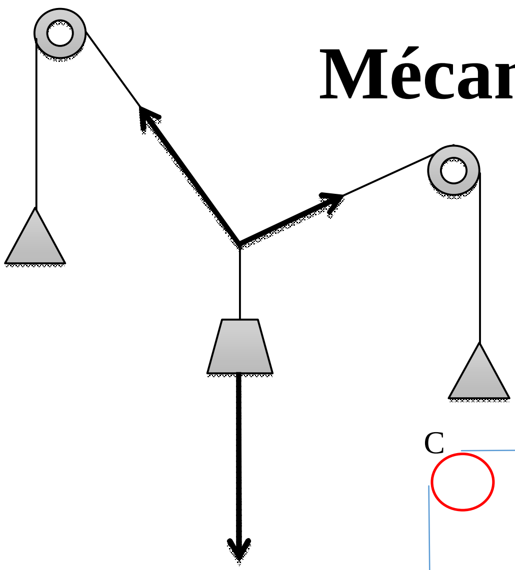
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

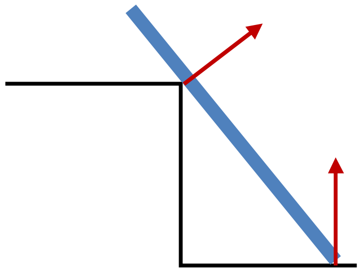
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

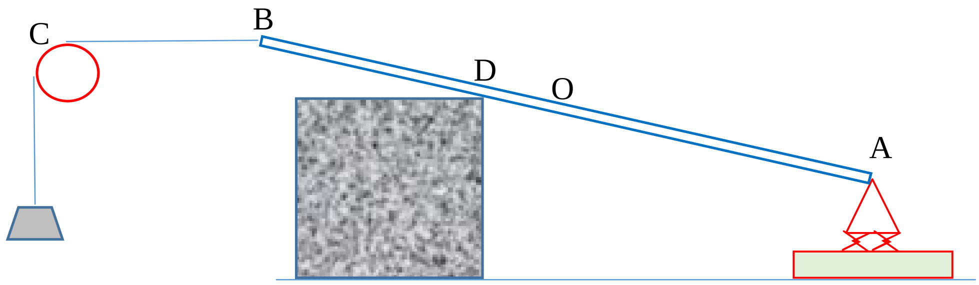
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE MOHAMED BOUDIAF

FACULTE DE PHYSIQUE

Cours
Mécanique Rationnelle







Salim BAADJ

Ce cours est destiné aux étudiants 2éme ANNEE LMD
Domaine Sciences et Technologies

2021-2022

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Rappels mathématiques (éléments de calcul vectoriel).

1.1. Vecteurs

- 1.1. Propriétés de base
- 1.2. Produit scalaire
- 1.3. Produit vectorielle
- 1.4. Produit Mixte
- 1.5. Projection des vecteurs
  - 1.5.1. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe
  - 1.5.2. Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan

1.2. Torseurs

- 2.1. Définition :
- 2.2. Propriétés des torseurs
  - 2.2.1. L'équivalence de deux torseurs :
  - 2.2.2. Torseur nul :
  - 2.2.3. Somme de deux torseurs :
  - 2.2.4. Multiplication d'un torseur par un scalaire :
- 2.3.Axe central d'un torseur
- 2.4.Pas du torseur
- 2.5.Torseur couple

Exercices

Chapitre 2 : Statique

2.1. Généralités et définitions de base

2.1.1. Définition et sens physique de la force

2.1.2. Les systèmes de forces

2.1.3. Opérations sur la force (composition, décomposition, projection)

- A. Décomposition géométrique d'une force
- B. Résultante de deux forces concourantes

2.2. Statique.

2.2.1. Moment d'une force par rapport à un point

2.2.2. Moment d'une force par rapport à un axe

2.2.3. Théorème de Varignon

2.2.4. Condition d'équilibre statique

2.2.5. Liaisons, appui et réactions

Exercices

Chapitre 3 : cinématique du solide rigide.

3.1. Rappels sur les quantités cinématiques pour un point matériel.

3.2. Cinématique du corps solide

3.2.1. Définitions:

- Solide rigide
- Vecteur vitesse de rotation

3.2.2. Champ des vitesses d'un solide en mouvement-Formule de Varignon:

AVANT-PROPOS

Ce manuel est un cours de base de la mécanique des systèmes de solides rigides (Mécanique Rationnelle), particulièrement destiné aux étudiants de premier cycle universitaire, domaine Science Technologies (ST). Cette première édition respecte le contenu du descriptif de la mécanique Rationnelle pour les filières Génie civil, Génie mécanique, Génie maritime, électronique et chimie, de l'université des sciences et de la technologies d'Oran Mohamed Boudiaf . Il est rédigé sous forme de cours détaillés, avec des applications et des exercices. Il est présenté d'une manière qui permet l'étudiant de comprendre facilement et très rapidement. Après une rappelle mathématique sur les vecteurs et les torseurs, ce polycopié aborde les trois axes fondamentaux de la mécanique: la statique, la cinématique, et la dynamique des solides, plus un chapitre concerne la géométrie des masses.

M[r] .BAADJ Salim. (MCB)
Faculté de Physique-USTO. MB
Tel. (+213) 0792 961 241
salimbaadj@hotmail.fr

Chapitre 1

Rappels mathématiques
(Éléments de calcul vectoriel)

Chapitre1 :Rappels Mathématiques

1. Vecteurs:

1.1. Propriétés de base

- Un vecteur, est un segment de droite orienté, relié entre deux points de l'espace, le point **O** est l'origine et d'autre point **A** est l'extrémité.

- Tout vecteur est définie par :

a. Son Origine
b. Sa direction
c. Son sens
d. Son module

- L'addition des deux vecteurs est **commutative**. (Figure 1.1)

- Tout vecteur $\vec{V}$ en trois dimensions (3D) est définie algébriquement par c'est composantes x, y et z, dans lequel :

$$\vec{V}= x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}.$$

$R_0(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ est une base orthonormé dans R^3. Tel que : $\vec{e_i} * \vec{e_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

- Le **module** ou la longueur du vecteur $\vec{V}$ peut calculer par le théorème de Pythagore, Talque : $|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- La somme de deux vecteurs $\vec{V_1}$, et $\vec{V_2}$ est un vecteur $\vec{W}$ définie analytiquement par :
Soit $\vec{V_1}= x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + z_1\vec{e_3}$ et $\vec{V_2}= x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + z_2\vec{e_3}$ donc :

$$\vec{W} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = (x_1 + x_2)\vec{e_1} + (y_1 + y_2)\vec{e_2} + (z_1 + z_2)\vec{e_3}$$

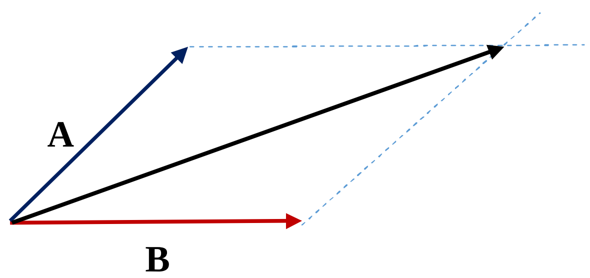


Figure 1.1. Addison de deux vecteurs

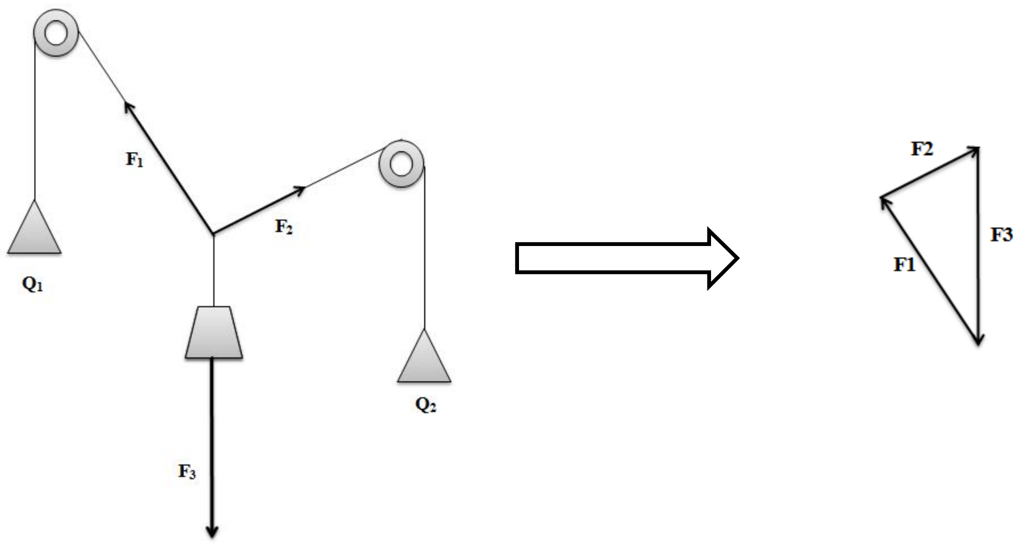


Figure 1.2 Système des forces en équilibre

1.2. **Produit scalaire**

On appelle un produit <u>scalaire</u> de deux vecteurs $\vec{V}_1 et\ \vec{V}_2$ une loi de composition qui associe aux deux vecteurs un **scalaire**. Tel que :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)$$

Le produit scalaire peut définie par l'expression analytique :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

1.3. **Produit vectorielle**

Le produit <u>vectorielle</u> de deux vecteurs est un **vecteur**, tel que :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|\sin(\vec{V}_1\vec{V}_2)\,\vec{n}$$

$\vec{n}$, est vecteur <u>unitaire</u> perpendiculaire au plant formé par $\vec{V}_1 et\ \vec{V}_2$

On peut définie le produit vectorielle entre deux vecteurs par la forme matricielle suivantes:
Soient :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \ et\ \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Donc : $$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} y_1\,z_2 - y_2z_1 \\ z_1\,x_2 - z_2x_1 \\ x_1\,z_2 - x_2z_1 \end{pmatrix}$$

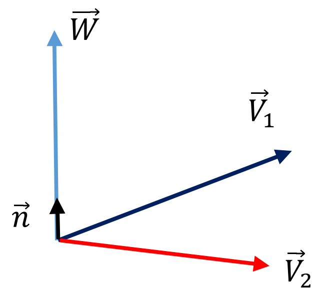


Figure 1.3 produit vectorielle de deux vecteurs

1.4. **Produit Mixte**

Le produit mixte est un scalaire est égale le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2 et\ \vec{V}_3$.

$$\vec{V}_1(\overrightarrow{V_2 \wedge \vec{V}_3}) = \vec{V}_2(\overrightarrow{V_3 \wedge \vec{V}_1}) = \vec{V}_3(\overrightarrow{V_2 \wedge \vec{V}_1})$$

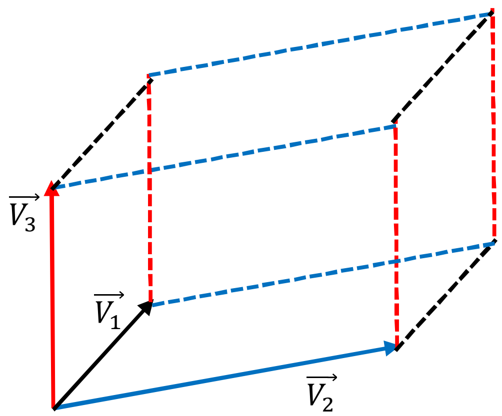


Figure 1.4. Produit mixte de trois vecteurs

1.5. **Projection des vecteurs**

1.5.1. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe

Définition : Soit un vecteur quelconque $\vec{V}$, et un axe (Δ) défini par son vecteur unitaire $\vec{u}$.

La projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ sure l'axe (Δ)définie par la composante $\vec{V}_x$ de ce vecteur sure cet axe.

$$\vec{V}_x = (\vec{V}.\vec{n})\vec{n}$$

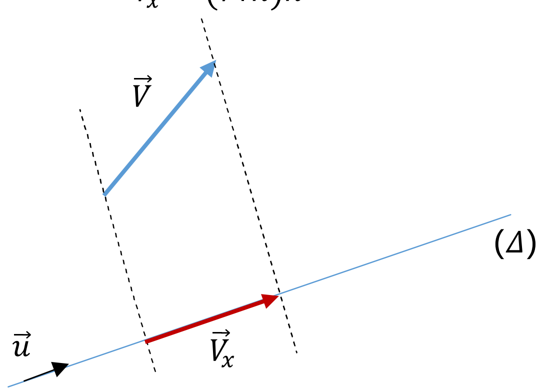


Figure 1.5 Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe

1.5.2. Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan

Définition : Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque, sa projection sur le plan (π) défini par la normale $\vec{n}$est la composante $\vec{V_\pi}$dans le plan.

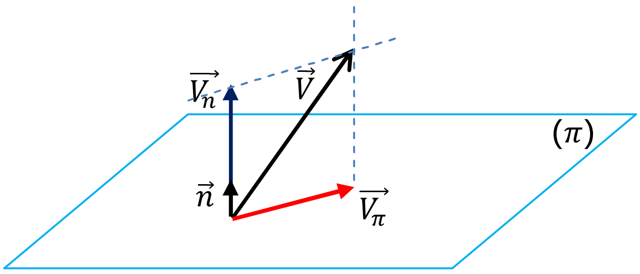


Figure 1.6 Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan

On peut écrire la projection de $\vec{V}$ sur la plan par la relation suivant : $\vec{V_\pi} = \vec{V} - \vec{V_n}$

D'où $\vec{V} = \vec{V}(\vec{n}.\vec{n})$ et $\vec{V_n} = (\vec{V}.\vec{n})\vec{n}$
Donc : $\vec{V_\pi} = \vec{V}(\vec{n}.\vec{n}) - (\vec{V}.\vec{n})\vec{n}$

Et on retrouve l'expression vectorielle du vecteur $\vec{V_\pi}$ par la relaion double vectoriel suivante :

$$\vec{V_\pi} = \vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n})$$

2. Torseurs

2.1. Définition :

On appelle torseur **[T]** l'ensemble d'un champ de vecteurs $\vec{M}$ en un point A et de son vecteur $\vec{R}$associé.
On note

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M} \end{cases}$$

Tel que $\vec{R}$appelé résultante des vecteurs : $\vec{V_1}$,$\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$,….$\vec{V_n}$ appliqués respectivement aux points : B_1,B_2, B_3…B_n. Donné par :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i}$$

Et $\vec{M}$ est le moment résultant en un point A de l'espace est donné par :

$$\overrightarrow{M_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \wedge \vec{V_i}$$

Ces deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{M}$ sont appelés éléments de réduction du torseur au point A.

Remarque : Connaissant le Torseur $[T]_A$ en un point A nous pouvons déterminer les éléments de réduction de ce même torseur en un autre point A de l'espace à l'aide de l'équation de transport :
Nous avons en effet :

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CB_\iota} \wedge \vec{V_\iota}$$

Sachant que : $\overrightarrow{CB_\iota} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB_\iota}$ et $\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_\iota} \wedge \vec{V_\iota}$

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB_\iota}) \wedge \vec{V_\iota} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CA} \wedge \vec{V_\iota} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_\iota} \wedge \vec{V_\iota} = \overrightarrow{CA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{V_\iota} + \vec{M}_A = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A$$

Nous obtiendrons l'équation de transport qui permet de déterminer le moment en un point C en connaissant le moment au point A.

$$\vec{M}_C = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A$$

2.2. Propriétés des torseurs

2.2.1. L'équivalence de deux torseurs :

Deux torseurs sont équivalents $[T_1] = [T_2]$ si et seulement si,

$$[T_1] = [T_2] \leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{M_2} \end{cases}$$

2.2.2. Torseur nul :

Un torseur est nul, si ses éléments de réduction sont nuls :

$$[0] = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M} = \vec{0} \end{cases}$$

2.2.3. Somme de deux torseurs :

Soient $[T_1] = [T_2]$ deux torseurs, la somme de deux torseur est un torseur dont ses éléments de réduction sont la somme des éléments de réduction des deux torseurs.

$$[T]_A = [T_1]_A + [T_2]_A \leftrightarrow [T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \vec{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} \end{cases}$$

2.2.4. Multiplication d’un torseur par un scalaire :

Soient un torseur :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M} \end{cases}$$

Et λ un scalaire real. Nous pouvons écrire :

$$\lambda[T]_A = \begin{cases} \lambda.\vec{R} \\ \lambda.\vec{M} \end{cases}$$

2.3. Axe central d’un torseur

Soit un torseur

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M} \end{cases}$$

On appelle axe central de $[T]$, l'ensemble des points P pour lesquels le moment $\vec{M}$ est colinéaire à$\vec{R}$. donnée par l'équation paramétrique d'une droite parallèle à $\vec{R}$.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_A}}{R^2} + \lambda.\vec{R}$$

λ est un scalaire real.

2.4. Pas du torseur

Si le moment $\vec{M}$ est colinéaire à $\vec{R}$.

$\overrightarrow{M_p} = \boldsymbol{\alpha}.\vec{R}$, d’où $\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R} = \boldsymbol{\alpha}.\vec{R}$. le produit scalaire de cette expression par le vecteur résultant $\vec{R}$ donne :

$$\vec{R}.(\overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}) = \boldsymbol{\alpha}.R^2$$

Ce qui donne

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\vec{R}.\overrightarrow{M_A}}{\boldsymbol{R}^2}$$

α est appelé le Pas du torseur.

