



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique  
Université d'Oran des Sciences et de la Technologie Mohamed BOUDIAF  
Faculté de Physique



*Electrostatique et  
Électrocinétique  
Pour ST et SM*

**Dr Nossair ZIANI**

**Dr Lilia BELHADJ née DJEMAA**

## SOMMAIRE

Introduction.....	1
Opérateurs différentiels.....	3
Chapitre I	
I.1 Introduction.....	9
I.2 La loi de coulomb.....	14
I.3 Champ électrique.....	16
I.4 Champ créé par une distribution continue de charges.....	19
I.5 Potentiel électrostatique.....	21
I.6 Dipôle électrostatique.....	22
I.7 Série d'exercices avec solutions.....	26
Chapitre II	
II.1 Angle solide.....	45
II.2 Flux d'un champ électrique.....	46
II.3 Théorème de Gauss.....	49
II.4 Forme locale du champ électrique.....	50
II.5 Série d'exercice avec solution.....	50
Chapitre III	
III .1 Conducteur en équilibre électrostatique.....	72
III.2 Equilibre électrostatique.....	73
III.3 Condition de passage.....	74
III.4Pression électrostatique.....	75
III .5 Potentiel électrique.....	76
III.6 Capacité d'un conducteur.....	79
III.7 Condensateur .....	80
III.8 Groupements de condensateurs.....	83
III.9Exercices avec solutions.....	86
Chapitre IV	
IV.1 L'électrocinétique.....	98

IV.2 Loi d'ohm.....	100
IV .3 Circuit électrique.....	101
IV.4 Les lois de Kirchhoff.....	102
IV.5 Association des résistances.....	104
IV.6 Exercice résolues.....	109

---

## Introduction

Un cours de physique 2 peut être divisé en trois volets : l'électrostatique, l'électrocinétique et la magnétostatique. C'est le programme officiel adopté par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique Algérien, destiné aux étudiants de la première année sciences et techniques et aux étudiants de la première année science de la matière. Ce polycopié ne couvre que les deux premiers volets avec des informations essentielles, une contribution un peu simple et essentielle pour nos étudiants.

Ma propre expérience et l'expérience précieuse de ma collègue qui enseigne ces cours dans différentes facultés ont indiqué la nécessité d'un polycopié aussi suffisant. Le polycopié est divisé en quatre chapitres. Le chapitre 1 présente les éléments de base de l'électrostatique, la définition des forces de coulomb, du champ électrostatique et du potentiel électrostatique. Le chapitre 2 est consacré au théorème de Gauss avec différentes applications, notamment le calcul du champ électrique des sphères, des cylindres et des fils conducteurs.

Les conducteurs en équilibre sont traités au Chapitre 3, dans ce chapitre on fait l'introduction des condensateurs avec tous les calculs qui vont avec.

Le dernier chapitre couvre les principes fondamentaux des analyses de circuits et la compréhension de l'électrocinétique.

Les caractéristiques distinctives du livre sont la cible des étudiants que nous enseignons leur donnant un support de cours avec des exercices résolus pour les orienter et éviter à ce qu'ils se perdent avec les tonnes de sources disponibles en bibliothèque classique et virtuelles. On leur donne l'occasion de tester leur compréhension des sujets lors de la lecture de ce polycopié.

Un nombre suffisant de problèmes sur les sujets traités dans le chapitre est donné à la fin de chaque chapitre. Des réponses aux problèmes sont également fournies pour que les lecteurs vérifient leurs solutions.

On a consulté pour nos lecteurs quelques références qu'on citera dans ce polycopié.

Oran le 17 juin 2021

---

## Références

1. Bauer, Edmond, *L'électromagnétisme hier et aujourd'hui*, Albin Michel, Paris, 1949.
2. Pierre Langlois, sur la route de l'électricité, édition Multi monde, Bibliothèque nationale du Québec, 2005.
3. René Lafrance, Physique 2, Cheneliere Education, Bibliothèque et Archives Canada 2014.
4. Christian Bouquegneau, Doit-on craindre la foudre, EDP sciences 2006.
5. R. Prasad, Analog and Digital Electronic Circuits, Springer, 2021
6. les cours de Physique de Feynman, électromagnétisme 1, DUNOD, paris, 1979
7. Émile Amzallag, Josep Cipriani, Josseline Ben Aïm, Norbert Piccioli, Électrostatique et électrocinétique, EdiScience, 2<sup>ème</sup> édition, Dunod, Paris, 2006.

## Opérateurs différentiels

### 1 Notion de champ

Faynman définit que le champ est toute grandeur physique qui prend une valeur différente en tout point de l'espace, la température est un champ scalaire noté  $T(x,y,z)$ , elle pourrait aussi varier avec le temps. Un autre exemple est le champ des vitesses d'un liquide d'écoulement noté  $v(x,y,z)$  qui varie aussi avec le temps c'est un champ vectoriel.

Un exemple de champ scalaire

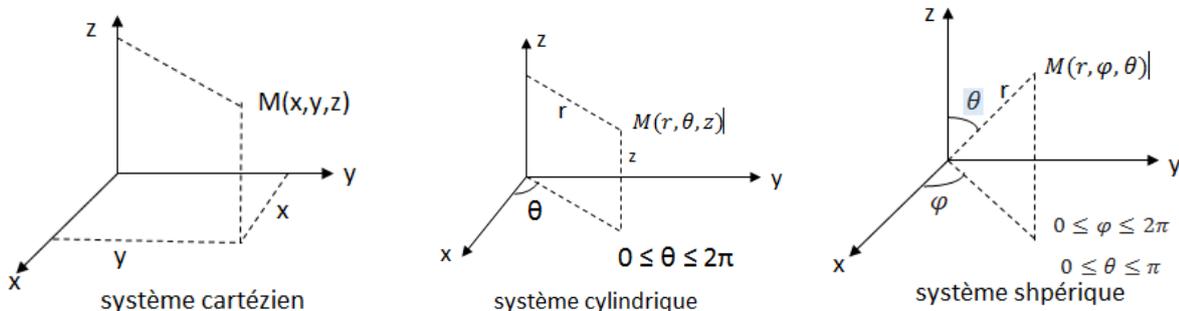
$$f(x,y,z) = x + xy^2 + y^2 + z^2$$

Un champ vectoriel  $\vec{V}(x,y,z)$  est la donnée de trois champs scalaires, et peut s'écrire dans les différentes bases à savoir cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , polaire,  $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$ , cylindrique  $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ , ou sphérique  $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ .

On définit des grandeurs dérivées, à savoir le gradient d'une fonction scalaire et la divergence d'un champ vectoriel. Ils décrivent comment les champs scalaires et vectoriels varient en fonction de position. On définit l'opérateur différentiel vectoriel,

L'opérateur nabla défini comme  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ . Il a la double propriété de comportement, une fois comme un **opérateur de dérivation** et comme un **vecteur** dans des formules du calcul du produit vectoriel ou du produit mixte. Ce ci dit permet d'exprimer directement de nombreuses relations concernant les gradients, divergences et rotationnels, sans avoir à passer par les composantes.

Cet opérateur peut être exprimé aussi dans les systèmes cylindriques et les systèmes sphériques.



## 2 Gradient

Lorsqu'il agit sur un champ scalaire  $f(xyz)$  il le transforme en champ vectoriel, on parle de gradient de  $f$

$$\vec{\nabla}f = \overrightarrow{grad}f(xyz)(0.1)$$

$$\vec{\nabla}f = \overrightarrow{grad}f(xyz) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}(0.2)$$

La différentielle d'une fonction  $f$  est définie de la façon formelle par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz(0.3)$$

Les  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  sont les dérivées partielles de  $f$  sa différentielle totale vaut

Cette différentielle totale s'exprime aussi

$$df = \overrightarrow{grad}f \cdot \vec{dr}(0.4)$$

de la relation(0.4) on peut déduire le gradient d'une fonction dans n'importe quelle base

dans le cas de la base cylindrique, la fonction  $f$  doit être en fonction des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz(0.5)$$

$$d\vec{r} = dr\vec{U}_r + r d\theta\vec{U}_\theta + dz\vec{k}(0.6)$$

Sachant que le gradient en coordonnées cylindrique est donnée par

$$\overrightarrow{grad}f = (\overrightarrow{grad}f)_r\vec{U}_r + (\overrightarrow{grad}f)_\theta\vec{U}_\theta + (\overrightarrow{grad}f)_z\vec{k}(0.7)$$

L'équation (0.4) devient

$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \overrightarrow{dr} = (\overrightarrow{\text{grad}}f)_r dr + (\overrightarrow{\text{grad}}f)_\theta r d\theta + (\overrightarrow{\text{grad}}f)_z dz \quad (0.8)$$

En comparant les équations (0.4) et (0.8) on déduit les composantes du vecteur gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{U}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{k} \quad (0.9)$$

De la même façon on détermine les composantes du vecteur gradient dans la base cylindrique

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \quad (0.10)$$

$$d\vec{r} = dr \overrightarrow{U}_r + r d\theta \overrightarrow{U}_\theta + r \sin\theta \overrightarrow{U}_\varphi \quad (0.11)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{U}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{U}_\varphi \quad (0.12)$$

### 3 La divergence

La divergence d'un champ vectoriel est un scalaire défini par l'application de l'opérateur nabla à un champ vectoriel

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (0.13)$$

C'est un produit scalaire entre le vecteur nabla et le vecteur  $V$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (0.14)$$

Comme le gradient, la divergence peut être exprimé dans les diverses bases, on l'a défini dans la base cartésienne on l'a dans:

Base cylindrique

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (0.15)$$

Base sphérique

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \quad (0.16)$$

#### 4 Rotationnel

C'est un opérateur qui ne s'applique qu'aux champs vectoriels

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (0.17)$$

Dans la base cylindrique

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{U}_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{U}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(rV_r)}{\partial \theta} \right) \vec{k} \quad (0.18)$$

Dans la base sphérique

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \frac{1}{r\sin\theta} \left( \frac{\partial(\sin\theta V_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi} \right) \vec{U}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{U}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right) \vec{U}_\varphi \quad (0.19)$$

## 5 Laplacien

Le laplacien est défini comme la divergence du gradient. On distingue le laplacien scalaire

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (0.20)$$

son expression dans la base cylindrique est :

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (0.21)$$

## 6 Relations fondamentales

$$\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} V = 0 \quad (0.22)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{V} - \Delta \vec{V} \quad (0.23)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0} \quad (0.24)$$

### EXERCICE

Soit le champ vectoriel suivant

$$\vec{V} = (3x^2 + 6y)\vec{i} - 14y\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$$

ce vecteur est composé de trois composantes (trois champs scalaires)

$$V_x = (3x^2 + 6y)$$

$$V_y = -14y$$

$$V_z = 20xz^2$$

Calcul de la divergence

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 6y) - \frac{\partial}{\partial y}14y + \frac{\partial}{\partial z}20xz^2$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = 6x - 14 + 40xz = g(xyz)$$

On trouve comme résultats un champ scalaire. Si on lui applique l'opérateur nabla on aura à calculer son gradient.

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} g(xyz) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}(6x - 14 + 40xz)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} g(xyz) = (6 + 40z)\vec{i} + 40x\vec{k}$$

## I.1 Introduction

### I.1.1 l'électrisation

L'électrostatique consiste à faire une étude des champs électriques créés par des charges immobiles. Avant toute étude il faut définir la nature de ses charges.

Un savant au nom de Thales de Milet, qui naquit en Grèce en l'an 640 avant Jésus-Christ, au cours de ses voyages avait trouvé de l'ambre. Cette matière provient d'une résine qui coulait sur l'écorce des arbres et qui a durci sous la terre en piégeant des insectes figure I.1. son nom ambre vient d'un mot arabe ELANBAR (العنبر). Les grecques appelaient ce matériau de l'élektron et serait l'origine du mot électricité.



Figure I.1

Thalès de Milet a montré qu'en frottant un morceau d'ambre sur une étoffe de laine, l'ambre manifeste le phénomène d'attraction sur des petits morceaux d'herbe ou de paille. Ce phénomène est l'électrisation.

A la fin du 16<sup>ème</sup> siècle William Gilbert invente **électroscope**, il le baptise *versorium*. Il met en équilibre une fine tige de métal *figure I.2*, pour vérifier avec quelle sensibilité cette dernière serait déviée par la force d'attraction électrique de l'ambre frotté. Ce dispositif permet d'estimer les forces électriques.

## Chapitre I

---



Figure I. 2

Après plusieurs tests avec d'autres matériaux il cite dans son livre *De Magnete*, qu'il y a d'autre corps qui peuvent être électrisé en les frottant avec de la laine comme le verre, le soufre, la cire, la résine durcie, le mica. Se sont les *corps électriques*.

La machine de Von Guericke inventé en 1660, formée d'un globe en soufre qui en s'électrisant génère une électricité statique importante. Ainsi, ce scientifique imagina une grosse boule de soufre autour d'un axe pour qu'elle puisse tourner. Il posait les mains sur la boule lorsqu'elle tournait, pour créer les frottements recherchés.



Figure I. 3

Un autre observateur de ces phénomènes, le prêtre **Niccolo Cabeo**, remarque que lorsque des grains de limaille ou de la sciure de bois sont attirés par un corps électrisé, et qu'ils le touchent, ils sont parfois repoussés. **Otto Von Guericke** conclut que *ce globe* [de soufre] n'attire pas seulement, mais repousse ensuite les petits corps, en raison de leurs diverses

## Chapitre I

---

natures, et ne les attire plus avant qu'ils n'aient touché un autre corps. Suit à ces expériences, les gents étaient persuadés que la matière est classée en deux classes, les matériaux qui s'électrisent et les matériaux qui ne s'électrisent pas.

