République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté de Physique

Département de Technologies des matériaux

POLYCOPIÉ

RAPPELS DE COURS SUR LES VIBRATIONS ET EXERCICES RÉSOLUS

DR. ISSAM ASFOUR

Année Universitaire 2021/2022

Préface

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la deuxième année Licence LMD de la faculté de chimie, Spécialités : "Génie des Procédés", "Raffinage et pétrochimiques" et "Hygiène et sécurité industrielle". Ce manuel comporte un rappel de cours et des exercices résolus sur les différents chapitres du module de Vibrations. Le rappel de cours a été introduit afin de mettre en exergue les notions de base des vibrations permettant ainsi la compréhension des exercices de Travaux Dirigés. Il peut servir comme un support au cours dispensé aux étudiants. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

Le contenu de ce polycopié est structuré en cinq chapitres :

- Chapitre I : Généralités sur les Vibrations et les équations de Lagrange
- Chapitre II : Oscillations libres non amortis des systèmes à un degré de liberté
- Chapitre III : Oscillations libres amorties à un degré de liberté
- Chapitre IV : Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté
- Chapitre V : Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs visés et des prérequis nécessaires.

Pour ce mettre en situation d'épreuves, de nombreux exercices et problèmes supplémentaires sont proposés à la fin de chaque chapitre. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel. Comme pour tous les exercices autocorrectifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

Je souhaite que ce recueil d'exercices corrigés et exercices supplémentaires en vibrations puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

Table des matières

Chapitre I : Généralités sur les Vibrations et les équations de Lagrange

I.1 Définitions 1

I.1.1 Définition d'une oscillation (Vibration) 1

I.1.2 Mouvement périodique 1

I.1.3 Mouvement vibratoire 1

I.1.4 Mouvement sinusoïdale 1

I.1.5 Mouvement Oscillatoire 2

I.2 Coordonnées généralisées d'un système physique 2

I.2.1 Coordonnées généralisées 2

I.2.2 Degré de liberté 3

I.3 Choix de la méthode 4

I.3.1 Equation de Newton 4

I.3.1.1 Mouvement de translation 4

I.3.1.1 Mouvement de rotation 4

I.3.2 Equation de Lagrange 5

I.3.2.1 Cas des systèmes conservatifs 5

I.3.2.2 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse 6

I.3.2.3 Cas d'une force extérieure dépendant du temps 6

I.4 Exercices corrigés sur les vibrations 7

I.5 Exercices supplémentaires 12

Chapitre II : Oscillations libres non amortis des systèmes à un degré de liberté

II.1 Les systèmes libres non amortis (Oscillateurs libres) 15

II.2 Oscillateur harmonique 15

II.3 Équation du mouvement 15

II.4 L'énergie cinétique et l'énergie potentielle 15

II.4.1 L'énergie cinétique Ec 15

II.4.2 L'énergie potentielle Ep 16

II.4.2.1 Énergie potentielle de pesanteur 16

II.4.2.2 Énergie potentielle électrique 16

II.4.2.3 Énergie potentielle élastique 17

II.5 Conditions d'équilibre 17

II.6 Systèmes équivalents 18
II.6.1 Ressorts équivalents 18
II.6.1.1 Ressorts en série 18
II.6.2.1 Ressorts en parallèle et solide intercalé entre deux ressorts 18
II.6.2 Cas d'un ressort de masse non négligeable. 18
II.7 Moments d'inertie des solides réguliers 19
II.8 Exercices résolus 20
II.9 Exercices supplémentaires 31

Chapitre III : Oscillations libres amorties des systèmes à un degré de liberté

III.1 Introduction 34
III.2 Oscillateur amorti 34
III.3 Frottement et coefficient d'amortissement 34
III.3.1 Frottements visqueux 34
III.3.2 Frottements solides 34
III.4 Equation de Lagrange 34
III.5 Régimes de l'oscillateur amorti 35
III.5.1 Régime apériodique 35
III.5.2 Régime critique 35
III.5.3 Régime pseudopériodique 35
III.6 Décrément logarithmique 36
III.7 Coefficient de Qualité 37
III.8 Energie Mécanique 37
III.9 Exercices résolus 38
III.10 Exercices supplémentaires 54

Chapitre IV : Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

IV.1Introduction 58
IV.2 Équation différentielle du mouvement 58
IV.2.1 Exemple d'un système forcé amorti (système masse-ressort-amortisseur) 58
IV.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement 59
IV.3.1 Excitation sinusoïdale 60
IV.3.1.1 Calcul de l'amplitude A 60
IV.3.1.2 Calcul de φ 61
IV.3.2 La pulsation de Résonnance 61

IV.3.3 Bande passante 63
IV.3.4 Coefficient de qualité 63
IV.3.5 Excitation périodique 64
IV.4 Impédance mécanique 64
IV.4.1 Impédances mécaniques 64
IV.5 Exercices résolus 65
IV.6 Exercices supplémentaires 84
Chapitre V : Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté
V.1 Introduction 87
V.2 Systèmes à deux degrés de liberté 87
V.2.1 Types de couplage 87
V.2.1.1 Couplage Elastique 87
V.2.1.2 Couplage Inertiel 88
V.2.1.3 Couplage Visqueux 88
V.2.2 Equations différentielles du mouvement 89
V.2.3 Méthode générale de résolution des équations de mouvement 90
V.2.4 Etude d'un système mécanique à deux degrés de liberté 90
V.2.4.1 Système complexe (masses-ressorts) 90
V.2.4.2 Étude des modes propres 93
V.2.4.3 Phénomène de battement 94
V.3 Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté 96
V.3.1 Equations de Lagrange 96
V.3.2 Equation différentielle d'un système forcé à deux degrés de liberté 96
V.3.3 Etude du régime permanent sinusoïdal (Résolution des d'équations différentielles). 97
V.3.4 Calcul de X_1 et X_2 dans le cas de faible amortissement : 98
V.3.4.1 Amortissement négligeable 98
V.3.5 Les variations des amplitudes X_1et X_2 99
V.3.6 Application 100
V.4 Oscillations de système mécaniques à N degrés de liberté 102
V.4.1 définition 102
V.4.2 Méthode de Lagrange de mise en équation de système à N degrés de liberté 103
V.4.3 Mise en équation de système à N degrés de liberté 103
V.4.3.1 Cas général de N degrés de liberté 103
V.4.3.2 Modes propres de vibration d'un système mécanique à trois degrés de liberté. 103

V.5 Exercices résolus 108
V.6 Exercices supplémentaires 130
Références Bibliographiques.. 134

Chapitre I :

Généralités sur les Vibrations et les équations de Lagrange

I.1 Définitions

I.1.1 Définition d'une oscillation (Vibration)

La vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre.

I.1.2 Mouvement périodique :

Un mouvement périodique c'est un mouvement qui se répète et dont chaque cycle se reproduit identiquement. La durée d'un cycle est appelée période T qui s'exprime en seconde (s).

- Le nombre de répétition par seconde est appelé fréquence (notée f, mesurée en (Hertz) ou (s^{-1})). Elle est reliée à la période par :

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{(I.1)}$$

- Le nombre de tours par seconde est appelé pulsation (notée ω, mesurée en rad/s.)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(I.2)}$$

Mathématiquement, le mouvement périodique de période T est défini par : $x(t + T) = x(t)$.

I.I.3 Mouvement vibratoire :

Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique se produisant de part est d'autre d'une position d'équilibre.

I.1.4 Mouvement sinusoïdale :

Un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si l'élongation x (y ou z) d'un point vibrant est une fonction sinusoïdale simple du temps de type :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \text{ Ou bien } x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$x(t)$ est appelée l'élongation (ou la position) à l'instant t.

A : l'amplitude d'un mouvement ou L'élongation maximale.

ω: La pulsation du mouvement et exprimée en $(rad\ /s)$.

φ : la phase initiale, correspond à la phase à l'instant $t = 0$

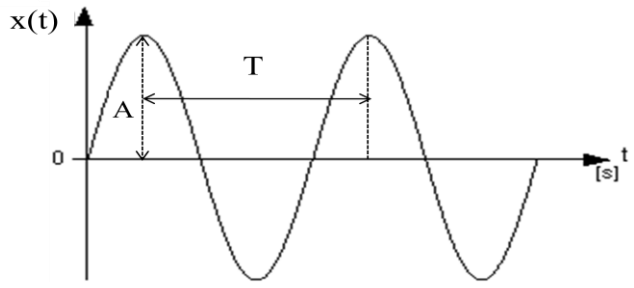


Figure I.1 Exemple d'un mouvement périodique sinusoïdal

Exemple : Sur la figure I.1 considérons un mouvement vibratoire sinusoïdal de la forme :

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, de période T= 1s et d'amplitude 1cm.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{1} = 6.28\ \text{rad.s}^{-1}$

$A = 1 \Rightarrow x(t) = \cos(2\pi t + \varphi)$.

À $t = 0 \Rightarrow x(0) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) = \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$ (cm)

I.1.5 Mouvement Oscillatoire :

Un système oscillant est caractérisé par des mouvements périodiques au voisinage d'une position d'équilibre sous l'effet d'une perturbation extérieure. Lorsque le mouvement est sinusoïdal, l'oscillateur est dit harmonique.

On distingue deux types de types de vibrations (oscillations) :

- Les oscillations mécaniques (pendule simple, corde vibrante, …)
- Les oscillations électromagnétiques (Lumière, ondes radio, …)

I.2 Coordonnées généralisées d'un système physique

I.2.1 Coordonnées généralisées :

Les coordonnées généralisées sont tout ensemble de variables permettant de spécifier l'état d'un système physique. Les coordonnées généralisées ne sont pas toujours supposées indépendantes, et leur intérêt, par rapport aux seules coordonnées cartésiennes, est de pouvoir choisir les coordonnées les plus adaptées pour représenter le système, en tenant compte de ses contraintes.

Exemple : dans le cas d'un pendule, il est avantageux d'utiliser l'angle du pendule parmi les coordonnées généralisées.

Les coordonnées généralisées sont au nombre de n ≤3N, où N est le nombre de points permettant de décrire le système et sont souvent notées : $q_1(t),\ q_2(t) \ldots \ldots \ldots\ q_N(t)$.

I.2.2 Degré de liberté :

On appel degré de liberté (ddl) d'un système, la capacité de ce système d'effectuer le mouvement de translation et de rotation par rapport aux axes. Où, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant

moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles : $d = N - r$.

d: Degré de liberté.

N **:** Nombre de coordonnées généralisées.

r **:** Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles.

- **Exemple :**

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur une plate-forme horizontale.

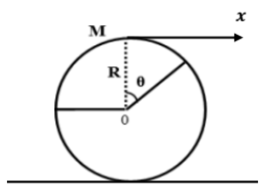


Figure I.2 : cylindre

On a deux coordonnées généralisées x et θ donc : $N = 2$.

x et θ sont liées avec une relation: $x = r\theta$ donc : $r = 1$.

Donc : le nombre de degrés de liberté $d = N - r = 1$.

Il est possible aussi de déterminer le degré de liberté DDL par la relation suivante :

DDL= [nombre de coordonnée générales]-[coordonnée = 0 ou Cst]. Nous pouvons citer quelques exemples :

- **Exemple : Particule en chute libre :**

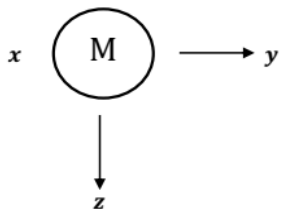


Figure I.3 : Particule

Sur les trois coordonnées x, y, z

Nombre de coordonnée générales : 03.

On a deux coordonnées constantes : y et z.

DDL= 3-2 =1.

I.3 Choix de la méthode

Le choix de la méthode de calcul à utiliser pour en aboutir à l'équation du mouvement (EDM), on distingue :

- L'équation de Newton.
- L'équation de Lagrange.

I.3.1 Equation de Newton :

Ce formalisme est basé sur le principe fondamental de la dynamique il est appliqué selon le cas de figure du mouvement à savoir : translation ou bien rotation.

I.3.1.1 Mouvement de translation :

Si un système de masse m est soumis à des forces extérieures, la loi fondamentale de la dynamique (L.F.D.) nous donne :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_i = m\vec{a}_i \qquad \text{(I.3)}$$

I.3.1.1 Mouvement de rotation :

La Loi fondamentale de la dynamique d'un mouvement de rotation s'écrit :

$$\sum_i M_\Delta\left(\vec{F}_i\right) = J\,\ddot{\Theta} = J\,\frac{d^2\Theta}{dt^2} \qquad \text{(I.4)}$$

- **Exemple : (Masse-ressort)**

Considérons une masse attachée à un ressort de constante de raideur K, appliquant un déplacement sur la masse dans la direction x

F : Force de rappel du ressort : $F = -Kx$

L'application du formalisme de newton (PFD) en translation conduit:

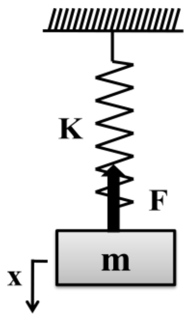


Figure I.4 : Masse-ressort

$$\sum \vec{F} = M\ddot{x} \;=>\; -Kx = M\ddot{x} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{K}{M}x = 0$$

De la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 = 0 => \;\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

I.3.2 Equation de Lagrange :

La fonction de Lagrange (lagrangien du système) qui est la différence de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p :

$$L = E_c - E_P \qquad (I.5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext,q} \qquad (I.6)$$

avec :

q: est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$: Les forces extérieures généralisées.

I.3.2.1 Cas des systèmes conservatifs :

Pour un système conservatif, la force appliquée dérive d'un potentiel, l'équation de Lagrange des systèmes conservatifs en absences des forces dépendantes du temps (libres) et définis par une seule cordonnée généralisée (1DDL) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (I.7)$$

Pour un mouvement unidimensionnel x (translation), l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (I.8)$$

Pour un mouvement rotationnel θ (rotation), l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad (I.9)$$

- L'énergie cinétique de translation Ec_{tran} d'une masse ‟ m ”et de vitesse ‟ v ” est :

$$E_c = \frac{1}{2} mV^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad (I.10)$$

- L'énergie cinétique de rotation Ec_{rot} d'un corps de moment d'inertie $I_{/\Delta}$ est :

$$E_c = \frac{1}{2} I_{/\Delta}\dot{\theta}^2 \qquad (I.11)$$

- L'énergie potentielle Ep d'une masse dans un champ gravitationnel :

$$E_p = mgh \qquad (I.12)$$

- L'énergie potentielle d'un ressort :

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{(I.13)}$$

- **Exemple :**

Reprenons le même exemple déjà traité par le formalisme de Newton, par le formalisme de Lagrange (Masse-ressort).

$$E_c = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}K\,x^2$$

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K\,x^2$$

L'équation de Lagrange est donnée comme suit :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow M\ddot{x} + Kx = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}} + \frac{K}{M}x = 0$ de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

Pulsation propre du système $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

I.3.2.2 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse :

Dans le cas de présence des forces de frottement qui dépendent de la vitesse [Amortissement], l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad \text{(I.14)}$$

D est la fonction de dissipation donnée par : $D = \frac{1}{2}\Gamma\dot{q}^2$

I.3.2.3 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation de Lagrange s'écrit comme :

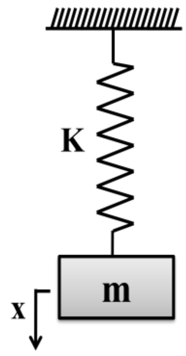
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q} \qquad \text{(I.15)}$$

Et pour un système à plusieurs degrés de liberté, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q_i} \text{ , } i = 1,2 \ldots . N \qquad \text{(I.16)}$$

I.4 Exercices corrigés sur les vibrations

Exercice N°1



Un mouvement vibratoire est caractérisé par le déplacement suivant :

$$x(t) = 10\cos(50t + \frac{\pi}{2})$$

Ou x en centimètres (cm), t en secondes (s) et la phase en radians (rad).

1- Déterminer l'amplitude maximale.

2- Donner la pulsation,

3- la fréquence et la période du mouvement.

4- Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).

5- Calculer le déplacement x et la vitesse v a l'instant t=0s.

Solution N°1

L'équation $x(t) = 10\cos(50t + \frac{\pi}{2})$ De la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ alors :

1- L'amplitude maximale est 5 cm. (A=5cm).

2- La pulsation est ω=50 rad.s^{-1}

3- La fréquence f : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50}{2\pi}$ =7.98 Hz , la période $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{7.98}$ = 0.125 s.

4- La phase initiale :$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.

5- Le déplacement, la vitesse :

A t = 0 s, $x(0) = 10\cos\left(50(0) + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ m

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(0) = \dot{x}(0) = -10 * 50 \sin(50(0) + \frac{\pi}{2}) = -500 \text{ m/s}^2$$

Exercice N°2

Les oscillations harmoniques d'un point matériel sont décrites par l'équation :

$x(t) = 0.5\sin(25t + \frac{\pi}{4})$ (m)

1- Trouvez l'amplitude **A** et la pulsation **ω**.

2- Déterminer la fréquence **f**, la période du mouvement **T** et déphasage initiale **φ**.

Solution N°2

1- L'amplitude A= 0.5 (m), La pulsation est ω=25 rad.s^{-1}.

2- La fréquence f : $f=\frac{\omega}{2\pi} = \frac{25}{2\pi}$ =3.98 Hz.

- La période $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.98} = 0.25$ s,

- La phase initiale :$\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad

Exercice N°3

Une particule vibre autour d'une position d'équilibre prise comme origine avec une fréquence de 100 Hz et une amplitude de 2 mm. Sachant que $v(0) = 0$. Ecrire l'équation horaire du mouvement sous la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Solution N°3

1- l'équation horaire :

- L'amplitude A= 2.10^{-3} (m)
- La pulsation $\omega = 2\pi f$, ω=628 rad.s^{-1}

a- L'équation horaire : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

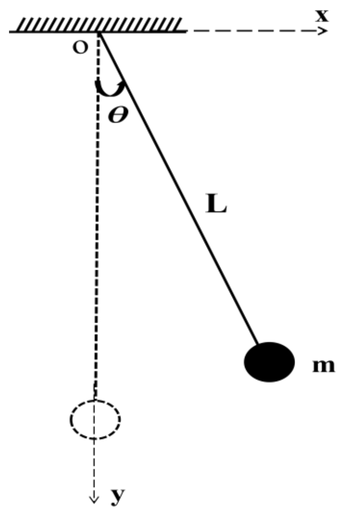
$$v(0) = \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

L'équation horaire demandée s'écrit : $x(t) = 2.10^{-3}\cos(628.t)$ m

b- L'équation horaire : $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

L'équation horaire demandée s'écrit : $x(t) = 2.10^{-3}\cos\left(628.t + \frac{\pi}{2}\right)$ m

Exercice N°4



1- Déterminer l'équation de mouvement d'un pendule simple de la Figure ci contre, constitué d'une masse m et fils de longueur L de masse négligeable pour des faibles oscillations par la méthode de Lagrange.

2- Quel est le nombre de degré de liberté. Justifier

Solution N°4

1- L'équation de Lagrange caractérisant le système est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Le lagrangien est donné par $L = E_c - E_P$

$$E_c = \frac{1}{2} I_{/\Delta}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2$$

$$E_p = -mgh = -mgl\cos\theta$$

Pour les faibles oscillations $\sin\theta \approx \theta$ et

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

L'énergie potentielle s'écrit : $E_p = -mgh + mgl\frac{\theta^2}{2}$

Et le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgh + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

La pulsation propre du système $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

2- le nombre de degré de liberté :

On a trois coordonnées généralisées x, y et θ donc : $\boldsymbol{N} = 3$.

x et θ sont liées avec une relation: $x = L\cos\theta$

y et θ sont liées avec une relation: $y = l\sin\theta$

Donc $r = 2$.

Donc : le nombre de degrés de liberté $d = N - r = 1$.

Exercice N°5

Un oscillateur a pour équation réduite $\ddot{x} + 4\dot{x} + 16x = 0$.

Calculer sa pulsation propre ω_0, son coefficient d'amortissement δ, pseudo pulsation ω, sa pseudo-période T

Solution N°5

L'équation d'un oscillateur harmonique peut s'écrire sous la forme: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Par identification on trouve :

- La pulsation propre ω_0 : $\omega_0^2 = 16\, rad.s^{-1} \Rightarrow \omega_0 = 4\, rad.s^{-1}$
- le coefficient d'amortissement δ : $2\delta = 4 \Rightarrow \delta = 2s^{-1}$
- pseudo pulsation ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{16-4} = \sqrt{12}\, rad.s^{-1}$$

- le pseudo-période T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{\sqrt{12}} = 1.815 \text{ s}$$

Exercice N°6

Un mouvement harmonique est décrit par : $x(t) = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)t$, (x en (mm), t en secondes).

1- Déterminer la fréquence et la période du mouvement.

2- Déterminer l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

3- Le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0 s et t=1,2 s

Solution N°6

$x(t) = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)t$

1- La fréquence et la période du mouvement :

L'équation horaire : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\omega = 2\pi f = \frac{\pi}{5} \Rightarrow f = \frac{1}{10} = 0.1\ \text{Hz}$

la période du mouvement T :

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.1} = 10\ s$

2- l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération :

$x(t) = A cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -A\omega^2 cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x(t) = 10\cos\frac{\pi}{5}t \Rightarrow \dot{x}(t) = -2\pi\sin\frac{\pi}{5}t \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{10\pi^2}{25}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)t$

-L'amplitude du déplacement A : $A = 10\ \text{mm}$

-L'amplitude du déplacement $\dot{x}_0$:

$\dot{x}_0 = -2\pi\ \text{mm.s}^{-1}$

-L'amplitude de l'accélération : $\ddot{x}_0$

$\ddot{x}_0 = -10 \times \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = -3{,}943\text{mm/s}^2$

3- Le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0 s et t=1,2 s :

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 10\ \text{mm} \\ \dot{x}(0) = 0\ \text{mm.s}^{-1} \\ \ddot{x}(0) = -3{,}943\text{mm/s}^2 \end{cases}$$

$$\text{à } t = 1.2\ s \Rightarrow \begin{cases} x(1{,}2) = 7{,}29\ \text{mm} \\ \dot{x}(1{,}2) = 4{,}3\ \text{mm.s}^{-1} \\ \ddot{x}(1{,}2) = 1{,}23\text{mm/s}^2 \end{cases}$$

I.5 Exercices supplémentaires

Exercice N°1

Les oscillations harmoniques d'un point matériel sont décrites par l'équation :

$$x(t) = 0.2\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$$

Trouvez : l'amplitude A, la pulsation ω, la période T, la fréquence f et le déphasage initiale φ

Exercice N°2

Un mouvement harmonique est décrit par : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Les conditions initiales sont : $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

1- Calculer A et φ .

2- Exprimer $x(t)$ sous la forme $x(t) = B\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et en déduire B et C.

Exercice N°3

Un système mécanique masse-ressort, oscille harmoniquement avec une amplitude $A = 2\text{cm}$, et une fréquence $f = 1\text{Hz}$. A l'instant $t = 0$, son déplacement est maximum. Sachant que la masse $m = 10$ kg.

Calculer l'énergie cinétique, potentielle et totale de cet oscillateur à l'instant $t = 2s$.

Exercice N°4

L'´equation d'un oscillateur harmonique peut s'´ecrire sous la forme:

$$\ddot{x} + 2\delta\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (*)$$

Si l'on considère que les solutions sont de la forme $x = e^{rt}$. Donner :

1- L'équation caractéristique.

2- Déterminer la solution de cette équation pour le cas $\Delta < 0$.

3- Dans le cas ou $\delta = 0$, déduire la solution de l'´equation (*).

Exercice N°5

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre O contenu dans le plan XOY.

1- Traduire la liaison par une ou des relations mathématiques.

2- Quel est le nombre de degrés de liberté de ce point ?

3- quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour repérer ce point ?

Exercice N°6

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur une sphère. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

Exercice N°7

On considère un haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur L, de diamètre et de masses négligeables.

1- Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre deux masses ?

2- Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?

Exercice N°8

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.

1- Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide?

2- Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un solide?

Exercice N°9

Un oscillateur a pour équation réduite $\ddot{x} + 16\dot{x} + 64x = 0$.

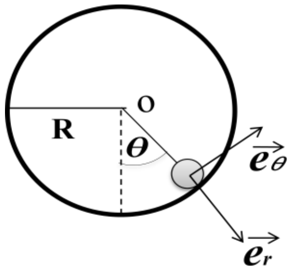
1- Calculer sa pulsation propre ω_0, la fréquence propre f_0 et la période propre T_0.

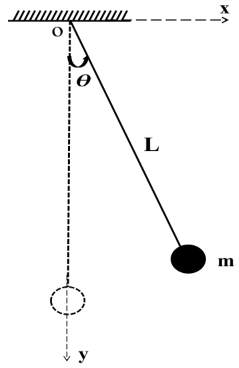
2- Déterminer le coefficient d'amortissement δ

3- Déduire le pseudo- pulsation ω, pseudo période T

Exercice N°10

Dans les systèmes mécaniques représentés sur les figures ci-dessous, les positions d'équilibre sont représentées en pointillés.





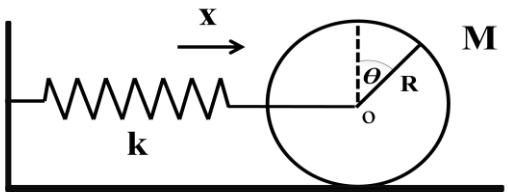


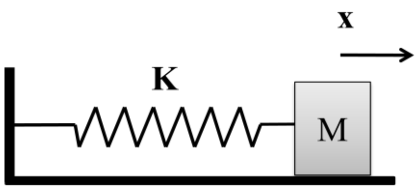
Figure (a) Figure (b) Figure (c)

1- Quel est le nombre de degré de liberté du point matériel dans chaque système.

2- Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour définir le mouvement de ce point.

Exercice N°11

Un système mécanique est constitué d'un ressort de constante de raideur k relié à une masse ponctuelle m, oscille autour de sa position d'équilibre.

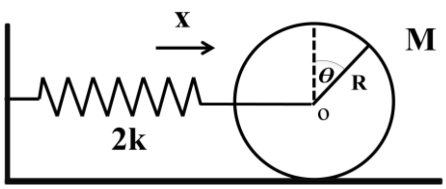


1- Quel est le nombre de degré de liberté. Justifier.

2- Retrouver l'équation différentielle du mouvement en appliquant les deux formalismes.

Exercice N°12

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur une plate-forme horizontale. Le centre du cylindre est relié à un bâti par un ressort de raideur 2K (Voir le schéma ci-contre).



Rappel : le moment d'inertie du cylindre $J = \frac{1}{2}MR^2$

Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

Chapitre II :

Oscillations libres non amortis des systèmes à un degré de liberté

II.1 Les systèmes libres non amortis (Oscillateurs libres)

Un système oscillant en absence de toute force d'excitation (forces extérieures) est appelé libre (oscillateur libre non amorti). Le nombre des variables indépendantes décrivant le système est appelé degré de liberté (DDL).

II.2 Oscillateur harmonique

En mécanique, on appelle oscillateur harmonique qui, dés qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ).

II.3 Équation du mouvement

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti est de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

L'équation de Lagrange pour les oscillations libres d'un système conservatif est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

La solution de l'équation (II.1) est donnée par :

$$q(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 \mathrm{t} + \varphi) \qquad \text{(II.3)}$$

A : Amplitude des oscillations, φ : Phase initial**.**

ω_0: La pulsation du système, elle dépend des éléments constitutifs (masse, ressort, fils…).