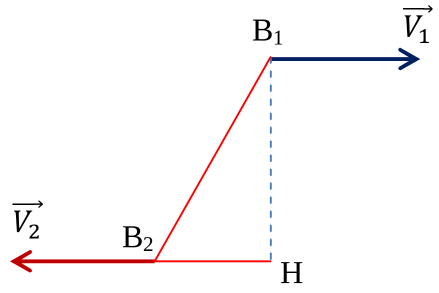
2.5. Torseur couple

Un torseur est dit un torseur <u>couple</u>, si et seulement si, sa résultante est nulle.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_p} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Le moment en un point A quelconque de l’espace est donné par:

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{AB_2} \wedge \overrightarrow{V_2}$
$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{AB_2} \wedge \overrightarrow{V_1}$
$\overrightarrow{M_A} = (\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB_2}) \wedge \overrightarrow{V_1}$
$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{B_2B_1} \wedge \overrightarrow{V_1}$
Sachant que : $\overrightarrow{B_2B_1} = \overrightarrow{B_2H} + \overrightarrow{HB_1}$
$\overrightarrow{M_A} = \left(\overrightarrow{B_2H} + \overrightarrow{HB_1}\right) \wedge \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{HB_1} \wedge \overrightarrow{V_1}$



H est appelé le **Bras**, c'est la projection orthogonale du point B_1 sur la droit support du vecteur $\overrightarrow{V_2}$. En réalité le moment d'un torseur couple ne dépend que de la distance qui sépare les deux droites supports des deux vecteurs, il est indépendant du lieu où il est mesuré.

Le moment d'un torseur couple ne dépend que de la distance qui sépare les deux droites supports des deux vecteurs.

Exercices

Exercice 1:

Soient les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$ tel que:

$\overrightarrow{V_1} = \vec{\imath} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{2\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, $\overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{4\imath} + y\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

1) Déterminer y et z pour que les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ soient colinéaires,

2) Déterminer y pour que les vecteurs $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$ soient perpenduculaires,

3) trouver le volume d'un parallélépipède des cotés $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_4}$. (pour y=1, et z=1)

Corrigé d'Exercice1:

$\overrightarrow{V_1} = \vec{\imath} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{2\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, $\overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{4\imath} + y\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

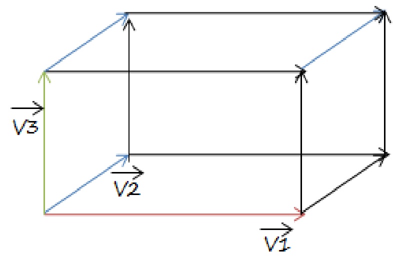
1) $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont *colinaire* $\Leftrightarrow \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \vec{0}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-4y\\8-z\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 8 \end{cases}$$

2) $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$ sont *perpendiculaire* $\Leftrightarrow \overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_4} = 0$

$\overrightarrow{V_3}.\overrightarrow{V_4} = 4 - 2y + 8 = 0 \rightarrow y = 6$

3) Volume d'un parallélépipède des cotes $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_4} = (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}).\overrightarrow{V_4}$



Exercice 2:

Dans un repère $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé, deux points A et B ont pour coordonnées :

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$.

Déterminer :

1) Le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ glissant par rapport au centre O du repère.

2) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite (Δ) passant par le point O et le point $C\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

Corrigé d'Exercice2:

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}et\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ glissant par rapport au centre O du repère.

$$\overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{AB}) = 13\,\vec{\imath} - 19\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

2) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite (Δ) passant par le point O et le point $C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} = \frac{1}{3}(2\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$$

$$\overrightarrow{M_\Delta}(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{AB}).\vec{n})\vec{n} = (13\,\vec{\imath} - 19\vec{\jmath} - 4\vec{k}).\tfrac{1}{3}(2\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})\vec{n}$$
$$= -\frac{16}{3}\vec{n}$$

Exercice 3:

Soient les trois de cordonnés vecteurs, $\overrightarrow{\boldsymbol{V}_1}(-1,1,1)\overrightarrow{\boldsymbol{V}_2}(0,1,2)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{V}_3}(1,-1,0)$ définis dans un repère $R(O,\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}},\vec{\boldsymbol{k}})$ orthonormé et liés respectivement au points, **A(1,1,2), B(1,0,1) , C(1,2,1)**

1) Construire le torseur $[T]$ associé au système de vecteurs.
2) En déduire l'automoment.
3) Calculer le pas du torseur.
4) Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement.

Corrigé d'Exercice3:

$\overrightarrow{\boldsymbol{V}_1}(-1,1,1)\overrightarrow{\boldsymbol{V}_2}(0,1,2)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{V}_3}(1,-1,0)$ liés respectivement au points, **A(1,1,2), B(1,0,1) , C(1,2,1)**

1) Construction du torseur $[T]_0$:

Les éléments de réduction du torseur sont:

$$[T]_0 = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \wedge \vec{V_i} \end{cases}$$

$\vec{R} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}_1} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}_2} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}_3} = \vec{j} + 3\vec{k}$

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix}$$

$\rightarrow \overrightarrow{M_0} = -\vec{\imath} - 4\vec{j}$

2) L'automoment $\boldsymbol{A}$:

$A = \vec{R}.\overrightarrow{M_0} = (\vec{j} + 3\vec{k}).(-\vec{\imath} - 4\vec{j}) = -4$

3) Le pas d'un torseur P :

$\boldsymbol{P} = \dfrac{\vec{R}.\overrightarrow{M_A}}{\boldsymbol{R}^2} = \dfrac{-4}{10}$

4) L'axe central:

On appelle axe central de $[T]$, l'ensemble des points P pour lesquels le moment $\vec{M}$ est colinéaire à $\vec{R}$. donnée par l'équation paramétrique d'une droite parallèle à $\vec{R}$.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_A}}{R^2} + \lambda.\vec{R}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{10}.(\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (-\vec{\imath} - 4\vec{j}) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}12\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{12}{10}\vec{\imath} + (\lambda - \frac{3}{10})\vec{j} + (\frac{1}{10} + 3\lambda)\vec{k}$$

Exercice 4:

Soient deux torseurs $[\mathbf{T_1}]_\mathbf{A}$ et $[\mathbf{T_2}]_\mathbf{A}$ définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonomé $R(O, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$

$$[T_1]_A = \begin{cases}\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{2\boldsymbol{\imath}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} + 2\vec{\boldsymbol{k}}\\ \overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{2\boldsymbol{\imath}} + \vec{\boldsymbol{j}} + 5\vec{\boldsymbol{k}}\end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_A = \begin{cases}\overrightarrow{R_2} = -\overrightarrow{2\boldsymbol{\imath}} - 4\vec{\boldsymbol{j}} - 2\vec{\boldsymbol{k}}\\ \overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{2\boldsymbol{\imath}} - \vec{\boldsymbol{j}} - 5\vec{\boldsymbol{k}}\end{cases}$$

1) Déterminer l'axe centrale et le pas du torseur $[\boldsymbol{T}_1]_\mathbf{A}$

2) Construire le torseur $[\mathbf{T}]_\mathbf{A} = \mathbf{a}\, [\mathbf{T_1}]_\mathbf{A} + \mathbf{b}\, [\mathbf{T_2}]_\mathbf{A}$

3) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $[\mathbf{T}]_\mathbf{A}$ soit un torseur couple,

4) Montrer que le torseur couple est indépendant du point ou on le mesure.

Corrigé d'Exercice4:

$$[T_1]_A = \begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \vec{2\boldsymbol{\imath}} + 4\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 2\vec{\boldsymbol{k}} \\ \overrightarrow{M_1} = \vec{2\boldsymbol{\imath}} + \vec{\boldsymbol{\jmath}} + 5\vec{\boldsymbol{k}} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_A = \begin{cases} \overrightarrow{R_2} = -\vec{2\boldsymbol{\imath}} - 4\vec{\boldsymbol{\jmath}} - 2\vec{\boldsymbol{k}} \\ \overrightarrow{M_2} = \vec{2\boldsymbol{\imath}} - \vec{\boldsymbol{\jmath}} - 5\vec{\boldsymbol{k}} \end{cases}$$

1) L'axe centrale et le pas du torseur $[\boldsymbol{T}_1]_A$

L'axe centrale, C'est l'ensemble des points P pour lesquels le moment $\vec{M}$ est colinéaire à$\vec{R}$. donnée par l'équation paramétrique d'une droite parallèle à $\vec{R}$.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R}_1 \wedge \vec{M}_1}{R^2} + \lambda.\overrightarrow{R_1}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}18\\-6\\-6\end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$= (\frac{18}{24} + 2\lambda)\,\vec{\imath} + (4\lambda - \frac{6}{24})\vec{\jmath} + (2\lambda - \frac{6}{24})\vec{k}$$

Le pas du torseur $[\boldsymbol{T}_1]_A$

$$\boldsymbol{P} = \frac{\vec{R}.\overrightarrow{M_A}}{\boldsymbol{R}^2} = \frac{4+4+10}{24} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12}$$

2) Construire le torseur **$[T]_A$ =a $[T_1]_A$ +b $[T_2]_A$**

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{A}} = \begin{cases} \overrightarrow{R_A} = a\overrightarrow{R_1} + b\overrightarrow{R_2} = 2(a-b)\vec{\boldsymbol{\imath}} + 4(a-b)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 2(a-b)\vec{\boldsymbol{k}} \\ \overrightarrow{M_A} = a\overrightarrow{M_1} + b\overrightarrow{M_2} = 2(a+b)\vec{\boldsymbol{\imath}} + (a-b)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 5(a-b)\vec{\boldsymbol{k}} \end{cases}$$

3) Un torseur est dit un torseur <u>couple</u>, si et seulement si, sa résultante est nulle.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_p} \neq \vec{0} \end{cases}$$

$\rightarrow$ *on implique que* $a = b$ Et donc $\overrightarrow{M_A} = 4a\vec{\boldsymbol{\imath}}$

4) Le moment en un point A quelconque de l'espace est donné par :

$\vec{M}_A = \overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{AB_2} \wedge \overrightarrow{V_2}$

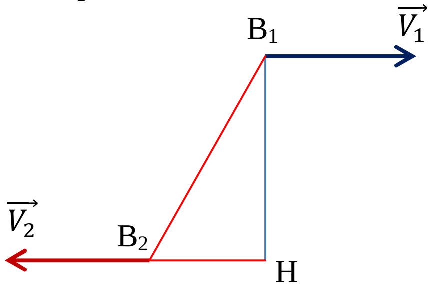
$\vec{M}_A = \overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{AB_2} \wedge \overrightarrow{V_1}$

$\vec{M}_A = (\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB_2}) \wedge \overrightarrow{V_1}$

$\vec{M}_A = \overrightarrow{B_2B_1} \wedge \overrightarrow{V_1}$

Sachant que : $\overrightarrow{B_2B_1} = \overrightarrow{B_2H} + \overrightarrow{HB_1}$

$\vec{M}_A = (\overrightarrow{B_2H} + \overrightarrow{HB_1}) \wedge \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{HB_1} \wedge \overrightarrow{V_1}$



Le moment d'un torseur couple ne dépend que de la distance qui sépare les deux droites supports des deux vecteurs.

Chapitre 2: Statique

2.1. Généralités et définitions de base
2.1.1. Définition et sens physique de la force
2.1.2. Les systèmes de forces
2.1.3. Opérations sur la force (composition, décomposition, projection)
A. Décomposition géométrique d’une force
B. Résultante de deux forces concourantes

2.2. Statique.
2.2.1. Moment d'une force par rapport à un point
2.2.2. Moment d'une force par rapport à un axe
2.2.3. Théorème de Varignon
2.2.4. Condition d’équilibre statique
2.2.5. Liaisons, appui et réactions

Chapitre 2 : Statique

2.1. Généralités et notions fondamentales de la statique

2.1.1. Définition et sens physique de la force:

On désigne en mécanique la mesure quantitative d'interaction de type mécanique des corps matériels macroscopique. On appelle**Force** l'action d'un corps matériels sur un autre, se traduit par (une pression, une attraction, une répulsion, …)

Toute action de force sur un corps solide peut être représentée par un vecteur dont les quatre propriétés sont :

A. Le point d'application A: point où l'action s'exerce sur le corps.
B. Le sens:$A \rightarrow B$.
C. La direction ou' la ligne d'action (Δ).
D. Le module: $|\vec{F}| = |\overrightarrow{AB}|$.

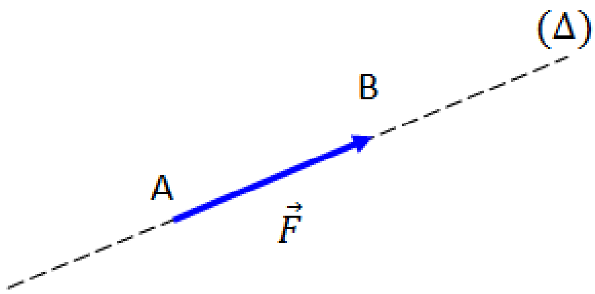


Figure 2.1 Forces

On peut distinguer deux types de forces:

A. Forces extérieures: qui sont exercées par d'autre corps et appliquées en un point du solide donné.
B. Forces intérieurs: sont des forces d'interactions intérieures qui se développent entre les points matériels du solide et dont leur résultante est nulle.

2.1.2. Les systèmes de Forces

On appelle **système de forces** l'ensemble des forces $\vec{F_i}$qui agissent simultanément sur un point matériel ou sur un solide.

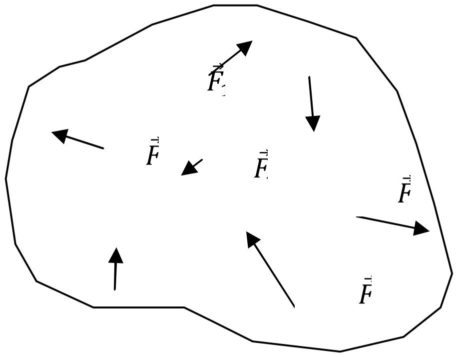
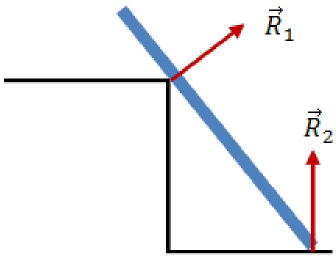
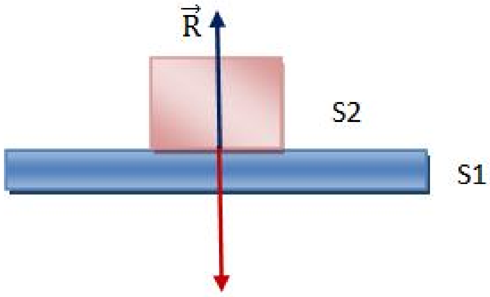


Figure 2.2système de Force

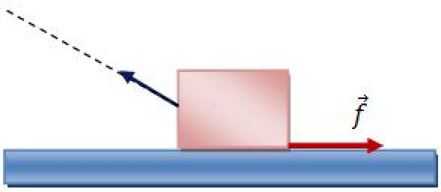
Les systèmes de forces sont classés en trois catégories:

a) Les forces de <u>réaction</u> : si un corps solide exerce une force sur un autre corps, par conséquence le deuxième corps exerce sur le premier corps une force égale et opposée.

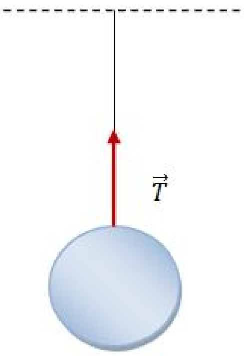




b) Les forces de <u>frottement</u> : la force de frottement existe lorsque deux solides réels sont en contact. La force de frottement est toujours oppose au sens de mouvement



c) Les forces de <u>tension</u> : est une force qui tire sur un élément d'un corps comme par exemple, la tension exercée par un fil ou par un ressort.