Un jour, alors qu'Etienne Gray expérimentait avec son tube de verre au plomb qu'il avait préalablement frotté, il observa que le bouchon de liège, qui fermait le tube à une extrémité, attirait un fragment de duvet. Pourtant, le bouchon n'avait pas été frotté. Il se dit que le fluide électrique peut passer d'un corps frotté à un autre non frotté figure I. 4.

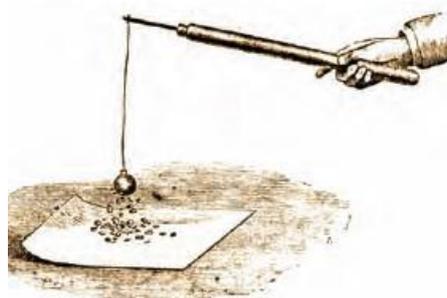


Figure I. 4

L'anglais Wheler, tente la même expérience avec une corde en soie, il observe que le fluide électrique ne se transmet pas. Suite à ces deux expériences en plus d'une autre avec les humains, on supposait qu'il y avait donc **des matériaux conducteurs d'électricité et des matériaux isolants**.

En 1733, **Charles-François de Cisternay Dufay** découvre qu'il y a en fait deux électricités différentes et que deux électricités semblables se repoussent alors que deux électricités différentes s'attirent. Il nomme *électricité vitrée* du à l'électricité du verre, et *électricité résineuse qui est due* à l'électricité de l'ambre. Par la suite on appelle l'*électricité positive* (l'électricité vitrée) et l'*électricité négative* (électricité résineuse) figure I. 5.

# Chapitre I

---



Figure I. 5

Une question qui intriguait les savants, c'est si le frottement est responsable de la production de l'électricité. Parmi ces savants, l'américain **Benjamin Franklin**, l'inventeur **du paratonnerre**. il tente une expérience d'un homme debout sur un gâteau de cire électrise, avec sa main gauche, l'extrémité libre d'un long tube de verre qu'il tient dans sa main droite. Ainsi, il arrive aux conclusions suivantes :

- 1- Un corps non électrisé contient les deux électricités en quantités égales.
- 2- Les frottements séparent les électricités positives et négatives.

Pour comprendre ce qui se passe, on doit penser aux atomes qui composent la matière. Elle est composée d'atomes, eux-mêmes constitués de particules chargées. Les atomes ont un noyau composé de neutrons et de protons. Ils ont également une «coquille» environnante qui est constituée d'électrons. La matière est généralement chargée de manière neutre, ce qui signifie que le nombre d'électrons et de protons est le même. Si un atome a plus d'électrons que de protons, il est chargé négativement. De même, s'il a plus de protons que d'électrons, il est chargé positivement. Certains atomes s'accrochent à leurs électrons plus étroitement que d'autres. La force avec laquelle la matière tient à ses électrons détermine sa place dans la série triboélectrique. De ce fait un matériau devient chargé positivement, tandis que l'autre reçoit une quantité égale de charge négative. Ceci est dû à la loi de conservation de la charge qui exige que la quantité totale de la charge reste inchangée. Si l'on commence avec des matériaux non chargés, la charge initiale présente est nulle. Si un matériau est plus susceptible d'abandonner des électrons lorsqu'il est en contact avec un autre matériau, il est plus positif sur la série triboélectrique, cette série a été déterminé de façon totalement

# Chapitre I

---

empirique,. Si un matériau est plus à «capturer» des électrons lorsqu'il est en contact avec un autre matériau, il est plus négatif sur la série triboélectrique.

La série est telle que chaque corps frotté avec un de la liste s'électrise de la manière suivante : si on frotte le corps avec le suivant, il se charge positivement, et si on frotte le corps avec le précédent, il se charge négativement.

• Verre • Cheveux humains • Nylon • La laine • Fourrure • Conduire • Soie • Aluminium • Papier • Coton • Acier • Bois • Ambre • Caoutchouc dur • Nickel, cuivre • Laiton, Argent • Or, Platine • Polyester • polystyrène • Polyuréthane • Polyéthylène (comme du scotch) • Polypropylène • Vinyle (PVC) • Silicium • Téflon.

Les substances proches du début de cette liste ont tendance à perdre des électrons, tandis que les substances situées vers la fin de la liste ont tendance à les attirer

**Exemple**, si on frotte le verre avec de la laine, le verre se charge positivement et la laine négativement.

## I.1.2 La charge électrique

la matière est formée par des espèces chimiques liées entre eux par des liaisons afin de maintenir leur cohésion. Ces espèces chimiques sont les atomes qui sont identifiés dans le tableau de Mendeleïev, par leurs nombres atomiques.

Ces atomes, électriquement neutres, sont constitués de particules chargées à savoir les électrons et des protons. Ionisé un atome c'est de lui enlever des charges négatives, devient chargé positivement, dans le cas ou lui ajoute des charges négative, il deviendra chargé négativement.

Chargé un matériau c'est d'ioniser ses atomes, cela veut dire que la charge est un multiple de la charge élémentaire et qui vaut  $1.610^{-19}$  coulomb.

Si le volume de chaque corps chargé est petit devant toutes les autres dimensions, une approximation consiste à identifier chacun de ces corps à un point, sans volume propre, auquel on associe une charge électrique correspondant à la charge totale du corps considéré. Cette abstraction mathématique est connue sous le nom d'approximation des charges

# Chapitre I

---

ponctuelles. Cette notion de ponctualité des charges signifie que les dimensions linéaires du corps portant ces charges sont négligeables par rapport à leurs distances de séparation

## I.2 La loi de coulomb

### I.2.1 force de Coulomb

**Coulomb** utilisait un dispositif très sensible, la balance de torsion figure I. 6, qu'il avait lui-même mis au point afin de mesurer les forces entre de petites billes. Grâce à ce dispositif Coulomb vérifia la loi des forces électriques pour différentes charges à des distances différentes. Il conclut que lorsque la distance diminue de moitié la force augmente de quatre fois et que cette force augmente s'il augmente la charge d'une des billes. En somme la force d'interaction entre deux charges ponctuelles est proportionnelle au produit des deux charges et inversement proportionnelle au carré de distance entre elles.

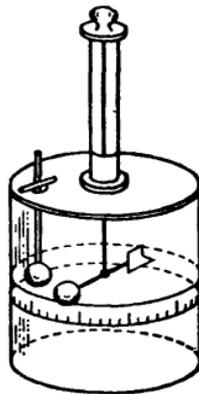


Figure I. 6

Si dans le vide deux charges électriques ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  au repos, séparées par une distance  $r$ , puis elles exercent l'une sur l'autre une force qui est donnée par

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

Telle que  $K$  est une constante de proportionnalité communément connu sous le nom de la constante de la force électrostatique, elle est déterminée expérimentalement. Dans le vide elle vaut :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \quad (1.2)$$

# Chapitre I

$\epsilon_0$  c'est la permittivité électrique absolue qui vaut

Puisque il s'agit d'une force, on utilise les notions de vecteurs, et déterminer ses caractères à savoir son origine, son support son sens et son intensité. Pour se faire on choisi un repère pour repérer les positions des charges ponctuelles. Cette force est orientée suivant la droite passant par ses charges.

Soient  $q_1$  et  $q_2$  deus charges similaires placées à des points A et B respectivement figure I.7:

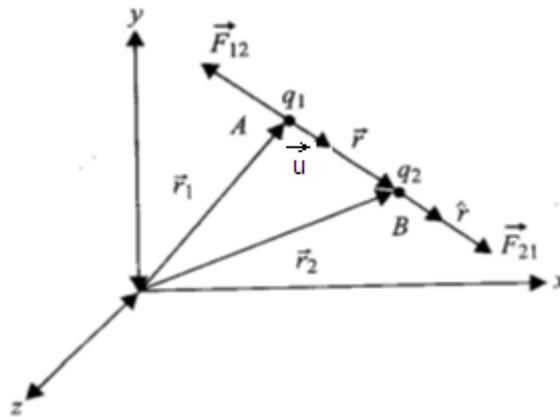


figure I.7

Les points A et B sont repérés par les vecteurs positions  $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  respectivement et le vecteur entre les point A et B est donnée par  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overrightarrow{AB}$  la distance entre les deux points  $r = |\overrightarrow{AB}|$  ainsi que le vecteur unitaire porté par ce vecteur est donné par

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (1.3)$$

$\vec{F}_{21}$  est la force de la charge  $q_1$  qui agit sur la charge  $q_2$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad (1.4)$$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  n'est autre que la force de la charge  $q_2$  qui agit sur la charge  $q_1$

On va comparer ces deux forces avec le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}$ , qui va dépendre du signe des charges  $q_1$  et  $q_2$ .

# Chapitre I

Si  $q_1 > 0$  et  $q_2 > 0$  la force  $\vec{F}_{12}$  est de sens opposé à  $\vec{u}$  et  $\vec{F}_{21}$  est de même sens que  $\vec{u}$  il y a répulsion des deux charges.

Si  $q_1 < 0$  et  $q_2 < 0$  il y a répulsion des deux charges.

Si  $q_1 < 0$  et  $q_2 > 0$  la force  $\vec{F}_{21}$  est de sens opposé à  $\vec{u}$  et  $\vec{F}_{12}$  est de même sens que  $\vec{u}$  il y a attraction des deux charges. De même si  $q_1 > 0$  et  $q_2 < 0$ .

Ce qui confirme qu'il existe deux type de charges positives et négatives, et le comportement d'attraction ou de répulsion se manifeste suivant le signe des charges

## I.2.2 Principe de superposition

Ce principe permet de calculer la force agissant sur une charge due à plusieurs charges. Selon le principe de superposition, la force totale sur une charge donnée est la somme vectorielle de toutes les forces individuelles exercées par chacune des autres charges figure I.8

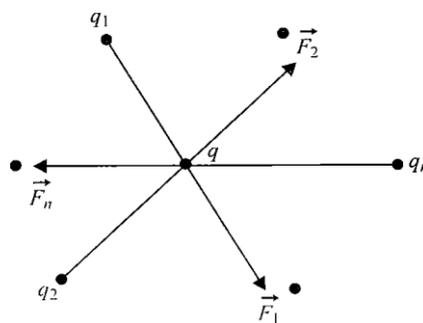


figure I.8

L'exemple le plus simple qu'on peut faire comme application et déterminer cette force c'est le cas de l'atome d'hydrogène. C'est le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, ou l'électron de masse  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg et portant une charge  $-e$  tourne autour d'un noyau, formé par un proton de masse  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg et une charge  $+e$ , suivant une trajectoire circulaire de rayon  $r = 5.2 \cdot 10^{-11}$  m. ces deux particules ont une masse et une charges chacune pour cela on peut calculer et compare leur force électrique et gravitationnelle

$$F_e = k \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(5.3 \cdot 10^{-11})^2} = 8.25 \cdot 10^{-8}$$

# Chapitre I

---

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \times 1.67 \cdot 10^{-27}}{(5.3 \cdot 10^{-11})^2} = 3.7 \cdot 10^{-47}$$

la force électrique est très grande devant la force gravitationnelle.

## I.3 Champ électrique

Il est souvent utile de mettre cette force sous la forme établie par Clerk Maxwell. La force sera définie par la charge qui agit sur une autre par un facteur de proportionnalité, qu'on déterminera par la suite

Si nous plaçons une seule charge  $q$  à un certain point dans l'espace, elle ne subira aucune force. Mais si une autre charge  $Q$  est placée près d'elle,  $q$  subira une force donnée par

$$F = k \frac{Qq}{r^2}$$

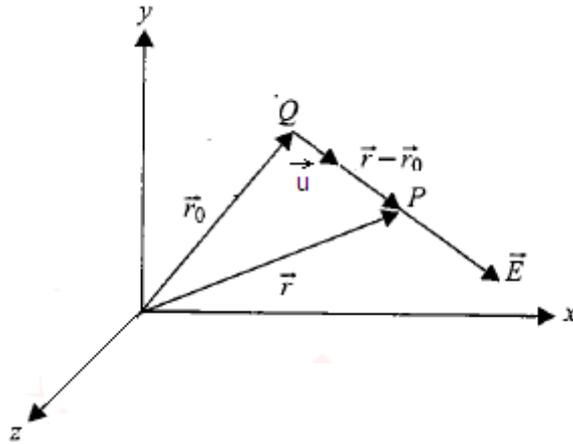
Maintenant, la question qui se pose, comment  $Q$  applique-t-elle une force sur  $q$  ou comment les personnes connaissent-elles la présence de  $Q$  lorsqu'il n'y a pas de contact direct entre elles.

Fondamentalement, la force entre deux charges peut être considérée comme un processus en deux étapes :

- tout d'abord, la charge  $Q$  crée quelque chose autour d'elle appelée champ électrique.
- deuxièmement, toute autre particule de charge comme  $q$  si elle est placée à un certain point dans ce champ subit une force, ou nous pouvons dire que les charges interagissent les unes avec les autres par le biais du champ électrique.

Ainsi, nous pouvons définir le champ électrique comme l'espace autour d'une charge dans lequel son influence peut être ressentie par n'importe quelle autre particule chargée.

