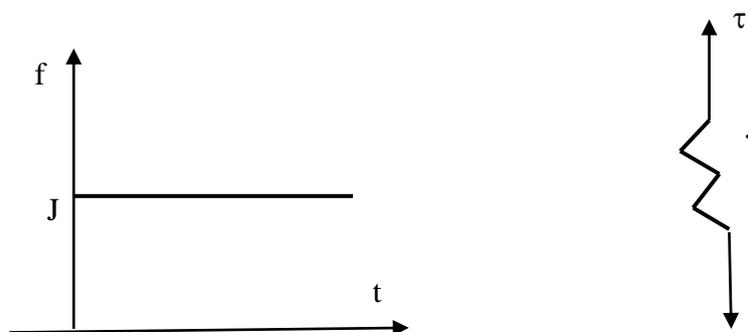


Figure 5.1. Solide parfaitement élastique

Un solide élastique parfait sera symbolisée en rhéologie par un ressort de coefficient de complaisance élastique J . La figure représente schématiquement un solide élastique parfait de coefficient J est soumis à une contrainte τ .

b) Liquide visqueux newtonien :

L'équation rhéologique du liquide visqueux newtonien est l'équation de newton qui s'écrit :

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\tau(t)}{\eta}$$

En tenant compte des conditions initiales : $t=0$; $\tau(t)=0$; $\varepsilon(t)=0$

Cette équation s'intègre immédiatement

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t \tau(t).dt$$

On remarque que :

- Le liquide visqueux newtonien se souvient de toutes les contraintes qui lui ont été imposées dans le passé : l'expression de $\varepsilon(t)$ dépend de toutes les valeurs prises par la contrainte τ de zéro (0) à t
- Si la contrainte est ramenée à zéro à un certain temps, la déformation demeure constante et égale à la valeur qu'elle possédait au même instant ; la déformation est irrécupérable.
- Le comportement est bien un comportement liquide, soumis à une constante τ_0 , la

déformation $\varepsilon(t) = \frac{\tau_0}{\eta} . t$

croît linéairement avec le temps le matériau s'écoule indéfiniment.

Expression de la fonction de fluage caractérisant le matériau est obtenue en remplaçant, dans l'équation de la déformation $\varepsilon(t)$, t_0 par l'unité

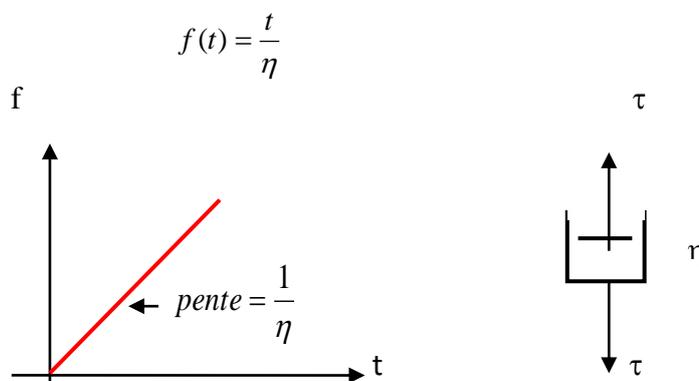


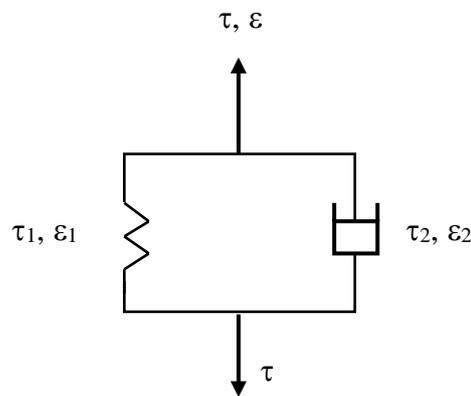
Figure 5.2. Comportement rhéologique d'un liquide visqueux newtonien

Le liquide visqueux newtonien sera symbolisé en rhéologie par un amortisseur de coefficient de viscosité η

c) Association parallèle :
Solide de Kelvin Voigt

Il est constitué par l'association en parallèle d'un ressort de complaisance élastique J et d'un amortisseur de coefficient de viscosité η . Soient ε_1 et ε_2 les déformations, τ_1 et τ_2 les contraintes, respectivement dans le ressort et dans l'amortisseur.

Dans une association parallèle, la contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contraintes imposées à chaque branche, la déformation subie est identique dans chaque branche et égale à la déformation subie par l'ensemble.



$$\tau_1 = \frac{1}{J} \cdot \varepsilon_1 \quad \tau_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

D'après les lois d'association en parallèle, la déformation et la contrainte totales ε et τ s'écrivent : $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ $\tau = \tau_1 + \tau_2$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{J} \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{J} \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Telle est l'équation rhéologique du solide Kelvin-Voigt

Pour déterminer la fonction de fluage $f(t)$ de ce modèle, il suffit de remplacer τ par l'unité et résoudre l'équation différentielle

$$\eta \frac{df}{dt} + \frac{1}{J} f = 1$$

Après séparation des variables, il vient :

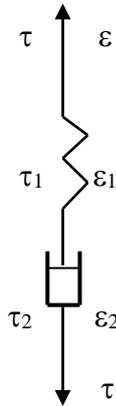
$$f(t) = J - J \exp\left(-\frac{t}{\eta J}\right) = J \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)\right]$$

Avec $\theta = \eta \cdot J$ temps de retard

d) Association en série :
Liquide de Maxwell

Il est constitué par l'association en série d'un ressort de complaisance élastique J et d'un amortisseur de coefficient de viscosité η

Dans une association en série, la contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément, la déformation totale est la somme des déformations subies par chaque élément.



Soient ε_1 et ε_2 les déformations, τ_1 et τ_2 les contraintes, respectivement dans le ressort et dans l'amortisseur.

$$\tau_1 = \frac{1}{J} \cdot \varepsilon_1 \qquad \tau_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

D'après les lois d'association en série, la déformation et la contrainte totales ε et τ s'écrivent :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \tau = \tau_1 = \tau_2$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} = J \frac{d\tau_1}{dt} + \frac{1}{\eta} \tau_2 = J \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\eta} \tau$$

Telle est l'équation rhéologique du liquide de Maxwell, sa résolution est immédiate, tenant compte des conditions initiales:

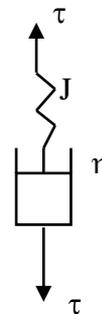
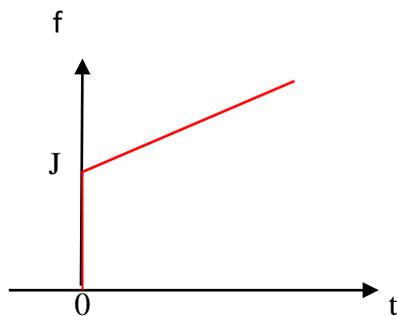
$$t < 0 ; \quad \tau = 0 ; \quad \varepsilon = 0$$

$$\int_0^\varepsilon d\varepsilon = J \int_0^\tau d\tau + \frac{1}{\eta} \int_0^t d(\tau) dt$$

$$\text{Donc : } \varepsilon(t) = J \cdot \tau(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t \tau(t) \cdot d(t)$$

Déformation qui conduit à la fonction de fluage :

$$f(t) = J + \frac{t}{\eta}$$



Le graphe ci-dessus $f(t)$ comprend deux parties :

- Une variation instantanée à l'instant $t = 0$, d'amplitude J : elle décrit l'élasticité instantanée du liquide de Maxwell (ressort du modèle)
- Cette variation instantanée est suivie par une variation linéaire de pente $1/\eta$ qui correspond au comportement liquide visqueux newtonien du liquide Maxwell (amortisseur du modèle)

En résumé, un liquide de Maxwell est un liquide visqueux possédant une élasticité instantanée.

Ces lois d'association permettent de définir deux modèles très importants : le solide de Kelvin-Voigt et le liquide de Maxwell

$t=0$ élasticité instantanée

$t>0$ écoulement visqueux

Comportement viscoélastique général :

- Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Il est constitué par l'association en série d'un liquide de Maxwell et d'un certain nombre de solides de Kelvin-Voigt. Les valeurs des différents paramètres (η_0, J_0, η_1, J_1) et le nombre de solides de Kelvin-Voigt. On pourrait écrire l'équation rhéologique de ce modèle rhéologique, la résoudre et en déduire la fonction de fluage. La fonction de fluage d'une association en série est égale à la somme des fonctions fluage des différents éléments, on peut écrire la fonction du modèle général :

$$f(t) = J_0 + \frac{t}{\eta} + \sum_{i=1}^n J_i (1 - e^{-t/\theta_i})$$

(5.1)

Avec $\theta_i = \eta_i \cdot J_i$ temps de retard du ième solide de Kelvin-Voigt et n le nombre de solide de Kelvin -Voigt

