

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran

Mohamed Boudiaf



Faculté d'Architecture et de Génie Civil

Département de Génie Civil

Polycopié

Théorie de la plasticité

Préparé et présenté par

Dr. BABA HAMED Fatima Zohra

Année universitaire 2020 - 2021

Préface

La connaissance des propriétés du tenseur des contraintes et celui des déformations, est insuffisante pour résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus, c'est-à-dire déterminer ces tenseurs en chaque point d'un milieu soumis à des sollicitations diverses : forces, température etc...

Il est donc nécessaire de rattacher les contraintes aux déformations par des relations représentatives du comportement physique du matériau. Les relations qui lient les contraintes aux déformations sont appelées lois de comportement. Les lois correspondantes qui aboutissent à l'élaboration de modèles mathématiques, exigent des études expérimentales préalables pour la caractérisation du matériau et la détermination de son comportement rhéologique.

En fonction des conditions de chargement, un matériau peut se trouver dans différents états mécaniques. Pour de petites forces extérieures le matériau travaille élastiquement, on dit alors qu'il est dans l'état élastique. Pour des forces plus grandes, il apparaît des déformations permanentes (irréversibles) notables, le matériau se trouve dans l'état plastique, puis se forment des criques locales et intervient l'état de rupture.

L'état mécanique d'un matériau en un point dépend en premier lieu de l'état des contraintes en ce point, bien que ce dernier ne le détermine pas complètement. Ainsi lorsque la température intervient, le facteur temps agit notablement sur l'état mécanique du matériau. L'état mécanique d'un matériau est quelque peu influencé par l'état du matériau aux points voisins.

Enfin, ce qui est le plus important, la notion elle-même d'état mécanique en un point n'est pas exempte de contradiction vis-à-vis de l'hypothèse de continuité. Celle-ci étant admise en élasticité comme en plasticité. Ce polycopié s'adresse aux étudiants de première année Master en Travaux Publics option voie et ouvrage d'art.

Il est rédigé de manière à attirer l'attention du lecteur sur les applications pratiques du sujet traité.

Le polycopié est divisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre présente un rappel sur la mécanique des milieux continus.

Le deuxième chapitre dédié aux essais mécaniques et modèles rhéologiques, est une rapide introduction des phénomènes physiques. J'y présente les mécanismes de déformations, les techniques d'essais et quelques modèles rhéologiques.

Le troisième chapitre concerne les critères de plasticité. Je développe dans cette partie la notion de critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique, permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou si elle reste dans le domaine élastique.

Le quatrième chapitre aborde la plasticité des barres et s'intéresse à l'évolution élasto-plastique des structures treillis constituées de barres. J'y introduis des notions importantes : critère de plasticité, condition de charge, méthodes itératives de résolution et projection sur le critère à partir d'exemples simples traités.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à la plasticité des poutres à travers l'évolution élasto-plastique de ces dernières. Après avoir présenté un modèle élasto-plastique pour des essais de flexion, j'introduis la notion de rotule plastique. Ce modèle simplifié est utilisé pour le calcul des charges limites des portiques.

Tables des matières

Tables des matières

Chapitre I : Rappels sur la mécanique des milieux continus.....	09
I.1 Introduction.....	10
I.2 Rappels sur l'état de contrainte.....	10
I.3 Rappels sur l'état de déformation.....	13
I.4 Relations entre contraintes et déformations.....	15
Chapitre II : Les essais mécaniques et modèles rhéologiques.....	16
II.1 Notions générales.....	17
II.2 Les essais mécaniques.....	18
II. 3 Modèles rhéologiques.....	23
II.4 Elasticité parfaite	25
II.5 Viscosité parfaite	26
II.6 Viscoélasticité.....	26
II .7 Modèles non linéaires.....	27
II .8 Choix des lois de comportement.....	29
II.9 Applications.....	31
II .7 Modèles non linéaires.....	46
Chapitre III : Critères de plasticité.....	34
III.1 Introduction	35
III. 2 Critères de plasticité.....	35
III. 3 Lois d'écrouissage.....	43
III. 4 Lois d'écoulement	47
III.5 Applications.....	48
Chapitre IV : Plasticité des barres.....	58
IV .1 Introduction	59
IV.2 Essai de traction.....	59
IV.3 Modélisation du comportement en traction–compression.....	62

IV.4 Lois d'écoulement plastiques	64
IV.5 Application.....	67
IV.6 Application numérique.....	76
Chapitre V : Plasticité des poutres.....	83
V.1 Introduction	84
V.2 Flexion plastique	84
V.3 Calcul du moment plastique M_{pl}	87
V.4 Notion de rotule plastique	93
IV.5 Diagramme moment- courbure.....	94
V.5 Application.....	97
Références bibliographiques.....	103

Liste des figures

Figure I.1 : Composantes des vecteurs contraintes sur les faces d'un cube.....	10
Figure I.2 : Etat de déformation dans une base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$	13
Figure II.1 : Mouvement d'une dislocation sous cisaillement le long d'un plan de glissement..	17
Figure II.2 : L'évolution des contraintes dans l'essai d'écroutissage en traction ou compression simple.....	19
Figure II.3 : L'évolution des contraintes dans l'essai de fluage en traction ou compression simple.....	19
Figure II.4 : L'évolution des contraintes dans l'essai de relaxation en traction ou compression simple.....	20
Figure II.5 : Les contraintes exercées dans l'essai biaxiale.....	20
Figure II.6 : Les contraintes exercées dans l'essai traction-torsion	21
Figure II.7 : Ressort : Elasticité linéaire parfaite $\sigma = E \varepsilon$	24
Figure II.8 : Amortisseur : viscosité linéaire newtonienne $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$	24
Figure II.9 : Patin : modèle rigide plastique parfait $ \sigma \leq \sigma_s$	25
Figure II.10 : Elasticité parfaite.....	26
Figure II.11 : Viscosité parfaite.....	26
Figure II.12: Modèle de Maxwell.....	27
Figure II.13 : Modèle de Kelvin-Voigt.....	27
Figure II.14 : Solide rigide parfaitement plastique RPP.....	28
Figure II.15 : Solide élastique linéaire parfaitement plastique EPP.....	28
Figure II.17 : Solide élasto-plastique avec écroutissage EPE.....	29
Figure III.1 : Critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales	36
Figure III.2 : Critère de Von Mises dans l'espace des contraintes principales.....	38
Figure III.3 : Représentation graphique des critères de Tresca (en pointillés) et de Von Mises dans le plan des contraintes principales (σ_I, σ_{II})	38
Figure III.4 : Représentation du critère Mohr-Coulomb à l'aide du cercle de Mohr en trois dimensions.....	39

Figure III.5 : Critère de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes principales.....	40
Figure III.7 : Critère de Drucker et Prager dans l'espace des contraintes principales.....	41
Figure III.8 : Représentation graphique des critères de Mohr – Coulomb et de Drucker-Prager dans le plan des contraintes principales (σ_I, σ_{II}).....	43
Figure III. 9. a : Ecouissage isotope.....	45
Figure III. 9. b: Limite élastique actuelle en fonction de ϵ_P	45
Figure III. 10: Ecouissage cinématique.....	47
Figure IV.1: Éprouvette de traction.....	59
Figure IV.2: Traction avec décharge.....	60
Figure IV .3: Réponse à une série decharges-décharges consécutives	60
Figure IV .4: Historique d'un cycle de chargement OA-AB-BC.....	61
Figure IV .5 : Modèle d'écouissage multi-linéaire.....	62
Figure IV .6: hypothèse d'écouissage isotope(dilatation homothétique du domaine d'élasticité).....	63
Figure IV .7: hypothèse d'écouissage cinématique (translation sans déformation du domaine d'élasticité initial).....	63
Figure IV .9: incrément purement élastique.....	65
Figure IV .10 : Incrément élasto-plastique.....	66
Figure V.1: Poutre simple chargé par une charge concentré à mi travée.....	84
Figure V.2: Diagramme moment-courbure pour une poutre fléchie.....	86
Figure V.3: Diagramme du moment courbure d'une poutre en flexion.....	86
Figure V.4: Evolution des allongements et des contraintes.....	87
Figure V.5 : Répartition des contraintes dans une section plastifiée.....	88
Figure V.6 Diagramme bi-triangulaire des contraintes.....	90
Figure V.7 Diagramme bi-rectangulaire des contraintes.....	90
Figure V.8 : Principe du fonctionnement de la rotule plastique.....	94
Figure V.9 : Tronçon de poutre fléchie.....	95
Figure V.10 : Diagramme de contraintes élastique-plastique.....	96

Chapitre I

Rappels sur la mécanique des milieux continus

I.1 Introduction

La Mécanique des Milieux Continus a pour objet de définir les lois qui régissent le comportement de tous les milieux qui respectent l'hypothèse de continuité.

I.2 Rappels sur l'état de contrainte

I.2.1 Base principale - Invariants

L'état de contrainte dans un domaine matériel est un état tensoriel.

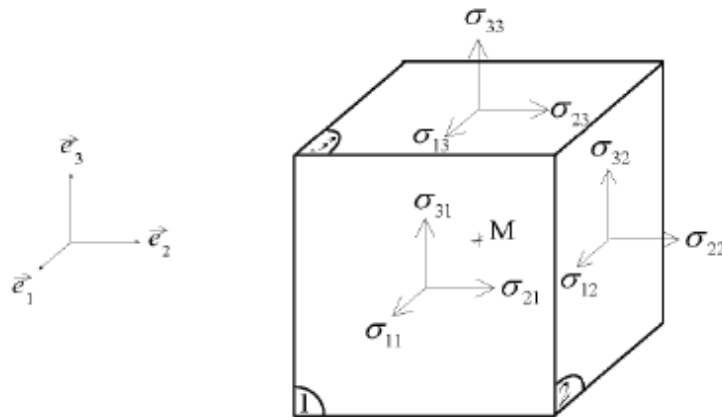


Figure I.1 : Composantes des vecteurs contraintes sur les faces d'un cube

Dans une base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ (figure I.1), le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3) \quad (I.1)$$

Il existe un système d'axes particulier qui représente les "directions propres" de la matrice. Ce repère est appelé le repère principal des contraintes $(\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III})$. Dans cette base

la matrice représentant l'état de contrainte prend une forme diagonale :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} (\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III}) \quad (\text{I.2})$$

La détermination des contraintes principales passe par la diagonalisation de la matrice des contraintes. On doit ainsi rechercher les solutions de l'équation :

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (\text{I.3})$$

Quelque soit le système de référence $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ choisit, on doit trouver les mêmes valeurs de contraintes principales. En conséquence les quantités I_1 , I_2 et I_3 ne doivent pas dépendre du système d'axes. Ce sont les invariants du tenseur des contraintes :

Trace du tenseur des contraintes

$$I_1 = \begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Somme des cofacteurs des termes de la diagonale

$$I_2 = \begin{cases} -(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2) = -\frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ik}^2) \\ -(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I) \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Déterminant de la matrice des contraintes

$$I_3 = \begin{cases} \det(\underline{\underline{\sigma}}_{ij}) \\ \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

I.2.2 Tenseur déviateur des contraintes

Il est toujours possible de mettre le tenseur des contraintes sous la forme d'une somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur de trace nulle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_m \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \quad \begin{cases} \text{tr}(\underline{\underline{s}}) = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}_m = \frac{I_1}{3} \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

$\underline{\underline{\sigma}}_m \underline{\underline{I}}$ est le tenseur hydrostatique.

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur déviateur des contraintes.

On a bien évidemment :

$$\underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_1 = \text{tr}(\underline{\underline{s}}) = 0 \quad (\text{I.8})$$

Pour décrire un comportement plastique, on utilise souvent le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes :

$$J_2 = -\frac{1}{2} (s_{ii} s_{kk} - s_{ik}^2) = \frac{1}{2} s_{ik} s_{ik} \quad (\text{I.9})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2) \quad (\text{I.10})$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] \quad (\text{I.11})$$

On définit la contrainte octaédrale par la relation :

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} \quad (\text{I.12})$$

$$\text{On a donc la relation :} \quad J_2 = \frac{3}{2} \tau_{oct}^2 \quad (\text{I.13})$$

I.2.3 Exemples de tenseurs de contrainte

Traction :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{S} \end{pmatrix}$$

Cisaillement:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{F}{S} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{F}{S} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pression Hydrostatique:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

I.3 Rappels sur l'état de déformation

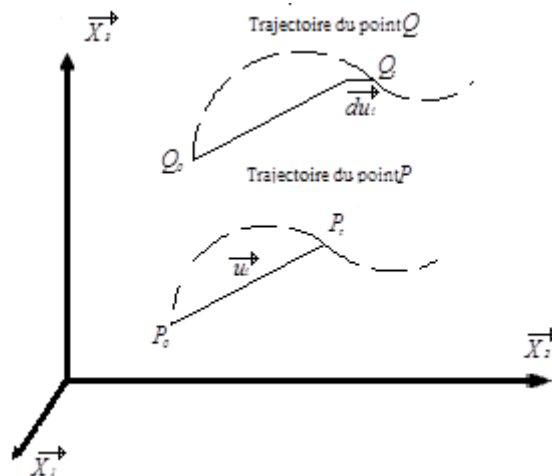


Figure I.2 : Etat de déformation dans une base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$

Le domaine est décrit (figure I.2), à l'état de référence par les coordonnées a_i à l'instant $t=0$:

$$\vec{OP}_0 = a_i \vec{X}_i \quad (\text{I.15})$$

L'état actuel est caractérisé (figure I.2), par les variables de position x_i à l'instant t :

$$\vec{OP}_t = x_i \vec{X}_i \quad (\text{I.16})$$

Le déplacement est alors donné par le champ vectoriel

$$\vec{U}(P_0) = \vec{P}_0 P_t \quad (\text{I.17})$$

Au voisinage du point P_t , on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_0 \vec{Q}_0 = da_i \vec{X}_i \\ \vec{U}(Q_0) = \vec{Q}_0 \vec{Q}_t = \vec{U}(a_i + da_i) = \vec{U}(P_0) + d\vec{U} \\ d\vec{U} = du_i \vec{X}_i \\ du_i = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} da_j \end{array} \right. \quad (\text{I.18})$$

Ce qui nous donne :

$$d\vec{U} = \overline{\overline{\text{grad}(\vec{U})}} \vec{P}_0 \vec{Q}_0 \quad (\text{I.19})$$

Relation que l'on peut encore écrire :

$$d\vec{U} = \overline{\overline{r}} \vec{P}_0 \vec{Q}_0 + \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{P}_0 \vec{Q}_0 \quad (\text{I.20})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\text{grad}(\vec{U})}} + \overline{\overline{\text{grad}(\vec{U})}}^T \\ \overline{\overline{r}} = \overline{\overline{\text{grad}(\vec{U})}} - \overline{\overline{\text{grad}(\vec{U})}}^T \end{array} \right. \quad (\text{I.21})$$

Dans le cas d'un repère cartésien, on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \\ r_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

I.4 Relations entre contraintes et déformations

Ces relations traduisent la loi de comportement du matériau employé. Comme il n'existe pas une relation universelle, chacune des expressions données est déterminée dans un domaine d'emploi bien défini. Ce domaine peut être défini par de nombreux paramètres (temps, contraintes, température ...).

La première relation étudiée dans un cours de mécanique des milieux continus est la relation de l'élasticité linéaire, encore appelée "loi de Hooke". Cette relation représente une proportionnalité entre l'état de contrainte et l'état de déformation. Dans le cas d'un matériau homogène isotrope, on a :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \mu \sigma - \frac{\nu}{E} 3\sigma_m \bar{I} \quad (\text{I.23})$$

Cette relation n'est valable que pour un état de sollicitation faible.

Chapitre II

Les essais mécaniques et modèles rhéologiques

II.1 Notions générales

Le comportement microscopique est le résultat de déformations locales à une échelle microscopique. Cet aspect microscopique relève du domaine des matériaux. Les concepts sur la modélisation qui nous concernent porteront donc à l'échelle macroscopique pour traduire le comportement global irréversible des comportements inélastiques.

Dans un premier temps, rappelons le vocabulaire relatif aux phénomènes observés et aux principales techniques d'essai.

Phénomènes observés

Les différents phénomènes observés peuvent être classifiés comme suit :

Déformations élastiques — Elles correspondent à des variations des espaces interatomiques et à des mouvements réversibles de dislocations. Ces déformations sont essentiellement instantanément réversibles et la configuration initiale est retrouvée après décharge.

Dislocation : défaut dans la structure du réseau cristallin. Dans les matériaux fragiles, ces défauts sont des microfissures. Dans les matériaux ductiles, ce sont des dislocations, c'est à dire des lacunes du réseau atomique de base (figure II.1).

Le nombre de dislocations augmente lorsque l'on charge le matériau.

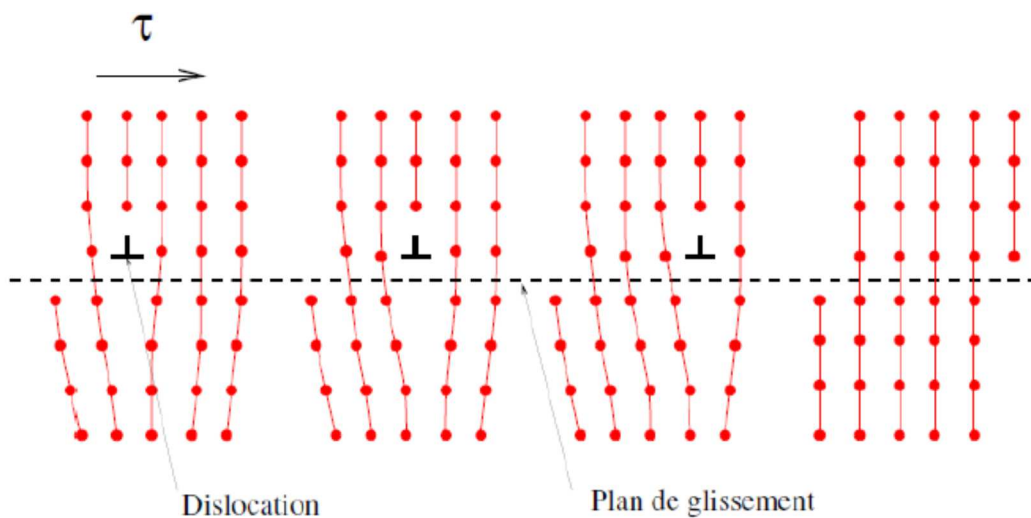


Figure II.1 : Mouvement d'une dislocation sous cisaillement le long d'un plan de glissement.

Déformations visqueuses— Elles correspondent à la poursuite de la déformation alors que la charge est constante, il n’y a plus d’équilibre. Le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les lois de comportement d’un matériau visqueux. Lors de ce phénomène favorisé par l’activation thermique, on parle d’écoulement de fluage.

Déformations permanentes — Elles correspondent aux mouvements irréversibles des dislocations. Ces déplacements se font par glissement dans les plans cristallographiques. En pratique ces déplacements ne modifient pas la structure cristalline et le volume reste inchangé, on parle d’incompressibilité plastique

Plan cristallographique : plan de plus grande densité d’atomes

Écrouissage — Ce phénomène aussi appelé consolidation correspond à une augmentation du nombre de point de blocage du mouvement des dislocations. Il vient contrecarrer l’augmentation du nombre de dislocations, et modifie le seuil au-delà duquel les déformations ne sont plus réversibles.

II.2 Les essais mécaniques

Les essais ont pour objectif de procurer à l’ingénieur les caractéristiques mécaniques du matériau dont il a besoin pour mener à bien ces études.