2.1.3. Opérations sur la force (composition, décomposition, projection)

A. Décomposition géométrique d'une force

Soit une force $\vec{\boldsymbol{F}}$appliquée à l'origine $\boldsymbol{O}$ d'un repère orthonormé,La composition de cette force sont définies par :

$$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z} = F_x.\vec{\imath} + F_y.\vec{\jmath} + F_z.\vec{k}$$

Tel que: $F_x = F.cos\theta_x$, $F_y = F.cos\theta_y$, $F_z = F.cos\theta_z$

Avec:$F^2 = {F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2$

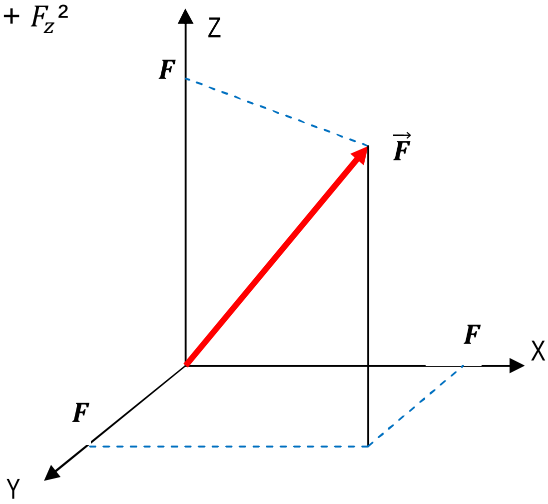


Figure 2.6Décomposition géométrique d'une force

Les angles$\theta_x, \theta_y, \theta_z$se sont les trois angles définie par la projection de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$sur les trois axes OX, OY, OZ donne respectivement,comme il est indiqué sur la figure**.**

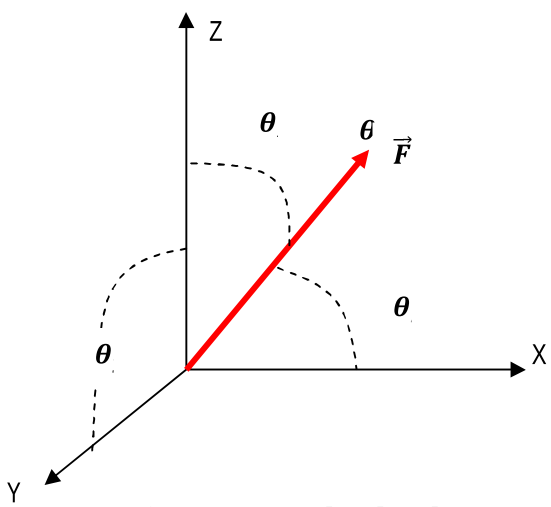


Figure 2.7 Angles d'Euler

On peut notamment exprimer le module de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$en utilisant les **cosinus directeurs** :

$$\frac{F}{cos\theta_x} = \frac{F}{cos\theta_y} = \frac{F}{cos\theta_z}$$

A. Résultante de deux forces concourantes

Soient deux forces $\vec{\boldsymbol{F}}_1$et $\vec{\boldsymbol{F}}_2$appliquées à un point O du solide, On peut déterminer leur résultant $\vec{\boldsymbol{R}}$ a partir du parallélogramme former par ces deux forces (Figure).

Le module et la direction de la résultante $\vec{\boldsymbol{R}}$sont déterminés par la diagonale duparallélogramme construit sur ces deux forces.
Tel que: $\vec{R} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2$
Et son module $R = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2\,F_1F_2cos\theta}$

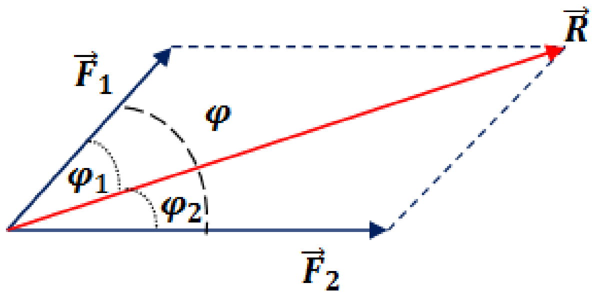


Figure 2.7 Résultante de deux forces

et sa direction se détermine :

$$\frac{F_1}{sin\varphi_1} = \frac{F_2}{sin\varphi_2} = \frac{F_3}{sin\varphi_3} = \frac{R}{sin\varphi}$$

2.2. Statique des solides

2.2.1. Moment d'une force par rapport à un point

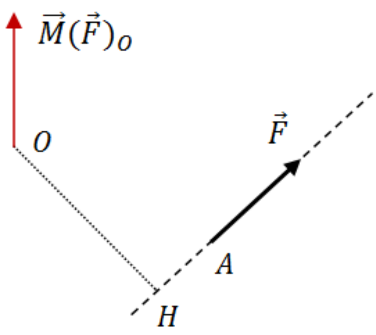
Soit un vecteur de force $\vec{F}$appliqué au point A, On note $\vec{M}(\vec{F})_O$ le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est définie par le produit du $\vec{F}$par le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

$$\vec{M}(\vec{F})_O = \vec{F} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{M}(\vec{F})_O = \vec{F} \wedge \overrightarrow{OH} = F.h\vec{\boldsymbol{n}}$$

Où$h$est le bras de levier de la force $\vec{F}$par rapport au point O.

Démonstration:



Par définition on: $\vec{M}(\vec{F})_O = \vec{F} \wedge \overrightarrow{OA}$

et$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{HA}$

$\vec{M}(\vec{F})_O = \vec{F} \wedge \overrightarrow{OA}$

$\vec{M}(\vec{F})_O = \vec{F} \wedge (\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{HA})$

$\vec{M}(\vec{F})_O = \vec{F} \wedge \overrightarrow{OH} + \vec{F} \wedge \overrightarrow{HA}$

$\vec{F} // \overrightarrow{HA}$implique que $\vec{F} \wedge \overrightarrow{HA} = \vec{0}$

On obtiendra:

$$\vec{M}(\vec{F})_O = \vec{F} \wedge \overrightarrow{OH} = \boldsymbol{F.OH.sin90°\vec{k} = F.h.\vec{k}}$$

2.2.2. Moment d'une force par rapport à un axe

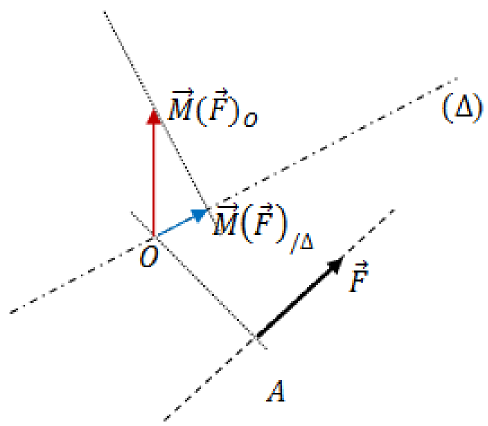


Figure 2.9 Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force$\vec{F}$ par rapport à un axe (Δ)noté par $\vec{M}(\vec{F})_{/\Delta}$est définipar la projection de $\vec{M}(\vec{F})_O$moment de cette force par rapport au point O sur l'axe Δ).

Le point O est la projection du point A l'origine de$\vec{F}$ sur l'axe (Δ).

$$\vec{M}(\vec{F})_{/\Delta} = \left(\vec{M}(\vec{F})_O.\vec{u}\right).\vec{u}$$

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire du l'axe (Δ).

2.1.1. Théorème de Varignon

Dans un système de forces <u>concourantes</u> en un point A, le moment résultantpar rapport à un point quelconque$O$ est égal au moment de la résultante par rapport au même point$O$.

Démonstration:

Nous avons: $\overrightarrow{OM_\iota} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_\iota}$

$$\overrightarrow{M_\iota}(\vec{F_i})_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_\iota} \wedge \vec{F_i} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F_2} + \cdots + \overrightarrow{OM_n} \wedge \vec{F_n}$$

$$\overrightarrow{M_\iota}(\vec{F_i})_O = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1}) \wedge \vec{F_1} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2}) \wedge \vec{F_2} + \cdots + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_n}) \wedge \vec{F_n}$$

Or $\overrightarrow{AM_1} // \vec{F_1}$ implique que $\overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F_1} = \vec{0}$

On obtient alors: $\overrightarrow{M_\iota}(\vec{F_i})_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_2} + \cdots + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_n}$

$$\overrightarrow{M_\iota}(\vec{F_i})_O = \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n}) = \overrightarrow{OA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}$$

On obtient finalement: $\overrightarrow{M_\iota}(\vec{F_i})_O = \overrightarrow{M_\iota}(\vec{R})_O$

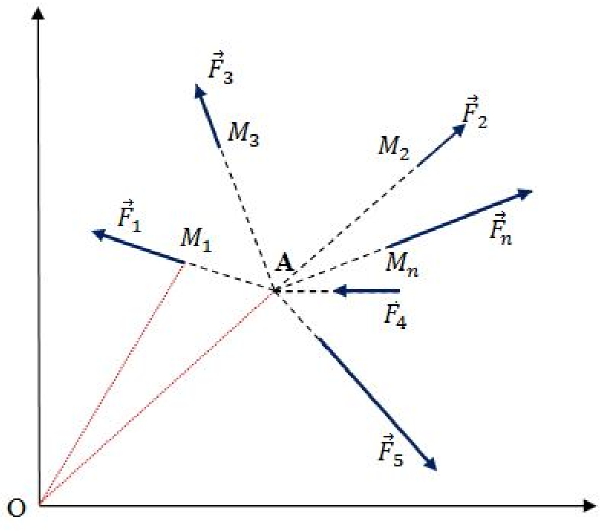


Figure 2.10 système de forces concourantes

2.1.2. Condition d'équilibre statique

Un corps solide est en**équilibrestatique** lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur lui et que ces forces ne modifient pas son état (état de repos ou son état de mouvement).

Pour qu'uncorps solidesoit en équilibre statique il faut que le torseur de forces extérieuressoitnul:

$$[T_0] = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(\vec{F_i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Enconséquence:

1. la somme de toutes les forces extérieures auxquelles il est soumis, est nulle.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{0}$$

2. le moment résultant de toutes ces forces soit nulle.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}(\vec{F_i}) = \vec{0}$$

Ces deux condition d'équilibre peut se traduisent en six équation analytique par la projection des éléments du torseur des forces sur les axes d'un repère orthonormé $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

1. Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R} = \begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{xi} = \vec{0} \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{yi} = \vec{0} \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{zi} = \vec{0} \end{cases}$$

2. Et trois équations liées au moment des forces par rapport point O:

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F_i}) = \begin{cases} \overrightarrow{M_{0x}}(\vec{F_i}) = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{0y}}(\vec{F_i}) = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{0z}}(\vec{F_i}) = \vec{0} \end{cases}$$

Exemple: Equilibre d'un solide dans un plan (O, X, Y):

Soit un solide soumis à des forces coplanaires$z = 0$, le système d'équation d'équilibre se réduit en trois équations:

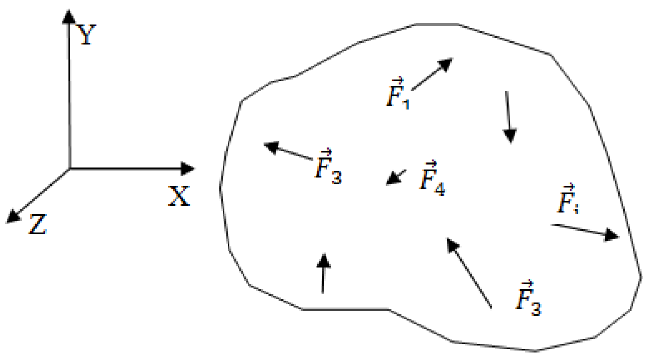
a) $R_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{xi} = \vec{0}$

b) $R_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{yi} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{M_{Oz}}(\vec{F}_i) = \vec{0}$

On a: $\overrightarrow{F_i} = \begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_{0i} = \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \end{pmatrix}$$



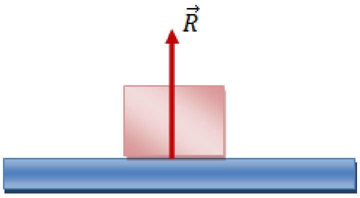
2.2.4. Liaisons, appui et réactions

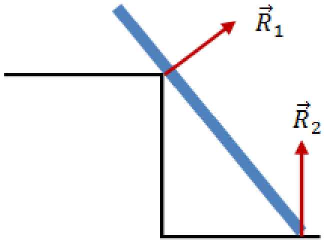
Définition

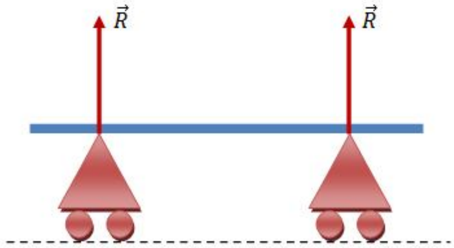
- ✓ Unsolide est dit **libre** s'il peut se déplacer en toute direction. Par exemple une pierre lancéedans l'espace est un solide libre.
- ✓ Un solide est dit **lié** s'il ne peut se déplacer que dans desdirections déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.
- ✓ Les corps matériels qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés **liaisons,** et lesforces qu'ils exercent sur le solide, sont des **réactions** de liaisons.
- ✓ un point **A** du solide est dit un point d'**appui** s'il reste en contact avec un surface en **A**.
- ✓ Un corps solide est dit une **articulation**s'il permet de fixé le solide dans une direction privilégié dans l'espace.
- ✓ Un solide est dit**encastré**s'il resté fixe quels que soit les forces extérieures appliquées.

a. **Liaison ponctuelle** (**appui simple**):

Le solide est en contact ponctuels avec d'autre solide ou surface (surface poli, rouleau cylindrique). Un appui simple permet de bloquer le mouvement suivant une direction et laissai deux degré de liberté.
La réaction est donc dirigée suivant la normale (perpendiculaire au plan tangent de l'appui).



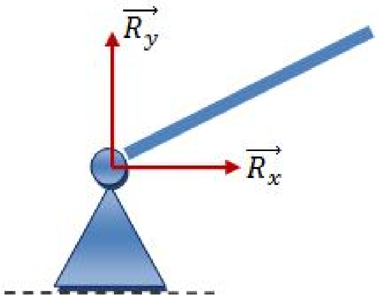


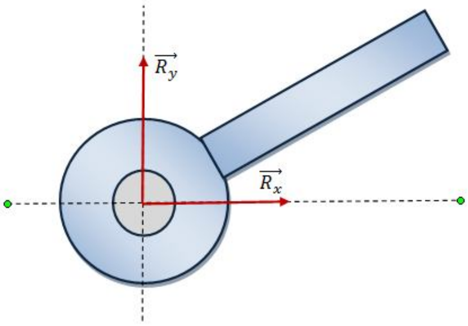


b. Liaison verrou, Articulation cylindrique (appui double):

Le solide est en contact avec d'autre solide de surface cylindrique, Permet de bloquer le les translations dans deux directions. Le solide donc a une translation suivant l'axe $\overrightarrow{oz}$, et une rotation autour du même axe.
La réaction suivant l'axe de l'articulation $\overrightarrow{oz}$ est nulle.

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y, \quad \vec{R}_z = \vec{0}$$

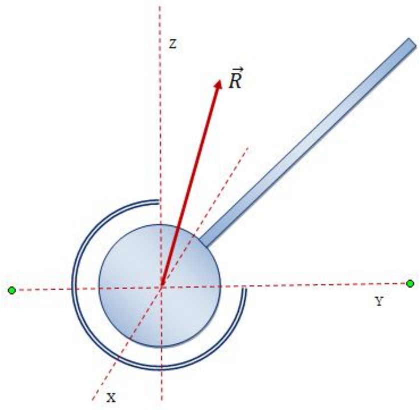




c. Liaison rotule (Articulation sphérique)

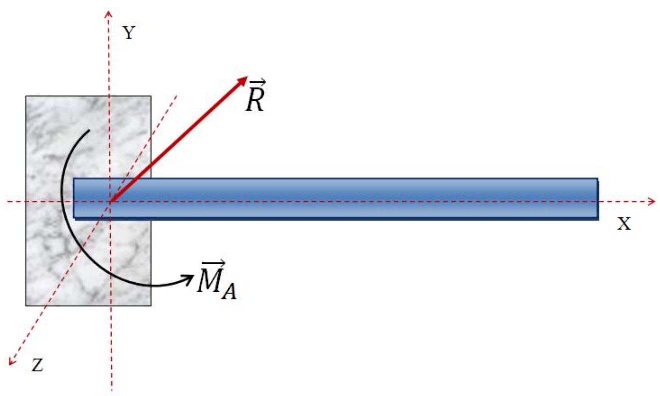
Le corps solide articulé par unearticulation sphérique (liaison rotule).

La réaction est à trois degré de liberté**:** $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$



d. Encastrement d'un solide

La liaison encastrement il ne permet pas changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées.
Les réactions sont représentées par composantes et un moment qui empêche la rotation du solide.$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$,et$\vec{M}_A$.

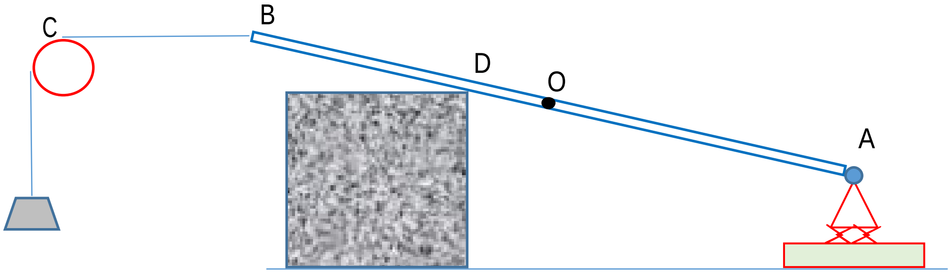


Exercices:

Exercice 1:

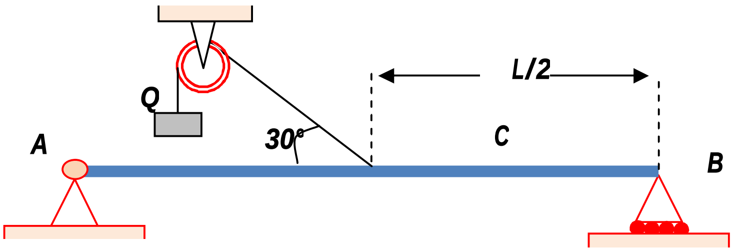
Une tige **AB**, de points 40Kg et de longueur L=4a, articulée à son extrémité **A** à la liaison *cylindrique* est repose sur une surface au point **D**. l'extrémité **B** est attaché à un fil enroulé autour d'une poulie et supporté une masse de Q=200N.

