الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي و البحـــــث العلـــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
كلية الرياضيات و الاعلام الالي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Cours et exercices corrigés d'Analyse 1

Première année Licence MI
Mathématiques et Informatique

Par :

Dr BOUHARIS Epouse OUDJDI DAMERDJI Amel

U.S.T.O – M.B

Année universitaire 2020-2021

Table des matières

Avant propos

Ce polycopié est un support pédagogique ; destiné aux étudiants inscrits à l'université en première année Licence LMD, domaine : Mathématiques et Informatique MI. C'est un cours illustrant les notions de base en Analyse mathématique afin d'acquérir et comprendre les fondements du raisonnement mathématique indispensable à la compréhension de la suite des enseignements en Mathématiques ou en Informatique.

Dans ce cours on présente les définitions des outils mathématiques et leurs propriétés, tout en donnant les remarques importantes, qui aident à assimiler ces notions, ainsi que les théorèmes et propositions de base en illustrant le tout par des exemples détaillés. A la fin de chaque chapitre on présente des exercices de degré de difficulté variable, avec des corrigés détaillés.

Ce polycopié décrit le programme de la matière Analyse1, enseignée au premier semestre ; aux étudiants de la première année MI ; il est composé de quatre chapitres, dans le premier on introduit le corps des nombres réels ensuite on passe au chapitre sur le corps des nombres complexes, puis le troisième chapitre concernant les suites réelles, ainsi que leurs propriétés, pour passer enfin aux deux derniers chapitres portant sur les fonctions réelles à une variable réelle, notamment les notions de continuité, de dérivabilité ainsi que leurs développement en série de Taylor, tout en introduisant l'étude des fonctions trigonométriques inverses et les fonctions hyperboliques ainsi que leurs fonctions inverses.

Chapitre 1

Le corps des nombres réels

1.1 Définition axiomatique

- L'ensemble des nombres réels est l'ensemble noté par $\mathbb{R}$; sur lequel sont définies deux lois de composition internes :
  l'addition
  $$\begin{array}{rcl} "+" : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$
  et la multiplication
  $$\begin{array}{rcl} "\cdot" : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\cdot y \end{array}$$
  tel que $(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un corps commutatif archimédien.
- La relation " $\leq$ "est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$:
  $$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x\leq y)\vee(y\leq x)\,.$$
- Les deux lois de composition internes ; définies sur $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre total " $\leq$ ".
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$; possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

1.2 La valeur absolue

Définition 1.2.1 *La valeur absolue est une application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}^+$, notée par $|.|$ et définie par :*

$$\begin{array}{rccl} |.| : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ -x \text{ si } x<0 \end{cases} \end{array}$$

Propriétés 1
1. $|x|\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.
2. $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$.
3. $-|x|\leq x\leq |x|\,;\forall x\in\mathbb{R}$.

4. $\forall a \geq 0;\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$

5. $|x.y| = |x| \cdot |y|\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$

7. $|x + y| \leq |x| + |y|\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, *(L'inégalité triangulaire).*

8. $||x| - |y|| \leq |x - y|\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, *(La seconde inégalité triangulaire).*

Preuve :

7. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases}$$

d'où en faisant la somme

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

8. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|x| = |x - y + y| \Rightarrow |x| \leq |x - y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

et

$$|y| = |y - x + x| \Rightarrow |y| \leq |y - x| + |x| \Leftrightarrow -|x - y| \leq |x| - |y|$$

donc

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|\,.$$

□

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1 *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si dès qu'elle contient deux réels a et b alors elle contient tous les réels compris entre eux.*

$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I.$

Exemples 1.3.2 *1.* *$\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des intervalles.*

2. *$\mathbb{R}^+$ est un intervalle.*

3. *$\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas des intervalles.*

Remarques :

1. Pour les notations, soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a les intervalles de $\mathbb{R}$:
   - bornés : ouverts $]a, b[$, fermés $[a, b]$ ou semi-ouverts $[a, b[\ ,\ ]a, b]$.
   - non bornés : ouverts $]-\infty, b[\ ,\ ]a, +\infty[$ ou fermés $[a, +\infty[\ ,\ ]-\infty, b]$.
   - Si $a = b$ alors $[a, a] = \{a\}\ ,\ ]a, b[= [a, b[=]a, b] = \emptyset$.
2. Le complémentaire d'un intervalle ouvert est fermé.

Remarque : $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$.

En effet, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est un intervalle ouvert donc son complémentaire, l'ensemble vide $\emptyset$ est fermé, or l'ensemble vide $\emptyset$ peut s'écrire comme un intervalle ouvert $]\alpha, \alpha[\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$, donc son complémentaire $\mathbb{R}$ est fermé.

Remarques :

1. L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.
2. La réunion de deux intervalles ayant une intersection non vide est un intervalle.

Définition 1.3.3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle segment l'ensemble noté $[a, b]$ défini par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$. Si $a > b$ alors $[a, b] = \emptyset$.*

Définition 1.3.4 *Soit V une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, On dit que V est un voisinage de x_0 s'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et inclu dans V, on note V_{x_0} ou $V(x_0)$.*

Exemples 1.3.5

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$; l'intervalle $V =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ est un voisinange de x_0; car il existe un intervalle ouvert $\left]x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et inclu dans V.*
2. *L'intervalle $]a, b[$ est voisinage de tous les points $x \in]a, b[$.*
3. *Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont des voisinages d'aucun de leurs points.*

1.4 Minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, maximum et minimum.

Définition 1.4.1 *Etant donné un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ totalement ordonné par la relation d'ordre notée " $\leq$ " et soit $A \subset E$ une partie non vide de E.*

- On dit que $M \in E$ est un majorant de A si : $\forall x \in A;\ x \leq M$.

- On dit que $m \in E$ est un minorant de A si : $\forall x \in A;\ m \leq x$.

- A est dite majorée (resp. minorée) si elle possède au moins un majorant (resp. un minorant).

Remarque : Si A possède un majorant (resp. minorant), alors il n'est pas unique.

Définition 1.4.2 - *Etant donnée une partie A de E non vide et majorée, et soit $Maj\,(A) \subset E$ l'ensemble des majorants de A, on dit que $M \in E$ est la borne supérieure de A si M est le plus petit des majorants de A, on le note* $\sup A$.

- Etant donnée une partie A de E non vide et minorée, et soit $Min\,(A) \subset E$ l'ensemble des minorants de A, on dit que $m \in E$ est la borne inférieure de A si m est le plus grand des minorants de A, on le note $\inf A$.

Théorème 1.4.3 *Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, possède une borne supérieure (resp. inférieure).*

Remarques :

1. Quand la borne supérieure (resp. la borne inférieure) existe alors elle est unique.
2. La borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$) n'appartient pas nécessairement à l'ensemble A.

Définition 1.4.4 - *On dit que M est le plus grand élément de A ou maximum de A si M est un majorant de A qui appartient à A, on le note par* $\max A$.

- *On dit que m est le plus petit élément de A ou minimum de A si m est un minorant de A qui appartient à A, on le note par* $\min A$.

Remarques :

1. Si le maximum $\max A$ (resp. le minimum $\min A$) existe alors $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).
2. Si la borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$) appartient à A alors $\max A = \sup A$ (resp. $\min A = \inf A$).
3. Si la borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$) n'appartient pas à A alors le maximum $\max A$ (resp. le minimum $\min A$) n'existe pas.

Remarque : La borne supérieure d'un ensemble majoré A (resp. la borne inférieure d'un ensemble minoré A) existe toujours mais peut ne pas appartenir à A, par contre le maximum d'un ensemble majoré (resp. le minimum d'un ensemble minoré) peut ne pas exister.

Exemple 1.4.5 *Soit $A =]-5, 1]$; A est une partie bornée de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble des majorants de A est $Maj\,(A) = [1, +\infty[$,
$\sup A = \max A = 1$.
L'ensemble des minorants de A est $Min\,(A) =]-\infty, -5]$,
$\inf A = -5$, $\min A$ *n'existe pas car* $-5 \notin A$.

Proposition 1.4.6 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\exists \alpha > 0, \forall x \in A : |x| \leq \alpha$
(ii) $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M$.

Preuve :
$(i) \Rightarrow (ii)$
Il suffit de prendre $m = -\alpha$ et $M = \alpha$.
$(ii) \Rightarrow (i)$
Il suffit de prendre $\alpha = \max\,(M, -m)$, en effet,

$$-\alpha \leq m \leq x \leq M \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \Leftrightarrow |x| \leq \alpha.$$

□

1.5 La partie entière

Définition 1.5.1 *La partie entière d'un nombre réel x ; est le plus grand entier n inférieur ou égal à x. En d'autres termes, la partie entière de x est le seul entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. Elle est notée par $[x]$ ou $E(x)$.*

Ainsi tout nombre réel x s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = [x] + \alpha; \text{ où } \alpha \in [0, 1[.$$

Exemple 1.5.2 $[5,70911] = 5$, $[-5,70911] = -6$.

Propriétés 2 *1.* $[x] \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $[x] \leq x \leq [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

3. $[x+m] = [x] + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

4. $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5. $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y], \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Preuve :
3. On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$[x] \leq x \leq [x] + 1,$$

d'où

$$[x] + m \overset{(1)}{\leq} x + m \overset{(2)}{\leq} [x] + m + 1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

D'une autre part, on a

$$[x+m] \overset{(3)}{\leq} x + m \overset{(4)}{\leq} [x+m] + 1,$$

or $[x+m]$ est le plus grand entier inférieur à $x+m$ alors de (1) et (3) on a

$$[x] + m \leq [x+m], \tag{1.1}$$

et $[x+m]+1$ est le plus petit entier supérieur à $x+m$ alors de (2) et (4) on a

$$[x+m] + 1 \leq [x] + m + 1,$$

d'où

$$[x+m] \leq [x] + m. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on obtient l'égalité $[x+m] = [x] + m$. □

Remarque : La partie entière est une fonction croissante mais pas strictement croissante.

1.6 Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure

Etant donnée une partie A non vide et bornée de $\mathbb{R}$, soient $m, M \in \mathbb{R}$, on a les caractérisations suivantes

1. $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1/\ \forall x \in A;\ x \leq M \\ 2/\ \forall \varepsilon > 0;\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \end{cases}$
2. $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1/\ \forall x \in A;\ m \leq x \\ 2/\ \forall \varepsilon > 0;\ \exists x \in A,\ x < m + \varepsilon \end{cases}$

Preuve :

1. • Montrons tout d'abord que si $M = \sup A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$.
   On supposera par l'absurde que $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A;\ x \leq M - \varepsilon$, par conséquent $M - \varepsilon$ devient un majorant de A, or M étant la borne supérieure de A ; c'est le plus petit des majorants de A donc :
   $M \leq M - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \leq 0$, qui est une contradiction.
   • A présent montrons que si M est un majorant de A qui vérifie
   $$\forall \varepsilon > 0;\ \exists x_0 \in A,\ M - \varepsilon < x_0$$
   alors M est le plus petit des majorants de A.
   Soit M' un autre majorant de A, d'où $x_0 \leq M'$, par conséquent ;
   $$\forall \varepsilon > 0;\ M - \varepsilon < x_0 \leq M' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0;\ M - M' < \varepsilon$$
   d'où $M - M' \leq 0 \Leftrightarrow M \leq M'$.
2. On peut montrer la caractérisation de la borne inférieure de la même façon, (à faire en exercice).

□

Exercice 1.6.1 *Etant donné l'ensemble* $A = \left\{ \frac{n+2}{n-2}\ /\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \right\}$.

1. *Montrer que A est borné.*
2. *Montrer que* $\sup A = 5, \inf A = 1$.
3. *Déterminer* $\max A$ *et* $\min A$ *s'ils existent.*

Solution.

1. On a : $\forall n \geq 3$:
$$1 \leq n - 2 \leq n + 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{n+2}{n-2},$$
d'où la partie A est minorée par 1. D'une autre part on a $\forall n \geq 3$:
$$\begin{aligned} 4n \geq 12 &\Leftrightarrow 5n - 10 \geq n + 2 \\ &\Leftrightarrow 5(n-2) \geq n + 2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{n+2}{n-2} \leq 5 \end{aligned}$$

d'où la partie A est majorée par 5, donc A est bornée.

2. Montrons que $\sup A = 5$
   5 est un majorant de A et $5 \in A$, pour $n = 3$ donc $\max A = 5 = \sup A$.
3. Montrons que $\inf A = 1$
   Soit $\varepsilon > 0$; cherchons $x \in A$, tel que $x < 1 + \varepsilon$, ceci revient à chercher $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ tel que
   $$\frac{n+2}{n-2} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{\varepsilon} + 2 < n,$$
   alors il suffit de prendre $n = \left[\frac{4}{\varepsilon} + 2\right] + 1$.
   On remarque que $1 \notin A$; sinon
   $$\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \text{ tel que } \frac{n+2}{n-2} = 1 \Leftrightarrow 2 = -2 \text{ ; absurde.}$$
   d'où $\min A$ n'existe pas.

$\triangle$

Propriétés 3 *1. Etant donnés A et B deux ensembles non vides, bornés de $\mathbb{R}$, tels que $A \subset B$, alors :*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

En effet ; on a

$$\inf A \leq x \leq \sup A; \forall x \in A \Rightarrow \inf A \leq \sup A,$$

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow \inf B \leq x;\ \forall x \in A$$

d'où $\inf B$ *est un minorant de* A, *or* $\inf A$ *est le plus grand des minorants de* A, *donc* $\inf B \leq \inf A$ *et on a*

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leq \sup B;\ \forall x \in A$$

d'où $\sup B$ *est un majorant de* A, *or* $\sup A$ *est le plus petit des majorants de* A, *donc* $\sup A \leq \sup B$.

2. Etant donnés C et D deux ensembles non vides, bornés de $\mathbb{R}$, alors :

   (a) $\sup (C \cup D) = \max (\sup C, \sup D)$
   $\inf (C \cup D) = \min (\inf C, \inf D)$

   (b) $\sup (C \cap D) \leq \min (\sup C, \sup D)$
   $\inf (C \cap D) \geq \max (\inf C, \inf D)$

   (c) $\sup (C + D) = \sup C + \sup D$
   $\inf (C + D) = \inf C + \inf D$
   où $C + D = \{x + y\ /\ x \in C,\ y \in D\}$

(d) $\sup(-C) = -\inf C$
$\inf(-C) = -\sup C$
où $-C = \{-x \ / \ x \in C\}$

Exemple 1.6.2 *Soit* $A = \left\{\frac{n}{n+1}, (-1)^n \ , \ n \in \mathbb{N}\right\}$,
Montrer que $\sup A = 1$ *et* $\inf A = -1$.
On remarque que $A = C \cup D$, *où*

$$C = \left\{\frac{n}{n+1} \ , \ n \in \mathbb{N}\right\} \ \textit{et} \ D = \{(-1)^n \ , \ n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq n+1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1,$$

d'où 1 *est un majorant de* C.

Soit $\varepsilon > 0$; *cherchons* $x \in C$, *tel que* $1 - \varepsilon < x$, *ceci revient à chercher* $n \in \mathbb{N}$, *tel que*

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n,$$

alors il suffit de prendre $n = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$. *ou* $\max\left(0, \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1\right)$ *donc* $\sup C = 1$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{n}{n+1},$$

d'où 0 *est un minorant de* C, *or* $0 \in C$, *pour* $n = 0$ *donc* $\min C = 0 = \inf C$.

Pour l'ensemble D, *on a* $\sup D = 1$, $\inf D = -1$.

Par conséquent on a :

$\sup A = \max\{1, 1\} = 1$ *et* $\inf A = \min\{-1, 0\} = -1$.

1.7 Principe d'Archimède

Le corps des réels $\mathbb{R}$ vérifie le principe d'Archimède ; qui s'énonce comme suit

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N} : x < n.$$

c'est à dire que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Preuve :
Supposons par l'absurde que $\mathbb{N}$ est majoré dans $\mathbb{R}$, alors il existe $S \in \mathbb{R}$; tel que $S = \sup \mathbb{N}$, d'où

$$n \leq S, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose aussi $n_0 = [S] + 1$, où $[S]$ désigne la partie entière de S, or $S < [S] + 1$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, S < n_0$; contradiction. □

Remarque : Il existe une autre version du principe d'Archimède.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x > 0, \ y \geq 0; \ \exists n \in \mathbb{N}^* : nx > y.$$

Preuve :
on va supposer par l'absurde que :

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^* : nx \leq y,$$

alors l'ensemble $A = \{nx \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie non vide, majorée par y dans $\mathbb{R}$ donc $\sup A = M$ existe, d'où

$$\begin{aligned} nx \leq M; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad &\Rightarrow (n+1)\, x \leq M;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Leftrightarrow nx \leq M - x;\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

donc $M - x$ est un majorant de A et $M - x < M$, car $x > 0$, ce qui est absurde car M est le plus petit des majorants de A. □

1.8 La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.8.1 *Etant donnés deux nombres réels a et b distincts tels que $a < b$, alors l'intervalle $]a, b[$ contient au moins un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on note $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Preuve :
$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$, alors d'après le principe d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\frac{1}{b-a} < n,$$

d'où $\frac{1}{n} < b - a$, posons $p = [an]$, alors

$$\begin{aligned} p \leq an < p+1 \quad &\Leftrightarrow \tfrac{p}{n} \leq a < \tfrac{p}{n} + \tfrac{1}{n} < a + (b-a) \\ &\Rightarrow a < \tfrac{p+1}{n} < b, \end{aligned}$$

et $\frac{p+1}{n} \in \mathbb{Q}$, donc $\frac{p+1}{n} \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$. □

1.9 La droite réelle achevée

Définition 1.9.1 *On appelle droite réelle achevée qu'on note par $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Propriétés 4
1. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}};\ -\infty \leq x \leq +\infty.$
2. $\forall x \in \mathbb{R};\ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty\ ;\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
   $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)\ , (-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$
3. $\forall x > 0;\ x.(+\infty) = (+\infty)\ ;\ x.(-\infty) = (-\infty)$
4. $\forall x < 0;\ x.(+\infty) = (-\infty)\,;\ x.(-\infty) = (+\infty)$
5. $(+\infty).(+\infty) = (+\infty)\ , (-\infty).(-\infty) = (+\infty)$
   $(+\infty).(-\infty) = (-\infty).(+\infty) = (-\infty)$

6. $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$

Corollaire 1.9.2 *Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Exemple 1.9.3 *Etant données A et B deux parties de $\overline{\mathbb{R}}$, telles que $A = [5, +\infty]$ et $B = [-\infty, -1]$, alors* $\sup A = +\infty$, $\inf B = -\infty$.

1.10 Enoncés des exercices

Exercice 1 :

1. Montrer les inégalités suivantes :
   (a) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
   (c) $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$; $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
2. Soit $[x]$ la partie entière de x ; montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$,
   (b) $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Exercice 2 :

1. Montrer que :
   (a) la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
   (b) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
   (c) $0,336433643364\ldots \in \mathbb{Q}$
2. Soit $a \in [1, +\infty[$, simplifier $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$
3. Calculer :
   (a) $A = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$
   (b) $B = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :
On considère A une partie de $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, déterminer pour chacun des ensembles suivants : l'ensemble des majorants $Maj(A)$, l'ensemble des minorants $Min(A)$, la borne supérieure $\sup(A)$, la borne inférieure $\inf(A)$, le plus petit élément $\min(A)$ et le plus grand élément $\max(A)$.

1. $A = [-\alpha, \alpha], [-\alpha, \alpha[,]-\alpha, \alpha],]-\alpha, \alpha[. (\text{telque } \alpha > 0), E = \mathbb{R}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 2 \}, E = \mathbb{R}$.
3. $A = \{1 - \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}, E = \mathbb{R}$.

Exercice 4 :
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
On note $B = \{|x-y|; (x,y) \in A^2\}$

1. Justifier que B est majorée.
2. On note $\sup B$ la borne supérieure de l'ensemble B, montrer que

$$\sup B = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 5 :

On note par $P_B(R)$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$, montrer que $\forall A, B \in P_B(\mathbb{R})$:

1. (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
   (b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$,
2. Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors :
   (a) $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$,
   (b) $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$,
3. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
4. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$
   où $A + B = \{x + y \ / \ x \in A \text{ et } y \in B\}$
   (a) $\sup(-A) = -\inf(A)$;
   (b) $\inf(-A) = -\sup A$

   tel que $-A = \{-x \ / \ \ x \in A\}$.

Exercice 6 :

En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure montrer que :

1. $\sup A = \frac{3}{2}, \ \inf A = 1$ pour $A = \left\{\frac{3n+1}{2n+1} \ , \ n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $\sup B = 2, \ \inf B = 0$ pour $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $\sup C = 1, \ \inf C = 0$ pour $C = \{e^{-n} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$
4. $\sup D = -1, \ \inf D = -2$ pour $D = \left\{\frac{1}{n^2} - 2 \ , \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Calculer $\max A, \min A, \max B, \min B, \max C, \min C$ et $\max D, \min D$ s'ils existent.

1.11 Corrigés

Exercice 1 :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

   (a)
   $$2|x| = |(x+y)+(x-y)| \Rightarrow 2|x| \leq |x+y| + |x-y|$$
   $$2|y| = |(x+y)+(y-x)| \Rightarrow 2|y| \leq |x+y| + |x-y|$$
   d'où
   $$|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   (b) $\forall x, y \geq 0$, on a
   $$x + y \leq x + 2\sqrt{xy} + y,$$
   car $2\sqrt{xy} \geq 0$, ce qui est équivalent à
   $$x + y \leq \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

   (c) $\forall x, y \geq 0$ on a
   $$x = (x-y) + y \text{ et } (x-y) + y \leq |x-y| + y$$
   d'où $\sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y| + y}$, donc en utilisant (b), on a
   $$\sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} \tag{1.3}$$
   de la même façon, on a $\sqrt{y} \leq \sqrt{|y-x| + x}$ et en utilisant (b), on a
   $$\sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \geq -\sqrt{|x-y|} \tag{1.4}$$
   de (1.3) et (1.4) on a donc
   $$-\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} \Leftrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}.$$

2. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a

   (a) $x \leq y \Rightarrow [x] \leq x \leq y < [y] + 1 \Rightarrow [x] \leq y < [y] + 1$
   or $[y]$ est le plus grand entier inférieur à y, et comme $[x]$ est un entier alors $[x] \leq [y]$.

   (b)
   $$\left.\begin{array}{l} [x] \leq x < [x] + 1 \\ [y] \leq y < [y] + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow [x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2$$
   or $[x+y]$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, alors
   $$[x] + [y] \leq [x+y]. \tag{1.5}$$

   D'une autre part, on a $[x+y]+1$ est le plus petit entier supérieur à $x+y$, donc
   $$[x+y] + 1 \leq [x] + [y] + 2 \Leftrightarrow [x+y] \leq [x] + [y] + 1 \tag{1.6}$$
   de (1.5) et (1.6) on a
   $$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Exercice 2 :

1. (a) Soient $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$, on suppose par l'absurde que $z = x + y \in \mathbb{Q}$, d'où $y = z - x \in \mathbb{Q}$, contradiction.

   (b) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors :
   $\exists p, q \in \mathbb{Z},\ PGCD(p,q) = 1$ tels que
   $$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2 \text{ divise } p^2 \Rightarrow 2 \text{ divise } p$$
   car 2 est premier d'où $p = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ donc
   $$4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow 2 \text{ divise } q^2 \Rightarrow 2 \text{ divise } q;$$
   qui est une contradiction car p et q sont premiers entre eux.

   (c) Soit $x = 0,336433643364...$
   On a $10^4 x = 3364,336433643364...$
   d'où $10^4 x - x = 9999x = 3364$ alors $x = \frac{3364}{9999} \in \mathbb{Q}$.

2. On a $x^2 = 2a + 2\left|a-2\right| = \begin{cases} 4a - 4, \text{ si } a \geq 2 \\ 4\ , \text{ si } 1 \leq a \leq 2 \end{cases}$

3.

   (a) On a le binôme de Newton :
   $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k . a^k . b^{n-k};\ \forall a, b \in \mathbb{R}$, d'où
   $A = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n.$

   (b) $B = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = 2.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}...\frac{n+1}{n} = n+1.$

Exercice 3 :

1.

A	**Maj(A)**	**Min(A)**	**sup A**	**inf A**	**max A**	**min A**
$[-\alpha, \alpha]$	$[\alpha, +\infty[$	$]-\infty, -\alpha]$	α	$-\alpha$	α	$-\alpha$
$[-\alpha, \alpha[$	$[\alpha, +\infty[$	$]-\infty, -\alpha]$	α	$-\alpha$	$\nexists$	$-\alpha$
$]-\alpha, \alpha]$	$[\alpha, +\infty[$	$]-\infty, -\alpha]$	α	$-\alpha$	α	$\nexists$
$]-\alpha, \alpha[$	$[\alpha, +\infty[$	$]-\infty, -\alpha]$	α	$-\alpha$	$\nexists$	$\nexists$

2. $A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, (4ème cas du tableau ci-dessus).
3. $A = \left\{\frac{n-1}{n} \;\; / \;\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
   On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
   $$n \geq 1 \Leftrightarrow n - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{n-1}{n} \geq 0$$
   et $0 \in A$, d'où $\min A = \inf A = 0$.
   $$\sup A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n-1}{n} \leq 1 \\ 2)\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; 1 - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon - 1}{n_\varepsilon} \end{cases}$$
   1)$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
   $$n - 1 \leq n \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} \leq 1.$$
   2) Soit $\varepsilon > 0$,
   $$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$
   alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Exercice 4 :
$B = \{|x-y| \ ; \ (x,y) \in A^2\}$.

1. A est une partie bornée, alors $\sup A$ et $\inf A$ existent.
   On note $\sup A = M$ et $\inf A = m$.
   On a $\forall (x,y) \in A^2$:
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} m \le x \le M \\ m \le y \le M \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} m \le x \le M \\ -M \le -y \le -m \end{array} \right. \\ &\Rightarrow -(M-m) \le x-y \le M-m \\ &\Leftrightarrow |x-y| \le M-m. \end{aligned}$$
   donc $M-m$ est un majorant de B.
2. On a
$$\sup A = M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \frac{\varepsilon}{2} < x \tag{1.7}$$
   et
$$\inf A = m \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, y < m + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -m - \frac{\varepsilon}{2} < -y \tag{1.8}$$
   de (1.7) et (1.8) on obtient
$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x,y) \in A^2 \ , \ (M-m) - \varepsilon < x-y,$$
   or $x-y \le |x-y|$ alors
$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x,y) \in A^2 \ , \ (M-m) - \varepsilon < |x-y| \, .$$
   par conséquent,
$$\sup B = M - m = \sup A - \inf A.$$

Exercice 5 :

1. (a) $\sup (A \cup B) \overset{?}{=} \max (\sup A, \sup B)$
   On a
$$\left\{ \begin{array}{c} A \subset (A \cup B) \\ \text{et} \\ B \subset (A \cup B) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sup A \le \sup (A \cup B) \\ \text{et} \\ \sup B \le \sup (A \cup B) \end{array} \right.$$
   d'où
$$\max (\sup A, \sup B) \le \sup (A \cup B) \tag{1.9}$$
   D'une autre part, on a
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ \text{ou} \\ x \in B \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \le \sup A \\ \text{ou} \\ x \le \sup B \end{array} \right. \Rightarrow x \le \max(\sup A, \sup B)$$
   d'où $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$, or $\sup (A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $(A \cup B)$, donc
$$\sup (A \cup B) \le \max (\sup A, \sup B) \tag{1.10}$$
   de (1.9) et (1.10) on a l'égalité.