# Chapitre I



$$\vec{F} = k \frac{Qq}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \vec{u} = q \left( k \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \vec{u} \right)$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (1.5)$$

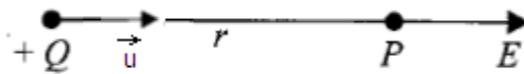
C'est la force de la charge Q sur la charge q

Le facteur de proportionnalité de la force de coulomb sera donné par

$$\vec{E} = k \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \vec{u} \quad (1.6)$$

C'est le champ électrique crée par la charge Q à la position  $\vec{r}$ . Le champ électrique est une grandeur vectorielle.

Si la charge Q est positive :



Si la charge est négative :



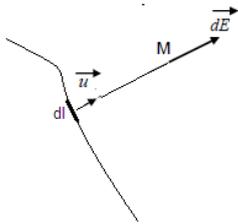
C'est une façon de connaître les lignes de champs, si une charge est positive les lignes de champs partent a partir de cette charge dans le cas ou la charge est négative les lignes arrivent vers la charge figure I.9



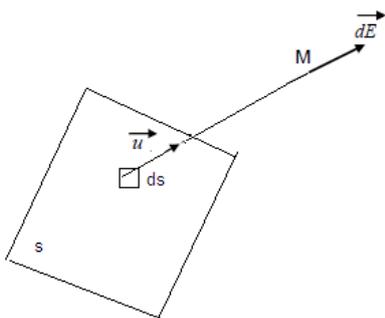
Figure I.9. lignes de champ électrique produites par des charges positives ou négatives

## I.4 Champ créé par une distribution continue de charges.

On a supposé que les charges étaient ponctuelles, mais ce n'est pas toujours le cas. Sachant la matière est pleine, elle peut être chargée en volume en surface ou sur une longueur.

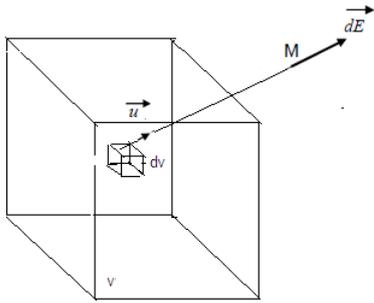


la charge est distribuée sur la longueur, on parle d'une densité de charge linéique  $\lambda = \frac{dq}{dl}$  il s'agit de la charge par unité de longueur c/m (USI)



la charge est distribuée sur toute la surface, on parle d'une densité de charge surfacique  $\sigma = \frac{dq}{ds}$  il s'agit de la charge par unité de surface c/m<sup>2</sup> (USI)

# Chapitre I



la charge est distribuée dans tout le volume, on parle d'une densité de charge volumique  $\rho = \frac{dq}{dv}$  il s'agit de la charge par unité de volume  $c/m^3$ (USI)

Pour calculer le champ électrique, on procède de la même façon comme pour une charge ponctuelle.

En première étape, on cherche l'expression du champ électrique élémentaire  $d\vec{E}$ , pour une charge élémentaire  $dq$ , continue, dans la plus petite longueur  $dl$ , ou dans la plus petite surface  $ds$  ou dans le plus petit volume  $dv$ , tout dépend de la géométrie du matériau chargé.

Puis on passe à l'intégration sur les dimensions choisies.

$$d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad (1.7)$$

Cas d'une longueur

$$d\vec{E} = K \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = \int K \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u} \quad (1.8)$$

Cas d'une surface

$$d\vec{E} = K \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u} \Rightarrow \vec{E} = \iint K \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u} \quad (1.9)$$

Pour un rectangle de côté  $L$  et  $d$

$$ds = dx dy \quad (1.10) \quad \text{le } x \text{ varie entre } 0 \text{ et } L \text{ et le } y \text{ varie entre } 0 \text{ et } d$$

Pour une surface circulaire de rayon  $R$

$$ds = r dr d\theta \quad (1.11)$$

$R$  varie entre  $0$  et  $R$  et  $\theta$  varie entre  $0$  et  $2\pi$  figure I.10

# Chapitre I

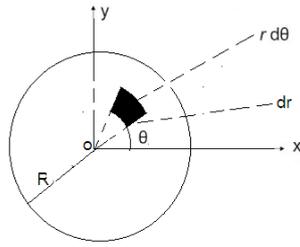


figure I.10

Cas d'un volume

$$d\vec{E} = K \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = \iiint K \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u} \quad (1.12)$$

Cas d'un parallélépipède

$$dv = dx dy dz$$

Cas d'une sphère

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \quad (1.13)$$

Le rayon  $r$  varie entre 0 et  $R$ , l'angle  $\varphi$  varie entre 0 et  $2\pi$  et l'angle  $\theta$  varie entre 0 et  $\pi$

figure I.11

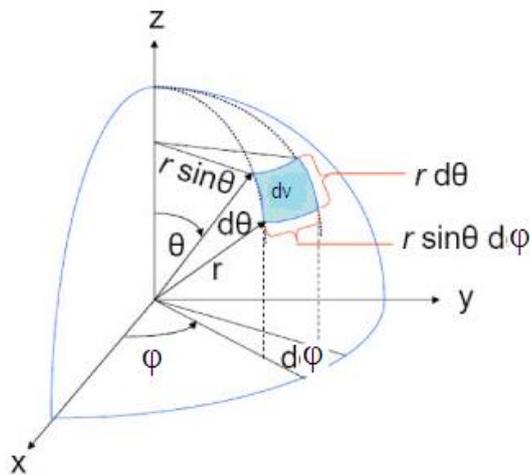


figure I.11

## I.5 Potentiel électrostatique

En mécanique classique on a vu dans le théorème de l'énergie potentielle, que la différence entre l'énergie potentielle du point de départ et celle du point d'arrivé est égale aux travaux des forces qui dérivent d'un potentiel.

Et le travail d'une force n'est autre que la circulation de la force  $F$  par le vecteur déplacement.

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.14)$$

On peut calculer la circulation du champ électrique

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = K \frac{q}{r^2} \vec{u} d\vec{r} = K \frac{q}{r^2} dr = -\frac{d}{dr} \left( K \frac{q}{r} \right)$$

On trouve  $dC = -dV$

$V$  qui est une grandeur algébrique, qui sera définie comme le potentiel électrique crée par une charge électrique à un point donné, c'est une fonction qui dépend de la position, son expression :

$$V = K \frac{q}{r} + cst \quad (1.15)$$

Lorsque  $r$  tend vers l'infini le potentiel  $V$  s'annule

On déduit aussi que la relation entre le champ électrique et le potentiel est donnée par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(xyz) \quad (1.16)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad (1.17)$$

## I.6 Dipôle électrostatique

Un *dipôle électrostatique* est un système constitué de deux charges ponctuelles opposées  $-q$  et  $q$  situées en deux points A et B distants de  $a$  et tels que  $a = AB$  soit très petite devant les autres distances envisagées figure I.12. le *moment dipolaire est défini* par le vecteur :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{AB} \quad (1.18)$$

## Chapitre I

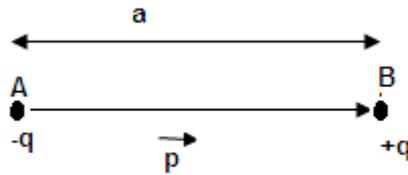


figure I.12

Son unité est le coulomb. Mètre C.m, , il admet aussi l'unité de Debye tel que  $1 \text{ D} = 33.33 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$ .

Le potentiel créé en  $M$  par le dipôle est égal d'après ce qu'on a écrit précédemment à :

$$V(M) = K \left( \frac{-q}{|AM|} + \frac{q}{|BM|} \right) = Kq \left( \frac{1}{|BM|} - \frac{1}{|AM|} \right)$$

O est le milieu du segment [AB]

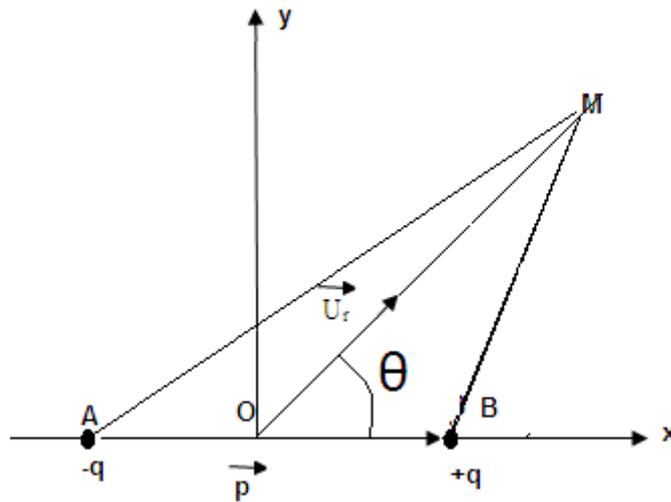


figure I.13

En utilisant les coordonnées polaires d'origine O dans un plan figure I.13 et  $\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r$

Sachant que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r + \frac{a}{2}\vec{i} = r\cos\theta\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} + \frac{a}{2}\vec{i} = (r\cos\theta + \frac{a}{2})\vec{i} + r\sin\theta\vec{j}$

Son module est :

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(r\cos\theta + \frac{a}{2})^2 + (r\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} + ar\cos\theta}$$

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AM}|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2}$$

## Chapitre I

---

De la même façon on calcul le module de l'autre vecteur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U}_r - \frac{a}{2}\vec{i} = r\cos\theta\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} + \frac{a}{2}\vec{i} = \left(r\cos\theta - \frac{a}{2}\right)\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} \\ |\overrightarrow{BM}| &= \sqrt{\left(r\cos\theta - \frac{a}{2}\right)^2 + (r\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - ar\cos\theta} \\ \frac{1}{|\overrightarrow{BM}|} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}\end{aligned}$$

Comme le point  $M$  est loin de la distance  $a$  on a  $a \ll r$  et on peut effectuer un développement limité de la relation précédente :

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AM}|} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta + o\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

Et

$$\frac{1}{|\overrightarrow{BM}|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta + o\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

On passe au calcul du potentiel en prenant en considération ses approximations :

$$V(M) = Kq \left( \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta + o\left(\frac{a}{r}\right)\right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta + o\left(\frac{a}{r}\right)\right) \right)$$

$$V(M) = Kq \left( \frac{1}{r} \left(\frac{a}{r}\cos\theta\right) \right) = Kq \frac{a}{r^2} \cos\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cdot \cos\theta}{r^2} \quad (1.20)$$

Comme le moment dipolaire forme un angle  $\theta$  avec le vecteur unitaire polaire leur produit scalaire donne l'expression de

$$\begin{aligned}|\vec{p}| &= q|\overrightarrow{AB}| = qa \\ \vec{p} \cdot \overrightarrow{U}_r &= \vec{p} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = |\vec{p}| \cdot \cos\theta = q \cdot a \cdot \cos\theta\end{aligned}$$

Tenant compte de cette expression, et que  $|\overrightarrow{OM}| = r$  alors le potentiel à un point  $M$  dans l'espace est :

## Chapitre I

---

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}| \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|^3} \quad (1.21)$$

Pour le calcul du champ électrique du dipôle électrique il suffit de le déduire du potentiel par l'expression

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Comme le champ électrique est plus facile de le manipuler en coordonnées polaire, il est utile de définir l'expression du Gradient dans le même système de coordonnées.

D'après le chapitre du calcul vectoriel, le gradient dans la base polaire est donné par

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{U}_r + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{U}_\theta \quad (1.22)$$

De ce fait le champ électrique a une grandeur radiale et une autre angulaire (orthoradiale)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cdot \cos\theta}{r^3} \quad (1.23)$$

Et

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cdot \sin\theta}{r^3} \quad (1.24)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cdot \cos\theta}{r^3} \vec{U}_r + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cdot \sin\theta}{r^3} \vec{U}_\theta \quad (1.25)$$

Comme

$$|\vec{p}| = qa$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|\vec{p}| \cdot \cos\theta}{r^3} \vec{U}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}| \cdot \sin\theta}{r^3} \vec{U}_\theta \quad (1.26)$$

Le potentiel créé par le dipôle décroît en  $\frac{1}{r^2}$  et le champ en  $\frac{1}{r^3}$  alors que pour une charge ponctuelle, ils décroissent respectivement en  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r^2}$  : les effets d'un dipôle se font ressentir à moins grande distance que ceux d'une charge seule.

Le champ peut s'exprimer d'une façon général.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cdot (\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{OM} - |\overrightarrow{OM}|^2 \cdot \vec{p}}{|\overrightarrow{OM}|^5} \quad (1.27)$$

## I.7 Série d'exercices avec solutions.

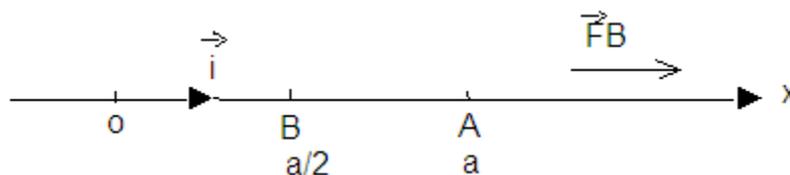
### Exercice 1

Sur un axe  $x'ox$  sont placées : une charge ponctuelle  $q_1$  au point O, une charge ponctuelle  $q_2$  au point A d'abscisse  $x=a$ .