1) Représenté les forces exerçant sur ce système.
2) Déterminer la réaction de l'articulation A.
3) Déduire la force exercée la tige sure le surface au point D.



Exercice 2:

Calculer les réactions en ***A*** et ***B*** d'une barre homogène d'extrémités ***AB***, de longueur ***L***, de poids $\vec{P}$ sont soumises aux liaison *cylindrique* et *rouleau* respectivement en ***A*** et ***B***. Dans le plan vertical, l'extrémité d'un fil passant par une poulie, est attachée au centre de la barre point***C***. L'autre extrémité du fil supporte une charge $\vec{Q}$.



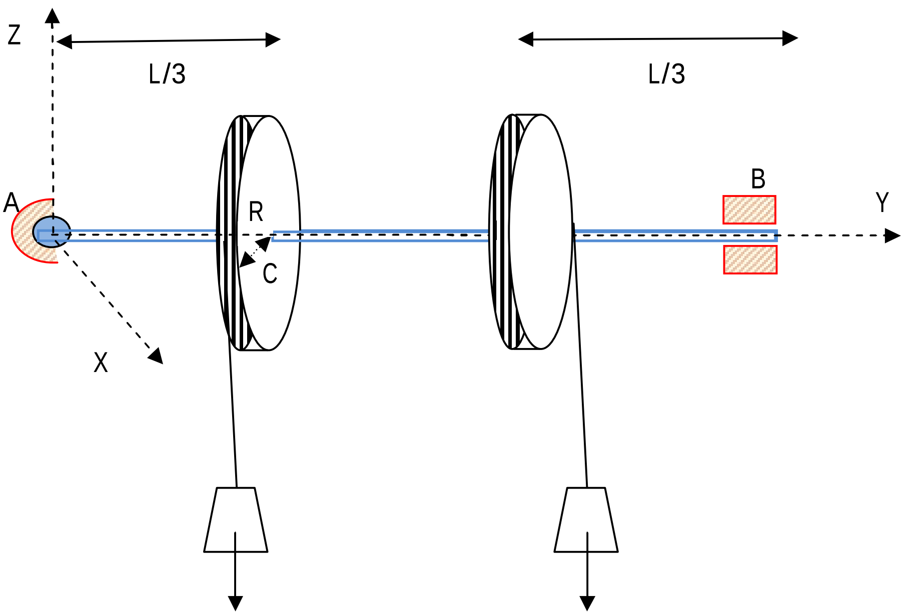
Exercice 3:

Un système mécanique composé d'une barre horizontal **AB** de masse négligeable de longueur **L**et d'un disque de rayon **R**, de masse négligeable,La barre est supportée à ses extrémités par deux liaisons *cylindriques*et *sphérique* respectivementen A et B. Le point

C est relie à deux disques de rayon R et de masse négligeable. Un fil inextensible est enroulé autour de la roue et porte une charge ***P***

On donne : L = 3 m ; R = 0,4m.

- Déterminer les réactions aux appuis A et B ainsi que la charge P à l'équilibre statique.

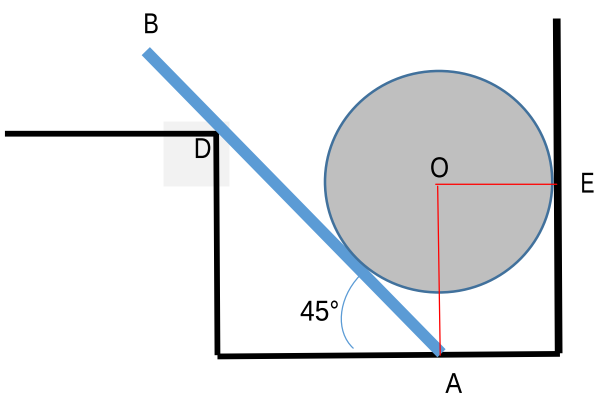


Exercice 4:

Un cylindre de rayon **R** et de poids Q repose entre un mur vertical et une barre (**AB**) de poids P et de longueur L. cette dernière tourne autour d'un axe horizontal en (A) et s'appuie sur l'arête en (D) avec un (**AD** = 3L/4).

Déterminez en fonction de Pet Q.

1) l'action du mur sur le cylindre E.
2) la réaction de l'articulation A et laréaction aux points A et D.



Chapitre 3:
La cinématique des solides

3.1. Rappels sur les quantités cinématiques pour un point matériel.

3.2. Cinématique du corps solide
- 3.2.1. Définitions:
  - Solide rigide
  - Vecteur vitesse de rotation
- 3.2.2. Champ des vitesses d'un solide en mouvement-Formule de Varignon:
- 3.2.3. Equiprojectivité du champ de vitesses d'un solide
- 3.2.4. Torseur cinématique
- 3.2.5. Champ des accélérations

3.3. Les lois de composition des mouvements
- 3.3.1. Composition des vitesses
- 3.3.2. Composition des accélérations
- 3.3.3. Compositiondes vecteurs rotations

3.4. Mouvements fondamentaux
- 3.4.1. Mouvement de translation:
- 3.4.2. Mouvement de rotation pur autour d'un axe:
- 3.4.3. Mouvement hélicoidal (translation+rotation)
- 3.4.4. Mouvement plansur plan

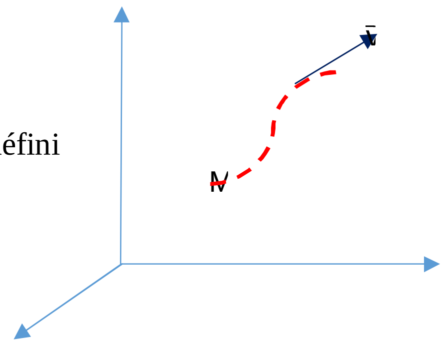
Chapitre 3: La cinématique des solides rigides

L'objectif de la cinématique du solide est de traité les quantités cinématique (position vitesse et accélération) de tous les points d'un solide en mouvement par rapport à un repère déterminé, sans tenir compte les causes qui ont provoqué ce mouvement.

3.1. Rappels sur les quantités cinématiques pour un point matériel.

a) Trajectoire

Soit M un point mobile dans un référentiel fixe$R_O(O, x_0, y_0, z_0, t)$.
Dans un intervalle de tempsΔtle point M décrit dans le repère R_O une courbe appelée trajectoire.



b) Vitesse

La vitesse moyenne$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{m}}$d'un point entre les deux instants est défini par :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La vitesse instantanée$\vec{\boldsymbol{v}}$c'est le vecteur tangent de la trajectoire et dirigé vers le sens du mouvement, elle estdéfinie par:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

c) Accélération

L'accélération moyenne$\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{m}}$ d'un point matériel entre t et Δt est définie par:

$$\vec{\gamma}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée$\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ est définie par:

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\gamma}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

3.2. Cinématique du corps solide

Dans tout ce qui suit, $\boldsymbol{R_0}(\vec{\boldsymbol{\imath}}_{\boldsymbol{0}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}_{\boldsymbol{0}}, \vec{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{0}})$est un référentiel absolu fixe et $\boldsymbol{R}(\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$est un référentiel relatif lié au solide.

On note $\vec{\Omega}_{\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R_0}}$ le vecteur rotation instantanée de $(\boldsymbol{R})$ par rapport a $(\boldsymbol{R_0})$.

3.2.1. Définitions:

- **Solide rigide**

Un solide est dit rigide est un solide indéformable, mathématique sa signifie que la distance entre n'importe quel deux points de celui-ci reste invariable au court du temps :

$$\overrightarrow{AB}^2 = cte$$

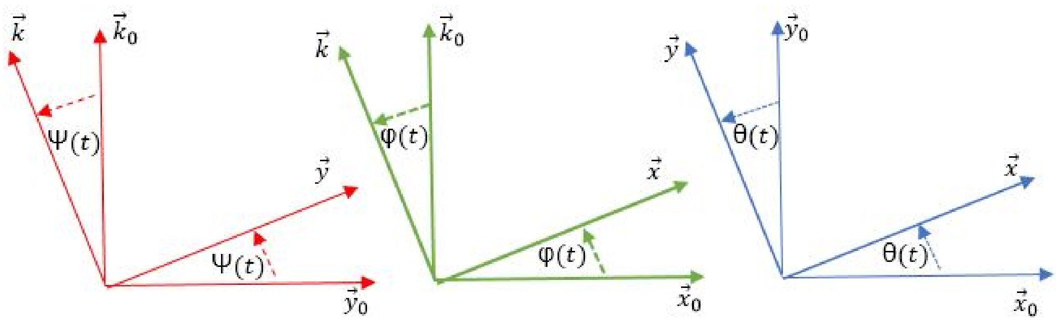
Or $\overrightarrow{AB}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = 0$

- **Vecteur vitesse de rotation**

Soit le repère$(\boldsymbol{R})$ en mouvement de rotation autour de l'axe $\overrightarrow{z_0}$par rapport au repère$(\boldsymbol{R_0})$, par une angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{y}_0, \vec{y})$.

On note $\vec{\Omega}_{\boldsymbol{R/R_0}}$ le vecteur **vitesse de rotation** du repère $(\boldsymbol{R})$ par rapport au repère $(\boldsymbol{R_0})$ qui est perpendiculaire au plan de rotation.

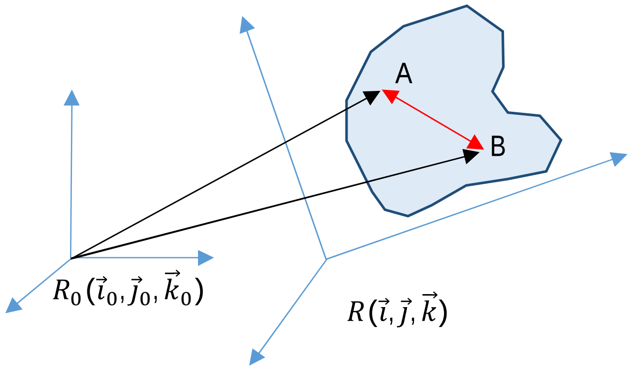
$$\vec{\Omega}_{\boldsymbol{R/R_0}} = \frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}.\overrightarrow{k_0}$$



Dans le cas générale si le mouvement de rotation du repère $(\boldsymbol{R})$ par rapport au repère $(\boldsymbol{R_0})$est constitué de plusieurs rotations élémentaires d'angle θ_i appelé les angles d'Eulerautour lesl'axes$(\vec{e_i})$. Alors:

$$\vec{\Omega}_{\boldsymbol{R/R_0}} = \frac{\boldsymbol{d\theta_i}}{\boldsymbol{dt}}.\vec{e_i}$$

3.2.2. *Champ des vitesses d'un solide en mouvement*-Formule de Varignon:



On utilise l'expression des vitessesdes points A et B par rapport à R_0:

$$\vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{B/R} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{OB}$$

D'où:

$$\vec{V}_{B/R_0} - \vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{B/R} - \vec{V}_{A/R} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

Or: les points A et B sont fixe dans le solide(R),implique que leur vitesse par rapport à R sont égaux:$\vec{V}_{B/R} - \vec{V}_{A/R} = \vec{0}$
Et$\vec{\Omega}_{R/R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0}$car le référentiel **R** et attaché au solide **S**.

Par conséquent :

$$\vec{V}_{B/R_0} = \vec{V}_{A/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

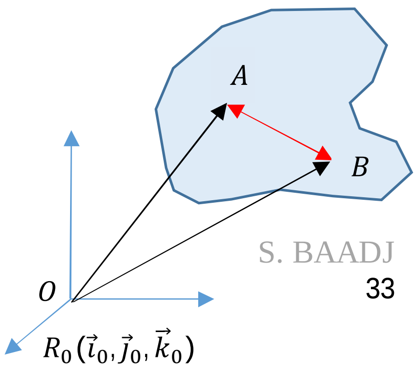
Remarque:

- C'est la formule de champ des vitesses d'un solide rigide il montre que c'est un champ antisymétrique.
- $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ ne dépend pas des points **A** ou **B**. (c'est invariant)
- $\vec{V}_{B/R_0}$se déduit de la vitesse $\vec{V}_{A/R_0}$par la relation de **l'équiprojectivité.**

3.2.3. Equiprojectivité du champ de vitesses d'un solide

Pour un solide rigide on à $\overrightarrow{AB}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = 0$

D'où$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

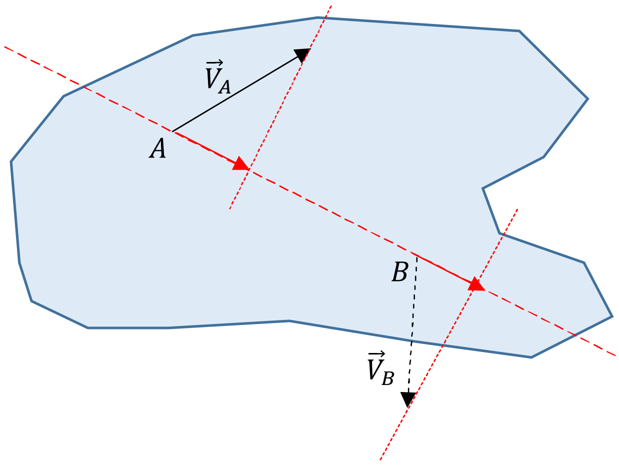


$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R_0} - \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0}$$

On obtient ainsi l'égalité$\overrightarrow{AB}.\vec{V}_{B/_{R_0}} = \overrightarrow{AB}.\vec{V}_{A/_{R_0}}$

Cette relation représentela propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses du solide**.**

Elle permettra de déterminer la vitesse au point B à partir de la vitesse au point A.



3.2.4. Torseur cinématique

Le champ des vitesses d'un solide rigide S en mouvement de rotation par rapport à un repère R_0est représenté par un torseur cinématique et noté:$\left[\boldsymbol{v}_{S/R_0}\right]_A$

Ces éléments de réduction est définie par:

- La résultante de ce torseur, notée: $\vec{\Omega}_{S/R_0}$
- Et le moment cinématiqueau point $\boldsymbol{A}$:$\vec{\boldsymbol{V}}_{A/R_0}$

$$\left[v_{S/R_0}\right]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{\boldsymbol{V}}_{A/R_0} \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}_{S/R_0}$est le vecteur de rotation instantané du solide **(S)** par rapport au repère R_0et $\vec{\boldsymbol{V}}_{A/R_0}$est le vecteur vitesse du point A au solide **(S)**par rapport au repèreR_0.

3.2.5. Champ des accélérations

Par la dérivation de l'équation du champ de vitesseon peut associer un champ d'accélération par rapport à R_0 noté $\gamma_{/R_0}$:
Sachant que:

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{B/R_0}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{B/R_0}}}{dt}\bigg|_{R_0} = \frac{d\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}}}{dt}\bigg|_{R_0} + \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{dt}\bigg|_{R_0} \wedge \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\bigg|_{R_0}$$

Or:

$$\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{dt}\bigg|_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{dt}\bigg|_{R} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$$

Et $\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{dt}\Big|_{R} = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{B/R_0}}}{dt}\bigg|_{R_0} = \frac{d\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}}}{dt}\bigg|_{R_0} + \frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\bigg|_{R_0} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + (\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}) \wedge \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{B/R_0}} = \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{A/R_0}} + (\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}) \wedge \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\bigg|_{R_0}$$

C'est la loi de distribution des accélérations (Formule de Rivals) dans un corps solide rigide.
Contrairement au champ de vitesse, on ne peut pas trouver un torseur pour le champ des accélérations.

3.3. Les lois de composition des mouvements

Nous allons étudier dans ce qui suite les lois de compositions des mouvements qui permettra de passer d'un repère à un autre.

3.3.1. Composition des vitesses

Soit un solide (S), son mouvement est connu par rapport à un repère R.

Tel que:

$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{V}_a(M)$, Sa vitesse **absolu** par rapport à R_0.

$\vec{V}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_{R} = \vec{V}_r(M)$, Sa vitesse **relative** par rapport à R.

D'où $\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$

$$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d(\overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM})}{dt}\bigg|_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\bigg|_{R_0} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_{R_0}$$

$$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\bigg|_{R_0} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_{R} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{O/R_0} + \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{R/R_0}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On a alors:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

Avec $\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{R/R_0}} \wedge \overrightarrow{OM}$ c'est la vitesse **d'entrainement** du point M.

3.3.2. Composition des accélérations

On reprend un solide (S) en mouvement par rapport à R.