(b) $\inf(A\cup B) \overset{?}{=} \min(\inf A, \inf B)$
On a
$$\left\{\begin{array}{c} A\subset (A\cup B) \\ \text{et} \\ B\subset (A\cup B)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \inf A \geq \inf(A\cup B) \\ \text{et} \\ \inf B\geq \inf(A\cup B)\end{array}\right.$$
d'où
$$\min(\inf A, \inf B) \geq \inf(A\cup B). \tag{1.11}$$
D'une autre part, on a
$$x\in A\cup B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in A \\ \text{ou} \\ x\in B\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x\geq \inf A \\ \text{ou} \\ x\geq \inf B\end{array}\right. \Rightarrow x\geq \min(\inf A, \inf B)$$
d'où $\min(\inf A, \inf B)$ est un minorant de $(A\cup B)$, or $\inf(A\cup B)$ est le plus grand des minorants de $(A\cup B)$, donc
$$\inf(A\cup B) \geq \min(\inf A, \inf B) \tag{1.12}$$
de (1.11) et (1.12) on a l'égalité.

2. Si $A\cap B\neq \emptyset$, alors

(a) $\sup(A\cap B) \overset{?}{\leq} \min(\sup A, \sup B)$
On a
$$\left\{\begin{array}{c} (A\cap B)\subset A \\ \text{et} \\ (A\cap B)\subset B\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \sup(A\cap B) \leq \sup A \\ \text{et} \\ \sup(A\cap B)\leq \sup B\end{array}\right.$$
d'où $\sup(A\cap B)\leq \min(\sup A, \sup B)$.

(b) $\inf(A\cap B) \overset{?}{\geq} \max(\inf A, \inf B)$
On a
$$\left\{\begin{array}{c} (A\cap B)\subset A \\ \text{et} \\ (A\cap B)\subset B\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} \inf(A\cap B) \geq \inf A \\ \text{et} \\ \inf(A\cap B)\geq \inf B\end{array}\right.$$
d'où $\inf(A\cap B)\geq \max(\inf A, \inf B)$.

(c) $\sup(A+B) \overset{?}{=} \sup A+\sup B$

- $\sup A = M_A \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1)\forall x\in A: x\leq M_A & (1) \\ 2)\forall \varepsilon>0, \exists x\in A: M_A-\frac{\varepsilon}{2}<x & (2)\end{array}\right.$
- $\sup B = M_B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1)\forall y\in B: y\leq M_B & (3) \\ 2)\forall \varepsilon>0, \exists y\in B: M_B-\frac{\varepsilon}{2}<y & (4)\end{array}\right.$

alors on a :
$$(1)+(3) \Rightarrow \forall z\in A+B: z\leq M_A+M_B$$
$$(2)+(4) \;\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists z\in A+B: (M_A+M_B)-\varepsilon<z$$
donc $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

(d) $\inf(A+B) \overset{?}{=} \inf A + \inf B$

- $\inf A = m_A \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\forall x \in A : m_A \leq x & (1) \\ 2)\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < m_A + \frac{\varepsilon}{2} & (2) \end{cases}$
- $\inf B = m_B \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\forall y \in B : m_B \leq y & (3) \\ 2)\forall \varepsilon > 0, \exists y \in B : y < m_B + \frac{\varepsilon}{2} & (4) \end{cases}$

  alors on a :

$$(1) + (3) \Rightarrow \forall z \in A + B : m_A + m_B \leq z$$

$$(2) + (4) \ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists z \in A + B : z < (m_A + m_B) + \varepsilon$$

  donc $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

(e) $\sup(-A) \overset{?}{=} -\inf A$

- $\forall x \in A : x \geq \inf A \Leftrightarrow -x \leq -\inf A$
  d'où $-\inf A$ est un majorant de $-A$, or $\sup(-A)$ est le plus petit des majorants de $-A$, alors

$$\sup(-A) \leq -\inf A \tag{1.13}$$

- $\forall(-x) \in (-A) : -x \leq \sup(-A) \Leftrightarrow x \geq -\sup(-A)$
  d'où $-\sup(-A)$ est un minorant de A, or $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, alors $\inf A \geq -\sup(-A)$ donc

$$-\inf A \leq \sup(-A) \tag{1.14}$$

de (1.13) et (1.14) on a l'égalité.

(f) $\inf(-A) \overset{?}{=} -\sup A$

- $\forall x \in A : x \leq \sup(A) \Leftrightarrow -x \geq -\sup(A)$
  d'où $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$, or $\inf(-A)$ est le plus grand des minorants de $-A$, alors

$$\inf(-A) \geq -\sup(A) \tag{1.15}$$

- $\forall(-x) \in (-A) : -x \geq \inf(-A) \Leftrightarrow x \leq -\inf(-A)$
  d'où $-\inf A$ est un majorant de A, or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, alors

$$\sup(A) \leq -\inf(-A) \Leftrightarrow -\sup(A) \geq \inf(-A) \tag{1.16}$$

de (1.15) et (1.16) on a l'égalité.

Exercice 6 :

1. $A = \left\{\frac{3n+1}{2n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

   - $\inf A \stackrel{?}{=} 1$
     On a $\forall n \in \mathbb{N}$:
     $$3n+1 \geq 2n+1 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2n+1} \geq 1,$$
     alors 1 est un minorant de A.
     On remarque que $1 \in A$, pour $n = 0$.
     alors $\min A = 1 = \inf A$.
   - $\sup A \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$
     On a $\forall n \in \mathbb{N}$:
     $$6n+2 \leq 6n+3 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2n+1} \leq \frac{3}{2},$$
     alors $\frac{3}{2}$ est un majorant de A.
     $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3n_\varepsilon+1}{2n_\varepsilon+1}$
     Soit $\varepsilon > 0$,
     $$\frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3n+1}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} < n,$$
     alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|\right] + 1$.

   Donc $\sup A = \frac{3}{2}$, mais $\frac{3}{2} \notin A$ alors $\max A$ n'existe pas.

2. $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

   - $\sup B \stackrel{?}{=} 2$
     On a
     $$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left\{\begin{array}{c} n \geq 1 \\ n^2 \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1 \geq \frac{1}{n} \\ 1 \geq \frac{1}{n^2} \end{array}\right. \Rightarrow 2 \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},$$
     alors 2 est un majorant de B.
     On remarque que $2 \in B$, pour $n = 1$.
     alors $\max B = 2 = \sup B$.
   - $\inf B \stackrel{?}{=} 0$
     On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 0$, alors 0 est un minorant de B.
     $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{1}{n_\varepsilon^2} < \varepsilon$
     Soit $\varepsilon > 0$, on a
     $$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}^* : n+1 \leq 2n & \Leftrightarrow & \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} \\ & \Leftrightarrow & \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n} \end{array}$$
     alors pour que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon$; il suffit que : $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n$ et donc il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$.
     Donc $\inf B = 0$, mais $0 \notin B$ alors $\min B$ n'existe pas.

3. $C = \{e^{-n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$

- $\sup C = 1$
  On a $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \Leftrightarrow -n \leq 0 \Leftrightarrow e^{-n} \leq 1$ alors 1 est un majorant de C.
  On remarque que $1 \in C$, pour $n = 0$.
  alors $\max C = 1 = \sup C$.
- $\inf C = 0$
  On a $\forall n \in \mathbb{N} : e^{-n} > 0$, alors 0 est un minorant de C.
  $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N} : e^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$.
  Soit $\varepsilon > 0$, on a
  $$\begin{aligned} e^{-n} < \varepsilon &\Leftrightarrow -n < \ln \varepsilon \\ &\Leftrightarrow -\ln \varepsilon < n \end{aligned}$$
  alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = [|\ln \varepsilon|] + 1$.
  Donc $\inf C = 0$, mais $0 \notin C$ alors $\min C$ n'existe pas.

4. $D = \left\{ \frac{1}{n^2} - 2 \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

- $\sup D = -1$,
  On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\begin{aligned} 1 \leq n &\Leftrightarrow 1 \leq n^2 \Leftrightarrow \tfrac{1}{n^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{n^2} - 2 \leq -1 \end{aligned}$$
  alors -1 est un majorant de D.
  On remarque que $-1 \in D$, pour $n = 1$.
  alors $\max D = -1 = \sup D$.
- $\inf D = -2$
  On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{n^2} - 2$, alors -2 est un minorant de D.
  $\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n^2} - 2 < \varepsilon - 2$
  Soit $\varepsilon > 0$, on a
  $$\begin{aligned} \tfrac{1}{n^2} - 2 < \varepsilon - 2 &\Leftrightarrow \tfrac{1}{n^2} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{\varepsilon} < n^2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n; \text{ car } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$
  alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1$.
  Donc $\inf D = -2$, mais $-2 \notin D$ alors $\min D$ n'existe pas.

Chapitre 2

Le corps des nombres complexes

Tout au long du chapitre, on considère le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ appelé plan complexe.

2.1 Représentation algébrique

Définition 2.1.1 *On appelle l'ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$; l'ensemble contenant l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; tel que*

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ i^2 = -1 \right\}$$

où $x = \mathrm{Re}\,(z)$ est dite partie réelle de z et $y = \mathrm{Im}\,(z)$ est dite partie imaginaire de z; et donc

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i.$$

Cette représentation est dite représentation algébrique du nombre z, il existe d'autres représentations.

Propriétés 5 *On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ alors $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.*
2. *Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

2.2 Représentation graphique

2.2.1 Définitions et notations

Dans le plan complexe, à tout point $M\,(a, b)$; on peut associer le nombre complexe $z = a+ib$, on dit que z est l'affixe du point M, ou que M est l'image ponctuelle de z et que $\overrightarrow{OM}$ est l'image vectorielle de z.

Dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sur l'axe horizontal ; il y a les réels qui sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle et sur l'axe vertical ; il y a les nombres appelés imaginaires purs dont la partie réelle est nulle. Le point correspondant au nombre complexe $z = a + ib$ est situé à la verticale du réel a et à l'horizontale de l'imaginaire pur ib, (figure 2.1).

Dans le plan complexe ; le module de z est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$. L'argument de z est la mesure de l'angle entre l'axe des réels et $\overrightarrow{OM}$, orienté suivant le sens trigonométrique et le conjugué de z est l'affixe du vecteur symétrique de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe horizontal des réels.

- Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que
$$\overline{z} = a - ib.$$
- Le module de z; noté $|z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$
$$OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

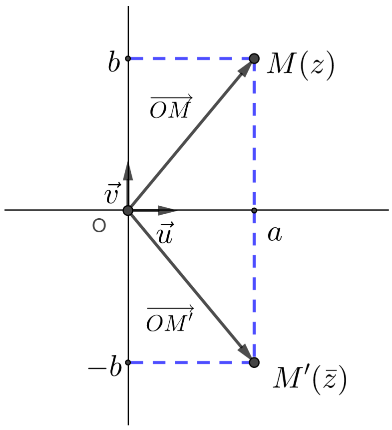

FIGURE 2.1 – Représentation graphique d'un nombre complexe et de son conjugué

Propriétés 6 *On a les propriétés suivantes :*

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $\overline{\overline{z}} = z.$
3. *On a*
$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2},\ \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$
4. *z est un réel pur si et seulement si $z = \overline{z}$.*
5. *z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\,\overline{z}$.*
6. $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$
7. *Si le point M a pour affixe $z = a + ib$ et le point M' a pour affixe $z' = a' + ib'$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, alors :*
   (a) *Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + i\,(b' - b)$*
   (b) *La longueur du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est donnée par*
$$MM' = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2} = |z' - z|\,.$$

2.3 Représentation trigonométrique

Tout nombre complexe $z = a + ib$ de $\mathbb{C}$, peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,, \ r \geq 0$$

où $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ est le module de z et $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$, où θ est l'argument de z, noté $\arg(z)$, qui est la mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ d'où la représentation trigonométrique (figure 2.2), dite aussi forme polaire de z

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

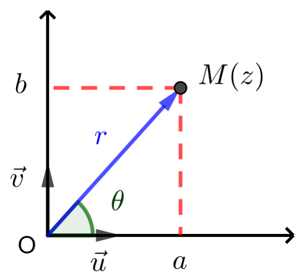

FIGURE 2.2 – Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

Remarque : Si $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (avec $a \neq 0$) alors $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

Propriétés 7 *On a les propriétés suivantes :*

1. *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *tels que* $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *et* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ *alors*
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2\,[2\pi] = \theta_2 + 2\pi k\ ,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
2. *Si* $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = |x|$ *(la valeur absolue de* x*) et* $\arg(z) = 0\,[\pi] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3. *Si* $z = iy \Rightarrow |z| = |y|$ *(la valeur absolue de* y*) et* $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
4. *Soit* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, *alors on a :*
   (a)
   $$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$
   d'où $\arg(\overline{z}) = -\theta = -\arg(z)$.
   (b) $-z = r(-\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)]$, *donc*
   $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg(z) + \pi$.

Exemples 2.3.1

1. $z = \sqrt{6} + \sqrt{2}i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \sqrt{6}, \mathrm{Im}(z) = \sqrt{2}$
$$|z| = \left|\sqrt{6} + \sqrt{2}i\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ \ et\ \ \arg(z) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]\,,$$
d'où $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
2. $z = -3 + 3i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -3,\ \mathrm{Im}(z) = 3$
$$|z| = |-3+3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ \ et\ \ \arg(z) = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]\,,$$
d'où $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

2.4 Forme exponentielle

Pour tout nombre réel θ, on appelle "exponentiel complexe", noté $e^{i\theta}$, le nombre complexe de module 1 et d'argument θ

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

d'où $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ et par suite on a les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

par conséquent, pour un nombre complexe $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, où $(r_1 = |z_1|)$ on a

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$
$$\overline{z}_1 = r_1 e^{-i\theta_1}$$

et pour $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$, où $(r_2 = |z_2|)$ tel que $r_2 \neq 0$; on a

$$\begin{array}{ll} z_1.z_2 & = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} & = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{array}$$

Remarques :

1. Cette forme sert à la linéarisation des puissances du cosinus et du sinus.
2. On a
$$e^{2\pi i} = 1,\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\quad e^{i\pi} = -1,\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$
(voir figure 2.3)
A cause de la périodicité modulo 2π des fonctions sinus et cosinus ; on a la périodicité modulo 2π de l'exponentielle complexe, comme suit
$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)};\quad \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$
d'où
$$e^{2\pi k i} = 1, e^{(2k+1)\pi i} = -1, e^{\pi(\frac{1}{2}+2k)i} = i, e^{\pi(\frac{-1}{2}+2k)i} = -i.$$

Propriétés 8 *Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier naturel n non nul ; on a*

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}},\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Exemples 2.4.1 *On a* $-6 = 6e^{\pi i}$, $4i = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$, $-4i = 4e^{\frac{-\pi}{2}i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

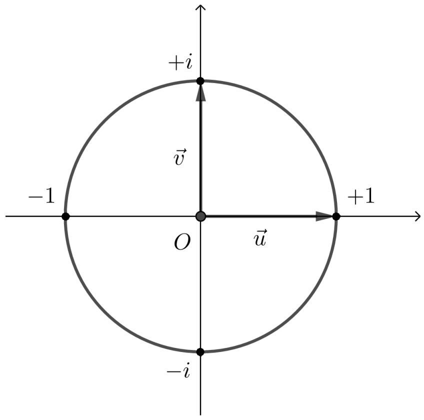

FIGURE 2.3 – Représentation des nombres complexes 1,-1,i et -i

2.5 Opérations sur les nombres complexes

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = a_1+ib_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = a_2 + ib_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

2.5.1 L'addition

On a

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \text{ (Forme algébrique)}$$
$$z_1 + z_2 = r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2 + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2) \text{ (Forme trigonométrique)}$$

2.5.2 Le produit

On a

$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \text{ (Forme algébrique)}$$
$$z_1.z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \text{ (Forme trigonométrique)}$$
$$z_1.z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{ (Forme exponentielle)}$$

2.5.3 Division

On a pour $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Propriétés 9 *Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes alors*

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ *et* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ *tel que* $z_2 \neq 0$.
3. $z.\overline{z} = |z|^2$ *(c'est un réel positif).*
4. $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
5. $\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ *tel que* $z_2 \neq 0$.

Remarque : L'ensemble $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif (A vérifier en exercice).

Propriétés 10 1. *Soit z un nombre complexe et α un nombre réel positif, alors*

$$\arg(\alpha z) = \arg(z) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

en effet ; $\arg(\alpha z) = \arg(\alpha) + \arg(z) = \arg(z)$, *car* $\arg(\alpha) = 0\,[2\pi] = 2k\pi$.

2. *Soit z un nombre complexe et α un nombre réel négatif, alors*

$$\arg(\alpha z) = \arg(z) + \pi(2k+1)\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

en effet ; car $\arg(\alpha) = \pi\,[2\pi] = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

3. *Soient M, M' deux points du plan complexe ; d'affixes z et z' respectivement, tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.*
   (a) *La longueur du segment $[MM']$ est égale à $MM' = |z' - z|$.*
   (b) *Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si* $\mathrm{Re}(\overline{z}z') = 0$.
   En effet ; on a $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *et*

$$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 = \mathrm{Re}(\overline{z}z')\,,$$

   car $\overline{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' + i(xy' - yx')$.
   (c) *Les points O, M, M' sont alignés si et seulement si* $\mathrm{Im}(\overline{z}z') = 0$.
   En effet ; O, M, M' sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0$ *et*

$$\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = xy' - yx' = \mathrm{Im}(\overline{z}z')\,.$$

2.5.4 Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe de module r égal à 1 et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$,

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \ z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

cette formule est appelée formule de Moivre, on peut la vérifier par récurrence. (A faire en exercice).

2.6 Racines $n - ième$ d'un nombre complexe

2.6.1 Racines $n - ième$ d'un nombre complexe

Soit $\omega \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = \varrho\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$.

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \omega$, on pose $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ d'où

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) = \varrho\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$$

et par identification on a

$$\begin{cases} r^n = \varrho \\ n\theta = \alpha\left[2\pi\right] = \alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\varrho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

on trouve n solutions pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Exemple 2.6.1 *Trouver la racine cubique du nombre complexe* $\omega = 1$.

On a $1 = \cos\left(2k\pi\right) + i\sin\left(2k\pi\right)$, *et soit* $z \in \mathbb{C}$; $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right) = \cos\left(2k\pi\right) + i\sin\left(2k\pi\right)$, *d'où*

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \theta = \frac{0}{3} + \frac{2k}{3}\pi;\ k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

et

$$z = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3};\ k = 0, 1, 2$$

par conséquent on a trois racines cubiques

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3 = -\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

voir figure (2.4).

Remarque : On peut également calculer les racines carrées d'un nombre complexe en utilisant la représentation algébrique.

2.6.2 Racine carrée d'un nombre complexe

Exemple 2.6.2 (D'application) *Déterminer les racines carrées du nombre complexe* $\omega = 3 + 4i$

Soit $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z = a + ib$ *et* $z^2 = \omega$

$$z^2 = \omega \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = 2 \end{cases},$$

alors $(a, b) = (2, 1)$ *ou* $(a, b) = (-2, -1)$ *d'où les racines carrées de* ω *sont*

$$z_1 = 2 + i$$
$$z_2 = -2 - i.$$

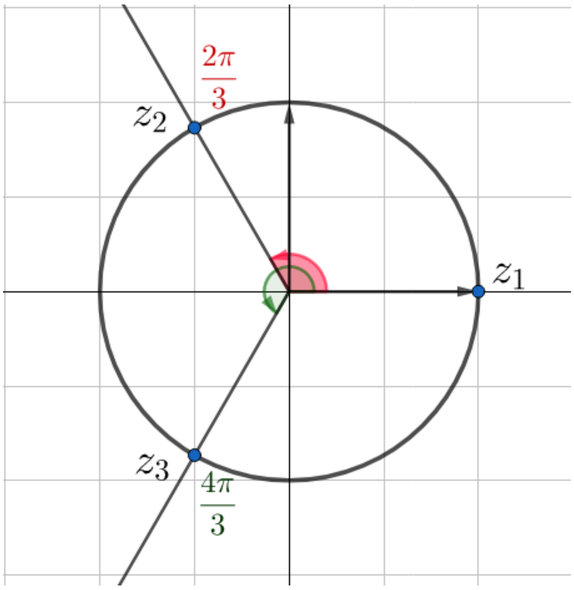

FIGURE 2.4

2.7 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Etant donnée l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Pour la résolution, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, puis on distingue trois cas

1er Cas : Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème Cas : Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une solution réelle double

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

3ème Cas : Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions complexes distinctes

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque : Si les coefficients a, b et c sont complexes alors le discriminant Δ pourrait être un nombre complexe donc il faudra calculer ses racines carrées.

Exemple 2.7.1 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) telle que :*

$$(E) : z^2 - (7 + i)\, z + 12 + 3i = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut

$$\Delta = (7 + i)^2 - 4\,(12 + 3i) = 2i$$

On calcule les racines carrées de Δ *qui sont* $1+i$ *et* $-1-i$ *; d'où les solutions de l'équation* (E) *sont :*

$$z_1 = \frac{(7+i)+1+i}{2} = 4+i$$
$$z_2 = \frac{(7+i)-1-i}{2} = 3.$$

2.8 Applications à la géométrie

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; soient A, B et C trois points du plan complexe dont les affixes sont z_A, z_B et z_C respectivement, alors

1. L'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ a pour mesure $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$.
2. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

   ie. le nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur non nul.

Exemple 2.8.1 *L'ensemble* $C = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-\omega| = r\}$ *est le cercle de rayon* r *et de centre* Ω; *d'affixe* ω.

2.8.1 Transformations géométriques

Soient M, M'et Ω les points d'affixes respectives z, z' et ω :

Translation :

Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteurd'affixe $a \in \mathbb{C}$, l'application qui au point M; associe le point M' tel que

$$z' = z + a,$$

est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Rotation :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application qui au point M; associe le point M' tel que

$$z' = \omega + e^{i\alpha}(z - \omega),$$

est la rotation de centre Ω; et d'angle α et on a

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \text{ avec } \left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Homothétie :

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, l'application qui au point M; associe le point M' tel que

$$z' = \omega + k(z - \omega),$$

est l'homothétie de centre Ω et de rapport k et on a $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarque : Si $k = 1$ alors l'homothétie n'est autre que l'application identité dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.8.2 *1. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives :*

$$z_A = -2 - i, z_B = 1 - 2i \text{ et } z_C = -1 + 2i$$

(a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

(b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. Dans le plan complexe, on donne le point Ω d'affixe i.

(a) Donner l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

(b) A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par

$$z' = \frac{z + 4i}{z + 2}.$$

i. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z; tels que $|z'| = 1$.

ii. L'ensemble E des points M d'affixe z tels que z' est un réel.

Solution :

1. (a) $AB = |z_B - z_A| = |3 - i| = \sqrt{10}$, $AC = |z_C - z_A| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$, *d'où le triangle ABC est isocèle en A.*

(b) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right) = \arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

(a)

$$z' = i + e^{-\frac{i\pi}{3}}(z - i)$$

d'où

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

i. On a

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z + 4i}{z + 2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z + 4i| = |z + 2|$$

alors l'ensemble D est la droite dont les points M sont équidistants des deux points A et B; d'affixes respectives $4i$ et -2, d'où D est la médiatrice de $[AB]$.

ii. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z' = 0\,[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\frac{z+4i}{z+2}\right) = 0\,[\pi]$, *où* $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)$ *est la mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)$ *d'où l'ensemble E est la droite (AB) privée du point B voir figure* (2.5).

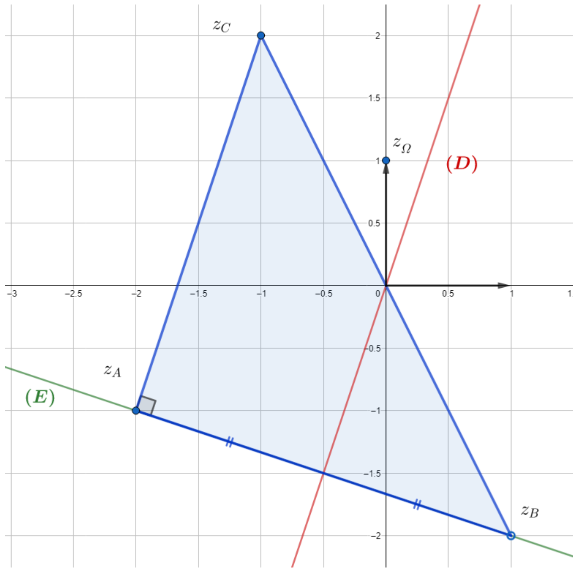

FIGURE 2.5

2.9 Enoncés des exercices

Exercice 1 :

Ecrire sous la forme algébrique puis exponentielle ; les nombres complexes suivants

$$\frac{2+2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\ ,\ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{8i}\right)^2\ ,\ \left[\frac{1+i-\sqrt{3}\,(1-i)}{1+i}\right]^2\ ,\ \frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^3}.$$

Exercice 2 :

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $z_2 = 1+i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_3 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 :

Linéariser $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.

Exercice 4 :

Soit le nombre complexe $z = -2\cos\theta - 2i\sin\theta$, peut-on dire que $z = -2e^{i\theta}$ est la forme exponentielle de z ? expliquer.

Exercice 5 :

1. Soit le nombre complexe $\omega = 5+12i$, Vérifier que $|\omega| = 13$.
2. Déterminer les racines carrées de ω.
3. En déduire les solutions complexes de l'équation

$$(1+i)z^2 + z - 2 - i = 0.$$

Exercice 6 :

Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit réel ? Imaginaire ?

Exercice 7 :
Soit le nombre complexe $z = x + iy$, et $\overline{z}$ son conjugué, on définit

$$L(z) = z\left(\overline{z} - 4\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right) - 4i\left(x\sqrt{3} - y\right) + 12.$$

1. Montrer que $L(z) \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Déterminer l'ensemble (C) des points M; d'affixe z, tels que $L(z) = 0$.
3. Soit ω l'affixe du centre du cercle (C), donner la forme exponentielle de ω, puis montrer que $\omega^{2016} = 2^{4032}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0.$$

5. Soit P le polynôme de la variable complexe z, tel que :

$$P(z) = z^3 + z^2\left(\sqrt{3} - 4i\right) + z\left(-5 - 3i\sqrt{3}\right) - 2\left(\sqrt{3} - i\right)$$

   (a) Montrer que $2i$ est une racine de P, puis factoriser $P(z)$.
   (b) Déduire toutes les solutions de $P(z) = 0$.