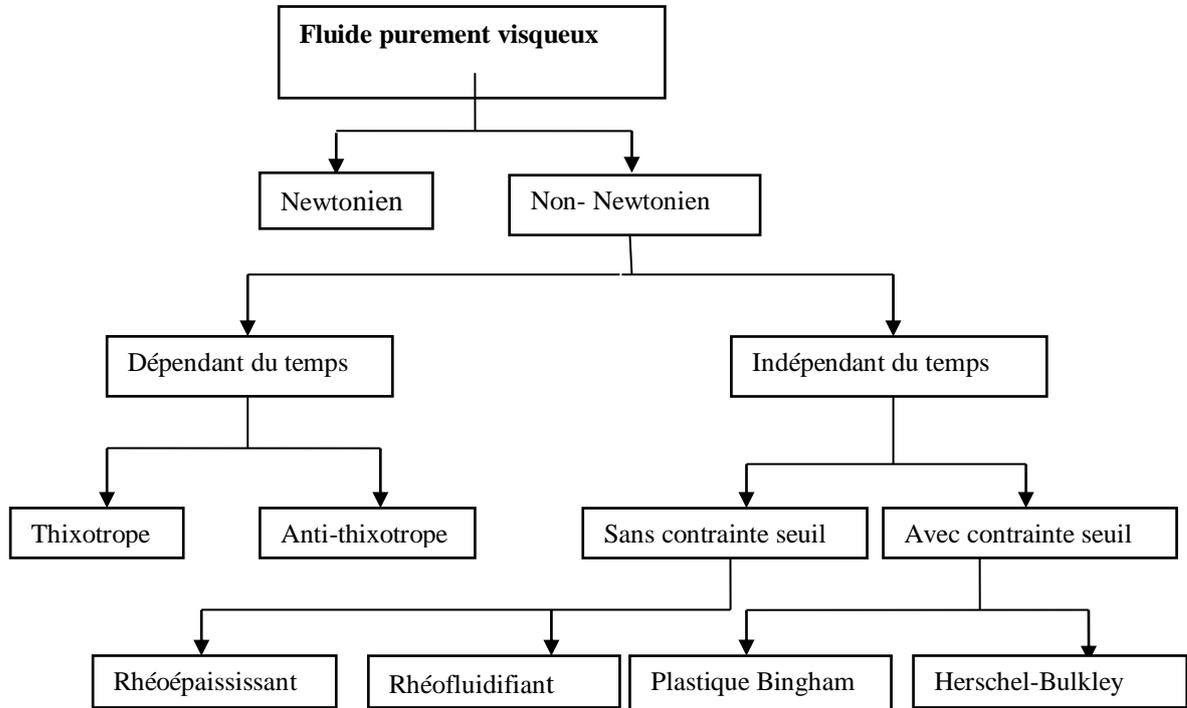


Figure 5.3. Classification des comportements rhéologiques

Rhéogrammes

Ce sont des courbes qui traduiront le comportement mécanique des fluides sous l'effet de cisaillements.

Le comportement d'un fluide peut être différent si on change la façon de le cisailer (si la contrainte appliquée varie, il peut en son sein se déformer différemment, sa viscosité peut donc varier).

Les relations entre contrainte de cisaillement, vitesse de cisaillement, viscosité sont donc autant de fonctions d'état du fluide.

Exemples : $\tau = f(\dot{\gamma})$ $\mu = f(\dot{\gamma})$

Leur représentation graphique est appelée rhéogramme. Elles sont déterminées grâce à des rhéomètres.

Le tableau récapitule les différents comportements rhéologiques susceptibles d'être rencontrés du plus simple : le fluide parfait au plus complexe

Tableau 5.1 : Classification des matériaux en fonction de leur comportement en cisaillement simple (Midoux, 1993)

Constatation expérimentale	Expression formelle de τ	Dénomination
$\dot{\gamma} = 0$	$\tau = 0$	Fluide non visqueux (parfait ou pascalien)
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma}$	Fluide visqueux newtonien
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = \mu \cdot (\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$	Fluide visqueux non newtonien indépendant du temps
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = \tau(\dot{\gamma}, t)$	Fluide inélastique dépendant du temps (thixotrope, rhéopexe)
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = \tau(\dot{\gamma} , \dot{\gamma}, t)$	Fluide viscoélastique (linéaire ou non)

6. Principes et description des principaux rhéomètres à régime permanent

- Rhéomètre capillaire (Poiseuille)

Nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

Fluide incompressible

Écoulement laminaire

Symétrie de révolution autour de l'axe $r = 0$

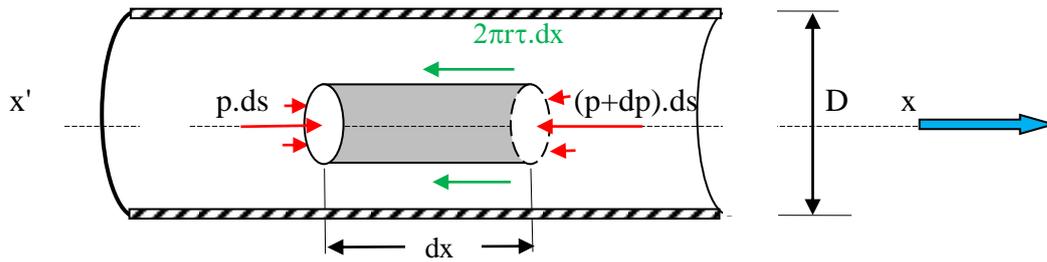
Écoulement permanent

Écoulement induit par gradient de pression constant ΔP établi entre l'entrée et la sortie de la conduite de longueur L .

a) Répartition des vitesses à l'intérieur d'une conduite horizontale de section constante

Soit l'axe (O x) confondu avec l'axe d'une conduite de diamètre $D=2.R$, (O y) et (O z) sont quelconques perpendiculaire à (O x). Figure (4.5)

L'écoulement étant laminaire, les lignes de courant sont, par raison de symétrie parallèle à (Ox). Les composantes v et w de la vitesse sont nulles : $v = w = 0$; ainsi l'écoulement étant aussi stationnaire.



A l'équilibre suivant l'axe $x'x$ la somme des forces est nulle

Les forces qui s'exercent sur cet élément de fluide sont les : forces de pression à l'amont et à l'aval sur les surfaces latérales et les force de frottement due à la viscosité du fluide. On a aussi supposé que l'effet de la pesanteur est négligeable devant la variation de pression dans la direction des x qui est horizontal.

$$\begin{aligned}
 p \cdot \pi r^2 - (p + dp) \cdot \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r \, dx &= 0 \implies -dp \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r \, dx = 0 \\
 -dp \cdot r - \tau \cdot 2 \, dx &= 0 \\
 \implies \tau &= -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2} \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Evidemment τ est égal à 0 au centre ($r = 0$) et sur la paroi ($r = R$) $\tau = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{R}{2}$

La contrainte de cisaillement $\tau(r)$ entre deux couches de fluide en mouvement est donnée par

$$\text{l'équation de Newton : } \tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} \quad \text{puisque } dy = -dr \quad (6.2)$$

L'égalité de (4.7) et (4.8) on obtient : $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} = -\mu \cdot \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$

D'où : $\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mu} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right)$ en intégrant cette équation par rapport à r , on obtient :

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} + C \quad (6.3)$$

Pour déterminer la constante C , on sait que pour $r = R$ (adhérence du fluide à la paroi), la

vitesse est nulle. $u(r) = 0 = \frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} + C$

$C = -\frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx}$ on remplace la constante C dans l'équation (4.3)

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} - \frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$$

Par suite la répartition de la vitesse à l'intérieur du cylindre est donnée par l'expression suivante :

On pose : $a = -\frac{dp}{dx}$

$$u(r) = \frac{a}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (6.4)$$

En posant $r = 0$ (axe de la conduite) :

$$u(r) = \frac{aR^2}{4\mu} = u_{\max} \quad (6.5)$$

$$u(r) = \frac{a}{4\mu} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = u_{\max} \cdot R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Expression qui représente un parabolôide de révolution ayant son sommet sur l'axe de la conduite. Figure (4.5).

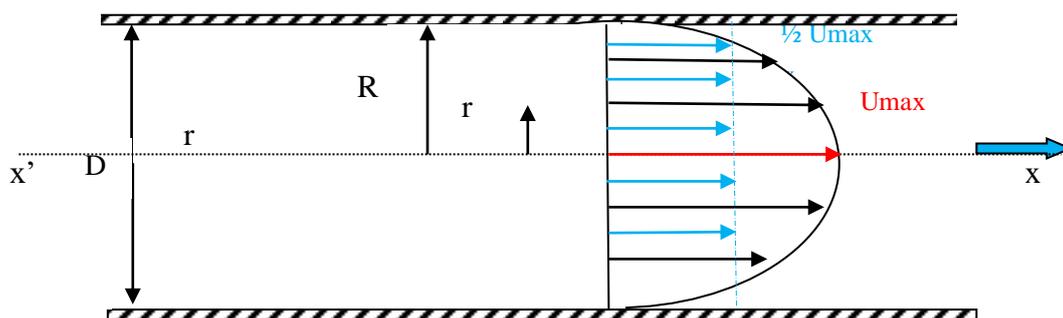


Figure 6.1. Répartition des vitesses dans la conduite circulaire

De même on peut déterminer la répartition des pressions le long du tube :

On a $\frac{dP_m}{dx} = -a$ (6.6)

Soit : $p^*(x) = -ax + p_0^*$

p_0^* : Étant une constante d'intégration.

La pression motrice décroît donc linéairement le long du tube, tout en restant constante dans une même section droite.

On peut écrire : $p_1^* - p_2^* = aL$

L : La distance entre les deux points 1 et 2 sur lesquels s'exerce la pression

$\Delta p_m = p_{m1} - p_{m2}$ est la différence de pression motrice entre l'entrée et la sortie.