Les essais effectués n’ont pour but que de trouver une relation entre les déformations que subit une éprouvette sous l’action de charge données.

II.2.1 Essais mécaniques uniaxiaux

L’essai d’écrouissage en traction ou compression simple :

Dans L’essai d’écrouissage en traction ou compression simple, la déformation ε est imposée à vitesse constante (figure II.2).

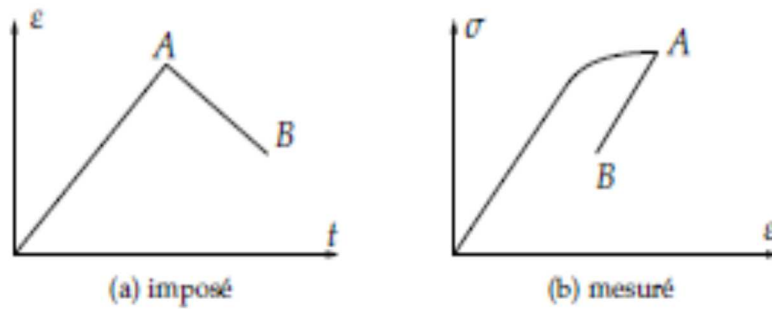


Figure II.2 : L'évolution des contraintes dans l'essai d'érouissage en traction ou compression simple

L'essai de fluage en traction ou compression simples

Le fluage d'un matériau se produit à haute température et correspond à un régime de déformation lente, sous charge constante, la contrainte étant potentiellement inférieure à la limite d'élasticité. On étudie le comportement de l'éprouvette lorsque la contrainte appliquée est maintenue constante. L'évolution de la déformation permet de caractériser le durcissement et la viscosité du matériau (figure II.3)

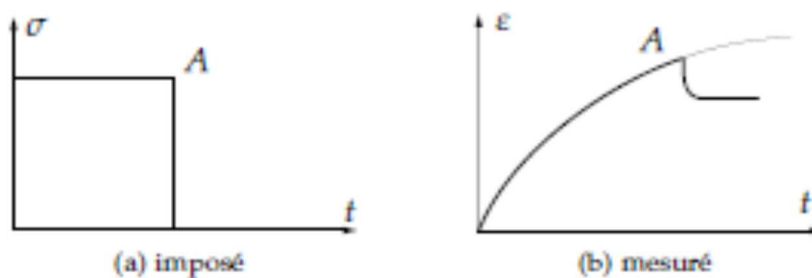


Figure II.3 : L'évolution des contraintes dans l'essai de fluage en traction ou compression simple

L'essai de relaxation en traction ou compression simple :

Dans cet essai, on étudie l'évolution des contraintes en imposant une déformation constante (figure II.4).

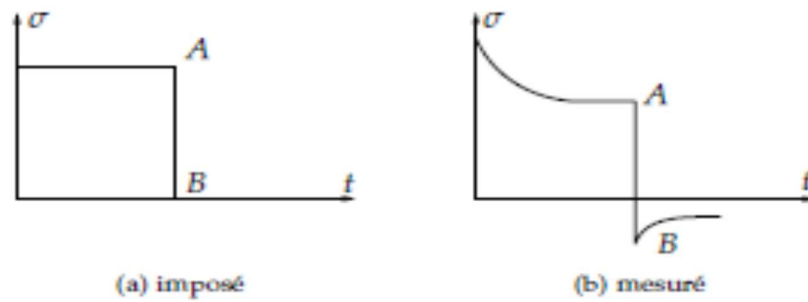


Figure II.4 : L'évolution des contraintes dans l'essai de relaxation en traction ou compression simple

II.2.2 Essais multiaxiaux

Les essais multiaxiaux apportent une information précieuse pour tester les modèles de déformation, mais ils sont malheureusement peu pratiqués en raison des difficultés expérimentales. Les essais possibles, classiquement, sont les essais de traction (ou compression) - torsion, les essais de traction biaxiale et les essais de compression triaxiale.

Traction biaxiale

Les essais de traction biaxiale consistent à exercer une contrainte dans deux directions perpendiculaires sur une même éprouvette (figure II.5).

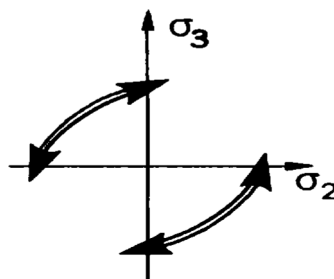


Figure II.5 : Les contraintes exercées dans l'essai biaxiale

Traction-torsion

Ce type d'essai permet d'étudier des trajets de chargement avec modification des directions principales des contraintes (figure II.6).

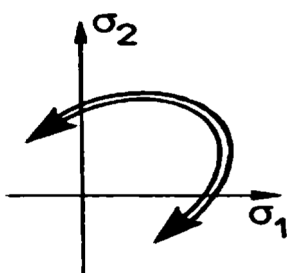


Figure II.6 : Les contraintes exercées dans l'essai traction-torsion

II.2.3 Essais d'indentation

Les essais d'indentation évaluent la "dureté" du matériau en mesurant la pression de contact pendant l'enfoncement d'un indenteur (pyramidal, conique ou sphérique). La dureté est calculée soit après l'essai, par mesure de la surface de l'empreinte, soit pendant l'essai, par mesure de l'enfoncement de l'indenteur, dans les deux cas en fonction de la charge appliquée.

II.2.4 Essais de fatigue

La fatigue est un endommagement structural, progressif et localisé qui se produit quand un matériau est sollicité cycliquement à des niveaux de contrainte inférieurs voire bien inférieurs à sa contrainte à rupture quasistatique.

Les essais de fatigue caractérisent la capacité d'un matériau à résister à une sollicitation cyclique.

Si le nombre de cycles est petit, on parlera de fatigue oligocyclique. Il existe plusieurs modes de sollicitations possibles : flexion, efforts axiaux (traction et/ou compression) et torsion, et des modes combinés, statiques et dynamiques (torsion / flexion, tension / torsion, etc.).

II.2.5 Caractérisation de la rupture

Le phénomène de rupture est un événement dont la prise en compte est d'importance cruciale, de toute évidence, pour les problèmes liés à la sécurité des constructions. Il est donc important de pouvoir la caractériser expérimentalement de façon satisfaisante. Il existe deux types de rupture : ductile ou fragile, selon que le matériau présente ou non un phénomène de plasticité accompagnant la rupture. La transition ductile fragile - quand elle existe - peut être caractérisée par des essais de résilience, que l'on s'attachera à présenter tout d'abord. Par ailleurs, un autre type d'essais permet d'étudier finement la propagation d'une fissure : ce sont les mesures de ténacité, qui seront introduites dans une deuxième section.

Essais de résilience

Les essais de résilience permettent de caractériser la fragilisation d'un matériau. Ils consistent à rompre une éprouvette entaillée (l'entaille a pour but de fragiliser le matériau)

Mesure de ténacité

La ténacité est une grandeur qui caractérise la résistance à la propagation brutale de fissure d'un matériau. la méthode la plus utilisée consiste à effectuer un essai de traction sur une éprouvette entaillée, et pré-fissurée en fatigue au fond de l'entaille.

II.2.6 Contrôle non destructif

Ces techniques ont pour but de détecter la présence de défauts au sein des structures sans avoir à pratiquer dessus des tests qui entraînent la ruine du matériau : elles sont donc essentielles pour le suivi en service. Elles sont particulièrement utilisées dans les secteurs sensibles à la sécurité comme l'industrie aéronautique, l'industrie navale, l'énergie, les ouvrages d'art...

Il existe plusieurs types de techniques permettant le CND :

Radiographie X et γ

Cette technique est analogue à celle utilisée en médecine pour réaliser une radiographie des os : un rayonnement électromagnétique traverse l'élément à contrôler et il est d'autant plus absorbé qu'il y a de matière sur son trajet ; les fissures apparaissent alors en transmettant plus de rayonnement que les zones non endommagées.

Ultrasons

Cette technique est encore une fois analogue à une technique utilisée dans le milieu médical : l'échographie. Elle consiste à envoyer dans la pièce un train d'ondes élastiques qui vont se trouver reflétées par les défauts. Contrairement aux techniques radiographiques, cette technique permet de mieux détecter les défauts orientés perpendiculairement au front de propagation des ondes ultrasonores. Elle permet également de mesurer la profondeur du défaut par le temps de propagation du signal, ce qui permet de dresser une carte tridimensionnelle de la localisation des défauts. La résolution de la technique dépend de l'épaisseur de la pièce à caractériser et varie d'une fraction de millimètre pour les pièces d'épaisseur supérieure au décimètre, à quelques dizaines de microns pour des pièces de quelques millimètres d'épaisseur.

II. 3 Modèles rhéologiques

Un modèle rhéologique est un modèle utilisé pour modéliser le comportement d'un matériau, c'est à-dire pour simuler sa réponse à une sollicitation mécanique.

Les résultats d'essais ne présentent un intérêt que si l'on peut modéliser le comportement du matériau. Cette modélisation, nécessaire pour le calcul prévisionnel. On peut ainsi définir un modèle mathématique sous forme d'équations.

Les règles de calcul sont les suivantes :

Dans une association en parallèle, la contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contraintes imposées à chaque branche et la déformation subie par l'ensemble est égale aux déformations subies par chacune des branches, ces dernières déformations étant toutes identiques.

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \quad \varepsilon = \varepsilon_i$$

Dans une association en série, la contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément et la déformation subie par l'ensemble est la somme des déformations subies par chaque élément.

$$\sigma = \sigma_i \quad \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$$

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements «de base», qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité.

1. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge (figure II.7).

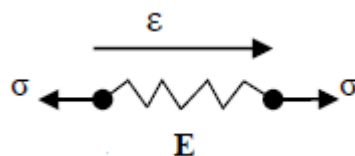


Figure II.7 : Ressort : Elasticité linéaire parfaite $\sigma = E \varepsilon$

2. L'amortisseur, qui schématise la viscosité (figure II.8),

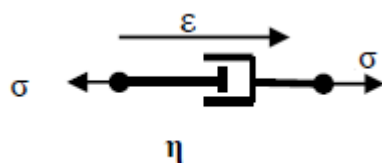


Figure II.8 : Amortisseur : viscosité linéaire newtonienne $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$

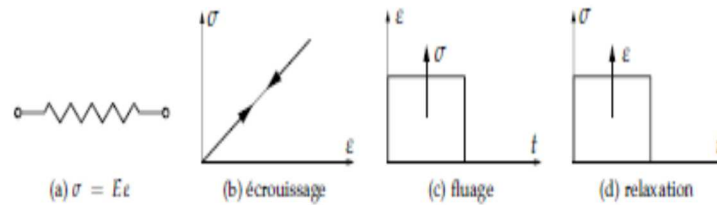


Figure II.10 : Elasticité parfaite

II.5 Viscosité parfaite

Dans ce cas, les contraintes dépendent seulement de la variation temporelle des déformations tel que $\sigma = f(\dot{\epsilon})$. Les différentes relations contraintes-déformations sont illustrées sur la figure II.11.

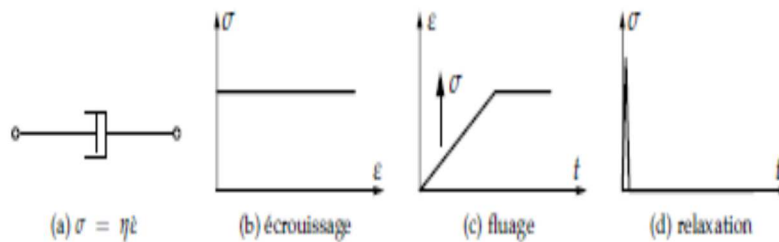


Figure II.11 : Viscosité parfaite

II.6 Viscoélasticité

Il existe différents modèles. Les deux plus simples sont constitués d'un montage en série ou en parallèle.

II.6.1 Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est décrit sur la figure II.12.

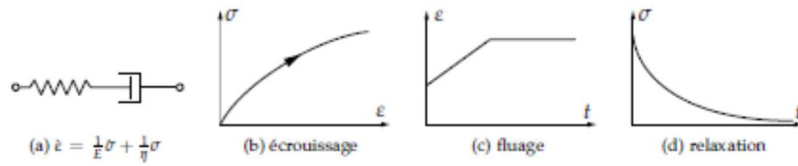


Figure II.12: Modèle de Maxwell

II.6.2 Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle est décrit sur la figure II.13.

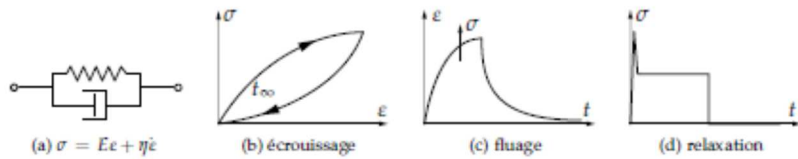


Figure II.13 : Modèle de Kelvin-Voigt

II .7 Modèles non linéaires

La non-linéarité peut venir du comportement du ressort ou de l'amortisseur et l'introduction d'un patin, par exemple. Toute combinaison comportant un élément non linéaire aura un comportement non linéaire. Nous nous intéressons ici au non linéarité caractérisant la plasticité (patin). Sur les figures II.14, II.15, II.16, et II.17 sont représentées les allures de la courbe de réponse à l'essai d'écroutissage pour les modèles que nous rencontrerons par la suite.

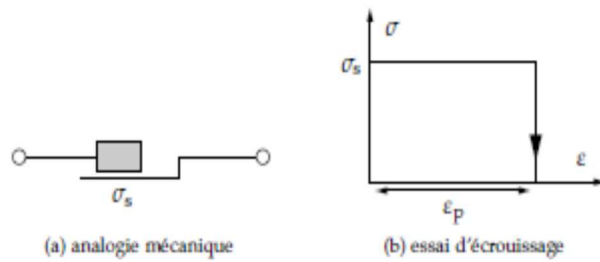


Figure II.14 : Solide rigide parfaitement plastique RPP

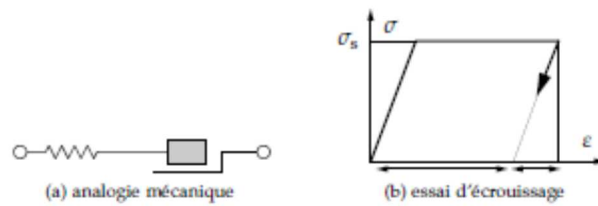


Figure II.15 : Solide élastique linéaire parfaitement plastique EPP

Ce type de comportement permet de traiter des problèmes d'analyse limite (ruine d'une structure par rotule plastique ...)

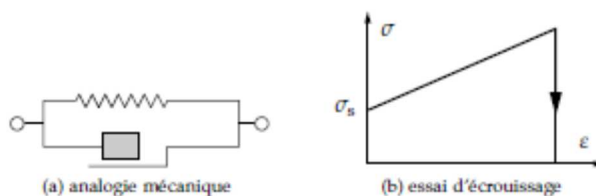


Figure II.16 : Solide rigide plastique avec érouissage RPE

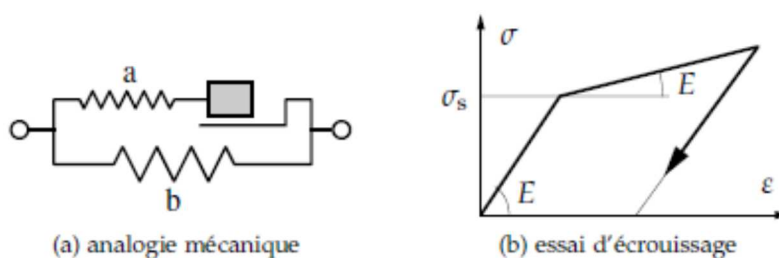


Figure II.17 : Solide élasto-plastique avec érouissage EPE

II.8 Choix des lois de comportement

a-Comportements viscoélastique :

Pour les polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion,

Pour les verres au voisinage de la température de transition,

Pour les bétons frais.

b-Comportements rigides-parfaitement plastiques :

Pour l'étude des sols,

Pour l'analyse limite,

Pour la mise en forme des métaux.

c-Comportements plastiques :

Pour les métaux à des températures inférieures au quart de la température de fusion,

Pour les sols et roches.

d-Comportements viscoplastiques

Pour les métaux à moyenne et haute température,

Pour le bois, les sols (dont le sel),

Pour les céramiques à très haute température.

Il faut noter que chacun de ces types de modèles est approché, et que le choix de l'une ou l'autre modélisation du comportement va dépendre de l'application visée. Ainsi un acier à température ambiante peut être considéré comme élastique linéaire pour le calcul des flèches d'une structure mécanique, viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations, rigide-parfaitement plastique pour un calcul de charge limite, élasto-viscoplastique pour l'étude de contraintes résiduelles,

Un polymère peut être considéré comme un solide pour un problème de choc, et comme un fluide pour l'étude de sa stabilité sur de longues durées.

II.9 Applications

Exercice 1

Déterminer l'allongement d'une tige d'acier de longueur $l = 2$ m soumise à une contrainte normale de traction de $\sigma = 120$ MPa. Considérez l'acier comme un matériau linéairement élastique régi par la loi de Hooke.

$$E = 210000 \text{ MPa.}$$

Solution

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{120}{210000} \rightarrow \varepsilon_x = 5,7143 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon_x \cdot l$$

$$\Delta l = 5,7143 \cdot 10^{-4} \cdot 2$$

$$\Delta l = 1,1429 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,14 \text{ mm}$$

L'allongement résultant de la tige d'acier est de **1,14 mm**.

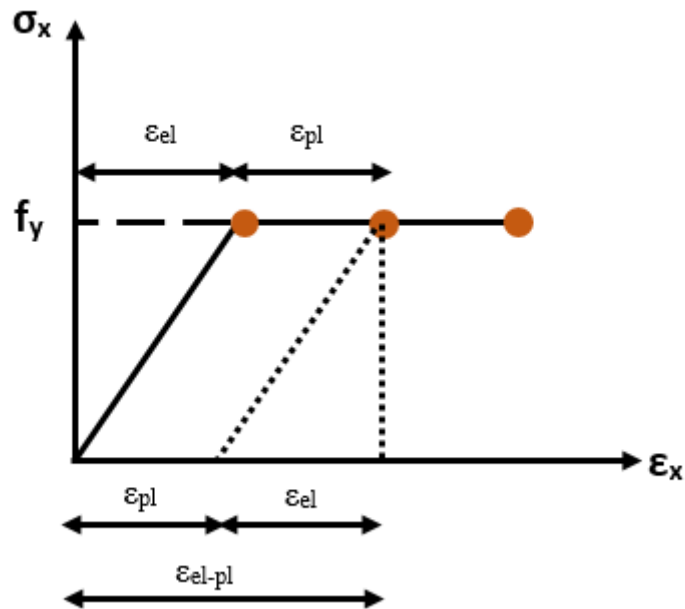
Exercice 2

L'allongement d'une tige d'acier de longueur $l = 3.6$ m est de $\Delta l_{el, pl} = 18$ mm

Avec $\sigma_0 = 355$ MPa et $E = 200000$ MPa

En considérant l'acier comme un matériau idéalement élasto-plastique ; déterminer l'allongement de la tige dans la zone plastique Δl_{pl}

Solution



La déformation linéaire totale est déterminée par :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l - l'}{l}$$

$$\varepsilon_{x_{el-pl}} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon_{x_{el-pl}} = \frac{0,018}{3,6}$$

$$\varepsilon_{x_{el-pl}} = 5.10^{-3}$$

L'allongement élastique limite $\varepsilon_{x, el}$ est déterminé à partir de la loi de Hooke pour la limite d'élasticité :

$$\varepsilon_{x,el} = \frac{f_y}{E}$$

$$\varepsilon_{x,el} = \frac{355}{200000} = 1,775 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{x,el} = 1,775 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{x,el-pl} = 5 \cdot 10^{-3}$$

Compte tenu du fait que la déformation de longueur totale est égale à :

$$\varepsilon_{x,el-pl} = \varepsilon_{x,el} + \varepsilon_{x,pl}$$

La valeur de la déformation linéaire (plastique) permanente ε_x , peut être déterminée en ajustant cette relation

$$\varepsilon_{x,pl} = \varepsilon_{x,el-pl} - \varepsilon_{x,el} = 5 \cdot 10^{-3} - 1,775 \cdot 10^{-3} = 3,225 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{x,pl} = \frac{\Delta l_{pl}}{l} \rightarrow \Delta l_{pl} = \varepsilon_{x,pl} \cdot l$$

$$\Delta l_{pl} = 3,225 \cdot 10^{-3} \cdot 3.6 = 11,61 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta l_{pl} = 11,61 \text{ mm}$$

La déformation permanente résultante de la tige en acier est donc de **11, 61 mm**.