Les constantes A et φ sont calculés à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q_0} \end{cases} \qquad \text{(II.4)}$$

L'amplitude des oscillations d'un oscillateur harmonique libre ne dépend pas du temps.
De telles oscillations sont dites non amorties.

II.4 L'énergie cinétique et l'énergie potentielle

II.4.1 L'énergie cinétique $\mathbf{E_c}$:

L'énergie cinétique est une notion fondamentale en physique, en particulier en dynamique. Comme toute énergie, l'énergie cinétique s'exprime en joules (J).
L'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques des corps qui le composent. On distingue deux formes d'énergie cinétique :

- l'énergie cinétique de translation ;
- l'énergie cinétique de rotation.

Dans le cas d'un corps en translation, de masse m et de vitesse v, l'énergie cinétique E_c est proportionnelle à la masse du corps et au carré de sa vitesse, soit la relation :

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \text{(II.5)}$$

Dans le cas d'un corps en rotation, l'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, selon la relation :

$$E_c = \frac{1}{2} I_{/\Delta} \dot{\theta}^2 \qquad \text{(II.6)}$$

Où $I_{/\Delta}$ représente le moment d'inertie du système.

II.4.2 L'énergie potentielle E_p :

L'énergie potentielle est une notion fondamentale en physique, en particulier en dynamique. Comme toute énergie, l'énergie potentielle s'exprime en joules (J).À chaque type d'interaction correspond une énergie potentielle particulière : de pesanteur, électrique, élastique, etc.

II.4.2.1 Énergie potentielle de pesanteur :

L'énergie potentielle de pesanteur est proportionnelle à l'altitude h du corps et à l'intensité g du champ de pesanteur considéré. Elle se note E_p et est exprimée en joules (J). Cette énergie est définie par rapport à une position choisie arbitrairement servant de référence, en général :

$$E_p = mgh \qquad \text{(II.7)}$$

avec m en kilogrammes (kg), g en newtons par kilogramme ($N.kg^{-1}$) et h en mètres (m).

II.4.2.2 Énergie potentielle électrique :

Une particule chargée placée dans un champ électrique possède une énergie potentielle électrique, notée E_{pe}. Cette énergie dépend de la charge q de la particule et du potentiel électrique V du point où se trouve la particule :

$$E_p = q.V \qquad \text{(II.8)}$$

avec q en coulombs (C) et V en volts (V).

II.4.2.3 Énergie potentielle élastique :

L'énergie potentielle élastique est l'énergie potentielle emmagasinée dans un corps élastique lorsque ce dernier est compressé ou étiré par rapport à sa position naturelle. Lorsque la force comprimant ou étirant le corps élastique cesse, celui-ci tend naturellement à retourner à sa position naturelle et transforme ainsi son énergie potentielle en énergie cinétique.

Dans le cas classique d'un ressort, l'énergie potentielle élastique E_p dépend de l'allongement ou du raccourcissement du ressort, noté x, et de la constante de raideur K du ressort selon la relation :

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{(II.9)}$$

Avec K en newtons par mètre $(N.m^{-1})$ et x en mètres (m).

II.5 Conditions d'équilibre

Deux conditions définissent le mouvement vibratoire :

- La condition d'équilibre **:** $\left.\frac{\partial E_p}{\partial q}\right|_{q=0} = 0$
- La condition de stabilité est donnée par **:** $\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\right|_{q=0} > 0$

La figure II.1 montre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x. Dans un mouvement vibratoire, l'énergie totale est constante. L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle. Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système.

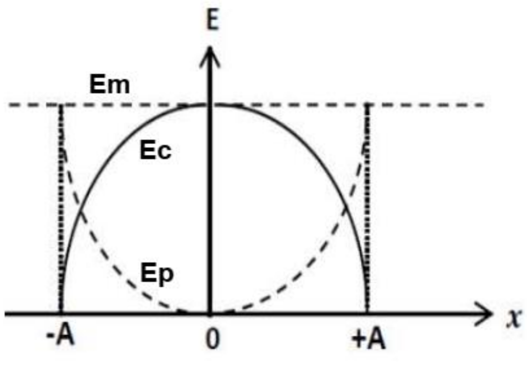


Figure. II.1 : Variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x

L'énergie totale du système est égale à une constante. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude et de la fréquence de l'oscillation.

$$E_m = E_c + E_p \qquad \text{(II.10)}$$

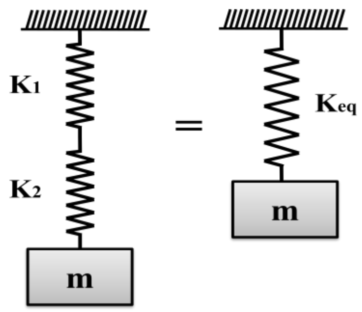
II.6 Systèmes équivalents

C'est un système simple qu'on représente en générale par un ressort équivalent ou une masse équivalente.

II.6.1 Ressorts équivalents : On a deux cas :

II.6.1.1 Ressorts en série

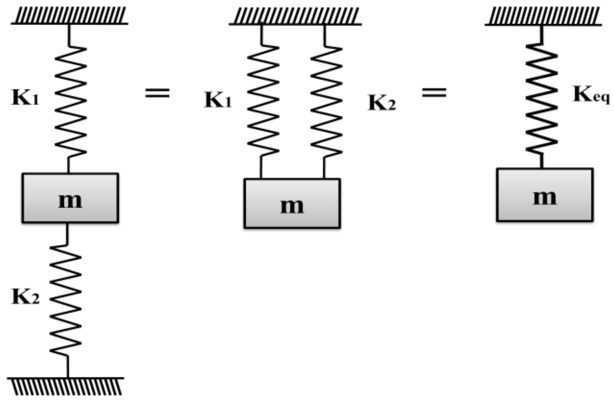
La constante de ressort équivalent $\mathbf{K_{eq}}$:



II.6.1.2 Ressorts en parallèle et solide intercalé entre deux ressorts

La constante de ressort équivalent $\mathbf{K_{eq}}$:

$K_{eq} = K_1 + K_2$

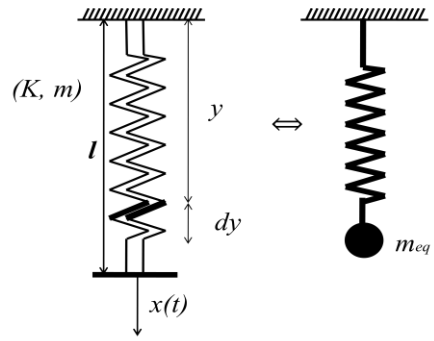


II.6.2 Cas d'un ressort de masse non négligeable.

m : La masse du ressort.

Au repos :

- l : La longueur du ressort.
- dm : masse élémentaire située à une distance y du point de suspension.



En mouvement :

- $x(t)$: Déplacement instantané de l'extrémité mobile du ressort.

- $dy = \frac{y}{l}x(t)$: Déplacement de la masse élémentaire
  $sa\ vitesse = \frac{y}{l}\dot{x}(t)$

-La masse linéique du ressort à une distance l: $\overline{\rho} = \frac{m}{l} \Rightarrow m = \overline{\rho} l$

-La masse de l'élément dy du ressort : $m_s = \overline{\rho} dy = \frac{m}{l} dy$

⇒L'énergie cinétique= $\sum$ tous les énergies de ses éléments

$$\Rightarrow E_c = \int \frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}dy\right) \times \left(\frac{y}{l}\dot{x}(t)^2\right)$$

$$E_c = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}(t)^2 y^2 dy = \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}(t)^2 . \frac{y^3}{3}\Big|_0^l$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}(t)^2 , \qquad m_{eq} = \frac{m}{3}$$

II.7 Moments d'inertie des solides réguliers

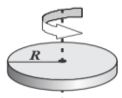
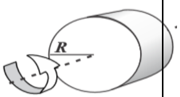
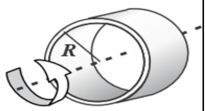
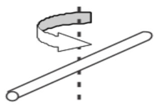
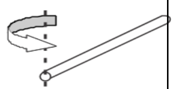
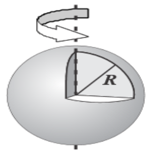
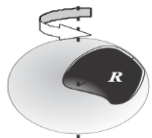
Disque plein Cylindre plein	Anneau ou Cylindre Creux (troux de rayon r=R)	Tige mince	Tige mince	Sphère pleine	Sphère creuse
  $J = \frac{1}{2}MR^2$	 $J = MR^2$	 $J = \frac{1}{2}ML^2$	 $J = \frac{1}{3}ML^2$	 $J = \frac{2}{5}MR^2$	 $J = \frac{2}{3}MR^2$

Figure. II.2 : Moments d'inertie des solides

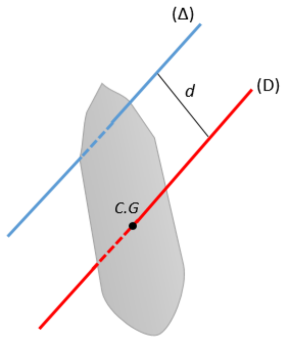
- Le moment d'inertie d'une tige de masse M de longueur L autour de centre de gravité G est $J = \frac{1}{12}ML^2$

- Le moment d'inertie d'un disque de masse M de rayon R autour de centre de gravité G

est $J = \frac{1}{2}MR^2$

-Théorème des axes parallèles (Huygens) : Le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe de rotation (Δ) parallèle à l'axe (D) passant par le centre de gravité (C.G) :

$$J_{(\Delta)} = J_{(D)}(C.G) + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2$$

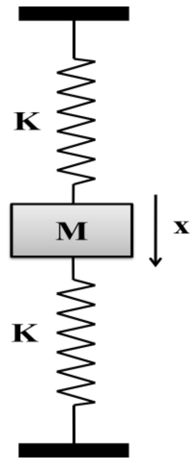


$J_{(D)}(C.G)$: le moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe (D) passant par (C.G).

d : la distance entre l'axe de rotation (Δ) parallèle à l'axe (D) passant par (C.G).

II.8 Exercices résolus

<u>Exercice N°1</u>



Soit un système modélisé par une masse M et deux ressorts de raideur K.

(Voir le schéma ci-contre).

Valeurs numériques : M=0.5 kg, K=100 N/m.

1- Quelle est le type du système ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p.

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de x.

4- Donner la solution finale si : $x(0) = 1\ cm\ ; \dot{x}(0) = 0$.

5- Calculer l'énergie totale.

<u>Solution N°1</u>

1- Le type du système : Système libre à 1 ddl.

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(K)} = \frac{1}{2}K\,x^2 + \frac{1}{2}K\,x^2 = K\,x^2$$

$$L = E_c - E_P$$

3- L'équation du mouvement:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{x}}\right) + \frac{dE_p}{dx} = 0$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{x}} = M\dot{x}\ \ ;\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{dE_p}{dx} = 2Kx$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$M\ddot{x} + 2kx = 0\ \Rightarrow\ \ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$

la pulsation propre :$\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = 20\ \text{rad.}\,\text{s}^{-1}$

La période propre T_0 **:** $T_0 = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{200}} = 0{,}314$ s

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{2\pi}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\sqrt{\frac{2K}{M}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\sqrt{\frac{200}{0.5}} = 3{,}184$ Hz

4-la solution finale est :

$x(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \\ x(0) = A = 1\ \text{cm} = 0.01\text{m} \end{cases}$$

Alors : $x(t) = 0{,}01\cos(\omega_0 t)$ m $\Rightarrow$ $x(t) = 0{,}01\cos(20t)$ m

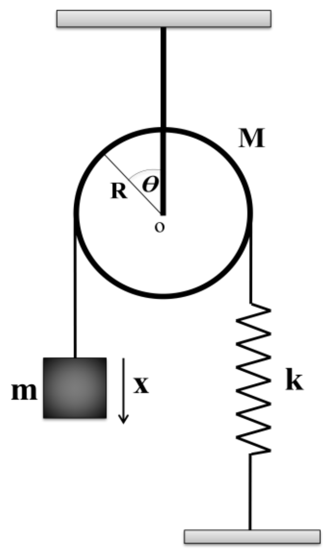
5- Energie Totale :

$E(t) = E_c(t) + E_p(t)$

$E(t) = E(0) = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2} M\,\dot{x}^2(0) + K\,x^2(0) = K.A^2 = 100 \times (0.01)^2$

$E(t) = 0.01$ J

Exercice N°2



Une poulie homogène de masse $M = 2$ kg et de rayon $R = 0.2$m.

On note : $I_{/o} = J_{/o} = \frac{1}{2} MR^2$, le moment d'inertie de la poulie.

La poulie est suspendue par une corde inextensible a un bâti fixe. Aux Extrémités de la poulie sont fixés un ressort de raideur $k = 60$ N/m, et une masse $m = 0.5$ kg par un fil inextensible de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. Si x est le déplacement vertical de la masse m.

1- Donner l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système en fonction de θ.

2- Trouver le lagrangien L et déduire l'équation du mouvement.

3- Trouver la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0.

4- Trouver la solution finale en prenant comme conditions initiales : $\theta(0)=\frac{\pi}{25}\,;\dot{\theta}(0)=0$.

Solution N°2

1- l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_c=E_M+E_m$$

$E_c=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, avec $x=R\theta\Rightarrow\dot{x}=R\dot{\theta}$

$$E_c=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot{\theta}^2$$

$$E_P=E_{P(K)}=\frac{1}{2}kx^2\Rightarrow E_P=\frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

2- Fonction de Lagrange :

$$L=E_c-E_P$$

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot{\theta}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-kR^2\theta$$

Donc : $\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\ddot{\theta}+kR^2\theta=0\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{2k}{M+2m}\theta=0$

3- la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0 :

La pulsation propre : $\omega_0^2=\frac{2K}{M+2m}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{2K}{M+2m}}=\sqrt{\frac{120}{3}}=6{,}324\ rad.s^{-1}$

La période propre T_0 **:** $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2K}}=2\pi\sqrt{\frac{3}{120}}=0{,}992\ s$

La fréquence propre f_0 : $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{M+2m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{120}{3}}=1{,}007\ Hz$

4-la solution finale est :

$\theta(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = A\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi)$

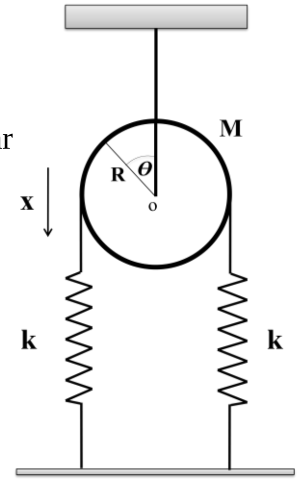
$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = A\omega_0 cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \theta(0) = A\sin(\varphi) = \frac{\pi}{25} \Longrightarrow A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{25} \Longrightarrow A = \frac{\pi}{25} \end{cases}$$

Donc :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{25}\ \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{25}\ \sin\left(6{,}324t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice N°3

Soit une poulie (cylindre creux) de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La poulie est suspendue en son centre par une corde inextensible a un bâti fixe. De part et d'autre de la poulie on fixe sur sa périphérie deux ressorts de même raideur k. les deux ressorts ont leur autre extrémité reliée au sol. On donne le moment d'inertie $J_{cylindre/O} = MR^2$.



Valeurs numériques : M=1 kg, K=50 N/m, R=0.2 m

1- Quelle est le type du système ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p.

3- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ.

4- Trouver la solution finale en prenant comme conditions initiales: $\theta(0) = 0$; $\dot{\theta}(0) = 5\omega_0$.

5- Calculer l'énergie totale

Solution N°3

1- Le type du système : Système libre à 1 ddl.

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(K)} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = k\,x^2 \quad , x = R\theta$$

$$E_P = kR^2\theta^2$$

$$L = E_c - E_P$$

3- L'équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \; ou \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta} \;\; ; \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{\theta}}\right) = MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 2KR^2\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$MR^2\ddot{\theta} + 2kR^2\theta = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

la pulsation propre :$\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

La période propre T0 **:** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = 0{,}628\ \mathrm{s}$

La fréquence propre *f0* : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100}{1}} = 1{,}592\ \mathrm{Hz}$

4-la solution finale est :

$$\begin{cases} \theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{\theta}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \Rightarrow A\sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \\ \dot{\theta}(0) = A\omega_0\cos(\varphi) = 5\omega_0 \Rightarrow A = \dfrac{5}{\cos(\varphi)} = \dfrac{5}{\cos(0)} = 5 \end{cases}$$

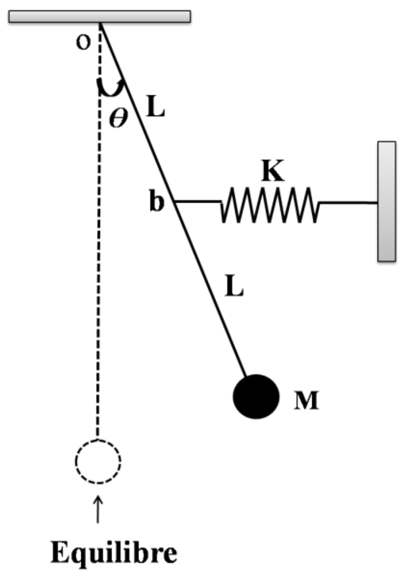
Donc : $\theta(t) = 5\sin(10t)$ m

5- Energie Totale :

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t)$$

$$E(t) = E(0) = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2(0) + kR^2\theta^2(0) = \frac{1}{2}MR^2(5\omega_0)^2$$
$$= \frac{1}{2}(1 \times (0.2)^2) \times (0.01)^2 = 2 \times 10^{-6}\mathrm{J}$$

Exercice N°4



On considère le système mécanique représenté à la figure ci-contre. La tige de masse négligeable et de longueur 2L

La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point O. Le milieu de la tige (point b) est relié à un bâti par un ressort de raideur K et son extrémité libre porte une masse M.

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudier.

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système (pour la variable θ).

3- En déduire l'équation différentielle du mouvement de ce système, utiliser la variable θ, et préciser sa fréquence propre f_0.

4- La solution de l'équation différentielle est de la forme : $\theta(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi)$.

Déterminer l'amplitude A et la phase initiale φ si à l'instant $t = 0$,

$$\theta(0) = \frac{\pi}{20}\ ;\dot{\theta}(0) = 0$$

Solution N°4

1- Le nombre de degré de liberté du système :

Le système oscille à un degré de liberté car il y a une seule variable indépendante qui caractérise le mouvement.

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p (variable θ):

$$E_C = E_{CM} = \frac{1}{2} J_M \dot{\theta}^2,\ J_M = M(2L)^2 = 4ML^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(4ML^2)\dot{\theta}^2 \Rightarrow E_c = 2ML^2\dot{\theta}^2$$

$$E_P = E_{P(M)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = Mgh + \frac{1}{2}Kx^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\theta$

$$h = 2L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = 2L\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = L\theta^2$$

$$E_p = Mgh + \frac{1}{2}KL^2\theta^2$$

$$E_p = MgL\theta^2 + \frac{1}{2}KL^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(2MgL + KL^2)\theta^2$$

3- L'équation différentielle du mouvement et la fréquence propre :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0\ ou\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{\theta}} = 4ML^2\dot{\theta}\ ;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{\theta}}\right) = 4ML^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = (2MgL + KL^2)\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$4ML^2\ddot{\theta} + (2MgL + KL^2)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(2MgL + KL^2)}{4ML^2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{2L} + \frac{K}{4M}\right)\theta = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

$$\omega_0^2 = \left(\frac{g}{2L} + \frac{K}{4M}\right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{g}{2L} + \frac{K}{4M}\right)}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{g}{2L} + \frac{K}{4M}\right)}$$

4- L'amplitude A et la phase φ :

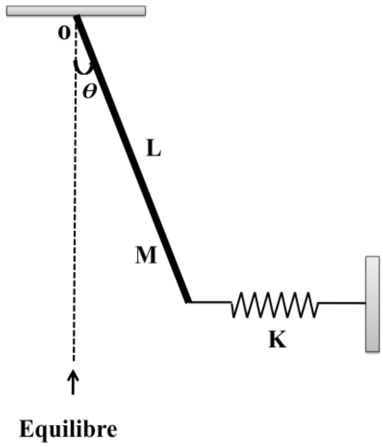
La solution de l'équation différentielle est :
$\theta(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = A\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow A\omega_0 cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta(0) = \dfrac{\pi}{20} \Rightarrow A\sin(\varphi) = \dfrac{\pi}{20} \Longrightarrow \mathrm{A}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{20} \Longrightarrow \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{20} \end{cases}$$

Les conditions donnent : $\mathrm{A} = \frac{\pi}{20}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$

<u>Exercice N°5</u>

Un système mécanique est constitué une barre de masse M et de longueur L oscille autour de l'articulation O dans le plan de la figure. A l'extrémité de cette barre, on place un ressort de constante de raideur K. A l'équilibre, la barre est verticale et le ressort de raideur K est au repos.



1- Donner le moment d'inertie du système (en utilisant le Théorème de Huygens).

2- Donner l'expression l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système dans le cas des faibles oscillations (pour variable θ).

3- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ.

4- Trouver la solution finale en prenant comme conditions initiales: $\theta(0) = \frac{\pi}{22}$; $\dot{\theta}(0) = 0$.

<u>Solution N°5</u>

1- Le moment d'inertie total J_M :

$$J_M = J_{M/CG} + J_{M/O}$$

$$J_M = \frac{ML^2}{12} + ML^2 \Rightarrow J_M = \frac{13ML^2}{12}$$

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p (variable θ):

$$\mathrm{E_C} = \frac{1}{2}\mathrm{J_M}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{13ML^2}{12}\right)\dot{\theta}^2$$

$$\mathrm{E_P} = \mathrm{E_{P(M)}} + \mathrm{E_{P(K)}}$$

$$\mathrm{E_p} = \mathrm{Mgh} + \frac{1}{2}\mathrm{Kx}^2$$

Faibles oscillations $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\theta$

$$h = L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L\theta^2}{2}$$

$$E_p = Mg\frac{L\theta^2}{2} + \frac{1}{2}KL^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(MgL + KL^2)\theta^2$$

Fonction de Lagrange :

$$L = E_c - E_P$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{13ML^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(MgL + KL^2)\theta^2$$

3- l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{13ML^2}{12}\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{13ML^2}{12}\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(MgL + KL^2)\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\left(\frac{13ML^2}{12}\right)\ddot{\theta} + (MgL + KL^2)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right)\theta = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

la pulsation propre :$\omega_0^2 = \left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right)}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{2\pi}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\sqrt{\left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right)}$

4-la solution finale est :

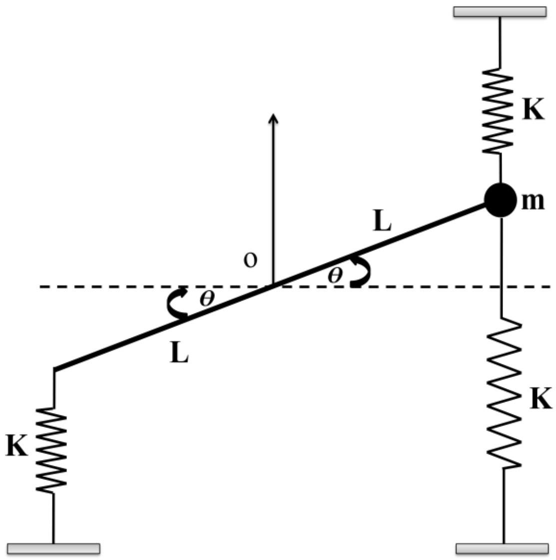
$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = A\omega_0\cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta(0) = A\sin(\varphi) = \dfrac{\pi}{22} \Longrightarrow A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{22} \Longrightarrow A = \dfrac{\pi}{22} \end{cases}$$

Donc : $\theta(t) = \frac{\pi}{22} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice N°6

Pour le système mécanique de la figure ci-contre, on considère une barre de masse négligeable de longueur 2L. Sur ses extrémités sont fixés une masse m, et des ressorts de constante K.



La position d'équilibre correspond à $\theta(0) = 0$.

1- Quelle est le type du système ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système (pour la variable θ).

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement libre pour de oscillations de faibles amplitudes.

4- Trouver la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0.

6- Trouver la solution $\theta(t)$.

Solution N°6

1-Le type du système : Système libre à 1 ddl

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_C = E_{CRot} = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2,\ J_m = m(L)^2 = mL^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(K)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\,\theta$

$$E_p = \frac{1}{2}K(L\theta)^2 + \frac{1}{2}K(L\theta)^2 + \frac{1}{2}K(L\theta)^2$$

$$E_p = \frac{3}{2} KL^2\theta^2$$

Le Lagrangien:

$$L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{1}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2} KL^2\theta^2$$

3- L'équation différentielle du mouvement en fonction de θ :

Formalise de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\dot{\theta} \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \ mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{3}{4} KL^2\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$mL^2\ddot{\theta} + \frac{3}{4} KL^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3K}{4m}\theta = 0$$

4- la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0 :

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\ \theta = 0$

la pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{3K}{4m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3K}{4m}}$

La période propre T_0 **:** $T_0 = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{3K}}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{\boldsymbol{2\pi}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\sqrt{\frac{3K}{4m}}$

5- Ecriture de la solution $\theta(t)$:

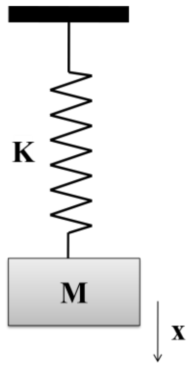
$\ddot{\theta} + \omega_0^2\ \theta = 0$ Système libre non amorti donc la solution est de la forme :

$\theta(t) = A sin(\omega_0 t + \varphi)$.

II.9 Exercices supplémentaires

Exercice N°1

Un système mécanique est constitué d'un ressort de constante de raideur k relié à une masse ponctuelle M, oscille autour de sa position d'équilibre.



Données numériques : $M = 0{,}2\ \text{kg}$, $K = 6\ \text{N.m}^{-1}$

1- Déterminer l'énergie cinétique et potentielle du système.

2- Déduire le lagrangien.

3- Donner l'équation de mouvement et sa solution.

4- Calculer la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0.

5- Donner la solution finale si : $x(0) = 3\ \text{mm}$; $\dot{x}(0) = 0$.

6- Calculer l'énergie totale de l'oscillateur harmonique. Conclure

Exercice N°2

Dans la figure ci-dessous, un système mécanique constitue d'une masse M=0.5 kg, d'un ensemble de ressorts.

On donne : $k = 60\text{N/m}$.

1- Simplifier le schéma en calculant le ressort équivalent

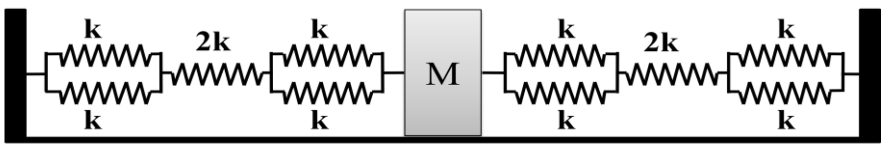
2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p.

3- Donner l'équation de mouvement et sa solution.