Exercice 8 :
Dans le plan complexe; muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; on considère les points A, B, C, E et F dont les affixes sont données par :

$$z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = i, z_E = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}}, z_F = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

1. Ecrire z_A, z_B sous la forme exponentielle et z_E et z_F sous la forme algèbrique.
2. Vérifier que

$$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013} + \left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013} = -1 - i.$$

3. Soit le nombre complexe $2\alpha = \left(-1 + \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$,

   (a) Déterminer le nombre complexe z_D tel que $z_D = \alpha^2$, puis l'écrire sous la forme exponentielle.
   (b) Déterminer l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, tel que $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 :

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$?

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(E) : \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}\ ,\ a \in \mathbb{R}$$
Montrer, sans les calculer ; que les solutions de (E) sont réelles. Trouver ensuite ces solutions.
3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 10 :

Soit M un point d'affixe z, déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M tels que :

1. $|z+5i| = 2.$
2. $|\overline{z}-3+i| = |z-5|\,.$
3. $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\,[\pi]\,.$

2.10 Corrigé des exercices

Exercice 1 :

1. On a $\frac{2+2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$
2. On a $\frac{\sqrt{3}+i}{8i} = \frac{1}{8}\left(1-i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{3}}$, d'où $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{8i}\right)^2 = \frac{1}{32}\left(2-i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{16}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$
3. On a $\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i} = 1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$, d'où $\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 = -2+2i\sqrt{3} = 4e^{\frac{2\pi i}{3}}$
4. On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où $(1+i)^4 = 4e^{i\pi} = -4$
   et $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, d'où $\left(\sqrt{3}-i\right)^3 = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} = -8i$, donc
   $\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^3} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

Exercice 2 :
On a $z_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ et $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, d'où $z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$, alors

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

donc

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 3 :
On a

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$$

d'où

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)$$

donc

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

et de la même façon

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

d'où

$$\sin^3\theta = \frac{-1}{8i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)$$

donc

$$\sin^3\theta = \frac{-1}{8i}\left[2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta\right] = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

Exercice 4 :
$z = -2\cos\theta - 2i\sin\theta = -2\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = -2e^{i\theta}$, n'est pas la forme exponentielle de z car le module r de z doit être positif, or on a

$$z = 2\left(-\cos\theta - i\sin\theta\right) = 2\left(\cos\left(\theta+\pi\right) + i\sin\left(\theta+\pi\right)\right) = 2e^{i(\theta+\pi)}$$

Exercice 5 :

1. $|\omega| = |5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a+ib$,

$$z^2 = \omega \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 5+12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 13 \\ a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases},$$

d'où les racines carrées de ω sont

$$\omega_1 = 3+2i$$
$$\omega_2 = -3-2i.$$

3. On calcule le discriminant de l'équation $\Delta = 5+12i = \omega$ et on déduit de la question précédente que l'équation admet deux solutions complexes distinctes

$$z_1 = \frac{-1+3+2i}{2(1+i)} = 1$$
$$z_2 = \frac{-1-3-2i}{2(1+i)} = \frac{-2-i}{1+i} = \frac{(-2-i)}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{-3}{2} + \frac{i}{2}.$$

Exercice 6 :

On pose $z = \sqrt{3}+i$, alors on peut écrire z sous sa forme exponentielle comme suit $z = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$, d'où

$$z^n = \left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n e^{\frac{i\pi n}{6}} = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{6} + i\sin\frac{\pi n}{6}\right).$$

Donc

$$z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi n}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi n}{6} = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \Leftrightarrow n = 6k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

et

$$z^n \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi n}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi n}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 3+6k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 7 :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy\,;\ x,y \in \mathbb{R}$ alors

$$L(z) = x^2 + y^2 - 4x - 4y\sqrt{3} + 12 \in \mathbb{R}$$

2. On a

$$L(z) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y\sqrt{3}+12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y-2\sqrt{3}\right)^2 = 4,$$

donc (C) est le cercle de rayon 2 et de centre $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

3. $\omega = 2+2i\sqrt{3}$, d'où $|\omega| = 4$ et $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \arg(\omega) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, donc $\omega = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\omega^{2016} = \left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016} = 4^{2016}e^{672i\pi} = 4^{2016} = 2^{4032}$.

4. $(E) : z^2 + (3i-4)\,z + 1 - 7i = 0$.
$\Delta = (3i-4)^2 - 4\,(1-7i) = 3+4i$
On cherche les racines carrées de Δ, soit $\delta \in \mathbb{C}$; $\delta = a+ib$ et $\delta^2 = \Delta$ d'où $a^2 - b^2 + 2iab = 3+4i$, alors

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 5 \\ a^2-b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b) = (2,1) \\ \text{ou} \\ (a,b) = (-2,-1) \end{cases}$$

d'où les racines carrées sont $\delta_1 = 2+i$ et $\delta_2 = -2-i$, par suite les solutions de (E) sont

$$z_1 = \frac{-(3i-4)+2+i}{2} = 3-i$$
$$z_2 = \frac{-(3i-4)-2-i}{2} = 1-2i$$

5. On a
$$P(z) = z^3 + z^2\left(\sqrt{3}-4i\right) + z\left(-5-3i\sqrt{3}\right) - 2\left(\sqrt{3}-i\right)$$

   (a) Il suffit de remplacer $2i$ dans $P(z)$ pour trouver $P(2i) = 0$, d'où on a la factorisation

   $$P(z) = (z-2i)\left(z^2+az+b\right) \Leftrightarrow P(z) = z^3+z^2\,(a-2i)+z\,(b-2ia)-2ib$$

   donc par identification on récupère le système suivant :

   $$\begin{cases} a-2i = \sqrt{3}-4i \\ b-2ia = -5-3i\sqrt{3} \\ -2ib = -2\left(\sqrt{3}-i\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3}-2i \\ b = -1-i\sqrt{3} \end{cases}$$

   d'où $P(z) = (z-2i)\left(z^2+\left(\sqrt{3}-2i\right)z+\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right)$
   On calcule le discriminant : $\Delta = 3$, alors

   $$z^2+\left(\sqrt{3}-2i\right)z+\left(-1-i\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_3 = -\sqrt{3}+i \\ z_4 = i \end{cases}$$

   et enfin $P(z) = (z-2i)\left(z+\sqrt{3}-i\right)(z-i)$.

   (b) L'ensemble de toutes les solutions de (E) est $\left\{i, 2i, -\sqrt{3}+i\right\}$.

Exercice 8 :

$$z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = i, z_E = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}}, z_F = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

1. $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_E = -\sqrt{3} - i$, $z_F = 2i$.
2. $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2013} = e^{i\pi\left(334+\frac{3}{2}\right)} = e^{i\pi 334}\ e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$
   $\left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013} = \left(-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = -e^{i\pi 1342} = -1.$
   d'où
   $$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013} + \left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013} = -1 - i.$$
3. $\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$
   (a) $z_D = \alpha^2 \Leftrightarrow z_D = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
   (b) $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n = \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2ie^{i\frac{2\pi}{3}}}\right)^n = -ie^{i\frac{\pi}{6}n} = e^{i\frac{5\pi}{3}n} = e^{-i\frac{n\pi}{3}} = \cos\left(\frac{-n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right)$
   alors
   $$\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{-n\pi}{3} = k\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -3k; k \in \mathbb{Z}^-.$$

Exercice 9 :

1.
$$\begin{aligned}
|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2 \\
&\Leftrightarrow (1+iz)\left(\overline{1+iz}\right) = (1-iz)\left(\overline{1-iz}\right) \\
&\Leftrightarrow (1+iz)(1-i\overline{z}) = (1-iz)(1+i\overline{z}) \\
&\Leftrightarrow 1 - i\overline{z} + iz + z\overline{z} = 1 + i\overline{z} - iz + z\overline{z} \\
&\Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2.
$$(E) : \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}\ ,\ a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow \left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| \\
&\Leftrightarrow \frac{|1+iz|^n}{|1-iz|^n} = 1 \Leftrightarrow |1+iz|^n = |1-iz|^n \\
&\Leftrightarrow |1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ (à vérifier facilement).}
\end{aligned}$$

Pour calculer ces solutions réelles ; on sait que pour tout réel z ; il existe un angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z = \tan\theta$, d'où

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{(\cos\theta - i\sin\theta)^n} = \frac{e^{in\theta}}{e^{-in\theta}} = e^{2in\theta}$$

et on a aussi $a = \tan\alpha$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ d'où

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

alors

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow e^{2in\theta} = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow n\theta = \alpha + k\pi \ , \ k = 0, 1, 2, .., n-1 \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \ , \ k = 0, 1, 2, .., n-1\end{aligned}$$

ainsi

$$z = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) \ , \ k = 0, 1, 2, .., n-1$$

tel que $a = \tan\alpha$.

3. Les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

On pose $\omega = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$, et on a $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$, d'où

$$z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \Leftrightarrow z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} |z|^3 = 1 \\ 3\arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k = 0, 1, 2\end{array}\right.$$

alors

$$\left\{\begin{array}{c} |z| = 1 \\ \arg z = \frac{\pi}{9} + \frac{2k}{3}\pi \ , \ k = 0, 1, 2\end{array}\right.$$

donc les racines cubiques de ω sont $e^{i\frac{\pi}{9}}$, $e^{i\frac{7\pi}{9}}$, $e^{i\frac{13\pi}{9}}$.

Exercice 10 :

1. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z + 5i| = 2\}$ est le cercle de rayon 1 et de centre Ω; d'affixe $\omega = -5i$.
2. $|\overline{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
   Soit A le point d'affixe $3 - i$ et B le point d'affixe 5,
   $|\overline{z} - 3 + i| = \left|\overline{\overline{z} - 3 + i}\right| = \left|\overline{\overline{z}} - 3 - i\right| = |z - 3 - i|$
   alors l'ensemble
   $$\{z \in \mathbb{C} \ / \ |\overline{z} - 3 + i| = |z - 5| \ \} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 3 + i| = |z - 5|\}$$
   est l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ donc la médiatrice du segment $[AB]$.
3. L'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \ / \ \arg(z) = \frac{\pi}{4} \, [\pi]\right\}$ est la première bissectrice privée de l'origine.

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la donnée d'une application* u *de l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

- u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u_0 est appelé premier terme de la suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite arithmétique s'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $u_{n+1} - u_n = a$, dans ce cas on a : $u_n = u_0 + na\,;\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite géométrique s'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, dans ce cas on a : $u_n = u_0.a^n\,;\ \forall n \in \mathbb{N}$.

3.2 Monotonie d'une suite réelle

Définition 3.2.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle,*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite croissante (resp. strictement croissante) si :*
  $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ *(resp. si* $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n > 0$*).*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si :*
  $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n \leq 0$ *(resp. si* $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n < 0$*).*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite monotone si elle est soit croissante soit décroissante.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite strictement monotone si elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.*

Exemples 3.2.2

1. *Pour* $u_n = n^2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$; *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
   En effet ;
   $$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) = n^2 - 1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. *Pour* $u_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$; *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
   En effet ;
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{-n}{(n+1)!} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.3 Suites réelles et relation d'ordre

Définition 3.3.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite majorée si :* $\exists M \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite minorée si :* $\exists m \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N};\ m \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite bornée si elle est majorée et minorée ou s'il existe* $M > 0$ *tel que* $|u_n| \leq M$.

Exemples 3.3.2 1. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos n$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
En effet ; $|u_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est majorée par* 2.
En effet ; on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$k \geq k-1 \Leftrightarrow k^2 \geq k\,(k-1) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k\,(k-1)},$$

d'où

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)}$$

or $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, *d'où*

$$\begin{aligned} & u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}\right) \\ & \Leftrightarrow u_n \leq 1 + \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \ldots - \tfrac{1}{n-1} + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3.4 Sous-suites

Définition 3.4.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* φ *une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$, *la suite* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite sous-suite ou suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.4.2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite réelle telle que* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *on peut en extraire les deux sous-suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que :*

$$u_{2n} = \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.5 Convergence d'une suite

Définition 3.5.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un réel $l \in \mathbb{R}$, tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et on dit que l est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.5.2 *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_n = 1 - \frac{2}{5^n}$.*
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1.

$$(\lim_{n \to +\infty} u_n = 1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon))$$

$$|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{5^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < 5^n \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\ln 5} < n$$

alors il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\frac{\left|\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right|}{\ln 5}\right] + 1$.

Théorème 3.5.3 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente alors sa limite est unique.*

Preuve :
Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers deux limites différentes l_1, l_2,telles que $l_1 \neq l_2$, alors on a :

$$(\lim_{n \to +\infty} u_n = l_1) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$(\lim_{n \to +\infty} u_n = l_2) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Comme

$$|l_2 - l_1| = |(u_n - l_1) + (l_2 - u_n)|,$$

alors si on pose $n''_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N};, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |l_2 - l_1| \leq |(u_n - l_1)| + |(u_n - l_2)| < \varepsilon).$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N};, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |l_2 - l_1| < \varepsilon$$

par conséquent $l_1 = l_2$; absurde. □

Remarque : Une suite est dite divergente si elle tend vers l'infini ou bien si elle admet plusieurs limites différentes.

3.6 Suites divergentes

Définition 3.6.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle,*

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A>0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_A \Rightarrow u_n > A)$$
$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall B<0, \exists n_B \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_B \Rightarrow u_n < B)$$

Proposition 3.6.2 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite divergente, telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*),*
et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $u_n \leq v_n$ *(resp.* $u_n \geq v_n$*),* $\forall n \in \mathbb{N}$; *alors la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente et on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$*).*

Preuve :
En effet, on a
$$\forall A>0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_A \Rightarrow u_n > A$$
et
$$u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$$
alors
$$\forall A>0, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_A \Rightarrow v_n > A,$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
□

Proposition 3.6.3 *Toute suite convergente est bornée.*

Remarques :
1. Par contraposée ; une suite non bornée est divergente.
2. La réciproque n'est pas vraie, une suite bornée n'est pas toujours convergente.

Exemple 3.6.4 *Soit* $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée car*
$$\forall n \in \mathbb{N};\ |(-1)^n| \leq 1.$$
et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente car elle admet deux limites différentes :*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 3.6.5 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente alors toutes ses sous-suites sont convergentes vers la même limite.*

Remarque : Par contraposée, il suffit de trouver deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite pour dire qu'une suite est divergente.

3.7 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 3.7.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes repectivement vers les limites l_1, l_2 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les suites $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi et on a :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l_1 + l_2.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda l_1.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n.v_n) = l_1.l_2.$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$ *si* $l_2 \neq 0.$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l_1|.$

Remarques :

1. La somme de deux suites divergentes peut être convergente.
2. La valeur absolue d'une suite divergente peut être convergente.

Exemples 3.7.2

1. *Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$u_n = 2n \text{ et } v_n = -2n + e^{-n},$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes or la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car $u_n + v_n = 8$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. *Soit $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente or on a $|u_n| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

Propriétés 11

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0 \ (\text{resp. } \lim_{n\to+\infty} u_n \leq 0).$$

2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes telles que $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Preuve :

1. On a $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrons que $l \geq 0$.

Supposons par l'absurde que $l < 0$, et soit $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$ alors on a :

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \frac{|l|}{2}),$$

d'où

$$l - \frac{|l|}{2} < u_n < l + \frac{|l|}{2} < 0,$$

ce qui est absurde car $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. On a $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, soient $l_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $l_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$,
Supposons par l'absurde que $l_2 < l_1$, et soit $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2} > 0$ alors on a :

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2},$$

d'où

$$l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} < u_n < l_1 + \frac{l_1 - l_2}{2} \Leftrightarrow \frac{l_1 + l_2}{2} < u_n < \frac{3l_1 - l_2}{2} \ldots (1)$$

et on a

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2},$$

d'où

$$l_2 - \frac{l_{1,} - l_2}{2} < v_n < l_2 + \frac{l_{1,} - l_2}{2} \Leftrightarrow \frac{3l_2 - l_1}{2} < v_n < \frac{l_1 + l_2}{2} \ldots (2)$$

posons $n''_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, alors de (1) et (2) on a

$$\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow v_n < \frac{l_1 + l_2}{2} < u_n)$$

donc $v_n < u_n$, ce qui est absurde car $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Ou bien on peut simplement voir cette propriété comme conséquence directe de la première, où il suffit de poser $w_n = v_n - u_n$.

$$\begin{aligned} & w_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} w_n \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n \geq \lim_{n \to +\infty} u_n. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.7.3 *Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente vers sa borne supérieure (resp. inférieure).*

Preuve :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1} \text{ et } \exists M \in \mathbb{R}; u_n \leq M$$

posons $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $u = \sup E$; on a alors d'après la caractérisation de la borne supérieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, u - \varepsilon < u_p,$$

et comme $(u_n)_n$ est croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow u_p \leq u_n$$

or $u_n \leq u$, d'où

$$u - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq u < u + \varepsilon,$$

par suite on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - u| < \varepsilon$$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sup E.$ □

Théorème 3.7.4 *(Encadrement d'une suite) Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles, telles que :* $\forall n \geq n_0;\ u_n \leq v_n \leq w_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$*, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$*.*

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$ alors on a $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_1$:

$$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$

et on a $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_1$:

$$|w_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon$$

posons $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, alors $\exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_3$:

$$l - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow |v_n - l| < \varepsilon,$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_3 \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon,$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = l.$$

□

Exemple 3.7.5 $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-\ln n}{n} \leq \frac{(-1)^n \ln n}{n} \leq \frac{\ln n}{n},\ \textit{car}\ \ln n \geq 0.$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = 0.$$

Théorème 3.7.6 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, telles que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0$.*

Preuve :
Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |v_n| \leq M$ et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n v_n| < \varepsilon,$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0$. □

Théorème 3.7.7 *(Bolzano-weiestrass) Toute suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente.*

Preuve :
On utilise la méthode de Dichotomie. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $A \leq u_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}$, on construit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$A_0 = A,\ B_0 = B,\ \varphi(0) = 0$$

L'un des deux intervalles (segments) $\left[A_0, \frac{A_0+B_0}{2}\right]$, $\left[\frac{A_0+B_0}{2}, B_0\right]$ contient les termes de la suite pour une infinité d'indices n, on note $[A_1, B_1]$ cet intervalle et $\varphi(1)$ un entier tel que $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $u_{\varphi(1)} \in [A_1, B_1]$. En répétant cette opération, on a pour tout entier naturel n un intervalle $[A_n, B_n]$ de longueur $\frac{B-A}{2^n}$ et un entier $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in [A_n, B_n]$, d'où $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par construction la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n - A_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{B-A}{2^n} = 0$, d'où les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite l et comme pour tout $n \in \mathbb{N} : A_n \leq u_{\varphi(n)} \leq B_n$ alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite (3.7.4) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = l$. □

Remarque : Ce théoème est une autre propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$.

3.8 Suites adjacentes

Définition 3.8.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

Théorème 3.8.2 *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes vers la même limite.*

Exemple 3.8.3 *Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$;*

$u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$, et $v_n=u_n+\frac{1}{n!}$; convergent vers la même limite car elles sont adjacentes.

En effet, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$.

3.9 Suites de Cauchy

Définition 3.9.1 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall p,q\in\mathbb{N};\ (p\geq n_\varepsilon \text{ et } q\geq n_\varepsilon\Rightarrow|u_p-u_q|<\varepsilon).$$

Théorème 3.9.2 *Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Preuve :
($\Rightarrow$) Etant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un nombre réel l alors on a :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N};\ n\geq n_\varepsilon\Rightarrow|u_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $p,q\in\mathbb{N}$ tels que $p\geq n_\varepsilon$ et $q\geq n_\varepsilon$ alors

$$|u_p-l|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |u_q-l|<\frac{\varepsilon}{2},$$

or $|u_p-u_q|=|u_p-l+l-u_q|$ d'où

$$|u_p-u_q|\leq|u_p-l|+|u_q-l|<\varepsilon,$$

par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

($\Leftarrow$) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall p,q\in\mathbb{N};\ \left(p\geq n_\varepsilon \text{ et } q\geq n_\varepsilon\Rightarrow|u_p-u_q|<\frac{\varepsilon}{3}\ \dots\ (1)\right)$$

d'où
$$u_q - \frac{\varepsilon}{3} < u_p < u_q + \frac{\varepsilon}{3},$$
pour $q \geq n_\varepsilon$ fixé, alors la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, car même si $p < n_\varepsilon$ alors la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a pour valeurs $\{u_0, u_1, ..., u_{n_\varepsilon - 1}\}$.

Posons $A_n = \{u_k\ ,\ k \geq n\} = \{u_n, u_{n+1}, ..., ..\}$, on remarque que A_n est un ensemble borné car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'où $\sup A_n$ et $\inf A_n$ existent, notons $\inf A_n = a_n$ et $\sup A_n = b_n$ donc $a_n \leq u_k \leq b_n$, $\forall k \geq n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n$, d'où
$$\begin{cases} \sup A_{n+1} \leq \sup A_n \\ \inf A_n \leq \inf A_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \\ a_n \leq a_{n+1} \end{cases}$$

alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

On a aussi:
$$\sup A_n = b_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}; p \geq n : 0 \leq b_n - u_p < \frac{\varepsilon}{3} \ldots (2)$$
$$\inf A_n = a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{N}; q \geq n : 0 \leq u_q - a_n < \frac{\varepsilon}{3} \ldots (3)$$

Par suite ; comme
$$|b_n - a_n| = |b_n - u_p + u_p - u_q + u_q - a_n|,$$
alors
$$|b_n - a_n| \leq |b_n - u_p| + |u_p - u_q| + |u_q - a_n|$$
d'où
$$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon$$
or $b_n \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$; alors
$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon,$$
par suite
$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

par conséquent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergent vers la même limite l, et comme $a_n \leq u_k \leq b_n$, $\forall k \geq n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente aussi vers la même limite l. □

Exemple 3.9.3 *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k(k+1)}$ *est convergente car elle* *est de Cauchy. En effet, soient $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p \geq q$, et soit $\varepsilon > 0$*

$$|u_p - u_q| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} \frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left|\frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow |u_p - u_q| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} < \frac{1}{q+1},$$

alors il suffit que $\frac{1}{q+1} < \varepsilon$, ce qui équivaut à $q > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, et donc il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$, pour avoir :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N};\ (p \geq n_\varepsilon \wedge q \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon)$$

Par conséquent; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est divergente il suffit de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy, en utilisant la négation du critère de Cauchy.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}; p \geq n_\varepsilon \wedge q \geq n_\varepsilon \wedge |u_p - u_q| \geq \varepsilon.$$

3.10 Suites récurrentes

Définition 3.10.1 *Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, telle que $f(D) \subset D$. On appelle suite récurrente une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; définie par la donnée de $u_0 \in D$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

- Si la fonction f est croissante alors la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à l'étude du signe de la différence $f(u_0) - u_0$.
  - Si $f(u_0) - u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  - Si $f(u_0) - u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Si la fonction f est monotone et continue sur D et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $l \in D$ alors sa limite vérifie l'équation $f(l) = l$ (point fixe).

3.11 Enoncés des exercices

Exercice 1 :
En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :
1/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$, 2/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$, 3/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(1+n)}{\ln n} = 2$,
4/ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, 5/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5n^2-2}{4n} = -\infty$, 6/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$.

Exercice 2 :
Calculer les limites des suites suivantes de terme général :
1. $U_n = \frac{\cos(2n^3-5)}{3n^3+2n^2+1}$, 2. $U_n = \frac{(2n^4-8n^2)}{3n^4+\cos n+\frac{1}{n^5}}$, 3.$U_n = \frac{3^n+(-3)^n}{3^n}$,

4. $U_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$, 5. $U_n = \frac{3^n - 2.5^n + 6.7^n}{7.2^n + 3.4^n + 5.7^n}$,
6. $U_n = \frac{e^{2n} - e^n + 1}{2e^n + 3}$, 7. $U_n = n^{\alpha} e^{-\beta n}$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.
8. $U_n = \frac{n}{2^n}$,
(indication : en utilisant le binôme de Newton ; montrer que $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$).

Exercice 3 :

1. En utilisant le principe d'encadrement d'une suite, montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l à déterminer dans chaque cas :
   $a/U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k}$, $b/U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
   $c/U_n = \frac{[\sqrt{n}]}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, (où [ ] désigne la partie entière).
2. Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Exercice 4 :
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que : $0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $V_n = 2 - U_n$,$\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Quel est le signe de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$.
   (c) En utilisant un raisonnement par récurrence montrer que :
   $$V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 :
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $U_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.

4. Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$, montrer que $U_{n+1} = e^{-S_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 6 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n+4}{3U_n+3}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que : $0 \leq U_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Etudier la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite
4. Soit $E = \{U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$; déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 7 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \ln(1+U_n); \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que : $0 < U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
2. On pose $g(x) = \ln(1+x) - x$; étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$, puis préciser son signe sur $]0, +\infty[$
3. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.
5. Soit $E = \{U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$; déterminer $\inf E$ et montrer que $\sup E$ est positif.

Exercice 8 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $V_n = \frac{U_n}{\sqrt{n}}$; montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite à préciser.

Exercice 9 :

On définit les deux suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+2V_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n+3V_n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = V_n - U_n$.
   Exprimer la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de n puis calculer sa limite.
2. Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 10 :

En utilisant le critère de Cauchy montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ est divergente.

$$1/U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2/V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}, \forall n \geq 2.$$

3.12 Corrigés

Exercice 1 :

1. $\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{2n+3}=\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \left|\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)\right)$
   On a $\left|\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{11}{4n+6}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{11}{4\varepsilon}-\frac{3}{2}<n$
   Alors il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\left|\frac{11}{4\varepsilon}-\frac{3}{2}\right|\right]+1$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=0\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \left|\frac{1}{2^n}\right|<\varepsilon\right)\right)$
   On a $\frac{1}{2^n}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}<n$. Alors il suffit de $n_\varepsilon=\left[\left|\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right|\right]+1$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}=2\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|<\varepsilon\right)\right)$
   On a
   $\left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|=\left|\frac{2\ln(1+n)-2\ln n}{\ln n}\right|=\left|\frac{2\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)}{\ln n}\right|=2\left|\frac{\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\ln n}\right|=\frac{2\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\ln n}$
   et on sait que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n}\leq 1$ donc $\frac{2\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\ln n}\leq\frac{2\ln 2}{\ln n}$, alors pour que $\left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|<\varepsilon$; il suffit que : $\frac{2\ln 2}{\ln n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>e^{\frac{2\ln 2}{\varepsilon}}$, d'où il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[e^{\frac{\ln 4}{\varepsilon}}\right]+1$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty\Leftrightarrow(\forall A>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ 3^n>A))$
   On a $3^n>A\Leftrightarrow n>\frac{\ln A}{\ln 3}$, alors il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{|\ln A|}{\ln 3}\right]+1$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-5n^2-2}{4n}=-\infty\Leftrightarrow\left(\forall B<0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};\left(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \frac{-5n^2-2}{4n}<B\right)\right)$
   On a $\frac{-5n^2-2}{4n}<B\Leftrightarrow\frac{5n^2+2}{4n}>-B$ et on sait que :
   $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $5n^2+2>5n^2\Leftrightarrow\frac{5n^2+2}{4n}>\frac{5n}{4}$, alors pour que $\frac{5n^2+2}{4n}>-B$; il suffit que $\frac{5n}{4}>-B\Leftrightarrow n>\frac{-4B}{5}$: d'où il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[\frac{-4B}{5}\right]+1$.
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\ln n)=+\infty\Leftrightarrow(\forall A>0,\ \exists?n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N};(n\geq n_\varepsilon\Rightarrow\ \ln(\ln n)>A))$
   $\ln(\ln n)>A\Leftrightarrow n>e^{e^A}$, alors il suffit de prendre $n_\varepsilon=\left[e^{e^A}\right]+1$.