1 -Donner l'expression de la force électrostatique qui agit sur une charge  $q_3$  placée sur l'axe au point B d'abscisse  $x=a/2$ . On donne  $q_1=3q$ ,  $q_2=-2q$  et  $q_3=q$  avec  $q$  une charge positive.

2 -Donner l'expression du champ et du potentiel électrostatique au point B.

**Solution :**



la force au point B résulte de la force de la charge  $q_1$  sur la charge  $q_3$  et la force de la charge  $q_2$  sur la charge  $q_3$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{OB} + \vec{F}_{AB}$$

$$\vec{F}_{OB} = K \frac{q_3 q_1}{|\overrightarrow{OB}|^2} \overrightarrow{U_{OB}} = K \frac{q_3 q_1}{|\overrightarrow{OB}|^2} \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = K \frac{q_3 q_1}{|\overrightarrow{OB}|^3} \overrightarrow{OB}$$

$$\text{AVEC } \overrightarrow{OB} = \frac{a}{2} \vec{i} \quad \text{et } |\overrightarrow{OB}| = \frac{a}{2}$$

Et

## Chapitre I

---

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_3 q_2}{|\vec{AB}|^2} \vec{U}_{AB} = K \frac{q_3 q_2}{|\vec{AB}|^2} \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = K \frac{q_3 q_2}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB}$$

$$\text{AVEC } \vec{AB} = \frac{-a}{2} \vec{i} \quad \text{et } |\vec{AB}| = \frac{a}{2}$$

$$\vec{F}_B = K \frac{q_3 q_1}{|\vec{OB}|^3} \vec{OB} + K \frac{q_3 q_2}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB} = K q_3 \left( \frac{q_1 \frac{a}{2} \vec{i} - q_2 \frac{a}{2} \vec{i}}{\frac{a^3}{2}} \right)$$

$$\vec{F}_B = \frac{K q_3}{a^2} (q_1 - q_2) \vec{i} = \frac{K q}{a^2} (3q + 2q) \vec{i} = \frac{20K}{a^2} q^2 \vec{i} = \frac{5}{\pi \epsilon_0 a^2} q^2 \vec{i}$$

2- Le champ électrique au point B est dû à la charge  $q_1$  et  $q_2$

$$\text{D'où } \vec{E}_B = \frac{\vec{F}_B}{q_B} = \frac{5}{\pi \epsilon_0 a^2} q \vec{i}$$

Le calcul du potentiel

$$V(B) = V_{OB} + V_{AB} = K \left( \frac{q_1}{|\vec{OB}|} + \frac{q_2}{|\vec{AB}|} \right) = \frac{2Kq}{a} = \frac{q}{2a\pi\epsilon_0}$$

### Exercice 2

Dans un plan XOY, deux charges ponctuelles  $q_A$  et  $q_B$  sont placées sur l'axe des x, aux points A et B respectivement de coordonnées  $(a,0)$  et  $(-a,0)$ . Déterminer la force électrostatique résultante qui s'exerce sur une charge ponctuelle  $q$  placée au point C de coordonnées  $(x,y)$ , dans les cas ou (i)  $q_A=q_B=q$  (ii)  $q_A=-q_B=q$

**Solution :**

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = K \frac{q_A q_C}{|\vec{AC}|^3} \vec{AC} + K \frac{q_B q_C}{|\vec{BC}|^3} \vec{BC}$$

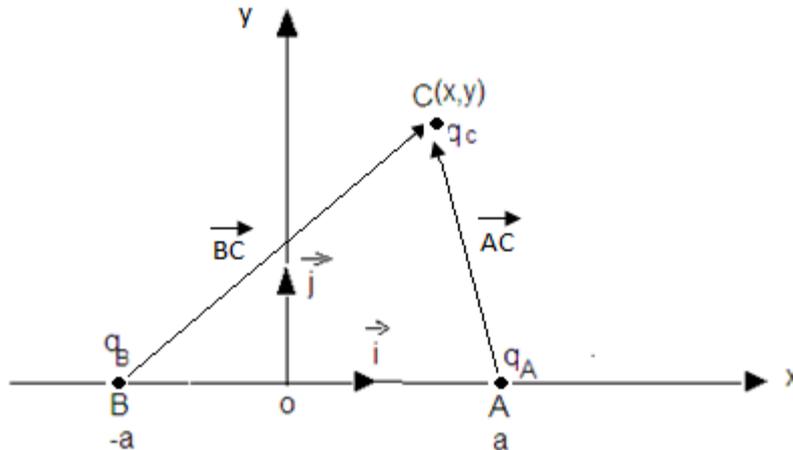
$$\vec{AC} = (x - a)\vec{i} + y\vec{j} \text{ ou } |\vec{AC}| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

Et

$$\vec{BC} = (x + a)\vec{i} + y\vec{j} \text{ ou } |\vec{BC}| = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$$

# Chapitre I

$$\vec{F}_C = Kq_C \left( \frac{q_A}{(\sqrt{(x-a)^2 + y^2})^3} ((x-a)\vec{i} + y\vec{j}) + \frac{q_B}{(\sqrt{(x+a)^2 + y^2})^3} ((x+a)\vec{i} + y\vec{j}) \right)$$



i) cas  $q_C=q$   $q_A=q_B=q$

$$\vec{F}_C = Kq^2 \left( \frac{(x-a)\vec{i} + y\vec{j}}{(\sqrt{(x-a)^2 + y^2})^3} + \frac{(x+a)\vec{i} + y\vec{j}}{(\sqrt{(x+a)^2 + y^2})^3} \right)$$

i) cas  $q_C=q$   $q_A=-q_B=q$

$$\vec{F}_C = Kq^2 \left( \frac{(x-a)\vec{i} + y\vec{j}}{(\sqrt{(x-a)^2 + y^2})^3} - \frac{(x+a)\vec{i} + y\vec{j}}{(\sqrt{(x+a)^2 + y^2})^3} \right)$$

### Exercice 3

Deux charges ponctuelles  $-q$  et  $+q$  sont distantes de  $a$ , sur l'axe  $Oy$ , symétriques par rapport à l'origine  $O$ .

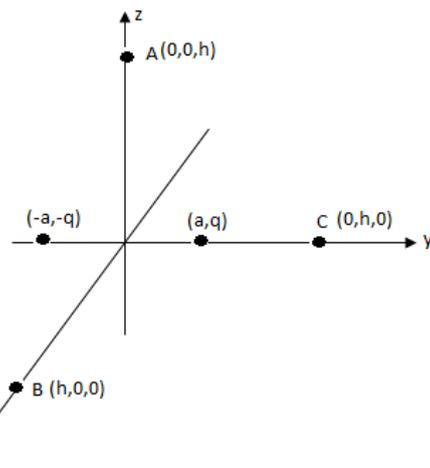
1 calculer les champs électriques aux points

A, B et c à la distance  $h$  de l'origine  $O$ .

2 déterminer le potentiel  $V$  au centre  $O$ .

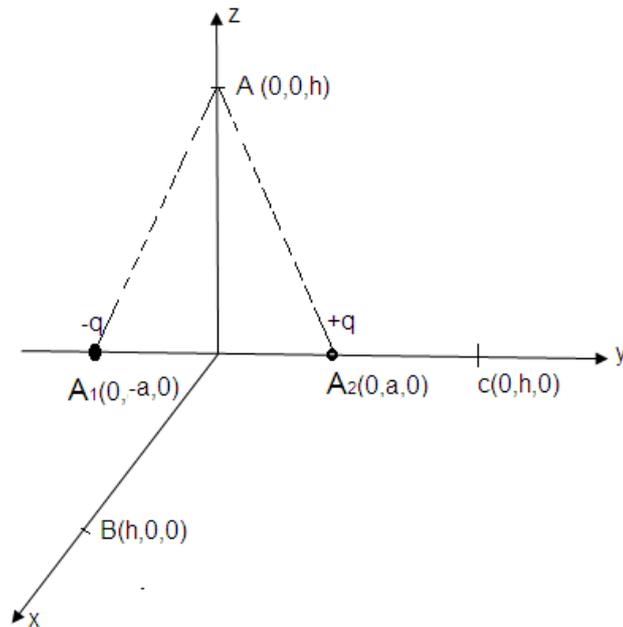
3 Trouver la force exercée sur la charge

$+Q$  placée au point  $O$ .



**Solution :**

**Solution :**



On a deux charges aux points A1 et A2 avec des charges  $-q$  et  $+$  respective ils sont dans le plan (yoz)

Le champ électrique au point A est la somme des champs des deux charges :

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A_1A} + \vec{E}_{A_2A} = K \frac{q_{A1}}{|\vec{A_1A}|^3} \vec{A_1A} + K \frac{q_{A2}}{|\vec{A_2A}|^3} \vec{A_2A}$$

$$\vec{A_1A} = (a)\vec{j} + h\vec{k} \text{ ou } |\vec{A_1A}| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Et

$$\vec{A_2A} = (-a)\vec{j} + h\vec{k} \text{ ou } |\vec{A_2A}| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\vec{E}_A = Kq \left( -\frac{a\vec{j} + h\vec{k}}{(\sqrt{a^2 + h^2})^3} + \frac{-a\vec{j} + h\vec{k}}{(\sqrt{a^2 + h^2})^3} \right) = \frac{-2Kqa}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \vec{j}$$

De même pour le champ au point B résulte des charges qui sont aux points A1 et A2 dans le plan (yox)

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{A_1B} + \vec{E}_{A_2B} = K \frac{q_{A1}}{|A_1B|^3} \overrightarrow{A_1B} + K \frac{q_{A2}}{|A_2B|^3} \overrightarrow{A_2B}$$

$$\overrightarrow{A_1B} = h\vec{i} + a\vec{j} \text{ ou } |A_1B| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Et

$$\overrightarrow{A_2B} = h\vec{i} - a\vec{j} \text{ ou } |A_2B| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\vec{E}_B = Kq \left( \frac{-a\vec{j} + h\vec{i}}{(\sqrt{a^2 + h^2})^3} - \frac{a\vec{j} + h\vec{i}}{(\sqrt{a^2 + h^2})^3} \right) = \frac{-2Kqa}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \vec{j}$$

On retrouve les mêmes expressions.

Au point C

$$\vec{E}_C = K \frac{-q}{|A_1C|^3} \overrightarrow{A_1C} + K \frac{q}{|A_2C|^3} \overrightarrow{A_2C}$$

$$\overrightarrow{A_1C} = (h + a)\vec{j} \quad |A_1C| = (h + a)$$

$$\overrightarrow{A_2C} = (h - a)\vec{j} \quad |A_2C| = (h - a)$$

$$\vec{E}_C = Kq \left( \frac{-1}{(h + a)^2} \vec{j} + \frac{1}{(h - a)^2} \vec{j} \right)$$

## Chapitre I

---

On réduit au même dénominateur

$$\vec{E}_C = Kq \left( \frac{-(h^2 + a^2 - 2ah) + (h^2 + a^2 + 2ah)}{(h+a)^2 \cdot (h-a)^2} \vec{j} \right) = Kq \left( \frac{4ah}{(h^2 - a^2)^2} \right) \vec{j}$$

$$\vec{E}_C = Kq \left( \frac{4ah}{(h^2 - a^2)^2} \right) \vec{j}$$

2-

$$V(o) = \frac{-Kq}{A_1O} + \frac{Kq}{A_2O} = 0$$

le potentiel est nul

### Exercice 4

Dans un plan (xoy) on place trois charges ponctuelles  $q_A$ ,  $q_B$  et  $q_C$  aux point A(-2,2), B(1,1) et C(-1,1) respectivement. Sachant que  $q_A = 1\mu\text{C}$ ,  $q_B = \sqrt{2}\mu\text{C}$  et  $q_C = 3\mu\text{C}$

- Calculer le champ électrique crée par les charges  $q_A$  et  $q_B$  au point C. représenter le vecteur du champ électrique dans le plan.
- Calculer le potentiel électrique crée par les charges  $q_A$  et  $q_B$  au point C.
- Calculer la force électrique qui agit sur la charge  $q_C$

→

Solution

$$\vec{E}_C(q_A, q_B) = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC} = K \frac{q_A}{|\vec{AC}|^3} \vec{AC} + K \frac{q_B}{|\vec{BC}|^3} \vec{BC}$$

$$\vec{AC} = \vec{i} - \vec{j} \qquad |\vec{AC}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{BC} = -2\vec{i} \qquad |\vec{BC}| = 2$$

$$\vec{E}_C(q_A, q_B) = K \frac{q_A}{2\sqrt{2}} (\vec{i} - \vec{j}) + K \frac{q_B}{2^3} (-2\vec{i}) = \frac{K}{2} \left( \left( \frac{q_A}{\sqrt{2}} - \frac{q_B}{2} \right) \vec{i} - \left( \frac{q_A}{\sqrt{2}} \right) \vec{j} \right)$$

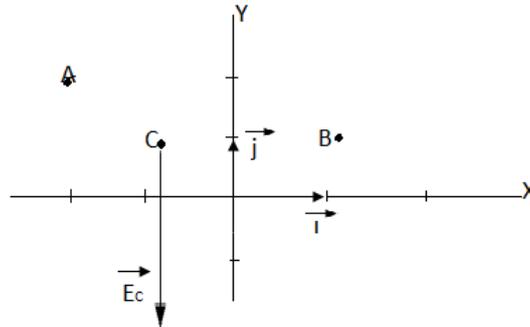
$$\vec{E}_C(q_A, q_B) = \frac{K}{2} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{i} - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \vec{j} \right) = - \left( \frac{K}{2} \frac{10^{-6}}{\sqrt{2}} \right) \vec{j}$$

## Chapitre I

---

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$$

$$\vec{E}_C(q_A, q_B) = - \left( 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6}}{2\sqrt{2}} \right) \vec{j} = - \frac{450}{\sqrt{2}} \vec{j}$$



Calcul du potentiel au point C

$$V_C(q_A, q_B) = K \frac{q_A}{|AC|} + K \frac{q_B}{|BC|} = 9 \cdot 10^9 \left( \frac{10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot 10^{-6}}{2} \right)$$

$$V_C(q_A, q_B) = 9\sqrt{2} \cdot 10^2 V$$

Calcul de la force sur la charge  $q_C$

$$\vec{F}_C = q_C \vec{E}(q_A, q_B)$$

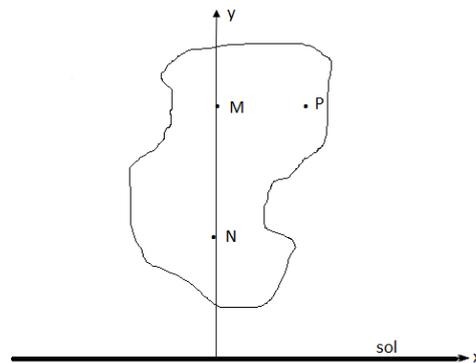
$$\vec{F}_C = -3 \cdot 10^{-6} \frac{450}{\sqrt{2}} \vec{j} = - \frac{135}{\sqrt{2}} 10^{-4} \vec{j}$$

### Exercice 5

La distribution de la charge électrique dans un nuage d'orage peut être approximativement approximée par plusieurs charges ponctuelles placées à différentes hauteurs. La figure I. 23.4a montre une telle distribution de charge approximative consistant en une charge de 40 C à une hauteur de 10 km et une charge de -30 C à une hauteur de 4 km dans le nuage d'orage.