Ou encore : $a = \frac{\Delta P_m}{L}$ (4.12)

b) Calcul du débit volumique : formule de Poiseuille

Le débit du fluide est donné par l'intégrale (débit en volume) :

$$q_v = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{2\pi a}{4\mu} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi a R^4}{8\mu} = \frac{\pi a D^4}{128\mu}$$

En remplaçant a par sa valeur : $a = \frac{\Delta p_m}{L}$, il vient :

$$q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \Delta P_m = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta P_m \quad (6.7)$$

Cette dernière formule traduit la loi de Hagen Poiseuille : le débit est proportionnel à la différence des pressions motrices appliquées aux extrémités du tube, et à la puissance 4 de son diamètre.

c) Vitesse débitante (vitesse moyenne) :

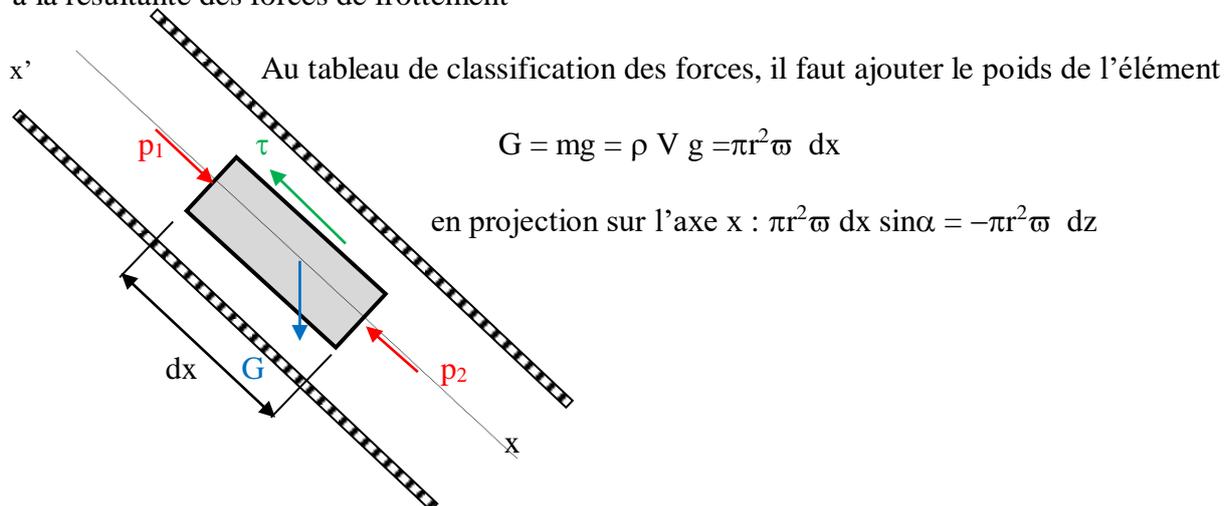
La vitesse débitante est par définition la vitesse moyenne calculée sur la section droite :

$$u_{moy} = \frac{q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\pi a R^4}{8\mu} \quad u_{moy} = \frac{a R^2}{8\mu} = \frac{u_{max}}{2} = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{R^2}{8\mu} \quad (6.8)$$

La vitesse maximale de l'écoulement laminaire dans un tube circulaire est exactement le double de la vitesse débitante.

d) Cas d'une conduite inclinée de section droite

Soit une canalisation inclinée, dans laquelle existe un écoulement. Etudions cet écoulement dans le cas d'un régime permanent. Pour cela, isolons une particule de fluide. Afin de respecter la géométrie du problème, la particule de fluide est cylindrique, de rayon « r » et de longueur « dx ». Cette particule de fluide est soumise : • aux forces pressantes • à son poids • à la résultante des forces de frottement



L'équation d'équilibre devient alors :

$$p.\pi r^2 - (p + dp).\pi r^2 - \tau.2\pi r dx - \pi r^2 \varpi dz = 0$$

$$\pi r^2 (dp + \varpi dz) = -2\pi r dx \tau \implies r (dp + \varpi dz) = -2 dx \tau$$

$$\tau = -\frac{r}{2} \cdot \frac{(dp + \varpi dz)}{dx} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dp_m}{dx}$$

(6.9)

- Viscosimètre à chute de bille :

Principe :

On lâche une bille de masse volumique ρ_s , et de rayon R dans un liquide visqueux de viscosité μ , et de masse volumique ρ ; elle chute sous l'effet combiné :

- de la force de pesanteur :

$$P = \rho_s V \cdot g = \rho_s \left(\frac{4}{3} \pi R^3\right) g$$

- de la Poussée d'Archimède :

$$F_v = \rho V \cdot g = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3\right) g$$

- de la force de frottement :

$$F_f = 6.\pi.R.\mu.V \text{ (Loi de Stokes)}$$

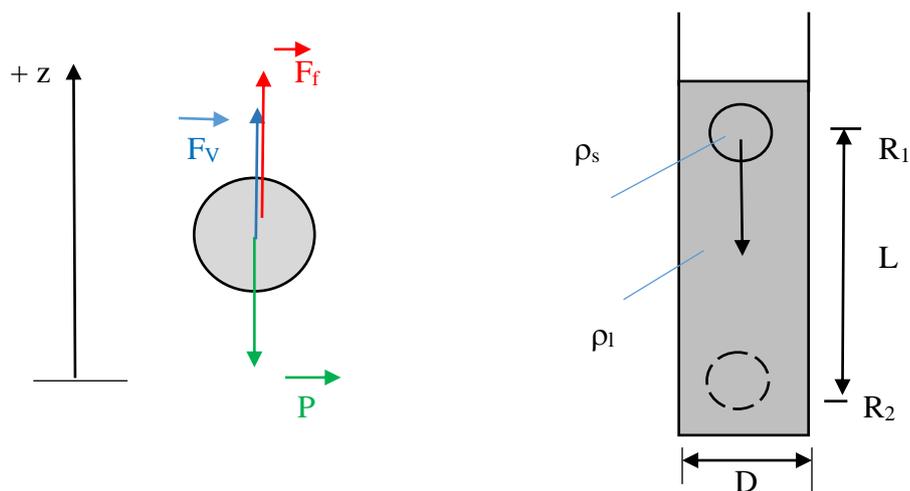


Figure 6.2. Schéma d'un viscosimètre chute de billes

La force de frottement apparaît lorsqu'il y a mouvement et augmente jusqu'à ce qu'on atteigne une vitesse limite v_{lim} pour laquelle la force de frottement et la Poussée d'Archimède compensent exactement la force de pesanteur :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_V + \vec{F}_f = \vec{0}$$

sur l'axe Oz : $P = F_V + F_f$ $P - F_V = F_f$

$$(\rho_s - \rho) \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) g = 6\pi R \mu V_{lim}$$

$$\mu = \frac{2 R^2 g}{9 V_{lim}} (\rho_s - \rho) = \frac{1}{18} \frac{D^2}{V} \cdot g (\rho_s - \rho_L) \tag{6.10}$$

Si : $V = \frac{L}{\Delta t}$ alors : $\mu = \frac{g \cdot \Delta t}{18 \cdot L} \cdot D^2 \cdot (\rho_s - \rho_L)$ (6.11)

On mesure donc v_{lim} et ρ pour déterminer la viscosité dynamique.

- Viscosimètres empiriques :

On détermine la viscosité relative ou " empirique ", ou encore "conventionnelle", c'est à dire la viscosité comparée le plus souvent à celle de l'eau. L'écoulement se fait dans des conditions bien déterminées, à température constante. Le degré de viscosité Engler (°E), utilisé en France et en Allemagne. A l'aide du viscosimètre Engler, on définit le degré Engler qui est le rapport du temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm³ du liquide à étudier à travers un orifice calibré, au temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm³ d'eau à travers le même orifice (ce dernier temps est de 51 secondes pour l'appareil Engler).

Remarque : il existe d'autres façons d'exprimer la viscosité. Par exemple en Degré Engler (sans dimension), c'est le rapport :

$$\frac{\nu}{\nu_{eau}} = \frac{t}{t_{eau}} \tag{6.12}$$

Où t et t_{eau} sont des temps d'écoulement du fluide et de l'eau respectivement mesurés dans les mêmes conditions expérimentales.

L'appareil de Barbey permet de mesurer le volume de liquide écoulé en un temps fixe à travers un tube immergé dans un thermostat, sous une pression constante. Le degré de fluidité du liquide est égal au volume écoulé dans ces conditions, en une heure. Avec les appareils

Saybolt (Etats-Unis) ou Redwood (Grande-Bretagne), on note directement en secondes le temps d'écoulement de 60 et de 50 cm³ du produit. Ces mesures ont une précision de l'ordre de ±5% Elles conviennent que pour des fluides visqueux (ν=20 cSt). Il existe des relations approchées entre la viscosité cinématique et les viscosités empiriques. D'après la formule d'Ubbelohde

$$\nu = 7.32^{\circ}E - \frac{6.31}{^{\circ}E}$$

(6.13)

Avec : ν la viscosité cinématique en cSt et °E : Degré d'Engler

Lorsque n > 60cSt, on peut admettre la relation approchée $\nu = 7.58^{\circ}E$

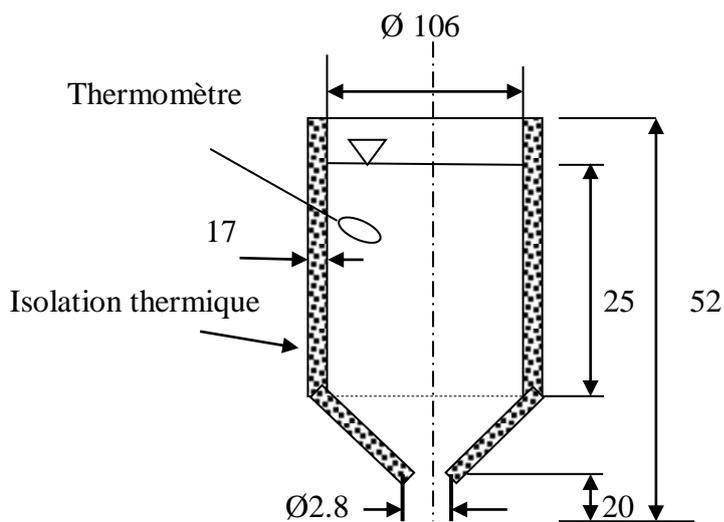


Figure 6.3. Schéma d'un viscosimètre Engler

7. Principes et description des principaux rhéomètres à régime transitoire

- Rhéomètres à cylindres rotatifs (de Couette)
- Rhéomètres à cylindres rotatifs (de Couette)