Chapitre III

Critères de plasticité

III.1 Introduction

La plasticité est la propriété qu'ont certains corps de pouvoir subir sans rupture des déformations permanentes irréversibles.

Historiquement, les premières études faites sur ce comportement ont été réalisées par **TRESCA**. On a très rapidement recherché à établir un lien entre la physique des solides et les relations expérimentales globales. On admet communément que la déformation plastique traduit un glissement de plans cristallographiques. La théorie des dislocations a permis de faire le lien entre les études microscopiques et les relations globales de comportement d'une éprouvette.

III. 2 Critères de plasticité

La question la plus immédiate est la suivante :

Etant donné un état de contrainte représenté par un tenseur des contraintes, pouvons préciser si le comportement est encore élastique ou si nous avons un comportement plastique ?

En fait il faut être capable de définir, pour tout état de contrainte, la limite élastique.

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons une fonction mathématique f appelée **critère de plasticité** et possédant les caractéristiques suivantes :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 \quad \text{État élastique}$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad \text{État plastique}$$

Afin de simplifier, nous allons nous contenter d'exprimer ce critère dans la base principale des contraintes. Nous pourrions donc écrire le critère sous la forme $f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$.

III. 2 .1 Critère de Tresca (cission maximale)

Tresca, après des essais sur le Plomb, conclut que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteint une certaine limite.

Le phénomène de plastification apparaît comme des glissements de plans cristallographiques et ces glissements sont favorisés par des contraintes tangentielles élevées.

Le critère de rendement de Tresca stipule qu'un matériau cédera si la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur critique.

Le critère de Tresca se formule de la façon suivante :

$$\max \left\{ \frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}|, \frac{1}{2} |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, \frac{1}{2} |\sigma_{III} - \sigma_I| \right\} = k \quad (\text{III.1})$$

Dans un test de tension, $\sigma_I = \sigma_0$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$, et la défaillance se produit lorsque σ_0 atteint σ_y , la limite d'élasticité en tension.

Il s'ensuit que :

$$k = \frac{\sigma_y}{2}$$

La représentation graphique de ce critère dans l'espace des contraintes principales est un prisme hexagonal (figure III.1).

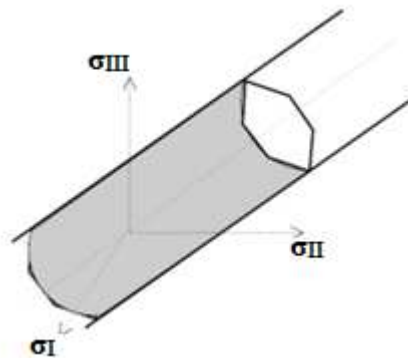


Figure III.1 : Critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales

III. 2.2 Critère de Von Mises (énergie de distorsion)

Le critère de Von Mises est le plus utilisé pour les métaux. Il découle de considérations énergétiques. Un matériau, lorsqu'il est déformé par une charge extérieure, tend à stocker de l'énergie interne dans son volume (analogie avec les ressorts).

Le critère de Von Mises stipule que le rendement se produit lorsque les contraintes principales satisferont la relation

$$\sqrt{\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}{6}} = k \quad (\text{III.2})$$

À partir d'un test de tension uniaxiale, on constate que le k dans l'équation. (III.2) est :

$$k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

En écrivant la condition de Von Mises en termes de σ_y , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_y \quad (\text{III.3})$$

Parfois, il est préférable de travailler avec des composants de contraintes arbitraires ; à cet effet, la condition de Von Mises peut être exprimée comme

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 6k^2 \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} = \sigma_y \quad (\text{III.5})$$

Dans l'espace des contraintes principales, le critère de Von Mises se traduit par un cylindre (figure III.2).

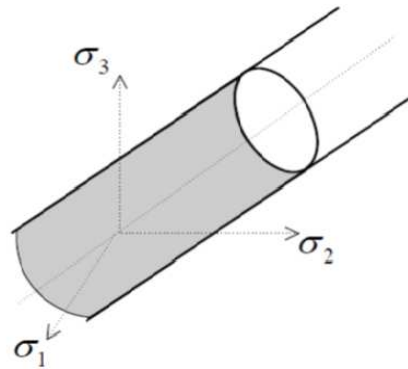


Figure III.2 : Critère de Von Mises dans l'espace des contraintes principales

Dans le plan des contraintes principales (σ_I, σ_{II}) (figure III.3) lorsque la troisième contrainte principale σ_{III} est nulle ; les expressions des critères se réduisent alors à :

Tresca

$$\max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II}|, |\sigma_I|\} = \sigma_y \quad (\text{III.6})$$

Von Mises

$$\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 = \sigma_y^2 \quad (\text{III.7})$$

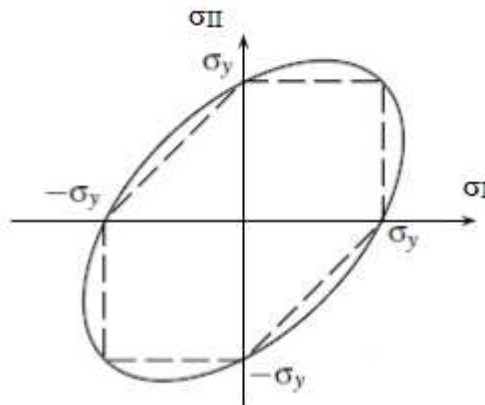


Figure III.3 : Représentation graphique des critères de Tresca (en pointillés) et de Von Mises dans le plan des contraintes principales (σ_I, σ_{II})

III. 2 .3 Critère de Mohr-Coulomb (frottement)

Le critère de Mohr-Coulomb est une généralisation du critère de Tresca. Ces deux critères supposent que la plastification apparaît lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite. Cependant, Tresca suppose que cette valeur est une constante alors que Mohr postule que pour une facette donnée cette valeur est fonction de la contrainte normale. Le critère de Mohr-Coulomb est utilisé pour décrire le comportement des sols pulvérulents (sables) et des sols cohérents (argiles et limons). Ce critère permet de tenir compte de la cohésion du matériau.

Il est apparenté au critère de Tresca, faisant intervenir comme lui le cisaillement maximal, mais en même temps la contrainte «moyenne», représentée par le centre du cercle de Mohr (Figure III.4) correspondant au cisaillement maximum, soit :

$$\tau = c - \sigma \tan \phi$$

τ : la contrainte de cisaillement

σ : la contrainte normale

c : la cohésion

ϕ : l'angle interne de frottement

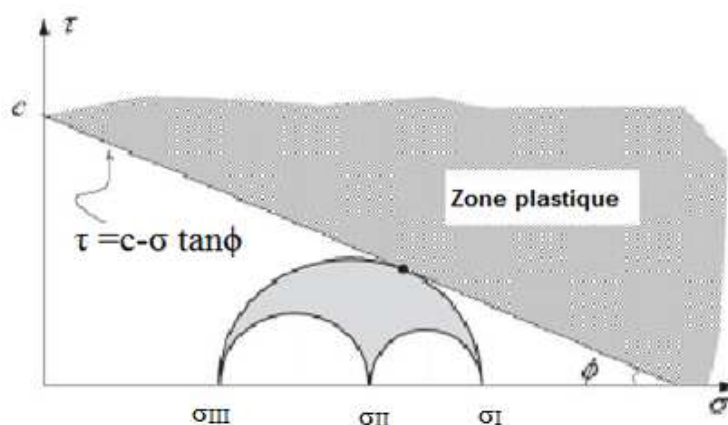
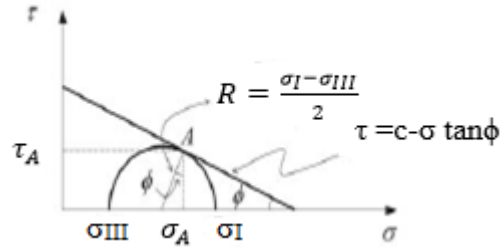


Figure III.4 : Représentation du critère Mohr-Coulomb à l'aide du cercle de Mohr en trois dimensions.

$$R = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

$$\tau_A = R \cos \phi = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \cos \phi \quad (\text{III.8})$$

$$\sigma_A = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + R \sin \phi = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \sin \phi \quad (\text{III.9})$$



$$\tau_A = c - \sigma_A \tan \phi$$

$$\tau_A + \sigma_A \tan \phi - c = 0 \quad (\text{III.10})$$

En remplaçant (III.8) et (III.9) dans (III.10), on obtient :

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \cos \phi + \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \sin \phi \right) \tan \phi - c = 0$$

$$(\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (\text{III.11})$$

Le critère de Mohr-Colomb est caractérisé par deux paramètres (la cohésion c et l'angle de frottement ϕ), le cas particulier $\phi = 0$ donne le critère de Tresca

Dans l'espace des contraintes principales l'équation (III.11) représente un cône dont la section normale à chaque point est un hexagone irrégulier (figure III.5).

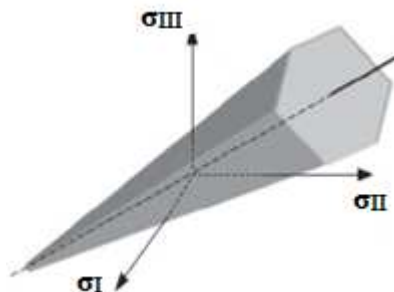


Figure III.5 : Critère de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes principales

III. 2.4 Critère de Drucker-Prager (Pression)

Le critère Drucker-Prager est une simple modification du critère de Von Mises. Le critère de Drucker-Prager est utilisé pour décrire le comportement (béton, milieux poreux) : ce critère permet de tenir compte de l'influence de la pression sur les déformations

La limite d'élasticité en traction reste σ_y , et la limite d'élasticité en compression est $-\sigma_y/(1-2\alpha)$. Le coefficient α dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 1/2, et on retrouve le critère de Von Mises pour $\alpha = 0$

La condition de **Drucker-Prager** est exprimée comme suit :

$$\sqrt{\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}{6}} = A + B(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) \quad (\text{III.12})$$

Si σ_t est la limite d'élasticité en traction uniaxiale, le critère Drucker-Prager implique :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_t = A + B \sigma_t$$

Si σ_c est la limite d'élasticité en compression uniaxiale, le critère Drucker-Prager implique :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_c = A - B \sigma_c$$

La résolution de ces deux équations donne :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \right) ; B = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_t - \sigma_c}{\sigma_c + \sigma_t} \right) \quad (\text{III.13})$$

Dans l'espace des contraintes principales l'équation (III.13) représente par un cône (figure III.7).

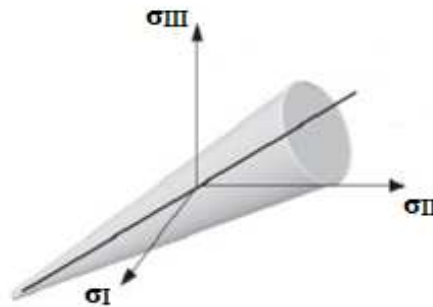


Figure III.7 : Critère de Drucker et Prager dans l'espace des contraintes principales

Expressions en termes de cohésion et d'angle de frottement

Étant donné que la surface élastique Drucker – Prager est une version lisse de la surface élastique Mohr – Coulomb, elle est souvent exprimée en termes de cohésion (c) et d'angle de frottement interne (ϕ) qui sont utilisés pour décrire la surface de rendement Mohr – Coulomb.

Si nous supposons que la surface de rendement Drucker – Prager circonscrit la surface de rendement Mohr – Coulomb, les expressions pour A et B sont :

$$A = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3-\sin \phi)} ; B = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3-\sin \phi)} \quad (\text{III.14})$$

Si le milieu de surface de rendement Drucker-Prager circonscrit la surface de rendement Mohr-Coulomb, les expressions pour A et B sont :

$$A = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3+\sin \phi)} ; B = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3+\sin \phi)} \quad (\text{III.15})$$

Si la surface de rendement Drucker – Prager inscrit la surface de rendement Mohr – Coulomb, les expressions pour A et B sont :

$$A = \frac{3 c \cos \phi}{\sqrt{9+3 \sin ^2 \phi}} ; B = \frac{\sin \phi}{\sqrt{9+3 \sin ^2 \phi}} \quad (\text{III.16})$$

La loi de Drucker-Prager est très proche de la loi de Mohr-Coulomb (figure III.8).

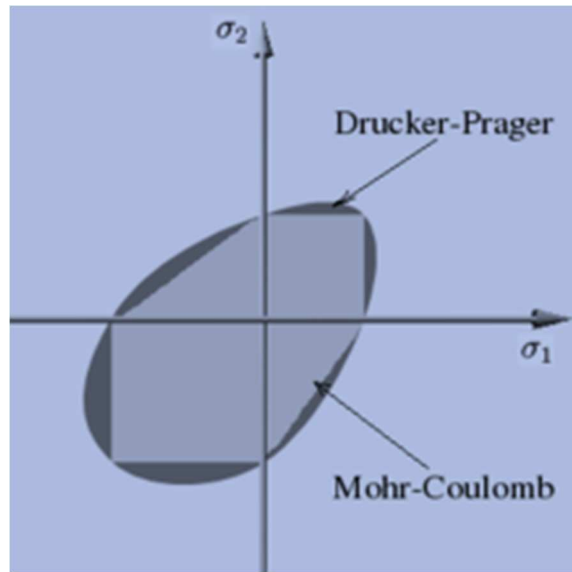


Figure III.8 : Représentation graphique des critères de Mohr – Coulomb et de Drucker-Prager dans le plan des contraintes principales (σ_I, σ_{II})

III. 3 Lois d'érouissage

Dans toute transformation réelle l'énergie mécanique fournie au matériau n'est restituée par le matériau qu'en partie (déformation élastique). L'autre partie (loi de conservation de l'énergie) est dissipée sous l'une des formes suivantes :

- Augmentation de la température (chaleur spécifique),
- Changement d'état de certains constituants (chaleur latente),
- Production de chaleur cédée au milieu environnant,
- Modification de la structure interne du matériau (mouvement de dislocations, glissement relatif inter-grains, création de nouvelles fissures,...).

Cette modification (ou réarrangement) de la structure intime du matériau durant une transformation conduit à un nouvel état dans lequel le matériau a les mêmes propriétés donc le même domaine d'élasticité (phase parfaite ou à écrouissage nul) ou à un domaine d'élasticité plus petit (phase adoucissante ou à écrouissage négatif) ou plus grand (phase durcissante ou à écrouissage positif). L'écriture de l'écrouissage est une tâche très complexe, qui dépend étroitement de la classe de matériau étudié.

Certains matériaux présentent même des évolutions durcissantes puis adoucissantes au cours d'une sollicitation cyclique par exemple. Le type d'écrouissage peut par ailleurs être modifié par des trajets de chargements complexes ou par le vieillissement du matériau.

Les lois d'écrouissage sont donc les règles qui caractérisent l'évolution des variables d'écrouissage au cours de la déformation inélastique. Ainsi qu'on l'a vu dans le cas uniaxial, les principales classes d'écrouissage sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique.

III.3.1 Ecrouissage isotrope

L'hypothèse de l'écrouissage isotrope est une expansion uniforme du domaine élastique, c'est-à-dire une modification du seuil du patin avec les déformations plastiques. Prenons un matériau avec des limites élastiques en compression et traction identique avant toute histoire de sollicitation. Appliquons maintenant au matériau une traction qui le porte dans le domaine plastique. On a vu que la limite élastique en traction se trouve augmentée. Si on décharge, la limite élastique a changé de la même valeur, on est en présence d'un écrouissage isotrope schématisé par la (figure III. 9.a).

Si on décharge et on inverse le chargement à partir du point B, l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte $-\sigma_B$. Donc il y a une symétrie par rapport à l'axe $\sigma=0$ (point O), cela s'exprime par :

$$F(\sigma, \sigma_B) = |\sigma| - \sigma_B \quad (\text{III.17})$$

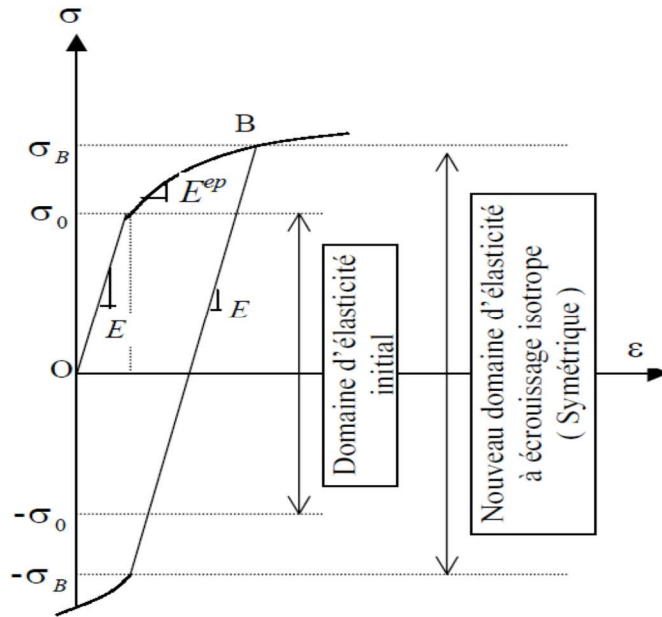


Figure III. 9. a : Ecrouissage isotope

Où σ_B est la limite élastique actuelle dépend de la déformation plastique ε^P (Figure III. 9.b).

$$\sigma_B = \sigma_0 + \int |H. d\varepsilon^P| \quad (\text{III.18})$$

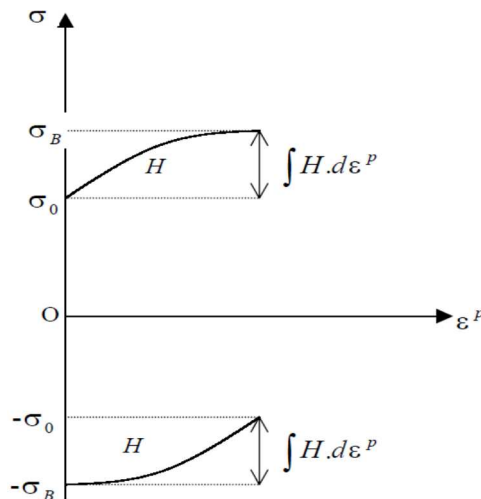


Figure III. 9. b: Limite élastique actuelle en fonction de ε^P

Avec :

H : caractéristique du matériau qu'on détermine expérimentalement (module d'écrouissage).

*Il se peut que la limite élastique soit plus faible en compression qu'en extension. Nous n'avons plus un écrouissage isotrope, c'est ce qu'on appelle l'effet Bauschinger.