Quels sont les composants horizontale et verticale du champ électrique que ces deux charges produisent en un point P à une hauteur de 10 km et à une distance horizontale de 6 km à droite?

## Solution



suivant le repère qu'on choisi, les deux point M et N dans le nuage ont des coordonnées (0,10)m et (0,4)m respectivement, on cherche a trouver le champ électrique au point P de coordonnées (6,10)m

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{MP} + \vec{E}_{NP} = K \frac{q_M}{|\vec{MP}|^3} \vec{MP} + K \frac{q_N}{|\vec{NP}|^3} \vec{NP}$$

$$\vec{MP} = 6\vec{i} \quad d'ou \quad |\vec{MP}| = 6$$

$$\vec{NP} = 6\vec{i} + 6\vec{j} \quad d'ou \quad |\vec{NP}| = 6\sqrt{2}$$

$$\vec{E}_P = K \frac{40}{6^3} (6\vec{i}) + K \frac{30}{(6\sqrt{2})^3} (6\vec{i} + 6\vec{j})$$

$$E_x = \frac{9 \cdot 10^9}{6^2} \left( 40 - \frac{30}{2\sqrt{2}} \right) = 7,3 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

$$E_y = \frac{-9 \cdot 10^9}{6^2} \left( \frac{30}{2\sqrt{2}} \right) = -2,7 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

# Chapitre I

Le champ électrique résultant au point P est composé par une composante horizontale suivant la direction positive de l'axe OX du repère et une composante verticale dans le sens négative de l'axe OY.

## Exercice 6

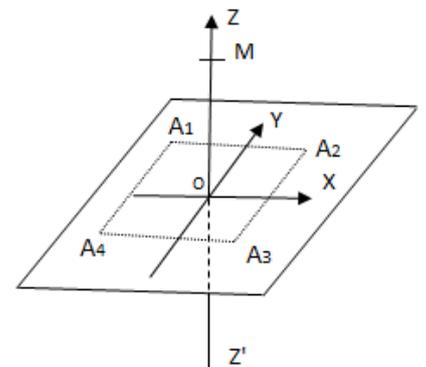
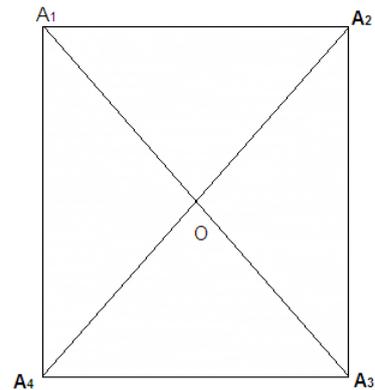
Aux sommets d'un carré de côté  $2a$ , on place quatre charges  $q_{A1}$ ,  $q_{A2}$ ,  $q_{A3}$  et  $q_{A4}$  respectivement aux points  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ .

- 1- Calculer le champ électrique au point O centre du carré
- 2- Calculer le potentiel
- 3- Déduire ce champ ainsi que le potentiel dans les cas suivants :

i)  $q_{A1}=q_{A2}=q_{A3}=q_{A4}=q$

ii)  $q_{A1}=q_{A2}=q_{A3}=q_{A4}=q$

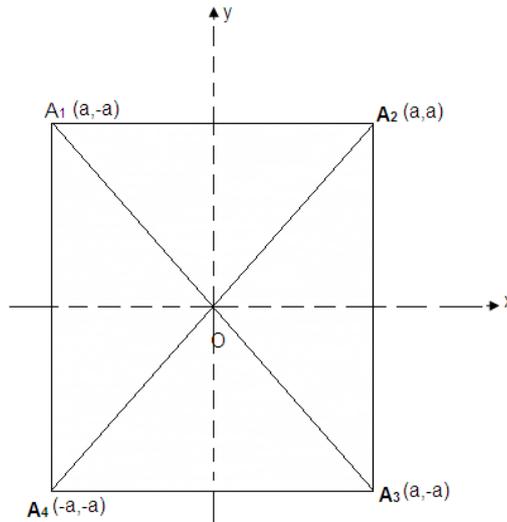
- 4- L'axe Oz est perpendiculaire au plan de ces quatre charges. Déterminer le potentiel électrostatique V en un point M de l'axe oz dans le cas où les quatre charges sont égales à q, déduire le champ électrique régnant au point M



## Solution

## Chapitre I

---



- 1- Le champ électrique au point O est dû aux champs créés par les charges aux quatre sommets ;

$$\vec{E}_o(q_{A1}, q_{A2}, q_{A3}, q_{A4}) = \vec{E}_o = \vec{E}_{A_1O} + \vec{E}_{A_2O} + \vec{E}_{A_3O} + \vec{E}_{A_4O}$$

$$\vec{E}_o = K \frac{q_{A1}}{|\vec{A}_1O|^3} \vec{A}_1O + K \frac{q_{A2}}{|\vec{A}_2O|^3} \vec{A}_2O + K \frac{q_{A3}}{|\vec{A}_3O|^3} \vec{A}_3O + K \frac{q_{A4}}{|\vec{A}_4O|^3} \vec{A}_4O$$

On choisit un repère orthonormé avec le point O comme origine, les points des sommets auront des coordonnées suivant ce repère. On peut calculer les vecteurs ainsi que leurs normes

$$\vec{A}_1O = a\vec{i} - a\vec{j} \text{ ou } |\vec{A}_1O| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Et

$$\vec{A}_2O = -a\vec{i} - a\vec{j} \text{ ou } |\vec{A}_2O| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\vec{A}_3O = -a\vec{i} + a\vec{j} \text{ ou } |\vec{A}_3O| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\vec{A}_4O = a\vec{i} + a\vec{j} \text{ ou } |\vec{A}_4O| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\vec{E}_o = K \frac{q_{A1}}{(a\sqrt{2})^3} (a\vec{i} - a\vec{j}) + K \frac{q_{A2}}{(a\sqrt{2})^3} (-a\vec{i} - a\vec{j}) + K \frac{q_{A3}}{(a\sqrt{2})^3} (-a\vec{i} + a\vec{j}) + K \frac{q_{A4}}{(a\sqrt{2})^3} (a\vec{i} + a\vec{j})$$

Après simplification

## Chapitre I

---

$$\vec{E}_o = \frac{K}{2a^2\sqrt{2}}(q_{A1}(\vec{i} - \vec{j}) + q_{A2}(-\vec{i} - \vec{j}) + q_{A3}(-\vec{i} + \vec{j}) + q_{A4}(\vec{i} + \vec{j}))$$

$$\vec{E}_o = \frac{K}{a^2(\sqrt{2})^3}[(q_{A1} - q_{A2} - q_{A3} + q_{A4})\vec{i} + (-q_{A1} - q_{A2} + q_{A3} + q_{A4})\vec{j}]$$

2- Calcul du potentiel

$$V_o(q_{A1}, q_{A2}, q_{A3}, q_{A4}) = V_{O_o} = V_{A1O} + V_{A2O} + V_{A3O} + V_{A4O}$$

$$V_o = K \frac{q_{A1}}{|A_1O|} + K \frac{q_{A2}}{|A_2O|} + K \frac{q_{A3}}{|A_3O|} + K \frac{q_{A4}}{|A_4O|}$$

$$V_o = K \frac{q_{A1}}{a\sqrt{2}} + K \frac{q_{A2}}{a\sqrt{2}} + K \frac{q_{A3}}{a\sqrt{2}} + K \frac{q_{A4}}{a\sqrt{2}}$$

$$V_o = \frac{K}{a\sqrt{2}}(q_{A1} + q_{A2} + q_{A3} + q_{A4})$$

3- Cas  $q_{A1}=q_{A2}=q_{A3}=q_{A4}=q$

$$\vec{E}_o = \frac{Kq}{2a^2\sqrt{2}}((\vec{i} - \vec{j}) + (-\vec{i} - \vec{j}) + (-\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} + \vec{j}))$$

Comme  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\vec{E}_o = \vec{0}$$

$$V_o = \frac{4}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{a\pi\epsilon_0\sqrt{2}}$$

Cas  $q_{A1}=q_{A4}=-q$        $q_{A2}=q_{A3}=2q$

$$\vec{E}_o = \frac{Kq}{2a^2\sqrt{2}}(-(\vec{i} - \vec{j}) + 2(-\vec{i} - \vec{j}) + 2(-\vec{i} + \vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}))$$

$$\vec{E}_o = \frac{-6Kq}{2a^2\sqrt{2}}\vec{i} = \frac{-3q}{\pi\epsilon_0 a^2 4\sqrt{2}}\vec{i}$$

$$V_o = \frac{2qK}{a\sqrt{2}} = \frac{qK}{a\pi\epsilon_0 2\sqrt{2}}$$

4-

## Chapitre I

$$V_M = K \frac{q_{A1}}{|\overline{A_1M}|} + K \frac{q_{A2}}{|\overline{A_2M}|} + K \frac{q_{A3}}{|\overline{A_3M}|} + K \frac{q_{A4}}{|\overline{A_4M}|}$$

Comme les quatre charges sont égales à  $q$  et la distance entre les quatre points au point  $M$  sont égales aussi à

$$|\overline{A_1M}| = |\overline{A_2M}| = |\overline{A_3M}| = |\overline{A_4M}| = \sqrt{2a^2 + z^2}$$

Le potentiel devient

$$V_M = \frac{q}{\pi \epsilon_0 \sqrt{2a^2 + z^2}}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ Composante du champ suivant l'axe } ox$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ Composante du champ suivant l'axe } oy$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \text{ Composante du champ suivant l'axe } oz$$

Comme  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$  car le potentiel dépend que de  $z$  alors les composantes du champ électrique suivant  $ox$  et  $oy$  sont nulles

$$E_{zM} = \frac{zq}{\pi \epsilon_0 \sqrt{(2a^2 + z^2)^3}}$$

$$\vec{E}_M = \frac{zq}{\pi \epsilon_0 \sqrt{(2a^2 + z^2)^3}} \vec{k}$$

### Exercice 7

Une charge  $q_1$  de  $2,0 \mu\text{C}$  se trouve à la position  $(2, -3, 5)$  cm. Une deuxième charge  $q_2$  de  $3,0 \mu\text{C}$  se trouve à la position  $(-4, -2, 3)$  cm.

- 1- Calculer le champ électrique créé par la charge  $q_1$  à la position de la charge  $q_2$
- 2- déduire la force exercée sur la charge 2 par la charge 1.

Soit le point  $A(2, -3, 5)$  et le point  $B(-4, -2, 3)$

## Chapitre I

---

On désire calculer le champ au point B du à la charge située au point A

$$\vec{E}_B = K \frac{q_A}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = -6\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \text{ d'ou } |\vec{AB}| = \sqrt{41}10^{-2}$$

$$\vec{E}_B = K \frac{q_A}{\sqrt{41}^3} (-6\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})10^{-2}$$

$$\vec{E}_B = K \frac{q_A}{41\sqrt{41}} (-6\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

### Exercice 8

Soient trois charges  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $q_C$  placées aux sommets d'un triangle équilatéral ABC de coté  $2a$ . sachant que  $q_A=q>0$  ;  $q_B=-2q$  ;  $q_C=3q$ .

- 1- Calculer le potentiel produit par ces trois charges au point M milieu de AC.
- 2- Donner l'expression du champ électrique à ce point.