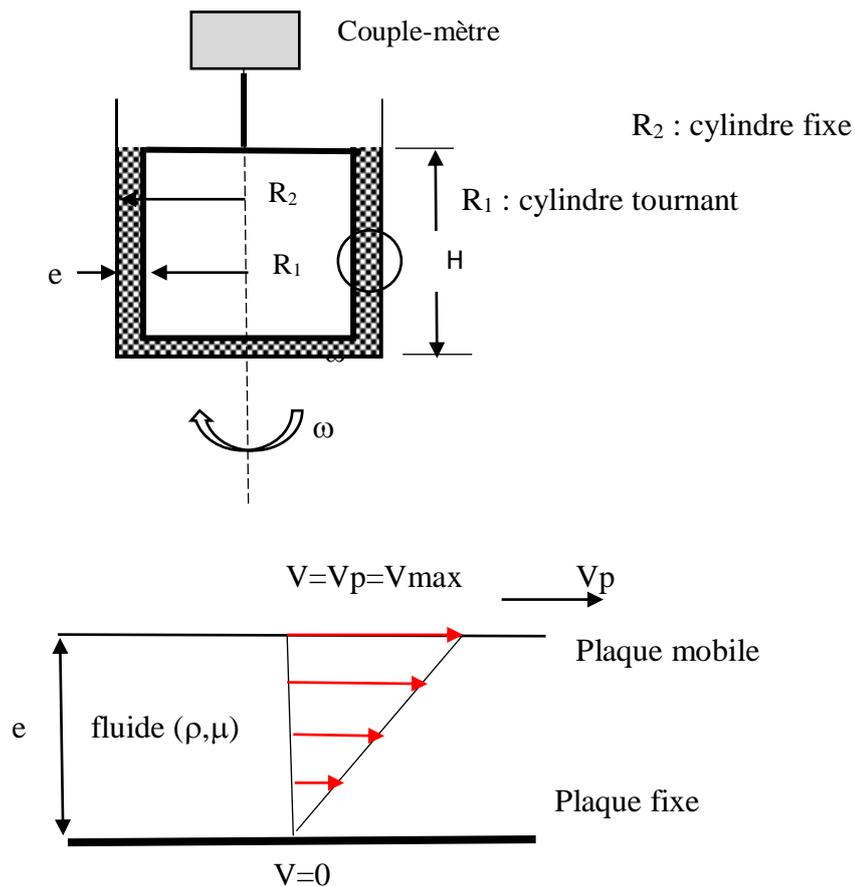


Figure 7.1. Schéma d'un rhéomètre à cylindre rotatif

Un rhéomètre permet d'accéder à la connaissance de la contrainte de cisaillement et à la vitesse de déformation au sein d'un échantillon ceci grâce à d'autres grandeurs directement mesurables.

- la contrainte de cisaillement τ est calculée à partir du moment du couple appliqué pour avoir rotation

Le moment des forces de frottement F_f qui s'exercent à la surface du mobile en rotation est :

$$MF_f / \Delta = F_f \cdot R_1 = \tau \cdot 2\pi \cdot R_1^2 \cdot H = M_{résistant}$$

Pour continuer à faire tourner le mobile à vitesse constante, il faut que le moteur exerce un moment qui le compense : $M_{résistant} = M_{moteur} = M$

Donc :
$$\tau = \frac{M}{2\pi.R_1^2.H} \quad (7.1)$$

La vitesse de déformation γ est calculée à partir de la vitesse de rotation du mobile

$$\gamma = \frac{dV}{dr} = r \frac{d\omega}{dr} \quad (7.2)$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{M.e.60}{2\pi.R_1^3.H.2\pi.N} = \frac{60.M.e}{4\pi^2.R_1^3.N.H} = \frac{15.M.e}{\pi^2.N.H.R_1^3}$$

$$\mu = K.M \quad K : \text{constante de l'appareil}$$

$$K = \frac{15.e}{\pi^2.N.H.R_1^3} \quad e = R_2 - R_1 \quad (\text{espace annulaire})$$

Remarque :

Si l'entrefer entre le cylindre et le contenant n'est pas petit, ces relations simples ne sont plus vérifiées et la détermination de γ est beaucoup plus délicate.

- **Rhéomètres rotatifs type cône/plan**

Le principe de mesure se compose d'une plaque plane horizontale, dite plateau et d'un cône renversé dont le sommet est mis en contact du plateau. L'angle entre la génératrice du cône et l'horizontale du plateau est très faible ($1^\circ < \psi < 4^\circ$) ; l'échantillon fluide est disposé entre l'espace ménagé entre le cône et le plateau.

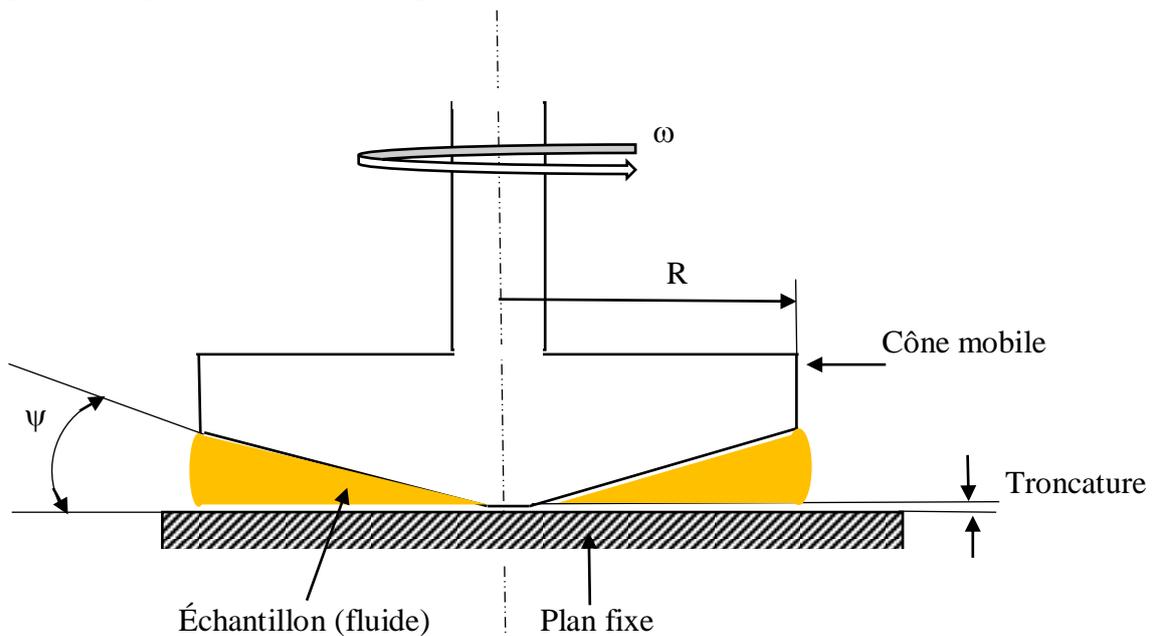


Figure 7.2. Schéma d'un rhéomètre cône- plan

Pour les angles de cônes ψ très petits, on peut considérer que la contrainte τ et la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ déterminées par le mouvement relatif des couches fluides, sont constantes dans la totalité de l'échantillon. La contrainte de cisaillement s'écrit alors :

$$M = Fr \quad F = \tau.S \quad S = 2\pi.r.dr$$

$$M = 2\pi.\tau \int_0^R r^2.dr = \frac{2}{3}\pi.R^3.\tau \quad \tau = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

Si le cône tourne à une vitesse constante de N (tours par seconde), la vitesse linéaire au rayon r est $2\pi rN$, la hauteur de l'espace entre le cône et le plateau au rayon r est $r \operatorname{tg}\psi$. La grandeur de la vitesse de cisaillement au rayon r est donc :

$$\dot{\gamma} = \frac{2\pi.r.N}{r \operatorname{tg}\psi} = \frac{2\pi.N}{\operatorname{tg}\psi}$$

La vitesse de cisaillement est évidemment constante dans la plage $0 \leq r \leq R$. Si ψ est très petit, $\operatorname{tg}\psi \approx \psi$. Alors :

$$\dot{\gamma} = \frac{2\pi.N}{\psi} \quad (7.3)$$

8. Ecoulements de fluides non newtoniens dans les conduites cylindriques

a) Fluides en loi de puissance

1) Introduction :

Parmi les modèles mathématiques utilisés pour modéliser les fluides non newtoniens, le modèle le plus répandu dans la pratique et le plus utilisé dans la littérature c'est le modèle de loi de puissance (modèle d'Ostwald) défini par la relation :

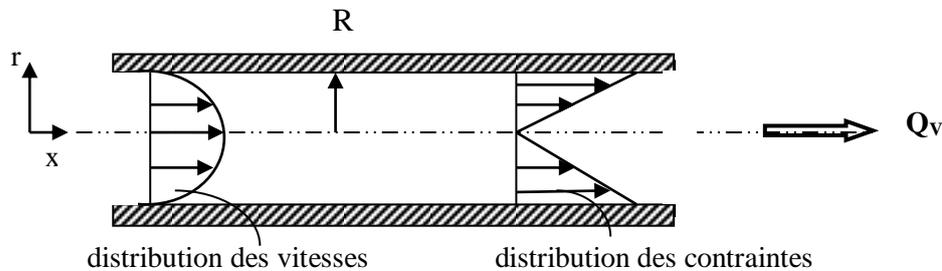
$$\tau = K(\dot{\gamma})^n = K\left(\frac{du}{dr}\right)^n \quad (8.1)$$

2) Profil des vitesses : $u(r)$

La relation liant la contrainte de cisaillement τ à la perte de pression Δp établie pour les fluides newtoniens reste valable

$$\tau = \frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta p}{L} \quad (8.2)$$

Considérant un fluide non newtonien obéissant à la loi de puissance en écoulement dans une conduite horizontale cylindrique. La contrainte de cisaillement est liée au gradient de vitesse par la relation (1)



Pour un fluide Pseudoplastique (rhéofluidifiant), $n < 1$, la contrainte de cisaillement a pour expression :

$$\tau = K(\dot{\gamma})^n = K\left(\frac{du}{dr}\right)^n$$

K : consistance du fluide (Pa.sⁿ)

n : indice de comportement rhéologique (-)