*Si H est constant donc $\sigma_B = \sigma_0 + H \cdot \varepsilon^P$

*En élasto-plasticité parfaite H = 0 donc $\sigma_B = \sigma_0$.

III. 3.2 Ecrouissage cinématique

L'écrouissage cinématique modifie la position du domaine élastique mais pas l'amplitude du domaine élastique ($2\sigma_0$), schématisé par la (figure III. 14.a) Cela signifie que le segment entre les points limite garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (contrainte) α , (figure III. 14.b/c). Ceci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_0) = F(\sigma - \alpha, \sigma_0) = F(\bar{\sigma}, \sigma_0) = |\bar{\sigma}| - \sigma_0 = 0 \quad (\text{III.19})$$

où α : est l'ordonné du centre du segment

$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$: est appelée contrainte réduite.

Suivant la règle de Melan-Prager, on a un écrouissage cinématique linéaire. L'ordonné α peut être déterminée comme suit :

$$d\alpha = c \cdot \varepsilon^P \text{ donc } \alpha = \int c d\varepsilon^P \quad (\text{III.20})$$

Avec c : est une caractéristique du matériau égale à H si l'écrouissage est purement cinématique, figure (III.8.c).

Dans l'écrouissage cinématique, l'effet Bauschinger est maximal car l'augmentation de la limite élastique par écrouissage dans un sens est totalement perdue dans l'autre sens.

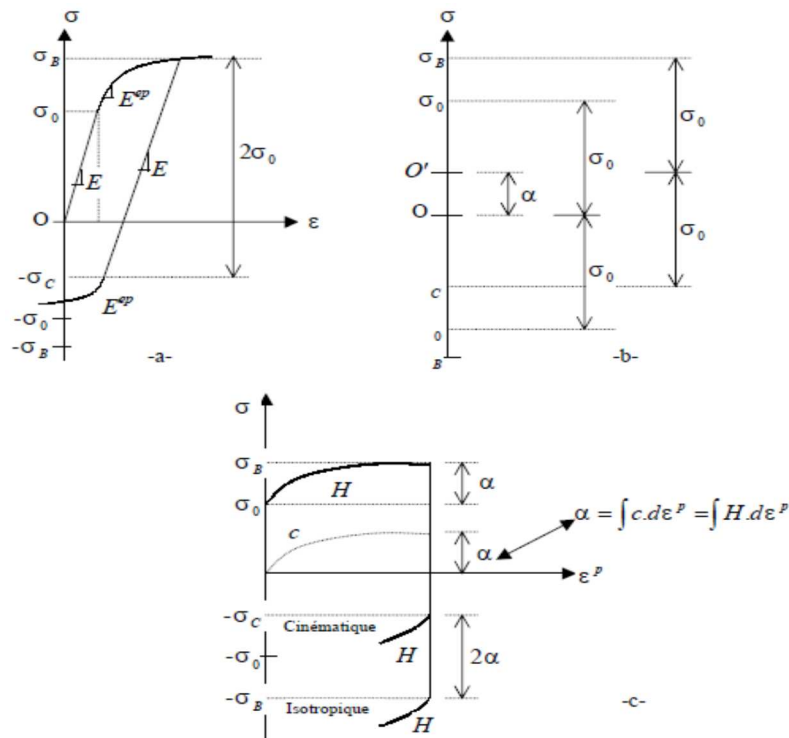


Figure III. 10: Ecrouissage cinématique

III. 4 Lois d'écoulement

Il est clair que dès que la limite d'élasticité initiale a été franchie, au cours de l'histoire de charge du matériau, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus, comme en élasticité, correspondance biunivoque entre σ et ϵ : la donnée de σ ne suffit plus à définir ϵ .

En revanche, si l'on connaît non seulement la contrainte actuelle σ mais tout le trajet de charge suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial naturel, alors la donnée d'une variation de contrainte $d\sigma$ suffit à déterminer la variation correspondante de la déformation $d\epsilon$. On dit que la loi de comportement est de type incrémental.

L'incrément total de déformation se compose en général de deux parties : un incrément élastique $d\epsilon^e$ et un incrément plastique $d\epsilon^p$.

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (\text{III.21})$$

L'incrément des contraintes d est dû aux déformations élastiques et donc :

$$d\sigma = E \cdot d\epsilon^e \quad (\text{III.22})$$

Donc le module d'élasticité est défini dans chaque état par (σ, ε) :

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e} \quad (\text{III.23})$$

Dans le cas où le point de charge serait à la limite d'élasticité actuelle on définit le « module élasto-plasticité tangent » par la relation :

$$E^{ep} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \text{ donc } d\sigma = E^{ep} \cdot d\varepsilon \quad (\text{III.24})$$

et le module d'écrouissage du matériau étant :

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \text{ donc } d\sigma = H \cdot d\varepsilon^p \quad (\text{III.25})$$

On a alors la relation évidente :

$$\frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \quad (\text{III.26})$$

La relation (III.27) est appelée règle d'écoulement plastique.

III.5 Applications

Exercice 1

Dans la zone la plus sollicitée d'une pièce chargée, on relève l'état de contrainte suivant :

$$\overline{\overline{\sigma}}_{ij} = \begin{bmatrix} 200 & 30 & 0 \\ 30 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

La limite élastique identifiée est de 300 MPa

1. Calculer les contraintes principales
2. Appliquer le critère de Tresca.
3. Appliquer le critère de Von Mises.

Solution

$$\overline{\overline{\sigma}}_{ij} = \begin{bmatrix} 200 & 30 & 0 \\ 30 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{ij} = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} * 10$$

1. Calcul des contraintes principales

$$\begin{vmatrix} 20 - \sigma & 3 & 0 \\ 3 & 10 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -5 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$= 20 + 10 - 5$$

$$= 25$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 191 - 50 - 100$$

$$= 41$$

$$I_3 = |\overline{\overline{\sigma}}_{ij}|$$

$$= 20 \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-1000+45$$

$$=-955$$

$$f(\sigma) = \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3$$

$$f(\sigma) = \sigma^3 - 25\sigma^2 + 41\sigma + 955$$

$$p=-25$$

$$q=41$$

$$r=955$$

$$a=\frac{1}{3}(3q - p^2)$$

$$=\frac{1}{3}(3 \times 41 - (-25)^2) = -167.33$$

$$b=\frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$$

$$=\frac{1}{27}(2 \times (-25)^3 - 9 \times (-25) \times (41) + 27 \times (955))=139.25$$

$$\cos \varphi = \frac{-b}{2 \times \sqrt{-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

$$\cos \varphi = \frac{-139.25}{2 \times \sqrt{-\left(\frac{-167.33}{3}\right)^3}} = -0.167$$

$$\varphi=99.62^\circ$$

$$\varphi=100^\circ$$

$$g=2 \times \sqrt{-\left(\frac{a}{3}\right)}$$

$$g=2 \times \sqrt{-\left(\frac{a}{3}\right)}$$

$$g=14.94$$

$$y_1 = g \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \frac{P}{3} = 14.94 \cos\left(\frac{100}{3}\right) + \frac{25}{3}$$

$$y_1 = 20.83$$

$$y_2 = g \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120\right) - \frac{P}{3} = 14.94 \cos\left(\frac{100}{3} + 120\right) + \frac{25}{3}$$

$$y_2 = -5$$

$$y_3 = g \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240\right) - \frac{P}{3} = 14.94 \cos\left(\frac{100}{3} + 240\right) + \frac{25}{3}$$

$$y_3 = 9.16$$

$$\sigma_I = 20.83 * 10 = 208.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = 9.16 * 10 = 91.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{III} = -5 * 10 = -50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

2. Critère de Tresca

$$\sigma_{Tresca} = \max\left\{\frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{II}|, \frac{1}{2}|\sigma_{II} - \sigma_{III}|, \frac{1}{2}|\sigma_{III} - \sigma_I|\right\} \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\sigma_{Tresca} = \frac{1}{2}|\sigma_{III} - \sigma_I| = \frac{(-50) - 208.3}{2}$$

$$\frac{1}{2}|\sigma_{III} - \sigma_I| = 129.15 \text{ MPa} < \frac{\sigma_y}{2} = 150 \text{ MPa}$$

Etat de contrainte admissible selon Tresca

3. Critère de Von Mises

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(208.3 - 91.6)^2 + (91.6 - (-50))^2 + ((-50) - 208.3)^2}$$

$$\sigma_{VM} = 224.04 \text{ MPa} \approx 224 \text{ MPa} < 300 \text{ MPa}$$

Etat de contrainte admissible selon Von Mises

Exercice 2

Dans un repère(x1, x2) ; les composantes des contraintes sont $\sigma_{11}= 80\text{MPa}$, $\sigma_{22}= -40\text{MPa}$,

$\sigma_{12}= 25 \text{ MPa}$. . La limite élastique identifiée est de 150 MPa

1. Calculer les contraintes principales
2. Appliquer le critère de Tresca.
3. Appliquer le critère de Von Mises.

Solution

$$\overline{\overline{\sigma}}_{ij} = \begin{bmatrix} 80 & 25 & 0 \\ 25 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

1. Calcul des contraintes principales

Cercle de Mohr

A(80,25)

B(-40,25)

Centre du cercle Mohr

$$(oo' = \sigma_{22} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}; 0)$$

$$oo' = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Le centre du cercle Mohr est (20; 0)

Rayon du cercle Mohr

$$R = \sqrt{\left(\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2\right)}$$

$$R = \sqrt{\left(\left(\frac{80 - (-40)}{2}\right)^2 + 25^2\right)}$$

$$R = 65 \text{ MPa}$$

$$oo' = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$

$$oo' = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_I = oo' + R = 85 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = oo' - R = 45 \text{ MPa}$$

2. Critère de Tresca

$$\frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}| \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\sigma_{Tresca} = \frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}|$$

$$\sigma_{Tresca} = \frac{1}{2} |85 - (-45)|$$

$$\sigma_{Tresca} = 65 \text{ MPa} < \frac{150}{2} = 75 \text{ MPa}$$

Etat de contrainte admissible selon Tresca

3. Critère de Von Mises

$$\sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2} \leq \sigma_y$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{85^2 + (-45)^2 + 85 \times 45}$$

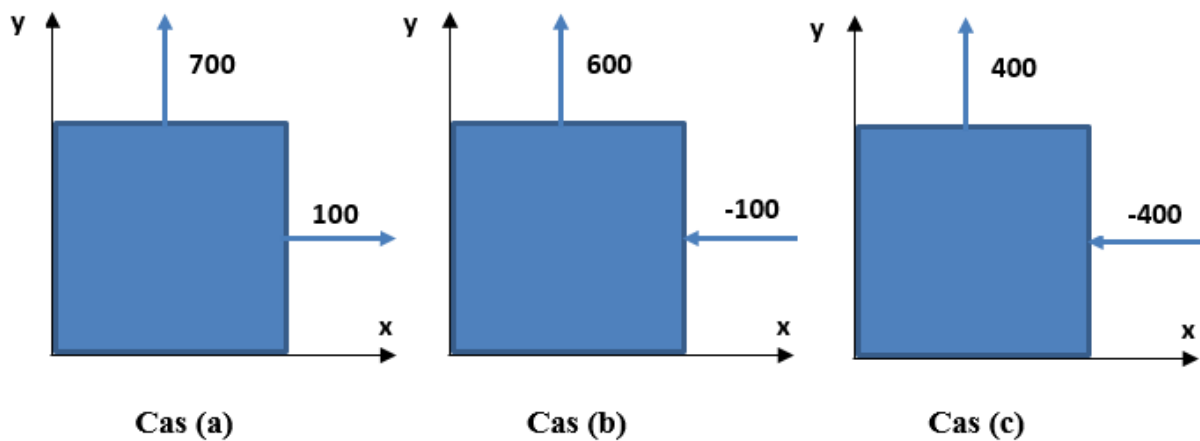
$$\sigma_{VM} = 114.3 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa}$$

Etat de contrainte admissible selon Von Mises

Exercice 3

Considérons les trois états plans de contrainte ci-dessous. Les axes sont principaux. Les contraintes sont en MPa.

- 1- Ecrire les matrices relatives à ces trois états de contrainte.
- 2- D'après le critère de VON MISES , quel est l'état de contrainte le plus dangereux ?



$$\overline{\overline{\sigma}}_{ij}^a = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}; \overline{\overline{\sigma}}_{ij}^b = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}; \overline{\overline{\sigma}}_{ij}^c = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

La contrainte $\sigma_{VM}^{(a)}$ équivalente en 2D compte tenu que dans les trois cas $\sigma_z=0$ s'écrit :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2}$$

$$\sigma_{VM}^{(a)} = \sqrt{100^2 + 700^2 - 100 \cdot 700}$$

$$\sigma_{VM}^{(a)} = 655.74 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM}^{(b)} = \sqrt{100^2 + 600^2 + 100 \cdot 600}$$

$$\sigma_{VM}^{(b)} = 655.74 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM}^{(c)} = \sqrt{400^2 + 400^2 + 400 \cdot 400}$$

$$\sigma_{VM}^{(c)} = 692.82 \text{ MPa}$$

L'état de contrainte le plus dangereux, au sens de Von Mises, est donc le cas (c)

Exercice 4

Soit une poutre en acier de section S est soumise à un effort de traction P ayant pour $\sigma_e=2800$ bars.

Déterminer la valeur maximale de P en utilisant les conditions d'écoulement de TRESCA et de Von Mises.

Solution

Tresca

$$\max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II}|, |\sigma_I|\} \leq \sigma_e$$

$$\sigma_I = \frac{P}{S} \leq \sigma_e \rightarrow P \leq \sigma_e * S$$

$$\rightarrow P \leq 2800 * S$$

La valeur maximale de P est $P = 2800 * S$

Von Mises

$$\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 \leq \sigma_y^2$$

$$\rightarrow \sigma_I = \frac{P}{S} \leq \sigma_e$$

$$\rightarrow P \leq \sigma_e * S$$

$$\rightarrow P \leq 2800 * S$$

La valeur maximale de P est $P = 2800 * S$

Exercice 5

Un arbre de diamètre D est soumis à un moment de flexion M de 117.81 N.m et à un moment de torsion C de 157.08 N.m. Les limites élastiques en traction et compression du matériau sont identiques et valent 750 MPa.

En appliquant le critère de Von Mises, calculer (en mm) la valeur du diamètre D pour que l'on ait un coefficient de sécurité de 3

Solution

$$\text{Contrainte maximum de flexion } \sigma_{11}^P = \frac{M_Y}{I_Y} Z^P = \frac{117.8 \times 10^3 \times 64 \times D}{2 \times \pi \times D^4} = \frac{1.2}{D^3} 10^6$$

$$\text{Contrainte maximum de torsion } \sigma_{12}^P = \frac{C}{I_G} R = \frac{157.08 \times 10^3 \times 32 \times D}{2 \times \pi \times D^4} = \frac{0.8}{D^3} 10^6$$

La matrice des contraintes au point P est donc :

$$\overline{\overline{\sigma}}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.2}{D^3} 10^6 & \frac{0.8}{D^3} 10^6 & 0 \\ \frac{0.8}{D^3} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte équivalente de Von Mises pour une poutre :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2}$$

Et le coefficient de sécurité

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{VM}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2}}$$

$$3 = \frac{750}{\sqrt{\left(\frac{1.2}{D^3} 10^6\right)^2 + 3\left(\frac{0.8}{D^3} 10^6\right)^2}}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{3}{750} \sqrt{(1.2 \times 10^6)^2 + 3(0.8 \times 10^6)^2}}$$

$$D = 20 \text{ mm}$$

Chapitre IV

Plasticité des barres

IV .1 Introduction

On introduit les principales notions d'élasto-plasticité à partir de l'analyse de la réponse d'une éprouvette soumise à un essai de traction-compression. La modélisation de cet essai permet de présenter différentes schématisations couramment utilisées pour traiter des problèmes d'évolution élasto-plastique.

IV.2 Essai de traction

Considérons une éprouvette de traction sous la forme d'un cylindre homogène droit de section S_0 et de longueur ℓ_0 . Cette éprouvette est soumise à un effort de traction F comme sur la figure IV .1 .



Figure IV .1: Éprouvette de traction

Pour des petites déformations de l'éprouvette, l'état de contrainte peut être supposé uniforme et uniaxial (la diminution de section est négligée).

Nous posons $\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \Delta \ell / \ell_0$ et $\sigma = \sigma_{xx} = F/S_0$.

Considérons les graphes (σ, ε) obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation lors du chargement, nous obtenons les allures de la figure IV.2.

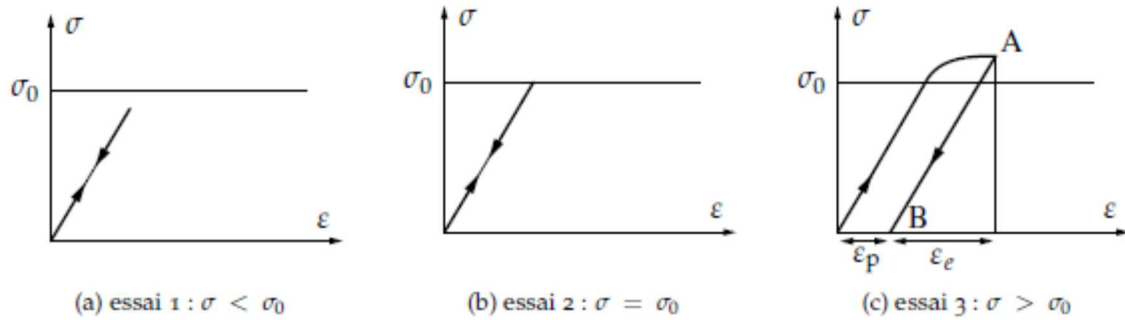


Figure IV.2: Traction avec décharge.

1. $\sigma < \sigma_0$: le système se situe dans le domaine élastique et le comportement du matériau est réversible. Il est supposé par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire, soit $\sigma = E \varepsilon_e$ où E est le module d'Young du matériau ;

2. $\sigma = \sigma_0$: cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité σ_0 , seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle et correspond à une fraction de déformation permanente ;

3. $\sigma > \sigma_0$: la décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B (charge nulle) ne subsiste que la déformation plastique ou déformation permanente ε_p .

En tout point de la courbe, la déformation est $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$. Effectuons maintenant une série de charges-décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure IV.3.

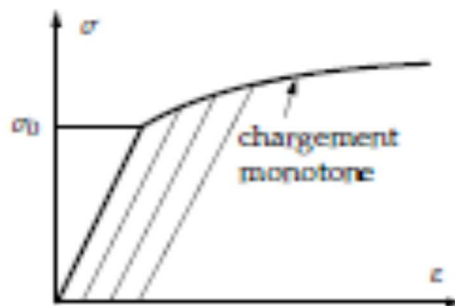


Figure IV .3: Réponse à une série decharges-décharges consécutives

Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'érouissage. En première approximation, nous pouvons considérer que :

- lors des chargements consécutifs, la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.

Par conséquent, connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'érouissage obtenue pour un chargement monotone.

En fait le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est l'une des difficultés majeures de la plasticité. Prenons l'exemple d'un chargement cyclique pour montrer que la connaissance de l'état actuel (σ , ε_p) ne suffit pas *a priori* pour définir le domaine d'élasticité actuel. Sur la figure IV.4, après décharge nous obtenons le point O' , la déformation plastique est définie par le segment OO' .