**Solution :**

$$V(M) = V_A + V_B + V_C = K \left( \frac{q}{AM} + \frac{-2q}{BM} + \frac{3q}{CM} \right)$$

Sachant que  $BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

D'où

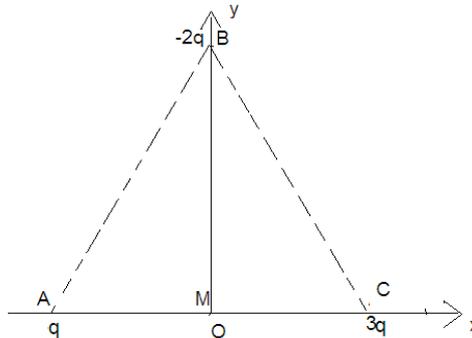
$$V(M) = K \frac{q}{a} \left( 1 + \frac{-2}{\sqrt{3}} + 3 \right) = K \frac{q}{a} \left( 4 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = K \left( \frac{q}{AM^3} a\vec{i} + \frac{2q}{BM^3} \sqrt{3}a\vec{j} + \frac{3q}{CM^3} (-a\vec{i}) \right)$$

## Chapitre I

---

$$\vec{E}(M) = \frac{Kq}{a^2} \left( \vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - 3\vec{i} \right) = \frac{Kq}{a^2} \left( -2\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} \right)$$



### Exercice 9

1) Calculer, en tout point  $M$  de l'espace, le champ électrique créé par un fil rectiligne  $AB$  de longueur finie  $2a$ , portant une densité linéique de charges  $\lambda > 0$ .

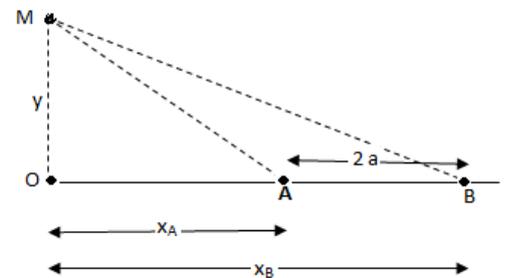
Soit  $O$  la projection de  $M$  sur la droite  $AB$ , on posera :

$$OM = y, OA = x_A, OB = x_B$$

2) On examinera les cas particuliers suivants :

a) le point  $M$  est dans le plan médiateur de  $AB$ ,

b) le fil a une longueur infinie.



Solution :

Pour le calcul du champ électrique d'une charge continue, il suffit de calculer le champ élémentaire c'est-à-dire le champ de la charge élémentaire contenue dans la plus petite longueur  $dx$

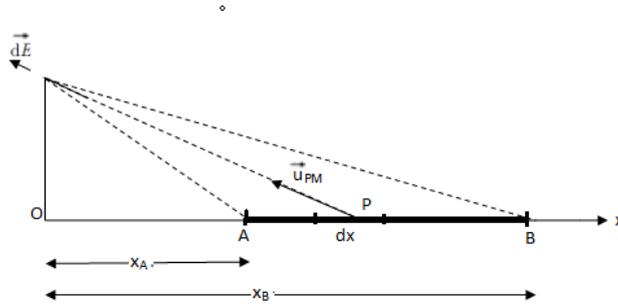
Dans le cas d'un fil il suffit de connaître la densité de charge linéique  $\lambda$  qui est donnée par la quantité de charge par unité de longueur

$$d\vec{E} = K \frac{dq}{|\vec{PM}|^3} \vec{PM} = K \frac{\lambda dx}{|\vec{PM}|^3} \vec{PM}$$

## Chapitre I

$$\vec{PM} = -x\vec{i} + y\vec{j} \text{ d'ou } |\vec{PM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pour connaître le champ total on intègre par rapport à la variable x qui varie le long du fil qui varie de la position A vers la position B



$$\vec{E} = \int_{x_A}^{x_B} K \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (-x\vec{i} + y\vec{j}) = K\lambda \left( \int_{x_A}^{x_B} \frac{-x dx \vec{i}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \int_{x_A}^{x_B} \frac{y dx \vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

Sachant que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

En prenant en compte ces deux dérivées on peut faire les intégrales ci-dessus.

$$\vec{E} = K\lambda \left( \left( \frac{\vec{i}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_{x_A}^{x_B} + \frac{1}{y} \left( \frac{x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_{x_A}^{x_B} \right)$$

$$\vec{E} = K\lambda \left( \left( \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right) \vec{i} + \frac{1}{y} \left( \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right) \vec{j} \right)$$

M est dans le plan médiateur c'est-à-dire que  $x_A = -x_B$

# Chapitre I

$$\vec{E} = \frac{2K\lambda}{y} \left( \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} \right) \vec{j}$$

Pour un fil infini revient à calculer la limite du champ lorsque la position  $X_B$  tend vers l'infini

D'où

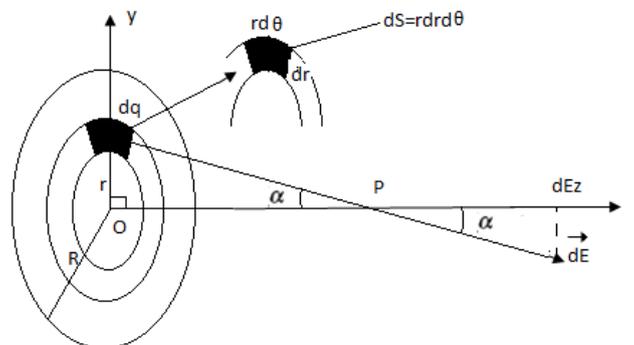
$$\vec{E} = \frac{2K\lambda}{y} \vec{j}$$

## Exercice 10

- 1- On considère un disque de rayon  $R$ , de centre  $O$ , portant une densité de charge surfacique  $\sigma > 0$ . Trouver, par un calcul direct, le champ électrique créé par le disque en un point  $M$  de son axe  $z$  ( $OM = z > 0$ )
- 2- On considère une couronne circulaire formée par la superposition deux disques de rayon  $R$  et  $R'$  et de densité surfacique  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Calculer le champ électrique au point  $M$ . discuter dans le cas où les densités sont égales et de signe opposé.

### Solution :

- 1- On procède suivant le même principe que dans l'exo 5, on calculera le champ électrique due à la charge élémentaire  $dq$  contenue dans la plus petite surface  $dS$  ; comme il s'agit d'un disque la surface élémentaire est donnée par l'expression  $rdrd\theta$ , sachant que  $r$  représente la variation du rayon du disque et  $\theta$  l'angle du disque. La densité de charge par unité de surface est  $\sigma$ .



## Chapitre I

---

$$d\vec{E} = dE_z \vec{k} \quad dE_z = dE \cdot \cos\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$d\vec{E} = K \frac{dq}{|\vec{PM}|^2} \vec{u}_{PM} = K \frac{\sigma dr d\theta}{|\vec{PM}|^2} \vec{u}_{PM} \quad dE = K \frac{\sigma dr d\theta}{r^2 + z^2}$$

D'où

$$dE_z = K \frac{z \sigma dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

on passe au calcul d'intégral, on a deux variables, du coup on a une double intégrale.

$$E_z = k\sigma z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = k\sigma z 2\pi \cdot \left. \frac{-1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right|_0^R$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

On peut déduire le potentiel électrique

Sachant que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow V = -\int E_z dz = -\int \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] dz$$

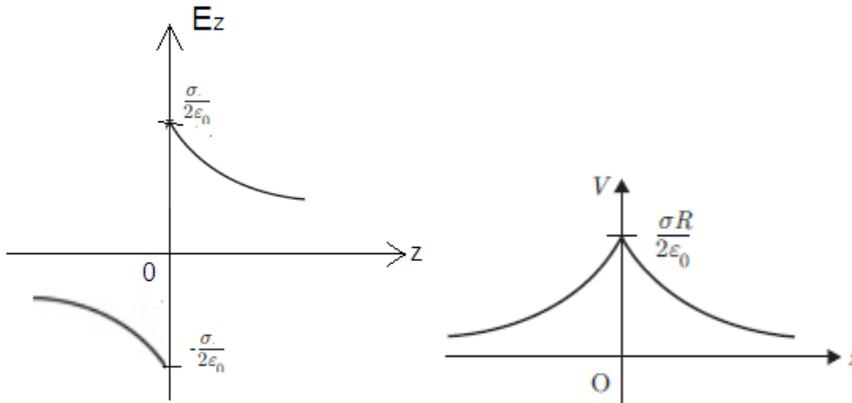
$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[ \int dz + \int \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|)$$

Sur les deux graphes ci-dessous, on trace la variation du champ électrique et du potentiel

## Chapitre I

On remarque le champ électrique a une discontinuité au point  $z=0$  et prend la valeur maximale et tend vers des valeurs nulles lorsque  $z$  tend vers l'infini. En revanche pour le potentiel qui est continue.



2-

$$\vec{E}_M = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] + \frac{\sigma' z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R'^2}} \right] \vec{k}$$

$\sigma' = -\sigma$

$$\begin{aligned} \vec{E}_M &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) - \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R'^2}} \right) \right] \vec{k} \\ \vec{E}_M &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + R'^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Si  $R'$  est nul et  $R$  est fini

$$\vec{E}_M = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \vec{k}$$

On retrouve le cas d'un disque.

Cas ou  $R'$  est nul et  $R$  tend vers l'infini

$$\vec{E}_M = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + 0}} - \frac{1}{\sqrt{\infty + R^2}} \right) \vec{k}$$

## Chapitre I

---

$$\vec{E}_M = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

C'est le champ électrique d'un plan qu'on va retrouver lorsqu'on utilise le théorème de Gauss .

**II.1 Angle solide**

L'**angle solide** est l'analogie tridimensionnel de l'angle **plan** (bidimensionnel).

Un angle **plan**  $\theta$  se construit a partir du point de croisement de deux demi-droites (figure II.1). A cet angle  $\theta$ , on peut associer l'arc de cercle ( $L$ ) que cet angle découpe sur un cercle (de rayon  $R$ ) centre au point d'intersection des deux demi-droites :  $L=R\theta$ . On peut donc écrire que :

$$\theta = \frac{L}{R} \quad (2.1)$$

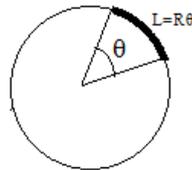


Figure II. 1

Dans l'espace tridimensionnel, la portion de l'espace analogue à un angle plan est un cône (figure II.2). L'ouverture de ce cône est appelée **angle solide**, couramment note  $\Omega$ . Par analogie avec  $\theta$  pour l'angle plan, l'angle solide se définit comme le rapport de la portion de surface  $S$  que le cône découpe sur une sphère de rayon  $R$ , au carré du rayon  $R$ .

$$d\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (2.2)$$

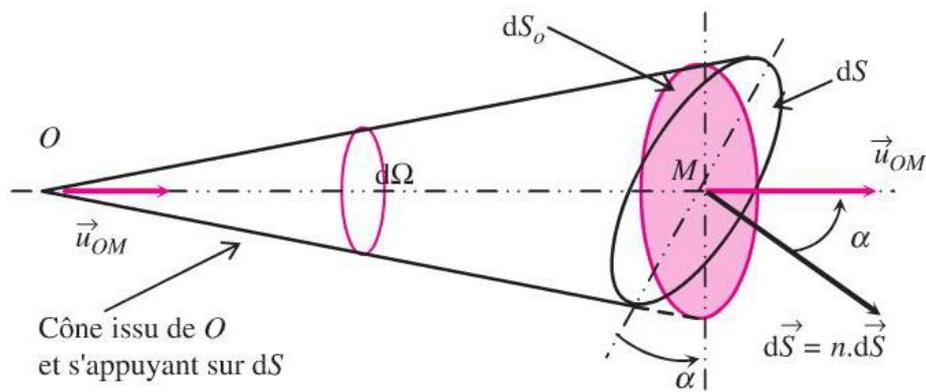


Figure II.2

L'unité de l'angle solide est le stéradian

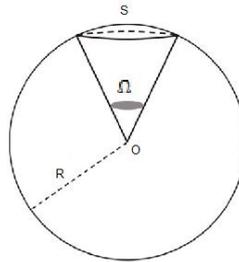


Figure II.3

La surface d'une sphère de rayon  $R$  étant  $S= 4\pi R^2$ , on en déduit que le plus grand angle solide mesurable, qui correspond à un objet couvrant toute la sphère, est de  $4\pi$  stéradians

## II.2 Flux d'un champ électrique

### Flux d'un champ V



Figure II.4

Dans un liquide en mouvement on dessine une surface d'aire  $S$  perpendiculaire à la vitesse  $v$  du liquide figure II.4 . Dans un temps  $dt$  le volume du liquide qui traverse cette surface est  $V=L.S= v.dt.S$ . Si la surface n'est pas perpendiculaire au mouvement du liquide, le volume devient  $V= v.dt.S.\cos\alpha$ , tel que l'angle  $\alpha$  est entre la vitesse du liquide et la normale de la surface. Ce volume par unité de temps se réduit au produit scalaire entre le vecteur vitesse et le vecteur surface qui est  $\vec{S} = S\vec{n}$

$$V = \vec{v} \cdot \vec{S} \quad (2.3)$$

Si on a veut prendre l'ensemble de la surface on aura

$$\oiint \vec{v} \cdot \vec{S} \quad (2.4)$$

Cette expression est le flux du vecteur vitesse a travers la surface S

## II. 2.2- Flux du champ électrique d'une charge ponctuelle

Le **flux du champ électrique** à travers une surface macroscopique fermée S s'écrit

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (2.5)$$

Si le champ électrique est la superposition de l'ensemble des champs qui le composent, le flux total a travers une surface S est la somme du flux de champ électrique

### La charge ponctuelle est à l'extérieur de la surface fermée

Soit une surface fermée (S) et on place une charge ponctuelle q au un point O situé à l'extérieur de (S). le cône élémentaire de sommet O délimitant un angle solide  $d\Omega$  figure 3a .