N.B : Pour un fluide newtonien (K=μ et n=1)

On en déduit qu'après égalisation des équations (1) et (2)

$$\tau = K(\dot{\gamma})^n = K\left(\frac{du}{dr}\right)^n = \frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta p}{L} \Rightarrow \left(\frac{du}{dr}\right)^n = \frac{r}{2K} \cdot \left(\frac{\Delta p}{L}\right) \Rightarrow \left(\frac{du}{dr}\right) = \left(\frac{r}{2K} \cdot \frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n}$$

$$\left(\frac{du}{dr}\right) = \left(\frac{1}{2K} \cdot \frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n} \cdot r^{1/n} \quad \text{on pose : } \left(\frac{1}{2K} \cdot \frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n} = \lambda$$

$$\frac{du}{dr} = \lambda \cdot r^{1/n} \Rightarrow du = \lambda \cdot r^{1/n} dr \quad u(r) = \int_0^R \lambda \cdot r^{1/n} dr$$

$$u(r) = \lambda \cdot \left[\frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} \right] + C = \lambda \frac{n}{n+1} \cdot r^{\frac{n+1}{n}} + C$$

Pour déterminer la constante C on fixe la condition aux limites à la paroi (r=R) : u(r) = 0

$$0 = \lambda \frac{n}{n+1} \cdot r^{\frac{n+1}{n}} + C \Rightarrow C = -\lambda \frac{n}{n+1} \cdot r^{\frac{n+1}{n}}$$

$$u(r) = \lambda \cdot \frac{n}{n+1} \cdot r^{\frac{n+1}{n}} - \lambda \frac{n}{n+1} \cdot R^{\frac{n+1}{n}} = \lambda \frac{n}{n+1} \left[r^{\frac{n+1}{n}} - R^{\frac{n+1}{n}} \right] = -\lambda \frac{n}{n+1} \left[R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

$$u(r) = -\left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (8.3)$$

$$u(r) = -\left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R^{\frac{n+1}{n}}} \right] \quad u(r) = \underbrace{-\left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}}}_{u_{\max}} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

r=0 u(r) = u_{max}

$$u(r) = -u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad u_{\max} = \left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \quad (8.4)$$

NB : cas newtonien : n=1 et K=μ on retrouve :

$$u(r) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} (R^2 - r^2)$$

3) Calcul du débit volumique

En écoulement permanent, le débit du fluide Pseudoplastique (rhéofluidifiant) qui circule dans une conduite cylindrique a pour expression :

$$Q_v = \int_0^R u(r).dS = \int_0^R u(r).2\pi.r.dr = 2\pi \int_0^R \left[-\left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} (R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}}) \right] r.dr$$

$$Q_v = 2\pi \left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \int_0^R \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R^{\frac{n+1}{n}}} \right] r.dr = 2\pi \left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^{\frac{3n+1}{n}}}{\frac{3n+1}{n} R^{\frac{n+1}{n}}} \right]_0^R$$

$$Q_V = 2\pi \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^{\frac{3n+1}{n}}}{\frac{3n+1}{n} R^{\frac{n+1}{n}}} \right]$$

$$\frac{R^{\frac{3n+1}{n}}}{R^{\frac{n+1}{n}}} = R^{\frac{3n+1}{n} - \frac{n+1}{n}} = R^2$$

$$Q_V = 2\pi \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{\frac{3n+1}{n}} \right]$$

$$Q_V = 2\pi \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \cdot R^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} \right] = 2\pi \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{3n+1}{n}} \underbrace{\left[\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} \right]}_1$$

$$Q_V = \cancel{2}\pi \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{1/n} \frac{n}{\cancel{n+1}} R^{\frac{3n+1}{n}} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{2}(3n+1)} = \pi \frac{n}{3n+1} R^{\frac{3n+1}{n}} \cdot \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$Q_V = \pi \frac{n}{3n+1} R^{\frac{3n+1}{n}} \cdot \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (8.5)$$

NB : cas newtonien : n=1 et K=μ on retrouve

$$Q_V = \frac{\pi}{8\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} R^4 = \frac{\pi}{128\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} D^4$$

4) Calcul de la perte de charge linéaire

Elle est directement déduite de l'expression (5) :

$$Q_V = \pi \frac{n}{3n+1} R^{\frac{3n+1}{n}} \cdot \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \frac{4K}{D} \left[\frac{8}{\pi} \cdot \frac{3n+1}{n} \cdot \frac{Q_V}{D^3} \right]^n \quad (8.6)$$

5) Vitesse volumique moyenne

$$\text{Par définition : } Q_V = S \cdot \bar{u} \Rightarrow \bar{u} = \frac{Q_V}{S} = \frac{Q_V}{\pi R^2} = \frac{\pi \frac{n}{3n+1} R^{\frac{3n+1}{n}} \cdot \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{\frac{1}{n}}}{\pi R^2} = \frac{n}{3n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left(\frac{\Delta p}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (8.7)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{\max} &= \left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \\
 \bar{u} &= \left(\frac{\Delta p/L}{2K}\right)^{1/n} \frac{n}{3n+1} R^{\frac{n+1}{n}}
 \end{aligned} \right\} \implies \frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{n}{3n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{3n+1}$$

$$\implies \bar{u} = \frac{n+1}{3n+1} u_{\max} \quad u_{\max} = \frac{3n+1}{n+1} \bar{u}$$

NB : cas newtonien : (n=1) $\bar{u} = \frac{1}{2} u_{\max}$

6) Viscosité équivalente : μ_e

Par définition la viscosité apparente est la viscosité d'un fluide newtonien qui s'écoulait avec le même débit dans la même conduite d'un fluide non newtonien produit la même perte de charge en régime laminaire.

Pour un fluide newtonien : $\frac{\Delta p}{L} = \frac{128\mu_e}{\pi D^4} Q_v = 32 \frac{\bar{u}}{D^2} \cdot \mu_e$

$$\frac{\Delta p}{L} = 32 \frac{\bar{u}}{D^2} \cdot \mu_e = \frac{4}{D} \cdot K \left[\frac{2(3n+1)}{n} \frac{\bar{u}}{D} \right]^n \implies \mu_e = K \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \cdot \left(\frac{8\bar{u}}{D} \right)^{n-1} \quad (8.8)$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{4K}{D} \left[\frac{8}{\pi} \frac{(3n+1)}{n} \frac{Q_v}{D^3} \right]^n \quad Q_v = \bar{u} \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{4K}{D} \left[\frac{8}{\pi} \frac{(3n+1)}{n} \frac{\bar{u} \cdot \pi D^2}{4D^3} \right]^n = \frac{4K}{D} \left[\frac{2(3n+1)}{n} \frac{\bar{u}}{D} \right]^n$$

a) Fluides plastiques (type Bingham)

Pour un fluide de Bingham la contrainte de cisaillement a pour expression :

$$\tau = \tau_c + \mu_p \dot{\gamma} = \tau_c + \mu_p \left(\frac{du}{dr} \right) \quad (8.9)$$

τ_c : tension limite de cisaillement (Pa)

μ_p : viscosité plastique (Pa.s)

D'après la définition de la contrainte τ :

$$\tau = \frac{r}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \quad (8.10)$$

En égalisant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\tau = \tau_c + \mu_p \left(\frac{du}{dr} \right) = \frac{r}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \implies \mu_p \left(\frac{du}{dr} \right) = \frac{r}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) - \tau_c \quad (8.11)$$

D'après l'équation (2) :

$$r_c = \frac{2\tau_c}{\Delta p / L}$$

1) Calcul de la vitesse maximale :

L'expression (3) peut encore s'écrire :

$$\mu_p du = \frac{\Delta p}{2L} r dr - \tau_c dr \quad (8.12)$$

En considérant la pression statique constante au niveau d'une même section, on peut intégrer aisément cette équation différentielle entre la distance r_c de l'axe de la conduite où le fluide est près en masse et la paroi de la conduite où la vitesse du fluide est nulle.

$$\int_{u_0}^0 du = \frac{1}{2\mu_p} \frac{\Delta p}{L} \int_{r_c}^R r dr - \frac{\tau_c}{\mu_p} \int_{r_c}^R dr$$

On en déduit :

$$u_0 - 0 = \frac{1}{2\mu_p} \frac{\Delta p}{L} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_c}^R - \frac{\tau_c}{\mu_p} [r]_{r_c}^R = \frac{1}{4\mu_p} \frac{\Delta p}{L} (R^2 - r_c^2) - \frac{\tau_c}{\mu_p} (R - r_c)$$

On remplace :

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{2\tau_c}{r_c}$$

$$u_0 = \frac{1}{4\mu_p} \frac{2\tau_c}{r_c} (R^2 - r_c^2) - \frac{\tau_c}{\mu_p} (R - r_c) = (R - r_c) \left[\frac{\tau_c}{2\mu_p r_c} (R + r_c) - \frac{\tau_c}{\mu_p} \right] = \frac{\tau_c}{\mu_p} (R - r_c) \left[\frac{R + r_c}{2r_c} - 1 \right]$$

$$u_0 = \frac{\tau_c}{2\mu_p r_c} (R - r_c)^2$$

(8.13)

2) Vitesse du fluide à une distance r de l'axe de la conduite telle que : $r_c < r < R$
 Elle est obtenue en intégrant l'équation différentielle entre les bornes r_c et r

$$\int_{u_0}^u du = \frac{1}{2\mu_p} \frac{\Delta p}{L} \int_{r_c}^r r dr - \frac{\tau_c}{\mu_p} \int_{r_c}^r dr$$

$$u - u_0 = \frac{1}{4\mu_p} \frac{\Delta p}{L} (r^2 - r_c^2) - \frac{\tau_c}{\mu_p} (r - r_c)$$