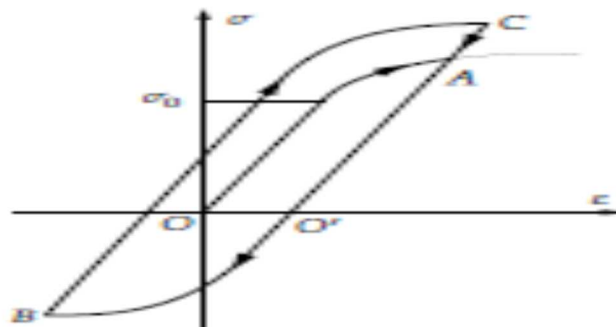


Figure IV .4: Historique d'un cycle de chargement OA-AB-BC

Or dans cet état, la limite d'élasticité est différente au premier et au deuxième passage. Cet exemple montre que les lois décrivant l'évolution du domaine d'élasticité ont un caractère essentiellement incrémental.

De plus, il faut distinguer deux cas :

Charge plastique — Il y a variation des paramètres d'écrouissage et de la déformation plastique.

Charge ou décharge élastique — Il n'y a pas de variation des paramètres d'écrouissage ni de la déformation plastique.

En résumé, l'évolution plastique ne peut se traduire que par des lois incrémentales reliant à un instant donné les incréments des paramètres d'écrouissage et de déformation plastique à partir de l'état actuel. Pour l'étude des problèmes quasi-statique d'élasto-plasticité (sans vieillissement ni viscosité), nous utilisons donc un temps cinématique t pour repérer les états successifs du matériau en fonction de l'historique des sollicitations.

IV.3 Modélisation du comportement en traction–compression

Pour faire simple, la courbe d'écrouissage en l'essai de traction–compression obtenue pour un chargement monotone est modélisée par des segments de droite (figure IV .5).

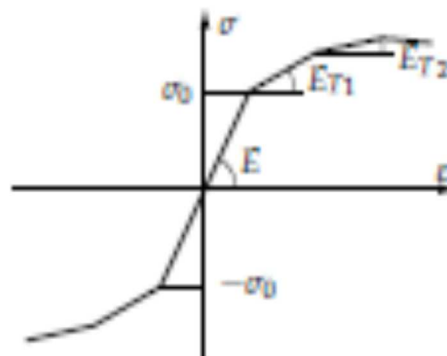


Figure IV .5 : Modèle d'écrouissage multi-linéaire

Dans notre cas, on se limitera à des modèles bi-linéaires. Donc lorsqu'il y a écrouissage, il faut se donner un modèle pour représenter l'évolution du domaine élastique. Les deux modèles les plus simples sont comme déjà vu, l'écrouissage isotrope (figure IV.6) et l'écrouissage cinématique (figure IV.7).

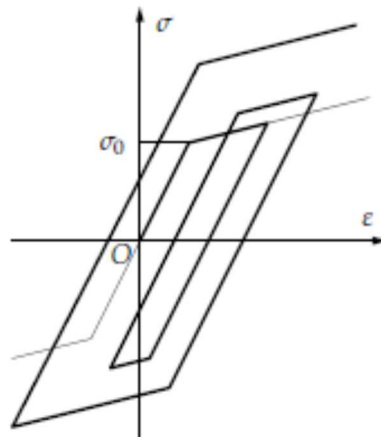


Figure IV .6: hypothèse d'écrouissage isotrope(dilatation homothétique du domaine d'élasticité)

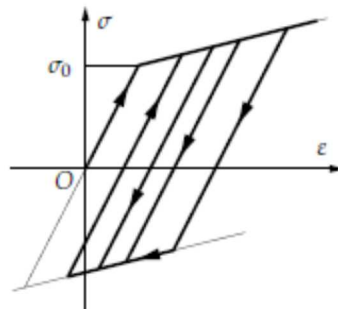


Figure IV .7: hypothèse d'écrouissage cinématique (translation sans déformation du domaine d'élasticité initial)

Il est possible de combiner ces deux modèles d'écrouissage pour essayer de se rapprocher au mieux de la réponse au chargement cyclique donné.

Ces modèles négligent l'écrouissage du matériau. Le modèle élasto-plastique parfait (sans écrouissage) est surtout utilisé du point de vue académique pour simplifier la résolution analytique des problèmes posés.

IV.4 Lois d'écoulement plastiques

Ce qui précède (les critères de plasticité évoqués au chapitre précédent) nous permet de définir pour l'essai de traction-compression, les conditions de plastification (seuil de plasticité σ_s) et l'évolution du seuil en fonction des paramètres d'écrouissage $\sigma_s(h)$, h contient l'historique du chargement suivi pour obtenir l'état actuel.

Pour l'essai de traction-compression, le domaine d'élasticité est défini par :

$$f(\sigma, h) = |\sigma| - \sigma_s(h) \leq 0 \quad (\text{IV.1})$$

Il nous reste à définir l'évolution du seuil de plasticité $\sigma_s(h)$. Représentons la courbe d'écrouissage monotone en traction par un modèle bi-linéaire (figure IV.8). Ce modèle est caractérisé par s_0 , la limite d'élasticité initiale, E , le module d'élasticité et E_T , le module tangent. Soit un incrément de charge $d\sigma$ pris à partir d'un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité. Nous avons :

$$d\sigma = E_T \cdot d\varepsilon \quad (\text{IV.2})$$

Où

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \text{ et } d\varepsilon_e = \frac{d\sigma}{E} \quad (\text{IV.3})$$

Donc

$$d\sigma = \left(d\varepsilon_p + \frac{d\sigma}{E} \right) E_T \quad (\text{IV.4})$$

$$d\sigma - d\sigma \cdot \frac{E_T}{E} = E_T d\varepsilon_p$$

$$d\sigma \cdot \left(1 - \frac{E_T}{E} \right) = E_T d\varepsilon_p$$

D'où

$$d\sigma = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} d\varepsilon_p \quad (\text{IV.5})$$

On pose

$$H = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (\text{IV.6})$$

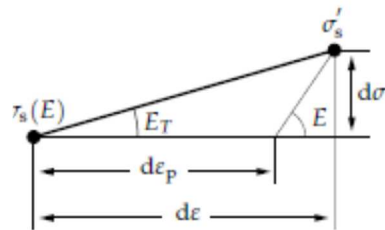


Figure IV .8: incrément purement élastique

Le quantité H est dite **module d'écrouissage**.

Intéressons –nous maintenant aux déformations pour un incrément de charge $d\sigma$. A partir d'un état actuel quelconque σ , deux cas peuvent alors se présenter :

- Incrément purement élastique (figure IV .9)

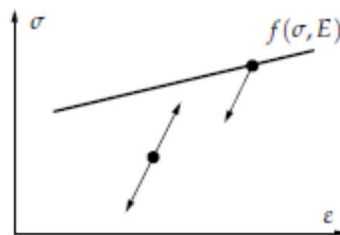


Figure IV .9: incrément purement élastique

Etat à l'intérieur du domaine élastique(A) : Charge ou décharge élastique (σ_s (h) inchangée)

Etat sur la frontière du domaine élastique(B) : Décharge élastique uniquement

- Incrément élasto-plastique

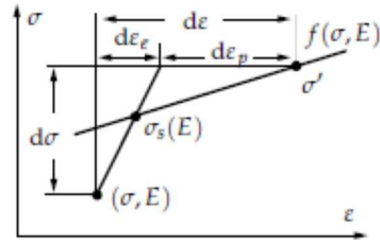


Figure IV .10 : incrément élasto-plastique

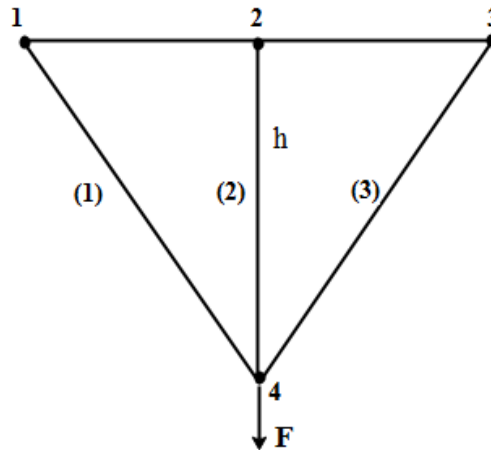
$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p; \quad d\epsilon_e = \frac{1}{E} d\sigma; \quad d\epsilon_p = \frac{1}{H} \cdot (\sigma + d\sigma - \sigma_s)(IV.7)$$

Le nouvel état de contrainte ($\sigma' = \sigma + d\sigma$) est situé sur la frontière d'élasticité (figure IV .10) : σ' est donc la valeur du critère pour l'incrément de charge suivant.

$H = 0$ (cas parfaitement plastique) \Rightarrow déformation plastique infinie (écoulement libre du matériau)

IV.5 Application

Ci-dessous, 3 barres de même matériau (E, σ_s) et de même section A .



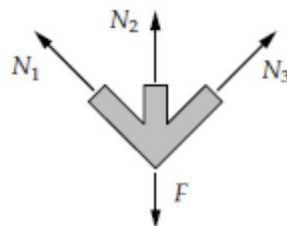
Analyser le comportement de la structure lors d'un cycle de charge-décharge (on supposera que le matériau est parfaitement élasto-plastique)

Lors du chargement la structure va passer d'un comportement purement élastique à un comportement élasto-plastique. On doit alors connaître à quel moment donc à quelle valeur F , ce passage va avoir lieu ?

Donc en 1^{er} lieu, on étudie la phase élastique pour connaître cette limite.

Phase élastique

Analyse du problème. Nous avons trois inconnues N_1, N_2 et N_3 , représentant les efforts dans les barres, pour deux équations d'équilibre dans le plan. Par conséquent, le système est hyperstatique de degré un. Les équations d'équilibre ont la forme suivante :



$$-N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$-N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 - F = 0$$

$$N_3 = N_1 ; N_2 = F - \sqrt{2}N_1 \quad (\text{IV.8})$$

Utilisons le théorème de Ménabréa pour calculer les efforts internes. L'énergie interne ou de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\text{barres}) \frac{N_j^2 l_j}{E_j A_j} \quad (\text{IV.9})$$

Donc pour notre treillis

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{EA} (h \cdot N_2^2 + h \cdot \sqrt{2} \cdot N_1^2 + h \cdot \sqrt{2} \cdot N_3^2) \quad (\text{IV.10})$$

$$U = \frac{1}{2EA} (2\sqrt{2}N_1^2 h + (F - \sqrt{2}N_1)^2 h)$$

$$U = \frac{h}{2EA} [(F - \sqrt{2}N_1)^2 + N_1^2 2\sqrt{2}]$$

(IV.11)

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

(IV.12) dans (IV.11)

$$2(F - N_1\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + 2N_1 2\sqrt{2} = 0 \quad (\text{IV.13})$$

$$-F + N_1\sqrt{2} + 2N_1 = 0 \quad (\text{IV.14})$$

$$(2 + \sqrt{2})N_1 = F$$

$$N_1 = \frac{F}{2 + \sqrt{2}} \quad (\text{IV.15})$$

$$(\text{IV.8}) \rightarrow N_2 = F - N_1\sqrt{2}$$

$$N_2 = F - \frac{F\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$N_2 = \frac{2F + \sqrt{2}F - F\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$N_2 = \frac{2F}{2 + \sqrt{2}}$$

$$N_1 = N_3 = \frac{F}{2+\sqrt{2}}; N_2 = \frac{2F}{2+\sqrt{2}} \quad (\text{IV.16})$$

La solution obtenue est valable si les trois barres vérifient le critère d'écoulement (les trois barres restent dans le domaine élastique).

$$|\sigma_i| - \sigma_s \leq 0 \text{ ou } |\sigma_i A_i| - \sigma_s A \leq 0$$

$$|N_i| - \sigma_s A \leq 0 \quad i=1,2,3 \text{ n}^\circ \text{ des barres} \quad (\text{IV.17})$$

D'après les résultats (IV.16), N_2 est 2 fois plus grande que N_1 ou N_3 : $N_2 = 2N_1$ (IV.18)

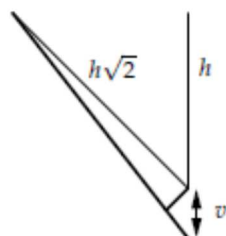
Donc c'est la barre (2) qui plastifiera la première. La charge correspondante sera donc

$$N_2 = \sigma_s \cdot A \quad (\text{IV.19})$$

Ce qui correspond à un effort appliqué de $F = F^{(1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \sigma_s A$ (IV.20)

A cet effort correspond un déplacement u du nœud 4 : déplacement vertical, sur le prolongement de la barre (2) pour raison de symétrie

Loi de comportement élastique et loi cinématique barre (2)



$$\varepsilon^{(2)} = \frac{u}{h} = \frac{\sigma^{(2)}}{E} = \frac{N^{(2)}A}{E} = \frac{\sigma_s}{E}$$

$$u = \frac{\sigma_s \cdot h}{E} \quad (\text{IV.21})$$

Et on déduit dans les barres (1) ou (3) par les relations cinématiques

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{u/\sqrt{2}}{h\sqrt{2}} = \frac{u}{2h} \quad (\text{IV.22})$$

Phase élasto-plastique

Dans ce cas, on continue de charger la structure au-delà de la charge $F^{(1)}$ (de IV.20) obtenue précédemment.

Dans ce cas, la barre (2) est en phase plastique et sa force interne est constante et vaut $\sigma_s A$ puisque le matériau est parfaitement plastique.

A ce niveau, nous avons donc 2 équations d'équilibre pour 2 inconnus :

$$N_3 = N_1 ; \sigma_s A = F - \sqrt{2}N_1 \quad (\text{IV.23})$$

D'où on obtient

$$N_1 = N_3 = \frac{F - \sigma_s A}{\sqrt{2}} \quad (\text{IV.24})$$

Notons que cette solution reste valable tant que les critères d'écoulement des barres (1) et (3) sont telles que $|N_i| - \sigma_s A \leq 0$ et que la condition $d\varepsilon_p^{(2)}$ soit satisfaite.

Pour ce qui est du critère d'écoulement, et avec (IV.24) on obtient :

$$F = F^{(2)} = (1 + \sqrt{2})\sigma_s A \quad (\text{IV.25})$$

Pour ce qui est de la condition $d\varepsilon_p^{(2)} > 0$

On ne peut pas la calculer avec la loi de comportement de la barre (2) puisque celle-ci à ce stade est parfaitement plastique (courbe horizontale)

Par contre, on peut le faire à partir des équations cinématiques des barres 1 et 3 :

D'après (IV.21) et (IV.22) on a $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{u}{2h}$; $\varepsilon_2 = \frac{u}{h}$)

Donc $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 = 2 \cdot \frac{\sigma_1}{E} = 2 \cdot \frac{N_1}{EA} = \frac{2}{EA} \left(\frac{F - \sigma_s A}{\sqrt{2}} \right)$

de IV.24 :

$$\varepsilon_2 = (F - \sigma_s A) \frac{\sqrt{2}}{EA} \quad (\text{IV.26})$$

Or $\varepsilon_2 = \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{e2}$

$$\varepsilon_{p2} = \varepsilon_2 - \varepsilon_{e2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{EA} (F - \sigma_s A) \right] - \left[\frac{\sigma_s}{E} \right]$$

$$\varepsilon_{p2} = \frac{1}{E} \left[\frac{F\sqrt{2}}{A} - (1 + \sqrt{2})\sigma_s \right] \quad (\text{IV.27})$$

Donc on voit que pour $dF > 0$ on a $d\varepsilon_p^{(2)} > 0$

La solution obtenue est donc valable tant que $F < F^{(2)}$

Quand $F = F^{(2)}$, la structure est complètement plastifiée.

Le matériau étant parfaitement plastique ; il y a donc ruine de système

Tout accroissement de charge $dF > 0$ conduit à un écoulement plastique infini.

Décharge élastique

De ce qui précède, partons alors, de l'état juste avant la ruine ($F = F_2$) (IV.25) en procédant à un déchargement d'un incrément dF ; dans ce cas $dF < 0$

Nous supposons que les barres 1 et 3 restent élastiques et la barre 2 qui était plastifiée subit une décharge élastique.

Les trois barres étant en phase élastique, l'équilibre du système est donc toujours régi par les équations de la phase élastique du début, données par (IV.16)

Donc, de ces équation, un incrément de dF correspond à :

$$dN_1 = dN_3 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}dF; dN_2 = \frac{2}{2+\sqrt{2}}dF \quad (\text{Efforts})$$

(IV.28)

Et

$$du = hd\varepsilon_2 = 2hd\varepsilon_1 = 2h\frac{d\sigma_1}{E} = 2h\frac{dN_1}{EA} = \frac{2h}{EA}\left(\frac{dF}{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$du = \frac{h}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}dF \quad (\text{IV.29})$$

Tant que les barres restent dans le domaine élastique, il faut vérifier :

$$|N_i| - \sigma_s A \leq 0 \quad \text{avec } N_i = N_{i|F=F_2} + dN_2 \quad (\text{IV.30})$$

Sachant que les N_i sont à $\sigma_s \cdot A$ quand $F = F_2$

D'après (IV.28), on voit toujours que la barre (2) plastifiera la première en compression avec comme charge limite $N_2 = |N_{2|F=F_2} + dN_2| - \sigma_s A = 0$

$$-\sigma_s A - dN_2 - \sigma_s A = 0$$

$$dN_2 = -2\sigma_s A \quad (\text{IV.31})$$

Cet incrément dN_2 est produit par un incrément de charge de :

$$dN_2 = -2\sigma_s A = \frac{2}{2+\sqrt{2}}dF$$

$$dF = -(2+\sqrt{2})\sigma_s A \quad (\text{IV.32})$$

D'où

$$F^{(3)} = F^{(2)} + dF = (1+\sqrt{2})\sigma_s A - (2+\sqrt{2})\sigma_s A$$

$$F^{(3)} = -\sigma_s A \quad (IV.33)$$

$F^{(3)}$ étant une charge de compression, on voit alors qu'en déchargeant complètement le treillis à partir de $F^{(2)}$ ($F^{(2)} \rightarrow F = 0$) et ($dF = -F^{(2)}$) on reste en élasticité.

Appliquons alors cette décharge complète donnée par l'incrément $dF = -F^{(2)}$

On rappelle de (IV.25) : $F^{(2)} = (1 + \sqrt{2})\sigma_s A$

Donc

$$N_1 = N_3 = N_{1|F=F_2} + dN_{1|dF}$$

$$N_1 = N_3 = \sigma_s A + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} dF$$

$$N_1 = N_3 = \sigma_s A + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} (-F^{(2)})$$

$$N_1 = N_3 = \sigma_s A + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} [-(1 + \sqrt{2})]\sigma_s A$$

$$N_1 = N_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \sigma_s A \quad (\text{Traction})$$

(IV.34)

$$N_2 = N_{2|F=F_2} + dN_{2|dF} = \sigma_s A + \frac{2}{2 + \sqrt{2}} [-(1 + \sqrt{2})]\sigma_s A$$

$$N_2 = (1 - \sqrt{2})\sigma_s A \quad (\text{Compression}) \quad (IV.35)$$

Lorsque la structure est déchargée, les barres (1) et (3) sont en traction et la barre (2) est en compression

D'ailleurs on vérifie aisément l'équilibre $N_2 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 = -\sqrt{2} N_1$ (IV.36)

Les contraintes résiduelles proviennent des déformations plastiques qui ne vérifient pas les conditions de compatibilité puisqu'en effet $\varepsilon_{p2} \neq 0$ et $\varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p3} = 0$ donnent

$\varepsilon_{p2} \neq 2\varepsilon_{p1}$ (IV.37). On parle alors d'autocontraintes.

Définition

Les auto-contraintes sont les contraintes résiduelles obtenues après décharge complète d'une structure ayant plastifié. Elles ont pour origine les déformations plastiques qui ne satisfont pas les équations de compatibilité. Ces contraintes forment un système mécanique équilibré.