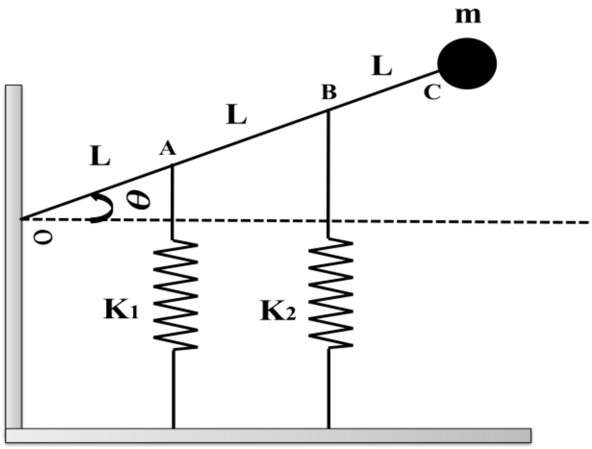
4- Calculer la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$, la période propre $\mathbf{T_0}$ et la fréquence propre $\boldsymbol{f_0}$.

5- Donner la solution finale si : $x(0) = 2\ \text{cm}$; $\dot{x}(0) = 0$.

6- Calculer l'énergie totale.



Exercice N°3



Un système mécanique est constitué une tige de longueur 3L de masse négligeable est articulée O et porte à son extrémité C une masse m (Voir le schéma ci-contre). Deux ressorts de raideur K_1 et K_2 sont liés à la tige aux points A et B respectivement.

A l'équilibre, la tige est horizontale et elle est écartée d'un angle θ supposé très petit (les faibles oscillations).

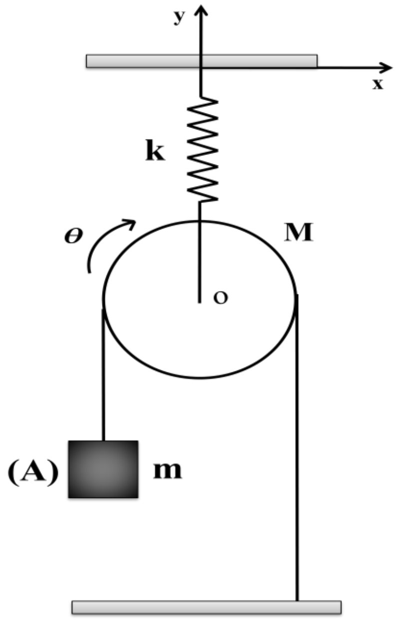
1- Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.

2- Déduire le lagrangien.

3- Etablir l'équation du mouvement.

4- Trouver la solution θ(t) si $\theta(0) = \frac{\pi}{20}$; $\dot{\theta}(0) = 0$.

Exercice N°4



Un masse M (assimilable à un point matériel A) est suspendue à un fil passant par une poulie de masse m, de rayon R.

On note $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$ le moment d'inertie de la poulie par rapport A l'axe Oy passant par O et perpendiculaire au plan de la poulie.

On admettra que le fil ne glisse pas sur la poulie.

La poulie est suspendue par son centre `a un ressort de constante de raideur k, et de longueur à vide l_0. On néglige les frottements. On appelle z et Z, respectivement, l'écarts de la masse M et de la poulie par rapport à leur position d'équilibre.

1- Donner l'énergie mécanique et l'énergie du système en fonction de z et de $\dot{z}$ (on n'explicitera pas l_e, longueur à l'équilibre du ressort).

2- Déterminer l'équation du mouvement.

3- Donner la période des petites oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.

Exercice N°5

Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur $2L$.

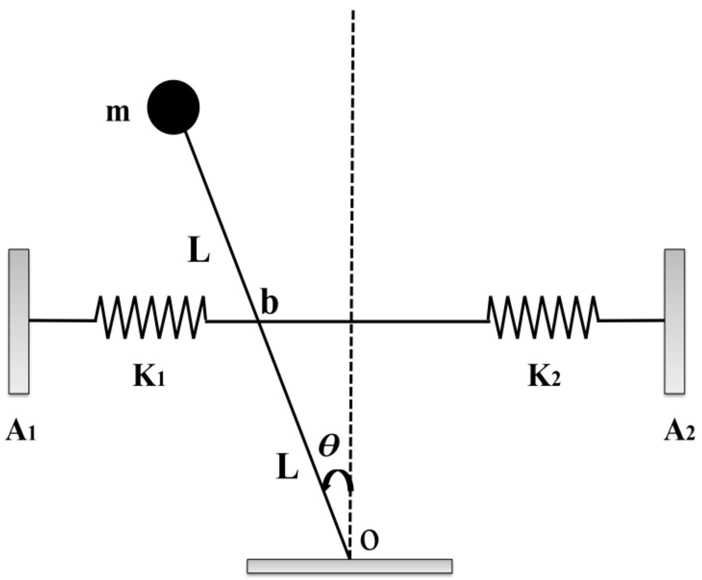
(Voir le schéma ci-dessous). La tige effectuée des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe O et perpendiculaire au plan du mouvement. Le point b de la tige, tel que $Ob = L$, est relié à deux bâtis fixes A_1 et A_2 respectivement par deux ressorts de raideur K_1 et K_2.

A l'équilibre, la tige est verticale.

1- Sachant qu'à l'équilibre, les deux ressorts ne sont pas déformés, établir l'équation différentielle du mouvement du système.

2- Si m, K_1, K_2 et L sont donnés, quelle condition doit satisfaire la longueur a pour que le système puisse osciller ?

3- Cette condition étant satisfaite, déterminer l'expression de la pulpation propre du système.



Chapitre III :

Oscillations libres amorties des systèmes à un degré de liberté

III.1 Introduction

Dans les oscillations amorties, les forces de frottement sont prisent en considération. Les frottements sont visqueux et dépend de la vitesse.

III.2 Oscillateur amorti

Le mouvement oscillatoire harmonique n'existe pas dans la réalité : tout système mécanique réel présentant un frottement, une partie de l'énergie mécanique est dissipée en chaleur, et les oscillations du système sont amorties.

III.3 Frottement et coefficient d'amortissement

III.3.1 Frottements visqueux :

La force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse de déplacement et de sens contraire.

$$\vec{F} = -\alpha . \vec{v} \qquad \text{(III. 1)}$$

$\boldsymbol{\alpha}$: Le coefficient de frottement visqueux (kg/s).

III.3.2 Frottements solides :

La force de frottement est constante et opposée au mouvement.

III.4 Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad \text{(III. 2)}$$

On définit la fonction de dissipation par :

$$D = \frac{1}{2}\alpha . \dot{q}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha . \dot{q}, \dot{q} = \dot{x}_\alpha \qquad \text{(III. 3)}$$

$$x_\alpha \text{: le déplacement de l'amortisseur}$$

La forme de l'équation différentielle est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \text{(III. 4)}$$

Avec :

δ est le coefficient d'amortissement.

ω_0 : la pulsation propre.

III.5 Régimes de l'oscillateur amorti

L'équation différentielle d'un oscillateur amorti est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Il existe trois régimes possibles:

III.5.1 Régime apériodique ($\delta > \omega_0$), les frottements sont importants, la valeur du coefficient d'amortissement est grande, le système revient lentement à sa position d'équilibre sans effectuer des oscillations et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$q(t) = A_1 e^{\left[-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}\right]t} + A_2 e^{\left[-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}\right]t} \qquad \text{(III. 5)}$$

$A_1\ et\ A_2$ sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales.

III.5.2 Régime critique ($\delta = \omega_0$), le retour à la position d'équilibre se fait sans oscillation et rapidement. Il permet de fixer la limite entre les régimes pseudopériodique et apériodique, la solution est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2)e^{-\delta t} \qquad \text{(III. 6)}$$

$A_1\ et\ A_2$: Constantes d'intégration définies par les conditions initiales.

III.5.3 Régime pseudopériodique ($\delta < \omega_0$), (régime des faibles amortissements) on observe que l'amplitude des oscillations est toutefois décroissante, elle est pondérée au fil du temps par un facteur exponentiel décroissant dépendant du frottement, et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = Ae^{-\delta t}cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(III. 7)}$$

$A\ et\ \varphi$ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

ω est la pseudo pulsation définie par :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^{\,2}} \qquad \text{(III. 8)}$$

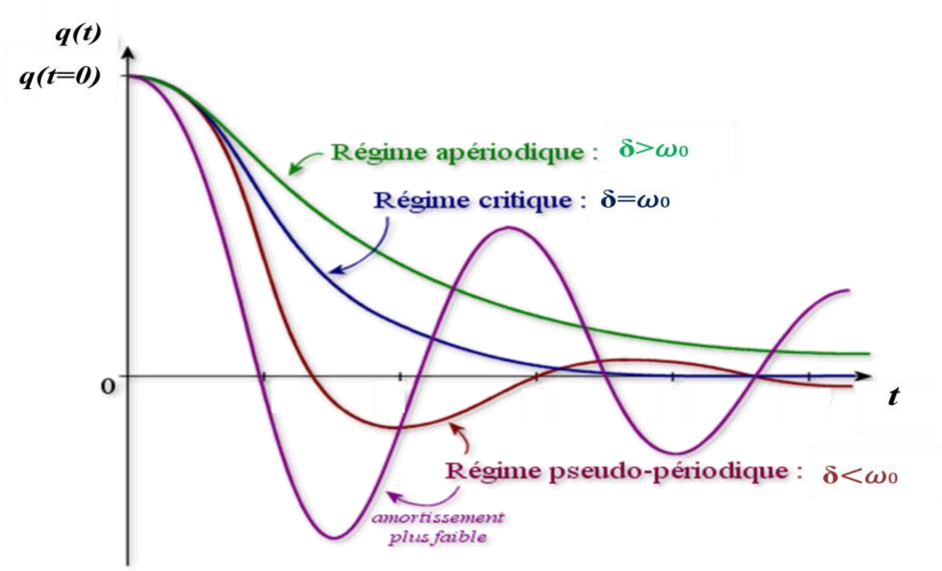


Figure III.1 : La variation de q(t) en fonction du temps t pour les trois régimes (Régime apériodique, Régime critique et Régime pseudopériodique).

La figure III.1 illustre la variation de q(t) en fonction du temps t pour les trois régimes (Régime apériodique, Régime critique et Régime pseudopériodique).

III.6 Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique est la mesure logarithmique de la décroissance périodique d'une grandeur oscillatoire (amplitude du mouvement).

$$D = ln\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = ln\frac{A(t_1)}{A(t_1+T)} = -ln\frac{A(t_1+T)}{A(t_1)} \qquad (III.9)$$

Ou :

$$D = \frac{1}{n}\ln\frac{A(t)}{A(t+nT)} \qquad (III.10)$$

n : le nombre de périodes

En remplaçant les formules des amplitudes, on obtient à :

$$D = \delta.T \qquad (III.11)$$

δ est le coefficient d'amortissement.

T est le pseudo période. Elle est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(III. 12)}$$

ω est la pseudo pulsation, elle est égale à :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad \text{(III. 13)}$$

III.7 Coefficient de Qualité :

Est une mesure sans unité du taux d’amortissement d’un oscillateur. Le coefficient de qualité permet de quantifier la qualité d’un système oscillatoire. Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or Q est d'autant plus grand.

$$Q = 2\pi \cdot \frac{E_{sys}}{E_{diss}} = \frac{\omega_0}{2\,\delta} \qquad \text{(III. 14)}$$

III.8 Energie Mécanique

Pour le cas d’un système faiblement amorti ($\delta \ll \omega_0$), l’énergie mécanique s’écrit :

$$E(t) = E_0 . e^{-2\delta t} \qquad \text{(III. 15)}$$

$E_0 = E(0)$ Energie totale initiale (à t =0), $E_0 = E(0) = E_c(0) + E_p(0)$

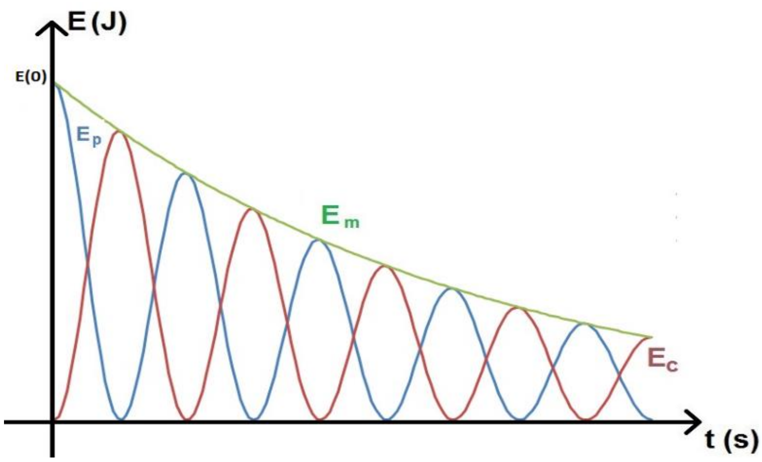
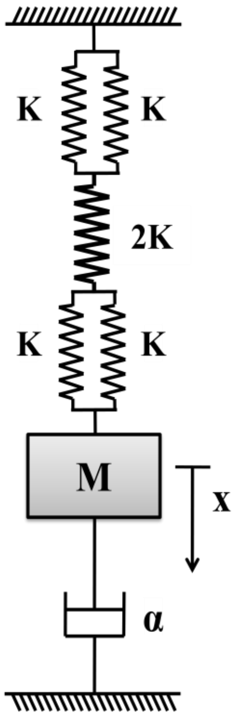


Figure III.2 : La variation de l’énergie totale (mécanique) en fonction de temps t avec frottement

Le système amorti perd de l'énergie par des phénomènes de dissipation (frottement). L'énergie totale du système décroît au cours du temps.

III.9 Exercices résolus

Exercice N°1



Soit un système mécanique constitue d'une masse $M = 0.5$ kg ,

d'un ensemble de ressorts et d'un amortisseur de $\alpha = 1$ kg/s.

(voir le schéma ci-contre).

On donne : $K = 60\ \mathrm{N/m}$, $x(0) = 0.1$ m , $\dot{x}(0) = 2\ \mathrm{m.s^{-1}}$

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système ?

2- Simplifier le schéma en calculant le ressort équivalent

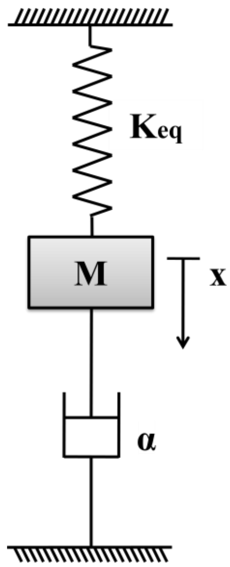
3- Trouver l'énergie cinétique, potentielle et de dissipation.

4- Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le régime des faibles amortissements.

5- Calculer l'énergie totale à $t = 0$ et donner son expression finale en fonction du temps.

6- Calculer la valeur de **α** pour que l'amplitude atteint une valeur de 1mm après une oscillation pseudo-périodique.

Solution N°1



1- le nombre de degré de liberté : 1

2-le schéma équivalent et le ressort équivalent k_{eq}:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \Rightarrow k_{eq} = \frac{2k}{3}$$

$$k_{eq} = \frac{2 \times 60}{3} = 40\ \mathrm{N/m}$$

3- l'énergie cinétique, potentielle et de dissipation :

- l'énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
- l'énergie potentielle: $E_P = E_{P(Keq)} = \frac{1}{2}K_{eq}\, x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{3}\right)\, x^2 = \frac{1}{3}Kx^2$

- l'énergie de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

4- l'équation différentielle du mouvement dans le régime des faibles amortissements :

Formalise de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_P}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = M\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = K_{eq}x$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + K_{eq}x = 0 \;\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{M}\dot{x} + \frac{K_{eq}}{M}x = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{M} \Rightarrow \; \delta = \frac{\alpha}{2M} = \frac{1}{2 \times 0.5} = 1\, s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{K_{eq}}{M} \Rightarrow \; \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M}} = \sqrt{\frac{2k}{3M}} = \sqrt{\frac{2 \times 60}{3 \times 0{,}5}} = 8{,}944\, rad.s^{-1}$$

La pseudo-pulsation ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{80 - 1} = \sqrt{79} = 8{,}888\, rad.s^{-1}$$

Le pseudo période T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{8,888} = 0,706 \ \text{s}$$

La solution de l'équation différentielle du mouvement :

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)$$

5- l'énergie totale à $t = 0$ s :

$$E_0 = E(0) = E_c(0) + E_p(0) = E(0) = \frac{1}{2} M\dot{x}^2(0) + \frac{1}{2} K_{eq}\, x^2(0)$$

$$E(0) = \left(\frac{1}{2} \times 0,5 \times 2\right) + \left(\frac{1}{2} \times 40 \times (0,1)^2\right) = 0,7 \text{ J}$$

L'expression de l'énergie totale du système :

$$E(t) = E_0 . e^{-2\delta t} = 0,7 e^{-2t} \text{ J}$$

6- La valeur de **α** pour que l'amplitude atteint une valeur de 1mm après une oscillation pseudo-périodique :

Le décrément logarithmique D :

$$D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$$

$$D = \ln \frac{100}{1} = 4.6$$

$$D = \delta . T = \delta \frac{2\pi}{\omega} = \delta \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \delta^2}$$

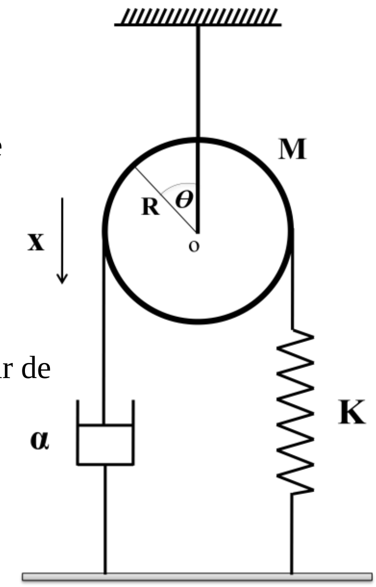
$$D^2 = \frac{4\pi^2 \delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow D^2(\omega_0^2 - \delta^2) = 4\pi^2 \delta^2 \Rightarrow \delta^2(4\pi^2 + D^2) = D^2 \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{D\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + D^2}} = 6.3854 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha = 2\delta M = 2 \times 6.3854 \times 0.5 = 6.3854 \text{ kg/s}$$

$$\alpha = 6.3854 \text{ kg/s}$$

Exercice N°2



Soit une poulie (cylindre creux) de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La poulie est suspendue par une corde inextensible a un bâti fixe. Aux Extrémités de la poulie sont fixés un ressort de raideur K, et une masse M par un fil inextensible de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. On donne le moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.

Valeurs numériques :

$M = 1\text{kg}, K = 50\ \text{N/m},\ R = 0.2\ \text{m}, \alpha = 1\ \text{kg/s}.$

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p et l'énergie de dissipation E_D.

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

3- Donner la solution dans le régime des faibles amortissements **(** $\delta < \omega_0$**).**

4- Calculer le coefficient de qualité du système mécanique Q.

5- après 15 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 30% de sa valeur initiale.

Calculer le décrément logarithmique D.

Solution N°2

1- L'énergie cinétique E_c, potentielle E_p et de dissipation E_D:

L'énergie cinétique E_c:

$$E_c = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}Kx^2\ \text{, avec } x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_P = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

2- L'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = 0 \;\; ou \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = 0$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = kR^2\theta$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M}\dot{\theta} + \frac{2K}{M}\theta = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{2\alpha}{M} \Rightarrow \;\delta = \frac{\alpha}{M} = \frac{1}{1} = 1\ s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \;\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{2\times 50}{1}} = 10\ rad.s^{-1}$$

3- la solution dans le régime des faibles amortissements.

$$\theta(t) = A_0e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{100-1} = \sqrt{99} = 9.949\ rad.s^{-1}$$

4- le coefficient de qualité du système mécanique Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{10}{2 \times 1} = 5 \Rightarrow \quad Q = 5$$

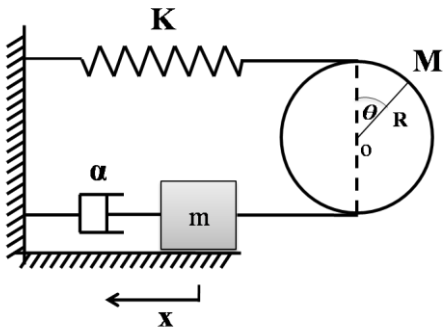
5- Le décrément logarithmique D :

$$D = \frac{1}{n} \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)} \; \Rightarrow \; D = \frac{1}{15} \ln \frac{100}{100-30} = 0.0237$$

$$D = 0.0237$$

<u>Exercice N°3</u>

Dans le système ci-contre, un disque homogène de masse M et de rayon R peut tourner librement avec un angle θ autour de son axe fixe. La masse m sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient α et au disque par un fil inextensible et non glissant.



Valeurs numériques : $M = 2\text{kg}, m = 1\text{kg}, R = 0.2\text{ m}, \alpha = 1\text{ kg/s}\ K = 72\text{N/m}$.

1- Trouver la relation entre x et θ.

2- Donner l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x, ainsi la solution dans le régime des faibles amortissements **(** $\delta < \omega_0$**).** Le moment d'inertie du disque autour de son axe est : $J_{/0} = \frac{1}{2} MR^2$.

3- Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement en fonction de variable x .

4- Calculer le coefficient de Qualité é du système mécanique Q.

5- Définir et calculer le décrément logarithmique D.

6- Donner le nombre de périodes n pour lequel l'amplitude du mouvement devient 60% de sa valeur initiale.

Solution 3

1- la relation entre x et θ : $x = R\theta$

2- l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x :

- L'énergie cinétiqueE_c :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm}$$

$$E_c = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}Kx^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

3- Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_P}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = Kx$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\left(\mathrm{m}+\frac{\mathrm{M}}{2}\right)\ddot{\mathrm{x}}+\alpha\dot{\mathrm{x}}+\mathrm{Kx}=0 \ \Rightarrow \ddot{\mathrm{x}}+\frac{\alpha}{\mathrm{m}+\frac{\mathrm{M}}{2}}\dot{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}+\frac{\mathrm{M}}{2}}\mathrm{x}=0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\mathrm{x}}+2\delta\dot{\mathrm{x}}+\omega_0^2\mathrm{x}=0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta=\frac{\alpha}{\mathrm{m}+\frac{\mathrm{M}}{2}} \Rightarrow \ \delta=\frac{\alpha}{\mathrm{M}+2\mathrm{m}}=\frac{2}{2+(2\times 1)}=0{,}5\ s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}+\frac{\mathrm{M}}{2}} \Rightarrow \ \omega_0=\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}+\frac{\mathrm{M}}{2}}}=\sqrt{\frac{72}{1+\frac{2}{2}}}=6\ rad.s^{-1}$$

La solution est :

$$\mathrm{x}(t)=A_0e^{-\delta t}sin(\omega t+\varphi)$$

4- le coefficient de qualité du système mécanique Q :

$$\mathrm{Q}=\frac{\omega_0}{2\delta}=\frac{6}{2\times 0.5}=4 \Rightarrow \ \ \mathrm{Q}=6\,,\mathrm{Q}=6\gg 1$$

Le régime des faibles amortissements.

5- Le décrément logarithmique D :

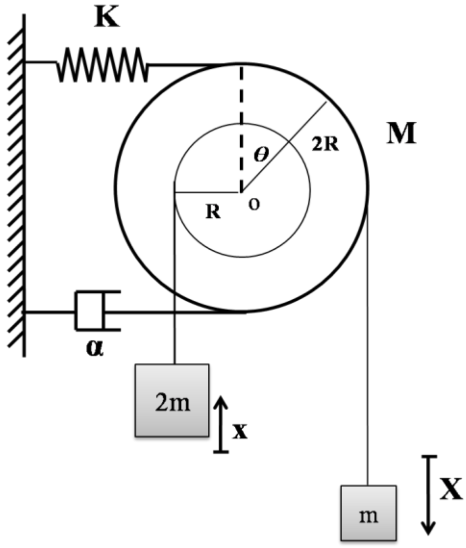
$$\mathrm{D}=\delta.\mathrm{T}=\frac{2\pi\delta}{\omega}=\frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}=\frac{2\times 3{,}14\times 0{,}5}{\sqrt{36-1}}\ =0{,}810\ \Rightarrow\ \ \mathrm{D}=0{,}530$$

6- Le nombre de périodes n :

$$\mathrm{D}=\frac{1}{\mathrm{n}}\ln\frac{\mathrm{A(t)}}{\mathrm{A(t+nT)}}\ \Rightarrow \mathrm{n}=\frac{1}{\mathrm{D}}\ln\frac{\mathrm{A(t)}}{\mathrm{A(t+nT)}} \Rightarrow \ \mathrm{n}=\frac{1}{0.53}\ln\left(\frac{100}{60}\right)=3.14$$

$\mathrm{n}\approx 3$ oscillations

Exercice N°4



Un disque homogène de masse M et de rayon 2R est relié à sa périphérie à un ressort de raideur K et à un amortisseur de coefficient de frottement **α**. Une masse 2m est suspendue à un fil enroulé autour de la périphérie du disque et une autre masse **m** suspendue à un fil enroulé autour d'un sillon de rayon **R** gravé sur la surface du disque.

Les fils sont supposés inextensibles et non glissants.

Le disque peut tourner librement autour de son axe fixe.

Le moment d'inertie du disque autour de son axe est : $J_{/0} = \frac{1}{2} MR^2$.

On donne : $\alpha = 8$ N.s/m, $K = 2$ N/m , $M = 2m = 1$kg, $m = 0.5$kg

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, ainsi la fonction de dissipation E_D pour $\theta \ll 1$. (à l'équilibre le ressort n'était pas déformé).

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3- déduire la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ.

4- Trouver la nature de mouvement.

5- Quelle est la valeur de **α** qui ne pas dépasser pour avoir des oscillation.

Solution 4

1- L'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, ainsi la fonction de dissipation E_D :

- l'énergie cinétique E_c :

$$E_c = E_{c\,disque} + E_{c\,2m} + E_{c\,m}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(2R)^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(m)\dot{x}^2$$

Puisque le fil est non glissant et inextensible on a :

$$\begin{cases} x = R\theta \\ X = 2R\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta} \\ \dot{X} = 2R\dot{\theta} \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(2R)^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(m)4R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)R^2\dot{\theta}^2$$

$E_c = MR^2\dot{\theta}^2 + 2mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\theta}^2$

$E_c = (M + 2m + m)R^2\dot{\theta}^2$

$E_c = (M + 3m)R^2\dot{\theta}^2$

- l'énergie potentielle E_p:

$E_P = E_{P(K)} + E_{P(2m)} + E_{P(m)}$

$E_P = \frac{1}{2}KX^2 + 2mgx - mgX$

$E_P = \frac{1}{2}K4R^2\theta^2 + 2mgR\theta - mg2R\theta \Rightarrow E_P = 2KR^2\theta^2$

- la fonction de dissipation E_D :

$E_D = \frac{1}{2}\alpha\left(\dot{X}_\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{X}^2$

$E_D = \frac{1}{2}\alpha 4R^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow E_D = 2\alpha R^2\dot{\theta}^2$

Le Lagrangien est :

$L = E_c - E_P = (M + 3m)R^2\dot{\theta}^2 - 2KR^2\theta^2$

2- L'équation différentielle du mouvement :

Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \;\; ou \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 0$

$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2(M + 3m)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2(M + 3m)R^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha R^2\dot{\theta}$

$\frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 4kR^2\theta$

L'équation différentielle s'écrit :

$(M + 3m)R^2\ddot{\theta} + 4\alpha R^2\dot{\theta} + 4kR^2\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha R^2}{2(M + 3m)R^2}\dot{\theta} + \frac{4kR^2}{2(M + 3m)R^2}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{(M + 3m)}\dot{\theta} + \frac{2k}{(M + 3m)}\theta = 0$

3- La pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ:

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{2\alpha}{M + 3m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{M + 2m} = \frac{8}{1 + 1} = 4\ s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{(M + 3m)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{(M + 3m)}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{1 + (3 \times 0.5)}} = 1.264\ rad.s^{-1}$$

4- La nature de mouvement :

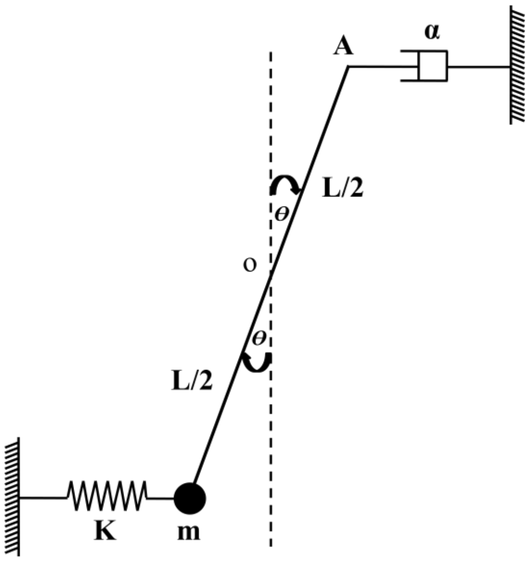
$\delta^2 - \omega_0^2 = (4)^2 - (1.264)^2 = 6.4 > 0 \Rightarrow$ Le mouvement apériodique.