Exercice 2 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(2n^3-5\right)}{3n^3+2n^2+1}=0$, car $|\cos(2n^3-5)|\leq 1\,;\forall n\in\mathbb{N}$; et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3n^3+2n^2+1}=0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(2n^4-8n^2\right)}{3n^4+\cos n+\frac{1}{n^5}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{8}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{\cos n}{n^4}+\frac{1}{n^9}\right)}=\frac{2}{3}$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n+(-3)^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}[1+(-1)^n]=\begin{cases}0 \text{ si } n \text{ est impair}\\ 2 \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$
   $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n-2.5^n+6.7^n}{7.2^n+3.4^n+5.7^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n-2.\left(\frac{5}{7}\right)^n+6}{7.\left(\frac{2}{7}\right)^n+3.\left(\frac{4}{7}\right)^n+5}=\frac{6}{5}$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-e^{n}+1}{2e^{n}+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-n}+e^{-2n}}{2e^{-n}+3e^{-2n}}=+\infty$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha}e^{-\beta n}=0$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha}e^{-\beta n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}e^{\beta n}}=0,\text{ si }\alpha<0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\alpha}}{e^{\beta n}}=0,\text{ si }\alpha>0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{\beta n}}=0,\text{ si }\alpha=0.\end{cases}$

8. On a le binôme de Newton :
   $(a+b)^{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}.a^{k}.b^{n-k};\ \forall a,b\in\mathbb{R},$

   d'où
$$2^{n}=(1+1)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+...+1,$$

donc
$$2^{n}>\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow\frac{n}{2^{n}}<\frac{2}{n-1},$$
$$\Rightarrow 0<\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^{n}}\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n-1}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n-1}=0$ alors
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^{n}}=0.$$

Exercice 3 :

1. (a) Pour $U_{n}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{n}{n^{3}+k}$;
   On a $\forall k=1,...,n$:
$$n^{3}+1\leq n^{3}+k\leq n^{3}+n\Leftrightarrow\frac{n}{n^{3}+n}\leq\frac{n}{n^{3}+k}\leq\frac{n}{n^{3}+1}$$
   d'où
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^{3}+n}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^{3}+k}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^{3}+1}\Leftrightarrow\frac{n^{2}}{n^{3}+n}\leq U_{n}\leq\frac{n^{2}}{n^{3}+1}$$
   Comme
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2}}{n^{3}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2}}{n^{3}+1}=0,$$
   alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite on a
$$\lim_{n\to+\infty}U_{n}=0.$$

   (b) Pour $U_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^{2}+k}}$

On a $\forall k = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned} n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \quad &\Leftrightarrow \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite on a

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

(c) Pour $U_n = \frac{[\sqrt{n}]}{n}, n \in \mathbb{N}^*$,
On a

$$\forall x \in \mathbb{R} : [x] \leq x \leq [x] + 1,$$

donc en particulier :

$$\left[\sqrt{n}\right] \leq \sqrt{n} \leq \left[\sqrt{n}\right] + 1,$$

posons $[\sqrt{n}] = p$ alors :

$$\begin{aligned} 0 < p \leq \sqrt{n} \leq p+1 \quad &\Leftrightarrow p^2 \leq n \leq (p+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{(p+1)^2} \leq \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{1}{p^2} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{p}{(p+1)^2} \leq U_n \leq \tfrac{1}{p}, \end{aligned}$$

alors d'après le théorème de l'encadrement d'une suite on a

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$

2. Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}}, ;$
On a $\forall k = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned} |\sin k| \leq 1 \quad &\Leftrightarrow 3 + |\sin k|\sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{n} \\ &\Rightarrow 3 + |\sin k|\sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{n} \Leftrightarrow \tfrac{1}{3+\sqrt{n}} \leq \tfrac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{3+\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{3+|\sin k|\sqrt{k}} \Leftrightarrow \tfrac{n}{3+\sqrt{n}} \leq U_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3+\sqrt{n}} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Exercice 4 :

1. Par récurrence :
   pour $n = 0$: on a $0 \leq U_0 < 2$.
   On suppose que $0 \leq U_n < 2$, alors
   $$2 \leq U_n + 2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq U_{n+1} < 2 \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} < 2.$$
   donc
   $$0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   $$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 2} - U_n = \frac{U_n + 2 - U_n^2}{\sqrt{U_n + 2} + U_n} = \frac{(U_n + 1)(2 - U_n)}{\sqrt{U_n + 2} + U_n}$$
   et on a
   $$0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$$
   donc
   $$(U_n + 1)(2 - U_n) > 0$$
   et par conséquent $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. $V_n = 2 - U_n$,$\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) On remarque de la question 1 que $U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ donc
   $$0 < V_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (b)
   $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2 - U_{n+1}}{2 - U_n} = \frac{2 - \sqrt{U_n + 2}}{2 - U_n} = \frac{(2 - U_n)}{(2 - U_n)\left(2 + \sqrt{U_n + 2}\right)} = \frac{1}{2 + \sqrt{U_n + 2}}$$
   or $\forall n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leq U_n \Leftrightarrow 2+\sqrt{2} \leq 2+\sqrt{U_n + 2} \Rightarrow 2 \leq 2+\sqrt{U_n + 2} \Leftrightarrow \frac{1}{2 + \sqrt{U_n + 2}} \leq \frac{1}{2}.$$
   (c) Par récurrence :
   pour $n = 1$: on a $V_1 \leq 1$.
   On suppose que $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, alors
   $$V_{n+1} \leq \frac{1}{2}V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$
   car $0 < V_n, \forall n \in \mathbb{N}$ d'où
   $$V_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   donc
   $$V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(d) Comme
$$0 < V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
et
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$
par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ et comme $U_n = 2 - V_n$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2.$$

Exercice 5 :

1. Par récurrence :
   pour $n = 0$: on a $U_0 > 0$.
   On suppose que $U_n > 0$ alors $U_n e^{-U_n} > 0$, donc
$$U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$U_{n+1} - U_n = U_n \left(e^{-U_n} - 1\right)$$
   comme $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ donc
$$-U_n < 0 \Leftrightarrow e^{-U_n} - 1 < 0$$
   et par suite
$$U_{n+1} - U_n < 0$$
   donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée et décroissante alors elle est convergente vers sa borne inférieure.
   Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}$, d'où
$$U_{n+1} = U_n e^{-U_n} \Rightarrow l = l e^{-l} \Leftrightarrow l\left(e^{-l} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow l = 0.$$
   Alors
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$
4. Par récurrence :
   pour $n = 0$: on a $U_1 = e^{-U_0} = e^{-S_0}$.
   Supposons que $U_{n+1} = e^{-S_n}$, et montrons que $U_{n+2} = e^{-S_{n+1}}$
$$U_{n+2} = U_{n+1} e^{-U_{n+1}} = e^{-S_n} e^{-U_{n+1}} = e^{-S_{n+1}}$$
   donc
$$U_{n+1} = e^{-S_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. On a
$$S_n = -\ln U_{n+1} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$
alors :
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Exercice 6 :

1. Par récurrence :
pour $n = 0$: on a $0 \leq U_0 \leq 2$.
On suppose que $0 \leq U_n \leq 2$, d'où :
$$U_n \geq 0 \Rightarrow \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \geq 0$$
et
$$U_n \leq 2 \Leftrightarrow 7U_n + 4 \leq 6 + 6U_n \Leftrightarrow \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \leq 2$$
donc $0 \leq U_{n+1} \leq 2$.
Et par conséquent : $0 \leq U_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$U_{n+1} - U_n = \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} - U_n = \frac{-3U_n^2 + 4U_n + 4}{3U_n + 3} = \frac{(2 + 3U_n)(2 - U_n)}{3U_n + 3}$$
comme on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2,$$
alors
$$(2 + 3U_n)(2 - U_n) \geq 0$$
et on a aussi $3U_n + 3 > 0$ donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle est convergente vers sa borne supérieure.
Posons $\lim_{n\to+\infty} U_n = l = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1}$, d'où
$$\begin{aligned} U_{n+1} = \tfrac{7U_n+4}{3U_n+3} &\Rightarrow l = \tfrac{7l+4}{3l+3} \\ &\Leftrightarrow 3l^2 - 4l - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 + 3l)(l - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 2 \vee l = -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$
or $U_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$ d'où
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2.$$
4. $E = \{U_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$; d'où
$$\sup E = \lim_{n\to+\infty} U_n = 2.$$
Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; alors U_0 est un minorant de E, en effet : $U_0 \leq U_n; \forall n \in \mathbb{N}$, de plus $U_0 \in E$; donc $\min E = U_0 = \inf E$.

Exercice 7 :

1. Par récurrence :
   pour $n = 0$: on a $U_0 > 0$.
   On suppose que $U_n > 0$, d'où : $1 + U_n > 1$, alors $\ln(1 + U_n) > 0$, car la fonction ln est strictement croisssante, et donc $U_{n+1} > 0$
   donc $U_n > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $g(x) = \ln(1 + x) - x$;
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 + x)\left[\frac{\ln(1 + x)}{1 + x} - \frac{x}{1 + x}\right] = -\infty.$$
$$g'(x) = \frac{-x}{1 + x}, \forall x \in]0, +\infty[\,,$$
   donc
$$g'(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[\,.$$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

   Par conséquent,
$$g(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[\,.$$
3. La monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$U_{n+1} - U_n = \ln(1 + U_n) - U_n = g(U_n) < 0$$
   donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée et décroissante alors elle est convergente vers sa borne inférieure.
   Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}$, d'où $l \geq 0$ et $l = \ln(l + 1)$ car ln est une fonction continue donc
$$\ln(l + 1) - l = 0 \Leftrightarrow g(l) = 0$$
   et d'après le tableau de variations de g on a $l = 0$.
5. $E = \{U_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$; $\inf E = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors U_0 est un majorant de E, qui appartient à E, d'où
$$\max E = \sup E = U_0 > 0.$$

Exercice 8 :
$U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. $\forall k = 1, ..., n$;

$$k \leq n \Leftrightarrow \sqrt{k} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq U_n$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} \quad & \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{n} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} \end{cases} \\ & \Rightarrow 2\sqrt{n} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} \\ & \Leftrightarrow \tfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \tfrac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

3. On a pour tout $k = 1, .., n$: $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ alors :

$$\begin{cases} \text{pour } k = 1 \text{ on a } \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{2} - 1 \leq \frac{1}{2} \\ \text{pour } k = 2 \text{ on a } \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \qquad \vdots \\ \text{pour } k = n \text{ on a } \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \tag{3.1}$$

En prenant la somme de (3.1) terme à terme de $k = 1$ à $k = n$ on obtient :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] \leq \sqrt{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

d'où

$$\frac{1}{2}\left[U_{n+1} - 1\right] \leq \sqrt{n+1} - 1 \leq \ \frac{1}{2} U_n \Rightarrow 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq U_n ... (1)$$

Et en faisant la somme de (3.1) terme à terme de $k = 1$ à $k = n-1$ on obtient :

$$\frac{1}{2}\left[U_n - 1\right] \leq \sqrt{n} - 1 \Leftrightarrow U_n \leq 2\sqrt{n} - 1 ... (2)$$

de (1) et (2) on obtient

$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

4. On a $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)}{\sqrt{n}} \leq \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}}$$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$, car

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} = 2.$$

Exercice 9 :

1. $W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n+3V_n}{4} - \frac{U_n+2V_n}{3} = \frac{1}{12}W_n$.
   On en déduit que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{12}$, d'où
   $$W_n = W_1 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = \frac{11}{12^{n-1}}$$
   et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

   - $$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \frac{2}{3}(V_n - U_n) = \frac{2}{3}W_n,$$
     alors :
     $$U_{n+1} - U_n > 0$$
     car $W_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, d'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.
   - $$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3V_n}{4} - V_n = \frac{-1}{4}(V_n - U_n) = \frac{-1}{4}W_n,$$
     alors :
     $$V_{n+1} - V_n < 0,$$
     d'où $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n - U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

   Par conséquent ; $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites adjacentes.

Exercice 10 :

1. $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
   $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \forall p, q \in \mathbb{N} : \left(\begin{cases} n_\varepsilon \leq p \\ n_\varepsilon \leq q \end{cases} \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon \right)$$
   Etant donnés $\varepsilon > 0, p, q \in \mathbb{N}$, supposons $p > q$:
   $$\begin{aligned} |U_p - U_q| = \left| \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin k}{2^k} - \sum_{k=1}^{q} \frac{\sin k}{2^k} \right| &= \left| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\sin k}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=q+1}^{p} \left| \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$
   car $|\sin k| \leq 1$, $\forall k = 1, ..., n$.
   Or,
   $$\sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q+1}} + \frac{1}{2^{q+2}} + ... + \frac{1}{2^p}$$

est la somme des $p-q$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où :

$$\sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q+1}} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{p-q}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2^q} \left(1 - \frac{1}{2^{p-q}} \right)$$

donc

$$\sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^q}.$$

Par conséquent :

$$|U_p - U_q| \leq \frac{1}{2^q}.$$

Alors pour que $|U_p - U_q| < \varepsilon$, il suffit que :

$$\frac{1}{2^q} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^q \Leftrightarrow q > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}.$$

Et donc il suffit de prendre $n_\varepsilon = \left[\left| \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right| \right] + 1$.

2. $V_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}, \forall n \geq 2$.

   $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N};\ \exists p, q \in \mathbb{N} : \left(\begin{cases} n \leq p \\ n \leq q \end{cases} \wedge |V_p - V_q| \geq \varepsilon \right)$$

On prend $q = n$ et $p = 2n$ alors

$$|V_p - V_q| = |V_{2n} - V_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\ln k} \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\ln k}$$

or $\ln k < k$, $\forall k > 0$, d'où

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\ln k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \Rightarrow |V_p - V_q| > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

D'une autre part ; on a pour tout k tel que : $2 \leq k \leq 2n$:

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n},$$

d'où

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

or

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow |V_p - V_q| > \frac{1}{2}.$$

par conséquent, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Définitions.

Définition 4.1.1 - *Une fonction réelle d'une variable réelle est une application f d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$, notée*

$$f: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle x la variable réelle et $f(x)$ l'image de x par f.

On appelle graphe de f toute partie Γ_f du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; telle que $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in E\}$.

Le domaine de définition de f est l'ensemble des valeurs de $x \in E$ pour lesquelles la fonction $f(x) \in F$, on le note par D_f.

On note par $\mathcal{F}(E, F) = \{Ensemble \ des \ fonctions \ de \ E \ dans \ F\}$.

Définition 4.1.2 *(Parité d'une fonction)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est dite paire si $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$: le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe $(y'y)$.

f est dite impaire si $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$: le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine o.

Définition 4.1.3 *(Périodicité d'une fonction)*

On dit que f est une fonction périodique s'il existe un nombre réel strictement positif T tel que :

$$\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x).$$

Exemples 4.1.4 - *Pour $f(x) = \sin x$ ou $f(x) = \cos x$, on a $T = 2\pi$.*

- *Pour $f(x) = \tan x$, on a $T = \pi$.*
- *Pour $f(x) = x - [x]$, on a $T = 1$.*
- *Pour $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$, on a $T = \frac{4\pi}{3}$.*

Remarques :

1. Si f est paire ou impaire, alors il suffit de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition.
2. Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires.
3. Si f est périodique de période T, alors il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T.

4.1.1 Fonctions monotones

Définition 4.1.5 *Soit $f : E \to F$ une fonction, telle que $E, F \subset \mathbb{R}$.*

f est dite croissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

f est dite décroissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

f est dite monotone si f est croissante ou décroissante.

f est dite strictement croissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

f est dite strictement décroissante si $\forall x, y \in E : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

f est dite strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque : Si la fonction f est strictement monotone alors f est injective, voir Lemme 4.5.24.

4.1.2 Fonctions bornées

Définition 4.1.6 *Soit $f : E \to F$ une fonction, telle que $E, F \subset \mathbb{R}$.*

f est dite majorée sur E si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) \leq M$.

f est dite minorée sur E si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E : m \leq f(x)$.

f est dite bornée sur E si f est minorée et majorée, ou s'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M, \forall x \in E$.

4.2 Limite d'une fonction

Définition 4.2.1 *Soit f une fonction définie d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.*

On dit que f admet une limite lorsque x tend vers x_0 et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ s'il existe un nombre réel l tel que

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Théorème 4.2.2 *Si f admet une limite au point x_0 alors cette limite est unique.*

Preuve :
Supposons par l'absurde que f admet deux limites différentes l_1 et l_2 $(l_1 \neq l_2)$

lorsque x tend vers x_0, d'où on a

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha_1 > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha_2 > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)|$$

alors pour $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$; on a

$$|l_1 - l_2| \leq |(f(x) - l_1)| + |(f(x) - l_2)| < \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$l_1 = l_2.$$

□

Définition 4.2.3 .

- On dit que f admet une limite l_g lorsque x tend vers x_0 à gauche ou par des valeurs inférieures et on note $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = l_g$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- On dit que f admet une limite l_d lorsque x tend vers x_0 à droite ou par des valeurs supérieures et on note $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = l_d$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposition 4.2.4 ***Remarques :***

1. *Si f admet une limite l lorsque x tend vers x_0 alors*

$$\lim_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = l.$$

2. *Si f admet une limite à gauche de x_0 notée l_g et une limite à droite de x_0 notée l_d ; telles que $l_g = l_d$ alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_g = l_d.$$

3. *Si les deux limites l_g et l_d existent et sont différentes alors f n'admet pas de limite lorsque x tend vers x_0.*

4.2.1 Autres limites

1. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

2. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A)$
3. $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
4. $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$
5. $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
6. $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
7. $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x > \alpha \Rightarrow f(x) < A)$
8. $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha < 0, \forall x \in I \ / \ x < \alpha \Rightarrow f(x) < A)$
9. $\left(\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A)$
10. $\left(\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) < A)$
11. $\left(\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
12. $\left(\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) < A)$

4.2.2 Relation entre limite de fonctions et limite de suites

Théorème 4.2.5 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point de $[a, b]$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l.$
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $x_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $x_n \neq x_0$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$; on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.*

Preuve :
$(1) \overset{?}{\Rightarrow} (2)$
On a

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b] \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in [a,b]$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x_0$ et telle que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon')$$

alors en particulier pour $\varepsilon' = \alpha$; on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

$(2) \overset{?}{\Rightarrow} (1)$

On suppose par l'absurde que la première assertion est fausse alors par la négation de la définition ; on a

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in [a,b] \ / \ |x - x_0| < \alpha \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

en particulier pour $\alpha = \frac{1}{n}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \exists x_n \in [a,b] \ / \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l; ce qui est absurde, alors la première assertion est vraie. □

Remarques :

1. Le théorème reste vrai pour $x = \pm\infty$ ou $l = \pm\infty$.
2. S'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a,b]$; qui convergent vers x_0 avec $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.
3. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a,b]$; qui converge vers x_0 mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ n'existe pas alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 4.2.6 *Soit* $f(x) = \sin\frac{1}{x}, \forall x \in \left[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ *et montrons que* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas.*

On considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\left[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$, *qui convergent vers* 0 *et on pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \ \ et\ y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \ \ et \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$$

par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas.*

4.2.3 Opérations sur les limites de fonctions

Théorème 4.2.7 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$; alors on a :*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) . g(x)] = l_1 . l_2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \alpha [f(x)] = \alpha l_1$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ *où* $l_2 \neq 0$.

Formes indéterminées

On distingue 4 cas de limite où on ne peut pas conclure, on dit qu'on se trouve en présence d'une forme indéterminée F.I, si lorsque x tend vers x_0 on a

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$
   et $f+g$ qui se présente sous la forme $+\infty - \infty$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$
   et fg qui se présente sous la forme $(0)(\infty)$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$
   et $\frac{f}{g}$ qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.
4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
   et $\frac{f}{g}$ qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Dans ces cas là on enlève l'indétermination par des transformations adéquates.

Exemple 4.2.8 $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$ *F.I*
On a $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ *d'où*

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} 2\cos x = 2$$

4.3 Notations de Landau o et O.

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.

Définition 4.3.1 *On dit que f est négligeable devant g quand x tend vers x_0, et on écrit $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou bien $f = o(g)$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Remarques :

1. $f = o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$
2. $f = o(g) \Leftrightarrow \left(f(x) = g(x)\, h(x) / \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0 \right)$ on peut écrire aussi : $f = g.o(1)$.
3. Si $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $f = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0.$

Définition 4.3.2 *On dit que f est dominée par la fonction g quand x tend vers x_0, et on écrit $f \underset{x_0}{=} O(g)$ ou bien $f = O(g)$ si :*

$$\exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq K\, |g(x)|$$

- Les symboles o et O sont appelés notations de Landau.

Remarques :

1. Si $f = O(g)$ alors on peut écrire $f = g.o(1)$, ie, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0.
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$est finie alors $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0 d'où $f = O(g)$.
3. Si $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $f = O(1) \Leftrightarrow f$ est bornée dans un voisinage de x_0.

Définition 4.3.3 *Soient f, g deux fonctions définies sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$ on a*

$$f \underset{+\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ x > \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|.$$
$$f \underset{+\infty}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists K > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R};\ x > \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq K\, |g(x)|.$$

Exemples 4.3.4

1. $x \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. $\tan x \underset{0}{=} O(2x)$.

3. $x^2 \sin \frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} -x^3 + o(x^4)$.

4. $\frac{1}{1-x} \underset{+\infty}{=} \frac{-1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Théorème 4.3.5 *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.*

1. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$, *la réciproque n'est pas toujours vraie.*

2. $f = O(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g)$

3. $f = o(g), h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g)$

4. $f = o(g), h = O(1) \Rightarrow f.h = o(g)$

5. $f = o(g), h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g)$

6. $f = O(g), h = O(1) \Rightarrow fh = O(g)$

7. $f = o(g), h = O(f) \Rightarrow h = o(g)$

8. $f = O(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g)$

4.4 Fonctions équivalentes

Définition 4.4.1 *Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$.*

On dit que f est équivalente à g quand x tend vers x_0, et on note $f \underset{x_0}{\sim} g$ si $f - g = o(f)$ au voisinage de x_0.

Remarques :

1. $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = o(f) \Leftrightarrow f - g = o(g)$.
2. S'il existe un voisinage V de x_0, tel que f et g ne s'annulent pas dans $V \setminus \{x_0\}$, alors
$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
3. La relation "f est équivalente à g quand x tend vers x_0" est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de x_0.

Théorème 4.4.2 *Soient f, f_1, g, g_1 des fonctions définies dans un voisinage de x_0, sauf peut être en x_0 telles que $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$; si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ existe aussi et les deux limites sont égales.*

Remarques :

1. Si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $\frac{f}{g} \underset{x_0}{\sim} \frac{f_1}{g_1}$.
2. On a le même résultat pour le produit : si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x)$ existe alors $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x).g_1(x)$ existe aussi et les deux limites sont égales, d'où si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors $f.g \underset{x_0}{\sim} f_1.g_1$.
3. Dans le calcul des limites ; on peut remplacer une fonction par sa fonction équivalente dans le produit et la division seulement, ceci n'est pas vrai dans le cas de la somme et la différence.
4. Si f est une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$; alors
$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemples 4.4.3 .

1/ $\sin x \underset{0}{\sim} x$, 2/ $\tan x \underset{0}{\sim} x$, 3/ $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,

4/ $\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$, 5/ $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Exercice 4.4.4 *En utilisant les fonctions équivalentes calculer les limites suivantes :*

1. $l_1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^x-1)(\tan x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x)^2 = 0.$

2. $l_2 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+(\sin x)^2\right)}{\sin \frac{x}{3}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x)^2}{\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x \to 0} 3x = 0.$

3. $l_3 = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}$
Ici on se ramène au voisinage de 0 *par le changement de variables suivant*

$$C.V : t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$$

d'où

$$l_3 = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1.$$

4. $l_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}$
Ici on se ramène au voisinage de 0 *par le changement de variables suivant*

$$C.V : t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$$

d'où

$$l_4 = \lim_{t \to 0} \frac{(e^t - 1)^2}{\ln(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t = 0.$$

4.5 Fonctions continues

Définition 4.5.1 1. *Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. *f est dite continue à droite de x_0 si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$, ceci est équivalent à*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3. *f est dite continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$, ceci est équivalent à*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ / \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

4. *f est continue en x_0 si f est continue à droite et à gauche de x_0 :*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

5. *Une fonction qui n'est pas continue en x_0 est dite discontinue en x_0.*
6. *Une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite continue sur I; si elle est continue en tout point de I.*

7. *L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $C(I)$.*

Exemple 4.5.2 1. *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.*

2. *La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 1 & , si\ x = 0 \end{cases}$ est continue en $x = 0$, en effet,*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$

3. *La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \ln x & , si\ x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x^3-1} & , si\ x < 1 \end{cases}$ est discontinue en $x = 1$, en effet*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$$

et

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1) = 0.$$

Théorème 4.5.3 *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n\to +\infty} x_n = x_0$ alors :*

$$\lim_{n\to +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

4.5.1 Continuité uniforme

Définition 4.5.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. f est dite uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x_1, x_2 \in I \ / \ |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Remarques :

1. La continuité uniforme concerne tous les points de l'intervalle, tandis que la continuité simple peut ne concerner qu'un point de l'intervalle.
2. Dans la continuité uniforme, le nombre α ne dépend pas de x_1, x_2, il ne dépend que de ε, tandis que pour la continuité en x_0, le nombre α dépend de ε et de x_0.
3. Toute fonction uniformément continue sur un intervalle I, est continue sur I, la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 4.5.5 *Montrer que :*

1. *La fonction $f(x) = x^2$, est uniformément continue sur $]0, 1]$,*

2. La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $x_1, x_2 \in]0,1]$ alors on a :

$$0 < x_1 \leq 1 \text{ et } 0 < x_2 \leq 1 \Rightarrow 0 < x_1 + x_2 \leq 2$$

or

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^2 - x_2^2\right| = |x_1 - x_2|(x_1 + x_2)$$

d'où

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

2. Si on prend $\varepsilon = 2$; on peut trouver deux points $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tels que : $x_1 = n + \frac{1}{n}$, $x_2 = n$ et pour $\alpha > 0$; on a

$$|x_1 - x_2| < \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < n;$$

il suffit alors de prendre $n = \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1$ alors

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{n^2} + 2$$

d'où

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq 2;$$

par suite

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ / \ |x_1 - x_2| < \alpha \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

et donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Le procédé qui suit est une méthode pratique pour montrer qu'une fonction est uniformément continue.