La flèche résiduelle est comme les N_i calculée à partir de son état à $F = F^{(2)}$, à laquelle on rajoute l'incrément correspondant à dF

$$u_{\text{res}} = u|_{F=F_2} + du \quad (\text{IV.38})$$

Quand $F = F^{(2)}$

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \Rightarrow \frac{u}{h} = 2 \frac{\sigma_s}{E} \Rightarrow u|_{F=F_2} = \frac{2 h \sigma_s}{E}$$

D'où

$$u_{\text{res}} = \frac{2 h \sigma_s}{E} + \frac{h}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} dF$$

$$u_{\text{res}} = \frac{2 h \sigma_s}{E} + \frac{h}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} dF$$

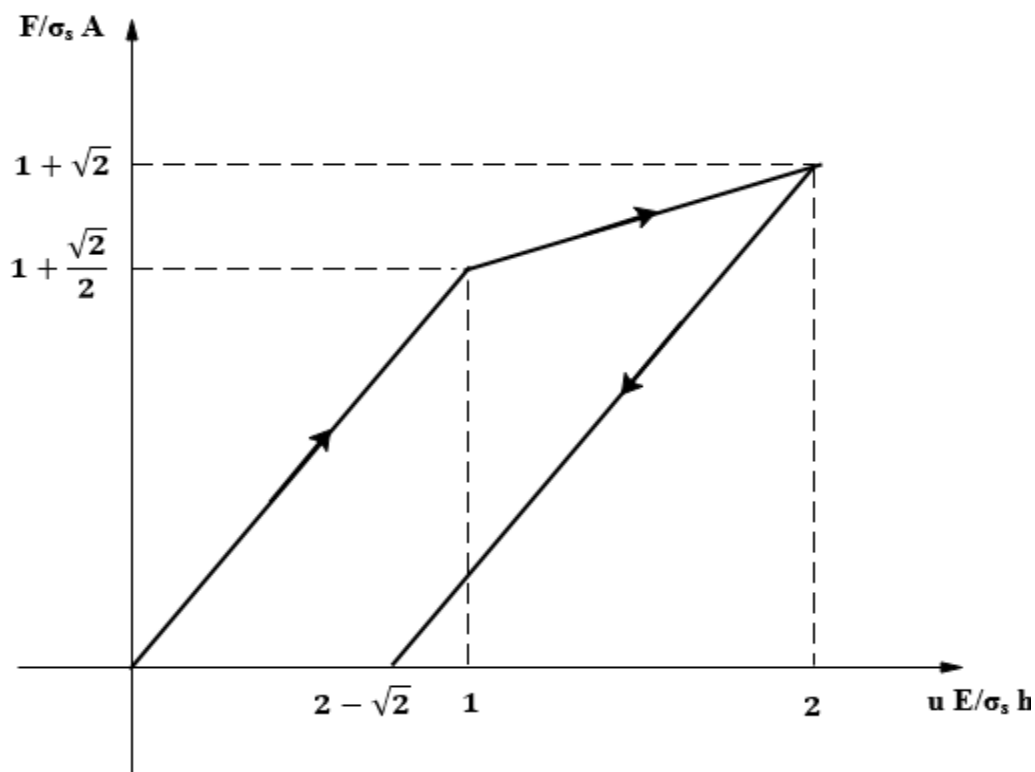
$$dF = -F^{(2)}, u_{\text{res}} = \frac{2 h \sigma_s}{E} + \frac{h}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} [-(1 + \sqrt{2})] \sigma_s A$$

$$u_{\text{res}} = \frac{h \sigma_s}{E} (2 - \sqrt{2}) \quad (\text{IV.39})$$

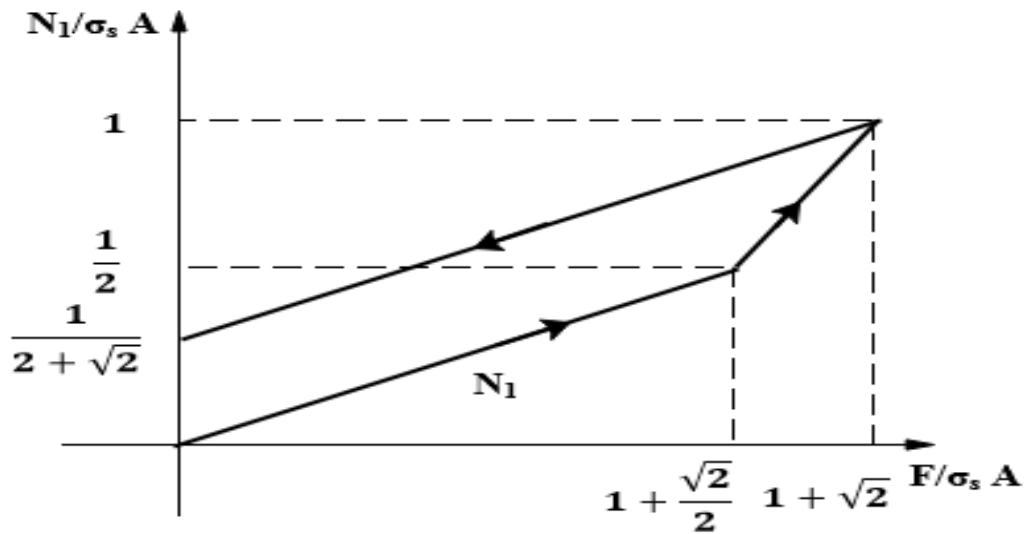
Récapitulatif

Etape	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$	libre
F	$\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \sigma_s A$	$(1 + \sqrt{2}) \sigma_s A$	0
N₁	$\frac{1}{2} \sigma_s A$	$\sigma_s A$	$\frac{1}{2 + \sqrt{2}} \sigma_s A$
N₂	$\sigma_s A$	$\sigma_s A$	$(1 - \sqrt{2}) \sigma_s A$
u	$1. \frac{h \sigma_s}{E}$	$2. \frac{h \sigma_s}{E}$	$(2 - \sqrt{2}) \frac{h \sigma_s}{E}$
Phase	Phase élastique	Phase élasto-plastique	Décharge élastique

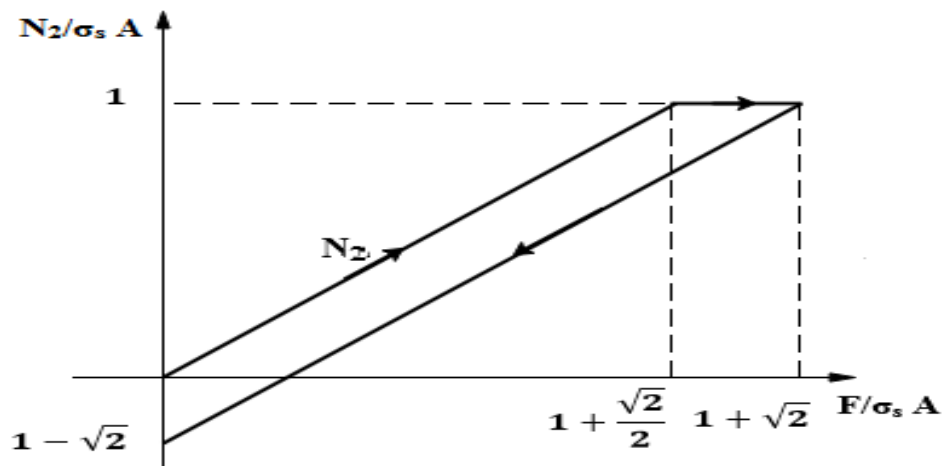
Flèche u



Barre (1) et (3)



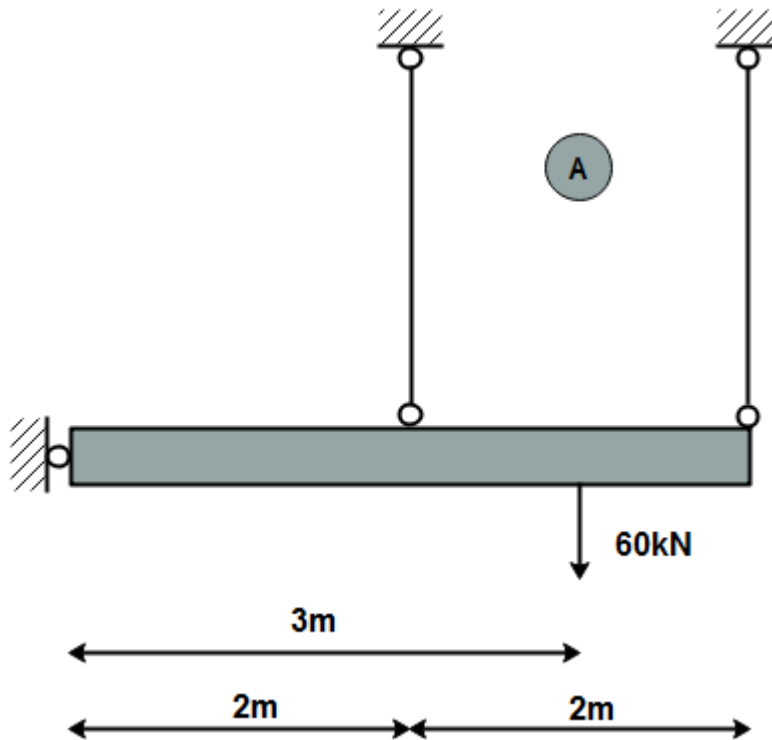
Barre (2)



IV.6 Application numérique

Un système réticulé, représenté sur la figure ci-dessous, formé de deux barres verticales identiques (longueur $l=2m$) de même matériau ($E \cdot \sigma_0$) et de même section A , fixées à leur extrémités supérieures par des articulations et reliées entre-elles, en partie inférieure, à une barre rigide.

$E=210000 \text{ MPa}$; $\sigma_0=235 \text{ MPa}$; $d= 16 \text{ mm}$.



Déterminer les forces normales, les contraintes normales, les allongements, les déformations dans les deux barres ainsi que la force F dans un cycle de chargement (on supposera que le matériau est parfaitement élasto-plastique).

Solution

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \cong 201.06 \text{ mm}^2$$

$$\Sigma M_a = 0$$

$$N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 4 - F \cdot 3 = 0$$

$$\frac{\Delta l_1}{2} = \frac{\Delta l_2}{4} \rightarrow \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A \cdot 2} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A \cdot 4}$$

$$\frac{N_1}{2} = \frac{N_2}{4} \rightarrow N_2 = 2 \cdot N_1$$

$$N_1 \cdot 2 + 2 \cdot N_1 \cdot 4 - F \cdot 3 = 0$$

$$N_1 \cdot 10 - F \cdot 3 = 0 \rightarrow N_1 = \frac{3F}{10}$$

Où

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot (N_1 \cdot 2 - F \cdot 3)$$

$$\frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A \cdot 2} = - \frac{(N_1 \cdot 2 - F \cdot 3) \cdot l}{E \cdot A \cdot 4^2}$$

$$N_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4^2} \right) = \frac{F \cdot 3}{4^2} \rightarrow N_1 \cdot \frac{4^2 + 2^2}{2 \cdot 4^2} = \frac{F \cdot 3}{4^2}$$

$$N_1 = \frac{F \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4^2}{4^2 \cdot (2^2 + 4^2)} \rightarrow N_1 = \frac{F \cdot 3 \cdot 2}{2^2 + 4^2}$$

$$N_1 = 18 \text{ kN}$$

$$N_2 = 2 \cdot N_1$$

$$N_2 = 36 \text{ kN}$$

Déformation dans les deux barres

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Delta l_1 = 8,5262 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cong 0,85 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Delta l_2 = 1,7052 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cong 1,71 \text{ mm}$$

Les valeurs résultantes des contraintes normales σ_x dans les deux barres :

$$\sigma_{x,1} = \frac{N_1}{A} = \frac{18 \cdot 10^3}{201,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$\sigma_{x,1} = 8,9525 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cong 89,52 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,2} = \frac{N_2}{A} = \frac{36 \cdot 10^3}{201,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$\sigma_{x,2} = 1,7905 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cong 179,05 \text{ MPa}$$

État I

Dans la situation appelée état I, la contrainte normale σ_x des deux éléments étirés est inférieure à la limite d'élasticité de l'acier $\sigma_x < 235 \text{ MPa}$. Le matériau des deux barres est toujours caractérisé par un comportement élastique et la déformation longitudinale des tiges étirées est régie par la loi de Hooke.

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{0,85}{2000} = 4,26 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{1,71}{2000} = 8,53 \cdot 10^{-4}$$

Etat II (plastification de la 2^{ème} barre) :

L'état II se produit lorsque la valeur de la contrainte normale atteint la limite élastique 235 MPa dans l'un des éléments étirés. Cela se produit dans la barre numéro 2, où :

$$N_2 = \sigma_0 \cdot A = 235 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}$$

$$N_2 = 4,7250 \cdot 10^4 \text{ N} \cong 47,25 \text{ kN}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{47,25 \cdot 10^3 \cdot 2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Delta l_2 = 2,2381 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cong 2,24 \text{ mm}$$

À partir de la condition de déformation, il est possible de déterminer également l'allongement de la barre numéro 1 :

$$\frac{\Delta l_1}{2} = \frac{\Delta l_2}{4} \rightarrow \Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \frac{2}{4} = 2,24 \cdot \frac{2}{4} \cong 1,12 \text{ mm}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} \rightarrow N_1 = \Delta l_1 \cdot \frac{E \cdot A}{l}$$

$$N_1 = 1,12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}{2}$$

$$N_1 = 2,36248 \cdot 10^4 \text{ N} \cong 23,62 \text{ kN}$$

La valeur finale de la force de charge ponctuelle F , est déterminée à l'aide de la condition d'équilibre statique :

$$\Sigma M_a = 0$$

$$N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 4 - F \cdot 3 = 0 \rightarrow F = \frac{1}{3} \cdot (N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 4)$$

$$F = \frac{1}{3} \cdot (23,62 \cdot 2 + 47,25 \cdot 4)$$

$$F \cong 78,75 \text{ kN}$$

Compte tenu de l'hypothèse initiale de l'état II, lorsque la valeur de la contrainte normale σx de la limite d'élasticité 235 MPa est atteinte dans la 2^{ème} barre étirée, seule la contrainte normale σx dans la 1^{ère} barre sera calculée :

$$\sigma_{x,1} = \frac{N_1}{A} = \frac{23,62 \cdot 10^3}{201,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$\sigma_{x,1} = 1,1750 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cong 117,50 \text{ MPa}$$

Les déformations relatives longitudinales dans les deux barres sont :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{1,12}{2000} = 5,60 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{2,24}{2000} = 1,12 \cdot 10^{-3}$$

3. État III (plastification des barres 1 et 2) :

L'état III représente une situation dans laquelle la capacité portante d'un système statiquement indéterminé de poutres étirées est épuisée, car dans les deux tiges, la valeur de la contrainte normale σx atteint la limite élastique et les forces normales N_1 et N_2 sont exprimées par :

$$N_1 = N_2 = \sigma_0 \cdot A = 235 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}$$

$$N_1 = 4,7250 \cdot 10^4 \text{ N} \cong 47,25 \text{ kN}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{47,25 \cdot 10^3 \cdot 2}{21000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Delta l_1 = 2,2381 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cong 2,24 \text{ mm}$$

L'allongement de la barre numéro 2 est alors déterminé à partir de la condition de déformation :

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2} \rightarrow \Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} = 2,24 \cdot \frac{4}{2} \cong 4,48 \text{ mm}$$

La valeur résultante de la force de charge ponctuelle F est déterminée par :

$$\Sigma M_a = 0$$

$$N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 4 - F \cdot 3 = 0 \rightarrow F = \frac{1}{3} \cdot (N_1 \cdot 2 + N_2 \cdot 4)$$

$$F = \frac{1}{3} \cdot (47,25 \cdot 2 + 47,25 \cdot 4)$$

$$F \cong 94,50 \text{ kN}$$

Les déformations relatives longitudinales dans les deux barres sont :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{2,24}{2000} = 1,12 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{4,48}{2000} = 2,24 \cdot 10^{-3}$$

Récapitulatif :

État I	F	N₁	σ₁	Δl₁	ε₁
	60 kN	18 kN	89.52 MPa	0.85 mm	4.26 · 10 ⁻⁴
		N₂	σ₂	Δl₂	ε₂
	36 kN	179.05 MPa	1.71 mm	8.53 · 10 ⁻⁴	
État II	F	N₁	σ₁	Δl₁	ε₁
	78.75 kN	23.62 kN	117.5 MPa	1.12 mm	5.60 · 10 ⁻⁴
		N₂	σ₂	Δl₂	ε₂
	47.25 kN	235.00 MPa	2.24 mm	1.12 · 10 ⁻³	
État III	F	N₁	σ₁	Δl₁	ε₁
	94.50 kN	47.25 kN	235.00 MPa	2.24 mm	1.12 · 10 ⁻³
		N₂	σ₂	Δl₂	ε₂
	47.25 kN	235.00 MPa	4.48 mm	2.24 · 10 ⁻³	

Chapitre V

Plasticité des poutres

V.1 Introduction

Considérons une poutre horizontale appuyée à ses deux extrémités et supportant un poids placé au milieu de sa portée comme présentée dans la figure V.1. Elle génère ce qu'on appelle une flexion ou un moment fléchissant.

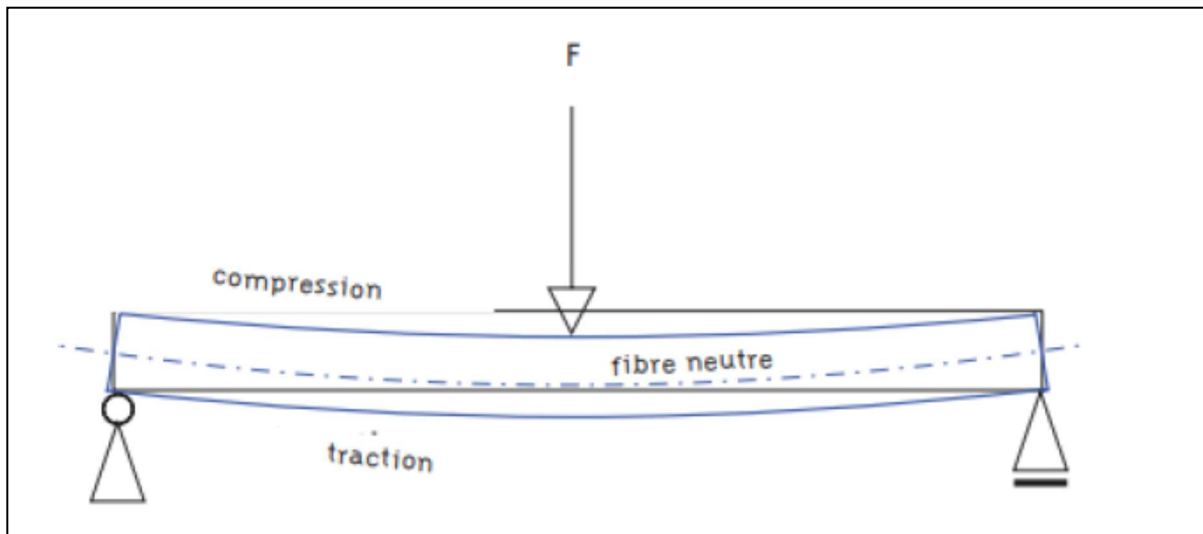


Figure V.1: Poutre simple chargée par une charge concentrée à mi-travée

La flexion exerce de part et d'autre de la fibre neutre des contraintes variables et de signes opposés. La face supérieure de la poutre se raccourcit sous une compression et la face inférieure s'allonge sous une traction.