5- Pour avoir des oscillations il faut que $\delta^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \delta < \omega_0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{2K(M + 3m)}$

$\Rightarrow \alpha < 4$ Ns/m

<u>Exercice N°5</u>

On considère le système mécanique ci-contre, constitué d'une tige de longueur L et de masse négligeable pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe O. Le point A est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. A l'autre extrémité de la tige est fixée une masse ponctuelle m qui est reliée à un second bâti fixe par un ressort de raideur K.



On se place dans le cas des oscillations libres de faible amplitude.

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudie. Justifier ?

2- calculer l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ.

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le régime des faibles amortissements ainsi que sa solution.

4- Après 15 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 25% de sa valeur initiale. Calculer le décrément logarithmique *D*.

5- En déduire le nombre de périodes pour lequel l'énergie total diminue avec le même pourcentage .conclure

<u>Solution N°5</u>

1-Le système oscille à un degré de liberté car il y a une seule variable indépendante qui caractérise le mouvement.

2- Les énergies cinétiqueE_c, potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D (variable θ) :

- L'énergie cinétique E_c:

$$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2,\ J_m = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{4}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \Rightarrow x = \frac{L}{2}\theta$$

$$h = \frac{L}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow h = \frac{L}{2}\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L}{4}\theta^2$$

$$E_p = mg\frac{L}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}K\frac{L^2}{4}\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)\theta^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

3- L'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{mL^2}{4}\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{mL^2}{4}\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial \theta} = \left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)\theta$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\left(\frac{mL^2}{4}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)}{\left(\frac{mL^2}{4}\right)}\dot{\theta} + \frac{\left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)}{\left(\frac{mL^2}{4}\right)}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{2g}{L} + \frac{K}{m}\right)\theta = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2g}{L} + \frac{K}{m}\right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2g}{L} + \frac{K}{m}\right)}$$

La solution est :

$x(t) = A_0 e^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

4- le décrément logarithmique D.

$$D = \frac{1}{n}\ln\frac{A(t)}{A(t+nT)} \Rightarrow D = \frac{1}{15}\ln\left(\frac{100}{100-25}\right) = 0.0191$$

$D = 0.0191$

5- le nombre de périodes pour lequel l'énergie total diminue avec le même

Pourcentage :

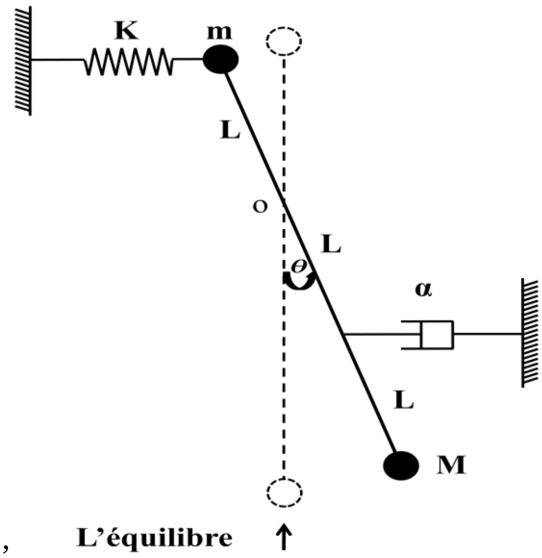
$$D = \frac{1}{2n}\ln\frac{E(t)}{E(t+nT)} \Rightarrow n = \frac{1}{2D}\ln\frac{E(t)}{E(t+nT)}$$

$$n = \frac{1}{2D}\ln\frac{E(t)}{E(t+nT)} = n = \frac{1}{2\times 0.0191}\ln\frac{100}{100-25} = 34.90$$

$n \cong 35$ oscillations

L'énergie totale du système décroit deux fois plus rapide que l'amplitude d'oscillation.

Exercice N°6



Une tige de longueur 3L porte en ses extrémités des masses M et m. La tige peut tourner autour d'un point o. L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient α. A l'équilibre le ressort était non déformé et la tige était verticale.

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudie. Justifier ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ.

3- Trouver le Lagrangien et l'équation du mouvement. Déduire $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\omega_0}$.

4- Déterminer la solution dans le régime des faibles amortissements.

5- déduire le coefficient de qualité du système mécanique Q.

6- Donner l'expression de l'énergie mécanique.

7- Après 30 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 45% de sa valeur initiale.

Calculer le décrément logarithmique D.

Solution 6

1-Le système oscille à un degré de liberté car il y a une seule variable indépendante qui caractérise le mouvement.

2- l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D.

- L'énergie cinétique E_c:

$$E_C = E_{Cm} + E_{CM} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{M/o}\dot{\theta}^2$$

$$J_{m/o} = mL^2$$

$$J_{M/o} = M(2L)^2 = 4ML^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(4ML^2)\dot{\theta}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}(m + 4M)L^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(m)} + E_{P(M)}$$

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + mgh - MgH$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\theta$$

$$h = L(1 - \cos\theta) \Rightarrow h = L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L\theta^2}{2}$$

$$H = 2L(1 - \cos\theta) \Rightarrow h = 2L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow H = L\theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}KL^2\theta^2 + mg\frac{L\theta^2}{2} - Mg\,L\theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}KL^2\theta^2 + \frac{1}{2}g(m - 2M)L\theta^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\,\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

3- L'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ :

Fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{1}{2}(m+4M)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KL^2\theta^2 - \frac{1}{2}g(m-2M)L\theta^2$

Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = 0 \;\; ou \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m+4M)L^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m+4M)L^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = KL^2\theta + g(m-2M)L\theta = (KL^2 + g(m-2M)L)\theta$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$(m+4M)L^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (KL^2 + g(m-2M)L)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{(m+4M)L^2}\dot{\theta} + \frac{(KL^2 + g(m-2M)L)}{(m+4M)}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m+4M)}\dot{\theta} + \frac{(KL^2 + g(m-2M)L)}{(m+4M)L^2}\theta = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{(m+4M)} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2(m+4M)}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{(KL^2 + g(m - 2M)L)}{(m + 4M)L^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(KL^2 + g(m - 2M)L)}{(m + 4M)L^2}}$$

4- la solution dans le régime des faibles amortissements :

$\theta(t) = A_0 e^{-\delta t} cos(\omega t - \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

5- le coefficient de qualité du système mécanique Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{\frac{(KL^2 + g(m - 2M)L)}{(m + 4M)L^2}}}{\frac{\alpha}{2(m + 4M)}}$$

6- l'expression de l'énergie mécanique :

$$E(t) = E_0 . e^{-2\delta t}$$

7- Calculer le décrément logarithmique D :

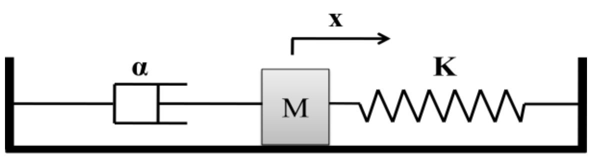
$$D = \frac{1}{n} \ln \frac{A(t)}{A(t + nT)} \Rightarrow D = \frac{1}{30} \ln\left(\frac{100}{100 - 45}\right) = 0.0199$$

$D = 0.0199$

III.10 Exercices supplémentaires

<u>Exercice N°1</u>

Un système mécanique constitue d'une masse $M = 1$ kg , d'un ressort de constante de raideur $K = 50$ N/m et d'un amortisseur de coefficient $\alpha = 2$ kg/s (voir le schéma ci-contre).



1- Déterminer l'équation du mouvement.

2- Déterminer : le coefficient d'amortissement δ, la pulsation propre ω_0, la pseudo-pulsation ω et le pseudo période T.

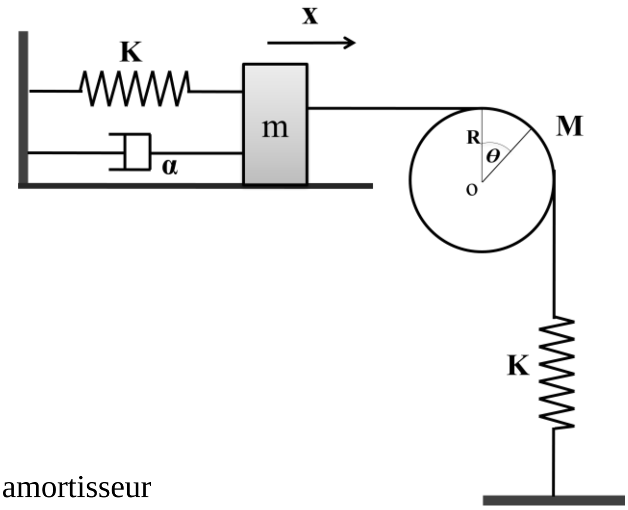
3- Trouver la solution de l'équation différentielle du mouvement si :

$x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 5\ m.s^{-1}$.

4- Donner l'expression de l'énergie mécanique (l'énergie totale du système).

5- Calculer le coefficient de qualité du système mécanique Q et le décrément logarithmique D.

<u>Exercice N°2</u>



Le système de la figure ci-contre est constitué d'un disque de masse $M = 2\text{kg}$ et de rayon R en rotation autour de son axe fixe.

Un fil inextensible de masse négligeable entraine le disque sans glissement sur sa périphérie.

Il porte à son extrémité une masse $m = 1\text{kg}$, un ressort de constante de raideur $K = 25\ \text{N/m}$ et un amortisseur de coefficient de frottement $\alpha = 2\ \text{kg/s}$.

A l'autre extrémité est attaché un autre ressort de raideur K.

1- Trouver la relation entre x et θ.

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ. Le moment d'inertie du disque autour de son axe est :

$J_{/0} = \frac{1}{2}\ MR^2$.

3- Donner l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable.

4- Donner la solution dans le régime des faibles amortissements **(** $\delta < \omega_0$**).**

5- Après 30 oscillations pseudopériodiques, l'énergie totale du système vibratoire diminue de 70% de sa valeur initiale.

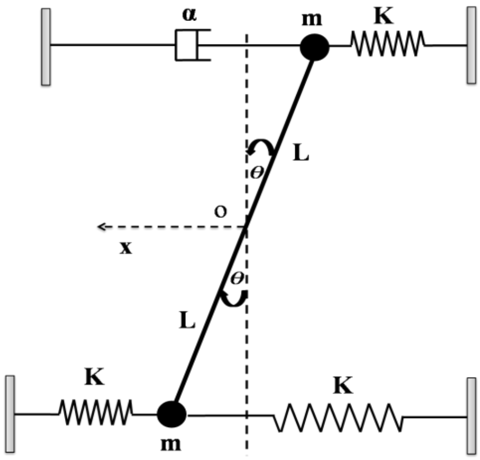
a- Calculer le décrément logarithmique D.

b- Après combien d'oscillations pseudopériodiques, l'amplitude du mouvement devient égale à 60% de sa valeur initiale

6- Quelle est la valeur de α pour laquelle le mouvement devient critique.

7- L'énergie totale du système est-elle conservative ? Expliquer.

Exercice N°3



Un système mécanique comprenant une barre horizontale de masse négligeable et de longueur 2L qui peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son milieu.

Dans le cas des oscillations de faibles amplitudes :

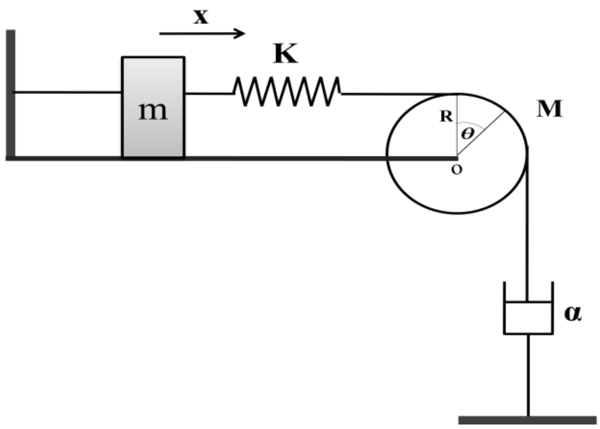
1- Trouvez le système équivalent.

2- Trouver l'équation différentielle du mouvement en fonction de la variable θ.

3- Donner la solution dans le cas $\boldsymbol{b < \omega_0}$.

4- Après 15 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 25% de sa valeur initiale. Calculer le décrément logarithmique D

Exercice N°4



Le système de la figure ci-contre est constitué d'une poulie de masse $M = 1$ kg , et de rayon $R = 0.2$ m , le moment d'inertie de la poulie $J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$. Cette poulie tourne sans frottement autour d'un axe fixe passant par le point O.

la masse $m = 0.5$ kg sur un plan horizontal est reliée à un ressort de raideur $K = 90$ N/m et au poulie par un fil inextensible et non glissant.

A l'autre extrémité de la poulie, est fixé Un amortisseur de coefficient $\alpha = 0.5$ kg/s.

1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction x et déduire la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ.

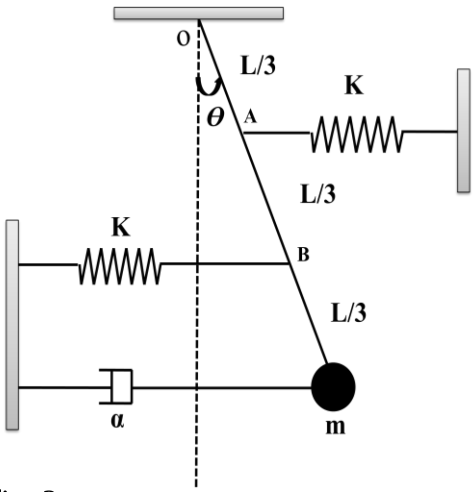
2- Donner la solution finale, si à $t = 0 : x(0) = 0 \,; \dot{x}(0) = 2\,\omega$ (ω : pseudo − pulsation).

3- Calculer le coefficient de qualité du système mécanique Q.

4- Calculer le décrément logarithmique.

5- Après combien d'oscillations, l'amplitude du mouvement diminue de 40% de sa valeur initiale.

Exercice N°7



La figure ci-contre représente un système mécanique faiblement amorti formé d'une masse m à l'extrémité d'une tige de masse négligeable est attaché a un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Le point A de la tige est relié à un bâti par un ressort de raideur K, et aussi le point B est relié a un bâti par un ressort de raideur K. Avec (OA=AB=BC=L/3)

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudie. Justifier ?

2- Trouver l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ.

3- Donner l'équation du mouvement, déduire δ et ω_0.

4- Déterminer la solution dans le régime des faibles amortissements.

5- Après 62 oscillations pseudopériodiques, l'énergie totale du système vibratoire diminue de 58% de sa valeur initiale. Calculer le décrément logarithmique D.

6- Après combien d'oscillations pseudopériodiques, l'amplitude du mouvement devient égale à 35% de sa valeur initiale.

Chapitre IV :

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

IV.1 Introduction

D'après le chapitre précèdent, on a constaté que l'amortissement fait réduire l'amplitude de vibration, et l'amortissement des oscillations était dû à une diminution de l'énergie mécanique, pour vaincre les frottements responsables des pertes d'énergie et des ralentissements des systèmes en mouvements, il faut appliquer une force extérieure qu'on appelle excitation.

IV.2 Équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext} \qquad (\text{IV}.1)$$

a) Pour un mouvement de translation l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F_{ext} \qquad (\text{IV}.2)$$

b) Pour un mouvement de rotation, l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \mathcal{M}(F_{ext}) \qquad (\text{IV}.3)$$

F_{ext}: la force généralisée à une force extérieure.

$\mathcal{M}(F_{ext})$: Moment de la force appliqué.

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = F_{ext} \times L \qquad (\text{IV}.4)$$

- Le Moment : caractérise la capacité d'une force à tourner un objet autour d'un point.
- L : est la distance droite d'action de la force.

L'équation différentielle du mouvement vibratoire forcé est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \qquad (\text{IV}.5)$$

IV.2.1 Exemple d'un système forcé amorti (système masse-ressort-amortisseur)

Dans la figure ci-contre, la masse m est fixée à un ressort K et un amortisseur α.

On applique à la masse M une force $F_{ext} = F_0 \sin\Omega t$

L'énergie cinétique du système : $E_c = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système : $E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2} K\, x^2$

La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha.\dot{x}^2$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$

$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha.\dot{x}$

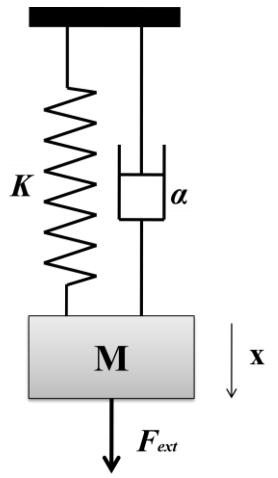


Figure IV.1 système masse-ressort

En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$M\ddot{x} + \alpha.\dot{x} + Kx = F_{ext} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = \frac{F_0}{M}\sin\Omega t$

C'est l'équation différentielle du mouvement d'un système amorti forcé à 1ddL.

De la forme : $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 \sin\Omega t$

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{\alpha}{2M} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{M}} \\ A_0 = \dfrac{F_0}{M} \end{cases}$$

IV.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle du mouvement des oscillations forcées est une équation différentielle du second ordre avec un second membre. La solution de cette équation différentielle du second ordre est égale à la somme de la solution de l'équation sans second membre (ou solution homogène (transitoire)) $q_H(t)$ et d'une solution particulière (permanente) de l'équation avec second membre $q_P(t)$.

$$q(t) = q_H(t) + q_P(t) \qquad \text{(IV.6)}$$

L'équation sans second membre $q_H(t)$ est déjà traitée, cette solution contient dans tous les cas le terme exponentiel $e^{-\delta t}$. Il faut signaler qu'au début du mouvement x(t) représente le régime transitoire. Au fil du temps la solution homogène $q_H(t)$ devient négligeable la solution particulière $q_P(t)$ qui définit le régime permanant. Ainsi la solution totale dans ce cas, est de forme : $q(t) \cong q_P(t)$.

Quand la solution homogène est non négligeable et non nulle, le régime est dit transitoire.

IV.3.1 Excitation sinusoïdale :

Dans le cas où l'excitation est une fonction sinusoïdale de la forme : $A(t) = A_0 cos(\Omega t)$.

La solution totale s'écrit alors comme suit :

$$q(t) = q_P(t) = Acos(\Omega t + \varphi) \qquad \text{(IV.7)}$$

Où la constante A représente l'amplitude de la solution totale et φ le déphasage.

IV.3.1.1 Calcul de l'amplitude A

L'équation du mouvement devienne :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 cos(\Omega t) \qquad \text{(IV.8)}$$

L'excitation A(t) sous forme complexe est égale :

$$A(t) = A_0 e^{j\Omega t} \qquad \text{(IV.9)}$$

On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme complexe :

$$q(t) = q_P(t) = Ae^{j(\Omega t+\varphi)}$$

$$\dot{q}_P(t) = Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)} = j\Omega q_P(t)$$

$$\ddot{q}_P(t) = Aj^2\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)} = -\Omega^2 q_P(t)$$

$$Aj^2\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)} + 2\delta Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)} + \omega_0^2 Ae^{j(\Omega t+\varphi)} = A_0 e^{j\Omega t}$$

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]Ae^{j(\Omega t+\varphi)} = A_0 e^{j\Omega t}$$

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]Ae^{j\varphi} = A_0$$

On divise sur $e^{j\varphi}$ et on trouve :

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]A = A_0 e^{-j\varphi} \qquad (1)$$

Le conjugué de cette équation est la suivante :

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]A = A_0 e^{j\varphi} \qquad (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right]A^2 = {A_0}^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \qquad (\mathrm{IV}.10)$$

IV.3.1.2 Calcul de φ

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]A = \begin{cases} A_0 e^{-j\varphi} \\ A_0(\cos\varphi - j\sin\varphi) \end{cases}$$

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2A\delta\Omega j = A_0\cos\varphi - jA_0\sin\varphi \quad \Rightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \Omega^2) = A_0\cos\varphi \\ 2A\delta\Omega = -A_0\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\tan\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \Rightarrow$$

$$\varphi = -Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \qquad (\mathrm{IV}.11)$$

Donc :

$$q_P(t) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\, cos\left(\Omega t + Arctg\,\frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right) \qquad (\mathrm{IV}.12)$$

IV.3.2 la pulsation de Résonnance

La pulsation de Résonnance Ω_R : La pulsation de l'excitation (la fréquence) pour laquelle l'amplitude est maximale.

L'amplitude $A(\Omega)$ est maximale lorsque $\frac{dA}{d\Omega} = 0$.

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^{2}+(2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^{2}+(2\delta\Omega)^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)-2\delta^2\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases}\Omega_1 = 0\\ \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}\end{cases}$$

La pulsation de résonance est donnée par :

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \qquad \text{(IV. 13)}$$

Dans le cas des faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$), la fréquence de résonance est très peu différente de la pulsation propre $\Omega_R \cong \omega_0$, on obtient :

$$A(\Omega) = \frac{A_0}{2\delta\omega_0}$$

Pour qu'il y résonance : $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, on dit que le système entre en résonance $(\Omega = \Omega_R)$ et l'amplitude A est maximale :

$$A(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

$$\lim_{\Omega\to\infty} A(\Omega) = 0$$

Remarque :

- Pour qu'il y ait résonance il faut que $\omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ l'amortissement doive être faible.

- L'amplitude de vibration atteint un maximum quand $\Omega_R \cong \omega_0$.

- Si $\delta = 0$ (système non amorti) : l'amplitude tend vers l'infini or en réalité, les systèmes sont tous amortis donc l'amplitude n'est jamais infini.

IV.3.3 Bande passante

On définit par bande passante, la bande des pulsations autour de $\Omega_R \cong \omega_0$ pour lesquelles $A(\Omega) > \frac{A_{max}(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$,

La bande passante *B* s'écrit :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 \qquad \text{(IV.14)}$$

Les deux pulsations Ω_2 et Ω_1 , situées de part et d'autre de la pulsation ω_0 et pour lesquelles $A(\Omega) = \frac{A_{max}(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$, sont appelées pulsations de coupure.

Le calcul de B consiste à rechercher les deux pulsations pour lesquelles $A(\Omega) = \frac{A_{max}(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$.

On obtient l'expression de la bande passante *B* :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\delta \qquad \text{(IV.15)}$$

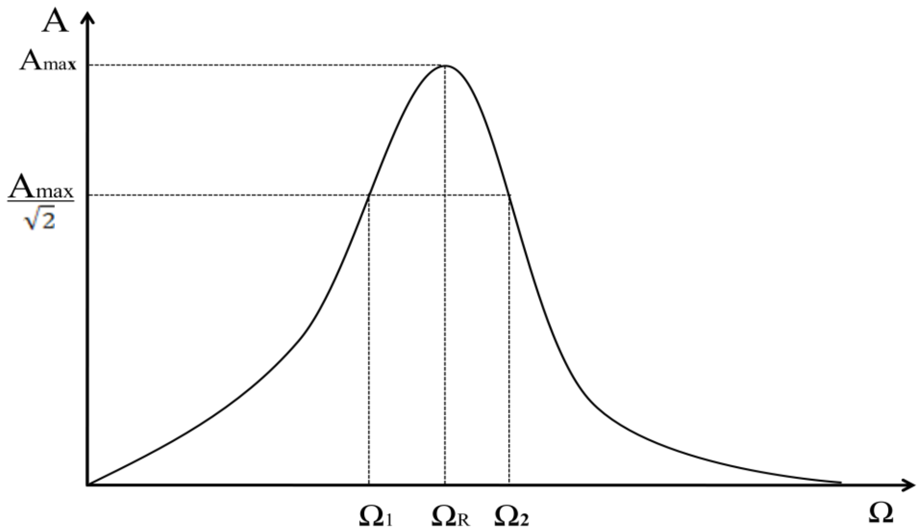


Figure IV.2 Amplitude A en fonction de Ω (bande passante)

IV.3.4 Coefficient de qualité

Le coefficient de qualité est défini par le rapport de la pulsation propre ω_0 à la largeur de bande passante *B.*

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta} \qquad \text{(IV.16)}$$

IV.3.5 Excitation périodique

Soit une excitation périodique appliquée à un système amorti à un degré de liberté. L'équation différentielle qui régit ce système s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \tag{IV.17}$$

La fonction $A(t)$ étant périodique, de période T, son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \tag{IV.18}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \tag{IV.19}$$

La réponse permanente peut être calculée par :

$$q(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t + \varphi) + b_n \sin(n\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}} \tag{IV.20}$$

IV.4 Impédance mécanique

Un système mécanique soumis à une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, le point d'application de cette force se déplace avec une vitesse $v(t) = V_0 \cos(\Omega t + \varphi)$.

L'impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force F et de la vitesse $\boldsymbol{v}$.

$$Z_E = \frac{F}{v} \tag{IV.21}$$

IV.4.1 Impédances mécaniques

- **Masse**

  La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{IV.22}$$

L'impédance complexe d'une masse est :

$$Z_m = jm\Omega = m\Omega e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad (IV.23)$$

La force appliquée f appliquée au ressort s'exprime en fonction de l'allongement par

$$F = kx \qquad (IV.24)$$

k : La constante de ressort

L'impédance complexe d'un ressort est donné par :

$$Z_k = \frac{k}{j\Omega} = -j\frac{k}{\Omega} = \frac{k}{\Omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad (IV.25)$$

- **Amortisseur :**

La force appliquée est reliée à la vitesse par :

$$F = \alpha v \qquad (IV.26)$$

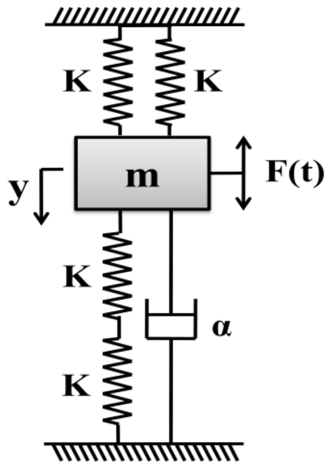
On en déduit l'impédance complexe d'un amortisseur : $Z_\alpha = \alpha$

IV.5 Exercices résolus

Exercice N°1 :

Un système mécanique est constitué de masse m=0.5 kg et d'amortisseur de coefficient de frottement $\alpha = 2$ kg/s relié à des ressorts de même constante de raideur K=20N/m.

Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$.



1- Calculer la constante de raideur équivalente K_{eq}.

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D.

3- Trouvez le Lagrangien puis l'équation du mouvement.

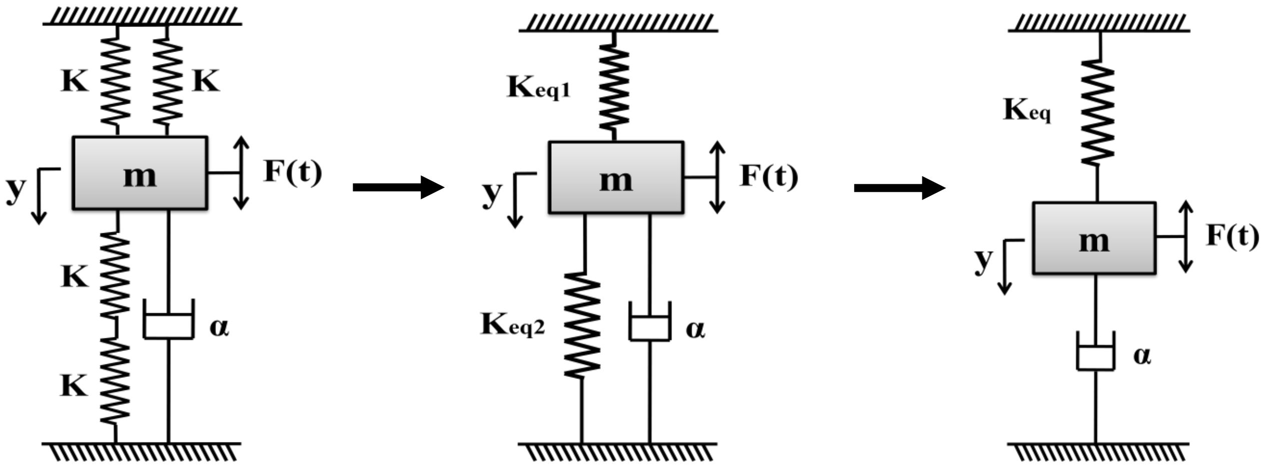
4- Trouvez sa solution en régime permanant (Préciser son amplitude A et sa phase φ).

5- Donnez la condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R.

6- Donner la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$

Solution N°1 :

1- la constante de raideur équivalente K_{eq} :



$$K_{eq1} = K + K = 2k$$

$$\frac{1}{K_{eq2}} = \frac{1}{K} + \frac{1}{K} \Rightarrow K_{eq1} = \frac{K \times K}{K + K} = \frac{K}{2}$$

$$K_{eq} = K_{eq1} + K_{eq2} = 2k + \frac{K}{2} = \frac{5K}{2}$$

2- L'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D :

- l'énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$
- l'énergie potentielle: $E_P = E_{P(Keq)} = \frac{1}{2}K_{eq}\, y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5K}{2}\right) y^2 = \frac{5}{4}Ky^2$
- l'énergie de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{y}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

3- Le Lagrangien puis l'équation du mouvement :

Fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{5}{4}Ky^2$

Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial E_D}{\partial \dot{y}} + F$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{5}{2}Ky$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{y}} = \alpha\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + \frac{5}{2}Ky = -\alpha\dot{y} + F \Rightarrow M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \frac{5}{2}Ky = F$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{5K}{2m}y = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t).$$

L'équation est de la forme : $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m} = \frac{2}{2 \times 0.5} = 2\ s^{-1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{5K}{2m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{5K}{2m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ rad.s^{-1}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m}$$

4- La solution de l'équation de mouvement en régime permanant :

$$y(t) = y_P(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$$

L'amplitude est : $A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$y_P(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\cos\left(\Omega t - Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

5- La condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R :

La pulsation de résonance est Ω_R telle que : $\left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

6- La bande passante *B* pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$

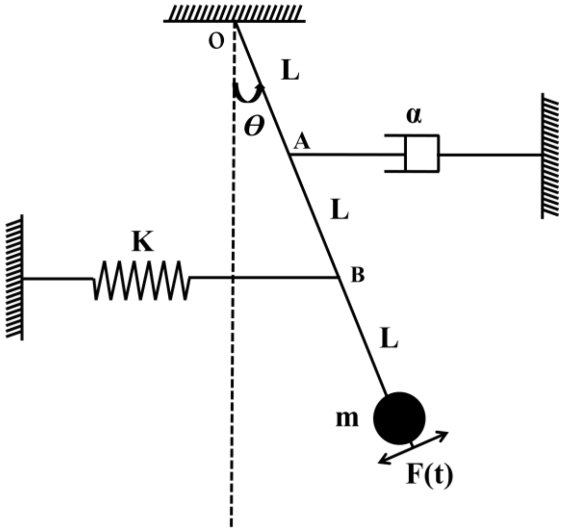
Pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$:

$\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta$ et $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta$, et $B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 2\,\delta.$

Exercice N°2 :

Soit une masse ponctuel de masse m est soudée à l'extrémité de la tige de masse négligeable et de longueur 3L. Le point A de la tige tel que $\overline{OA} = L$, est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$.

Le point B de la tige tel que $\overline{OB} = 2L$, est relié à un bâti fixe par ressort de raideur K. Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$.



1- Trouver l'énergie cinétique E_c, potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D (θ<<*1*).

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ, déterminer les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

4- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

5- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

6- Donner les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

7- Calculer Ω_R, B et le facteur de qualité Q si m=1 Kg, K=15 N/m, L=0.5 m, α=0.5 N. s/m, g=10 m. s^{-2}.

Solution N°2:

1- L'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D :

- Energie cinétique :

$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2,\ J_m = m(3L)^2 = 9mL^2$

$$E_c = \frac{1}{2}(9mL^2)\dot{\theta}^2 = \frac{9}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx_K^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x_K = x_2 = 2L\sin\theta \Rightarrow x = 2L\,\theta$$

$$h = 3L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = 3L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{3}{2}L\theta^2$$

$$E_p = \frac{3}{2}mgL\theta^2 + \frac{1}{2}K4L^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{3}{2}mgL\theta^2 + 2KL^2\theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}(\ 3mgL + 4KL^2)\ \theta^2$$

- Fonction de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$$

$$x_\alpha = x_1 = L\sin\theta \Rightarrow x = L\,\theta$$

$$E_D = \frac{1}{2}\ \alpha L^2\dot{\theta}^2$$

2- L'équation différentielle de mouvement :

Fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{9}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\ 3mgL + 4KL^2)\ \theta^2$

Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 9\ mL^2\dot{\theta}\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 9\ mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(3mgL + 4KL^2)\theta$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2 \dot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = F.3L$$

$$9\,mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (3mgL + 4KL^2)\theta = F_0\cos(\Omega t)3L$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{9mL^2}\dot{\theta} + \frac{(3mgL + 4KL^2)}{9mL^2}\theta = \frac{3F_0L}{9mL^2}\cos(\Omega t)$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{9m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{3mL} + \frac{4K}{9m}\right)\theta = \frac{F_0}{3mL}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{9m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{18m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{3mL} + \frac{4K}{9m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{3mL} + \frac{4K}{9m}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{3mL}$$

3- La solution de l'équation de mouvement en régime permanant :

$$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)cos(\Omega t - \varphi)$$

L'amplitude est : $A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{3mL}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{3mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = +Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{3mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\; cos\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)$$

4- La condition de résonnance :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

-La pulsation de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}}\right]=0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2\right]=0 \Rightarrow$$

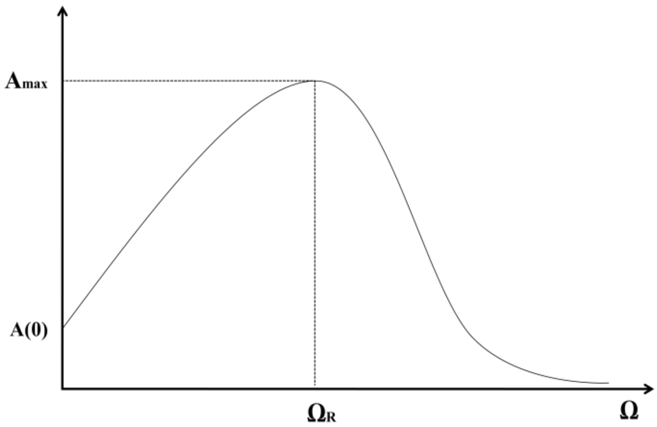
$$-4\Omega\left[(\omega_0^2-\Omega^2-2\delta^2\right]=0 \;\Rightarrow\; \Omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

5- la variation de l'amplitude A en fonction de Ω

- $A(\Omega=0)=\frac{A_0}{\omega_0^2}=\frac{F_0}{3mL\omega_0^2}$
- $A_{\max}(\Omega_R)=\frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}=\frac{F_0}{6mL\delta\omega}$

Avec $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ c'est la pseudo-pulsation

- $\lim\limits_{\Omega\to\infty} A(\Omega)=0$



6- Les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$:

Pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$:

$\Omega_{C_1} \approx \omega_0-\delta$ et $\Omega_{C_2} \approx \omega_0+\delta$, et $B=\Omega_{C_2}-\Omega_{C_1}=2\,\delta.$

7- A.N :

La pulsation de résonance Ω_R :

- $\delta=\frac{\alpha}{18m}=\frac{2}{18\times 1}=0{,}111\ s^{-1}$
- $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{3mL}+\frac{4K}{9m}}=\sqrt{\frac{10}{3\times1\times0.5}+\frac{4\times20}{9\times1}}=3{,}94\ rad.s^{-1}$

$$\Omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}=\sqrt{3{,}94^2-2\times(0{,}111)^2}=3{,}937\,rad.s^{-1}$$

La bande passante B :

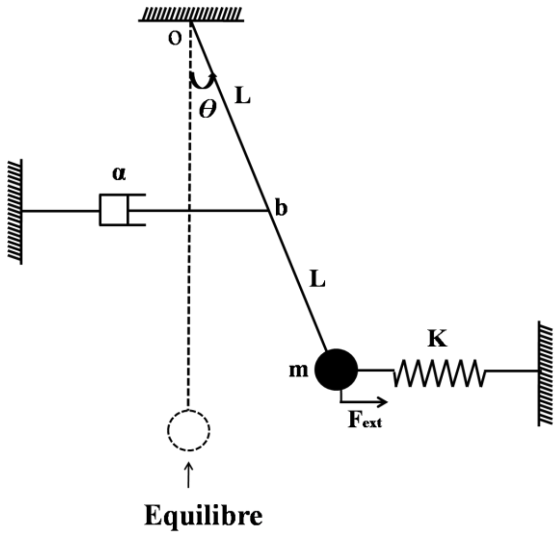
- $\Omega_{C_1}\approx\omega_0-\delta\approx 3{,}94-0{,}111\approx 3{,}829$
- $\Omega_{C_2}\approx\omega_0+\delta\approx 3{,}94+0{,}111\approx 4{,}051$

$B=\Omega_{C_2}-\Omega_{C_1}=4{,}051-3{,}829=0{,}222$

Le facteur de qualité est :

$$Q=\frac{\omega_0}{2\delta}=\frac{3{,}94}{2\times0{,}111}=17{,}74 \Rightarrow \quad Q=17{,}74$$

Exercice N°3 :



On considère le système mécanique représenté à la figure ci-contre. La tige de masse négligeable et de longueur 2L peut tourner autour de l'articulation O dans le plan de la figure. Le milieu de la tige (point b) est relié à un bâti par un amortisseur de coefficient de frottement α et son extrémité libre porte une masse m à laquelle est attaché un ressort de raideur K. On applique une force extérieure $\vec{F}_{ext} = F_0\cos(\Omega t)$ sur la masse ponctuelle m.

1- montrer que l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

2- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

3- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

4- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

5- Si on enlève l'amortisseur , que ce passe-t-il ?

Solution N°3 :

1- L'équation différentielle du mouvement :

- L'énergie cinétique E_c:

$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2,\ J_m = m(2L)^2 = 4mL^2$

$$E_c = \frac{1}{2}(4mL^2)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$

$$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx_K^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$x_K = 2L\sin\theta \Rightarrow x_K = 2L\,\theta$

$$h = 2L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = 2L\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = L\theta^2$$

$$E_p = mgL\theta^2 + \frac{1}{2}K4L^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(2mgL + 4KL^2)\,\theta^2$$

- La fonction de dissipation E_D:

$$x_\alpha = L\sin\theta \Rightarrow x_\alpha = L\,\theta$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_\alpha^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

La Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}(4mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\,2mgL + 4KL^2)\,\theta^2$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F_{ext})$$

Ou :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = 4mL^2\dot{\theta} \;\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 4mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = (\,2mgL + 4KL^2)\theta$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = 2LF_0\cos(\Omega t)$$

$$4mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (\,2mgL + 4KL^2)\theta = 2LF_0\cos(\Omega t)$$

Donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{2L} + \frac{K}{m}\right)\theta = \frac{F_0}{2mL}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{4m} \Rightarrow \;\delta = \frac{\alpha}{8m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{2L} + \frac{K}{m} \Rightarrow \ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2L} + \frac{K}{m}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{2mL}$$

2- la solution permanente de l'équation du mouvement :

$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t - \varphi)$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{2mL}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}} =$
$\frac{F_0}{2mL\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{2mL\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}}\ sin\left(\Omega t - Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

3- La condition de résonnance :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

-La pulsation de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2] = 0 \Rightarrow$$

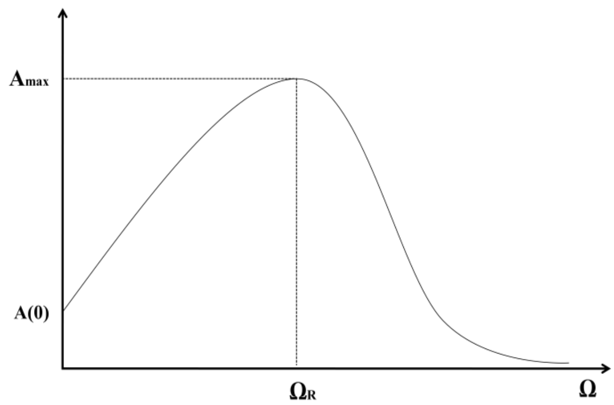
$$-4\Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2] = 0 \ \Rightarrow \ \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

4- la variation de l'amplitude A en fonction de Ω

- $A(\Omega = 0) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{2mL\omega_0^2}$
- $A_{\max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{4mL\delta\omega}$

Avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ c'est la pseudo-pulsation

- $\lim\limits_{\Omega\to\infty} A(\Omega) = 0$

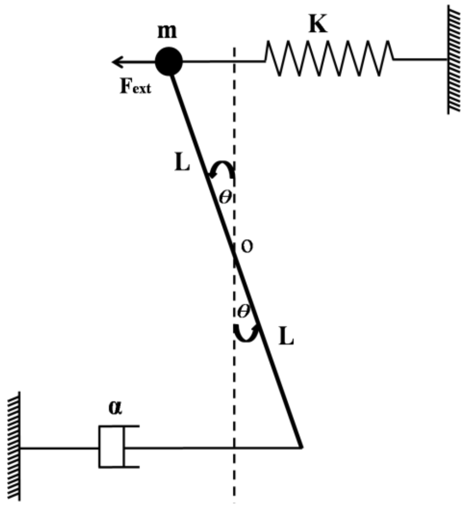


5- Si on enlève l'amortisseur :

$\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0$ et $A(\Omega_R) = A(\omega_0) \Rightarrow \lim\limits_{\Omega\to\omega_0}\left[\frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right] = \infty$

L'amplitude t'envers l'infini , signifier le système se casse.

<u>Exercice N°4 :</u>



Un système mécanique est constitué d'une tige de longueur 2L et de masse négligeable peut tourner autour d'un axe passant par O dans le plan de la figure.une masse ponctuelle m est soudée à l'extrémité de la tige.

Aux deux extrémités de cette tige. Sont également attachés un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.

Le système est soumis à une force extérieure $F_{ext} = F_0 \sin(\Omega t)$.

Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre, le système effectue des oscillations de faibles amplitudes.

1- Déterminer l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D.

2- Calculer le moment de la force $\mathcal{M}_F$.

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ, déterminer les constantes δ, ω_0 et A_0.

4- Trouver la solution permanente de l'équation du mouvement (Préciser son amplitude A et sa phase φ).

5- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

6- Pour $\delta = 0$, que ce passe-t-il ?

<u>Solution N°4 :</u>

1- L'énergie cinétique, potentiel et la fonction de dissipation :

- L'énergie cinétique E_c:

$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2} J_{m/o} \dot{\theta}^2,\ J_{m/o} = mL^2$

$$E_c = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$

$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx^2$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow \sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\,\theta$

$h = L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L\theta^2}{2}$

$E_p = \frac{1}{2}mgL\theta^2 + \frac{1}{2}KL^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(\ mgL + KL^2)\ \theta^2$

- La fonction de dissipation E_D:

$x_\alpha = L\sin\theta \Rightarrow x_\alpha = x = L\,\theta$

$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

$E_D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$

2- Le moment de la force :

$\mathcal{M}_F = \left\|\overrightarrow{Om} \wedge \vec{F}\right\| = F.d.\sin\left(\overrightarrow{Om}, \vec{F}\right) = F.L.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = F.L.\cos\theta = F.L$

3- L'équation du mouvement :

La Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\ mgL + KL^2)\theta^2$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mL^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -\left(\ mgL + KL^2\right)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = F_0L\sin(\Omega t)$$

$$mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (mgL + KL^2)\theta = F_0L\sin(\Omega t)$$

Donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta = \frac{F_0}{mL}\sin(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\sin(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} + \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m} + \frac{g}{L}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{mL}$$

4- la solution permanente de l'équation du mouvement :

$$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)sin(\Omega t + \varphi)$$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{mL}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{mL\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = -Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$y_P(t) = \frac{F_0}{mL\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\, sin\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

5- la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R:

- La condition de résonnance :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

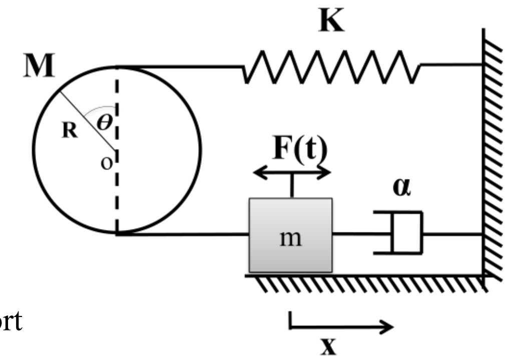
- La pulsation de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$-4\Omega\left[\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2\right] = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

6- Pour $\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0 \Rightarrow A_{max}(\Omega_R) \to \infty \Rightarrow$ le système se casse.

Exercice N°5 :



Dans le système ci-contre, un disque homogène de masse M et de rayon R peut tourner librement avec un angle θ autour de son axe fixe. La masse m sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient α et au disque par un fil inextensible et non glissant. A l'équilibre le ressort était non déformé. Une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0\cos\Omega t$ est appliquée sur la masse m. Le moment d'inertie du disque autour de son axe est : $J_{/0} = \frac{1}{2}MR^2$.

1- Trouver l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x.

2- Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.

3– Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

4- Déduire la pulsation de résonance Ω_R et donner le facteur de qualité Q du système faiblement amorti.

5- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

Solution N°5 :

1- L'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x :

- L'énergie cinétiqueE_c :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm}$$

$$E_c = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}Kx_K^2 = \frac{1}{2}Kx^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

2- Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + F$$

Où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_P}{\partial x} = F$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = Kx$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Kx = F$$

donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m + \frac{M}{2}}\dot{x} + \frac{K}{m + \frac{M}{2}}x = \frac{F_0}{m + \frac{M}{2}}\cos\Omega t$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{M + 2m}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m + \frac{M}{2}}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m + \frac{M}{2}}$$

3- La solution permanente de l'équation du mouvement :

$$x(t) = x_P(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi)$$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m + \frac{M}{2}}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{\left(m + \frac{M}{2}\right)\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = -Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$x(t) = \frac{F_0}{\left(m + \frac{M}{2}\right)\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\, cos\left(\Omega t - Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

4- La pulsation de résonance est Ω_R telle que : $\left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega = \Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

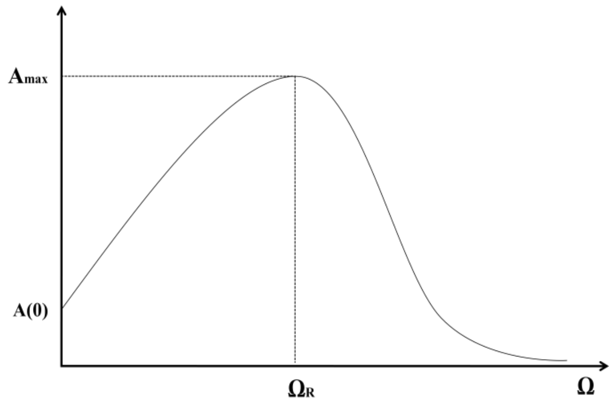
Le facteur de qualité Q: $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

5- La variation de l'amplitude A en fonction de Ω :

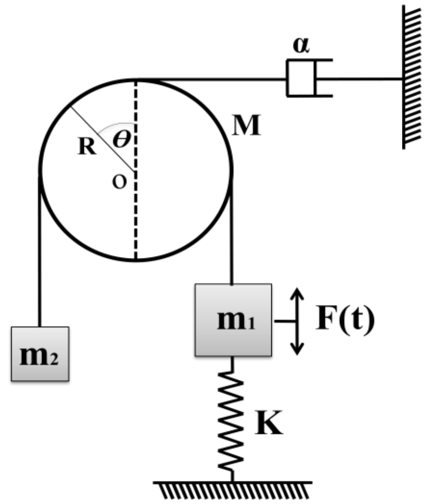
- $A(\Omega = 0) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{\left(m + \frac{M}{2}\right)\omega_0^2}$
- $A_{\max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{2\left(m + \frac{M}{2}\right)\delta\omega}$

Avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ c'est la pseudo-pulsation

- $\lim_{\Omega \to \infty} A(\Omega) = 0$



Exercice N°6 :



Soit un disque de masse négligeable enroulé par un fil inextensible et non glissant, comme le montre la figure ci-contre , On admet que les frottements existent, la masse m_1 effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale : $F(t) = F_0 \cos\Omega t$.

On donne le moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

2- Donner sa solution en régime permanent.

3- Quelle est la fréquence de résonance pour que le module de l'amplitude soit maximum.

4- Donner les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

5- Calculer la pulsation de résonance Ω_R , la bande passante B et le facteur de qualité Q si : $m_1 = 2\text{kg}, m_2 = 1\text{kg}, K = 10\ \text{N/m}$ et $\alpha = 0.1\ \text{N.s/m}$

6- Pour $\delta = 0$, que ce passe-t-il ?

Solution N°6

1- l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ:

- L'énergie cinétique E_c :

$$E_c = E_{cm_1} + E_{cm_2}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$$

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(m_1)} + E_{P(m_2)}$$

$$E_P = \frac{1}{2}KX^2 + m_1gx - m_2gx$$

$$E_P = \frac{1}{2}KR^2\theta^2 + m_1gR\theta - m_2gR\theta$$

La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires

$$E_P = \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

- la fonction de dissipation E_D :

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha\left(\dot{X}_\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{X}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + F_{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = F_{ext}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m_1 + m_2)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -KR^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$F_{ext} = F_0\cos\Omega t$$

$$(m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + KR^2\theta = F_0\cos\Omega t$$

donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m_1 + m_2)}\dot{\theta} + \frac{K}{(m_1 + m_2)}\theta = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\sin(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{(m_1 + m_2)}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2}$$

3- La solution permanente de l'équation du mouvement :

$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)cos(\Omega t + \varphi)$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\ 2} + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\ 2} + (2\delta\Omega)^2}} =$

$\frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\ 2} + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = -Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\ 2} + (2\delta\Omega)^2}}\ sin\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

3- La fréquence de résonance pour que le module de l'amplitude soit maximum :

L'amplitude $A(\Omega)$ est maximale si :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

La pulsation ou la fréquence de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\ 2} + (2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\ 2} + (2\delta\Omega)^2] = 0 \Rightarrow$$

$$-4\Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2] = 0 \ \Rightarrow\ \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

4- Les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

Pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$:

$\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta$ et $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta$, et $B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 2\,\delta$.

7- La pulsation de résonance Ω_R , la bande passante B et le facteur de qualité Q :

La pulsation de résonance Ω_R :

- $\delta = \frac{\alpha}{2(m_1+m_2)} = \frac{0.3}{2\times(1+0,5)} = 0,1\ s^{-1}$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{(m_1+m_2)}} = \sqrt{\frac{15}{1+0.5}} = 6\ rad.s^{-1}$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{6^2 - 2\times(0,1)^2} = 5.99\,rad.s^{-1}$$

La bande passante B :

- $\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta \approx 5,99 - 0,1 \approx 5,89$
- $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta \approx 5,99 + 0,1 \approx 6,09$

$B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 6,09 - 5.89 = 0,2$

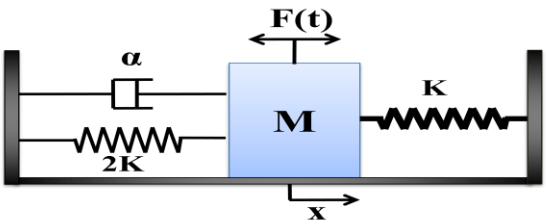
Le facteur de qualité est :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{6}{2\times 0,1} = 30 \Rightarrow \quad Q = 30$$

7- Pour $\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0 \ \Rightarrow A_{max}(\Omega_R) \to \infty \Rightarrow$ le système se casse.

IV.6 Exercices supplémentaires

<u>Exercice N°1 :</u>



Le système de la figure ci-contre est constitué d'une masse M attachée à un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$ et à deux ressorts :

le premier de masse négligeable et de constante de raideur 2K**,** le deuxième de masse m et de constante de raideur K. On applique à la masse m une force $F(t) = F_0 \sin\Omega t$.

1- Donner l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D.

2- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, ainsi les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

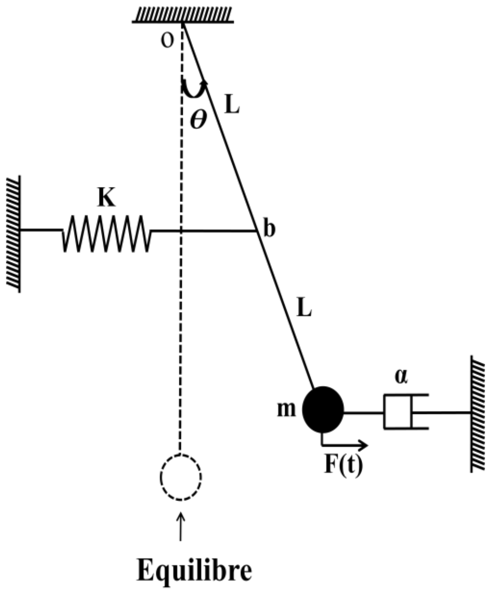
4- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

5- Donner la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$

<u>Exercice N°2 :</u>

On considère Le système mécanique représenté à la figure ci-contre**.** La tige de longueur 2L et de masse négligeable (peut tourner autour de l'articulation O).