Définition 4.5.6 *On dit qu'une fonction f définie de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $k-$Lipschitzienne sur I si :*

$$\exists k \geq 0, \forall x_1, x_2 \in I \ : \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Remarque : Une fonction $k-$Lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

en effet ; pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$, tel que

$$\forall x_1, x_2 \in I \ / \ |x_1 - x_2| < \alpha \text{ alors } |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| < \varepsilon.$$

Définition 4.5.7 *On dit qu'une fonction f est contractante sur I si f est $k-$Lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$.*

Conclusion 1 *Une fonction contractante sur I est uniformément continue sur I.*

Exemple 4.5.8 *La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction contractante sur* $[1, +\infty[$.
En effet ;

$$\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty[: |f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right|$$

d'où

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| ; \ k = \frac{1}{2}.$$

Théorème 4.5.9 (de Heine) *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *est une fonction uniformément continue sur* $[a, b]$.

Preuve :
On suppose par l'absurde que f est continue mais non uniformément continue sur $[a, b]$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel n, il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a, b]$ telles que

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon > 0 \tag{4.1}$$

Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $[a, b]$ alors d'après le théorème de Bolzano Weierstrass on peut en extraire deux sous-suites convergentes $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Soit $\lim\limits_{k\to +\infty} x_{n_k} = x_0$ donc $\lim\limits_{k\to +\infty} x'_{n_k} = x_0$ aussi car $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$, et comme $x_{n_k} \in [a, b] ; \forall k \in \mathbb{N}$, alors $x_0 \in [a, b]$ et donc f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{k\to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to +\infty} f\left(x'_{n_k}\right) = f(x_0)$$

ce qui est absurde car $\left|f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| > 0; \forall k \in \mathbb{N}$. □

4.5.2 Prolongement par continuité

Définition 4.5.10 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf peut être en $x_0 \in I$, si f admet une limite finie l en x_0 ; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, alors la fonction définie par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ l & si\ x = x_0 \end{cases} ;$$

est appelée prolongement par continuité de f sur I.

Remarques :

1. Les deux fonctions $\widetilde{f}$ et f coincident sur $I \setminus \{x_0\}$.
2. La fonction $\widetilde{f}$ est continue en x_0.

Exemples 4.5.11 *1. La fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$, car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, d'où*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

2. La fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en $x_0 = 0$, car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

4.5.3 Théorèmes sur les fonctions continues

Théorème 4.5.12 (Opérations sur les fonctions continues) *Soient f et g deux fonctions continues en x_0 et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; alors les fonctions $f+g$, $f.g$, $\alpha f + \beta g$, $|f|$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) sont continues en x_0.*

Théorème 4.5.13 *Soient f et g deux fonctions, telles que $f : I_1 \to I_2$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$, I_1, I_2 étant deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue en $x_0 \in I_1$, et g une fonction continue en $f(x_0) \in I_2$, alors $g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en x_0.*

Preuve :
Soit $x_0 \in I_1$ alors $f(x_0) \in I_2$ et comme g est continue en $y_0 = f(x_0)$; on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha' > 0; \forall y \in I_2 : |y - y_0| < \alpha' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

or comme f est continue en x_0 alors pour $\varepsilon' = \alpha'$; on a

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in I_1 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall x \in I_1 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$$

$\square$

Théorème 4.5.14 *Soit f une fonction définie de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$.*

Preuve :
On suppose par l'absurde que f n'est pas bornée sur $[a, b]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] \ / \ |f(x_n)| > n$$

dans ce cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; et donc elle admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et on a

$$\lim_{x\to\ 0} x_{n_k} = x_0 \text{ avec } x_0 \in [a,b]$$

et

$$\lim_{k\to\ +\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty \text{ car } \forall n \in \mathbb{N} :\ |f(x_n)| > n,$$

or f est continue sur $[a,b]$ alors $|f|$ est continue sur $[a,b]$; d'où

$$\lim_{k\to\ +\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)| < \infty,$$

ce qui est absurde. □

Théorème 4.5.15 *Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$; atteint au moins sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $[a,b]$.*

Preuve :
Comme f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, donc $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$ existe

$$\forall x \in [a,b] : f(x) \leq M$$

on suppose par l'absurde que f n'atteint pas sa borne supérieure c'est à dire que

$$\forall x \in [a,b] : f(x) < M$$

et on considère la fonction $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$, g est continue sur $[a,b]$ alors bornée sur $[a,b]$, donc $\sup\limits_{x\in[a,b]} g(x) = \alpha$ existe, or

$$g(x) > 0; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \alpha > 0$$

On a aussi

$$\forall x \in [a,b] : g(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{M-f(x)} \leq \alpha \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{\alpha} < M$$

ce qui est absurde car M étant la borne supérieure ; est le plus petit des majorants de $\{f(x) ; x \in [a,b]\}$.

Comme f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, donc $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m$ existe

$$\forall x \in [a,b] : m \leq f(x)$$

on suppose par l'absurde que f n'atteint pas sa borne inférieure c'est à dire que

$$\forall x \in [a,b] : m < f(x)$$

et on considère la fonction $g(x) = f(x) - m$, g est continue sur $[a,b]$ alors bornée sur $[a,b]$, donc $\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x) = \beta$ existe, or

$$g(x) > 0; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \beta > 0$$

On a aussi

$$\forall x \in [a,b] : g(x) \geq \beta \Leftrightarrow f(x) - m \geq \beta \Leftrightarrow f(x) \geq m + \beta > M$$

ce qui est absurde car m étant la borne inférieure ; est le plus grand des minorants de $\{f(x) ; x \in [a,b]\}$. $\square$

Théorème 4.5.16 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a,b]$, si $f(a).f(b) < 0$ alors $\exists! M \in]a;b[\ / \ f(M) = 0$.*

Pour la preuve du théorème nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.5.17 *Soit E une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M sa borne supérieure alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers M.*

Preuve du Lemme :
Comme M est la borne supérieure de E ; alors c'est le plus petit des majorants de E et on a

$$\forall \varepsilon > 0; \ \exists x \in E, \ M - \varepsilon < x \leq M$$

en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}$; il existe un élément x_n dans E, telle que :

$$M - \frac{1}{n} < x_n \leq M$$

alors d'après le théorème d'encadrement d'une suite on a $\lim\limits_{n\to +\infty} x_n = M$. $\square$

Preuve du théorème :
On va supposer que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ et on pose

$$E = \{x \in [a,b] \quad / \quad f(x) \leq 0\}$$

On remarque que E est un ensemble non vide car $a \in E$ et que E est majoré par b, alors E admet une borne supérieure ; soit $M = \sup E$ et on montre que $f(M) = 0$.

On a $M \in [a,b]$ et comme $M = \sup E$ alors d'après le lemme précédent ; il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers M alors $f(x_n) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, et comme f est continue donc par passage à la limite, on a $f(M) \leq 0$.

Comme $M = \sup E$ alors

$$\forall x \in]M,b[: x \notin E \Rightarrow f(x) > 0$$

d'où il existe aussi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]M,b[$ qui converge vers M

d'où

$$f(y_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

alors par passage à la limite ; on a $f(M) \geq 0$, par conséquent $f(M) = 0$.

On suppose par l'absurde qu'il existe un autre réel $M' \neq M$ telque $f(M') = 0$, d'où $f(M') = f(M)$, avec $M' \neq M$, ce qui contredit la stricte monotonie. □

Théorème 4.5.18 (Des valeurs intermédiaires généralisé) *Soit f une fonction continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ alors*

$$\forall y \in \left]f(x_1), f(x_2)\right[: \exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[\ / \ y = f(x_0).$$

(en supposant que $f(x_1) < f(x_2)$).

Preuve :
Soit $y \in \left]f(x_1), f(x_2)\right[$, alors

$$f(x_1) - y < 0 \ , \ f(x_2) - y > 0$$

alors en posant $g(x) = f(x) - y$ qui est une fonction continue sur $[x_1, x_2]$; on remarque que $g(x_1) < 0$ et $g(x_2) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; on a

$$\exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[\ / \ g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y$$

□

Corollaire 4.5.19 *L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Théorème 4.5.20 (du point fixe) *Soit f une fonction continue d'un segment non vide $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $[a, b]$, alors il existe au moins un point fixe $x_0 \in [a, b]$, ie $f(x_0) = x_0$. Géométriquement ; le graphe rencontre la droite d'équation $y = x$ (la 1ère bissectrice) au point d'abscisse x_0.*

Preuve :
On pose la fonction $g(x) = f(x) - x$ sur $[a, b]$, g est continue sur $[a, b]$, on remarque que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.

Si $g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = a \Rightarrow x_0 = a$.

Si $g(b) = 0 \Leftrightarrow f(b) = b \Rightarrow x_0 = b$.

Sinon $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a

$$\exists x_0 \in \left]a, b\right[\ / g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

□

Exemple 4.5.21 *La fonction $f(x) = x^2$ est continue sur $[-1, 1]$ et l'intervalle est stable par f, ie, $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$, d'où f admet au moins un point fixe dans l'intervalle $[-1, 1]$.*

En effet,

$$x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité du point fixe.

Théorème 4.5.22 (Banach) *Soit I un segment non vide de $\mathbb{R}$, et f une fonction contractante de $[a, b]$ dans $[a, b]$ alors :*
- f admet un unique point fixe l dans $[a, b]$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est convergente vers l.

Preuve :
Comme f est contractante sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$, d'où d'après le théorème du point fixe; il existe au moins $x_0 \in [a, b]$, tel que $f(x_0) = x_0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux points fixes $x_1, x_2 \in [a, b]$, tels que $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, or f est contractante sur $[a, b]$ d'où

$$\exists k : 0 \leq k < 1, \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \Leftrightarrow 1 \leq k \text{ , (contradiction).}$$

□

Théorème 4.5.23 *Etant donné I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$. f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Lemme 4.5.24 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$; une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.*

Preuve :
On suppose que f est strictement croissante, et soient x_1 et x_2 deux points de I, tels que $x_1 \neq x_2$ alors on a soit

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

soit

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

et dans les deux cas $f(x_1) \neq f(x_2)$, d'où f est injective sur I. □

Théorème 4.5.25 (inversion d'une fonction) *Une fonction f continue et strictement monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective de I dans $f(I)$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ existe , elle est continue et suit la monotonie de f.*

Preuve :
f est surjective de I sur $f(I)$, et comme f est strictement monotone alors f est injective donc bijective sur $f(I)$, alors f^{-1}existe et elle suit la monotonie de f; en effet, on suppose que f est strictement croissante et soient $y_1, y_2 \in f(I)$; tel que $y_1 < y_2$, alors

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2),$$

car f^{-1} est injective aussi ; d'où

$$\exists x_1, x_2 \in I; \text{ tels que } f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$$

donc $x_1 \neq x_2$. On suppose par l'absurde que $x_1 > x_2$ alors comme f est strictement croissante $f(x_1) > f(x_2)$, ce qui est absurde car $y_1 < y_2$, donc

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

d'où f^{-1} est strictement croissante.

Comme f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle, or f^{-1} existe d'où $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle donc f^{-1} est continue.

□

4.6 Fonctions trigonométriques inverses

4.6.1 Fonction arcsin

$$\begin{array}{rccc} f : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

f est continue, strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante, et on a

$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arcsin y \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arcsin y = x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin x = y \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

voir figure 4.1.

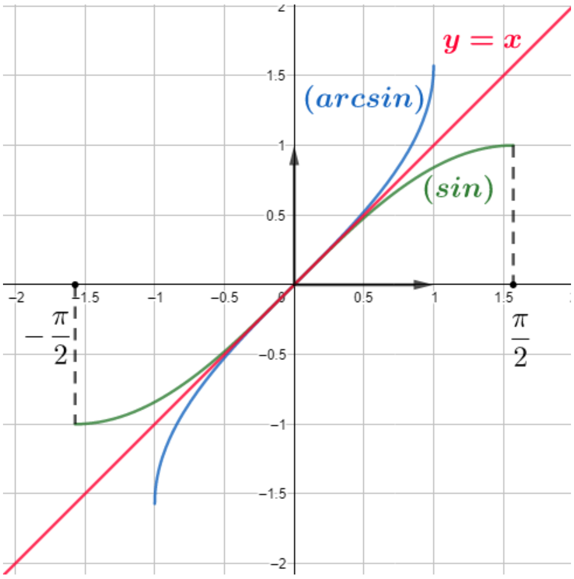

FIGURE 4.1

4.6.2 Fonction arccos

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

f est continue, strictement décroissante sur $[0,\pi]$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement décroissante et on a
$f([0,\pi]) = [-1,1]$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arccos y \end{array}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{c} \arccos y = x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \cos x = y \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array}\right)$$

voir figure 4.2.

4.6.3 Fonction arctan

$$\begin{array}{rccc} f: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to &]-\infty,+\infty[\\ & x & \mapsto & f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$

f est continue, strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante et on a
$f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty,+\infty[$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: &]-\infty,+\infty[& \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arctan y \end{array}$$

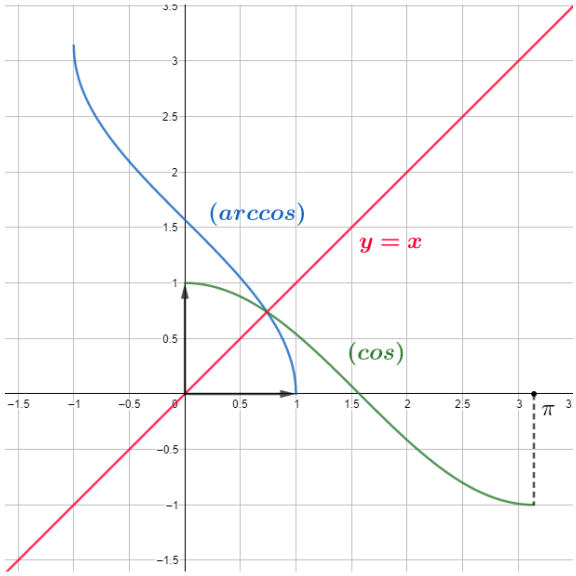

FIGURE 4.2

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arctan y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tan x = y \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

voir figure 4.3.

.

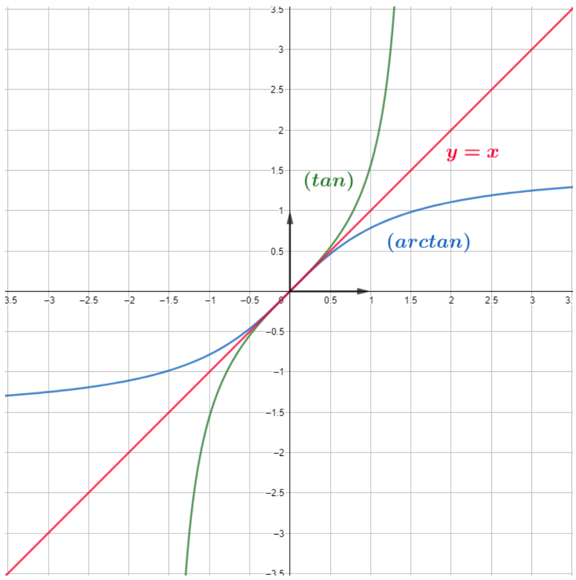

FIGURE 4.3

4.6.4 Fonction arccot

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,\pi[& \to &]-\infty,+\infty[\\ & x & \mapsto & f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \end{array}$$

f est continue, strictement décroissante sur $]0,\pi[$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante et on a

$f(]0,\pi[) =]-\infty,+\infty[$ et

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc}]-\infty,+\infty[& \to &]0,\pi[\\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = \operatorname{arccot} y \end{array}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{c} \operatorname{arccot} y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \cot x = y \\ 0 < x < \pi \end{array}\right)$$

voir figure 4.4.

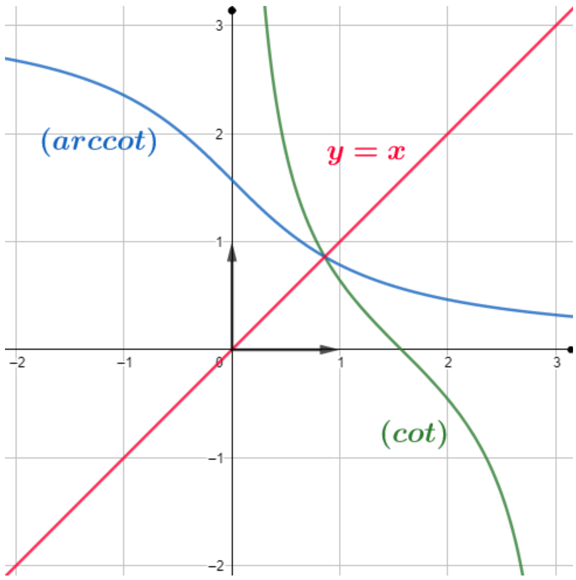

FIGURE 4.4

Propriétés 12 : $\forall x \in [-1,1]$; $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Remarques :

1. Si $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $(\sin t = x) \Leftrightarrow (\arcsin x = t)$
   Sinon
   $$(\sin t = x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = \arcsin x + 2k\pi \\ t = (\pi - \arcsin x) + 2k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$
2. Si $t \in [0,\pi]$ alors $(\cos t = x) \Leftrightarrow (\arccos x = t)$
   Sinon
   $$(\cos t = x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = \arccos x + 2k\pi \\ t = -\arccos x + 2k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$
3. Si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $(\tan t = x) \Leftrightarrow (\arctan x = t)$
   Sinon
   $$(\tan t = x) \Leftrightarrow t = \arctan x + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$
4. Si $t \in]0,\pi[$ alors $(\cot t = x) \Leftrightarrow (\operatorname{arccot} x = t)$
   Sinon
   $$(\cot t = x) \Leftrightarrow t = \operatorname{arccot} x + k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$

4.7 Fonctions élémentaires

4.7.1 Fonction exponentielle

Définition 4.7.1 *La fonction exponentielle (népérienne), notée* exp *est l'unique fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$, *égale à sa dérivée et vérifiant :* $\exp(0) = 1$.

Propriétés 13 *1.* $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

3. Notation d'Euler : On pose $\exp(x) = e^x$ *; où* $e^1 = e \simeq 2.718$, *d'où* $\forall x, y \in \mathbb{R} : e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $(e^x)^n = e^{nx}, n \in \mathbb{N}$.

4. La fonction exp *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} e^x = e^y & \Leftrightarrow x = y. \\ e^x < e^y & \Leftrightarrow x < y. \end{cases}$

6. La fonction $x \mapsto e^x$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Quelques limites de référence :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.7.2 Fonction logarithme népérien

Définition 4.7.2 *On appelle fonction logarithme népérien notée* ln *; la fonction réciproque de la fonction exponentielle, définie de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall x > 0 : x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x.$$

Remarque : Les graphes de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la première bissectrice i.e la droite d'équation $y = x$, voir figure 4.5.

Propriétés 14 *1.* $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x$ *et* $\forall x \in]0, +\infty[: e^{\ln x} = x$.

3. La fonction ln *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.

4. $\forall x, y \in]0, +\infty[: \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$.

5. $\forall x, y \in]0, +\infty[: \ln(xy) = \ln x + \ln y$.

6. $\forall x, y \in]0, +\infty[: \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$; $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

7. $\forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N} : \ln x^n = n \ln x$.

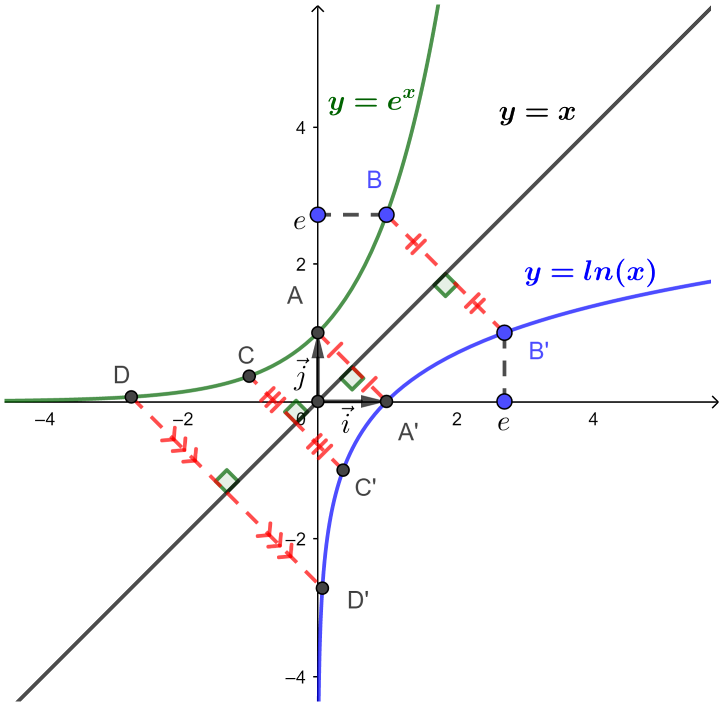

FIGURE 4.5 – Graphes des fonction exponentielle et logarithme népérien

Quelques limites de référence :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$,
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n \ln x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.7.3 Fonction logarithme de base quelconque

Définition 4.7.3 *Soit a un réel strictement positif et différent de 1, on appelle fonction logarithme de base a ; la fonction réelle notée $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par*

$$x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

où ln *est le logarithme népérien.*

Pour $a = e$, on retrouve le cas particulier de la fonction logarithme népérien ln, car $\ln e = 1$.

Si $a = 10$, alors la fonction logarithme de base 10 est appelée fonction logarithme décimal, notée log où $\ln 10 \simeq 2,302$, elle est utilisée en chimie.

On a également un autre logarithme utilisé souvent en informatique, c'est le logarithme en base 2 où $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$.

Propriétés 15 *Soient a et b deux réels strictement positifs et différents de 1, on a :*

1. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$, $\log_{\frac{1}{a}} = -\log_a$.

2.
$$\log_a x = \frac{\ln b}{\ln a} \log_b x; \ \forall x > 0.$$

En particulier pour $a = e$ *et* $b = 10$; *on a* $\ln x = \ln 10 \log x$.

3. $\forall x, y \in \left]0, +\infty\right[: \log_a x = \log_a y \ \Leftrightarrow x = y$.
4. $\forall x, y \in \left]0, +\infty\right[: \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
5. $\forall x, y \in \left]0, +\infty\right[: \log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y; \ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
6. $\forall x \in \left]0, +\infty\right[, \forall n \in \mathbb{N} : \log_a (x^n) = n \log_a x$.
7. *La fonction* $\log_a$ *est strictement croissante sur* $\left]0, +\infty\right[$ *pour* $a > 1$ *et strictement décroissante sur* $\left]0, +\infty\right[$ *pour* $0 < a < 1$.

4.7.4 Fonction puissance

Définition 4.7.4 *Soient* a *un réel strictement positif et différent de* 1 *et* x *un réel quelconque, la fonction* a *puissance* x *ou fonction exponentielle de base* a *est la fonction notée* a^x *et définie par*

$$a^x = e^{x \ln a},$$

c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$ (*logarithme de base* a).

Propriétés 16 *Soient* a *et* b *deux réels strictement positifs,* x *et* y *deux réels quelconques :*

1. $a^x > 0; \ \ln a^x = x \ln a$.
2. $1^x = 1, \ a^{x+y} = a^x a^y, \ a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \ a^{y-x} = \frac{a^y}{a^x}$.
3. $(ab)^x = a^x b^x \ , \ (a^x)^y = a^{xy}$.
4. *La fonction exponentielle de base* a *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *pour* $a > 1$ *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *pour* $0 < a < 1$.
5. *Il existe aussi la fonction définie par* x^a *pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

4.8 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.8.1 Fonction cosinus hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} f: & \left[0, +\infty\right[& \to & \left[1, +\infty\right[\\ & x & \mapsto & f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

$D_f = \mathbb{R}$, f est paire.

f est continue et strictement croissante sur $\left[0, +\infty\right[$ alors f^{-1} existe et est continue et strictement croissante et on a $f\left(\left[0, +\infty\right[\right) = \left[1, +\infty\right[$ et

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \left[1, +\infty\right[& \to & \left[0, +\infty\right[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg chy \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arg chy = x \\ 1 \leq y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} chx = y \\ 0 \leq x \end{pmatrix}$$

voir figure 4.6

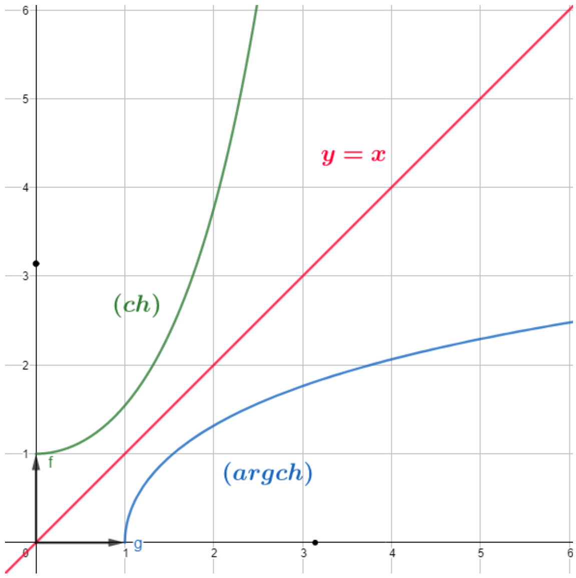

FIGURE 4.6

4.8.2 Fonction sinus hyperbolique

$$\begin{array}{cccc} f: &]-\infty, +\infty[& \rightarrow &]-\infty, +\infty[\\ & x & \mapsto & f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

$D_f = \mathbb{R}$, f est impaire.