V.2 Flexion plastique

La poutre qui sera chargée progressivement jusqu'à la ruine aura un comportement similaire à celui de l'éprouvette en traction si nous représentons sur un graphe (figure V.2) la relation entre le moment maximum dans la poutre et sa courbure (déformation représentative de la flexion) à chaque instant de chargement. Examinons maintenant les diagrammes des contraintes σ et des déformations relatives ϵ de la section correspondant au moment maximum.

Rappelons que dans le domaine élastique les relations suivantes lient le moment, la courbure de la poutre et la contrainte :

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R} \quad (\text{V.1})$$

Les diagrammes représentant l'évolution des contraintes σ et des allongements ϵ correspondant de la section étudiée sont donnés dans la figure V.4. L'allongement relatif ϵ dans la section sera proportionnel à la distance y à partir de l'axe neutre pour un rayon de courbure donné R tant que la poutre aura un comportement élastique qui correspond à la partie 0-1-2 de la courbe des figures V.2 et V.3. A partir du point 2 qui représente le moment où la contrainte dans les fibres extrêmes de la section devient égale à la limite d'écoulement f_y , la courbure de la poutre cesse d'être proportionnelle au moment M . Le diagramme des contraintes qui avait une forme bi-triangulaire change de forme avec l'apparition progressive de deux parties rectangulaires symétriques aux extrémités du diagramme ; les allongements cessent alors d'être proportionnels aux contraintes et augmentent très rapidement (points 4 et 5 des figures V.2, V.3 et V.4). La partie rectangulaire du diagramme des contraintes correspond à la limite physique de la valeur de la contrainte qui ne peut pas être supérieure à la limite d'écoulement f_y . Cette évolution du diagramme des contraintes continue jusqu'au moment où elles deviennent égales à la limite d'écoulement f_y sur toute la hauteur de la section. A cet instant, qui correspond à des déformations théoriquement infinies (diagramme N°5 de la figure V.4), une ROTULE PLASTIQUE se forme. Les figures V.2 et V.3 montrent que le comportement de la poutre est régi par deux valeurs fondamentales du moment qui sont M_{el} et M_{pl} . M_{el} est le moment qui correspond à la fin de la partie élastique de la courbe quand la contrainte dans les fibres extrêmes supérieures et inférieures atteint la valeur de la limite d'écoulement f_y . M_{pl} qui est le moment de résistance plastique de la section quand les contraintes sont uniformément égales à la limite d'écoulement f_y sur toute la hauteur de la section correspond à la formation de la rotule plastique.

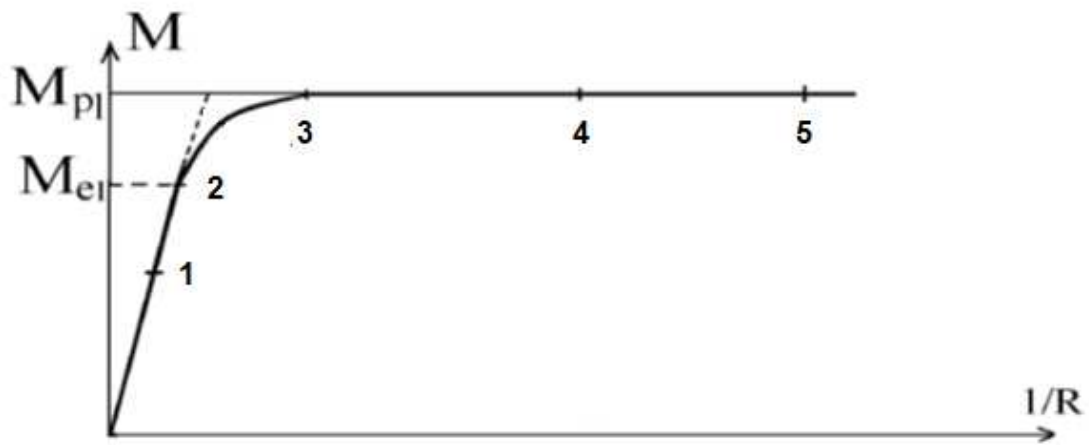


Figure V.2: Diagramme moment-courbure pour une poutre fléchie

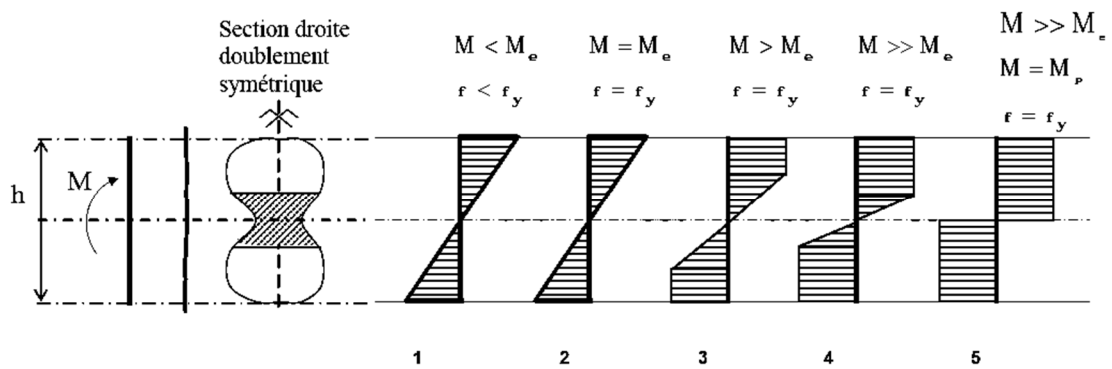


Figure V.3: Diagramme du moment courbure d'une poutre en flexion

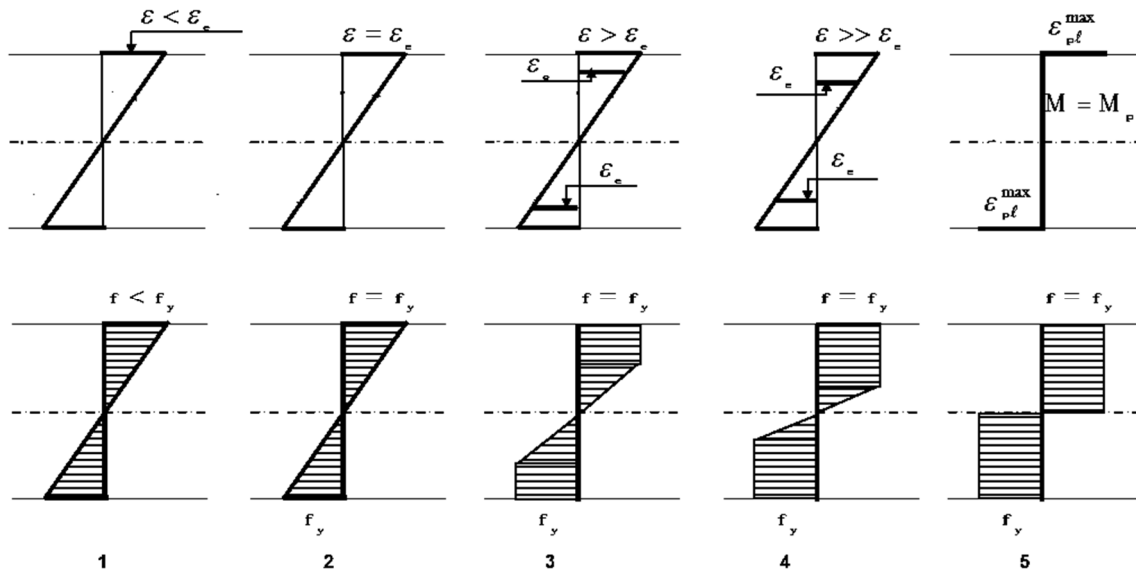


Figure V.4: Evolution des allongements et des contraintes

V.3 Calcul du moment plastique M_{pl} .

V.3.1 Cas d'une section de forme quelconque

La formation de la rotule plastique correspond au diagramme bi-rectangulaire de contraintes pour une section de forme quelconque. La section étant entièrement plastifiée, les contraintes sont égales à la limite d'écoulement f_y sur toute sa hauteur (figure V.5).

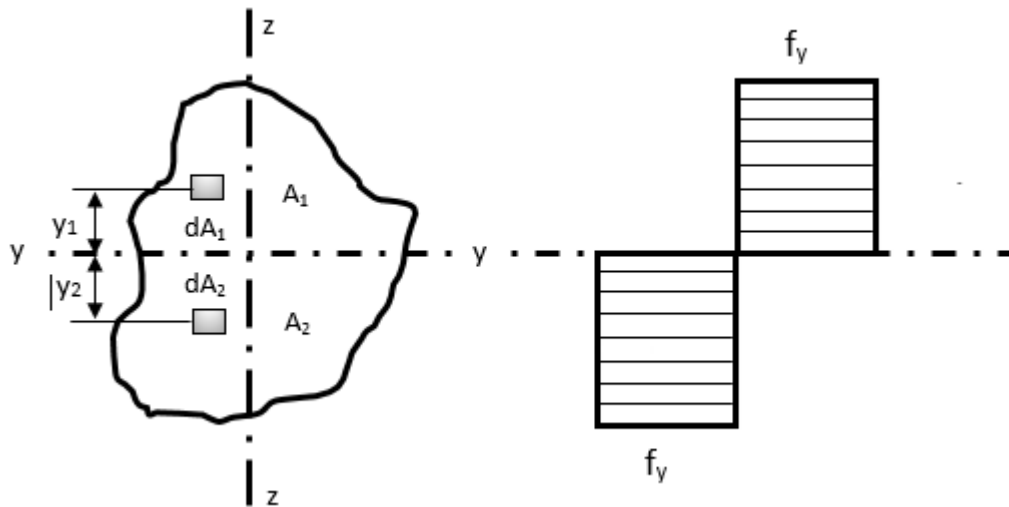


Figure V.5 : Répartition des contraintes dans une section plastifiée

$$T = \int f_y d A_1 = f_y A_1 \quad (\text{V.2})$$

$$C = \int f_y d A_2 = f_y A_2 \quad (\text{V.3})$$

Pour respecter la condition d'équilibre, il faut que $T = C$, donc $A_1 = A_2$

Par conséquent, l'axe yy' passant par le point O partagera la section en deux parties d'aires égales ; il sera appelé l'axe des aires égales. Il ne doit pas être confondu avec l'axe passant par le centre de gravité de la section, ce qui est le cas quand la section n'est pas symétrique.

Calculons le moment de résistance de la section :

$$M = \int y \sigma dA \quad (\text{V.4})$$

Dans le cas où la section est entièrement plastifiée sur toute sa hauteur, la contrainte vaut $+f_y$ dans la partie supérieure de la section et $-f_y$ dans la partie inférieure de la section. Le moment de résistance de la section qui est le moment plastique M_{pl} est égal à :

$$M = M_{pl} = \int y_1 f_y dA_1 + \int y_2 f_y dA_2 = f_y (\int y_1 dA_1 + \int y_2 dA_2) \quad (V.5)$$

Les intégrales représentant les moments statiques de chaque demi-section, on peut donc réécrire l'expression pour le moment plastique :

$$M_{pl} = f_y (S_1 + S_2) = f_y W_{pl} \quad (V.6)$$

Où W_{pl} qui est la somme des moments statiques de chaque demi-section par rapport à l'axe des aires égales est appelé le module de résistance plastique de la section.

V.3.2 Cas de la section rectangulaire

Dans ce cas, l'axe passant par le centre de gravité de la section et l'axe des aires égales se confondent. Les moments de résistance élastique et plastiques seront donc calculés par rapport au même axe horizontal (voir figure V.6 et V.7).

Calculons le moment élastique M_{el} .

Nous savons que :

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I}$$

Nous pouvons à partir du diagramme bitriangulaire des contraintes de la figure V.6 calculer M_{el} :

$$M_{el} = f_y I / \left(\frac{h}{2}\right) = f_y \left(\frac{bh^2}{6}\right) = f_y W_{el} \quad (V.7)$$

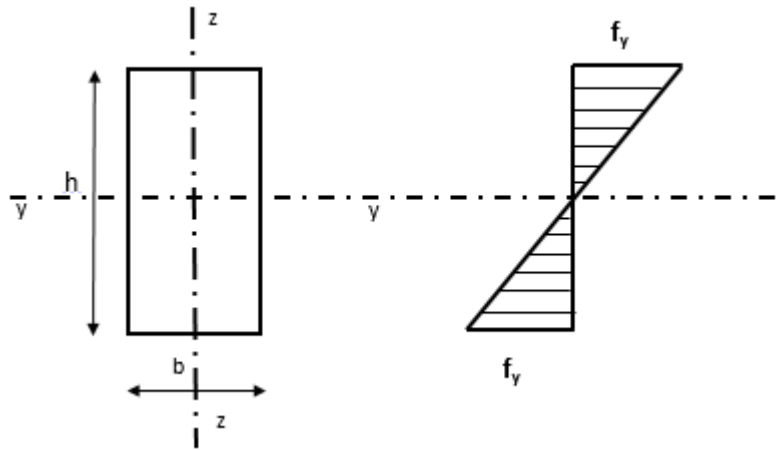


Figure V.6 Diagramme bi-triangular des contraintes

Quand le diagramme des contraintes est bi rectangulaire ($\sigma = f_y$ sur toute la hauteur de la section dans le diagramme de la figure V.7), le moment de résistance plastique M_{pl} de la section est égal à l'expression suivante :

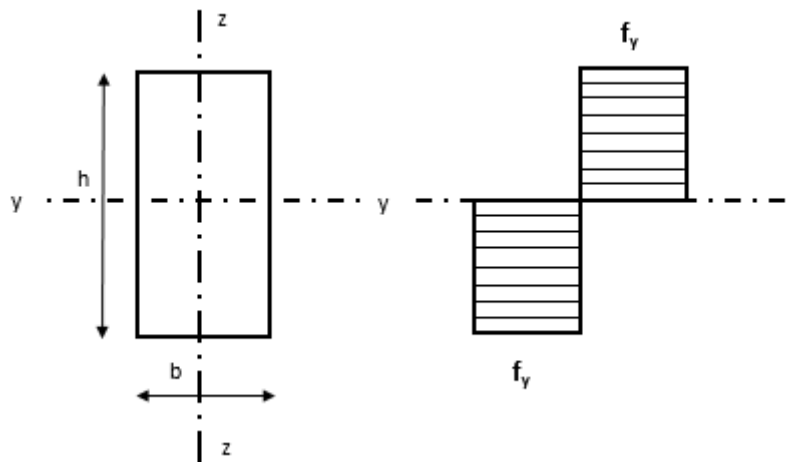


Figure V.7 Diagramme bi-rectangulaire des contraintes

$$M_{Pl} = f_y(S_1 + S_2) = f_y(2S) = f_y W_{Pl} \quad (\text{V.8})$$

$$S = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

$$W_{Pl} = 2S = \frac{bh^2}{4}$$

$$M_{Pl} = f_y \frac{bh^2}{4}$$

Calculons le rapport M_{Pl}/M_{el} qui représente le facteur de forme " f " de la section

$$\frac{M_{Pl}}{M_{el}} = \left[\left(f_y \frac{bh^2}{4} \right) / f_y \left(\frac{bh^2}{6} \right) \right] \quad (\text{V.9})$$

$$\frac{M_{Pl}}{M_{el}} = 1.5$$

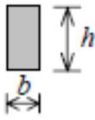
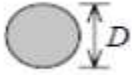

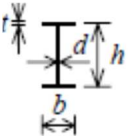
Ce rapport qui est constant pour toutes les sections rectangulaires est une caractéristique géométrique importante de la section.

Dans ce cas, l'axe passant par le centre de gravité de la section et l'axe des aires égales sont confondus. Les moments de résistance élastique et plastiques seront donc calculés par rapport au même axe horizontal (voir figure V.6 et V.7).

V.3.3 Facteur de forme f

La valeur du facteur de forme f a été calculée pour un certain nombre de sections (tableau V.1).

Tableau V.1 : facteurs de forme de diverses sections.

	W_e	W_{pl}	f
	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{bh^2}{4}$	1.5
	$\frac{\pi}{32}D^3$	$\frac{1}{6}D^3$	1.7
	$\frac{\pi}{32}D^3 \left[1 - \left(1 - \frac{2t}{D} \right)^4 \right]$	$\frac{1}{6}D^3 \left[1 - \left(1 - \frac{2t}{D} \right)^3 \right]$	1.27
	$bht + \frac{dh^2}{6}$	$bht + \frac{dh^2}{4}$	1.1 à 1.2

Le facteur de forme mesure le bénéfice dans la résistance dû à la plastification par adaptation dans la section. La contrainte ne pouvant pas dépasser f_y , ce bénéfice provient des moments supplémentaires intérieurs induits par la plastification progressive des fibres de plus en plus proches de l'axe neutre.

V.4 Notion de rotule plastique

Nous allons étudier le comportement d'une poutre sur deux appuis simples chargée à mi-portée par une force concentrée P . La section de la poutre a un moment de résistance plastique qui est égal à M_{pl} .

Si la charge croît progressivement, le moment maximum augmentera jusqu'à ce qu'il soit égal à M_{pl} le moment de résistance plastique de la section. Nous savons (voir figure V.5) que les déformations dues à la courbure de la poutre sont très grandes dans les sections plastifiées de la partie centrale de la poutre par rapport aux déformations dans les autres parties restées élastiques qui sont très petites en comparaison.

Si toutes les déformations sont supposées concentrées dans la partie centrale de la poutre au point où le moment fléchissant est maximum ($M = M_{pl}$), les tronçons de part et d'autre restés élastiques peuvent être considérés comme rigides. On peut penser que ces deux tronçons rigides tournent par rapport au point central qui se comporte donc comme une articulation. Cependant la caractéristique principale de cette articulation que l'on appelle « rotule plastique », qui concentre toutes les déformations en ce point, est qu'elle reste rigide tant que $M < M_{pl}$ et qu'elle permet la rotation relative des deux tronçons assemblés dès que $M = M_{pl}$.

La figure V.8 montre le comportement de la poutre quand la rotule plastique s'est formée à mi-portée au point de moment maximum. Dès que la rotule se forme au centre de la poutre, les déformations deviennent très importantes et provoquent la ruine de la poutre sur deux appuis par la formation d'un mécanisme.

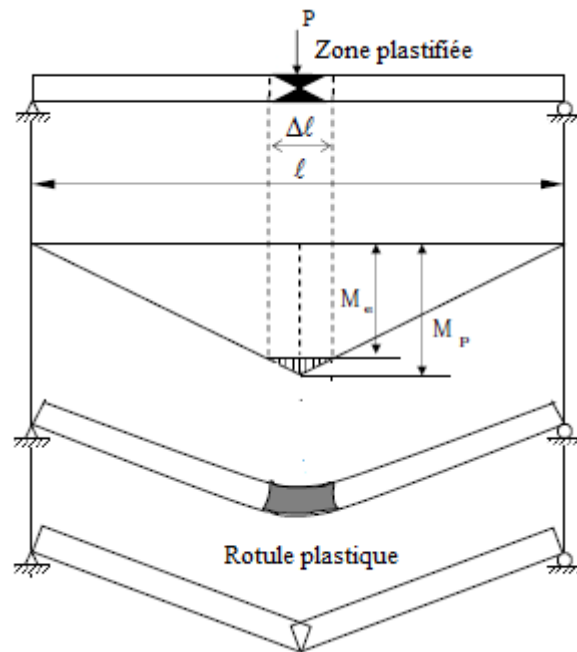


Figure V.8 : Principe du fonctionnement de la rotule plastique

IV.5 Diagramme moment- courbure

Il est possible de trouver une relation entre le moment et la courbure pour une section donnée. Cela permet d'analyser la progression de la plastification dans la section. Trouvons d'abord la relation permettant de définir la courbure de la section. Considérons une portion de poutre fléchie de longueur δ_x qui est initialement droite puis fléchie en un arc de cercle (voir figure V.9). Ceci n'est théoriquement vrai que pour la flexion pure mais cependant l'erreur commise est faible quand les moments varient le long de la travée.