Soit en remplaçant

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{2\tau_c}{r_c}$$

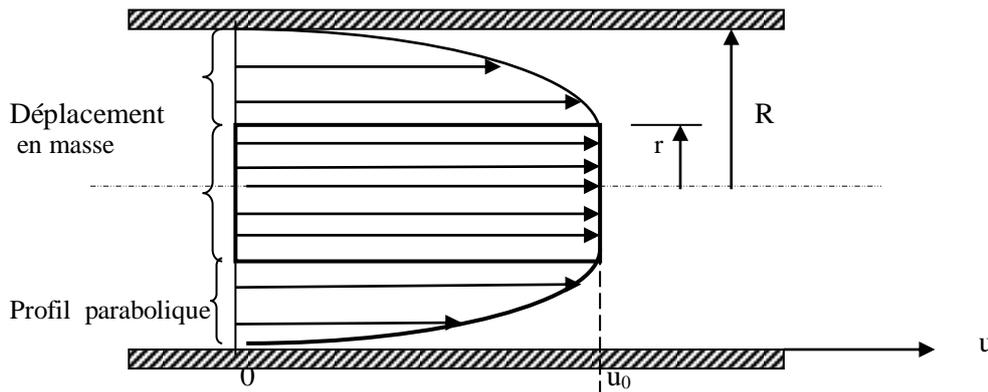
$$u - u_0 = \frac{1}{4\mu_p} \frac{2\tau_c}{r_c} (r^2 - r_c^2) - \frac{\tau_c}{\mu_p} (r - r_c)$$

$$u - u_0 = \frac{1}{4\mu_p} \frac{2\tau_c}{r_c} (r - r_c)(r + r_c) - \frac{\tau_c}{\mu_p} (r - r_c) = \frac{\tau_c}{\mu_p} (r - r_c) \left[\frac{r + r_c}{2r_c} - 1 \right]$$

$$u = u_0 + \frac{\tau_c}{4\mu_p} (r - r_c)^2$$

(8.14)

3) Profil des vitesses d'un écoulement de fluide de Bingham dans une conduite cylindrique



Entre le cylindre de rayon r_c et le cylindre de rayon R , le profil des vitesses du fluide est parabolique
 La vitesse du fluide est nulle à la paroi de la conduite, maximale à la distance r_c .

4) Calcul du débit de fluide :

En écoulement permanent, le débit du fluide de Bingham dans une conduite cylindrique a pour expression :

$$Q_v = \pi r_c^2 u_0 + \int_{r_c}^R 2\pi r u(r) dr$$

Soit :

$$Q_v = \pi r_c^2 u_0 + 2\pi \int_{r_c}^R \left[u_0 - \frac{\tau_c}{2\mu_p r_c} (r - r_c)^2 \right] r dr$$

On obtient :

$$Q_v = \frac{\pi \cdot \tau_c}{4\mu_p r_c} (R - r_c)^2 \left[R^2 + \frac{r_c 2R}{3} + \frac{r_c^2}{3} \right]$$

Soit :

$$\tau_c = 2r_c \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \implies r_c = \frac{2\tau_c}{\frac{\Delta p}{L}}$$

$$Q_v = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\mu_p L} \left(R - \frac{2\tau_c}{\Delta p/L} \right)^2 \left[R^2 + \frac{2D}{3} \frac{\tau_c}{\Delta p/L} + \frac{4}{3} \frac{\tau_c^2}{(\Delta p/L)^2} \right] \quad (8.15)$$

Cas newtonien : $\tau_0 = 0$ $\mu_p = \mu$

$$Q_v = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\mu_p L} R^4$$

9. Rhéologie des polymères et suspensions

Cas des solutions ou dispersions :

Lorsqu'on introduit un soluté dans un solvant, les interactions moléculaires augmentent et la viscosité également.

Afin de différencier les influences du soluté (ou de la phase dispersée) et du solvant, on définit quelques termes :

Viscosité relative :

$$\mu_R = \frac{\mu}{\mu_{\text{solvant}}}$$

(9.1)

C'est le rapport des viscosités dynamiques de la solution et du solvant.

Viscosité spécifique :

$$\mu_{sp} = \frac{\mu - \mu_{\text{solvant}}}{\mu_{\text{solvant}}} = \mu_R - 1$$

(9.2)

C'est l'augmentation relative de la viscosité à cause du soluté, elle dépend de la concentration du soluté.

Viscosité réduite :

$$\mu_{Red} = \frac{\mu_{sp}}{C} \quad (9.3)$$

où C est la concentration en soluté. Unité usuelle : C en g/cm³ donc μ_{Red} en g⁻¹·cm³.

Viscosité intrinsèque

$$[\mu_{Red}] = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\mu_{Red}}{C} = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\mu_{Red}}{C}$$

C'est une caractéristique de la nature de la solution

Intérêt :

- pour les suspensions et les émulsions, la viscosité intrinsèque peut nous renseigner sur la forme des particules. Par exemple, pour des particules sphériques, on trouve $[\mu_{Red}] = 2.5 / \rho$ (ρ masse volumique), la relation est autre pour une suspension de particules ellipsoïdales ou en bâtonnets.
- pour les solutions de macromolécules, la viscosité intrinsèque permet de déterminer la masse molaire moyenne selon la loi de Mark Houwink :

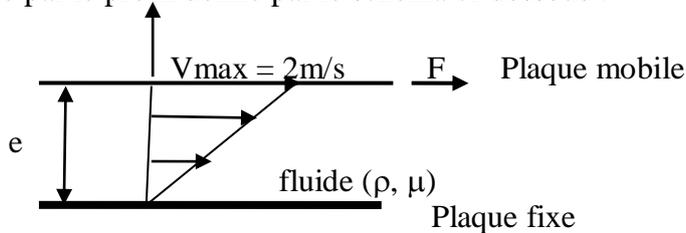
$$[\mu_{Red}] = K.M^\alpha \quad (9.4)$$

Où K est une constante pour un couple polymère /solvant donné.

10. Exercices corrigés

Exercice 1 :

Un écoulement d'un liquide de viscosité dynamique $\mu = 0.02 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, sur une plaque plane fixe, est caractérisé par le profil donné par le schéma ci-dessous :



Si l'épaisseur de l'écoulement est $e = 5 \text{ cm}$, déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement :

1- à la paroi ? 2- à une distance de 2 cm de la paroi ? 3- à une distance e de la paroi ?

Solution :

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) \quad u(y) = ay + b \quad a, b ?$$

$$y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad b = 0 \\ y = e = 5 \text{ cm} \quad u = 2 \text{ m/s} \end{array} \right. \quad a = \frac{200}{5} = 40$$

$$u(y) = 40y \Rightarrow \frac{du}{dy} = 40$$

1) à la paroi : $y = 0$

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = 0.02 \times 40 = 0.8 \text{ N/m}^2$$

2) à une distance $y = 2 \text{ cm}$

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = 0.02 \times 40 = 0.8 \text{ N/m}^2$$

3) à une distance $y = e = 5 \text{ cm}$

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = 0.02 \times 40 = 0.8 \text{ N/m}^2$$

Exercice 2 :

Le profil de vitesse pour un écoulement plan d'un liquide, est donné par : $u(y) = 3y^3 + 2y^2$

Si la viscosité dynamique du liquide est $\mu = 0.035 \text{ Pa.s}$

Calculer la valeur de la tension de cisaillement à la paroi et à 30 cm de celle-ci ?

Solution :

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) \quad \frac{du}{dy} = 9y^2 + 4y$$

A la paroi ($y = 0$)

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = \mu(9y^2 + 4y) = 0.035.(9.0^2 + 4.0) = 0$$

A 30cm de celle-ci ($y=0.3$)

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = \mu(9y^2 + 4y) = 0.035.(9.0,3^2 + 4.0,3) = 0.07035 \text{ N/m}^2$$

Exercice 3 :

Le profil de vitesses pour un écoulement plan sur une plaque plane fixe, d'un liquide de viscosité dynamique $\mu = 10^{-2} \text{ Pa.s}$, est donné par : $u(y) = y^3 + 2y^2 + 5y$

Déterminer la valeur de la tension de cisaillement à 10 cm de la paroi ?

Solution :

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = \mu(3y^2 + 4y + 5)$$

τ à $y = 0.1 \text{ m}$

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = 10^{-2} . (3.0,1^2 + 4.0,1 + 5) = 5,43.10^{-2} \text{ N / m}^2$$

Exercice 4 :

Soit un tube cylindrique de 3 km de long, de 10 cm de diamètre, parcouru par un liquide de viscosité dynamique $\mu = 0,4$ Poise.

On suppose que la distribution des vitesses dans la section droite du tube est donnée par l'équation parabolique $u = 10y - y^2$ en unité CGS, u étant la vitesse à la distance y de la paroi

Calculer :

- la force de frottement visqueux par unité de surface contre la paroi ?
- la force de frottement visqueux par unité de surface à 2 cm de la paroi ?
- la force totale de frottement s'exerçant sur le tube ?