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ alors f^{-1}existe et est continue et strictement croissante et on a $f(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$ et

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: &]-\infty, +\infty[& \rightarrow &]-\infty, +\infty[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg shy \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arg shy = x \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} shx = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

voir figure 4.7

4.8.3 Fonction tangente hyperbolique

$$\begin{array}{cccc} f: &]-\infty, +\infty[& \rightarrow &]-1, +1[\\ & x & \mapsto & f(x) = thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

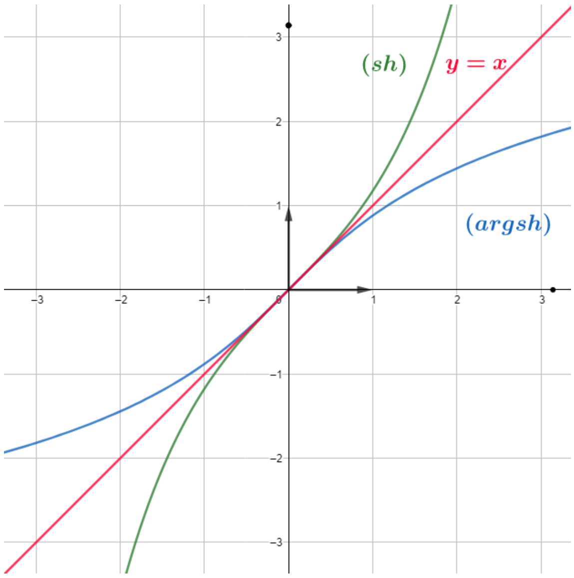

FIGURE 4.7

$D_f = \mathbb{R}$, f est impaire.

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ alors f^{-1}existe et est continue et strictement croissante et on a $f\left(]-\infty, +\infty[\right) =]-1, +1[$ et

$$\begin{array}{rlll} f^{-1}: &]-1,+1[& \rightarrow &]-\infty,+\infty[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg thy \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{c} \arg thy = x \\ -1 < y < 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} thx = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

voir figure 4.8

4.8.4 Fonction cotangente hyperbolique

$$\begin{array}{rlll} f: &]0,+\infty[& \rightarrow &]1,+\infty[\\ & x & \mapsto & f(x) = \coth x = \frac{1}{thx} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \end{array}$$

$D_f = \mathbb{R}^*$, f est impaire.

f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ alors f^{-1}existe et est continue et strictement décroissante et on a $f\left(]0, +\infty[\right) =]1, +\infty[$ et

$$\begin{array}{rlll} f^{-1}: &]1,+\infty[& \rightarrow &]0,+\infty[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg\coth y \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{c} \arg\coth y = x \\ y > 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \coth x = y \\ x > 0 \end{array} \right)$$

voir figure 4.9

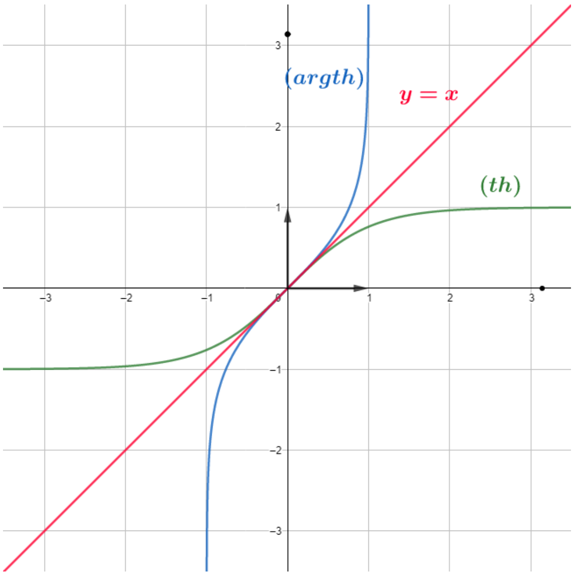

FIGURE 4.8

Propriétés 17 *1.* $chx + shx = e^x$.

2. $chx - shx = e^{-x}$.

3. $ch^2x - sh^2x = 1$.

4. $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$.

5. $ch\,(x+y) = chx.chy + shx.shy$.

6. $sh\,(x+y) = shx.chy + chx.shy$.

Expression sous forme logarithmique.

Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques s'expriment à l'aide de la fonction logarithme népérien, comme suit

$$\begin{array}{l}
\arg thx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \forall x \in \left]-1,1\right[. \\
\arg\coth x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right), \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[. \\
\arg shx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \\
\arg chx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \forall x \geq 1.
\end{array}$$

Preuve :

1. Soit $x \in \left]-1,1\right[$, on pose $\arg thx = y$

$$\begin{array}{l}
\arg thx = y \Leftrightarrow thy = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \\
\Leftrightarrow \frac{1-e^{-2y}}{1+e^{-2y}} = x \Leftrightarrow 1 - e^{-2y} = x\left(1+e^{-2y}\right) \\
\Leftrightarrow e^{-2y}\,(1+x) = 1 - x \\
\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow 2y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \\
\Leftrightarrow y = \arg thx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{array}$$

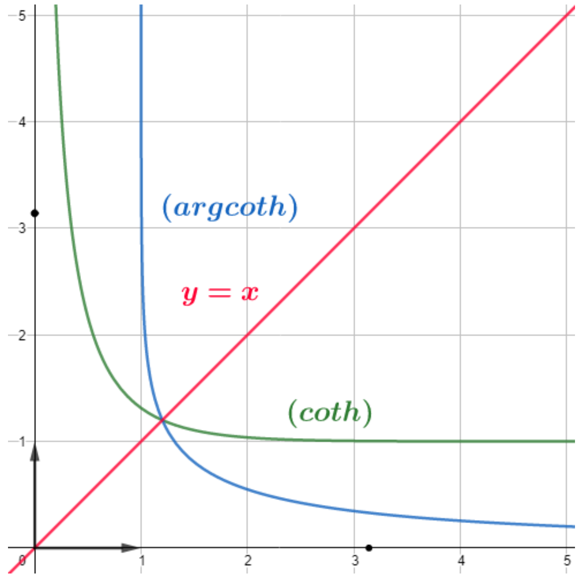

FIGURE 4.9

2. Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, on pose $\arg\coth x = y$

$$\begin{aligned}
&\arg\coth x = y \Leftrightarrow \coth y = x \Leftrightarrow \tfrac{e^y+e^{-y}}{e^y-e^{-y}} = x \\
&\Leftrightarrow \tfrac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}} = x \Leftrightarrow 1 + e^{-2y} = x\left(1 - e^{-2y}\right) \\
&\Leftrightarrow e^{-2y}\left(1 + x\right) = x - 1 \\
&\Leftrightarrow e^{2y} = \tfrac{1+x}{x-1} \Leftrightarrow 2y = \ln\left|\tfrac{1+x}{x-1}\right| \\
&\Leftrightarrow y = \arg thx = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{x-1}\right).
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $\arg shx = y$

$$\arg shx = y \Leftrightarrow shy = x$$

et on a

$$e^y = shy + chy \quad \text{et } chy = \sqrt{sh^2y + 1}$$

alors

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y = \arg shx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

4. Soit $x \geq 1$, on pose $\arg chx = y$

$$\arg chx = y \Leftrightarrow chy = x$$

et on a

$$e^y = chy\ + shy \quad \text{et } shy = \sqrt{ch^2y - 1}$$

alors

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow y = \arg chx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

□

4.9 Enoncés des exercices

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1/$f(x) = \frac{x+1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ **2**/$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$, **3**/$f(x) = \sqrt{x^2-1}\left(e^{\frac{1}{1-x}}\right)$,

4/$f(x) = \ (1+\ln x)^{\frac{1}{x}}$, **5**/$f(x) = \frac{1}{[x]}$, **6**/$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}\,, & x > 1 \\ \ln(x+2)\,, & x \leq 1 \end{cases}$

Exercice 2 :

Calculer les limites des fonctions suivantes :

1/ $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$, **2**/ $l_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$, **3**/ $l_3 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$,

4/ $l_4 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$, **5**/ $l_5 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$, **6**/ $l_6 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln x)}{x^2}$,

7/ $l_7 = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, **8**/ $l_8 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,

9/ $l_9 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$, **10**/ $l_{10} = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Exercice 3 :

En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que :

1/ $\lim\limits_{x\to 4}(2x-1) = 7$, 2/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1} = \frac{3}{2}$,

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, 4/ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3}\frac{4}{x+3} = +\infty$.

Exercice 4 :

Soient f, g et h trois fonctions définies dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer que :

1. $f = o(g) \wedge h = O(1) \Rightarrow f.h = o(g)$
2. $f = o(g) \wedge h = O(g) \Rightarrow f + h = O(g)$
3. $f = o(g) \wedge h = O(f) \Rightarrow h = o(g)$
4. $f = O(g) \wedge h = O(1) \Rightarrow f.h = O(g)$

Exercice 5 :

En utilisant les fonctions équivalentes, calculer les limites suivantes :

1/ $l_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln x}{\sin(2x)}$, **2**/ $l_2 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+(\sin x)^2\right)}{tg\frac{x}{2}}$,

3/ $l_3 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi}(\ln(\sin x))}$, **4**/ $l_4 = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}e}\ln(e-x)\ln(\ln(x))$,

5/ $l_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$, **6**/ $l_6 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Exercice 6 :

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x\neq 0\\ 0\ , & \text{si } x=0\end{cases} \quad \text{et } g(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x<0\\ 0\ , & \text{si } x=0\\ x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0\end{cases}$$

Etudier la continuité de f et de g sur leurs domaines de définition.

Exercice 7 :

Etudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1/ $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, 2/ $f(x)=x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$, 3/ $f(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x}$.

Exercice 8 :

1. Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $[0,+\infty[$ et que la fonction g ne l'est pas sur $]0,1]$, où $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.
2. Montrer que toute application continue f d'un segment $[a,b]$ dans lui-même admet un point fixe.

Exercice 9 :

Montrer que :

1/ $\forall x\in[-1,1]$: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

2/ $\forall x\in[-1,1]$: $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 10 :

Résoudre les équations suivantes :

1/ $\arcsin x+\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2/ $(\arctan x)(\arctan x+2)=3$.

Exercice 11 :

Simplifier les expressions suivantes :

1/ $ch(\arg shx)$,

2/ $th(\arg shx)$,

3/ $sh(2\arg shx)$

Exercice 12 :

Déterminer le domaine de définition de la fonction f, puis la simplifier

$f(x)=\arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$.

4.10 Corrigés

Exercice 1 :

1. $D_f = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.
2. $D_f = \underset{k\in\mathbb{Z}}{\cup} \left]2k\pi, \pi + 2k\pi\right[$.
3. $D_f = \left]-\infty, -1\right] \cup \left]1, +\infty\right[$.
4. $f(x) = (1+\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\ln x)}$,
   alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \wedge 1 + \ln x > 0\}$ d'où $D_f = \left]e^{-1}, +\infty\right[$.
5. $f(x) = \frac{1}{[x]}$, alors $D_f = \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1, +\infty\right[$, car $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, 1\right[$.
6. $D_f = \left]-2, 1\right] \cup \left[2, +\infty\right[$.

Exercice 2 :

1. $$l_1 = \lim_{x\to 0} \quad x \sin\frac{1}{x} = 0,$$
   car $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$.
2. $$l_2 = \lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$
3. $$l_3 = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin(2x)}{x + \sin(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\left[\frac{1}{2} - \frac{\sin(2x)}{2x}\right]}{3x\left[\frac{1}{3} + \frac{\sin(3x)}{3x}\right]} = \frac{-1}{4}.$$
4. $$l_4 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = 1.$$
5. $$l_5 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\left[\tan x - 1\right]}{1 - \tan x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
6. $$l_6 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln x)}{(x\ln x)}\frac{\ln x}{x} = -\infty.$$
7. $$l_7 = \lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} + 1}{\sqrt{x+a}} = \lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{\frac{\sqrt{x-a}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} + 1}{\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$
8. $$l_8 = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
   et en faisant le changement de variables : $t = \frac{1}{x}$, on a
   $$l_8 = \lim_{t\to 0} \quad e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e.$$

9.

$$l_9 = \lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right) = 0.$$

10. $l_{10} = \lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
et en faisant le changement de variables : $t = x-1$, on a $x = t+1$ et

$$l_{10} = \lim_{t\to0}(-t).\tan\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)} = \lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\pi}{2}.\frac{\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\pi t}{2}}} = \frac{2}{\pi}.$$

car $\tan(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{\tan\alpha}$.

Exercice 3 :

1.

$$\left(\lim_{x\to4}(2x-1)=7\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ; |x-4|<\alpha \Rightarrow |2x-8|<\varepsilon)$$

$$|2x-8|<\varepsilon \Leftrightarrow 2|x-4|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-4|<\frac{\varepsilon}{2},$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

2.

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x>\alpha \Rightarrow \left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\right)$$

$$\left|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{4x+2}<\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon},$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \left|\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|$.

3.

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x>\alpha \Rightarrow \ln x>A)$$

$$\ln x>A \Leftrightarrow x>e^A,$$

alors il suffit de prendre $\alpha = e^A$.

4.

$$\left(\lim_{x\overset{>}{\to}-3}\frac{4}{x+3}=+\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall A>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ -3<x<-3+\alpha \Rightarrow \frac{4}{x+3}>A\right)$$

$$\frac{4}{x+3}>A \Leftrightarrow x<\frac{4}{A}-3,$$

alors il suffit de prendre $\alpha = \frac{4}{A}$.

Exercice 4 :

1.
$$f=o(g)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)}{g(x)}=0$$
$$h=O(1)\Leftrightarrow \exists M>0,\exists\alpha>0,|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|h(x)|<M.$$
Alors
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x).h(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow f.h=o(g).$$
2. $f=o(g)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)}{g(x)}=0$
Donc la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de x_0
i.e
$$\exists M_1>0,\exists\alpha_1>0,|x-x_0|<\alpha_1\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<M_1$$
et on a
$$h=O(g)\Leftrightarrow\left(\exists M_2>0,\exists\alpha_2>0,|x-x_0|<\alpha_2\Rightarrow\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|<M_2\right)$$
Alors en posant $M=M_1+M_2$ et $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$, on a
$$\exists M>0/,\exists\alpha>0;|x-x_0|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{f(x)+h(x)}{g(x)}\right|<\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|+\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|<M$$
d'où $f+h=O(g)$.
3. $f=o(g)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)}{g(x)}=0$
$h=O(f)$ donc la fonction $\frac{h}{f}$ est bornée dans un voisinage de x_0,
d'où
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{h(x)}{f(x)}=0\Leftrightarrow h=o(g).$$
4.
$$f=O(g)\Leftrightarrow\exists M_1>0,\exists\alpha_1>0,|x-x_0|<\alpha_1\Rightarrow\left|\tfrac{f(x)}{g(x)}\right|<M_1.$$
$$h=O(1)\Leftrightarrow\exists M_2>0,\exists\alpha_2>0,|x-x_0|<\alpha_2\Rightarrow|h(x)|<M_2.$$
Alors en posant $M=M_1M_2$ et $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$, on a
$$\exists M>0/,\exists\alpha>0;|x-x_0|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{f(x)h(x)}{g(x)}\right|<M\Leftrightarrow f.h=O(g).$$

Exercice 5 :

1.
$$l_1=\lim_{x\to0}\frac{x\ln x}{\sin(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{2}=-\infty \text{ car } \sin 2x\underset{0}{\sim}2x$$
2.
$$l_2=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+(\sin x)^2\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}2x=0,$$
car
$$\ln\left(1+(\sin x)^2\right)\underset{0}{\sim}(\sin x)^2\underset{0}{\sim}x^2 \text{ et } \tan\frac{x}{2}\underset{0}{\sim}\frac{x}{2}.$$

3. $l_3 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi}(\ln(\sin x))}$

On se ramène au voisinage de 0 par le changement de variables :
$t = x - \frac{\pi}{2}$, et on a

$$l_3 = \lim_{t\to 0}\left[e^{\frac{1}{2t}\left(\ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)}\right] = \lim_{t\to 0}\left[e^{\frac{1}{2t}(\ln(\cos t))}\right] = \lim_{t\to 0}\left[e^{\frac{1}{2t}(\ln(1+(-1+\cos t)))}\right]$$

or

$$\ln(1+(-1+\cos t)) \underset{0}{\sim} (-1+\cos t) \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$$

d'où

$$l_3 = \lim_{t\to 0} e^{\frac{-t}{4}} = 1.$$

4. $l_4 = \lim\limits_{x\overset{<}{\to} e} \ln(e-x)\ln(\ln(x))$

On se ramène au voisinage de 0 par le changement de variables :
$t = x - e$, et on a

$$\begin{aligned} l_4 &= \lim_{t\overset{<}{\to}0} \ln(-t)\ln(\ln(t+e)) = \lim_{t\overset{<}{\to}0} \ln(-t)\ln\left(\ln e\left(\frac{t}{e}+1\right)\right) \\ &= \lim_{t\overset{<}{\to}0} \ln(-t)\ln\left(1+\ln\left(\frac{t}{e}+1\right)\right) \end{aligned}$$

or

$$\ln\left(1+\ln\left(\frac{t}{e}+1\right)\right) \underset{0}{\sim} \ln\left(\frac{t}{e}+1\right) \underset{0}{\sim} \frac{t}{e},$$

alors

$$l_4 = \lim_{t\overset{<}{\to}0} \frac{t}{e}\ln(-t) = 0.$$

5. $l_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

On se ramène au voisinage de 0 par le changement de variables :
$t = \frac{1}{x}$, et on a

$$l_5 = \lim_{t\to 0}\frac{(e^t-1)}{t} = 1, \text{ car } \left(e^t-1\right) \underset{0}{\sim} t.$$

6.

$$\begin{aligned} l_6 &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\frac{1}{x}} = e, \end{aligned}$$

car

$$\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \text{ et } \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Exercice 6 :

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{si } x = 0 \end{cases}, \ D_f = \left]-\infty, +\infty\right[.$

   f est continue sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$ car c'est la composée, la somme et le rapport de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

   $$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0, \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

   et $f(0) = 0$, alors f est continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ 0 \ , & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}, \ D_g = \left]-\infty, +\infty\right[.$

   g est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ car c'est la composée, la somme, le rapport et le produit de fonctions continues sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$.

   $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} xe^{\frac{1}{x}} = 0$,

   $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 \left[\ln(x+1) - \ln x\right]$

   $= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 \ln(x+1) - x^2 \ln x = 0.$

   et $g(0) = 0$, alors g est continue en 0 donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

1. $f(x) = \cos\frac{1}{x}$,

   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ qui est une limite qui n'existe pas, donc f n'admet pas un prolongement par continuité en $x = 0$.

2. $f(x) = x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$,

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)} = 0, \text{ car } \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

   Donc f admet le prolongement par continuité suivant

   $$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x.e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = \frac{\sin \pi x}{1-x}$.

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{1-x}$$

   en faisant le changement de variables : $t = x - 1$, on a

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin \pi(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin \pi(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{t} = \pi.$$

   Donc f admet le prolongement par continuité suivant

   $$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & \text{si } x \neq 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 :

1. (a) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
   Soient x et y deux réels positifs ;
$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{y+1}{y+2}\right| = \left|\frac{x-y}{(x+2)(y+2)}\right| = \frac{|x-y|}{(x+2)(y+2)}$$
$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \Leftrightarrow (x+2) \geq 2 \\ y \geq 0 \Leftrightarrow (y+2) \geq 2 \end{array}\right. \Rightarrow (x+2)(y+2) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)(y+2)} \leq \frac{1}{4}$$
   d'où
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|,$$
   avec $0 < \frac{1}{4} < 1$, alors f est contractante donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

   (b) $g(x) = \frac{1}{x}$
   (g n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$)
$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x_1, x_2 \in]0,1] \ / \ |x_2 - x_1| < \alpha \wedge |g(x_2) - g(x_1)| \geq \varepsilon$$
   On a : $\forall\alpha > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$, tel que
$$x_1 = \frac{1}{2n} \in]0,1], \ x_2 = \frac{1}{n} \in]0,1]$$
   d'où $|x_2 - x_1| = \frac{1}{2n}$, alors pour que $|x_2 - x_1| < \alpha$ il suffit de prendre :
$$n = \left[\frac{1}{2\alpha}\right] + 1$$
   et comme $|g(x_2) - g(x_1)| = n$ alors il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

2. Soit f une fonction continue d'un segment $[a,b]$ dans lui-même.
   On pose
$$g(x) = f(x) - x,$$
   g est continue sur $[a,b]$.
   On a $\forall x \in [a,b] : a \leq f(x) \leq b$, alors
$$\left\{\begin{array}{l} a \leq f(a) \leq b \\ a \leq f(b) \leq b \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq g(a) \\ g(b) \leq 0 \end{array}\right.$$
   et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires :
$$\exists c \in [a,b] : g(c) = 0 \Rightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = c$$
   et par conséquent f admet un point fixe dans $[a,b]$.

Exercice 9 :

1. On a d'une part :

$$\forall x \in [-1,1] : -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi,$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x,$$

d'une autre part on a

$$\arccos x \in [0,\pi] \text{ et } \cos(\arccos x) = x$$

donc

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x \Leftrightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

2. On a $\forall x \in [-1,1]$:

$$\cos(\arccos x) = x \Rightarrow \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$$

et comme $\sin(\arccos x) \geq 0$ alors

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 10 :

1.

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \tfrac{\pi}{2} \quad & \Leftrightarrow \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \tfrac{\pi}{2} - \arcsin x \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{3} = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{3} = \cos(\arcsin x) \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{3} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \\ & \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \tfrac{-1}{2} \text{ ou } x = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or l'équation n'est vérifiée que pour $x = \frac{1}{2}$.

2. $(\arctan x)(\arctan x + 2) = 3 \Leftrightarrow (\arctan x)^2 + 2(\arctan x) - 3 = 0$
En posant $t = \arctan x$, on a

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = -3 \text{ ou } t = 1$$

Or $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc

$$t = \arctan x = 1 \Leftrightarrow x = \tan 1.$$

Exercice 11 :

1. $ch(\arg shx) = \sqrt{1 + sh^2(\arg shx)} = \sqrt{1+x^2}$.
2. $th(\arg shx) = \frac{sh(\arg shx)}{ch(\arg shx)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. $sh(2\arg shx) = 2ch(\arg shx)\, sh(\arg shx) = 2x\sqrt{1+x^2}$.

Exercice 12 :

- $f(x) = \arg ch\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$
  $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1\right\}$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = \left]0, +\infty\right[.$$

- $\arg ch\alpha = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)$
  or $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2 - 1} = \frac{\left|x^2-1\right|}{2x}$; donc

$$\begin{array}{l} f(x) = \ln\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{\left|x^2-1\right|}{2x}\right] \\ \Rightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{rl} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -\ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{array}\right. \\ \Rightarrow f(x) = \left|\ln x\right|, \forall x > 0. \end{array}$$

Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Fonctions dérivables

Définition 5.1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivante existe et est finie*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Cette limite est appelée dérivée de f au point x_0 et on la note par $f'(x_0)$.

On peut avoir la définition analogue suivante :

$$f \text{ est dérivable en } x \Leftrightarrow \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R} \right).$$

Définition 5.1.2 - *On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 si le rapport*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en x_0 et cette limite est appelée dérivée à gauche (resp. à droite) de f au point x_0.

- Pour que f soit dérivable en x_0; il faut et il suffit que f soit dérivable à gauche et à droite de x_0 et que les deux limites soient égales.

$$ie. \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

- Une fonction définie d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite dérivable sur I; si elle est dérivable en tout point de I.

Exemples 5.1.3 - *Toute fonction polynôme de degré n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est un polynôme de degré $n - 1$.*

- Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée est une fonction rationnelle.

- *La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en $x_0 = 2$; en effet*

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = f'(2).$$

- *La fonction f définie par $f(x) = |x|$; est continue mais n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$ car les limites à gauche et à droite en 0 sont différentes ; en effet*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x}{x} = -1$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x} = 1$$

- *La fonction* $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$(\exp x)' = (e^x)' = \exp x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et on a*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \forall x \in \left]0, +\infty\right[.$$

- *La fonction* $\log_a$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et on a*

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \forall x \in \left]0, +\infty\right[.$$

- *La fonction puissance a^x avec $a > 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$(a^x)' = (\ln a)\, a^x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.1.1 Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit (Γ) son graphe, soient M_0 un point de (Γ) tel que $M_0(x_0, f(x_0))$, et M un autre point de (Γ) tel que $M(x, f(x))$.

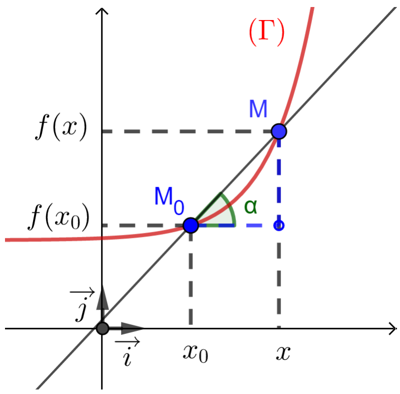

FIGURE 5.1 – Interprétation géométrique

Si f est dérivable en x_0 alors le graphe (Γ) admet en x_0 une tangente (T) d'équation $(T) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, en effet ;

En calculant la pente de (M_0M), c'est à dire la tangente de l'angle que fait l'axe des abscisses avec la droite (M_0M)

$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

on remarque que quand x tend vers x_0 alors la pente de (T) est égale à

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

d'où

$$(T) : y = (f'(x_0).x) + b, \text{ tel que } b \in \mathbb{R}$$

or

$$M_0(x_0, f(x_0)) \in (T) \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0).x_0,$$

d'où

$$(T) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarques :

1. Si la fonction f admet en x_0 une dérivée à gauche l_g et une dérivée à droite l_d telles que $l_g \neq l_d$; alors le graphe (Γ_f) de f admet en $M_0(x_0, f(x_0))$ deux demi tangentes et on dit que M_0 est un point anguleux de (Γ_f).
2. Si les deux limites sont infinies et différentes alors on dit que le graphe (Γ_f) admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$; une tangente verticale d'équation $x = x_0$ et que M_0 est un point de rebroussement de (Γ_f).

Proposition 5.1.4 *Si f est une fonction dérivable en $x = a$ alors f est continue en $x = a$.*

Preuve :

On a

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] [x - a]$$

et comme f est dérivable en $x = a$; alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \left[\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] \lim_{x \to a} [x - a] \\ &= f'(a).0 = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

□

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue mais n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Théorème 5.1.5 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f+g$, fg, $\alpha f + \beta g$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) sont dérivables aussi en x_0 et l'on a :*

$$\begin{array}{l} 1)\,(f+g)'(x_0) = (f(x_0)+g(x_0))' = f'(x_0)+g'(x_0)\,, \\ 2)\,(f.g)'(x_0) = (f(x_0).g(x_0))' = f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0)\,, \\ 3)\,(\alpha f+\beta g)'(x_0) = (\alpha.f(x_0)+\beta.g(x_0))' = \alpha.f'(x_0)+\beta.g'(x_0)\,, \\ 4)\,\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \end{array}$$

Preuve :
1) et 3) sont évidentes.