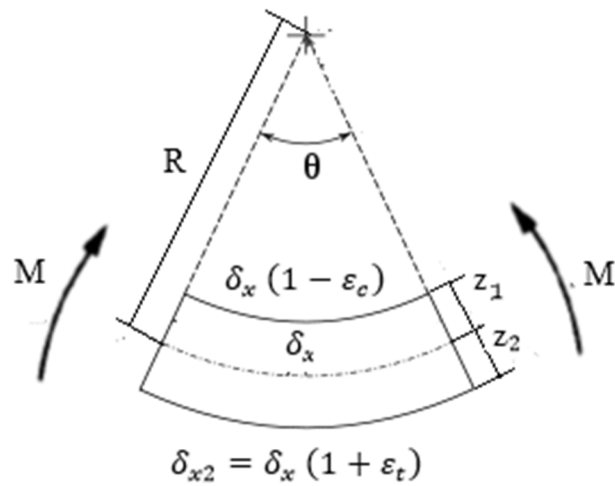


Figure V.9 : Tronçon de poutre fléchie

Il faut rappeler que les sections droites restent planes et que la distribution des allongements ε a une forme bi-triangulaire quel que soit la distribution des contraintes dans la section. Si la longueur de l'arc définissant l'axe des allongements nuls doit rester égal à δ_x , nous obtiendrons pour les longueurs des arcs supérieurs δ_{x1} et inférieurs δ_{x2} .

$$\delta_{x1} = \delta_x(1 - \varepsilon_c)$$

$$\delta_{x2} = \delta_x(1 + \varepsilon_t)$$

Les relations géométriques suivantes sont obtenues à partir de la figure :

$$R \times \theta = \delta_x$$

Nous obtenons en remplaçant δ_x par $R \times \theta$

$$(R + z_2)\theta = \delta_x(1 + \varepsilon_t) \tag{V.10}$$

$$(R - z_1)\theta = \delta_x(1 - \varepsilon_c) \tag{V.11}$$

Ces deux équations donnent à leur tour (V.10)- (V.11)

$$z_1 + z_2 = R(\varepsilon_t + \varepsilon_c) \tag{V.12}$$

La courbure χ est donc égale à

$$\chi = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_c}{z_1 + z_2} \quad (\text{V.13})$$

La courbure maximale élastique est donc

$$\chi_e = \frac{2 \times \varepsilon_e}{z_1 + z_2} = \frac{2 \times \varepsilon_e}{h} \quad (\text{V.14})$$

Examinons le cas où la plastification se propage dans une section dont le diagramme des contraintes est représenté sur la figure V.10. La courbure reste toujours liée à la distance d de l'interface élastique-plastique à l'axe neutre par la relation

$$\chi = \frac{\varepsilon_e}{d} \quad (\text{V.15})$$

Le rapport entre les valeurs de la courbure élastique et la courbure est donc

$$\frac{\chi_e}{\chi} = \frac{2 \times d}{h} \quad (\text{V.16})$$

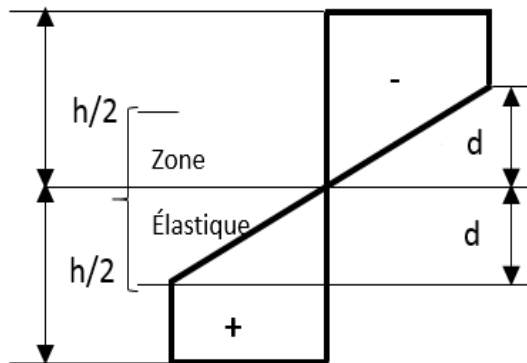


Figure V.10 : Diagramme de contraintes élastique-plastique

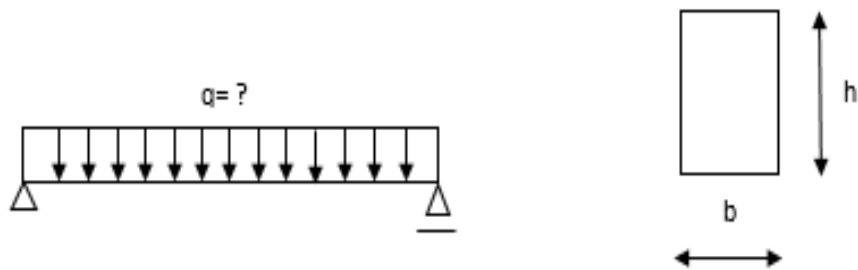
Quand la courbure tend vers l'infini, d tend vers zéro et la rotule plastique correspond au pliage à bloc de l'élément, c'est-à-dire à une courbure égale à $2/h$.

Cette valeur de la courbure maximale est physiquement explicable. Quand la rotule se forme, la section est plastifiée sur toute la hauteur. Les allongements aux extrémités de la section qui sont égaux mais de signes opposés doivent être infinis pour que les sections restent droites, ce qui est physiquement impossible.

V.5 Application

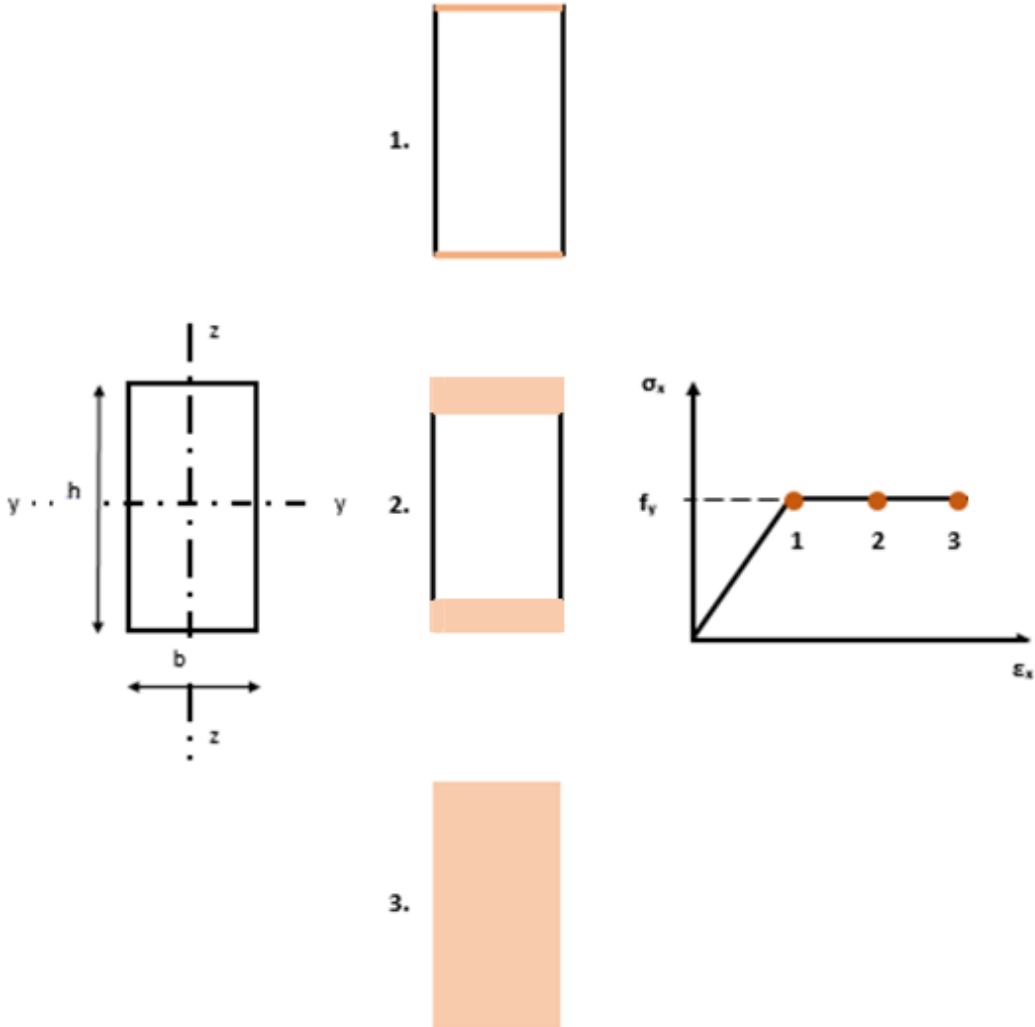
Déterminer l'évolution du chargement pour une poutre rectangulaire dans un cycle de chargement (on supposera que le matériau est parfaitement élasto-plastique).

$$l = 6\text{m}, b = 20\text{mm}, h = 80\text{mm}, f_y = 235\text{MPa}$$



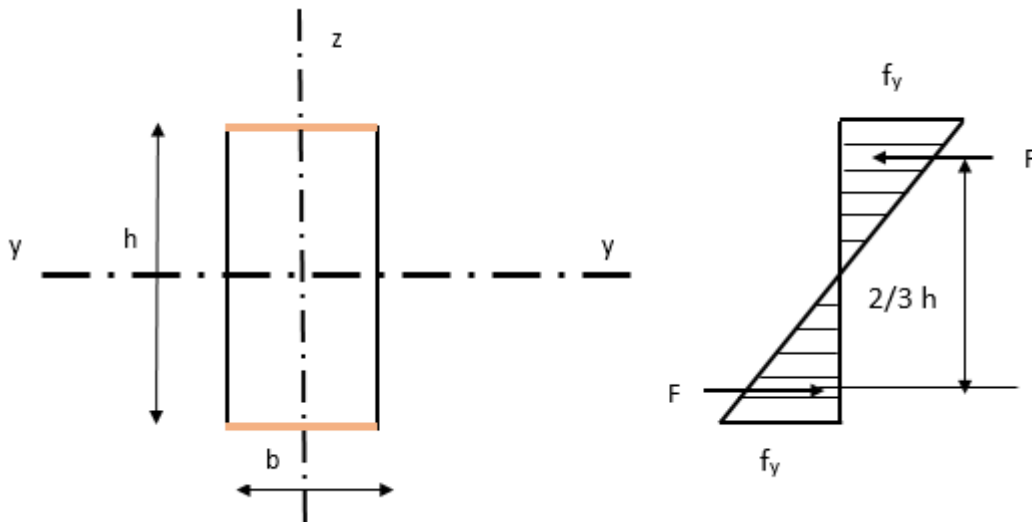
Solution

1. Stades de plastification



2. Calcul du chargement maximal sur la poutre

Stade 1



$$M_{y1} = F \cdot r$$

$$M_{y1} = \frac{1}{2} \cdot f_y \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{2}{3} h$$

$$M_{y1} = \frac{1}{6} b \cdot h^2 f_y$$

$$M_{y1} = f_y \cdot W_{y1} \rightarrow W_{y1} = \frac{M_{y1}}{f_y} = \frac{1}{6} b \cdot h^2 = W_{yel}$$

$$M_{el} = M_{max} = \frac{q_{el} \cdot l^2}{8}$$

$$w_{el} = \frac{1}{6} b \cdot h^2 = \frac{1}{6} 20 \cdot 80^2$$

$$w_{el} = \frac{1}{6} 20 \cdot 80^2$$

$$w_{el} = 2,13 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

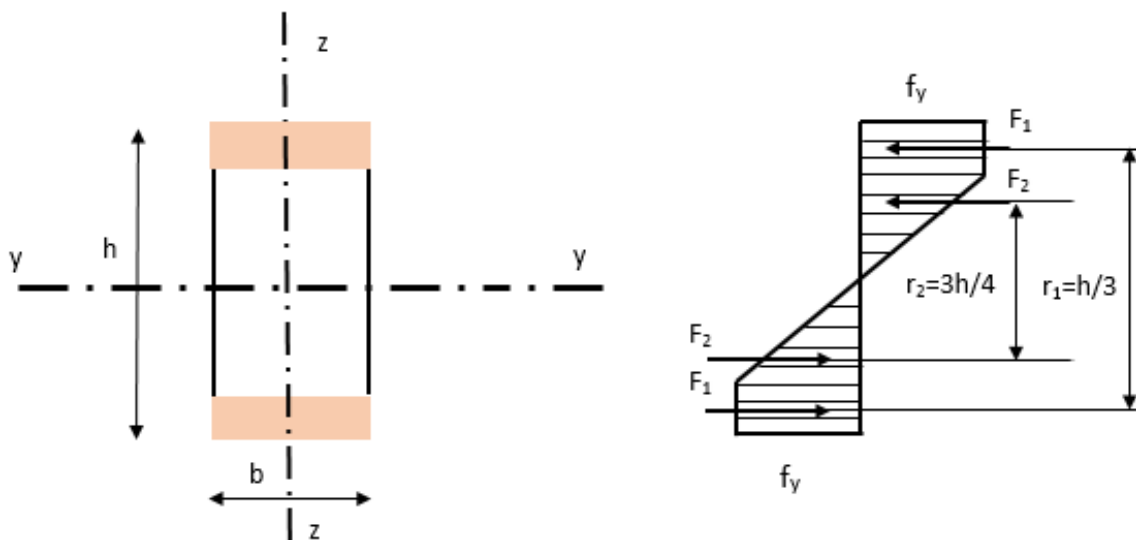
$$w_{el} = 2,13 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{max} = f_y = \frac{M_{el}}{w_{el}} = \frac{q_{el} \cdot l^2}{8w_{el}} \rightarrow q_{el} = \frac{8 \cdot w_{el} \cdot f_y}{l^2}$$

$$q_{el} = \frac{8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-5} \cdot 235 \cdot 1000}{6^2}$$

$$q_{el} = 1,11 \text{ KN/m}$$

Stade 2



$$M_{y2} = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2$$

$$M_{y2} = f_y \cdot \frac{h}{4} \cdot b \cdot \frac{3}{4} h + \frac{1}{2} f_y \cdot \frac{h}{4} \cdot b \cdot \frac{1}{3} h$$

$$M_{y2} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{31}{3} \right) b \cdot h^2 f_y$$

$$M_{y2} = \frac{11}{48} b \cdot h^2 f_y$$

$$W_{y2} = \frac{M_{y2}}{f_y} = \frac{11}{48} b \cdot h^2 = W_{yel,pl}$$

$$M_{el,pl} = \frac{q_{el,pl} \cdot l^2}{8}$$

$$W_{el,pl} = \frac{11}{48} b \cdot h^2$$

$$W_{el,pl} = \frac{11}{48} 20 \cdot 80^2$$

$$W_{el,pl} = 2,93 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

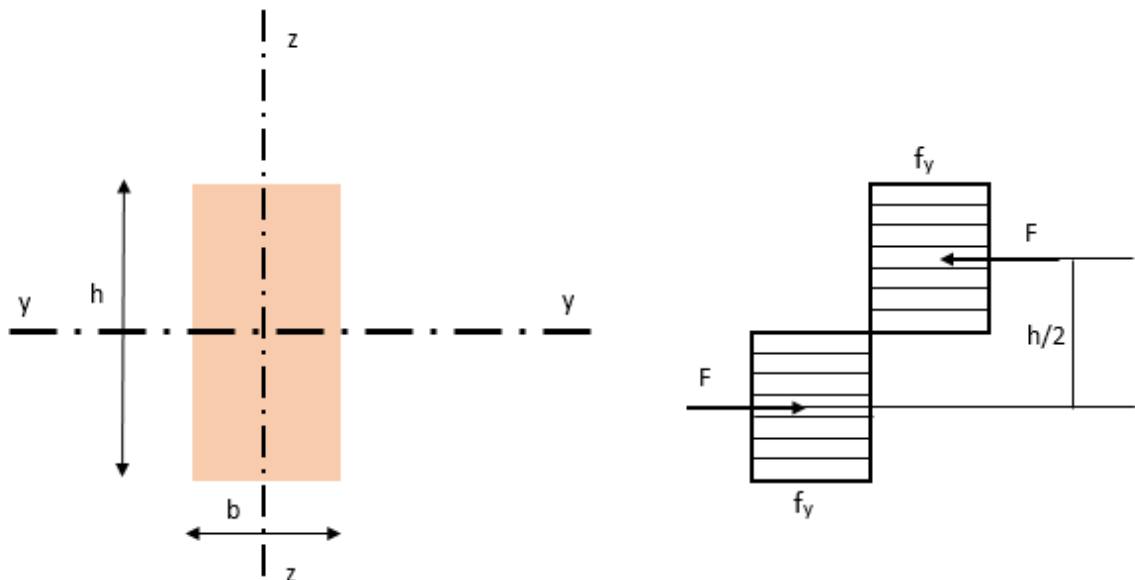
$$W_{el,pl} = 2,93 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{max} = f_y = \frac{M_{el,pl}}{W_{el,pl}} = \frac{q_{el,pl} \cdot l^2}{8W_{el,pl}} \rightarrow q_{el,pl} = \frac{8 \cdot W_{el,pl} \cdot f_y}{l^2}$$

$$q_{el,pl} = \frac{8 \cdot 2,93 \cdot 10^{-5} \cdot 235 \cdot 1000}{6^2}$$

$$q_{el,pl} = 1,53 \text{ KN/m}$$

Stade 3



$$M_{y3} = F \cdot r$$

$$M_{y3} = f_y \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{2}$$

$$M_{y3} = \frac{1}{4} b \cdot h^2 f_y$$

$$W_{y3} = \frac{M_{y3}}{f_y} = \frac{1}{4} b \cdot h^2 = W_{ypl}$$

$$M_{pl} = \frac{q_{pl} \cdot l^2}{8}$$

$$W_{pl} = \frac{1}{4} b \cdot h^2$$

$$W_{pl} = \frac{1}{4} 20 \cdot 80^2$$

$$W_{pl} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{pl} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{max} = f_y = \frac{M_{pl}}{W_{pl}} = \frac{q_{pl} \cdot l^2}{8 W_{pl}} \rightarrow q_{pl} = \frac{8 \cdot W_{pl} \cdot f_y}{l^2}$$

$$q_{pl} = \frac{8 \cdot 3,2 \cdot 10^{-5} \cdot 235 \cdot 1000}{6^2}$$

$$q_{pl} = 1,67 \text{ KN/m}$$

Références bibliographiques

- Blétry, M. (2006). Méthodes de caractérisation mécanique des matériaux. *École Nationale Supérieure des Mines de Paris (2006-2007)*.
- Cailletaud, G., & Tijani, M. (2011). Mécanique des matériaux solides notes de cours. *Paris: MINES ParisTech*.
- Caprani, C. (2010). Plastic Analysis 3rd Year Structural Engineering. *colincaprani.com*
- Marigo, J. J. (2016). *Plasticité et rupture* (Doctoral dissertation, Ecole Polytechnique).
- Oliver Olivella, X., & Agelet de Saracibar Bosch, C. (2017). Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems.
- Oudin, H. (2009). Introduction à la plasticité.
- Vrouwenvelder, A. C. W. M., & Witteveen, J. (2003). Plasticity Ct 4150. *The plastic behavior and the calculation of the plates subjected to bending. Technical University Delft Faculty of Civil Engineering and Geosciences*.
- Zagbai Tape, A. (2009). Cours de Mécanique Des Matériaux Solides. *université Félix-Houphouët-Boigny*.
- Zhi-Qiang, FENG. (2005). Mécanique non linéaire. *Livre. UFR Science et Technologies, Université d'Evry Val d'Essonne, 91p*.