Celui-ci découpe sur (S) deux surfaces élémentaires  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  et  $d\vec{S}' = dS'\vec{n}'$  .

Soient  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$  les champs électrostatiques créés par q en dS et dS'.

Le flux de E à travers dS est négatif et le flux ' de E' à travers dS' est positif, si q est positive. Les signes sont inversés si q est négative. En valeurs absolues, ces flux sont égaux. Donc le flux total sortant de dS et dS' est nul . Il en est de même pour tout autre angle solide élémentaire  $d\Omega$  . Donc, au total, le flux du vecteur champ électrostatique sortant de (S) est nul.

### La charge ponctuelle est à l'extérieur de la surface fermée

(figureII.5)

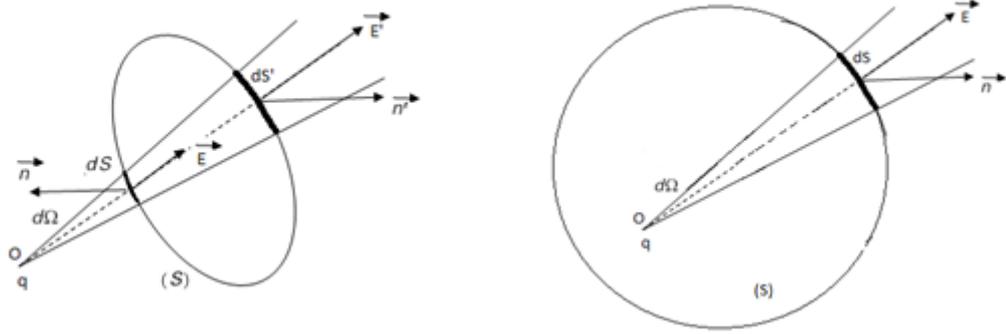


Figure II.5

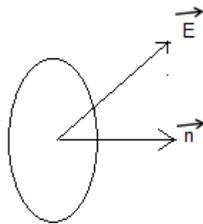
Le **flux élémentaire** d'un champ *électrique* à travers un élément de surface élémentaire  $dS$  situé en un point M repéré par le vecteur  $\vec{r}$  s'écrit :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot \vec{n} dS \quad (2.6)$$

où  $\vec{n}$  représente le vecteur unitaire normal à l'élément de surface  $dS$ .

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (2.6)$$

Dans le cas d'une surface fermée, le vecteur  $\vec{dS}$  est défini à partir de l'élément de surface  $dS$  et de la normale orientée  $\vec{n}$ . Par convention la normale est orientée positivement de l'intérieur vers l'extérieur de la surface  $\mathcal{S}$ .



Sachant que le champ électrique d'une charge dans le vide est donné par

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$\Phi = \oiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS} = \oiint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (2.7)$$

Avec  $\vec{u} \cdot \vec{n} = \cos \alpha$   $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$

$$\Phi = \oiint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} \cos\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{dS}{r^2} \cos\alpha \quad (2.8)$$

Comme l'angle solide est

$$\Omega = \oiint \frac{dS}{r^2} \cos\alpha = 4\pi \quad (2.10)$$

D'où le flux devient

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

### II.3 Théorème de Gauss

La loi de Gauss peut être utilisée pour obtenir les champs électriques de certaines distributions de charges avec un haut degré de symétrie. C'est donc une méthode spécialisée, mais elle est très utile pour cette classe de problèmes auxquels elle peut s'appliquer. À ce stade, la loi de Gauss nous aidera à mieux comprendre les formes des champs électriques dus aux distributions de charges. Voyons d'abord à nouveau la loi de Gauss:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{intérieur}}}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

où la surface S est une surface fermée arbitraire, choisie par commodité, qui sera appelée la surface gaussienne.  $Q_{\text{intérieur}}$  est la charge incluse à l'intérieur de la surface gaussienne S.

Si E est constant sur la surface S, alors nous pourrions le sortir de l'intégrale et résoudre. La clé d'un problème de loi de Gauss est de choisir S pour qu'il soit normal aux lignes de champ électrique. Nous devons donc avoir une certaine connaissance des lignes de champ.

Les étapes sont alors les suivantes :

1. Reconnaissez la symétrie.
2. Esquissez les lignes de champ électrique.
3. Choisissez S normal aux lignes de champ. Formez une surface fermée.
4. Résolvez pour Champ électrique d'un point

### II.4 Forme locale du champ électrique

Pour une surface fermée, contenant une charge  $Q$  répartie dans le volume  $v$  avec une densité volumique  $\rho$ .

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\iiint \rho dv}{\epsilon_0} \quad (2.13)$$

D'après le théorème Green-Ostrogradsky

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint \operatorname{div} \vec{E} \cdot dv \quad (2.14)$$

En combinant ces deux équations on déduit l'équation dite loi locale :

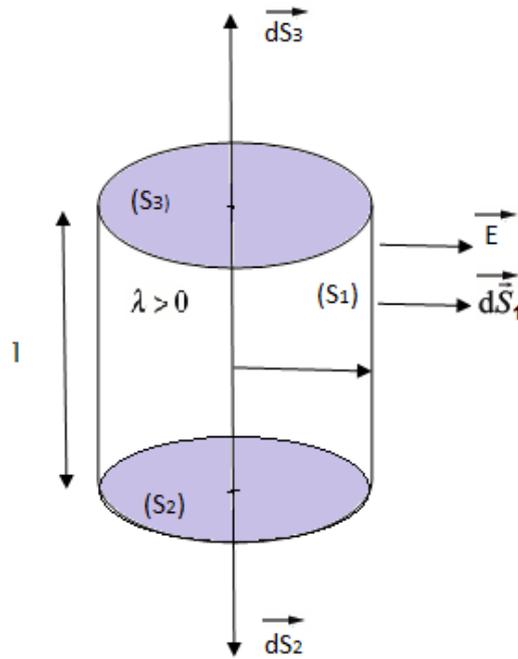
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.15)$$

### II.5 Série d'exercice avec solution

#### Exercice1

Soit un fil rectiligne de longueur  $l$  portant une densité linéique de charge uniforme telle que :  $\lambda > 0$ . On cherche à déterminer le champ électrostatique créé par le fil à la distance  $r$ . Pour des raisons de symétrie on choisit comme surface de Gauss la surface d'un cylindre de rayon  $r$  et de longueur  $l$ .

#### solution



Le flux total du champ électrostatique créé par le fil à travers  $S$  est la somme de trois contributions:  $\Phi_1$  le flux à travers la surface latérale  $S_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  les flux à travers les deux surfaces  $S_2$  et  $S_3$ . On obtient alors :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3$$

Comme le flux est le produit scalaire entre le vecteur champ électrique et le vecteur surface. Dans ce cas le champ électrique est constant sur toute la surface choisie, comme on a trois surfaces, deux surfaces  $S_2$  et  $S_3$  perpendiculaires au champ électrique donc leur produit scalaire est nul, il reste le produit scalaire entre la surface latérale et le champ électrique qui sont parallèle.

Le flux se réduit à

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1$$

Vu l'uniformité du champ électrique sur la surface  $S_1$  ainsi que sa colinéarité avec le vecteur surface, on applique le principe du produit scalaire on aura

$$\Phi = \iint_{S_1} E \cdot dS_1 = E \iint_{S_1} dS_1 = ES_1$$

$S_1$  c'est la surface du cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $l$  elle vaut  $S_1 = 2\pi r l$

Sachant que d'après Gausse le flux est donnée par

$$\Phi = \frac{Q_{intérieure}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

On égalisant les deux expressions du flux on trouve :

$$\frac{\lambda l}{\epsilon_0} = E 2\pi r l \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

### Exercice2

On considère deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  concentriques, creuses, de rayon respectifs  $R_1$  et  $R_2$  figure1. Et de charges totales respectives  $-Q$  et  $+Q$ , ces charges sont distribuées uniformément sur les surfaces des sphères correspondantes.

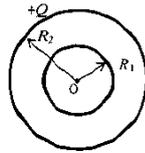


Figure 1

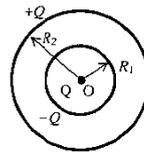


Figure 2

- 1- Exprimer le champ électrique et le potentiel en tout point de l'espace.
- 2- On place une charge ponctuelle  $+Q$  au centre des deux sphères figure 2. Exprimer le champ électrique total en tout point de l'espace.

On suppose maintenant que les deux sphères sont chargées uniformément en surface avec des densités respectives  $-\sigma$  et  $+\sigma$  figure 2.

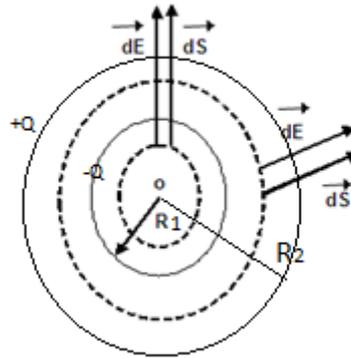
- 3- Calculer l'intensité du champ électrique en tout point de l'espace.

### Solution

Soit  $(S)$  la surface de Gauss passant par le point  $M$  (sphère de rayon  $r$ ).

Comme il s'agit des sphères, la surface de Gauss sera une sphère de  $r$  dans l'exercice elle sera représentée par un cercle en pointillé.

Les vecteurs champ électrique et surface sont parallèle leur produit scalaire se réduit au produit de leurs modules



Le flux devient

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint E \cdot dS = ES = \frac{Q_{interieur}}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss est  $S = 4\pi r^2$

D'où le flux  $\Phi = E4\pi r^2$

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{interieur}}{\epsilon_0}$$

- Cas où la surface de Gauss est à l'intérieur de sphère chargée  $r < R$

$$\frac{Q_{interieur}}{\epsilon_0} = 0$$

Dou le champ  $E=0$

$R1 < r < R2$

$$\frac{Q_{interieur}}{\epsilon_0} = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{-Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Cas où  $r > R2$

$$\frac{Q_{interieur}}{\epsilon_0} = \frac{-Q + Q}{\epsilon_0} = 0$$

$$E = 0$$

Calcul du potentiel

## Chapitre II

---

Le potentiel est calculé par l'expression de  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Comme le champ électrique est parallèle avec le vecteur position

$$V = -\int E \cdot dr$$

Cas  $r < R$

$$E=0 \quad \text{d'où} \quad V_1=C_1$$

Cas  $R_1 < r < R_2$

$$V_2 = -\int \frac{-Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot dr = -\frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} + C_2 \quad \text{sachant que} \quad \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}$$

cas  $r > R_2$

$$\text{Comme} \quad E=0 \quad V_3 = C_3$$

Calcul des constantes

le potentiel est nul à l'infini

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 0$$

Le potentiel à l'extérieur devient

Au point  $r=R_2$  on est au même potentiel donc le potentiel de la région 3 est égal au potentiel de la région 2

$$V_3(R_2)=V_2(R_2)$$

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$V_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Au point  $r=R_1$  on est au même potentiel donc le potentiel de la région 2 est égal au potentiel de la région 1

$$V_2(R_1)=V_1(R_1)$$

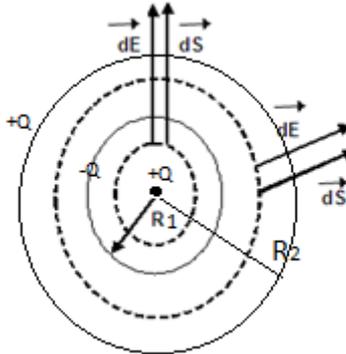
## Chapitre II

---

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = C_1$$

$$V_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

2



- Cas où la surface de Gauss est à l'intérieur de sphère chargée  $r < R$

$$\frac{Q_{\text{interieur}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

Dou le champ

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$R_1 < r < R_2$

$$\frac{Q_{\text{interieur}}}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q}{\epsilon_0} = 0$$

$E=0$

Cas où  $r > R_2$

$$\frac{Q_{\text{interieur}}}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q + Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Calcul du potentiel

$$V = - \int E \cdot dr$$

Cas  $r < R$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

d'où

$$V_1 = - \int \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} + C_1$$

sachant que  $\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}$

Cas  $R_1 < r < R_2$

Comme  $E=0$   $V_2 = C_2$

Cas  $r > R_2$

$$V_3 = - \int \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} + C_3$$

Calcul des constantes

le potentiel est nul à l'infini

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_3 = 0 \rightarrow \frac{Q}{\infty} + C_3 = 0 + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le potentiel à l'extérieur devient

Au point  $r=R_2$  on est au même potentiel donc le potentiel de la région 3 est égal au potentiel de la région 2

$$V_3(R_2) = V_2(R_2)$$

## Chapitre II

---

$$C_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

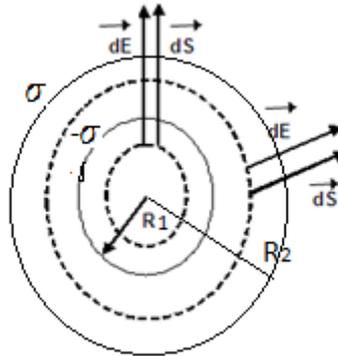
Au point  $r=R_1$  on est au même potentiel donc le potentiel de la région 2 est égal au potentiel de la région 1

$$V_2(R_1) = V_1(R_1)$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

3-



- Cas où la surface de Gauss est à l'intérieur de sphère chargée  $r < R$

$$\frac{Q_{\text{interieur}}}{\epsilon_0} = 0$$

Dou le champ  $E=0$

$R_1 < r < R_2$

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\iint -\sigma dS}{\epsilon_0} = \frac{-\sigma S_1}{\epsilon_0} = \frac{-\sigma 4\pi R_1^2}{\epsilon_0}$$

$$\frac{-\sigma 4\pi R_1^2}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E = -\frac{\sigma R_1^2}{r^2 \epsilon_0}$$

$r > R_2$

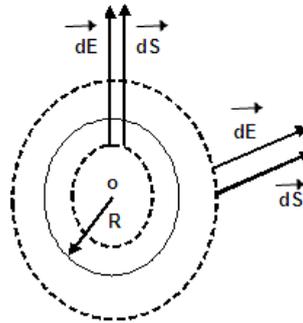
$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\iint -\sigma dS + \iint \sigma dS}{\epsilon_0} = \frac{-\sigma S_1 + \sigma S_2}{\epsilon_0} = \frac{-\sigma 4\pi R_1^2 + \sigma 4\pi R_2^2}{\epsilon_0}$$

$$\frac{-\sigma 4\pi R_1^2 + \sigma 4\pi R_1^2}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{r^2 \epsilon_0}$$

**Exercice 3**

Une sphère de rayon  $R$  chargée uniformément, calculer le champ électrique ainsi que le potentiel en tout point dans le cas où la sphère est chargée en volume avec une densité volumique  $\rho$  positive, donner l'allure des courbes  $E(r)$  et  $V(r)$ .