Solution :

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = 0,4 \cdot (10 - 2y)$$

contre la paroi ($y = 0$)

$$\tau = 4 \text{ dynes.cm}^{-2}$$

à $y = 2\text{cm}$

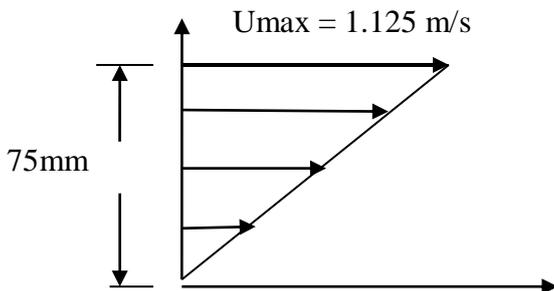
$$\tau = 0,4(10 - 2 \cdot 2) = 2,4 \text{ dynes.cm}^{-2}$$

$$F = \tau \cdot S = \tau \cdot 2\pi R \cdot L$$

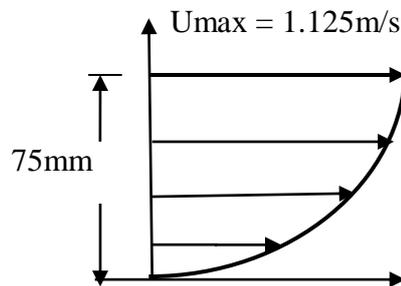
$$F = 4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^5 = 3,77 \cdot 10^7 \text{ dynes}$$

Exercice 5:

Un écoulement d'un liquide de viscosité dynamique $\mu = 4,88 \cdot 10^{-2}$ Pa.s et de densité 0.9, sur une plaque plane fixe, est caractérisé par les profils donnés par le schéma ci-dessous :



a) répartition linéaire



b) répartition parabolique

- 1) Calculer le gradient de vitesse pour les deux répartition de vitesses
- 2) Calculer la contrainte tangentielle τ à la paroi et aux points situés à 25mm, 50mm et 75mm

Solution :

1. Calcul du gradient de vitesse : (du/dy)

a) **répartition linéaire : $u(y) = ay + b$** détermination de a et b par les conditions aux limites

$$\begin{aligned}y = 0 & \quad u(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = 0} \\y = 75 \text{ mm} & \quad u(y) = u_{\max} = 1.125 \text{ m/s} \\1.125 = a(0.075) & \quad a = 1.125/0.075 = \mathbf{15} \\u(y) = 15 y & \quad \mathbf{du/dy = 15 s^{-1}}\end{aligned}$$

b) **répartition parabolique : $u(y) = ay^2 + by + c$**

$$\frac{du}{dy} = 2ay + b \quad \text{Détermination de a, b et c par les conditions aux limites}$$

$$y = 0 \quad u(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c = 0}$$

$$\begin{aligned}y = 75 \text{ mm} & \quad u(y) = u_{\max} = 1.125 \text{ m/s} \\y = 75 \text{ mm} & \quad du/dy = 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{u(y) = ay^2 + by}$$

$$\left. \begin{aligned}1.125 &= a(0.075)^2 + b(0.075) \\0 &= 2a(0.075) + b\end{aligned} \right\} \text{ il faut résoudre ce système d'équations à 2 inconnues}$$

On trouve : $a = -200$ et $b = 30$ $\mathbf{u(y) = -200 y^2 + 30y}$

$$\frac{du}{dy} = -400y + 30$$

2. Calcul de la contrainte tangentielle :

a) répartition linéaire

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right) = 4.88 \cdot 10^{-2} (15) = 0.732 \text{ N / m}^2$$

Puisque le gradient de vitesse est indépendant de y, donc la contrainte tangentielle est constante dans tout le fluide.

a) Répartition parabolique :

y (m)	u(y) m/s	(du/dy) s ⁻¹	τ = μ (du/dy) N/m ²
0	0	30	0.1462 → τ _{max}
0.025	0.625	20	0.0976
0.50	1.000	10	0.0488
0.075	1.125	0	0

Exercice 6:

On utilise un viscosimètre de couette ayant les dimensions suivantes :

r=100mm e= 3mm h= 300mm ω= 100rad/s

Le couple mesuré sur le grand cylindre est C= 8.7 N.cm

Calculer la valeur de la viscosité cinématique du fluide si ρ=10³ kg/m³

Solution :

1. Valeur de la viscosité cinématique :

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{M.e.60}{2\pi.R_1^3.H.2\pi.N} = \frac{60.M.e}{4\pi^2.R_1^3.N.H} = \frac{15.M.e}{\pi^2.N.H.R_1^3} = \frac{15.8,7.10^{-2}.3.10^{-3}}{\pi^2.0,3.(0,1)^3} = 1,36.10^{-3} Pa.s$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1,36.10^{-3}}{10^3} = 1,36.10^{-6} m^2 / s$$

Exercice 7 : Une huile de densité 0.85 s'écoule dans une conduite horizontale de diamètre 5cm et de longueur 300m avec un débit de 1.2 litre par seconde. L'écoulement est supposé laminaire et la perte de charge mesurée est de 21m. Calculer la viscosité dynamique de cette huile et le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclure ?

Solution :

$$Q_v = \frac{\pi}{128.\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \cdot D^4 \Rightarrow \mu = \frac{\pi}{128.Q_v} \cdot \frac{\Delta p}{L} \cdot D^4 = \frac{\pi}{128.Q_v} \cdot \frac{\rho g \Delta H}{L} \cdot D^4$$

$$\mu = \frac{\pi}{128.1,2.10^{-3}} \cdot \frac{850.9,81.21}{300} (0,05)^4 = 0,074 Pa.s$$

$$Re = \frac{V.D.\rho}{\mu} = \frac{4Q_v.D.\rho}{\pi D^2.\mu} = \frac{4Q_v\rho}{\pi D\mu} = \frac{4.1,2.10^{-3}.850}{\pi.0,05.0,074} = 351$$

Re < Rec

donc le régime est laminaire

Exercice 8 : Une huile de pétrole de viscosité $\mu = 4.5 \text{ Po}$ de densité 0.9 s'écoule dans une conduite cylindrique horizontale de diamètre $D = 200 \text{ mm}$. La vitesse sur l'axe est de 4.5 m/s et on suppose l'écoulement laminaire. Calculer dans ces conditions :

La vitesse moyenne de l'écoulement et le débit volumique et massique

Le nombre de Reynolds et la perte de charge par mètre en hauteur d'huile

Solution :

1. Vitesse moyenne : puisque le régime est laminaire

$$V_{\text{moy}} = \frac{V_{\text{max}}}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ m/s}$$

2. Débit volumique :

$$Q_V = S \cdot V_{\text{moy}} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot V_{\text{moy}} = \frac{\pi (0.2)^2}{4} \cdot 2.25 = 0.071 \text{ m}^3 / \text{s}$$

3. Débit massique :

$$Q_m = \rho \cdot Q_V = 900 \cdot 0.071 = 63.6 \text{ kg} / \text{m}^3$$

4. Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{V \cdot D \cdot \rho}{\mu} = \frac{2.25 \cdot 0.2 \cdot 900}{0.45} = 900 \quad Re < 2000 \implies \text{régime laminaire}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{900} = 0.071$$

5. Perte de charge :

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = 0.071 \cdot \frac{1}{0.2} \cdot \frac{(2.25)^2}{2 \cdot 9.81} = 0.092 \text{ m/m}$$

Exercice 9 : Soit un écoulement d'huile de viscosité 0.26 Po traverse une conduite horizontale de longueur 3 m et de diamètre 5 mm . Il est alimenté à une extrémité sous une pression effective de 3 bars. Calculer le débit volumique, le débit massique, la vitesse moyenne et la vitesse maximale.

Solution :

1. Calcul du débit volumique

$$Q_V = \frac{\pi}{128 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \cdot D^4 = \frac{\pi}{128 \cdot 0.026} \cdot \frac{3 \cdot 10^5}{3} \cdot (0.005)^4 = 5.9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{s}$$

2. Calcul du débit massique

$$Q_m = \rho \cdot Q_V = 5.9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{s}$$

3. Calcul de la vitesse moyenne

$$Q_v = S.V \Rightarrow V = \frac{Q_v}{S} = \frac{4Q_v}{\pi D^2} = \frac{4.5,9.10^{-5}}{\pi(5.10^{-3})^2} = 3m.s^{-1}$$

4. Calcul de la vitesse maximale

$$V_{\max} = 3.V = 2.3 = 6m.s^{-1}$$

Exercice 10 :

On pompe de l'huile de lubrification de densité 0.86 dans un tuyau horizontal de 5cm de diamètre intérieur et de 300m de longueur avec un débit de 1.2 litre par seconde. La chute de pression entre les deux extrémités est de 2 bars. Calculer la viscosité de cette huile, et vérifier que le régime est bien laminaire.

Solution :

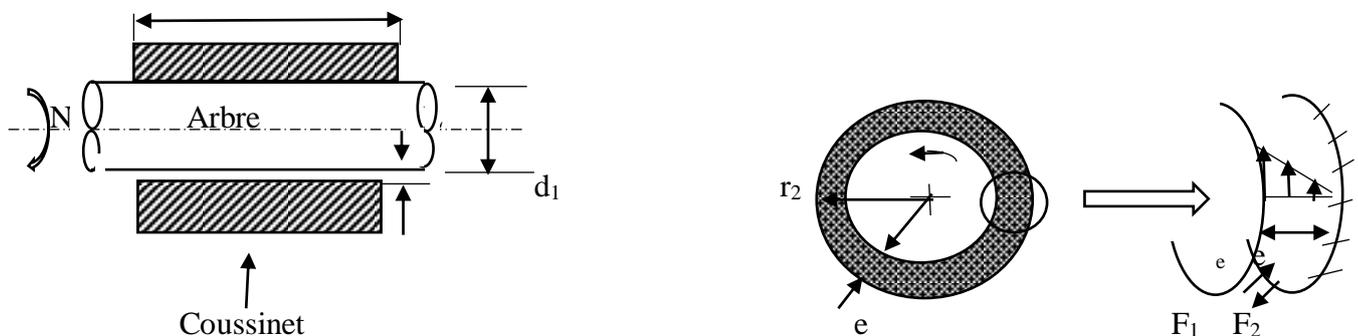
$$Q_v = \frac{\pi}{128.\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} D^4 \implies \mu = \frac{\pi}{129.Q_v} \frac{\Delta p}{L} D^4 = \frac{\pi}{128.1,2.10^{-3}} \cdot \frac{2.10^5}{300} (0.05)^4 = 0.085 \text{ Pa.s}$$

$$Re = \frac{V.D.\rho}{\mu} = \frac{4Q_v D \rho}{\pi D^2 \mu} = \frac{4Q_v \rho}{\pi D \mu} = \frac{4.1,2.10^{-3} . 860}{\pi 0,05 . 0,085} = 310$$

Re < Rec donc régime laminaire

Exercice 11 :

La figure ci-contre représente un palier hydrodynamique, le jeu entre l'arbre et le coussinet est $e = 0.2\text{mm}$ et rempli d'une huile de viscosité $\mu = 7.2 \text{ Po}$. La distribution des vitesses des couches fluide dans le jeu est linéaire. Calculer la puissance causée par le frottement.