Sachant que l'accélération absolu d'un point M est défini par:

$$\vec{\gamma}_M = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_0M}}{dt^2}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt}\right|_{R_0}$$

On a alors $\vec{\gamma}_{M/R_0} = \left.\frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(\vec{V}_{O/R_0} + \vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt}\right|_{R_0}$

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \left.\frac{d\vec{V}_{O/R_0}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d(\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \vec{\gamma}_{O/R_0} + \left.\frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \vec{\gamma}_{O/R_0} + \left.\frac{d\vec{V}_{M/R}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \vec{V}_{M/R} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{OM}$$
$$+ \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R}\right)$$

Ce qui donne

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \vec{\gamma}_{O/R_0} + \vec{\gamma}_{M/R} + \mathbf{2}\left(\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \vec{V}_{M/R}\right) + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \vec{V}_{M/R}\right)$$

Et finalement on a

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

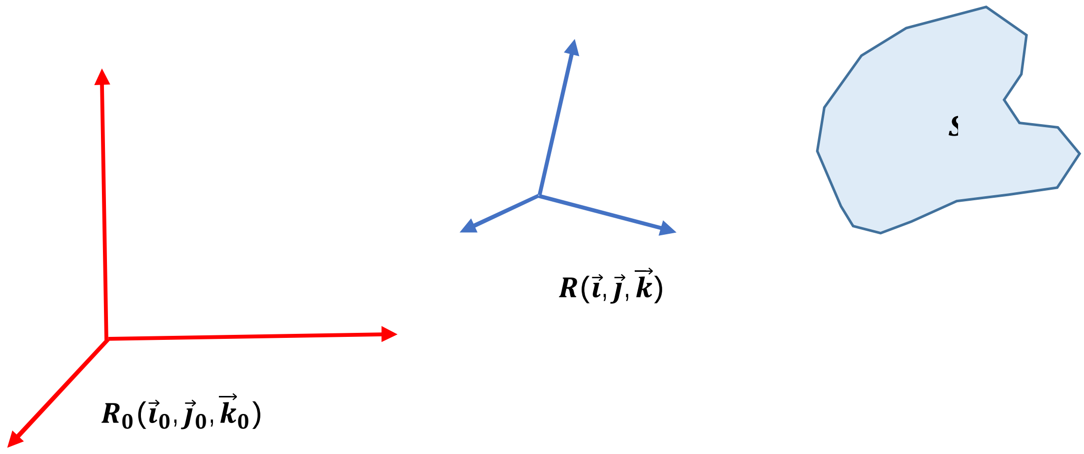
Avec:

- $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}_{M/R}$ c'est <u>l'accélération **relative**</u> d'un point M par rapport à un observateur lie au repaire R.

- $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{0/R_0} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{V}_{M/R}\right)$ c'est l'accélération **d'entrainement** du point M.
- $\vec{\gamma}_c = 2\left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{V}_{M/R}\right)$ est dit l'accélération de **Coriolis**.

3.3.3. Composition des vecteurs rotations:

Soit un solide S en mouvement par rapport au deux repère (R_0) et (R) Qui sont elle-même en mouvement l'un par rapport à l'autre.



Nous pouvons écrire:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \overrightarrow{O_0M}$$

Et

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{S} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{O_0M}$$

On ajoute les termes des deux équations:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{S} + \left(\vec{\Omega}_{R/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R}\right) \wedge \overrightarrow{O_0M}$$

Par ailleurs on peut écrire:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{S} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{O_0M}$$

Par conséquence on en déduit la règle de composition des vecteurs instantanés des vitesses de rotation :

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{R/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R}$$

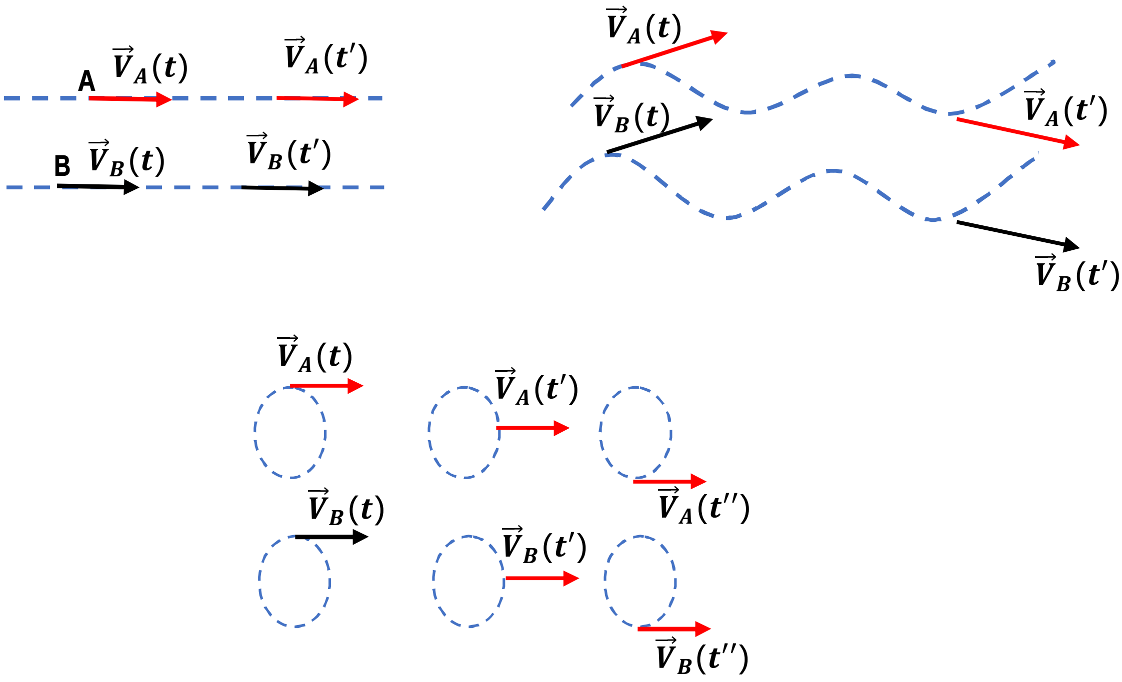
3.4. Mouvements fondamentaux

3.4.1. Mouvement de translation:

Un solide $\boldsymbol{S}$ est dit en *mouvement de translation* pur par rapport à un repère$\boldsymbol{R_0}$si $\vec{\Omega}_{S/_{R_0}} = \vec{\boldsymbol{0}}$,Il résulte que$\vec{\boldsymbol{V}}_{B/R_0} = \vec{\boldsymbol{V}}_{A/R_0}$.

Dans ce cas le champ des vitesses est un champ *uniforme*, est le torseur cinématique est un *couple*.

$$[\upsilon_{S/R_0}]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\boldsymbol{0}} \\ \vec{\boldsymbol{V}}_{A/R_0} \neq \vec{\boldsymbol{0}} \end{cases}$$



Les trois types des mouvements de translations:

- Trajectoireen translation rectiligne.
- Trajectoireen translation curviligne.
- Trajectoireen translation circulaire.

3.4.2. Mouvement de rotation pur autour d'un axe:

Soit un solide $(\boldsymbol{S})$ est dit en *mouvement de rotation*autour d'un axe (Δ)fixe par rapport à un repère$\boldsymbol{R_0}$.

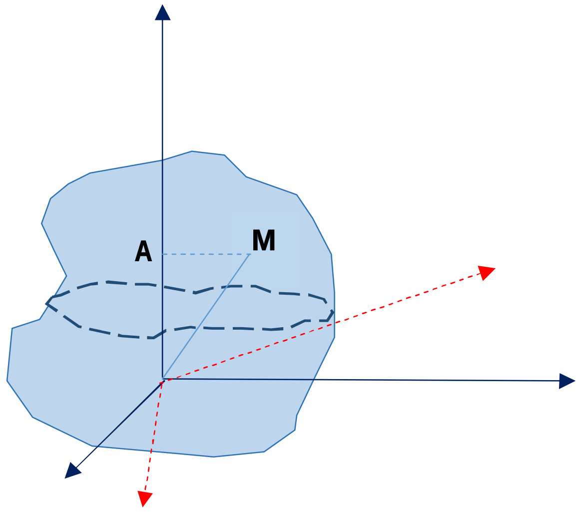
Soit A un point appartenant à (Δ) tel que $A \in (\boldsymbol{S})$ alors:

$$\vec{V}_{A/R_0} = \vec{0}$$

Et $\vec{\Omega}_{R/R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} = \frac{d\theta}{dt}.\vec{z}_0 = \frac{d\theta}{dt}.\vec{z}$

Soit $M \in (\boldsymbol{S})$ alors:

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{M/R_0}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$$



On obtient l'expression de l’accélération par dérivation de l'expression de vitesse précédente:

On a: $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{M/R_0}} = \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$

Alors: $\vec{\gamma}_{M/R_0} = \left.\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{M/R_0}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R_0}} = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R_0}} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R_0}}$

Or nous avons: $\left.\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R_0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R}} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{AM}$

$\left.\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R}} = \vec{0}$ Car $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$ est constante par rapport à R.

Ce qui donne:

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R_0}} \wedge \overrightarrow{AM} + \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Sachant que: $\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \cdot \left(\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \cdot \overrightarrow{AM}\right) - \overrightarrow{AM} \cdot \left(\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \cdot \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}\right)$

Et $\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \perp \overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

Finalement on obtient :

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}}}{dt}\right|_{\boldsymbol{R_0}} \wedge \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega}^2{}_{\boldsymbol{S/R_0}}$$

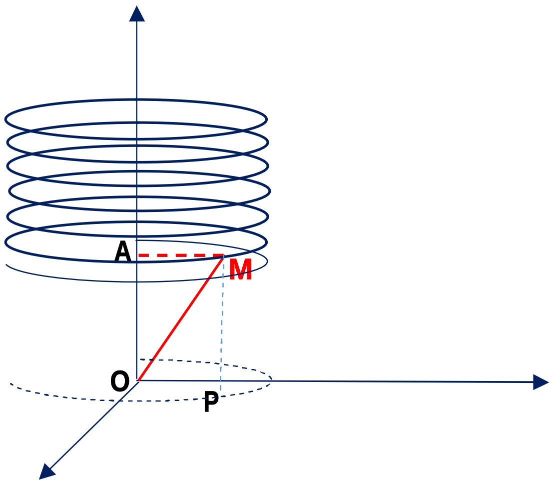
(Accélération tangentielle au pointM + Accélération normale suivant$\overrightarrow{AM}$).

3.4.3. Mouvement hélicoidal (translation+rotation)

Soit un axe du repère $\boldsymbol{R_0}$ supposant $\overrightarrow{z_0}$ reste en coïncidence à tout instant avec un axedu repère$\boldsymbol{R}$.
On dit un solide est en*<u>mouvementhélicoïdal</u>* si le solide glisse sur un axe fixe $\overrightarrow{z_0}$ et si un point du solide non située sur cet axe a un mouvement hélicoïdal autour de cet axe.

Le champ des vitesses est un champ antisymétrique s'écrit sous la forme:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{M/R_0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}} + \overrightarrow{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{MA}}$$



Le point $\boldsymbol{P}$ est la projection du point $\boldsymbol{M}$ sur le plan $(O, \vec{\iota_0}, \vec{\jmath_0})$ il décrit une trajectoire <u>circulaire</u> dans ce plan.
On a donc: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$

Par ailleurs:$\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{M/R_0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{P/R_0}}$

Sachant que: $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{P/R_0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{MA}} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{\boldsymbol{P/R_0}}$(*qui représente une rotation autour de l'axe*$\overrightarrow{z_0}$)

Tel que: $\overrightarrow{\Omega}_{\boldsymbol{P/R_0}} = \frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}} . \vec{z}_0$et $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}} = r' \vec{z}_0$(*Représente la partie translation le long de l'axe* $\overrightarrow{z_0}$ *).*

3.4.4. Mouvement plansur plan

On appelle un solide (S)en <u>mouvement plan sur plan</u>si un plan (π) lié au solide (S) glisse sur un plan (π_0) du repère R_0

Le torseur cinématique se réduit dans ce cas à :

$$[\upsilon_{S/R_0}]_{O_0} = \begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_{\boldsymbol{S/R_0}} = \overrightarrow{\Omega}_{\boldsymbol{\pi/\pi_0}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A/R_0}} \end{cases}$$

Avec $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{\pi/\pi_0} = \frac{d\theta}{dt}.\vec{z}_0$ si par exemple(π)est le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ qui reste dans ce cas confonduavec le plan$(O,\vec{\imath}_0,\vec{\jmath}_0)$.

La formule de transport pour le champ de vitesse de deux points du plan (π) A et M :

$$\vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{M/R_0} + \vec{\Omega}_{\pi/\pi_0} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Tel que $\vec{V}_{A/R_0}$ ***et*** $\vec{V}_{M/R_0}$ appartenant au plan (π) et $\vec{\Omega}_{\pi/\pi_0}$est orthogonal à (π).

Remarque: Il existe un point ***I***unique varie au cours du temps.appelé*centre instantané de rotation*(**CIR)** du mouvement de S parrapport à *R* tel que :$\vec{V}_{I\epsilon S/R_0} = \vec{0}$

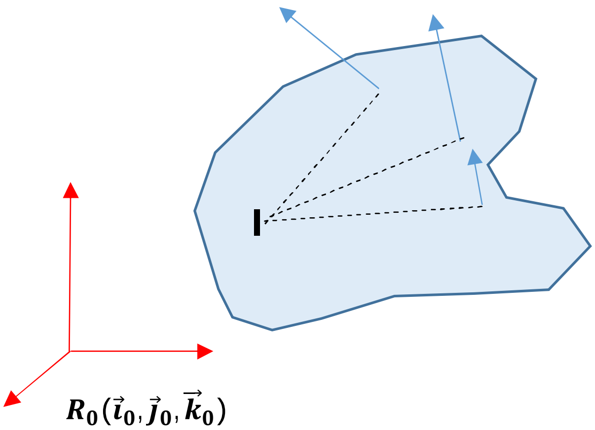


Figure: Centre Instantané de Rotation (CIR)

On écrit:

$$\vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{I/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{IA}$$

$$= \vec{0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{IA}$$

A partir de l'expression de la vitesse $\vec{V}_{A/R_0}$on peut déduire que le vecteur position$\overrightarrow{IA}$est perpendiculaire à la vitesse, par conséquence on peut trouver la position du CIR par l'intersection des perpendiculaire du deux vitesse quelconque et connu.

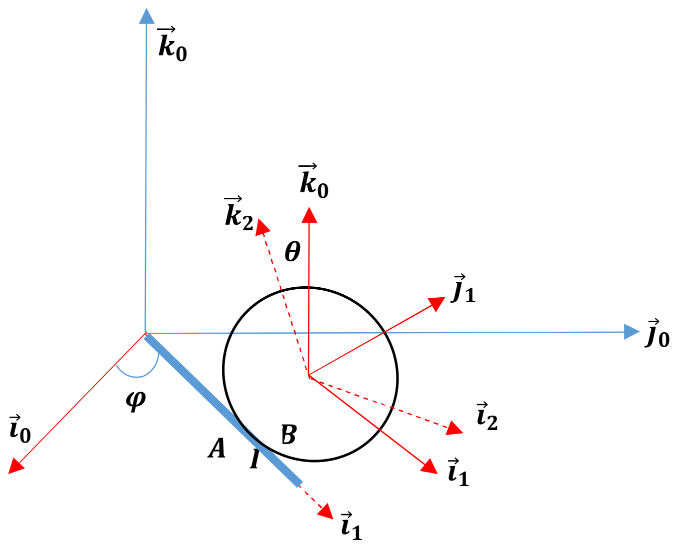
Définitions:

- On appelle *base*la trajectoire de CIR($\boldsymbol{le\ point\ c}$)dans le repère R_0.
- On appelle roulantela trajectoire de CIR($\boldsymbol{le\ point\ c}$)dans le repère R.

Ces deux trajectoires (La base et la roulante) sont deux courbes tangentes en $\boldsymbol{I}$ à chaque instant qui peuvent servir à définir la vitesse de I par rapport ces deux courbes.

Exercice:

Un système mécanique composée d'une barre homogène OA ($\boldsymbol{S_1}$) tournant dans le plan $(O, \vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0)$ avec une vitesse angulaire ω,et un disque homogène ($\boldsymbol{S_2}$) de rayon **R** placé dans le plan vertical$(O, \vec{\imath}_1, \vec{k}_0)$rouler sans glissement sure la barre.



1) Donner les vitesses de rotation $\vec{\Omega}_{S_1/R_0} et\ \vec{\Omega}_{S_2/R_1}$ et déduire$\vec{\Omega}_{S_2/R_0}$

2) Calculer les vitesses $\vec{V}_{A\in S_1}/_{R_0}$ et $\vec{V}_{B\in S_2}/_{R_0}$ et $\vec{V}_{I\in(S_1\cap S_2)}/_{R_0}$

3) Calculer les accélérations $\vec{\gamma}_{A\in S_1}/_{R_0}$ et $\vec{\gamma}_{B\in S_2}/_{R_0}$ et $\vec{\gamma}_{I\in(S_1\cap S_2)}/_{R_0}$

4) Donner la condition de roulement sans glissement de (S_2) sur (S1).

Chapitre 4

Géométrie de masse.

Chapitre 4 : Géométrie de masse.

4.1. Masse d'un système matériel :

En mécanique classique, à chaque système matériel (S) est associé une quantité scalaire, appelée : **Masse**.