2) On a

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}$$

alors par passage à la limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}$$

d'où

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

4) Pour montrer que $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$; il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

On a

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{-(g(x)-g(x_0))}{(x-x_0)}\frac{1}{(g(x_0).g(x))}$$

alors par passage à la limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

□

Proposition 5.1.6 *Soient f et g deux fonctions, telles que :*
$f: I_1 \to I_2$, $g: I_2 \to \mathbb{R}$; I_1, I_2 étant deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable en $x_0 \in I_1$ et g est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in I_2$, alors :
$g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Preuve :
On a
$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$
alors par passage à la limite comme f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0=f(x_0)$; on a
$$\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))f'(x_0)$$
d'où
$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$
□

Exemple 5.1.7 $(\ln(\cos(e^x)))'=\frac{-e^x\sin(e^x)}{\cos(e^x)}$.

Remarque : On peut montrer que si f une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0)\neq 0$, alors on a l'équivalence suivante :

$$g\circ f \text{ dérivable en } x_0 \textbf{ ssi } g \text{ est dérivable en } y_0=f(x_0).$$

En effet, soit f une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0)\neq 0$, on a
$$\begin{aligned}\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\\&=\lim_{y\,\to\,y_0}\frac{g\left(y\right)-g\left(y_0\right)}{y-y_0}f'(x_0).\end{aligned}$$

Il découle que la limite
$$\lim_{x\,\to\,x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$$
existe **si et seulement si** la limite
$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$$
existe. D'où,
$$g\circ f \text{ est dérivable en } x_0 \textbf{ ssi } g \text{ est dérivable en } y_0=f(x_0). \tag{5.1}$$

5.1.2 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 5.1.8 *Soit f une fonction bijective et continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0\in I$, telle que $f'\left(x_0\right)\neq 0$,* *alors la fonction réciproque f^{-1}est dérivable au point $f(x_0) = y_0$, et on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve :
Montrons que

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

car f^{-1} est continue, donc

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},$$

comme f est dérivable en x_0 et d'après le théorème de l'inverse de limite ; on a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

d'où

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Remarque : Si f est une fonction bijective, dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$. En effet, on a

$$f^{-1} \circ f = Id \tag{5.2}$$

où Id désigne l'application identité : $Id(x) = x, \forall x \in I$. alors d'après l'équivalence (5.1), comme Id est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, on conclut que f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et en calculant la dérivée de (5.2) au point x_0, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)).f'(x_0) = 1 \implies \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

car $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

1. $f^{-1}(x) = \arcsin x$

$$\begin{pmatrix} \arcsin x = y \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

d'où

$$(\arcsin g(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1,1\right[.$$

2. $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\begin{pmatrix} \arccos x = y \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{pmatrix}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos y)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

d'où

$$(\arccos g(x))' = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1,1\right[.$$

3. $f^{-1}(x) = \arctan x$

$$\begin{pmatrix} \arctan x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = (\cos y)^2 = \frac{1}{1+(\tan y)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$(\arctan(g(x)))' = \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}.$$

4. $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{arccot} x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cot y = x \\ 0 < y < \pi \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = -(\sin y)^2 = \frac{-1}{1+(\cot gy)^2} = \frac{-1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$(\operatorname{arccot}(g(x)))' = \frac{-g'(x)}{1+(g(x))^2}.$$

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

1. $f^{-1}(x) = \arg shx$

$$(\arg shx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+(shy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$(\arg shg(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}.$$

2. $f^{-1}(x) = \arg chx$

$$(\arg chx)' = \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{shy} = \frac{1}{\sqrt{(chy)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x \geq 1.$$

d'où

$$(\arg chg(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{(g(x))^2 - 1}}, \text{ pour } g(x) \geq 1.$$

3. $f^{-1}(x) = \arg thx$

$$(\arg thx)' = \frac{1}{(thy)'} = ch^2 y = \frac{1}{1 - th^2 y} = \frac{1}{1-x^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$

d'où

$$(\arg thg(x))' = \frac{g'(x)}{1 - (g(x))^2}, \text{ pour } g(x) \in \left]-1, 1\right[.$$

4. $f^{-1}(x) = \arg\coth x$

$$(\arg\coth x)' = \frac{1}{(\coth y)'} = -sh^2 y = \frac{1}{1 - \coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2}, \forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[.$$

d'où

$$(\arg\coth g(x))' = \frac{g'(x)}{1 - (g(x))^2}, \text{ pour } g(x) \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[.$$

5.2 Dérivée n-ième d'une fonction

5.2.1 Dérivée n-ième d'une fonction

Définition 5.2.1 *Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f est dite $n-fois$ dérivable sur I si toutes ses dérivées successives $f', f'', f''', f^{(4)}, ..., f^{(n)}$ existent sur I.*

$f^{(n)}$ est appelée dérivée $n-$ ième de f et on a par récurrence

$$f^{(0)} = f, \ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

Si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I; alors f est dite de classe C^n sur I (toutes ses dérivées successives existent et sont continues) et on note $f \in C^n(I)$.

f est dite de classe $C^0(I)$ si elle est continue sur I.

f est dite de classe $C^\infty(I)$ si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples 5.2.2 *A vérifier par récurrence que :*

1. *Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si $f(x) = e^{ax}$, alors $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}, \forall n \in \mathbb{N}$.*
3. *Si $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,*
   alors $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
4. *Si $f(x) = \sin x$ alors $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.*
5. *Si $f(x) = \cos x$ alors $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.*

5.2.2 Dérivée n-ième d'un produit de fonctions (Formule de Leibnitz).

Théorème 5.2.3 *Si f et g sont deux fonctions réelles admettant des dérivées n-ième au point x_0 alors la fonction produit $f.g$ admet une dérivée $n-$ième au point x_0 et on a :*

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0)\, g^{(k)}(x_0)$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemple 5.2.4 *La dérivée $n-$ième de la fonction $f(x) = (x^2 - 3x + 1)\, e^{2x}$ est calculée comme suit :*

$$(f)^{(n)}(x) = (h.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x),$$

où

$h(x) = e^{2x}$ *et* $g(x) = (x^2 - 3x + 1)$ *donc :*

$$h^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$g'(x) = 2x - 3,\ g''(x) = 2 \text{ et } g^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 3.$$

d'où

$$(f)^{(n)}(x) = e^{2x} 2^n \left[\left(x^2 - 3x + 1\right) + \frac{n}{2}(2x - 3) + \frac{n(n-1)}{4} \right], \forall n \in \mathbb{N}.$$

5.3 Théorèmes sur les fonctions dérivables

5.3.1 Théorème de Fermat

Définition 5.3.1 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$.*

On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) au point x_0 si :

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $\exists \alpha > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$)

On dit que f admet un extrêmum local au point x_0 si f admet en x_0 un maximum local ou bien un minimum local.

Définition 5.3.2 *On dit que f admet un maximum global (resp. un minimum global) au point x_0 si :*

$$\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $\forall x \in I : f(x_0) \leq f(x)$)

On dit que f admet un extrêmum global au point x_0 si f admet en x_0 un maximum global ou bien un minimum global.

Théorème 5.3.3 (de Fermat) *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a,b[$, telle que f admet en x_0 un extrêmum local, si $f'(x_0)$ existe (f est dérivable en x_0) alors $f'(x_0)=0$.*

Preuve :
On suppose que f admet en x_0 est un maximum local, alors on a :
$\exists\alpha>0;\forall x\in I:|x-x_0|<\alpha\Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$.
Si $x<x_0$ alors $x-x_0<0$ or $f(x)\leq f(x_0)$ donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$.
Si $x>x_0$ alors $x-x_0>0$ or $f(x)\leq f(x_0)$ donc $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$.
Comme f est dérivable en x_0 alors la dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite, par conséquent

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0.$$

□

Exemple 5.3.4 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{7}{10}x^3-\frac{21}{10}x^2+1$*
$f'(x)=\frac{21}{10}x^2-\frac{42}{10}x=\frac{21}{10}x(x-2)$.
Si f admet un extrêmum local au point x alors

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2$$

et comme $f'(x)\leq 0$, $\forall x\in[0,2]$ et $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in\left]-\infty,0\right]\cup\left[2,+\infty\right[$, donc la fonction f admet un minimum local au point $\left(2,\frac{9}{5}\right)$ et un maximum global au point $(0,10)$.

5.3.2 Théorème de Rolle

Théorème 5.3.5 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$; alors il existe un point c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Preuve :
- Si f est constante sur $[a,b]$ alors c'est évident.
- Sinon ; comme f est continue sur $[a,b]$ alors elle est bornée sur $[a,b]$, d'où elle est majorée donc $\sup\limits_{x\in]a,b[}f(x)=M$ existe, on a alors $\forall x\in]a,b[:f(x)\leq M$, on peut supposer que M est différente de $f(a)=f(b)$ et donc il existe c dans $]a,b[$ tel que $M=f(c)$, par conséquent

$$\forall x\in]a,b[:f(x)\leq f(c),$$

alors c est un maximum local de f ainsi d'après le théorème de Fermat

$$f'(c)=0.$$

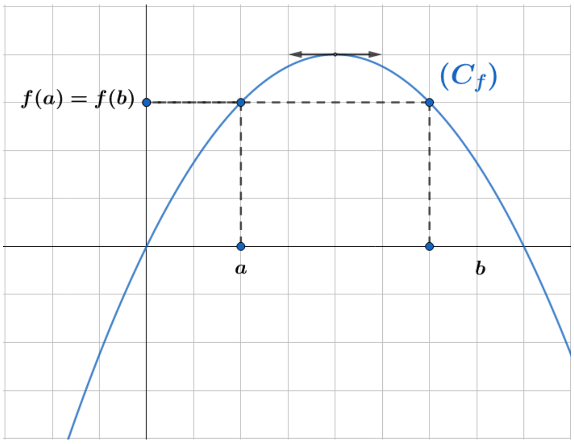

FIGURE 5.2 – Théorème de Rolle

□

Exemples 5.3.6 .

1. *Pour montrer que l'équation* $4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0$ *admet une solution dans l'intervalle* $]1, 3[$ *; il suffit d'appliquer le Théorème de Rolle à la fonction* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ *sur l'intervalle* $]1, 3[$ *; en effet* f *est continue sur* $[1, 3]$ *, dérivable sur* $]1, 3[$ *et on a* $f(1) = f(3) = 0$.
2. *Etant donnée la fonction* f *définie sur* $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On ne peut pas appliquer le Théorème de Rolle à f *sur* $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.
En effet ; f *n'est pas dérivable sur* $\left]-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$ *car elle n'est pas dérivable en* 0.

5.3.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.3.7 *Soit* f *une fonction définie de l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$*, continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *; alors il existe un point* c *dans* $]a, b[$ *tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Preuve :
On pose $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
h est continue sur $[a, b]$ car f l'est et dérivable sur $]a, b[$ car f l'est et on a $h(a) = h(b)$, donc d'après le Théorème de Rolle on a :

$$\exists c \in]a, b[; h'(c) = 0,$$

or $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ainsi $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

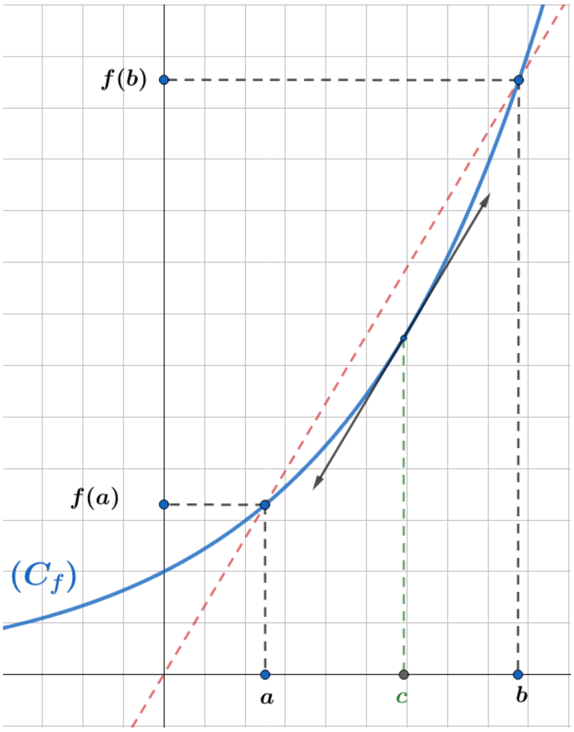

FIGURE 5.3 – Théorème des accroissements finis

Remarque : Soit $h > 0$, si on pose $a = x$, $b = x + h$, alors f est continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$; et on a

$$f(x+h) - f(x) = h.f'(c)$$

où $c = x + \theta h$ tel que $0 < \theta < 1$.

En effet ;

$$x < c < x + h \Leftrightarrow 0 < \frac{c-x}{h} < 1$$

alors en posant $\frac{c-x}{h} = \theta$; on a :

$$f(b) - f(a) = (b-a)\left[f'(a + \theta(b-a))\right]$$

Application :

Si on a $|f'(x)| \leq M$; $\forall x \in]a, b[$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a).$$

Exemple 5.3.8 *Montrer que Pour tout* $x > 0$: $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

On pose $f(x) = \ln t$; *sur* $[x, x+1]$

Pour tout $x > 0$; f *est continue sur* $[x, x+1]$ *et dérivable sur* $]x, x+1[$, *donc d'après le théorème des accroissements finis ;* $\exists c \in]x, x+1[$ *tel que*

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}.$$

or

$$\begin{aligned} x < c < x+1 \ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \tfrac{1}{c} < \tfrac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \tfrac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} < \ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) < \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x};\ \forall x > 0.$$

Corollaire 5.3.9 *Etant donnée f une fonction dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_1, x_2 deux points quelconques de I ; alors il existe un point c strictement compris entre x_1 et x_2 tel que*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

.

5.3.4 Variations d'une fonction

Théorème 5.3.10 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; alors :*

1. *f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0$.*
2. *f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[: f'(x) \leq 0$.*
3. *f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0$.*

5.3.5 Formule de Cauchy- Accroissements finis généralisés

Théorème 5.3.11 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$; si $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[$ alors*

$$\exists c \in]a,b[\ / \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve :
On pose

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x),$$

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on remarque que

$$h(a) = h(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

alors d'après le Théorème de Rolle ; on a $\exists c \in]a,b[\ / \ h'(c) = 0$, d'où

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\square$

On a comme conséquence directe de ce théorème le corollaire suivant :

La règle de l'Hôpital.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$; si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point $x_0 \in]a,b[$, telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$; alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l.$$

En effet, il suffit de prendre dans le théorème des accroissements finis généralisés $a = x_0$ et $b = x$ d'où $c \in]x_0, x[$ et quand x tend vers x_0 alors c tend vers x_0 aussi et on a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ d'où $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$.

Cette méthode est utilisée pour enlever les indéterminations du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples 5.3.12 *1.* $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{\sin(lx)} = \frac{k}{l}$, *car* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{k\cos(kx)}{l\cos(lx)} = \frac{k}{l}$.

2. $l_2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, *car* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$.

5.4 Formule de Taylor

Pour une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable en $x_0 \in]a,b[$, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

d'où on peut écrire

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ alors au voisinage de x_0, f peut s'écrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$$

où ε est ue fonction qui vérifie $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. On dit que f peut être approximée par le polynôme P de degré 1

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

avec une erreur commise notée $R(x) = \varepsilon(x)(x - x_0) = o(x - x_0)$ qui tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Plus généralement, on a

la formule de Taylor : Une fonction $n-$fois dérivable f peut être approximée dans un voisinage d'un point x_0 par un polynôme de degré n; et on écrit

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

où $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ est un polynôme de degré n en $(x - x_0)$ et $R_n(x)$ est l'erreur commise dans cette approximation dite reste d'ordre n qui peut avoir plusieurs évaluations entrainant plusieurs formes de la formule de Taylor.

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... \\ & + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x) \end{aligned}$$

5.4.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; une fonction ; telle que $f \in C^{\infty}([a, b])$, $f^{(n)}$est dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$ alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c)$$

où c est un point compris strictement entre x et x_0.

Remarques :

1. Le terme $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.
2. Si on pose $h = x - x_0$; alors

$$x_0 < c < x \Leftrightarrow x_0 < c < x_0 + h \Leftrightarrow 0 < \frac{c - x_0}{h} < 1.$$

alors en posant $\theta = \frac{c-x_0}{h}$, on a $c = \theta h + x_0$ tel que $0 < \theta < 1$ et on obtient par conséquent que pour tout $h \in \mathbb{R}$, tel que $x_0 + h \in [a, b]$, $\exists \theta \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = {} & f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + ... \\ & ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) \end{aligned}$$

Formule de Taylor-Mac laurin

Si $x_0 = 0$ alors $h = x$ et $c = \theta x$, et on obtient la formule dite formule de Taylor-Mac laurin avec reste de Lagrange :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\theta x); 0 < \theta < 1.$$

Exemples 5.4.1 *1. On donne La formule de Taylor-Mac laurin avec reste de Lagrange de la fonction* $f(x) = \sin x$ *à l'ordre* $n = 3$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin(\theta x)\,; 0 < \theta < 1.$$

2. Pour l'ordre n on a besoin de la dérivée n-ième de la fonction $\sin x$;
on a $\forall n \geq 1 : (\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, *d'où*

$$(\sin)^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k, \text{ si } n = 2k+1 \\ 0 \quad, \text{ si } n = 2k \end{cases}$$

et le reste s'écrit : $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\sin)^{(n+1)}(\theta x)$, *or le dernier terme non nul de la somme est de degré impair* $n = 2k+1$; *car toutes les dérivées d'ordre pair s'annulent ; d'où*

$$R_n(x) = \frac{x^{2(k+1)}}{(2k+2)!}(\sin)^{(2k+2)}(\theta x)$$

et

$$\begin{aligned}(\sin)^{(2k+2)}(\theta x) &= \sin\left(\theta x + 2(k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(\theta x + (k+1)\pi) \\ &= (-1)^{k+1}\sin(\theta x),\end{aligned}$$

car $\sin(\alpha + k\pi) = (-1)^k \sin\alpha; \forall k \in \mathbb{Z}$
d'où

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\sin(\theta x)\,;$$

avec $0 < \theta < 1$, *est le développement de Taylor-Mac laurin avec reste de Lagrange de la fonction* $\sin x$ *à l'ordre* $n = 2k+1$.

3. Pour $f(x) = \cos x$; *de la même façon on a*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin(\theta x)\,;$$

avec $0 < \theta < 1$.

4. Pour $f(x) = e^x$; *de la même façon on a*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}; \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

5.4.2 Formule de Taylor avec reste de Young

Dans cette formule nous allons nous passer de la dérivabilité de $f^{(n)}$, on supposera seulement son existence,

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; une fonction et soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f^{(n)}(x_0)$ existe alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o(x - x_0)^n$$

le reste $R_n(x) = o(x - x_0)^n$ est tel que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Il existe une deuxième écriture de cette formule en posant $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \varepsilon(x)$, d'où $R_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ et par suite on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

5.4.3 Formule de Taylor-Mac laurin-Young

Si $x_0 = 0$ alors on a

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

ou bien

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 5.4.2 *Le développement de Taylor-Mac laurin-Young de la fonction :*
$f(x) = \tan x$ *à l'ordre* $n = 3$ *est donné par*

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x).$$

On déduit la limite suivante

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to x_0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

5.5 Fonctions convexes

Définition 5.5.1 *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite convexe sur I; si sa courbe (Γ) est en dessous de toutes ses cordes et au dessus de toutes ses tangentes.*

f est dite concave sur I si la fonction $(-f)$ est convexe sur I.

Exemple 5.5.2 *Soient $f(x) = x^2$; et $g(x) = \frac{1}{x}$;*
f est convexe sur tout $\mathbb{R}$, g est convexe sur $]0, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 0[$.

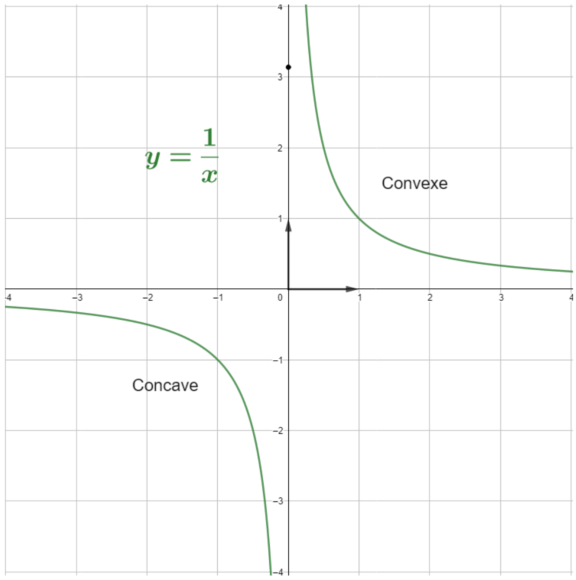

FIGURE 5.4

5.5.1 Paramétrage d'un segment

Définition 5.5.3 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$; soit $x \in \mathbb{R}$ alors :*
$x \in [a, b] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] \ \ / \ x = (1 - t)\, a + tb.$*(il suffit de poser $t = \frac{x-a}{b-a}$).*

Remarque : Si $t = 0$ alors $x = a$ et si $t = 1$ alors $x = b$ et si $t = \frac{1}{2}$ alors $x = \frac{a+b}{2}$.

Définition 5.5.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0, 1] : f\,(tx_1 + (1 - t)\, x_2) \leq tf\,(x_1) + (1 - t)\, f\,(x_2)$$

- On dit que f est concave sur I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0, 1] : f\,(tx_1 + (1 - t)\, x_2) \geq tf\,(x_1) + (1 - t)\, f\,(x_2)$$

Exemple 5.5.5 *La fonction $f\,(x) = |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$; en effet :*
pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]$ on a

$$|tx_1 + (1 - t)\, x_2| \leq t\,|x_1| + (1 - t)\,|x_2|\,.$$

Proposition 5.5.6 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.*

Corollaire 5.5.7 *Une fonction f deux fois dérivable sur I est convexe sur I si sa deuxième dérivée f'' est positive sur I.*

5.5.2 Point d'inflexion

Définition 5.5.8 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, soit (Γ_f) le graphe de f.*

On dit que x_0 est un point d'inflexion de f si (Γ_f) change de concavité au point $M_0(x_0, f(x_0))$, i.e la courbe traverse sa tangente au point M_0.

En conclusion on a le théorème suivant

Théorème 5.5.9 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et dérivable en $x_0 \in]a,b[$, soit (Γ_f) le graphe de f. Si f'' s'annule en x_0 ou $f''(x_0)$ n'existe pas et que dans les deux cas f'' change de signe en x_0 alors le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (Γ_f).*

Preuve :

- Si on a
$$f''(x) < 0,\ \forall x < x_0 \text{ et } f''(x) > 0,\ \forall x > x_0$$
alors f est concave sur $]-\infty, x_0[$ et convexe sur $]x_0, +\infty[$, donc change de concavité en x_0 et d'où le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (Γ_f).
- Si on a
$$f''(x) > 0,\ \forall x < x_0 \text{ et } f''(x) < 0,\ \forall x > x_0$$
alors f est convexe sur $]-\infty, x_0[$ et concave sur $]x_0, +\infty[$, donc change de concavité aussi en x_0 et d'où le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (Γ_f).

□

Théorème 5.5.10 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et dérivable en $x_0 \in]a,b[$; alors x_0 est un point d'inflexion de f si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *f change de concavité en x_0.*
2. *f est dérivable sur $[a,b]$ et f' admet un extrêmum en x_0.*
3. *f est 2-fois dérivable sur $]a,b[$ et f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.*

Preuve :
On va prouver la condition 2. car 1. et 3. sont évidentes.

Supposons que f' admet un maximum en x_0;

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Rightarrow f'(x) \leq f'(x_0);$$

alors :

- Si $x \geq x_0$; alors d'après le théorème des accroissements finis sur $[x_0, x]$ on a :

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

avec $x_0 - \alpha < x_0 < c < x < x_0 + \alpha$, d'où $f'(c) \leq f'(x_0)$ donc

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

par suite sa courbe (Γ_f) est en dessous de sa tangente en x_0.

- Si $x \leq x_0$; alors d'après le théorème des accroissements finis sur $[x, x_0]$ on a

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x)$$

avec $x_0 - \alpha < x < c < x_0 < x_0 + \alpha$, d'où $f'(c) \leq f'(x_0)$ donc

$$f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x) \leq f(x)$$

par suite sa courbe (Γ_f) est au dessus de sa tangente en x_0. □

Théorème 5.5.11 *Soit f une fonction $2-$fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$; si f admet un point d'inflexion au point $(x_0, f(x_0))$ alors f'' s'annule en x_0.*

Exemple 5.5.12 *Toute fonction polynômiale de degré* 3 *admet un point d'inflexion. En effet ; soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $a > 0$.*

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ *et* $f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{3a}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{3a}$		$+\infty$
$f"(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$f'(\dfrac{-b}{3a})$	$\nearrow$	$+\infty$
Convexité de f		*concave*		*convexe*	

5.6 Etude des branches infinies

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (Γ_f) son graphe, soient a et l deux nombres réels, tels que a est l'une des extrêmités de I.

Définition 5.6.1 .

On dit que f possède une branche infinie en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ tel que l'un au moins des deux éléments de a ou l est égal à $+\infty$ ou $-\infty$.

1) *Si* $a \in \mathbb{R}$ *et* $l = \pm\infty$, *alors* (Γ_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = a$.

2) *Si* $a = \pm\infty$ *et* $l \in \mathbb{R}$, *alors* (Γ_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = l$

3) *Si* $a = \pm\infty$ *et* $l = \pm\infty$, *alors on doit calculer* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$:

- **i)** *Si* $\alpha = 0$ *alors* (Γ_f) *admet une branche parabolique dans la direction de l'axe* $(x'x)$.
- **ii)** *Si* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta \in \mathbb{R}$ *alors* (Γ_f) *admet une asymptote oblique* (Δ) *d'équation* $y = \alpha x + \beta$.
- **iii)** *Si* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - \alpha x] = \pm\infty$ *alors* (Γ_f) *admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation* $y = \alpha x$.
- **iv)** *Si* $\alpha = \pm\infty$ *alors* (Γ_f) *admet une branche parabolique dans la direction de l'axe* $(y'y)$.

Remarque : Pour étudier la position du graphe (Γ_f) de la fonction f par rapport à l'asymptote oblique (Δ) ; il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - y$
Si $f(x) - y \leq 0$ alors (Γ_f) est en dessous de (Δ).
Si $f(x) - y \geq 0$ alors (Γ_f) est au dessus de (Δ).

Exemples 5.6.2 *1.* $f(x) = \frac{5}{x-2}$; (Γ_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = 2$.

2. $f(x) = e^{1-x^2} - 1$; (Γ_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = -1$.

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$; (Γ_f) *admet une asymptote oblique d'équation* $y = x$.

4. $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{x} + 1$; (Γ_f) *admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation* $y = \frac{1}{2}x$.

5. $f(x) = \sqrt{x}$; (Γ_f) *admet une branche parabolique dans la direction de l'axe* $(x'x)$.