Donnés :

$$d_1 = 30\text{cm} \quad e = 0.2\text{mm} \quad N = 200 \text{ rpm} \quad L = 1\text{m}$$

Solution :

$V = r_1 \cdot \omega$: vitesse linéaire de l'arbre

F_1 : force exercée par le plan mobile sur le fluide

F_2 : force résultante exercée par le plan fixe sur le fluide

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{V}{e} = \mu \frac{\omega \cdot r_1}{e} \quad \omega = \frac{2\pi N}{60}$$

$$\tau = \mu \frac{2\pi N \cdot r_1}{60 \cdot e}$$

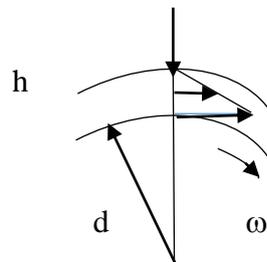
$$F = \tau \cdot S = \mu \frac{2\pi N \cdot r_1}{60 \cdot e} \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot L = \frac{4\pi^2 r_1^2 \mu \cdot L \cdot N}{60 \cdot e}$$

$$M = F_1 \cdot r_1 = \frac{4\pi^2 r_1^3 \cdot \mu \cdot L \cdot N}{60e}$$

$$P = M \cdot \omega = \frac{4\pi^2 r_1^3 \cdot \mu \cdot L \cdot N}{60e} \frac{2\pi \cdot N}{60} = \frac{8 \cdot \pi^3 \cdot r_1^3 \cdot N^2 \cdot L \cdot \mu}{3600 \cdot e}$$

$$P = \frac{8 \cdot \pi^3 \cdot r_1^3 \cdot N^2 \cdot L \cdot \mu}{3600 \cdot e} = \frac{8 \cdot (3,14)^3 (0,15)^3 \cdot (200)^2 \cdot 1,0,72}{3600 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 33486,8W = 33,5kW$$

Exercice 12 : Calculer le moment de frottement entre un pivot de diamètre d et un coussinet. La vitesse angulaire du pivot par rapport au coussinet $\omega=25\text{rad/s}$. La longueur du pivot et du coussinet est $L=5 \cdot 10^{-2}\text{m}$; $d=5 \cdot 10^{-2}\text{m}$; $\mu=1,8 \cdot 10^{-2}\text{Pa}\cdot\text{s}$; $h= 5 \cdot 10^{-5}\text{m}$



Solution :

La force de frottement F_t :

$$F_t = \tau \cdot S = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{V}{h} \cdot S = \mu \frac{V}{h} \pi \cdot d \cdot L$$

S : surface du cylindre de diamètre d et de longueur L : $S = \pi d L$

V : vitesse linéaire du pivot :

$$V = \omega \cdot \frac{d}{2} = \omega \cdot r$$

Le moment de frottement M_t

$$M_t = F_t \cdot \frac{d}{2} = F_t \cdot r = \mu \frac{V}{h} \pi \cdot d \cdot L \cdot \frac{d}{2} = \mu \frac{\omega d/2}{h} \pi \cdot d \cdot L \cdot d/2 = \frac{\pi}{4} \mu \frac{L \omega d^3}{h}$$

$$M_t = \frac{\pi \cdot 1,8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 4,42 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$$

Exercice 13 :

On mesure le temps de chute d'une bille en aluminium de densité $d=2.7$ entre deux graduations d'un viscosimètre à chute de bille.

S'il est rempli d'eau, ce temps est $t_0=40s$ alors qu'il est égal à $43.8s$ dans le plasma sanguin de densité $d_s=1.02$

Quelle est la viscosité du plasma sanguin sachant qu'à 20°C , la viscosité de l'eau est égale à 10^{-3} Pl Le sang étant une suspension de globules rouges supposés sphériques dans le plasma, quel est le rayon moyen des globules rouges sachant que la vitesse de sédimentation est de 4.14mm/h et de densité 1.1

Solution

1) Viscosité du plasma sanguin

A partir de la formule de Stokes, la vitesse de sédimentation est donnée dans l'eau et le plasma sanguin par:

$$\left. \begin{aligned} V_{eau} &= \frac{2r^2(\rho_{bille} - \rho_{eau}) \cdot g}{9 \cdot \mu_{eau}} \\ V_{plasma} &= \frac{2r^2(\rho_{bille} - \rho_{plasma}) \cdot g}{9 \cdot \mu_{plasma}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{plasma}}{V_{eau}} = \frac{(\rho_{bille} - \rho_{plasma})}{(\rho_{bille} - \rho_{eau})} \cdot \frac{\mu_{eau}}{\mu_{plasma}} \quad (1)$$

D'autre part la vitesse de sédimentation est donnée par h est la distance entre les 2 graduations du viscosimètre

$$\left. \begin{aligned} V_{eau} &= \frac{h}{t_{eau}} \\ V_{plasma} &= \frac{h}{t_{plasma}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{plasma}}{V_{eau}} = \frac{t_{eau}}{t_{plasma}} \quad (2)$$

$$\frac{t_{eau}}{t_{plasma}} = \frac{(\rho_{bille} - \rho_{plasma})}{(\rho_{bille} - \rho_{eau})} \cdot \frac{\mu_{eau}}{\mu_{plasma}} \Rightarrow \mu_{plasma} = \frac{(\rho_{bille} - \rho_{plasma})}{(\rho_{bille} - \rho_{eau})} \cdot \frac{t_{plasma}}{t_{eau}} \cdot \mu_{eau}$$

$$\mu_{plasma} = \frac{(2700 - 1020)}{(2700 - 1000)} \cdot \frac{43.8}{40} \cdot 10^{-3} = 1.08 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$$

Exercice 14 :

On donne l'équation d'état rhéologique d'un fluide d'Ostwald : $\tau(\dot{\gamma}) = K(\dot{\gamma})^n$

$K=0.4$ et $n= 0.8$

Calculer la viscosité apparente au gradient de vitesse : $\dot{\gamma} = 40 \text{ 1/s}$

Solution

$$\mu_a = K(\dot{\gamma})^{n-1} = 0.4(40)^{0.8-1} = 0.4(40)^{-0.2} = 0.19 \text{ Pa.s}$$

Exercice 15 :

Soit un fluide non newtonien s'écoulant avec un débit massique de 425 kg/s dans une conduite lisse de 30cm de diamètre, la masse volumique du fluide est de 960 kg/m³ et des relevés expérimentaux effectués dans un viscosimètre à capillaire de 3m de long et de 6.5mm de diamètre ont permis d'établir la relation en régime laminaire :

$$\tau = 3(\dot{\gamma})^{0.3} \Rightarrow 100\dot{\gamma}(12000s^{-1})$$

1. Déterminer les paramètres de la loi de puissance et préciser le type de fluide
2. Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement
3. Calculer la viscosité apparente
4. Calculer le nombre de Reynolds
5. Calculer la perte de pression linéaire par unité de longueur

Solution

1. Paramètres de la loi de puissance

$$\tau = K(\dot{\gamma})^n$$

$$\tau = 3(\dot{\gamma})^{0.3}$$

$K=3$ et $n=0.3$ Type de fluide : $n < 1$ fluide pseudoplastique (rhéofluidifiant)

2. Calcul de la vitesse moyenne

$$Q_m = \rho.Q_v = \rho.S.V_m \Rightarrow V_m = \frac{Q_m}{\rho.S} = \frac{4.Q_m}{\rho\pi D^2} = \frac{4.425}{960.\pi(0.3)^2} = 6.26m.s^{-1}$$

3. Calcul de la viscosité apparente

$$\tau = K(\dot{\gamma})^n \Rightarrow \mu_a = K(\dot{\gamma})^{n-1}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dy} \Rightarrow v = v_{\max} \left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dy} = -v_{\max} \frac{8y}{D^2}$$

A la paroi $y = D/2$

$$\frac{dv}{dy} = -v_{\max} \frac{8D}{2D^2} = -\frac{4v_{\max}}{D} \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{8V_m}{D}$$

$$\mu_a = K \left(\frac{8V_m}{D} \right)^{n-1} = 3 \left(\frac{8.6,26}{0.3} \right)^{-0.7} = 0.0848 Pa.s$$

4. Calcul du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu_a} = \frac{960.6,26.0,3}{0,0848} = 21250 \quad Re > Rec \implies \text{nous sommes bien en présence d'un écoulement turbulent}$$

5. Calcul du coefficient de perte de charge linéaire λ

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{21250}} = 0.026$$

6. Calcul de la perte de pression $\Delta p/L$

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\lambda}{D} \rho \frac{V_m^2}{2} = \frac{0.026}{0.3} .960. \frac{(6.26)^2}{2} = 1630 Pa.m^{-1}$$

Références bibliographiques

1. Guy Couarraze, Jean-Louid Grossiord, Nicolas Huang
Initiation à la rhéologie (bases théoriques et applications expérimentales)
Lavoisier Tec & Doc. (4ème édition)
2. Grossiord J.L
Méthodes de caractérisations rhéologiques, applications aux polymères
Entropie, 159, 53-58, (1990)
3. Persoz B.
Introduction à l'étude de la rhéologie
Edition Dunod (1960)
4. Barnes H.A., Hutton J., Walters K.
An introduction to rheology
Rheology series, 3, New-York (1989)
5. Bellet D., Sengelin M.
Caractéristiques rhéologiques de solutions non-newtoniennes (influence de la température et de la concentration)
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 126-128, (1971)
6. Noel Midoux
Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique
Tech. & Doc. Lavoisier
7. P. Coussot, J.P. Grossiord
Comprendre la rhéologie de la circulation du sang à la prise du béton
EDP Sciences (2002)