La masse d'un solide fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

4.1.1 Système discret :

La masse d'un système discret est la somme des n points matériels discrets de masses mi :

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

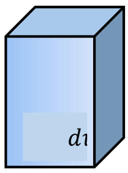
4.1.2. Système continu:

Si le système est constitué d'un ensemble continu de la masseest définie par la quantitéscalaire m, et s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue:

$$m = \int dm$$

a) Si le système est volumique

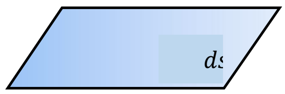
$$m = \int dm = \int \rho \, dv$$



ρest la masse volumique, dv est l'élément de volume

b) Si une dimension négligeable devant les deux autres (Système surfacique)

$$m = \int dm = \int \sigma \, ds$$

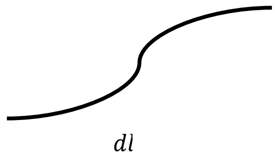


σest la masse surfacique, ds l'élément de surface.

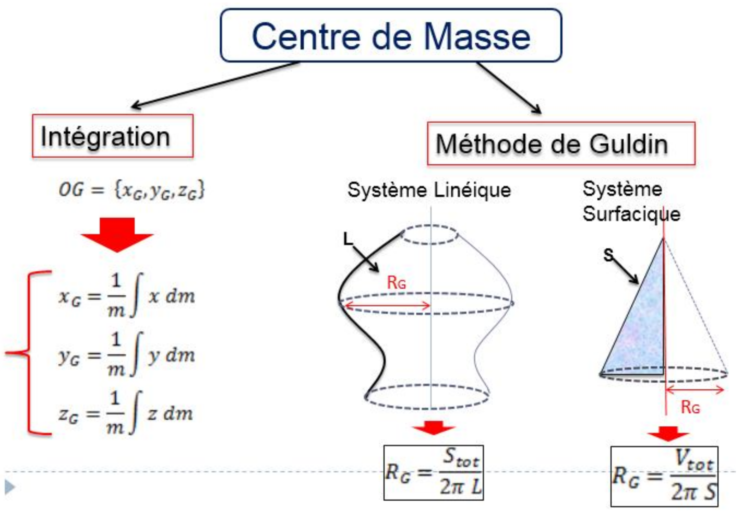
c) Si deux dimensions sont négligeables (Système linaire)

$$m = \int dm = \int \lambda \, dl$$

λest la masse linéique, dl élément de longueur.



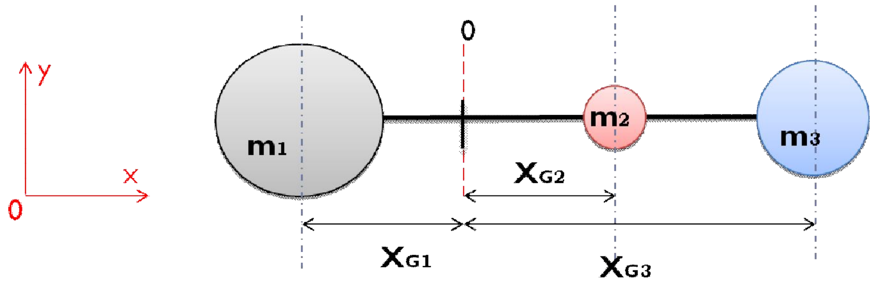
4.2. Centre d'inertie



Cas d'un système composé:
Si le système est complexe: composé de plusieurs élément (Δi). On détermine d'abord le centre d'inertie de chaque élément (Δi) du système au point $\boldsymbol{G_i}$,puis on détermine le centre d'inertie $\boldsymbol{OG}$ du système comme barycentre des points $\boldsymbol{G_i}$.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i OG_i}{\sum_i m_i}$$

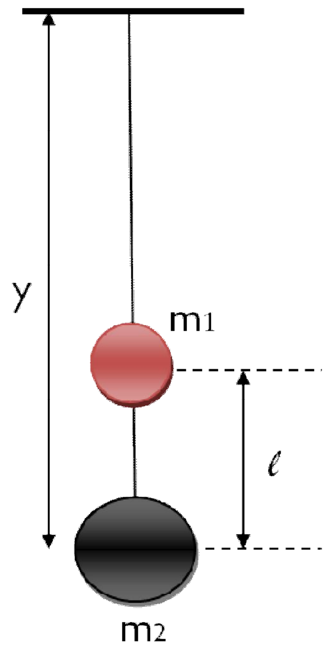
Exemple:



$OG = \{x_G, y_G\}$

$$X_G = \frac{X_{G1}m_1 + X_{G2}m_2 + X_{G3}m_3}{m_1 + m_2 + m_3} Y_G = 0$$

Exemple 2:



Pendule complexe, composé de deux masses m_1, m_2 et une fil de masse négligeable.

Le centre de masse: $OG = \{x_G, y_G\}$

$X_G = 0$ et $Y_G = \frac{Y_{G1}m_1 + Y_{G2}m_2}{m_1 + m_2}$

On a :

$Y_{G1} = y - l$ et $Y_{G2} = y$

Remplaçant dans l'équation du centre de masse, nous obtenons:

$$Y_G = \frac{(y - l).m_1 + y.m_2}{m_1 + m_2}$$

$$Y_G = \frac{(m_1 + m_2)y + m_2.l}{m_1 + m_2}$$

$$\boldsymbol{Y_G = y - \frac{m_2.l}{m_1 + m_2}}$$

4.2.1. Méthode d'intégration:

Il s'agit du point « moyen » du système, qu'on appelle aussi barycentre, ou centre de masse défini par la relation:

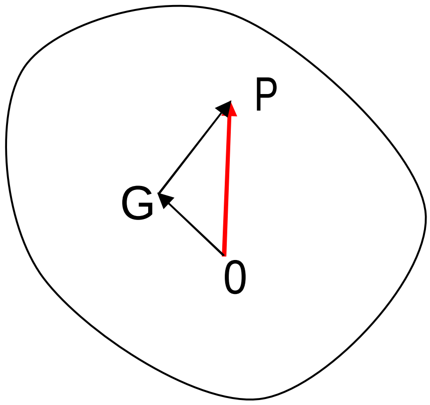
$$\int GP\, dm = 0$$

P est un point du solide et le O est le centre du repère avec:

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

et $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{\imath} + y_G\vec{\jmath} + z_G\vec{k}$

Nous pouvons écrire: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{PG}$



$\int \overrightarrow{OP}dm = \int \overrightarrow{OG}dm + \int \overrightarrow{PG}dm$

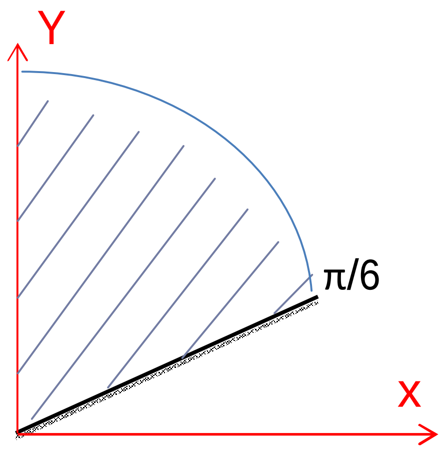
⇨ $\int \overrightarrow{OP}dm = \int \overrightarrow{OG}dm$

⇨ $\frac{\int \overrightarrow{OP}dm}{\int dm} = \overrightarrow{OG}$

⇨ $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int \overrightarrow{OP}dm$

Nous obtenons : $OG = \{x_G, y_G, z_G\}$ => $\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\int x.dm \\ y_G = \frac{1}{m}\int y.dm \\ z_G = \frac{1}{m}\int z.dm \end{cases}$

Exemple 1: Surface circulaire homogène plane, de rayon R, $\pi/6<\alpha<\pi/2$



$ds = r\, d\theta\, dr$, $0 < r < R$ et $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$dm = \sigma.ds$, $=> m = \sigma.s$

$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

D'où : $s = \int ds = \int_0^R r dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{R^2\pi}{6}$

Et: $m = \sigma.S$

Les coordonnées du centre de masse sont :

$$x_G = \frac{1}{m}\int x\, dm$$

$$= \frac{1}{\frac{R^2\pi}{6}}\int_0^R r^2 dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{6}{R^2\pi}\left[\frac{R^3}{3} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{R}{\pi}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\int y$$

Finalement le centre d'inertie du rectangle est: $OG = \left\{\frac{R}{\pi}, \frac{R}{\pi}\sqrt{3}\right\}$

Exemple 2:

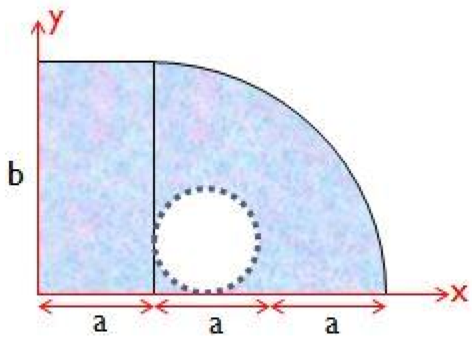
On calcule le centre d'inertie des trois solides (rectangle, quart de disque, disque) séparément puis on déduit le centre d'inertie du solide entier.

1. Centre d'inertie du rectangle:

Masse du rectangle: $dm_1 = \sigma\, ds$,

$dm_1 = \sigma\, dx.dy$, avec $\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$

$m_1 = \sigma\, a.b$



Donc :

$$x_{G1} = \frac{1}{m_1}\int x\, dm_1 = \frac{\sigma}{m_1}\int_0^a x\, dx \int_0^b dy = \frac{\sigma}{\sigma.a.b}\left[\frac{a^2}{2}.b\right] = \frac{a}{2}$$

$$y_{G1} = \frac{1}{m_1}\int y\, dm_1 = \frac{\sigma}{m_1}\int_0^a dx \int_0^b y.dy = \frac{\sigma}{\sigma.a.b}\left[a.\frac{b^2}{2}\right] = \frac{b}{2}$$

Le centre d'inertie du rectangle est: $OG_{1=}\left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right\}$

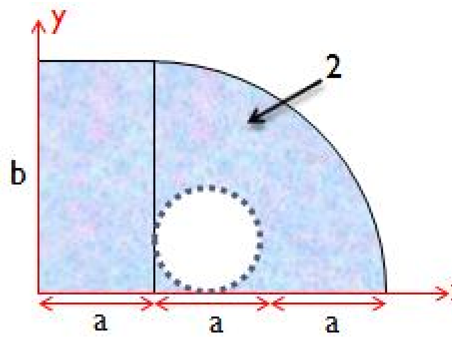
2. Centre d'inertie du quart de disque :

On fait une translation de repère de 'a' suivant l'axe (Ox) puis on calcule les coordonnés du centre de masse:

L'élément de masse est définie par: $dm_2 = \sigma.r\, dr.d\theta$

Avec $\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ et $R = 2a$ on obtient : $m_2 = \frac{\sigma\, \pi.R^2}{4}$

Les coordonnées du centre de masse seront données par :



$$r \int_0^{\pi/2}$$

$$= a + \frac{8a}{3\pi}$$

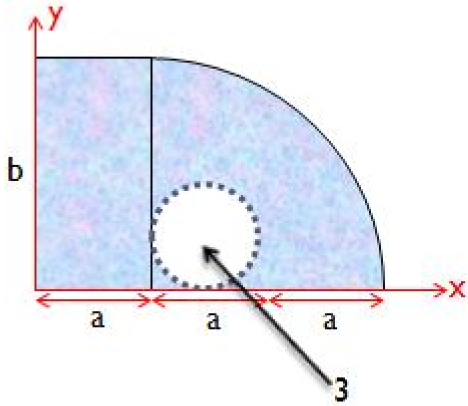
$$y_G = \frac{1}{m_2}\int y$$

Est donc le centre d'inertie du quart de disque est:$OG_{2=}\left\{a+\frac{8a}{3\pi},\frac{8a}{3\pi}\right\}$

3. Centre d'inertie du disque : R=a/2

La masse du disque est définie par: $m_3=\sigma\,\frac{\pi}{4}.a^2$

Les coordonnées du centre de masse sont :



$x_G=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$

$y_G=\frac{a}{2}$

Donc : $OG_{3=}\left\{\frac{3a}{2},\frac{a}{2}\right\}$

Sachant que :

$m_1=\sigma\,a.b,$

$m_2=\frac{\sigma\,\pi.R^2}{4},$

$m_3=\sigma\,\frac{\pi}{4}.a^2$

Et $OG_{1=}\left\{\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right\}$, $OG_{2=}\left\{a+\frac{8a}{3\pi},\frac{8a}{3\pi}\right\}$, $OG_{3=}\left\{\frac{3a}{2},\frac{a}{2}\right\}$

Les coordonnées du centre d'inertie du solide qui est un système composé seront données par:

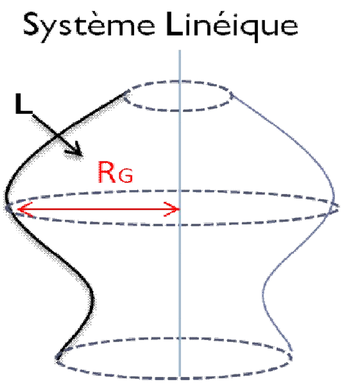
$$X_G=\frac{X_{G1}m_1+X_{G2}m_2-X_{G3}m_3}{m_1+m_2-m_3}=\frac{\frac{b}{2}+a(1+\frac{8}{3\pi}-\frac{3\pi}{8})}{\frac{b}{a}+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Y_G=\frac{Y_{G1}m_1+Y_{G2}m_2-Y_{G3}m_3}{m_1+m_2-m_3}=\frac{\frac{b^2}{2}+\frac{8a}{3\pi}-\frac{a^2\pi}{8}}{b+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a}$$

4.2.2. Méthode de Guldin :

1ie Théorème de Guldin:

Elle consiste à faire tourner un arc de courbe de longueur L autour d'un axe Ox, Oy.



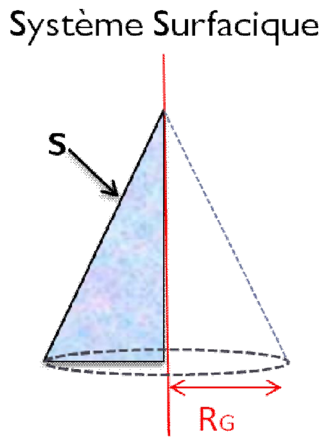
La rotation de l'arc engendre une surface de révolution dont l'aire est égale au produit de la longueur de l'arc L par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie G de **L**.

$$S_{tot}=2\pi.L.R_G$$

- Si la rotation ce faire autour de l'axe $\boldsymbol{Oy}$, nous aurons:$x_G=\frac{S_{tot/oy}}{2\pi L}$

- Si la rotation ce faire autour de l'axe $\boldsymbol{Ox}$, nous aurons:$y_G = \frac{S_{tot/ox}}{2\pi L}$

2eme Théorème de Guldin:



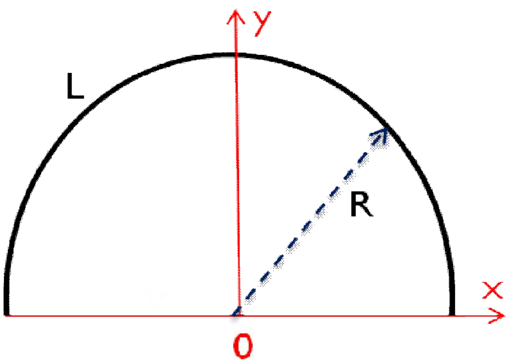
Le 2^{eme} théorème consiste à faire tourner des solides surfaciquesautour d'un axe ox, oy.

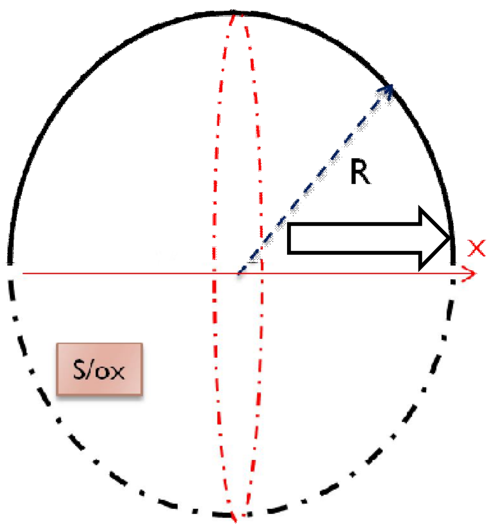
La rotation d'une surface engendre un volume de révolution est égale au produit de la surface du solide par la longueur de la circonférence décrite par le centre d'inertie G de L.

$$V_{tot} = 2\pi . S . R_G$$

- Si la rotation ce faire autour de l'axe **Oy**, nous aurons:$x_G = \frac{V_{tot/oy}}{2\pi S}$
- Si la rotation ce faire autour de l'axe **Ox**, nous aurons:$y_G = \frac{V_{tot/ox}}{2\pi S}$

Exemple: Trouver le centre d'inertie d'un demi-cercle.