Le milieu de la tige (point b) est relié à un bâti par un ressort de raideur K et sont extrémité libre porte une masse m à laquelle est attaché un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$.



1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielleE_c et la fonction de dissipation E_D.

2- Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement et les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Trouver la solution permanente de l'équation du mouvement (Préciser son amplitude A et sa phase φ).

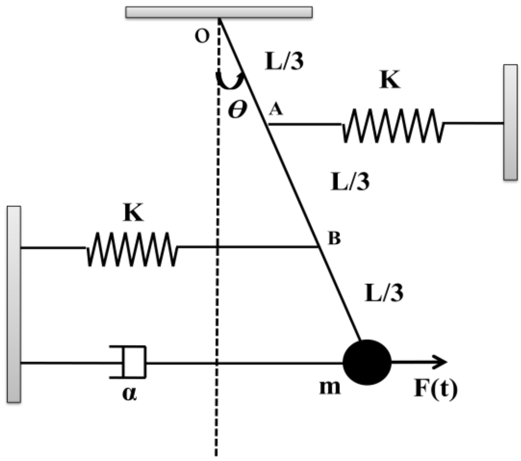
4- Déduire la pulsation de résonance Ω_R.

5- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

6- Donner les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

7- Calculer Ω_R, B et le facteur de qualité Q si m=0.5 Kg, K=50 N/m, L=0.5 m, α=0.2 $\mathrm{N.s/m}$, g=10 $\mathrm{m.s^{-2}}$.

Exercice N°3



La figure ci-contre représente un système mécanique faiblement amorti formé d'une masse m à l'extrémité d'une tige de masse négligeable est attaché a un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Le point A de la tige est relié à un bâti par un ressort de raideur K, et aussi le point B est relié a un bâti par un ressort de raideur K. Avec (OA=AB=BC=L/3)

On applique à la masse m une force $F(t) = F_0 \sin\Omega t$

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ.

2- déterminer les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

4- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

Chapitre V :

Oscillations des systèmes à plusieurs degrés de liberté

V.1 Introduction

On définit les systèmes à plusieurs degrés de libertés par les systèmes qui nécessitent plusieurs coordonnées indépendantes pour spécifier leurs. Le nombre de degré de liberté détermine les modes propres.

V.2 Systèmes libres à deux degrés de liberté

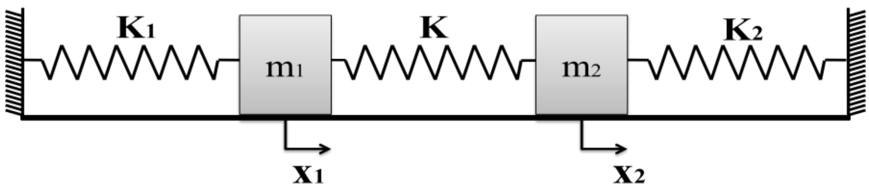
Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté, les systèmes à deux degrés de liberté sont constitués de deux systèmes à un degré de liberté couplé.

V.2.1 Types de couplage

Il existe trois types de couplage : par élasticité, inertiel et visqueux.

V.2.1.1 Couplage Elastique :

Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité (un ressort). Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.



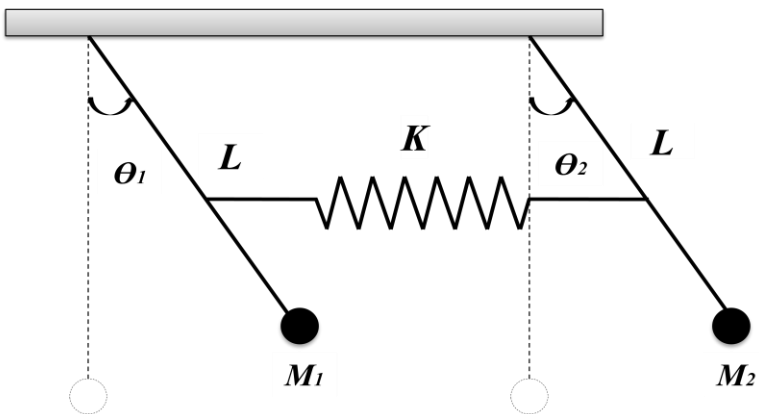


Figure V.1 Exemples des systèmes à 2 DDL couplés par élasticité

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta\dot{q}_1 + \omega^2 q_1 = a_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta\dot{q}_2 + \omega^2 q_2 = a_2 q_1 \end{cases} \qquad (V.1)$$

Tel que : a_1x_2 et $a_2x_1$sont les termes de couplage. a_1 et $a_2$sont des constantes.

V.2.1.2 Couplage Inertiel :

Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie (une masse).

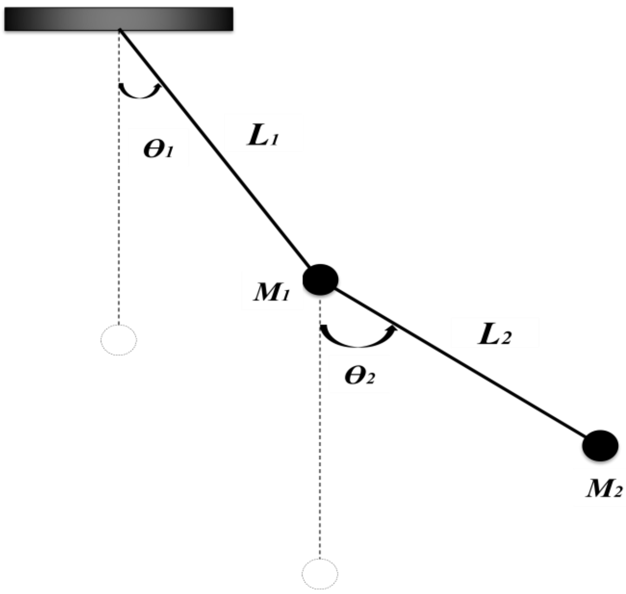


Figure V.2 Exemple d'un système à 2 DDL couplés par inertie

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta\dot{q}_1 + \omega^2 q_1 = b_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta\dot{q}_2 + \omega^2 q_2 = b_2 q_1 \end{cases} \qquad (V.2)$$

Tel que : b_1x_2 et $b_2x_1$sont les termes de couplage. $b_1$et $b_2$sont des constantes.

V.2.1.3 Couplage Visqueux :

Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.

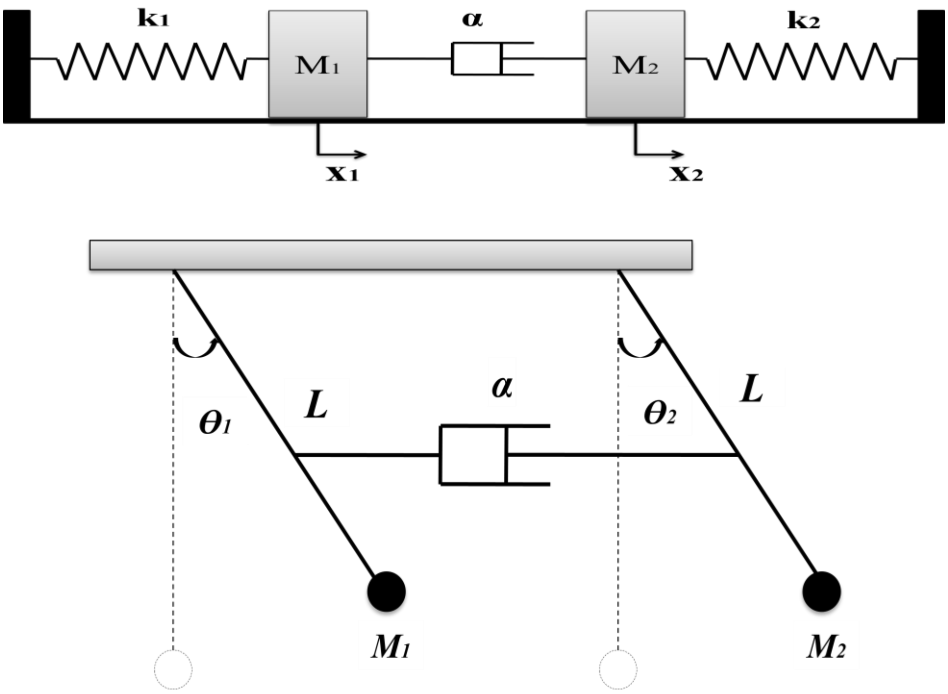


Figure V.3 Couplage visqueux des différents systèmes mécanique

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta\dot{q}_1 + \omega^2 q_1 = c_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta\dot{q}_2 + \omega^2 q_2 = c_2 q_1 \end{cases} \qquad (V.3)$$

Tel que : c_1x_2 et $c_2x_1$sont les termes de couplage. $c_1$et $c_2$sont des constantes.

V.2.2 Equations différentielles du mouvement

Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial q_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial q_2}\right) = 0 \end{cases} \qquad (V.4)$$

q_1 et q_2 : les deux coordonnées généralisées qui caractérisent le système à deux degrés de liberté.

Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P \qquad (V.5)$$

V.2.3 Méthode générale de résolution des équations de mouvement

Pour un système mécanique, la mise en équation du système couplé passe par la méthode à suivre suivante :

1- On écrit les deux équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.

2- On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques. Ce qui signifie que le système peut osciller avec la même pulsation pour tous les oscillateurs.

3- La résolution des systèmes d'équations permet d'obtenir deux pulsations particulières $\omega_1$et ω_2 : ce sont les pulsations propres.

4- On substitue ensuite ω_1 dans l'une des deux équations et l'on obtient le 1er mode propre.

5- On substitue ensuite ω_2 dans l'une des deux équations et l'on obtient le 2ème mode propre.

6- On écrit les deux solutions générales des équations différentielles du mouvement.

V.2.4 Etude d'un système mécanique libre à deux degrés de liberté:

V.2.4.1 Système complexe (masses-ressorts) :

Soit le système mécanique représenté sur la figure V.4 et composé de deux oscillateurs Harmoniques (m_1, K_1) et (m_2, K_2) couplés par un ressort de constante de raideur K. Les deux masses sont supposées se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et leurs élongations par rapport à leurs positions d'équilibre sont repérées par x_1 et x_2 .

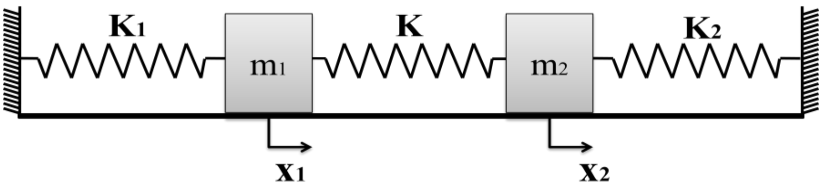


Figure V.4 : Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degré de liberté

Lorsque ce système est écarté de sa position d'équilibre puis abandonné à lui même, il effectue un mouvement vibratoire libre.

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}K_1x_1^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}K_2(-x_2)^2$

Le Lagrangien du système s'écrit comme suit: $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}K_1x_1^2 - \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}K_2x_2^2$$

Les équations de Lagrange dans ce cas s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\dot{x}_1 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -(K_1 + K)x_1 + Kx_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\dot{x}_2 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -(K_2 + K)x_2 + Kx_1$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les termes : $-Kx_1$ et $-Kx_2$ sont appelés : Termes de Couplage

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel. On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\omega^2 m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -\omega^2 m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-m_1\omega^2 + K_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 + (-m_2\omega^2 + K_2 + K)x_2 = 0 \end{cases} \ldots\ldots(\mathbf{1})$$

$$\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + K_1 + K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + K_2 + K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement si le déterminant =0

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + K_1 + K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + K_2 + K \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant Δ(ω) est appelé déterminant caractéristique. L'équation Δ(ω) = 0 est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit

$$\Delta(\omega) = (K_1 + K - m_1\omega^2) \times (K_2 + K - m_2\omega^2) - K^2 = 0$$

$$\omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2(1 - K'^2) = 0$$

On définit les constantes suivantes comme suit:
$\Omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1}$, $\Omega_2^2 = \frac{K_2}{m_2}$, $K'^2 = \frac{K^2}{(K_1+K)(K_2+K)}$

K' est appelée le coefficient du couplage

Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4K\Omega_1^2\Omega_2^2} \\ \omega_2^2 = \dfrac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4K\Omega_1^2\Omega_2^2} \end{cases}$$

La solution générale su système s'écrit sous la forme d'une superposition des deux modes propres, comme suit :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$A_1, A_2, B_1, B_2, \varphi_1$ et φ_2 sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

Afin de simplifier le nombre d'inconnu; On détermine les rapports d'amplitudes aux modes propres: $\begin{cases} \omega = \omega_1; \; \frac{A_1}{A_2} \\ \omega = \omega_2; \; \frac{B_1}{B_2} \end{cases}$

Dans le cas d'un système symétrique $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2 = k$, les relations (1) deviennent :

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k + K)x_1 - Kx_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -Kx_1 + (-m\omega^2 + K + k)x_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k + K & -K \\ -K & -m\omega^2 + K + k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement si le déterminant =0

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + K_1 + K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + K_2 + K \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\omega) = (-m\omega^2 + k + K)^2 - K^2 = 0$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 + k + K = K \\ -m\omega^2 + k + K = -K \end{cases} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m},\ \omega_2^2 = \frac{k+2K}{m}$$

Les deux pulsations propres sont : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$

- Les solutions du système :

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

V.2.4.2 Étude des modes propres

- Premier mode : on remplace dans (1) ou (2) par $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$

On obtient après calcul : $x_2 = x_1$

Dans ce mode : $\omega = \omega_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow \vec{V}_1\binom{1}{1}$, $\vec{V}_1$ est le 1er vecteur propre.

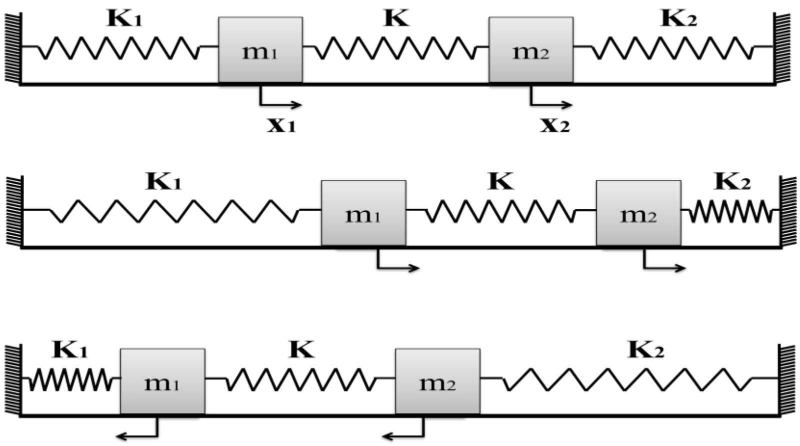


Figure V.5 : Etat du système pour le premier mode. « En phase »

Dans ce mode les deux masses oscillent à la même pulsation $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ avec la même amplitude A**,** en phase.

- Deuxième mode **:** on remplace dans (1) ou (2) par $\omega_2^2 = \frac{k+2K}{m}$

On obtient après calcul : $x_2 = -x_1$

Dans ce mode : $\omega = \omega_2 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow B_1 = -B_2 \Rightarrow \vec{V}_2\binom{1}{-1}$, $\vec{V}_2$ est le 2ème vecteur propre.

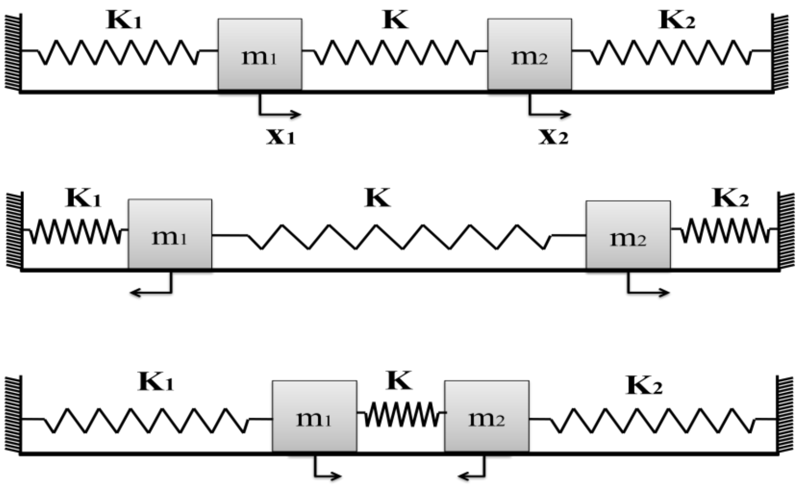


Figure V.6 : Etat du système pour le deuxième mode.
« En opposition de phase »

Dans ce mode les deux masses oscillent à la même pulsation $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ avec la même amplitude B**,** en opposition de phase.

Donc les solutions générales deviennent alors :

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Où les constantes A, B, φ_1et φ_2 seront définies par les conditions initiales.

V.2.4.3 Phénomène de battement :

Les solutions générales sont alors données par:

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Pour des conditions initiales bien choisies, on peut écrire :

$$\begin{cases} x_1(t) = A\,(\cos \omega_1 t \ + \cos\omega_2 t) = \ 2A\cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) cos\ \left(\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ x_2(t) = A\,(\cos \omega_1 t \ - \cos\omega_2 t) = 2A\cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) sin\left(\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{cases}$$

Lorsque le couplage est faible (K faible), les pulsations propres des deux oscillateurs $(\omega_1$ et $\omega_2)$ sont voisines ($\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \Delta\omega = \ \omega_2 - \omega_1 \ \ est\ faible$), il se produit un phénomène de battement. Les deux oscillateurs se transmettent de l'énergie entre eux et vibres avec une pulsation ω égal à la moyenne des deux pulsations propres $\omega = \frac{(\omega_2+\omega_1)}{2}$ avec une période égale à $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_2+\omega_1}$. Tandis que la pulsation du battement est égale à $\omega_B = \frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}$ avec une période égale à $T_B = \frac{4\pi}{\omega_2-\omega_1}$

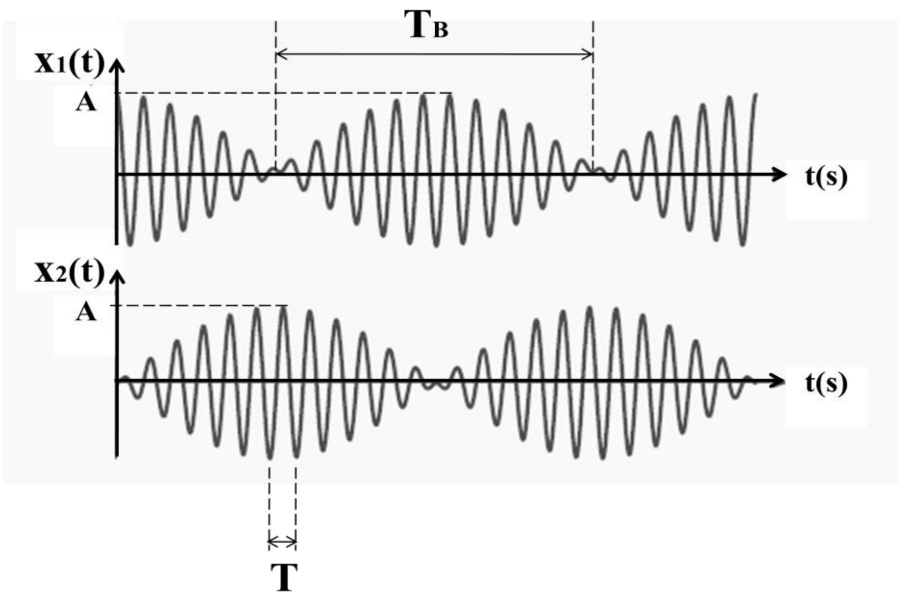


Figure V.7 : Phénomène de battements où Modulation d'amplitude

Une période de battement est donc le temps que fait l'énergie de vibration dans son aller-retour complet entre les deux oscillateurs.

V.3 Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

V.3.1 Equations de Lagrange :

Les équations différentielles du mouvement oscillatoire forcé des systèmes à deux degrés de liberté sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = F_{q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = F_{q_2} \end{cases} \qquad (V.6)$$

F_{q_1} et F_{q_2} sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives q_1 et q_2.

Dans le cas où la coordonné est une rotation $(q = \theta)$ la force $F_q(t)$ est remplacée par le moment de cette force $\mathcal{M}(F_q(t))$

V.3.2 Equation différentielle d'un système forcé à deux degrés de liberté :

Soit le système à deux degrés de liberté (x_1, x_2) de la figure V.1, composé de : masses, ressorts et amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure. Ce système est soumis à une force extérieure $F_{q_1} = F = F_0 \cos\Omega t$. K : ressort de couplage.

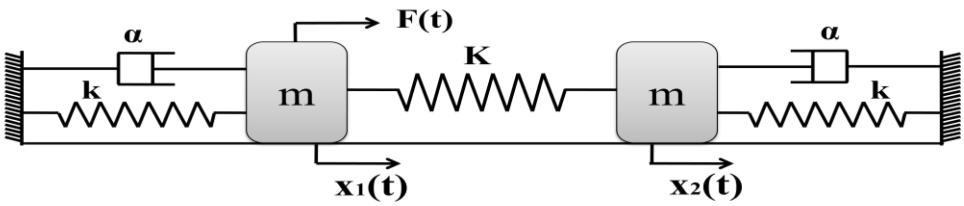


Figure V.8 Système à deux DDL couplé par un ressort de couplage

Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_2)^2$

$$E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

D'où le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Les équations de Lagrange dans ce cas s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F_{x_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k + K)x_1 + \alpha\dot{x}_1 - Kx_2 = F \\ m_2\ddot{x}_2 + (k + K)x_2 + \alpha\dot{x}_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

V.3.3 Etude du régime permanent sinusoïdal (Résolution des d'équations différentielles):

La solution générale de système d'équations différentielles est égale à la solution de la solution du système homogène et d'une solution particulière. La solution de l'équation homogène, en raison de l'amortissement, tend vers zéro lorsque le temps augmente. Lorsque le régime permanent s'établit, la solution devient égale à la solution permanente et s'écrit alors : $\begin{cases} x_1(t) \cong x_{1_p}(t) = X_1\cos(\Omega t + \phi_1) \\ x_2(t) \cong x_{2_p}(t) = X_2\cos(\Omega t + \phi_2) \end{cases}$

Pour calculer les amplitudes X_1 et X_2 , ainsi que les phases $\phi_1$et ϕ_2 utilisons les méthodes des nombres complexes.

On peut ainsi écrire :

$$x_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_1}e^{j\Omega t} \Rightarrow\ \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2\overline{X_1}e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_2}e^{j\Omega t} \Rightarrow\ \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2\overline{X_2}e^{j\Omega t}$$

V.3.4 Calcul de X_1 et X_2 dans le cas de faible amortissement :

V.3.4.1 Amortissement négligeable :

Considérons d'abord le cas d'un amortissement suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que $\alpha \approx 0$. Le système d'équations différentielles s'écrit alors :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k+K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les pulsations $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{2m}}$ sont les pulsations propres calculées au chapitre précédent.

$F(t) = F_0\cos\Omega t = F_0 e^{j\Omega t}$

$$\begin{cases} -m_1\Omega^2\overline{X_1} + (k+K)\overline{X_1} - K\overline{X_2} = F_0 e^{j\Omega t} \\ -m_2\Omega^2\overline{X_2} + (k+K)\overline{X_2} - K\overline{X_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(k+K) - m_1\Omega^2]\overline{X_1} - K\overline{X_2} = F_0 \\ -K\overline{X_1} + [(k+K) - m_2\Omega^2]\overline{X_2} = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\overline{X_1} = \frac{F_0}{m}\frac{(\Omega_A^2 - \Omega^2)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

$$\overline{X_2} = \frac{KF_0}{m^2}\frac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

La valeur de la pulsation Ω_A est : $\Omega_A = \sqrt{\frac{k+K}{m}}$

$\overline{x_1} = x_1 e^{j\Omega t}$ et $\overline{x_2} = x_2 e^{j\Omega t} \Rightarrow \phi_1$ et ϕ_2 peuvent avoir que des valeurs 0 et/ou π, vu que la partie imaginaire de $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ est nulle.

Sachant que : $X_1 = \left|\overline{X_1}\right|$ et $\phi_1 = -\text{arctg}\frac{\text{Im}(\overline{X_1})}{\text{Re}(\overline{X_1})}$

On aura au final : les amplitudes des déplacements X_1 et X_2

$$X_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\left|\Omega_A^2 - \Omega^2\right|}{\left|\omega_1^2 - \Omega^2\right| \left|\omega_2^2 - \Omega^2\right|}$$

$$X_2 = \frac{KF_0}{m} \frac{1}{\left|\omega_1^2 - \Omega^2\right| \left|\omega_2^2 - \Omega^2\right|}$$

V.3.5 Les variations des amplitudes X_1 et X_2 :

La variation des amplitudes X_1 et X_2 sont en fonction de la pulsation de la force excitatrice Ω illustrée sur les figures V.9 et V.10.

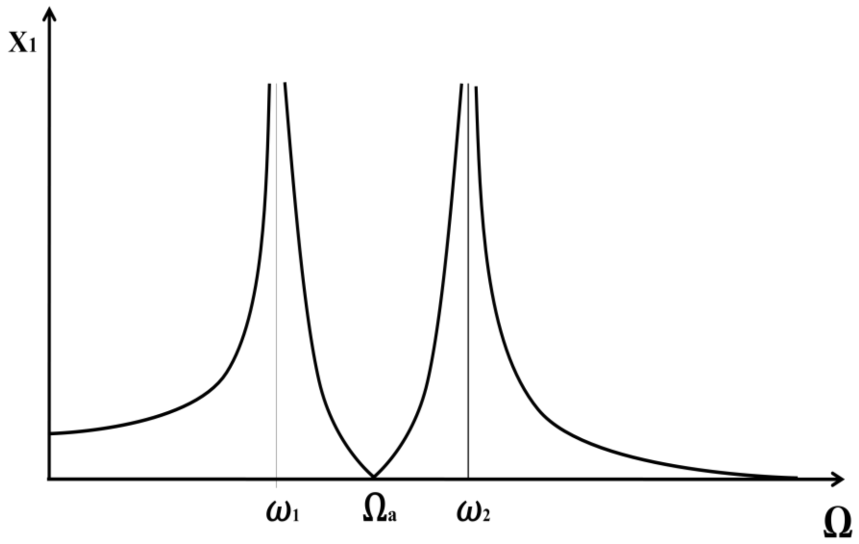


Figure V.9 : Variation de X_1 en fonction de Ω

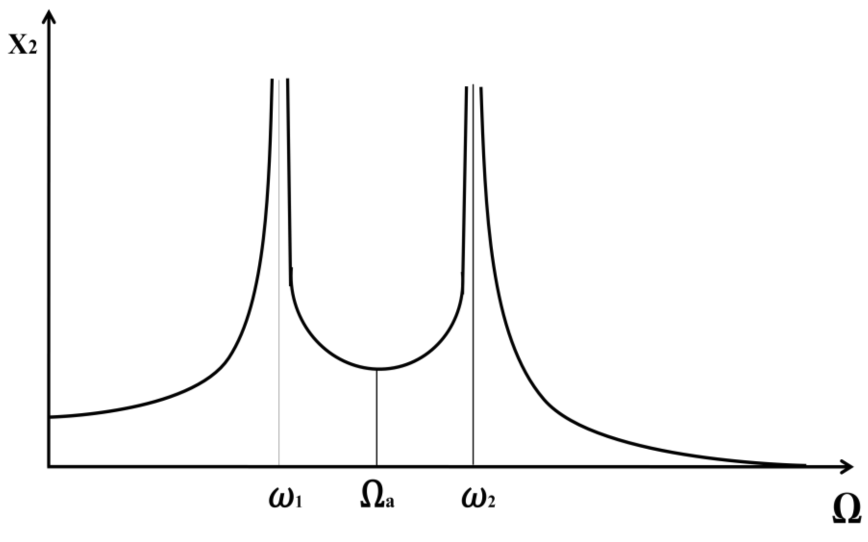


Figure V.10 : Variation de X_2 en fonction de Ω

- $\Omega = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{F_0}{m}\frac{|\Omega_A^2|}{|\omega_1^2||\omega_2^2|}$ et $X_2 = \frac{KF_0}{m|\omega_1^2||\omega_2^2|}$
- On note que le phénomène de résonance se produit pour X_1 comme pour X_2 lorsque la pulsation d'excitation Ω est égale à l'une des pulsations propres ω_1 et ω_2 du système (lorsque $\Omega = \omega_1$ et $\Omega = \omega_2 \Rightarrow$ Résonance).