6. $f(x) = x^3$; (Γ_f) *admet une branche parabolique dans la direction de l'axe* $(y'y)$.

Exercice 5.6.3 *Pour l'étude de la fonction* $f(x) = \ln \frac{e^{2x}+5}{e^x-2}$; *on a* $D_f =]\ln 2, +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x(e^x-5)(e^x+1)}{(e^{2x}+5)(e^x-2)}$.

x	$\ln 2$		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln 10$	$\nearrow$	$-\infty$

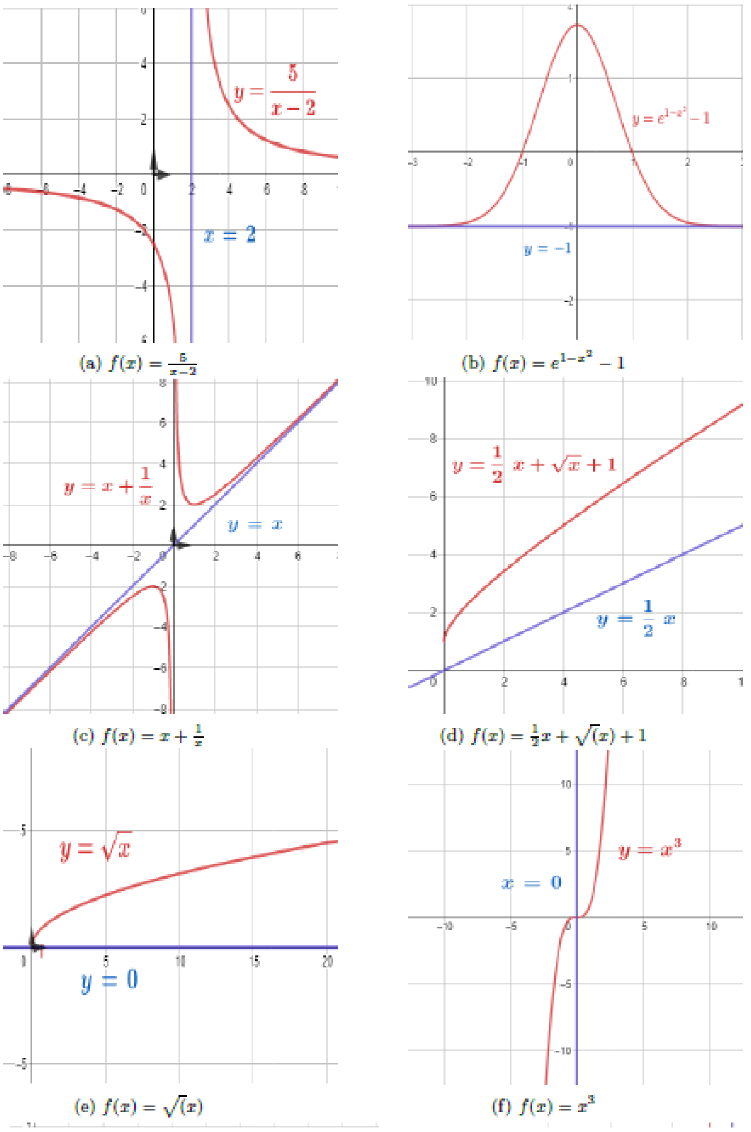

FIGURE 5.5 – Graphes de l'exemple 5.6.2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[\ln \frac{e^{2x}\left(1+5e^{-2x}\right)}{e^{x}\left(1+2e^{-x}\right)}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[x + \ln \frac{\left(1+5e^{-2x}\right)}{\left(1+2e^{-x}\right)}\right] = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{\left(1+5e^{-2x}\right)}{\left(1+2e^{-x}\right)} = 0.$$

D'où (Γ_f) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une asymptote oblique* (Δ) *d'équation* $y = x$.

Et comme $f(x) - y = \ln \frac{\left(1+5e^{-2x}\right)}{\left(1+2e^{-x}\right)} > 0\,; \forall x > \ln 2$ *alors* (Γ_f) *est au dessus de* (Δ).

5.7 Enoncés des exercices

Exercice 1 :

1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0 :

a. $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

b. $g(x) = \begin{cases} \arctan\ x & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} sign(x) + \frac{x-1}{2} & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1,\ x_0 = -1$

c. $h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 - a^2}} & \text{si} \quad |x| < a \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq a \end{cases}, \quad x_0 = a$

2. Déterminer les constantes a, b, c et d pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ cx^2 + dx & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
(a) $f_1(x) = \sin(\ln x)$, (b) $f_2(x) = \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$, (c) $f_3(x) = \frac{(shx)^2}{e^x}$,
(d) $f_4(x) = e^{\arctan x}$, (e) $f_5(x) = \cos(\arcsin x)$, (f) $f_6(x) = \arctan\left(\frac{2x}{3+x}\right)$.
2. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \arctan\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Exercice 3 :

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

$1/f_1(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha = -1$ et $\alpha = \pm\frac{1}{2}$.

$2/f_2(x) = \ln(1+x)$, $3/f_3(x) = (x+1)^3 e^{-x}$.

Exercice 4 :
On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
3. f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
4. Etudier les variations de f.

Exercice 5 :

Soient a, b deux réels strictement positifs et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on suppose que : $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$.

Montrer que l'équation $f'(x).f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.

Exercice 6 :

Montrer que l'équation suivante admet une solution réelle unique.

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$$

Exercice 7 :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 2]$ et deux fois dérivable sur $]0, 2[$; on suppose que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

Montrer que : $\exists c \in]0, 2[\quad / \quad f''(c) = 0$.

Exercice 8 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

   Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la dérivée de f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

2. Soit g la fonction définie de l'intervalle $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$; deux fois dérivable sur $[0, 1]$.

   On suppose que : $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) = 1$, montrer en utilisant le théorème de Rolle que g'' s'annule au moins une fois sur$[0, 1]$.

Exercice 9 :

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

   (a) $\forall x > 0, \ \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$,

   (b) $\forall x > 0, \ \arg shx + \frac{1}{\sqrt{2+2x+x^2}} < \arg sh(x+1) < \arg shx + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. Etant donné $\ln(100) = 4,6052$; en appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'en écrivant : $\ln(101) = 4,6151$ on commet une erreur inférieure à 10^{-4}.

Exercice 10 :

Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital (quand c'est possible).

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$,
2. $\lim\limits_{x\to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}$,
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\sin x}{2x+\sin x}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$.

Exercice 11 :

1. (a) En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n ; montrer que

$$\forall x \geq 0,\ 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

   (b) En utilisant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 2 ; montrer que

$$\frac{8}{3} < e < 3.$$

   (c) En déduire que :

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right] < \frac{3}{(n+1)!}$$

2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que
   (a) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$.
   (b) $\forall x > 0,\ \ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} < \ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

Exercice 12 :
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

1. Etudier la fonction $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
2. En déduire que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
4. Quelle propriété de f permet de réduire le domaine d'étude ?
5. Calculer la dérivée $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
6. En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$ puis étudier l'existence de points d'inflexion.
7. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Exercice 13 :

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$ et G_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées .
4. Quelle est l'équation de la tangente (T_A) à G_f au point A?
   En déduire que pour tout $x \geq 1$: $e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie et continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.
On suppose que f est dérivable sur $[0,1]$ et que $f'(0) = f'(1) = 0$.
On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de g sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[\;/\; g(\alpha) = 0$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Montrer qu'il existe $\beta \in]0,1[\;/\; f'(\beta) = 1$.

Exercice 15 :

1. Etudier la fonction $g(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{2+2x+x^2}$.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$,
3. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ puis tracer son graphe.

5.8 Corrigés

Exercice 1 :

1. (a) $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, \text{ si } x < 0 \\ 0 \ , \quad \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad , \qquad x_0 = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[x \ln(x+1) - x \ln x\right] = 0.$$

d'où f est dérivable en $x_0 = 0$.

(b) $g(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} sgn(x) + \frac{x-1}{2} \quad , & \text{si } x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{cases}$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2}$
  $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\frac{\pi}{4}x + \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2}$
  d'où g est dérivable en $x_0 = 1$.
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-\frac{\pi}{4}x + \frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{4}}{x+1} = +\infty.$
  d'où g n'est pas dérivable en $x_0 = -1$.

(c) $h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-a^2}}, \text{ si } -a < x < a \\ 0 \ , \quad \text{si } x \in \left]-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right[\end{cases} \quad , \qquad x_0 = a$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{e^{\frac{1}{x^2-a^2}}}{x-a} = 0$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = 0$$

d'où h est dérivable en $x_0 = a$.

2. $f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{ si } x \leq 0 \\ cx^2 + dx \quad , \quad \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable et continue en $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$ alors :

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} ax + b = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} cx^2 + dx \Leftrightarrow b = 0$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} cx^2 + dx = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow c + d = 0 \ ...(1)$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{ax}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} cx + d \Leftrightarrow a = d \ ... \ (2)$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{cx^2+dx-0}{x-1}$,

  $x \overset{<}{\to} 1$

  et en faisant le changement de variables $t = x - 1$, on obtient :

  $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{t \overset{<}{\to} 0} \frac{2ct+dt}{t} = 2c + d \overset{(2)}{=} c$ ...(3)

  et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1-\frac{1}{x}-0}{x-1} = 1$ ...(4)

  de (3) et (4) on a $c = 1$ alors $d = a = -1$.

Exercice 2 :

1. (a) $f_1'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x} \sin(\ln x)$, $\quad(b)$ $f_2'(x) = \frac{1}{x^2} \tan\left(\frac{1}{x}\right)$,

   (c) $f_3'(x) = \frac{2shxchx - sh^2x}{e^x}$, $\quad(d)$ $f_4'(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$,

   (e) $f_5'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad(f)$ $f_6'(x) = \frac{6}{5x^2+6x+9}$.

2. $f(x) = \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

   $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 1 \geq 0 \ \} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$

   $= \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan \frac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)} = 0.$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}.$

   On a $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$		$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$ $\|$		$\|$ $\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice 3 :

1. $f_1(x) = (1+x)^{\alpha}$,

   $f_1'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f_1''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$,... alors

   $f_1^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (à vérifier facilement par récurrence.)

   (a) Pour $\alpha = -1$: $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$

   $\forall n \in \mathbb{N}$,

   $$f_1^{(n)}(x) = (-1)(-2)\ldots(-n)(1+x)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{1+n}}.$$

(b) Pour $\alpha=\frac{1}{2}$: $f_2(x)=\sqrt{1+x}$
$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)...\left(\frac{3}{2}-n\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}1.3.5...(2n-3)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

(c) Pour $\alpha=-\frac{1}{2}$: $f_3(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)...\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n 1.3.5...(2n-1)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

2. $f_2(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f_2'(x)=\frac{1}{1+x}=f_1(x)$, alors
$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$f_2^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}=f_1^{(n-1)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

3. $f_3(x)=(x+1)^3e^{-x}$

On a la formule de Leibnitz : $(g.h)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k.g^{(k)}.h^{(n-k)}$

On pose $g(x)=(x+1)^3$ et $h(x)=e^{-x}$,
Alors :
$g'(x)=3(x+1)^2, g''(x)=3.2(x+1), g'''(x)=3.2.1$, d'où

$$\forall n=0,1,2,3,\ g^{(n)}(x)=\frac{3!}{(3-n)!}(x+1)^{3-n}\ \text{ et } g^{(n)}(x)=0;\forall n\geq 4$$

et

$$\forall n\in\mathbb{N}, h^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x},$$

donc

$$\forall n\in\mathbb{N}, f_3^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{3}C_n^k.\frac{3!}{(3-k)!}(x+1)^{3-k}(-1)^{n-k}e^{-x}$$

(à vérifier facilement par récurrence).

Exercice 4 :
$f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$

1. $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. f est continue sur D_f car c'est la composée, le produit et le rapport de fonctions continues sur D_f.

   f est dérivable sur D_f car c'est la composée, le produit et le rapport de fonctions dérivables sur D_f.
3. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = -\infty$

   $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

   d'où f n'admet pas un prolongement par continuité en $x_0 = -2$

   $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} = 0$

   $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}}$, en faisant le changement de variables $t = \frac{1}{x}$, on obtient

   $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t(1+2t)} e^{t} = +\infty$

   d'où f n'admet pas un prolongement par continuité en $x_0 = 0$.
4. $f'(x) = \frac{x^2+3x-2}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x}}$

   où $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} < -2$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} > 0$

x	$-\infty$		x_1		-2		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5 :
On pose $g(x) = f^2(x) - x^2$,
g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et on a $g(a) = g(b)$, car :

$$g(a) = f^2(a) - a^2 et g(b) = f^2(b) - b^2,$$

alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel c dans $]a, b[$, tel que $g'(c) = 0$ d'où :

$$\exists c \in]a, b[, 2f'(c).f(c) - 2c = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]a, b[, f'(c).f(c) = c.$$

Exercice 6 :
On pose $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$, et on remarque que $f(0) = -5$ et $f(1) = 3$ et que f est continue sur tout $\mathbb{R}$ alors en particulier sur $[0, 1]$ et f est strictement croissante car

$$f'(x) = 13x^{12} + 21x^2 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in]0, 1[$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre réel unique α dans $]0,1[$ tel que
$$f(\alpha) = 0.$$

Exercice 7 :

On pose $g(x) = f(x) - x$.

g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et on a $g(0) = g(1)$, car :
$$g(0) = f(0) - 0 = 0 \text{ et } g(1) = f(1) - 1 = 0$$
alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel c_1 dans $]0,1[$, tel que
$$g'(c_1) = 0.$$

De la même façon, g est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$ et on a :
$$g(1) = g(2),$$
car $g(1) = f(1) - 1 = 0$ et $g(2) = f(2) - 2 = 0$ alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel c_2 dans $]1,2[$, tel que
$$g'(c_2) = 0.$$

Alors $g'(c_1) = g'(c_2)$, de plus g' est continue sur $[c_1, c_2]$ et g' est dérivable sur $]c_1, c_2[$, donc d'après le théorème de Rolle il existe un réel c_3 dans $]c_1, c_2[$, tel que
$$g''(c_3) = 0$$
or $c_3 \in \,]c_1, c_2[\, \subset \,]0,2[$ et $g''(c_3) = f''(c_3)$ alors :
$$\exists c_3 \in \,]0,2[\quad / \quad f''(c_3) = 0.$$

Exercice 8 :

1. Comme la fonction f est $2\pi-$périodique alors $f(a) = f(a + 2\pi)$, et f est continue sur $[a, a+2\pi]$ et dérivable sur $]a, a+2\pi[$, alors d'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in \,]a, a+2\pi[$, tel que
$$f'(c) = 0.$$
2. Un utilise le même raisonnement que l'exercice 7 : on applique le théorème de Rolle à la fonction g trois fois.

Exercice 9 :

1. (a) On considère la fonction $f(x) = \arctan x$ pour $x > 0$,

   f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, alors d'après le théorème des accroissements finis :
   $$\exists c \in \,]0,x[\quad / \quad \arctan x = \frac{x}{1+c^2}$$
   et on a
   $$0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1 + c^2 < 1 + x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x$$
   d'où
   $$\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

(b) On considère la fonction $f(x) = \arg shx$ sur $[x, x+1]$, pour tout $x > 0$, f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, alors d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]x, x+1[\quad / \ \arg sh(x+1) - \ \arg shx = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\begin{aligned} 0 < x < c < x+1 \quad & \Rightarrow \sqrt{1+x^2} < \sqrt{1+c^2} < \sqrt{2+2x+x^2} \\ & \Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2+2x+x^2}} < \tfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} < \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ & \Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2+2x+x^2}} < \arg sh(x+1) - \arg shx < \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ & \Leftrightarrow \arg shx + \tfrac{1}{\sqrt{2+2x+x^2}} < \arg sh(x+1) < \arg shx + \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

2. On considère la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[100, 101]$,

   f est continue sur $[100, 101]$ et dérivable sur $]100, 101[$, alors d'après le théorème des accroissements finis : $\exists c \in]100, 101[\quad / \ \ln 101 - \ln 100 = \frac{1}{c}$, or

$$\begin{aligned} 100 < c < 101 \Leftrightarrow \tfrac{1}{101} < \tfrac{1}{c} < \tfrac{1}{100} \quad & \Leftrightarrow \tfrac{1}{101} < \ln 101 - \ln 100 < \tfrac{1}{100} \\ & \Rightarrow \ln 101 < \tfrac{1}{100} + 4,6052 \\ & \Rightarrow \ln 101 - 4,6151 < 4,6152 - 4,6151 \\ & \Rightarrow \text{Erreur commise} < 10^{-4}. \end{aligned}$$

Exercice 10 :

1. $l_1 = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{x^4+1} = 1.$
2. $l_2 = \lim\limits_{x\to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}} = \lim\limits_{x\to 5} e^{\frac{1}{x-5}\ln(6-x)} = e^{-1}$

   car $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x-5} \ln(6-x) \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to 5} \frac{-1}{6-x} = -1$
3. $l_3 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sin x}{2x + \sin x}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$ n'existe pas, alors on ne peut pas utiliser la règle de l'Hôpital.

$$l_3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1 - \frac{\sin x}{x})}{(2 + \frac{\sin x}{x})} = \frac{1}{2}.$$

4. $l_4 = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 5} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \overset{RH1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}$$

   et

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} \overset{RH2}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2(2\sin x + x\cos x)} \overset{RH3}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2(3\cos x - x\sin x)} = \frac{-1}{6},$$

   d'où

$$l_4 = e^{\frac{-1}{6}}.$$

5. $l_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - e\right]$
on faisant le changement de variables : $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$l_5 = \lim_{t\to 0}\frac{\left[e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} - e\right]}{t} \overset{RH}{=} \lim_{t\to 0}\left(\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\right)e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)},$$

on a

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} \overset{RH1}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-\ln(1+t)}{2t+3t^2} \overset{RH2}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-1}{2(1+3t))(1+t)} = \frac{-1}{2},$$

et $\lim\limits_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e$, donc

$$l_5 = -\frac{e}{2}.$$

Exercice 11 :

1. (a) En appliquant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre n à la fonction $f(x) = e^x$; on obtient :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ \text{avec } 0<\theta<1.$$

or $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \geq 0, \forall x \geq 0$, donc

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

(b) Pour $n = 2$: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6}e^{\theta x}$, avec $0<\theta<1$.
d'où pour $x = 1$, on a :

$$e = \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e^{\theta},\ \text{avec } 0<\theta<1.$$

et on a :

$$\begin{aligned} 0<\theta<1 &\Leftrightarrow \tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{6} < \tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{6}e^{\theta} < \tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{6}e \\ &\Leftrightarrow \tfrac{8}{3} < e < \tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{6}e \Rightarrow \tfrac{8}{3} < e < 3. \end{aligned}$$

(c) Pour $x = 1$, on a :

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta},\ \text{avec } 0<\theta<1 \\ &\Rightarrow e - \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right] = \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}, \end{aligned}$$

et on a

$$0<\theta<1 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta} < \frac{1}{(n+1)!}e < \frac{3}{(n+1)!},$$

car $e < 3$.

(a) En appliquant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 4 à la fonction $f(x) = \cos x$; on obtient :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\sin(\theta x), \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

comme $\theta \in [0,1]$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors :

$$\sin(\theta x) \geq 0 \Rightarrow -\frac{x^5}{5!}\sin(\theta x) \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

(b) En appliquant la formule de Taylor-Mac-Laurin d'ordre 3 et 4 à la fonction $f(x) = \ln(x+1)$; on obtient :

$$n = 3 : \forall x > 0,\ \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(\theta x + 1)^4}$$

$$n = 4 : \forall x > 0,\ \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(\theta x + 1)^5}$$

comme $\forall x > 0, -\frac{x^4}{4(\theta x+1)^4} < 0$ et $\frac{x^5}{5(\theta x+1)^5} > 0$ alors :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 12 :

$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

1. $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

   $D_g =]-\infty, +\infty[$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, $g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et d'après le tableau de variations de la fonction g ; on a $g(x) \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R}$ alors f est bien définie sur tout $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, alors la fonction f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ sauf pour l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}/\ g(x) = 1 \text{ ou } g(x) = -1\}$$

   or $g(x) = -1 \Leftrightarrow x = -1$ et $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$, d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

4. f est impaire ; en effet :

$$f(-x) = \arcsin \frac{-2x}{1+x^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x),$$

alors la fonction f est symétrique par rapport à l'origine o donc on peut réduire son domaine d'étude à $[0, +\infty[$.

5.

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g^2(x))}} = \frac{\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{\left(1+x^2\right)^2}}} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left|x^2-1\right|} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left|1-x^2\right|}$$

d'où

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{, si } x \in \left]-1, 1\right[\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{, si } x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[. \end{cases}$$

6. On déduit que

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{, si } x \in \left]-1, 1\right[\\ \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{, si } x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[. \end{cases}$$

alors on résume le signe de f'' et la convexité de f dans le tableau ci-dessous

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
Convexité de f		*concave*		*convexe*		*concave*		*convexe*	

On remarque que la deuxième dérivée f'' s'annule et que f change de convexité à l'origine $o(0,0)$; par conséquent l'origine o est un point d'inflexion du graphe de f.

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{+\pi}{2}$	$\searrow$	0

7. Ci-dessous (figure 5.6) le graphe de la fonction f

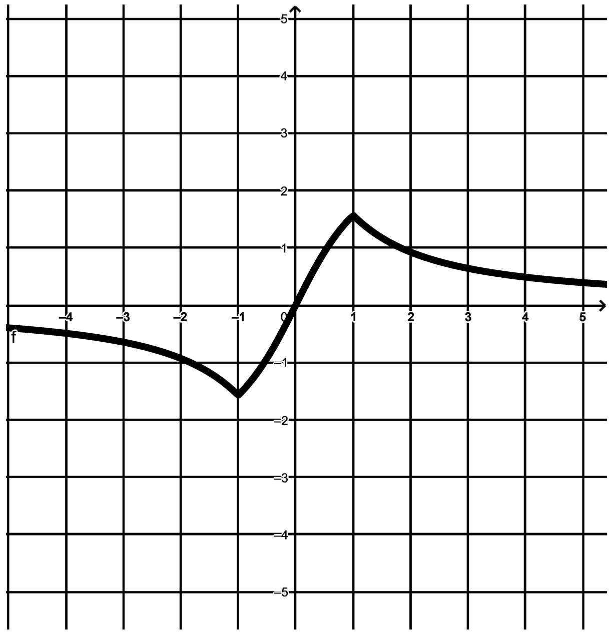

FIGURE 5.6 – Graphe de la fonction f

Exercice 13 :

$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$

1. $f'(x) = 2e^{x-1} - 2x - 1$; $f''(x) = 2e^{x-1} - 2$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
2. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Convexité de f	*concave*		*convexe*

3. On remarque que f'' s'annule et change de convexité en $x_0 = 1$; par conséquent le point $A(1,0)$ est un point d'inflexion du graphe de f.
4. $(T_A) : y = f(1) + f'(1)(x-1)$, d'où $(T_A) : y = -x + 1$.
   Dans l'intervalle $[1, +\infty[$; f est convexe donc son graphe G_f est au dessus de toutes ses tangentes ; en particulier (T_A) alors on a :
   $\forall\, x \geq 1 : f(x) \geq y \Leftrightarrow 2e^{x-1} - x^2 - x \geq 1 - x \Leftrightarrow e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$.

Exercice 14 :

On a $f(0) = 0$; $f(1) = 1$, f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(0) = f'(1) = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}, & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. La fonction g est continue sur $]0,1[$, car c'est la somme et le rapport de fonctions continues sur $]0,1[$.
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-1}{x-1} = f'(0) - 1 = -1 = g(0)$
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 1 - f'(1) = 1 = g(1)$
Donc g est continue sur $[0,1]$.
2. g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $g(0).g(1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α dans $]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - f(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha.$$
3. f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ alors d'après le théorème des accroissements finis on a :
$$\exists \beta \in]0,1[\ /f(1) - f(0) = f'(\beta) \Leftrightarrow \exists \beta \in]0,1[\ / \ f'(\beta) = 1.$$

Exercice 15 :

1. $g(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{2+2x+x^2}$
$D_g =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} g(x) = 1 - \pi$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x) = 1 + \pi$
$g'(x) = \frac{-x^2+4x-6}{(2+2x+x^2)^2} \Rightarrow g'(x) < 0$, $\forall x \in D_g$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0
$g(x)$	0	$\searrow$ $1-\pi$	$\Vert$	$1+\pi$ $\searrow$	0

2. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$
$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$
Pour le calcul des limites on remarque qu'au voisinage de l'infini ; on a l'équivalence entre $\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ et $\left(\frac{1}{1+x}\right)$, alors
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1+x} = -\infty$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x} = +\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

$f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x^2}{2+2x+x^2} = xg(x)$, $\forall x \in D_f$.

On remarque du tableau ci-dessus que

$\forall x \in]-\infty, -1[: g(x) < 0$ et $\forall x \in]-1, +\infty[: g(x) > 0$ d'où on a

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2} \Vert \frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

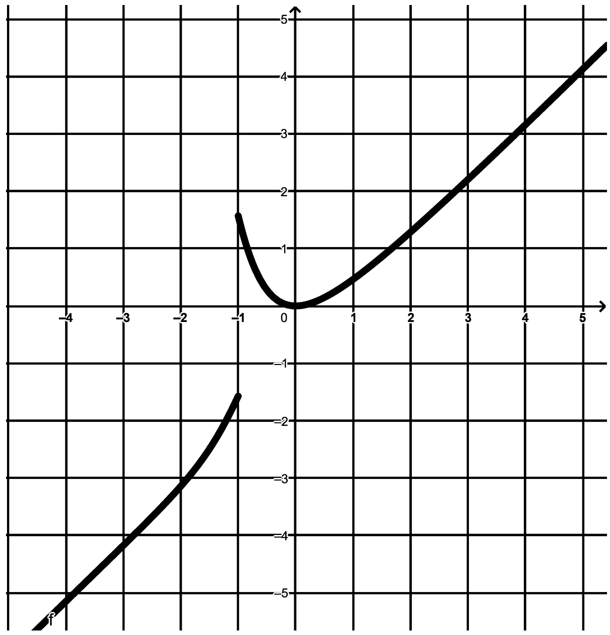

FIGURE 5.7 – Graphe de la fonction f

Bibliographie

[1] K. Allab, Eléments d'analyse ; Fonctions d'une variable réelle ; $1^{ère}$ et $2^{ème}$ année d'université ; Ecoles scientifiques -OPU- 1984.

[2] E. Azoulay, Problèmes corrigés de mathématiques - 2 éd. Paris : Dunod, 2002.

[3] C. Baba-Hamed et K. Benhabib, Analyse 1- Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985.

[4] L. Chambadal, Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

[5] G. Costantini, Cours et exercices corrigés. De boeck 2013.

[6] A. Hitta, Cours Algèbre et Analyse1 et exercices corrigés, 2008-2009.