Solution:

- $\boldsymbol{OG}$ Se trouve sur l'axe oy donc par raison de symétrie, $x_G = 0$

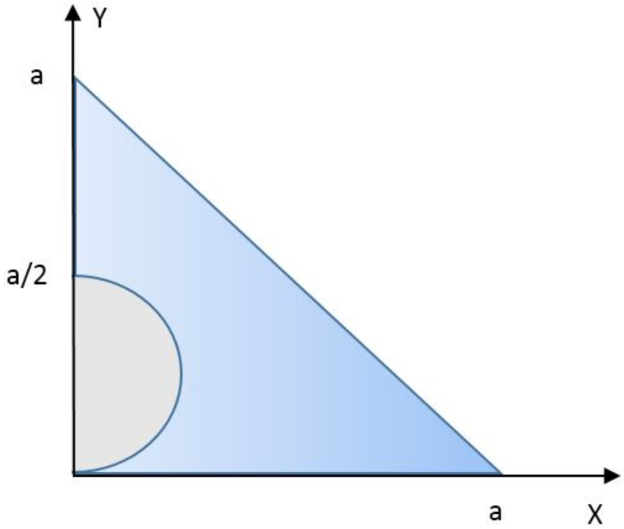
Puisque le solide est linaire (cercle) on applique le 1^{er} théorème de Guldin: Talque la rotation du demi-cercle par rapport au l'axe (ox) donnons une sphère creuse de surface$S_{sphère/ox}$tel que $\boldsymbol{L}$ est le périmètre du demi-cercle $L = \pi R$.

D'où $S_{sphère/ox} = 4\pi R^2$

Nous obtenons alors: $y_G = \frac{S_{tot/ox}}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi .\pi R} = \frac{2\ R}{\pi}$

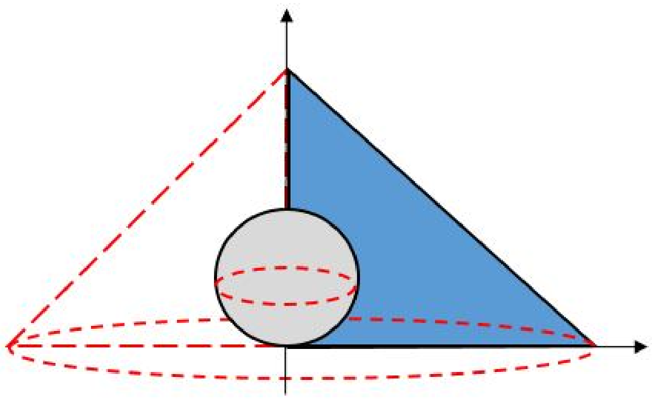
Donc: le centre d'inertie du demi-cercle $OG = \left\{0, \frac{2\ R}{\pi}\right\}$

Exemple 2 :



Solution:

- ✓ $x_G = \frac{V_{tot/oy}}{2\pi S}$



Nous avons: $\boldsymbol{V_{tot/oy} = V_{Cone} - V_{Sphére}}$

$V_{tot/oy} = \frac{\pi}{3}a^2.a - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{4}\right)^3$

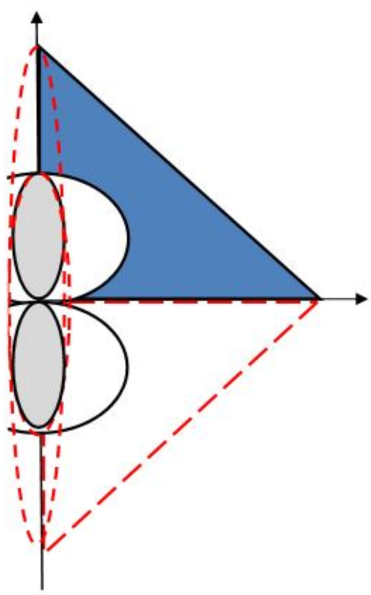
$\boldsymbol{S = S_{tringle} - S_{demi-Sphére}}$

$S = \frac{a^2}{2} - \pi\left(\frac{a}{4}\right)^2$

On obtient:

$$x_G = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{2\pi(\frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{16})} = \frac{a}{(4 - \frac{\pi}{2})}$$

- ✓ $y_G = \frac{V_{tot/ox}}{2\pi S}$



Nous avons:$\boldsymbol{V_{tot/ox} = V_{Cone} - V_{demi-torre}}$

$\boldsymbol{V_{tot/ox} = \frac{\pi}{3}a^2.a - 2\pi.\left(\frac{a}{4}\right).\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2}$

$\boldsymbol{S = S_{tringle} - S_{demi-Sphére}}$

$S = \frac{a^2}{2} - \pi\left(\frac{a}{4}\right)^2$

On obtient:

$$y_G = \frac{a(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{32})}{1 - \frac{\pi}{4}}$$

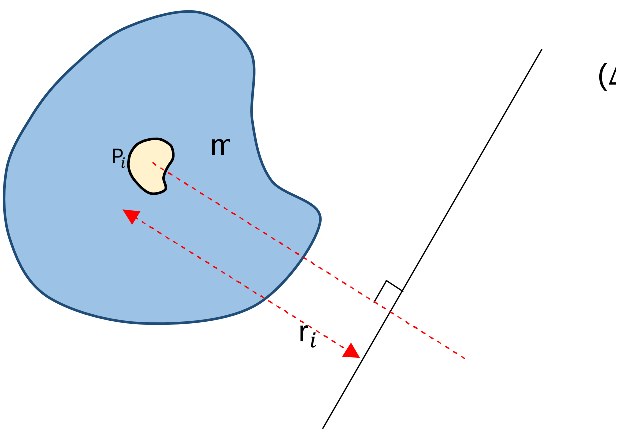
Finalement: $\boldsymbol{OG} = \left\{ \frac{a}{(4-\frac{\pi}{2})}, \frac{a(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{32})}{1-\frac{\pi}{4}} \right\}$

4.3. Tenseur d'inertie d'un solide

Définition: On appelle moment d'inertie d'un système discret homogène par rapport à un axe(Δ) la quantité:

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i {r^2}_i$$

Ou $r_i$est la projection orthogonale du point P_i la position de l'élément de masse m_i sure l'axe (Δ).



Pour un système continu le moment d'inertie est défini par la relation suivante:

$$I_\Delta = \int \rho\, r^2 dv$$

ρest la densité de masse, dv l'élément de masse.

4.3.2. Tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie en un point O, tel que $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère orthonormé, noté $\boldsymbol{I_O}$ est définie par une matrice symétrique, réelle et diagonalisable.

$$\boldsymbol{I_O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_{xx}} & -\boldsymbol{I_{xy}} & -\boldsymbol{I_{xz}} \\ -\boldsymbol{I_{yx}} & \boldsymbol{I_{yy}} & -\boldsymbol{I_{yz}} \\ -\boldsymbol{I_{zx}} & -\boldsymbol{I_{zy}} & \boldsymbol{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

4.3.3. Moment et produit d'inertie de solides

A. On appelle les moments d'inertieles éléments diagonaux du tenseur d'inertie, elle est définie par les équations suivantes:

$$\boldsymbol{I_{xx}} = \int (\boldsymbol{y^2} + \boldsymbol{z^2})\boldsymbol{dm}$$

$$\boldsymbol{I_{yy}} = \int (\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{z^2})\boldsymbol{dm}$$

$$\boldsymbol{I_{zz}} = \int (\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2})\boldsymbol{dm}$$

Un moment d'inertie caractérise la difficulté de mettre un solide en rotation.

B. On appelle les produits d'inertieles élémentsdu tenseur d'inertie suivant:

$$\boldsymbol{I_{xy}} = \int (\boldsymbol{x.y})\boldsymbol{dm}$$

$$\boldsymbol{I_{xz}} = \int (\boldsymbol{x.z})\boldsymbol{dm}$$

$$\boldsymbol{I_{yz}} = \int (\boldsymbol{y.z})\boldsymbol{dm}$$

Un produit d'inertie il caractérise l'absence de la symétrie d'un corps solide.

$\boldsymbol{I_O}$,admet trois valeur propres réelle et trois direction propre réelle et orthogonale:

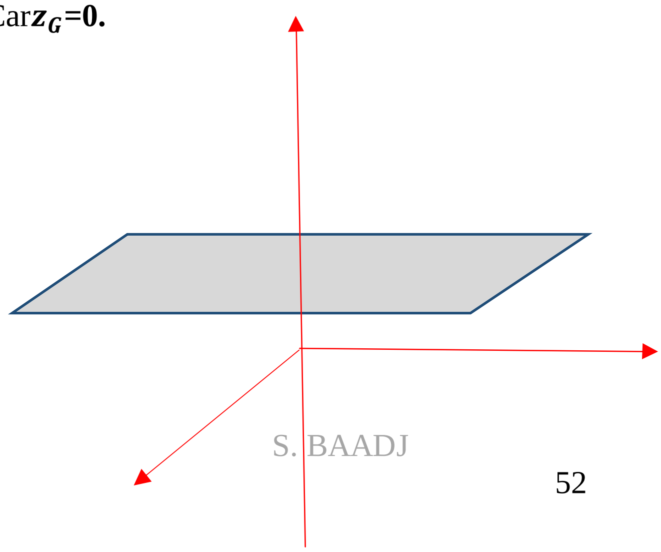
Les valeurs propres sont appelées: *Moment principaux d'inertie*.

Les directions propres sont appelées: *Axes principaux d'inertie*.

4.3.4. Cas particuliers

1. **Le système présent certain plan de symétrie:** Si (Oxy) est un plan de symérie.

$\boldsymbol{I_{xz} = \int (x.z)dm = 0, I_{yz} = \int (y.z)dm = 0}Car\boldsymbol{z_G}$=**0.**



Donc:

$$\boldsymbol{I_O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_{xx}} & -\boldsymbol{I_{xy}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I_{yx}} & \boldsymbol{I_{yy}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

2. **Le système admet deux plans de symétrie:** Si les plan normales à $\vec{x}$ et $\vec{z}$ deux plans de symétrie.

$I_{xy} = 0$, $I_{zx} = 0$, $I_{yz} = 0$.

Donc:

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

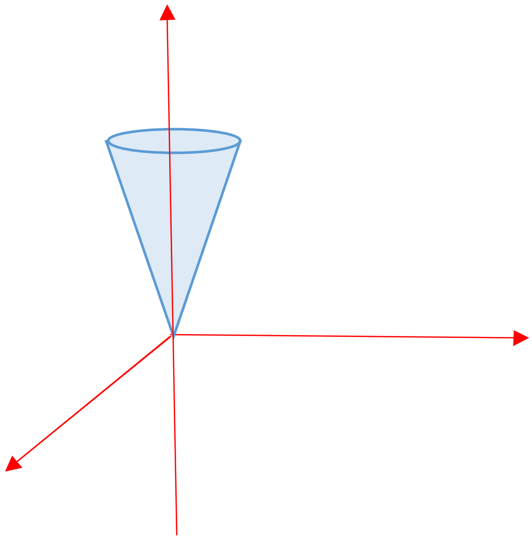
3. **Le système possède un axe de révolution autour d'un axe:** Si oz un axe de révolution.

La matrice est diagonale et les axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ jouent le mêmerôle au point de vue de symétrie.

Donc:

$$I_O = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

avec: $A + B = 2A = C + 2\int z^2\, dm$



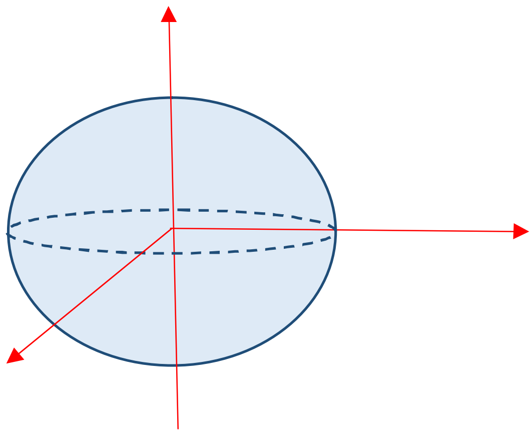
4. **Un solide de symétrie sphérique:**

Pour un solide de symétrie sphérique les trois axes du repéré jouent le mêmerôle, alors tous les moment d'inertiesont égaux,$I_{xx} = I_{yy}$=I_{zz},

et tous les produit d'inertie sont nulles car tous les plan sont des plan de symétrie,

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0.$

$$I_O = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$



4.4.Théorème de Huygens

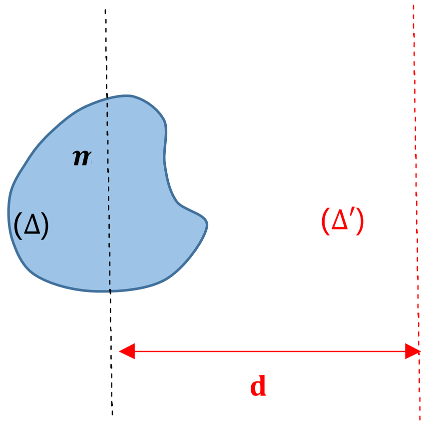
On connait généralement le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe(Δ)qui passe par le ce centre d'inertie G, le théorème de Huygens permet de calculer le moment d'inertie par rapport à n'importe quelle axe parallèle à (Δ).

Le moment d'inertie de ce système égale le moment d'inertie par rapport à l'axe(Δ) qui passe par ce centre d'inertie G, augmenter au moment d'inertie de la masse $\boldsymbol{m}$ du système par rapport à l'axe (Δ') paralléle à (Δ).

$$I_{/\Delta'} = I_{/\Delta} + m.d^2$$

$d$est la distance entre les deux axes.

D'où $I_{/\Delta'} = I_{/\Delta} + m\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_G}^2 + \boldsymbol{z_G}^2 & x_G.y_G & x_G.z_G \\ x_G.y_G & \boldsymbol{x_G}^2 + \boldsymbol{z_G}^2 & y_G.z_G \\ x_G.z_G & y_G.z_G & \boldsymbol{x_G}^2 + \boldsymbol{y_G}^2 \end{pmatrix}$



Exercices :

Chapitre 5:
Dynamique du solide rigide

Chapitre 5: Dynamique du solide rigide

5.1. Rappels sur les quantités dynamiques pour un point matériel

5.1.1. *La quantité de mouvement:*

La résultante cinétique (***quantité de mouvement***) d'un point matériel, de masse m et de vitesse par rapport au repère R_0est définie par:

$$\vec{P} = m\,\vec{V}_{M/R_0}$$

5.1.2. Le moment cinétique:

Le moment cinétique ***(Moment de la quantité de mouvement)***du point matériel *M* en un point *O*quelconque de l'espace est donné:

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}_{M/R_0}$$

5.1.3. La quantité d'accélération :

On appelle une***quantité d'accélération***d'un point matériel*M*, de masse $m$par rapport au repère R_0la quantité vectorielle suivants:

$$\vec{\Gamma}_{M/R_0} = m\,\vec{\gamma}_{M/R_0}$$

5.1.4. Le moment dynamique:

Le moment dynamique ***(Moment de la quantité d'accélération)*** du point matériel *M* en un point *O* quelconque de l'espace est donné:

$$\vec{\delta}_{M/R_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{\gamma}_{M/R_0}$$

5.1.5. L'énergie cinétique:

L'énergie cinétiqued'un point matériel Men mouvement par rapport à R_0est donnée par :

$$Ec = \frac{1}{2} m\vec{V}^2_{M/R_0}$$

5.2. Élément de cinétique du corps rigide :

Soit un système matériel (S)ou'dm un élément de masse autour de $M \in S$.

5.2.1. La quantité de mouvement:

Pour un système matériel continu la quantité de mouvement (***Résultante cinétique***) à un instant *t* quelconque :

$$\vec{P}_{S/R_0} = \int \vec{V}_{M/R_0}\, dm\,, \forall M \in S$$

5.2.2. *Le moment cinétique:*

On appelle moment cinétique au point Ola quantité :

$$\vec{\sigma}_{O,S/R_0} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm \text{ , } \forall M \in S, \forall O \in espace$$

5.2.3. *L'énergie cinétique:*

L'énergie cinétique Td'un système matériel(S)en mouvement par rapport à R_0est donnée par :

5.2.4. Torseur cinétique:

Sachant que:

$$\vec{\sigma}_{O,S/R_0} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm$$

$$= \int \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm$$

$$= \int \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm + \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm$$

Implique que: $\vec{\sigma}_{O,S/R_0} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P}_{S/R_0} + \vec{\sigma}_{A,S/R_0}$

Nous savons que cette relation est caractéristique d'un torseur (Chapitre2), donc On peut conclure qu'il existe un torseur appelé ***torseur cinétique*** de Spar rapport àR_0, noté$\left\{C_{O,S/R_0}\right\}$talque:

$$\left\{C_{O,S/R_0}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_{S/R_0} = \int \vec{V}_{M/R_0}\, dm \text{ , } \forall M \in S \\ \vec{\sigma}_{O,S/R_0} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm \text{ , } \forall M \in S \end{Bmatrix}$$

Ou' La résultante est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel.

6. D'autre expression du torseur cinétique:

Nous avons par définition du centre d'inertie:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M_s} \int \overrightarrow{OM}\, dm$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d}{dt} M_s \overrightarrow{OG} = \frac{d}{dt} \int \overrightarrow{OM}\, dm$$

Dans notre cas (système de masse constante) il est possible de permuter les opérateurs d'intégration et de dérivation.