  $\Omega = \omega_1 = \omega_{R1}$ (Appelée la première pulsation de résonance)

  $\Omega = \omega_1 = \omega_{R2}$ (Appelée la deuxième pulsation de résonance)
- Lorsque l'amortissement étant très faible, les amplitudes à la résonance sont très importantes.
- Lorsque la pulsation Ω devient très grande, ces amplitudes tendent vers zéro.
- Lorsque $\Omega = \Omega_A \Rightarrow$ Les amplitudes X_1 est égale à zéro $(A_1 = 0) \Rightarrow \Omega_A$: est appelée Pulsation d'antirésonance.

V.3.6 Application :

Soit le système mécanique ci-dessous, composé de : masses, ressorts et amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure. Ce système est soumis à une force extérieure $F(t) = KA\cos\Omega t$

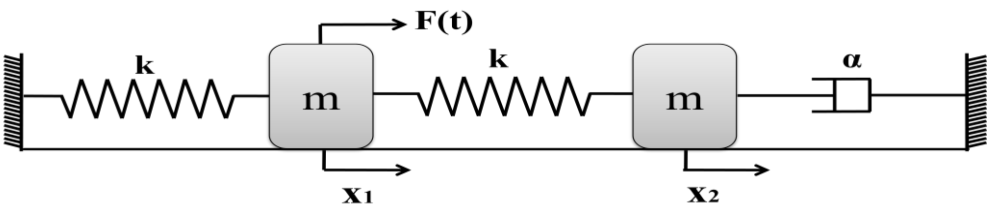


Figure V.11: Mouvement oscillatoire couplés de deux masses

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielleE_c et la fonction de dissipation E_D.

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3- Trouver la réponse en régime permanant.

4- Si $\alpha = 0$, pour quelle valeur de Ω le système entre en résonance. Donner dans ce cas la condition pour que la masse excitée reste immobile ?

Solution :

1- L'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielleE_c et la fonction de dissipation E_D :

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

Le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

2- L'équation différentielle du mouvement :

Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) + \alpha\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{k}{m}(x_1 - x_2) = F(t) \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

3- La résolution en régime permanant, en écriture complexe :

$$x_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_1}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2\overline{X_1}e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_2}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2\overline{X_2}e^{j\Omega t}$$

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + \dfrac{2k}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & -\Omega^2 + \dfrac{k}{m} + j\Omega\dfrac{\alpha}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ka}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcul le déterminant $\det(\Omega)$:

$$\det(\Omega) = \mathbf{0} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\overline{X_1} = \frac{1}{\det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)$$

$$\overline{X_2} = \frac{1}{\det}\left(\frac{k^2}{m^2}\alpha\right)$$

4- Résolution des L'équation différentielle du mouvement pour $\alpha = 0$:

Calcul des pulsations pour $\alpha = 0$

$$\det(\Omega) = \mathbf{0} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Omega^4 - \frac{3k}{m}\Omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

L'équation admet deux solutions : $\begin{cases} \omega_1 = \frac{k}{2m}\left(3 - \sqrt{5}\right) \\ \omega_2 = \frac{k}{2m}\left(3 + \sqrt{5}\right) \end{cases}$

Pour que la masse soit immobile :

$$\overline{X_1} = \frac{1}{\det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right) = 0 \text{ et } \alpha = 0 \Rightarrow -\Omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

V.4 Oscillations de système mécaniques à N degrés de liberté

V.4.1 définition

Un système oscillateur présente N degrés de liberté s'il nécessite N paramètres pour définir sa position à un instant t. Nous considérerons ici des systèmes linéaires dont la mise en équation aboutit à un système de N équations différentielles linéaires. Le nombre de degrés de liberté dépend de la structure du système. Le nombre de degrés de liberté dépend de la structure du système. S'il s'agit d'un :

- système à N particules, les mouvements sont des translations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 3N.
- Si le système est constitué de N corps étendus, il faut ajouter les rotations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 6N.

V.4.2 Méthode de Lagrange de mise en équation de système à N degrés de liberté

Considérons les cas de systèmes conservatifs non excités (étape de toute façon utile pour rechercher les modes et les fréquences propres). Soient $q_1, \ldots., q_N$ les N coordonnées indépendantes qui définissent la position du système à un instant donné, E_c l'énergie cinétique, E_p l'énergie potentielle exprimée à l'aide des q_i et q_N. L'équation

de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (\mathrm{i} = 1,2, \ldots \ldots . \mathrm{N}) \qquad (\mathrm{V}.7)$$

Dans le cas général d'un système forcé à NDDL, il y'aura autant d'équation de Lagrange, donc N équations de Lagrange.

Système à NDDL ⇒ Coordonnées $\mathrm{q_i}(\mathrm{i} = 1,2, \ldots \ldots . \mathrm{N})$.

Dans ce cas les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{q_i}(t) \qquad (\mathrm{i} = 1,2, \ldots \ldots . \mathrm{N}) \qquad (\mathrm{V}.8)$$

Dans le cas où la coordonné est une rotation $(q = \theta)$ la force $F_q(t)$ est remplacée par le moment de cette force $\mathcal{M}(F_q(t))$.

V.4.3 Mise en équation de système à N degrés de liberté

V.4.3.1 Cas général de N degrés de liberté

Les systèmes d'équations à résoudre sont de la forme :

$$[\mathrm{m}][\ddot{\mathrm{x}}] + [\mathrm{R}][\dot{\mathrm{x}}] + [\mathrm{K}][\mathrm{x}] = [\mathrm{F}]\cos\omega\mathrm{t} \qquad (\mathrm{V}.9)$$

Où [K] représentent une matrice carrée N × N et [x] un vecteur colonne.
Pour les systèmes libres non amortis à N degrés de liberté

$$[\mathrm{m}][\ddot{\mathrm{x}}] + [\mathrm{K}][\mathrm{x}] = 0$$

Il apparaît donc que le nombre de fréquences propres est égal au nombre de degrés de liberté.

V.4.3.2 Modes propres de vibration d'un système mécanique à trois degrés de liberté

Considérons le système mécanique de trois masses $\mathrm{m_1}$, $\mathrm{m_2}$ et $\mathrm{m_3}$ attachées entre elles horizontalement par des ressorts $\mathrm{K_1}, \mathrm{K_2}, \mathrm{K_3}$ et $\mathrm{K_4}$ (voire la figure V.12).

Les positions des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont données par les variables x_1, x_2 et x_3. Le mouvement est dans ce cas exclusivement sur une droite.

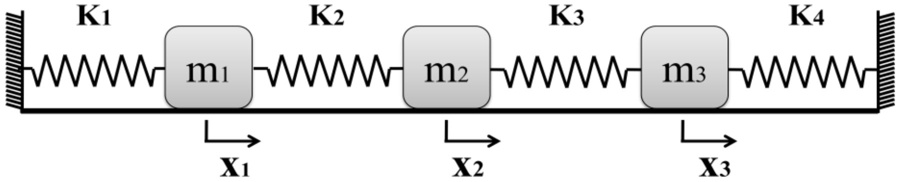


Figure V.12: Mouvement oscillatoire couplés de trois masses

Le système d'équations de mouvement du système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 - K_2x_1 - K_3x_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + (K_3 + K_4)x_3 - K_3x_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou encore sous une forme plus condensée :

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (V.10)$$

Où

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \ddot{x} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{pmatrix} \text{ et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Il est possible de récrire l'équation ci-dessus sous forme

$$\ddot{x} + M^{-1}Kx = 0 \qquad (V.11)$$

Où M^{-1} est la matrice inverse de M

En posant $A = M^{-1}K$, l'équation (2) devient :

$$\ddot{x} + Ax = 0 \qquad (V.12)$$

Si la matrice A est diagonalisable (ce qui est vrai dans notre cas), celle-ci pourrait se mettre sous la forme : $A = PDP^{-1}$

Où P est une matrice dite de passage construite à partir des vecteurs propres de A comme étant ses colonnes.

D une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de la matrice A.
L'équation (3) devient alors :

$$\ddot{x} + PDP^{-1}x = 0 \qquad (V.13)$$

Multiplions l'équation ci-dessus par P^{-1}:

$$P^{-1}\ddot{x} + P^{-1}PDP^{-1}x = 0 \qquad (V.14)$$

Où encore en faisant le changement de variable suivant :

$$U = P^{-1}x \qquad (V.15)$$

Avec $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, nous obtenons l'équation suivante :

$$\ddot{U} + DU = 0 \qquad (V.16)$$

Cette équation est très intéressante car elle représente un système d'équations différentielles découplé puisqu'elle fait intervenir une matrice diagonale. En effet, l'équation ci-dessus peut se mettre sous une forme plus explicite :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + v_1u_1 = 0 \\ \ddot{u}_2 + v_2u_2 = 0 \\ \ddot{u}_3 + v_3u_3 = 0 \end{cases}$$

Où v_1, v_2 et v_3 sont appelées coordonnées normales puisqu'elles permettent de découpler un système linéaire d'équations différentielles.

Elles représentent des mouvements harmoniques simples du système avec trois pulsations d'oscillations : $\omega_1 = \sqrt{v_1}$, $\omega_2 = \sqrt{v_2}$ et $\omega_3 = \sqrt{v_3}$; c'est à dire les modes propres du système.

Cependant, il est intéressant d'avoir l'évolution des coordonnées x_1, x_2 et x_3.

Pour cela, on utilise l'équation :

$$x = PU \qquad (V.17)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x_1(t) = P_{11}u_1 + P_{12}u_2 + P_{13}u_3 \\ x_2(t) = P_{21}u_1 + P_{22}u_2 + P_{23}u_3 \\ x_3(t) = P_{31}u_1 + P_{32}u_2 + P_{33}u_3 \end{cases}$$

Les mouvements des masses du système sont finalement des combinaisons linéaires de mouvements harmoniques simples (modes propres du système) avec les pulsations correspondantes. Ces résultats nous ramène impérativement à diagonaliser la matrice A afin que l'étude du mouvement des masses soit complètement établie.

En guise d'exemple d'application, prenons le cas du système mécanique ci-dessus avec des masses et des ressorts égaux. La matrice correspondante s'écrit sous la forme

$$A = \frac{K}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que les valeurs propres de cette matrice et partant les pulsations propres du système sont données par :

$$\begin{cases} v_1 = (2-\sqrt{2})\frac{K}{m} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{K}{m}} \\ v_2 = 2\frac{K}{m} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2\frac{K}{m}} \\ v_3 = (2+\sqrt{2})\frac{K}{m} \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{K}{m}} \end{cases}$$

Avec les vecteurs propres correspondants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage s'écrit donc sous la forme :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Il serait utile de donner une interprétation des valeurs des vecteurs propres ci- dessus.

En effet, chaque vecteur propre correspond à un mode de vibration, et plus précisément, chaque composante du vecteur donne le rapport d'amplitude de mouvement des différentes masses dans un mode donné. C'est ainsi que le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, correspondant à la pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{K}{m}}$, indique que les trois masses oscillent toutes les trois en phase (les signes des composantes sont positives) avec la deuxième masse qui a une amplitude $\sqrt{2}$ fois plus grande que les amplitudes des autres masses.

Les solutions générales de mouvement des masses s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1\ \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2\ \cos(\omega_1 t + \varphi_2) + C_3\ \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_2(t) = \sqrt{2}C_1\ \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \sqrt{2}C_3\ \cos(\omega_3 t + \varphi_1) \\ x_3(t) = C_1\ \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - C_2\ \cos(\omega_1 t + \varphi_2) + C_3\ \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{cases}$$

C_1 , C_2 , C_3 , φ_1, φ_2 et φ_3 sont des constantes à définir avec les conditions initiales.

-Les formes des solutions indiquent que les masses, dans le premier mode, oscillent en phase avec les mêmes amplitudes pour la première et la troisième masse, alors que celle au milieu a une amplitude $\sqrt{2}$ fois plus grande.

-Dans le deuxième mode, la masse au milieu est immobile, alors que les deux autres masses oscillent en opposition de phase mais avec les mêmes amplitudes.

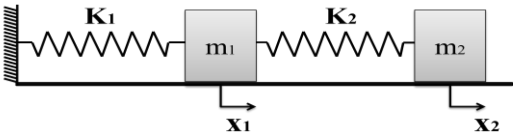
-Dans le troisième mode, la première et la troisième masse oscillent en phase avec la même amplitude mais en opposition de phase avec la masse au milieu qui elle oscille avec une amplitude $\sqrt{2}$ fois plus grande.

De cette façon, tous les aspects du mouvement des masses du système sont établis ; il ne reste qu'appliquer les conditions initiales (préparation du système) et voir comment le système évoluera. En effet, cette procédure peut être facilement appliquée à un système de plusieurs degrés de liberté. Il suffit juste de pouvoir diagonaliser des matrices de plus en plus grandes, ce qui nécessite le recours à des méthodes numériques bien établies.

V.5 Exercices résolus

<u>Exercice N°1 :</u>

Soit le système mécanique représenté sur la figure ci-contre. Les deux masses font des oscillations sur l'axe horizontal.



1- Quel est le nombre de degré de liberté ? et donner le type du couplage ?

2- Calculer l'énergie cinétique, potentielle du système.

3- Pour $K_1 = K_2 = K$ et $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, et en utilisant la formule de Lagrange établir les équations différentielles du mouvement, et écrire les deux équations sous forme d'une matrice $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4- Déduire les pulsations propres du système.

<u>Solution N°1 :</u>

1- Le nombre de degré de liberté du système est de 2, couplage élastique.

2- Energie cinétique et potentielle :

- Energie cinétique E_c :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_1 - x_2)^2$$

Donc le lagrangien est : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 x_1^2 - \frac{1}{2} K_2 (x_1 - x_2)^2$$

3- Les équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\dot{x}_1 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -(K_1 + K_2)x_1 + \frac{1}{2}K_2x_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\dot{x}_2 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -K_2x_2 + \frac{1}{2}K_2x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + K_2x_2 - K_2x_1 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les constantes, on trouve : $\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\omega^2 m x_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 - 2\omega^2 m x_2 + Kx_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (-\omega^2 m + 2K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 + (-2\omega^2 m + K)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 m + 2K & -K \\ -K & -2\omega^2 m + K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcul le déterminant $\Delta(\omega)$:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 m + 2K & -K \\ -K & -2\omega^2 m + K \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\omega) = (-\omega^2 m + 2K) \times (-2\omega^2 m + K) - K^2 = 0$$

$$\Delta(\omega) = 2m^2\omega^4 - 3mK\omega^2 + K^2 = 0$$

Le terme de plus basse fréquence correspondant à la pulsation ω_1 est appelé le fondamental.

L'autre terme de pulsation ω_2, est appelé harmonique.

Les deux pulsations propres sont : $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{2m}}$

Et les solutions s'écrit comme :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

A_1, A_2, B_1, B_2, φ_1 et φ_2 sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

Le système oscille dans le premier mode (fondamental), les solutions s'écrivent :

$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

$x_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

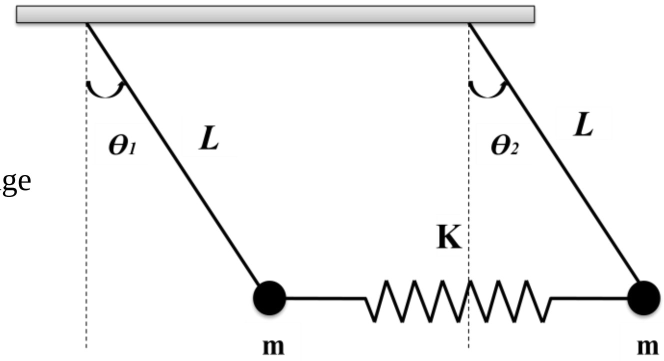
Si le système oscille dans le second mode (harmonique), les solutions s'écrivent :

$x_1(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$x_2(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Exercice N°2 :

On considère le système de la figure ci-contre constitué de deux pendules simples identiques de masse m et de longueur L, fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur K assure le couplage entre les deux pendules. A l'équilibre les deux pendules sont verticaux.



1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Calculer l'énergies cinétique E_c et potentielle E_P du système.

3- Trouver l'équation différentielle du mouvement.

4- Déterminer les pulsations propres du système et Calculer les modes d'oscillations.

5- Calculer les rapports des amplitudes dans les modes.

6- Calculer θ_1 et θ_2, pour les conditions initiales suivantes :

$\theta_1(t=0) = \theta_0$, $\theta_2(t=0) = 0$ et $\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$

Solution N°2 :

1- Système oscillatoire à 2 ddl (x_1, x_2), le type du couplage : couplage élastique.

2- Calcul des énergies :

L'énergie cinétique E_c :

$$E_C = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_2^2$$

L'énergie cinétique E_P:

$$E_P = \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_2^2 - KL^2\theta_1\theta_2$$

Le lagrangien L dans le cas des oscillations de faible amplitude :

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_2^2 + KL^2\theta_1\theta_2$$

3- l'équation différentielle du mouvement :

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = mL^2\dot{\theta}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = mL^2\ddot{\theta}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = -(KL^2 + mgL)\theta_1 + KL^2\theta_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = mL^2\dot{\theta}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = mL^2\ddot{\theta}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = -(KL^2 + mgL)\theta_2 + KL^2\theta_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mL^2\ddot{\theta}_1 + (KL^2 + mgL)\theta_1 - KL^2\theta_2 = 0 \\ mL^2\ddot{\theta}_2 + (KL^2 + mgL)\theta_2 - KL^2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_2 - \frac{K}{m}\theta_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

4-Les pulsations propres du système :

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2 \end{cases}$

ω est l'une des pulsations propres du système.

On remplace $\ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1$et $\ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2$ dans les équations (1) et (2) on trouve :

$$\begin{cases} -\omega^2\theta_1 + \left(\frac{K}{m}+\frac{g}{L}\right)\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ -\frac{K}{m}\theta_1 - \omega^2\theta_2 + \left(\frac{K}{m}+\frac{g}{L}\right)\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2\theta_1 + \left(\frac{K}{m}+\frac{g}{L}\right)\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0 \\ -\frac{K}{m}\theta_1 - \omega^2\theta_2 + \left(\frac{K}{m}+\frac{g}{L}\right)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2)\theta_1 - KL^2\theta_2 = 0 \\ -KL^2\theta_1 + (KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2 & -KL^2 \\ -KL^2 & KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

On calcul le déterminant $\Delta(\omega)$:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 & -KL^2 \\ -KL^2 & KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\omega) = (KL^2 + mgL - mL^2\omega^2)^2 - (KL^2)^2 = 0$$

$$KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 = \begin{cases} +KL^2 \\ -KL^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 = -KL^2 \\ KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 = +KL^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{2K}{m}+\frac{g}{L} \\ \omega_2^2 = \frac{g}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}+\frac{g}{L}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}} \end{cases}$$

ω_1: la première pulsation propre, ω_2: la deuxième pulsation propre.

-Calcul des modes propres :

Dans chaque mode les deux masses effectuent des mouvements harmoniques simples avec la même pulsation ($\omega_1$ou ω_2) et les deux pendules passent par la position d'équilibre au même instant.

-Premier mode : on remplace dans (3) ou (4) par $\omega_1^2 = \frac{2K}{m}+\frac{g}{L}$

On obtient après calcul : $\theta_2 = -\theta_1$

-Deuxième mode : on remplace dans (3) ou (4) par $\omega_2^2 = \frac{g}{L}$

On obtient après calcul : $\theta_2 = \theta_1$

5- Les rapports des amplitudes dans les modes :

Pour calculer les rapports des amplitudes dans les modes, on suppose que le système oscille soit dans le premier mode soit dans le second mode.

Dans le premier mode, on obtient le système

$$\begin{cases} (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2) - KL^2\mu_1 = 0 \\ -KL^2 + (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2)\mu_1 = 0 \end{cases}$$

Dans le second mode, on obtient

$$\begin{cases} (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2) - KL^2\mu_2 = 0 \\ -KL^2 + (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2)\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Tenant compte des expressions de ω_1 et ω_2 on obtient les valeurs du rapport des amplitudes dans les modes $\mu_1 = +1$ et $\mu_2 = -1$

6- Calcul des solutions des équations différentielles θ_1 et θ_2 :

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans le premier mode : $\omega = \omega_1 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow \vec{V}_1\binom{1}{-1}$,

$\vec{V}_1$ est le 1^{er} vecteur propre.

Dans le premier mode : $\omega = \omega_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \vec{V}_2\binom{1}{1}$,

$\vec{V}_2$ est le $2^{ème}$ vecteur propre.

Donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = -A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_0 \, , \dot{\theta}_1(0) = 0 \\ \theta_2(0) = 0 \, , \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\,\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(t) = -A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\,\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(0) = A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2 = \theta_0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\ \theta_2(0) = -A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(0) = A\omega_1 \cos \varphi_1 + B\,\omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7) \\ \dot{\theta}_2(0) = -A\omega_1 \cos \varphi_1 + B\,\omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7) + (8) \Rightarrow \; 2B\,\omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \; \Rightarrow \cos\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ (8) - (7) \Rightarrow \; -2A\omega_1 \cos \varphi_1 = 0 \; \Rightarrow \cos\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

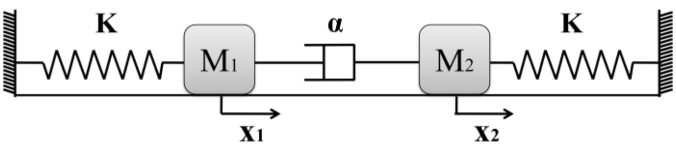
$$\begin{cases} (\mathbf{5}) \Rightarrow A + B = \theta_0 \\ (\mathbf{6}) \Rightarrow -A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\theta_0}{2} \\ B = \frac{\theta_0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} \, \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\theta_0}{2} \, \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \theta_2(t) = -\frac{\theta_0}{2} \, \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\theta_0}{2} \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{\theta_0}{2} \left[\sin\left(\omega_1 t + \dfrac{\pi}{2}\right) + \, \sin\left(\omega_2 t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] \\ \theta_2(t) = \dfrac{\theta_0}{2} \left[-\sin\left(\omega_1 t + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_2 t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] \end{cases}$$

<u>Exercice N°3:</u>

On considère le système représenté par la figure ci-contre, et composé de deux oscillateurs harmoniques (M_1, K) et (M_2, K) couplés par un amortisseur α.



1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

3- Déterminer le Lagrangien du système

4- Déterminer les équations différentielles du mouvement en fonction des variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

5- On pose les paramètres suivants : $M_1 = M_2 = M$. Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.

Solution N°3 :

1- Système oscillatoire à 2 ddl (x_1, x_2). Le type du couplage :couplage élastique.

2- l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système :

- L'énergie cinétique du système E_c:

$$E_c = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}Kx_2^2$$

- La fonction de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$$

3- Le lagrangien est du système :

La fonction de Lagrange: $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2$$

4- les équations différentielles du mouvement en fonction des variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

Le formalisme Lagrangien :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) + \dfrac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) + \dfrac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_1\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_1\ddot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -Kx_1$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_1} = \alpha\dot{x}_1 - \alpha\dot{x}_2 = \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_2\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_2\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -Kx_2$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_2} = \alpha\dot{x}_2 - \alpha\dot{x}_1 = \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + Kx_1 + \alpha\dot{x}_1 - \alpha\dot{x}_2 = 0 \\ M_2\ddot{x}_2 + Kx_2 + \alpha\dot{x}_2 - \alpha\dot{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + Kx_1 = \alpha\dot{x}_2 \\ M_2\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + Kx_2 = \alpha\dot{x}_1 \end{cases}$$

L'équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{K}{M_1}x_1 = \frac{\alpha}{M_1}\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{M_2}\dot{x}_2 + \frac{K}{M_2}x_2 = \frac{\alpha}{M_2}\dot{x}_1 \end{cases}$$

5- Les nouvelles équations différentielles du mouvement si : $M_1 = M_2 = M$.

$$M_1 = M_2 = M \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + Kx_1 = \alpha\dot{x}_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(1) \\ M\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + Kx_2 = \alpha\dot{x}_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow M(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K(x_1 - x_2) = \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\Rightarrow M(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 2\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K(x_1 - x_2) = 0$$

$$(1) + (2) \Rightarrow M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \alpha(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + K(x_1 + x_2) = \alpha(\dot{x}_2 + \dot{x}_1)$$

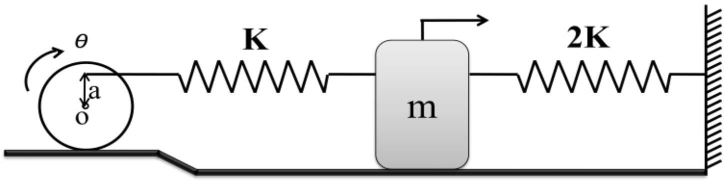
$$\Rightarrow M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + K(x_1 + x_2) = 0$$

On pose : $X_1 = x_1 - x_2 \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{X}_1 = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$
$X_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{X}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{X}_1 + 2\alpha\dot{X}_1 + KX_1 = 0 \\ M\ddot{X}_2 + KX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{X}_1 + \frac{2\alpha}{M}\dot{X}_1 + \frac{K}{M}X_1 = 0 \\ \ddot{X}_2 + \frac{K}{M}X_2 = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice N°4:</u>

Un système mécanique est composé de deux oscillateurs (M, R) et $(m, 2K)$ couplés par un ressort de constante de raideur K se trouvant a une distance a du centre o du disque (voire la figure).



En considéron les oscillations des faibles amplitudes.

1- Donner la ou les équations différentilles du mouvement.

2- Donner la ou les solutions des équations différentilles du mouvement.

On donne $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2 = m$, $a = 1$

<u>Solution N°4 :</u>

1- Les équations différentilles du mouvement :

Le système est à 2 degrés de liberté : $x_m = x_2 \Rightarrow \dot{x}_m = \dot{x}_2$

Le ressort horizontal K relis les deux oscillateurs donc $x_K = x - a\sin\theta$.