En conséquence :

$$M_s \overrightarrow{V_G} = \int \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}\, dm$$

$$M_s\overrightarrow{V_G} = \int \vec{V}_{M/R_0}\, dm$$

La affectée de la masse totale du système :
On peut alors écrire que larésultante du***torseur cinétique***est la quantité de mouvement du centre de la masse :

$$\left\{C_{O,S/R_0}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_{S/R_0} = M_s\overrightarrow{V_G} \\ \vec{\sigma}_{O,S/R_0} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm \,, \forall M \in S \end{Bmatrix}$$

5.2.5. Théorème de Koenig

B. 1erThéorème de Koenig pour le moment cinétique :

Le moment cinétique de (S) par rapport à G est défini par:

$$\vec{\sigma}_{G,S/R_0} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{M/R_0}\, dm \,, \forall M \in S$$

Soit **M** un point de(S)

La vitesse de M dans le référentiel R_0est donner par : $\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{G/R_0} + \vec{V}_{M/R_G}$

Nous avonsalors :

$$\vec{\sigma}_{G,S/R_0} = \int \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{V}_{G/R_0} + \vec{V}_{M/R_G})\, dm \,, \forall M \in S$$

$$\vec{\sigma}_{G,S/R_0} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{G/R_0}\, dm + \overrightarrow{GM}\vec{V}_{M/R_G}\, dm$$

On a $\int \overrightarrow{GM} \wedge dm = 0$ (définition du centre d'inertie)

On obtient alors :

$$\vec{\sigma}_{G,S/R_0} = \int \overrightarrow{GM} dm \wedge \vec{V}_{G/R_0} + \overrightarrow{GM}\vec{V}_{M/R_G}\, dm = \int \overrightarrow{GM}\vec{V}_{M/R_G}\, dm = \vec{\sigma}_{G,S/R_G}$$

Et pour un point quelconque A de l'espace nous aurons par la formule suivant :

$$\vec{\sigma}_{A,S/R_0} = \vec{\sigma}_{G,S/R_G} + \overrightarrow{AG}\, m\vec{V}_{G/R_0}$$

C'est ce qu'on appelle le premier théorème de Koënig pour le moment cinétique.

C. 2^{iém} Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique d'un système solide par rapport à un révérenciel R0 est définie par :

Or la loi de combinaison des vitesse donne : $\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{G/R_0} + \vec{V}_{M/R_G}$

D'où

$$Ec/R0 = \frac{1}{2}\int \vec{V}^2{}_{M/R_0} dm = \frac{1}{2}\int \left(\vec{V}_{G/R_0} + \vec{V}_{M/R_G}\right)^2 dm$$
$$= \frac{1}{2}\int \vec{V}^2{}_{G/R_0} dm + \frac{1}{2}\int \overrightarrow{V^2}_{M/R_G} dm + \int \vec{V}_{G/R_0} \vec{V}_{M/R_G} dm$$

$Ec/R0 = \frac{1}{2} m\vec{V}^2{}_{G/R_0} + Ec/G + \vec{V}_{G/R_0} \int \vec{V}_{M/R_G} dm$

or nous avons : $\vec{V}_{M/R_G} = \frac{dGM}{dt}/G$

$Ec/R0 = \frac{1}{2} m\vec{V}^2{}_{G/R_0} + Ec/G + \vec{V}_{G/R_0} \int \vec{V}_{M/R_G} dm$

$Ec/R0 = \frac{1}{2} m\vec{V}^2{}_{G/R_0} + Ec/G + \vec{V}_{G/R_0} \frac{d}{dt}/G \int \overrightarrow{GM} \; dm$

Or $\int \overrightarrow{GM} \wedge dm = 0$ (définition du centre d'inertie)

L'expression de l'énergie cinétique décrit par le deuxième théorème de Koenig:

$$Ec/R0 = \frac{1}{2} m\vec{V}^2{}_{G/R_0} + Ec/G$$

5.3. La dynamique d'un corps solide:

5.3.1. Torseur dynamique:

Définition: un torseur dynamique noté $\left\{D_{O,S/R_0}\right\}$ d'un système matériel en mouvement par rapport à un repère R_0 est définie par:

$$\left\{D_{O,S/R_0}\right\} = \left\{\begin{matrix} \int \vec{\Gamma}_{M/R_0} dm, \forall M \in S \\ \vec{\delta}_{O,S/R_0} = \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R_0} dm, \forall M \in S \end{matrix}\right\}_A$$

Ou par l'expression:

$$\left\{D_{O,S/R_0}\right\} = \left\{\begin{matrix} m\,\vec{\Gamma}_{G/R_0} \\ \vec{\delta}_{O,S/R_0} = \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R_0} dm, \forall M \in S \end{matrix}\right\}_A$$

Démonstration:

Nous avons par définition du moment cinétique:

$$\vec{\sigma}_{A,S/R_0} = \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M/R_0} dm, \forall M \in S$$

Dérivons les deux membresde l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A,S}/_{R_0} = \int \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_M/_{R_0}\right)dm$$

D'où:

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_M/_{R_0}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_M/_{R_0} + \overrightarrow{AM}\wedge\frac{d}{dt}\vec{V}_M/_{R_0}$$

Et $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\right)_{R_0} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\right)_{R_0} = -\vec{V}_A/_{R_0} + \vec{V}_M/_{R_0}$

Donc $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}_M/_{R_0}\right) = -\vec{V}_A/_{R_0}\wedge\vec{V}_M/_{R_0}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}_M/_{R_0}$

On obtient :

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A,S}/_{R_0} = -\int \vec{V}_A/_{R_0}\wedge\vec{V}_M/_{R_0}dm + \int \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}_M/_{R_0}\,dm$$

On utilisant la relation:$M_s\overrightarrow{V_G} = \int \vec{V}_M/_{R_0}\,dm$

On obtient:$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A,S}/_{R_0} = -M_s\vec{V}_A/_{R_0}\wedge\vec{V}_G/_{R_0} + \int \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}_M/_{R_0}\,dm$

On aboutit à l'expression qui exprime la relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique:

$$\vec{\delta}_{O,S}/_{R_0} = \int \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}_M/_{R_0}\,dm = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A,S}/_{R_0} + -M_s\vec{V}_A/_{R_0}\wedge\vec{V}_G/_{R_0}$$

5.3.2. Principe fondamental de la dynamique (PFD)

La dynamique fait la relation entre les causes (les actions mécaniques) et les effets (le mouvement caractérisé par l'accélération et non la vitesse) annoncé par les principes fondamentaux de la dynamique de Newton connu par les lois de Newton.

- **La loi fondamentale de la dynamique**

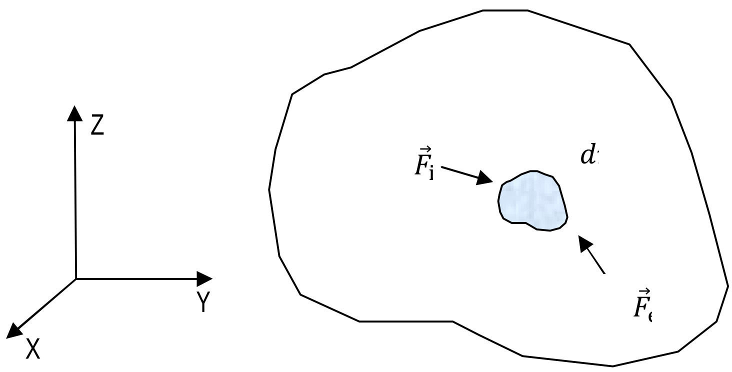
Soit un point quelconque M du système (S), la relation fondamentale de la dynamique s'écrit:

$$\overrightarrow{dF_{int}} + \overrightarrow{dF_{ext}} = \vec{\Gamma}_M/_{R_0}\,dm$$

$\overrightarrow{F_{int}}$Appelées les forces intérieures, sont le résultant des actions d'une partie de système matériel (S) sur une autre partie de (S)

$\overrightarrow{F_{ext}}$appelées les forces extérieures, sont le résultant des actions du milieu extérieur sur le système matériel (S).

Remarque: Dans tout ce chapitre on utilise référentiels privilégiés dits galiléens (absolu) dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme (le principe d'inertie).



En intégrant sur l'ensemble du système matériel (s), nous avons :

$$\int \overrightarrow{\mathrm{dFint}} + \int \overrightarrow{\mathrm{dFext}} = \int \vec{\Gamma}_{M/R_0}\, dm$$

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur (S) sont représentées par un torseur τ_{Fext} : appelé torseur des forces extérieures dont les éléments de réduction au point A sont :

$$\{\mathfrak{F}_{ext}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{Fext}} \\ \vec{M}_{ext} \end{Bmatrix}$$

Où $\vec{M}_{ext}$ est le moment des forces extérieures s'exerçant sur le système (S)au point A.

$$\vec{M}_{ext} = \int \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{dFint}} + \int \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{dFext}} = \int \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R_0}\, dm$$

Le principe fondamental de la dynamique montre que dans tout référentiel Galiléen, le torseur dynamique soit équivalent au torseur des forces extérieures:

$$\left\{D_{O,S/R_0}\right\} = \left\{\mathfrak{F}_{ext\, O,S/R_0}\right\}$$

Ou' Les éléments de réduction du torseur dynamique $\left\{D_{O,S/R_0}\right\}$du système (S) sont :

$$\left\{D_{O,S/R_0}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{Bmatrix}$$

Ou'$\vec{D}$la résultante dynamique du système matériel (S) est égale à la résultante des forces (actions) mécaniques extérieures.

$$\vec{D} = m.\vec{\Gamma}_{G/R_0} = \sum \overrightarrow{\mathrm{dFext}}$$

et$\vec{\delta}_A$le moment dynamique du système matériel (S) au point A est égale au moment des forces (actions) mécaniques extérieures.

$$\vec{\delta}_{A/R_0} = \vec{M}_{A/R_0} = \frac{\boldsymbol{d\vec{\sigma}}_{G/R_0}}{\boldsymbol{dt}}$$

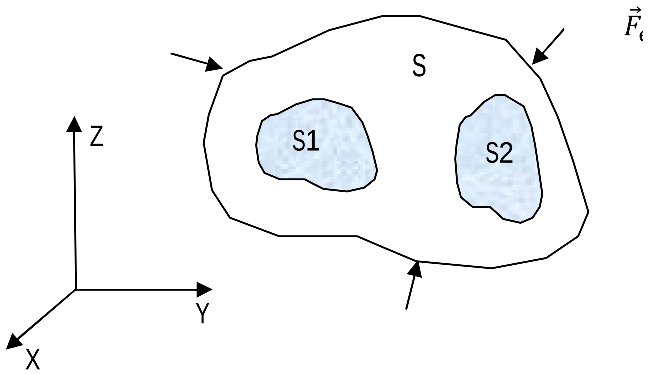
Pour un système mécanique composé *Le moment dynamique* est égal à la somme des moments dynamiques des éléments de système.

Remarque:les actions mécanique intérieures qui s'exercent sur un système (S) est nul, donc ils n'apparaissent pas dans la loi fondamentale de la dynamique:$\{\mathfrak{F}_{int}\} = \{0\}$**.**

7. Théorème des actions réciproque :

Le torseur des actions extérieures exercées par un système fermé S_1 sur un autresystème fermé S_2 est l'opposé de celui exercé par S_2sur S_1.

$$\left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_2\to S_1}}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_1\to S_2}}\right\} = 0 \leftrightarrow \{\mathfrak{F}\}_{12} = \{\mathfrak{F}\}_{21}$$



Sachant que: $S = S_1 \cup S_2, \left\{\vec{\mathfrak{F}}_{ext} \to S\right\} = \left\{\vec{\mathfrak{F}}_{ext} \to S_1\right\} + \left\{\vec{\mathfrak{F}}_{ext} \to S_2\right\}$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à S_1et S_2, on aura :

$$\left\{D_{O,}{}^{S_1}/_{R_0}\right\} = \left\{\mathfrak{F}_{ext\,S/_{R_0}\to S_1}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_2\to S_1}}\right\}$$

$$\left\{D_{O,}{}^{S_2}/_{R_0}\right\} = \left\{\mathfrak{F}_{ext\,S/_{R_0}\to S_2}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_1\to S_2}}\right\}$$

$$\begin{aligned}\left\{D_{O,}{}^{S}/_{R_0}\right\} &= \left\{D_{O,}{}^{S_1}/_{R_0}\right\} + \left\{D_{O,}{}^{S_2}/_{R_0}\right\} \\ &= \left\{\mathfrak{F}_{ext\,S/_{R_0}\to S_1}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_2\to S_1}}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext\,S/_{R_0}\to S_2}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_1\to S_2}}\right\} \\ &= \left\{\vec{\mathfrak{F}}_{ext} \to S\right\} + \underbrace{\left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_2\to S_1}}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_1\to S_2}}\right\}}\end{aligned}$$

Or $\left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_2\to S_1}}\right\} + \left\{\mathfrak{F}_{ext_{S_1\to S_2}}\right\} = 0$ on peut conclure $\left\{D_{O,}{}^{S}/_{R_0}\right\} = \left\{\vec{\mathfrak{F}}_{ext} \to S\right\}$

8. Travail et puissance d'une force

Le *travail* élémentaire d'une force $\vec{\boldsymbol{F}}$appliquée à un point matériel **P** de vitesse$\overrightarrow{\boldsymbol{V_P}}$à l'instant **t**est égal:

$$dw = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OP}$$

La puissance que reçoit une point **M** de système est égal à :

$$P = \frac{dw}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{V_P}$$

Sachant que: $\vec{F} = \overrightarrow{F_{int}} + \overrightarrow{F_{ext}}$

Nous aurons:
$dw = (\overrightarrow{F_{int}} + \overrightarrow{F_{ext}}) \cdot d\overrightarrow{OP}$Et $P = (\overrightarrow{F_{int}} + \overrightarrow{F_{ext}}) \cdot \overrightarrow{V_P}$

9. Théorème de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un système discontinu s'écrit :

La dérivée de cette expression par rapport au temps donne :

$$\frac{dEc}{dt} = \int \overrightarrow{V_P} \frac{\overrightarrow{V_P}}{dt} dm = \int \overrightarrow{V_P}\overrightarrow{\gamma_P} dm$$

Or la force à laquelle est soumise a une point ***P***dun solide de masse M est égale à :

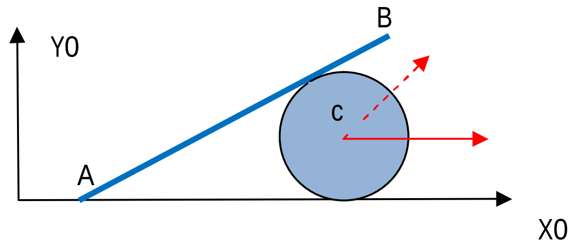
$\vec{F} = \int \overrightarrow{\gamma_P} dm$, on obtient:

$$\frac{dEc}{dt} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{V_P} = P.$$

La puissance est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique$P = \frac{dEc}{dt}$.

Exercice

On considère un système mécanique constitué de deux solides (S_1) et (S_2). une barre **AB** de longueurL, et de masse m_1 et un disque homogène de centre C, de rayon R et de masse m_2. Le système est en mouvement dans un repère galiléen tel que l'extrémité A de glisse sans frottement sure l'axe $(O,\vec{\imath_0})$. Le solide (S1) est en contact avec (S2) en D tel que (S1) glisse sur (S2).



1. Exprimer, dans la base$\boldsymbol{R_0}(\vec{\boldsymbol{\imath}}_0,\vec{\boldsymbol{\jmath}}_0,\vec{\boldsymbol{k}}_0)$les vecteurs vitesses de rotation $\vec{\Omega}_{\boldsymbol{S_1/R_0}}\, et\ \vec{\Omega}_{\boldsymbol{S_2/R_0}}$et déduire$\vec{\Omega}_{\boldsymbol{c/R_0}}$
2. Calculer les vitesses $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{A\in S_1}/\boldsymbol{R_0}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{B\in S_2}/\boldsymbol{R_0}}$.
3. Calculer les accélérations $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{A\in S_1}/\boldsymbol{R_0}}$ et $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{B\in S_2}/\boldsymbol{R_0}}$
4. Calculer les moments cinétiques et dynamiques suivants: $\vec{\sigma}_{A,S1/R_0}$ et$\vec{\sigma}_{B,S2/R_0}$,$\vec{\delta}_{S1/R_0}et\ \vec{\delta}_{S2/R_0}$
5. Calculer les énergies cinétiques du système S_1 et S_2.

Références

1. Starjinski V. Mécanique rationnelle, Mir, Moscou (1984)

2. Mécanique rationnelle. A. Kadi. Cours & exercices résolus.

3. Cours de Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables. M. BOURICH. 2éme édition 2014.

4. Notes de cours « Mécanique des solides rigides. Yves berthaud.(UPMC). 2006.

5. Polycopie Physique 4 : Mécanique Rationnelle COURS et EXERCICES. KASSOUL Amar. 2009.

6. Éléments de Mécanique rationnelle. S. Targ. Editions Mir Moscou

7. Mécanique à l'usage des ingénieurs. STATIQUE. Edition Russell. Ferdinand P. Beer

8. Mécanique générale. Cours et exercices corrigés. Sylvie Pommier. Yves Berthaud. DUNOD.

9. Mécanique générale - Théorie et application, Editions série. MURAY R. SPIEGEL schaum, 367p.

10. Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours, Office des publications Universitaires, Tahar HANI 1983, 386p.