- L'énergie cinétique du système E_c:

$$E_c = E_{cm} + E_{cM}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = E_{PK} + E_{P2K}$$

$$E_P = \frac{1}{2}K(x - a\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}(2K)x_2^2$$

La fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K(x - a\sin\theta)^2 - Kx_2^2$$

Les équations de Lagrange sont :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -K(x - a\theta) - 2Kx$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = K a\cos\theta(x - a\sin\theta) = Kax - Ka^2\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + K(x - a\theta) + 2Kx = 0 \\ m\ddot{\theta} + Ka^2\theta - Kax = 0 \end{cases}$$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + 3Kx - K\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ m\ddot{\theta} + K\theta - Kx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{3K}{m}x - \dfrac{K}{m}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{K}{m}\theta - \dfrac{K}{m}x = 0 \end{cases}$$

2- Les solutions des équations différentilles du mouvement :

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \theta(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \end{cases}$$

On remplace dans les équations (1) et (2) donc :

$$\begin{cases} -m\omega^2 x + 3Kx - K\theta = 0 \\ -m\omega^2\theta + K\theta - Kx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3K - m\omega^2)x - K\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ -Kx + (K - m\omega^2)\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3K - m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Les pulsations propres :

Le système admet des solutions non nulles si seulement si le déterminant $\Delta(\omega) = 0$

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 3K - m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Le déterminant $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $\Delta(\omega) = 0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit

$$\Delta(\omega) = (3K - m\omega^2) \times (K - m\omega^2) - K^2 = 0$$

$$\Delta(\omega) = m^2\omega^4 - 4Km\omega^2 + 2K = 0$$

On pose : $\omega^2 = x \Rightarrow \Delta(\omega) = m^2x^2 - 4Kmx + 2K = 0$

$$\Delta(\omega) = 8K^2m^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{(2+\sqrt{2})K}{m} \\ \omega_2^2 = \dfrac{(2-\sqrt{2})K}{m} \end{cases}$$

Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{(2+\sqrt{2})K}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})K}{m}} \end{cases}$$

- Calcul des modes propres :

1[er] mode pour $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{(2+\sqrt{2})K}{m}$ on aura : $(1+\sqrt{2})Kx - K\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1+\sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

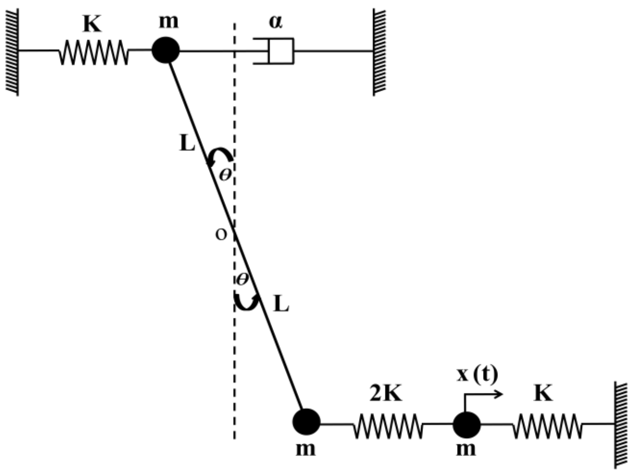
2[eme] mode pour $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{(2-\sqrt{2})K}{m}$ on aura : $(1-\sqrt{2})Kx - K\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1-\sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Donc la solution est :

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta(t) = (1+\sqrt{2})A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + (1-\sqrt{2})B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

<u>Exercice N°5:</u>



Soit les deux sous-systèmes mécanique A et B

Le système mécanique A comprenant une barre horizontale de masse négligeable et de longueur 2L porte en ses extrémités des masses m.

L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient α.

Le système mécanique B est constitué d'un ressort de constante de raideur K relié à une masse ponctuelle m.

Les deux sous-systèmes A et B sont couplés par le ressort 2K. Le nouveau système est repéré à l'instant t par les coordonnées généralisées $\theta(t)$ et $x(t)$ supposées de faibles amplitudes.

1- Quel est le nombre de degré de liberté ? Donner le type du couplage ?

2- Trouvez les équations différentielles du mouvement du système couplé.

3- On néglige l'effet d'amortissement (α =0), écrire les équations du mouvement sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4- Trouvez les valeurs de a, b, c et d.

<u>Solution N°5 :</u>

1- Le nombre de degré de liberté est de 2, couplage élastique.

2- les équations différentielles du mouvement du système couplé :

- L'énergie cinétique du système E_c:

$$E_c = E_{cm} + E_{cm} + E_{cm}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(2mL^2)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = E_{PK} + E_{P2K} + E_{PK} + E_{Pm} + E_{Pm}$$

$$E_P = \frac{1}{2}KL^2\sin\theta^2 + \frac{1}{2}(2K)(x - L\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + mgL\cos\theta - mgL\cos\theta$$

$$E_P = \frac{1}{2}KL^2\sin\theta^2 + \frac{1}{2}(2K)(x - L\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

- La fonction de dissipation :

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}(\alpha L^2)\dot{\theta}^2$$

La fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(2mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K(L\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}Kx^2 - \frac{1}{2}(2K)(x - L\sin\theta)^2$$

Les deux équations de la grange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\dfrac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -Kx + 2x - 2L\sin\theta = -Kx - 2K(x - L\sin\theta)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mL\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mL\ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -KL^2\sin\theta\cos\theta + 2KL\cos\theta(x - L\sin\theta)$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\begin{cases} 2mL\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + KL^2\sin\theta\cos\theta - 2KL\cos\theta(x - L\sin\theta) = 0 \\ m\ddot{x} + Kx + 2K(x - L\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2mL\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + 3KL\theta - 2Kx = 0 \\ m\ddot{x} + 3Kx - 2KL\theta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2mL\ddot{\theta} + 3KL\theta - 2Kx = 0 \\ m\ddot{x} + 3Kx - 2KL\theta = 0 \end{cases}$$

3– Ecrire le système d'équation sous la forme matricielle :

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

$$\begin{cases} \theta(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \\ x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \end{cases}$$

On remplace dans les équations différentielles du mouvement donc :

$$\begin{cases} -2mL\omega^2\theta + 3KL\theta - 2Kx = 0 \\ -2KL\theta - m\omega^2 x + 3Kx = 0 \end{cases}$$

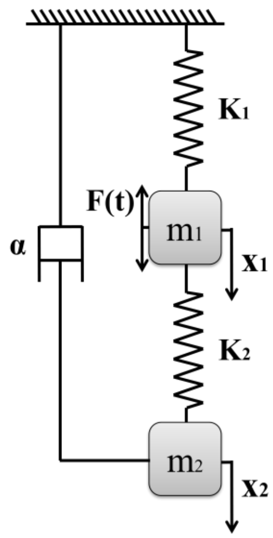
$$\begin{cases} (3KL - 2mL\omega^2)\theta - 2Kx = 0 \\ -2KL\theta + (3K - m\omega^2)x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3KL - 2mL\omega^2 & -2K \\ -2KL & 3K - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4– Les valeurs de a, b, c et d :

$a = 3KL - 2mL\omega^2$, $b = -2KL$, $c = -2K$, $d = 3K - m\omega^2$

Exercice N°7 :



Soit le système mécanique oscillant de la figure ci-contre,

$x_1$et x_2 sont respectivement les positions dynamiques (amplitudes à chaque instant) des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions de repos (d'équilibre). $F(t)$ force excitatrice appliquée en m_1 .

1- Quel est le nombre de degré de liberté ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système.

3- Ecrire les équations différentielles avec : $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2 = K$

4- Trouver les solutions du régime permanant sachant que $F(t) = Ka\cos\Omega t$

5- Si $\alpha = 0$, pour qu'elle valeur de Ω a-t-on résonnance.

Donner dans ce cas la condition pour laquelle la 1ère masse reste immobile.

Solution N°7:

1- Le nombre de degré de liberté est de 2.

2- l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système :

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}K_1x_1^2 + \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

3- Les équations différentielles :

Le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}K_1x_1^2 - \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2$$

avec : $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2 = K$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

Les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F_{x_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + Kx_1 + K(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 - K(x_1 - x_2) + \alpha\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = F(t) \\ m\ddot{x}_2 - Kx_1 + Kx_2 + \alpha\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{2K}{m}x_1 - \dfrac{K}{m}x_2 = F(t) \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{K}{m}x_2 - \dfrac{K}{m}x_1 + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

4- Les solutions du régime permanant :

$$x_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_1}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2\overline{X_1}e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_2}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2\overline{X_2}e^{j\Omega t}$$

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + \dfrac{2k}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & -\Omega^2 + \dfrac{k}{m} + j\Omega\dfrac{\alpha}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ka}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Omega) = \mathbf{0} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\overline{X_1} = \frac{1}{\det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)$$

$$\overline{X_2} = \frac{1}{\det}\left(\frac{k^2}{m^2}\alpha\right)$$

5- Calcul des pulsations pour $\alpha = 0$

$$\det(\Omega) = \mathbf{0} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Omega^4 - \frac{3k}{m}\Omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

L'équation admet deux solutions : $\begin{cases} \omega_1 = \frac{k}{2m}(3-\sqrt{5}) \\ \omega_2 = \frac{k}{2m}(3+\sqrt{5}) \end{cases}$

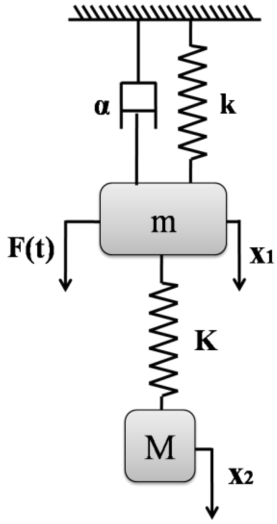
Pour que la masse m_1 est immobile :

$$\overline{X_1} = \frac{1}{\det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right) = 0 \text{ et } \alpha = 0 \Rightarrow -\Omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \ \Rightarrow\ \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Exercice N°8 :

Considérons le système à deux degrés de liberté de la figure ci-contre.

Soient x_1 et x_2 les déplacements conséquents dynamique de m et M par rapport à leurs positions d'équilibres.



1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système.

3- Trouver les solutions du régime permanant sachant que $F(t) = KA\cos\Omega t$

4- Si $\alpha = 0$, pour quelle valeur de Ω le système entre en résonance. Donner dans ce cas la condition pour que la masse m excitée reste immobile ?

Solution N°8:

1- Système oscillatoire à deux degrés de liberté (x_1, x_2), le type du couplage : couplage élastique.

2- l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système :

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$

3- Les équations différentielles :

Le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k+K)x_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2 + Kx_1x_2$$

Les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F_{x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Les équations différentielles du mouvement s'écrivent:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = F \\ -Kx_1 + m\ddot{x}_2 + Kx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 + \frac{(k+K)}{m}x_1 - \frac{K}{m}x_2 = F \\ \ddot{x}_2 + \frac{K}{m}x_2 - \frac{K}{m}x_1 = 0 \end{cases}$$

4- Les solutions du régime permanant :

$$x_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_1} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 \overline{X_1} e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_2} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 \overline{X_2} e^{j\Omega t}$$

$$\overline{X_1} = \frac{F_0}{m}\left[\frac{\Omega^2 - \frac{K}{M}}{\left(\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right) + j\Omega\frac{\alpha}{m}\left(\Omega^2 - \frac{K}{m}\right)}\right]$$

$$\overline{X_2} = -\frac{KF_0}{Mm}\left[\frac{1}{\left(\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right) + j\Omega\frac{\alpha}{m}\left(\Omega^2 - \frac{K}{m}\right)}\right]$$

4- Pour que la masse m_1 est immobile :

$\overline{X_1} = 0$ et $\alpha = 0 \Rightarrow -\Omega^2 + \frac{K}{m} = 0 \Rightarrow \omega_A = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Lorsque la pulsation de la force excitatrice est égale à $\omega_A = \sqrt{\frac{K}{m}}$ la masse m est immobile

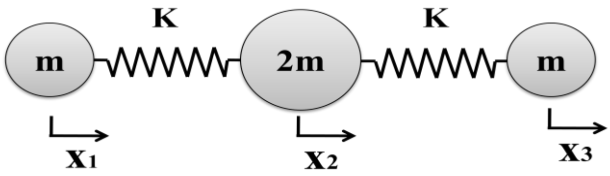
Si on choisit K et M telles que $\frac{k}{m} = \frac{K}{M}$ (c'est-à-dire telles que $\omega_0 = \Omega_A$), la masse m est immobile lorsque la pulsation excitatrice Ω est égale à $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Dans ces conditions, l'ajout de K et M permet d'annuler la vibration de m à cette pulsation.

Un tel dispositif constitue un "étouffeur" dynamique de vibrations.

Exercice N°9 :

On modélise le mouvement d'une molécule triatomique (A-B-A) a un système mécanique constitué par trois masses couplées par deux ressorts identiques de constante de raideur k représenté dans la figure ci-contre.



1- Etablir le Lagrangien du système.

2- Déterminer les équations différentielles du mouvement.

3- En déduire les pulsations propres ainsi la nature du mouvement.

4- Donner la matrice de passage et les solutions générales.

Solution N°9 :

1- Le Lagrangien du système **:**

- L'énergie cinétique E_c :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_3)^2$$

Le Lagrangien s'exprime alors :

$$L = E_c - E_P$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}K(x_2 - x_3)^2$$

2- Les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 + 2Kx_2 - Kx_1 - Kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 + Kx_3 - Kx_2 = 0 \end{cases}$$

3- En déduire les pulsations propres ainsi la nature du mouvement :

On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \\ x_3(t) = A_3\cos(\omega t + \varphi_3) \Rightarrow \ddot{x}_3 = -\omega^2 x_3 \end{cases}$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -m\omega^2 x_1 + Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ -2m\omega^2 x_2 + 2Kx_2 - Kx_1 - Kx_3 = 0 \\ -m\omega^2 x_3 + Kx_3 - Kx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (K - m\omega^2)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 + (2K - 2m\omega^2)x_2 - Kx_3 = 0 \\ Kx_2 + (K - m\omega^2)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} K - m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K - 2m\omega^2 & -K \\ 0 & K & K - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement si : $\det = 0$

$$\det = 0 \Rightarrow (K - m\omega^2)\left[(K - m\omega^2)^2 - K^2\right] = 0$$

Les pulsations propres sont : $\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \\ \omega_2 = 0 \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{2K}{m}} \end{cases}$

4- La matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-La solution générale est :

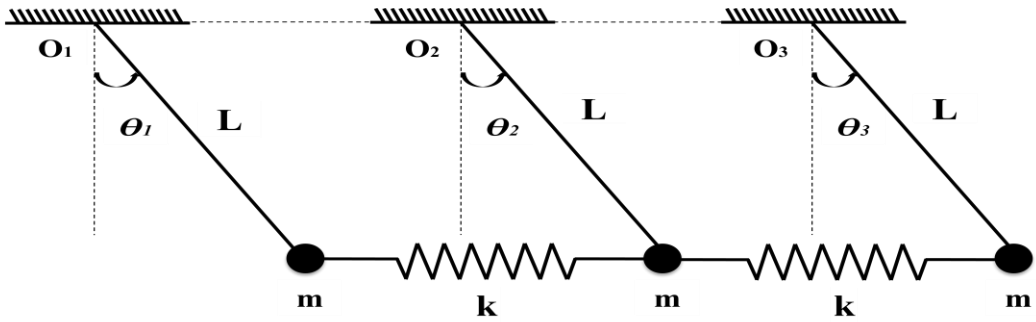
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{pmatrix}$$

<u>Exercice N°10 :</u>

Un système mécanique constitue trois pendules simples identiques, de masses m de longueur L, présentés dans la figure ci-dessous. Les masses sont reliées entre elles par l'intermédiaire de deux ressorts identiques, de raideur k. A l'équilibre, les pendules sont verticaux, les trois masses sont équidistantes sur une même, et les ressorts ont leur longueur naturelle. Le système en mouvement est défini, à l'instant t, par les élongations angulaires θ_1 , θ_2, θ_3 des pendules avec la verticale descendante. On posera les constantes suivantes :

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\Omega_0^2 = \frac{g}{L}$



1- Quel est le nombre de degré de liberté ?

2- Déterminer le Lagrangien du système.

3- Etablir les équations différentielles du second ordre pour les petites oscillations.

4- Déterminer les pulsations propres du système.

5- Calculer les pulsations propres.

<u>Solution N°10:</u>

1- Le nombre de degré de liberté:

Le système a trois degrés de liberté représentés par : θ_1 , θ_2 , θ_3

2- Le Lagrangien du système :

- L'énergie cinétique s'exprime:

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_3^2 = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$$

- L'énergie cinétique E_P:

$$E_P = \frac{1}{2}k\,(L\theta_1 - L\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k\,(L\theta_2 - L\theta_3)^2 - mgL(\,\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Le Lagrangien s'exprime comme suit :

$$L = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \frac{1}{2}k\,(L\theta_1 - L\theta_2)^2 - \frac{1}{2}k\,(L\theta_2 - L\theta_3)^2 + mgL(\,\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

3- L'équation différentielle :

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvement donc on aura trois équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_3}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot\theta_1 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_1 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \\ \ddot\theta_2 + (\Omega_0^2 + 2\omega_0^2)\theta_2 - \omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\theta_3 = 0 \\ \ddot\theta_3 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_3 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

4- Les pulsations propres :

On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

Donc : $\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot\theta_1 = -\omega^2\theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot\theta_2 = -\omega^2\theta_2 \\ \theta_3(t) = A_3 \cos(\omega t + \varphi_3) \Rightarrow \ddot\theta_3 = -\omega^2\theta_3 \end{cases}$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_1 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \\ (-\omega^2 + \Omega_0^2 + 2\omega_0^2)\theta_2 - \omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\theta_3 = 0 \\ (-\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_3 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement : $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

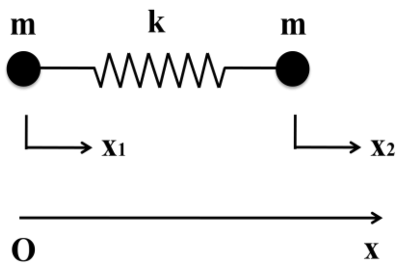
D'où :

$$(-\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)[\omega^4 - (2\Omega_0^2 + 3\omega_0^2)\,\omega^2 + \Omega_0^4 + 3\omega_0^2\Omega_0^2] = 0$$

Les pulsations propres sont : $\begin{cases} \omega_1 = \Omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_0^2} \\ \omega_3 = \sqrt{\Omega_0^2 + 3\omega_0^2} \end{cases}$

V.6 Exercices supplémentaires

<u>Exercice N°1:</u>



Une molécule diatomique est schématisée figure ci-contre.

Ses deux atomes sont identiques et ne peuvent se déplacer que sur l'axe Ox horizontal.

1- Trouver l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

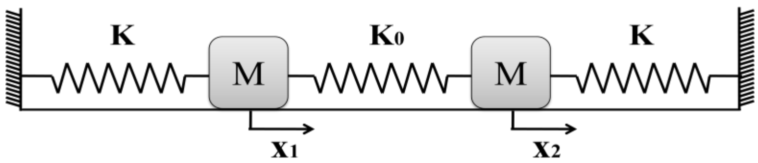
2- Trouver l'équation différentielle du mouvement

3- Calculer les pulsations propres.

4- Calculer les rapports d'amplitudes de chaque mode. Décrire le mouvement des atomes dans chacun des modes.

<u>Exercice N°2 :</u>

Soit le système mécanique représenté sur la figure ci-dessous et composé de deux oscillateurs harmoniques (M, K) couplés par un ressort de constante de raideur K_0. Les deux masses sont supposées se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et leurs élongations par rapport à leurs positions d'équilibre sont repérées par x_1 et x_2.



1- Quel est le nombre de degré de liberté ? donner le type du couplage ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

3- Trouver l'équation différentielle du mouvement et écrire les deux équations sous forme d'une matrice $\mathrm{M}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

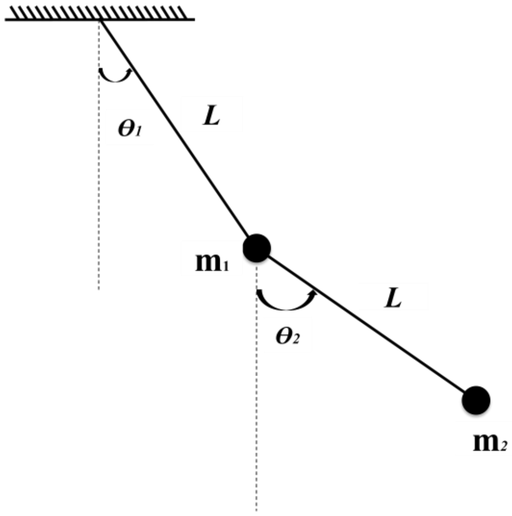
4- Déterminer les pulsations propres du système.

5- Etablir les solutions des équations différentielles du système, dans le cas :

$$\mathrm{x}_1\,(\mathrm{t}=0)=\mathrm{x}_0\,, \mathrm{x}_2\,(\mathrm{t}=0)=0 \text{ et } \dot{\mathrm{x}}_1\,(\mathrm{t}=0)=\dot{\mathrm{x}}_2\,(\mathrm{t}=0)=0$$

<u>Exercice N°3:</u>

Soit le système mécanique, constitué de deux pendules simples de longueur L et de masses m_1, m_2 représentés dans la figure ci contre comme suit :



1- Quel est le nombre de degré de liberté ?

Donner le type du couplage ?

2- Etablir le Lagrangien du système.

3- Donner les équations différentielles du mouvement pour les faibles oscillations.

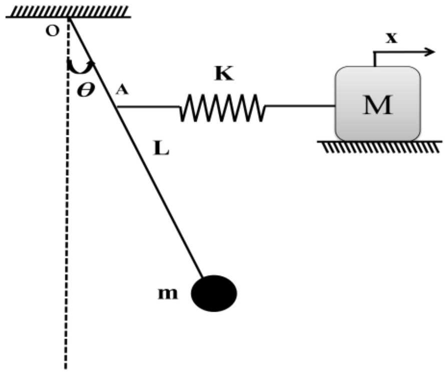
4- On pose les constantes suivantes : $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ et $\mu = \frac{m_1}{m_2}$.

Déterminer dans ce cas les pulsations propres du système ω_1 et ω_2 en fonction des paramètres ω_0 et μ.

5- Déterminer les solutions générales.

<u>Exercice N°4:</u>

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure ci-contre, la masse M glisse sans frottement sur un plan horizontal autour de sa position de repos et entraine par l'intermédiaire d'un ressort de constante K le pendule (de masse ponctuelle m et de longueur L) dans son mouvement. Le ressort horizontal soude à la masse M et en A au pendule relie les deux oscillateurs. ($\overline{OA} = a$)



1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

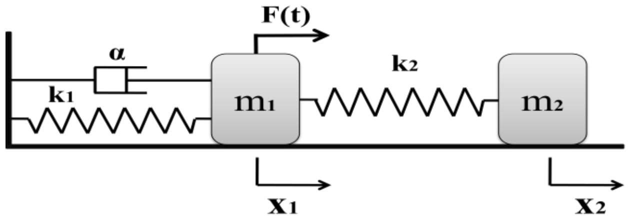
3- Ecrire les équations du mouvement en fonction de x et θ.

4- On prend : $M = m, a = \frac{L}{4}$, $mg = \frac{15}{16}KL, L = 1(m)$. Calculer les pulsations du système et déduire les modes propres.

5- Donner les équations du mouvement x(t) et θ(t).

Exercice N°5 :

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. Sur la masse m_1 agit une force horizontale sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude F_0. Les



déplacements des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibre sont respectivement $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

1- Etablir les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

2- En utilisant les notations complexes, déduire les équations algébriques satisfaites par $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ en régime sinusoïdal permanent.

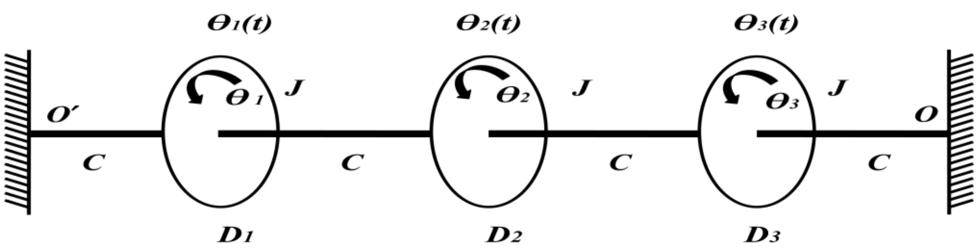
3- En calculant le rapport $\frac{\dot{x}_1(t)}{\dot{x}_2(t)}$, montrer que le mouvement des masses m_1 et m_2, ne peuvent être qu'en phase ou en opposition de phase. Déterminer les pulsations pour lesquelles $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ sont en phase.

Exercice N°6 :

Sur un arbre OO' horizontal et fixe, de masse négligeable, encastré à ses extrémités O et O', sont fixés trois disques $(D_1), (D_2)$ et (D_3) de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 et de même moment d'inertie J par rapport à leur axe commun OO'. On désignera $\theta_1(t)$ $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$, les angles angulaires de rotation de chacun des trois disques par rapport à leur position de repos. voire la figure ci-dessous.

Les quatre partis O_1O_2, O_1O_2, O_2O_3de et O_3O'de l'arbre ont même constante de torsion *C*.

On posera la constante : $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$



1- Déterminer le Lagrangien de ce système.

2- Etablir les équations différentielles du second ordre vérifiées par les angles

$\theta_1(t)$,$\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$.

3- En déduire les trois pulsations propres ω_1, ω_2 et ω_3 de ce système en fonction de ω_0.

4- Calculer l'énergie mécanique totale E de cette chaîne de trois disques, pour chacun des modes propres, en fonction de C et de l'amplitude angulaire θ_1 du disque D_1.

5- On applique au seul disque D_1 un couple moteur de moment sinusoïdal, de pulsation ω et d'amplitude Γ_0. $\Gamma = \Gamma_0 \cos\omega t$.

-Etablir en fonction du paramètre $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, les amplitudes angulaires A_1, A_2 et A_3 de chacun des disques en régime forcé.

-Pour quelles valeurs de X ce système est-il en résonance ?

Références bibliographie

Références bibliographiques

- H. Lumbroso, « Ondes Mécaniques et Sonores », Edition Dunod, ISBN 2-10- 00468-8, 2000.
- J. Bruneaux, « Vibrations, ondes » , Ellipses éditions, Paris , 2008.
- R.N. Chaudhuri, «Waves and Oscillations, second edition», new age international publishers, ISBN (13): 978-81-224-2842-1.
- B. Crowell, « Vibrations and Waves », ISBN 0-9704670-3-6, California, 2006.
- George C.King, « Vibrations and waves », Wiley, This edition first published, 2009.
- G. Landsberg, « Vibrations et Ondes, Optique», Edition Mir Moscou, ISBN 5-03-000128-X, 1988.
- M. Tamine, O. Lamrous, « vibrations et ondes », edition opu ISBN 1-02-3698, 1993.
- T. Becherrawy, « Vibrations, ondes et optique », Hermes science, Éditions Lavoisier, Tome4, Paris, 2010.
- M. Balkanski, C. Sebene, « Ondes et phénomènes vibratoires », Edition Dunod, 1973.
- J. Bruneaux, Vibrations ondes, ellipses, 2008.
- C. Gruber, W. Benoit, « Mécanique Générale», Edition presses polytechnique et universitaires romandes, ISBN 2-88074-305-2, 1998.
- H. Djelouah , « Vibration et ondes, manuel de cours », Université des sciences et technologies Houari Boumediene, 2006-2007.
- N. Aklouche, « Cours de Physique 3 (Partie Vibrations) », Polycopié de l'université FerhatAbbas – Sétif, 2012.