**solution**



Soit  $(S)$  la surface de Gauss passant par le point  $M$  (sphère de rayon  $r$ ).

Comme il s'agit des sphères, la surface de Gauss sera une sphère de  $r$  dans l'exercice elle sera représentée par un cercle en pointillé.

Les vecteurs champ électrique et surface sont parallèles leur produit scalaire se réduit au produit de leurs modules

Le flux devient

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint E \cdot dS = ES = \frac{Q_{interieur}}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss est  $S = 4\pi r^2$

D'où le flux  $\Phi = E 4\pi r^2$

$$\rho = \frac{dQ}{dv} \Rightarrow dQ = \rho \cdot dv = \rho \cdot r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\phi \cdot d\theta$$

Dans ce cas la distribution de charge est uniforme.

- Cas où la surface de Gauss est à l'intérieur de sphère chargée  $r < R$

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interieur}}}{\epsilon_0}$$

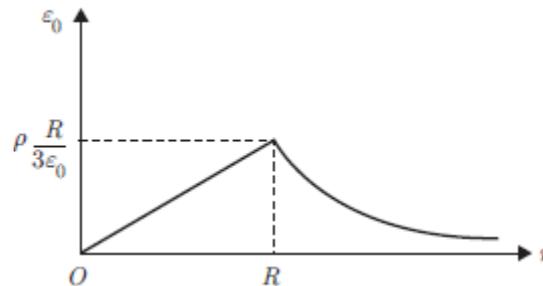
$$E4\pi r^2 = \frac{\iiint \rho \cdot r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\phi \cdot d\theta}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta \int_0^r r^2 \cdot dr}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$E = \frac{4\pi \rho r^3}{12\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$$

Cas ou  $r > R$

$$E = \frac{\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta \int_0^R r^2 \cdot dr}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{4\pi \rho R^3}{12\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$



Cette allure montre que le champ électrique prend les valeurs de zéro jusqu'à une valeur maximale à la limite de la sphère puis en s'éloignant de la sphère il tend à s'affaiblir et devient nul.

2- Le potentiel est calculé par l'expression de  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Comme le champ électrique est parallèle avec le vecteur position

$$V = - \int E \cdot dr$$

Cas  $r < R$

$$V = - \int \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0} \cdot dr = - \frac{\rho r^2}{6 \varepsilon_0} + C$$

C une constante à déterminer

Cas  $r > R$

$$V = - \int \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r} + D$$

De même D une constante à déterminer

Comme le potentiel est nul à l'infini

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0 \Rightarrow 0 = 0 + D \Rightarrow D = 0$$

Le potentiel à l'extérieur devient

$$V = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r}$$

Au point  $r=R$  on est au même potentiel donc le potentiel extérieur est égale au potentiel intérieur

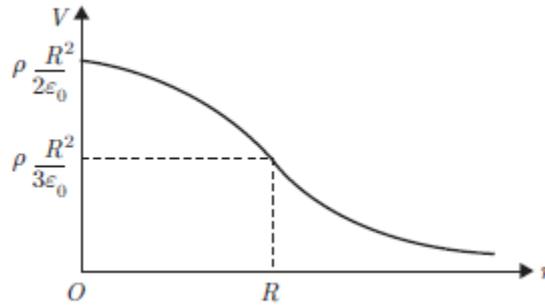
$$-\frac{\rho R^2}{6 \varepsilon_0} + C = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 R}$$

D'où

$$C = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0}$$

Donc le potentiel à l'intérieur devient

$$V = -\frac{\rho r^2}{6 \varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0} \left( 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right)$$



Cette courbe représente la variation du potentiel en fonction du rayon de la sphère de Gauss, le potentiel décroît d'une valeur maximal vers des valeurs tendant vers le zéro.

#### Exercice 4

Une boule de centre O et de rayon R est chargée en volume. La densité volumique de charge  $\rho$  dépend de la distance r au centre o suivant la loi

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Ou  $\rho_0$  désigne une constante positive.

- 1- Exprimer la charge Q totale portée par la boule en fonction de  $\rho_0$  et de R.
- 2- Déterminer l'expression du champ électrique, en distinguant les cas  $r < R$  et  $r > R$ .

$$\rho = \frac{dQ}{dv} \Rightarrow dQ = \rho \cdot dv$$

Sachant que l'élément de volume sphérique vaut

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

$$\begin{aligned} Q &= \iiint \rho \cdot dv = \iiint \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot r^2 \cdot dr = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15} \end{aligned}$$

2) calcul du champ électrique.

En utilisant Gauss avec surface de Gauss une sphère de rayon r on aura

$r > R$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \overline{dS} = \oint E \cdot dS = ES = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15 \cdot \epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

$r > R$

$$Q = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot r^2 \cdot dr = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) \cdot r \text{ varie entre 0 et } r$$

D'où

$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) = \frac{\rho_0 r^3}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5R^2}\right)$$

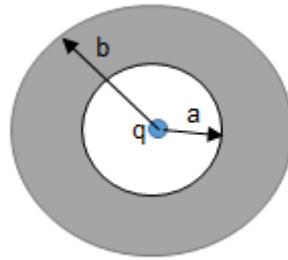
### Exercice 5

La région entre deux sphères concentriques de rayons a et b contient la densité de charge

volumique  $\rho = \frac{C}{r}$ , où C est une constante et r est la distance radiale, comme le montre la

figure. Une charge ponctuelle q est placée à l'origine.

- Calculer le champ électrique dans chaque région.
- Déduire le potentiel dans chaque région.
- Trouver la valeur de C pour laquelle le champ électrique dans la région entre les sphères est constant



Solution

On procède de la même façon que dans l'exercice

Le flux devient

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \overline{dS} = \oint E \cdot dS = ES = \frac{Q_{interieur}}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss est  $S = 4\pi r^2$

D'où le flux  $\Phi = E4\pi r^2$

La charge intérieure dans le théorème de Gauss dépend de la région où se trouve la surface de Gauss, on aura trois régions

1<sup>ère</sup> Région  $r < a$  figure 1

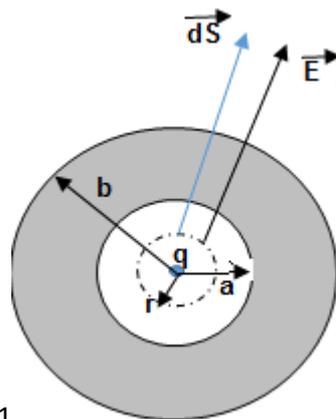


Figure 1

La charge qui se trouve à l'intérieur est une charge ponctuelle q

Si on applique le théorème de Gauss

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On le nommera  $E_1$  c'est-à-dire le champ électrique de la région 1

Région 2  $a < r < b$  figure 2

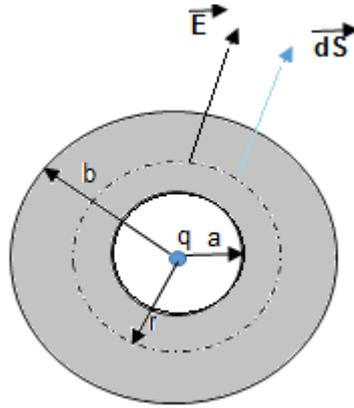


Figure 2

La charge intérieure se compose de la charge ponctuelle  $q$  plus la charge volumique qui est comprise entre la sphère de Gauss et la Sphère de rayon  $a$ .

$$Q_{\text{inte}} = q + \iiint \rho \cdot dv = q + \iiint \frac{C}{r} \cdot r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi = q + \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_a^r \left(\frac{C}{r}\right) \cdot r^2 \cdot dr$$

$$Q_{\text{inte}} = q + \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_a^r C \cdot r \cdot dr = q + 2\pi C(r^2 - a^2)$$

D'après de le théorème de Gauss

$$E4\pi r^2 = \frac{q + 2\pi C(r^2 - a^2)}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{q + 2\pi C(r^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{C}{2\epsilon_0} - \frac{Ca^2}{2\epsilon_0 r^2}$$

Région 3  $r > b$  figure 3

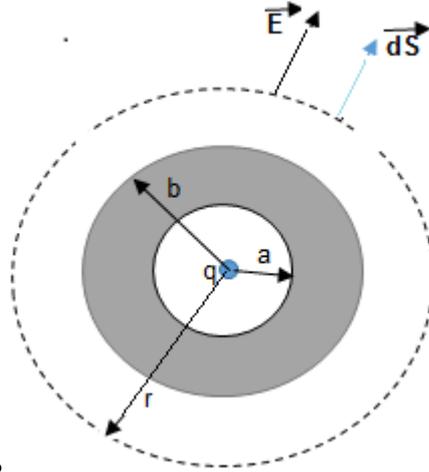


Figure 3

$$Q_{\text{int}e} = q + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_a^b C.r.dr = q + 2\pi C(b^2 - a^2)$$

$$E4\pi r^2 = \frac{q + 2\pi C(b^2 - a^2)}{\epsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{q + 2\pi C(b^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_3 = \frac{(q + 2\pi C(b^2 - a^2))}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

1- Calcul du potentiel électrique

Le potentiel se calcul par l'expression de  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Comme le champ électrique est parallèle avec le vecteur position

$$V = -\int E \cdot dr$$

Région 1

$$V_1(r) = -\int E_1 \cdot dr = \int \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + c_1$$

Région 2

$$V_2(r) = -\int \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{C}{2\epsilon_0} - \frac{Ca^2}{2\epsilon_0 r^2} \right) dr$$

$$V_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Cr}{2\epsilon_0} - \frac{Ca^2}{2\epsilon_0 r} + c_2$$

Région 3

$$V_3 = - \int \frac{(q + 2\pi C(b^2 - a^2)) dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V_3 = \frac{(q + 2\pi C(b^2 - a^2))}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + c_3$$

Il reste à déterminer les constantes  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$

Sachant que le potentiel est nul lorsque  $r$  tend vers l'infini et comme  $V_3$  est nul pour  $r$  très grand alors  $c_3$  est nulle

$$V_3 = \frac{(q + 2\pi C(b^2 - a^2))}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Pour les autres constantes on va appliquer le principe de la continuité du potentiel.

Au point  $r = b$  le potentiel est continu c'est-à-dire qu'à ce point le potentiel est le même

$$V_3(b) = V_2(b)$$

$$\frac{(q + 2\pi C(b^2 - a^2))}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Cb}{2\epsilon_0} - \frac{Ca^2}{2\epsilon_0 b} + c_2$$

$$\frac{(2\pi C(b^2 - a^2))}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} = \frac{Cb}{2\epsilon_0} - \frac{Ca^2}{2\epsilon_0 b} + c_2$$

$$\frac{-Ca^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} = -\frac{Ca^2}{2\epsilon_0 b} + c_2$$

D'où

$$c_2 = 0$$

$$V_2(r) = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \frac{Ca^2}{2\epsilon_0} \right) \frac{1}{r} + \frac{Cr}{2\epsilon_0}$$

De même au point  $r=a$

$$V_1(a) = V_2(b)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} + c_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Ca}{2\epsilon_0} - \frac{Ca}{2\epsilon_0}$$

$$c_1 = \frac{Ca}{2\epsilon_0} - \frac{Ca}{2\epsilon_0} = 0$$

$$V_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

2- Calcul de la constante  $C$  pour que le champ électrique soit constant dans la région 2

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{C}{2\epsilon_0} - \frac{Ca^2}{2\epsilon_0 r^2}$$

Si le champ électrique est constant sa dérivée par rapport à la position r est nulle ;

$$\frac{dE_2}{dr} = \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{2Ca^2}{2\epsilon_0 r^3} = 0$$

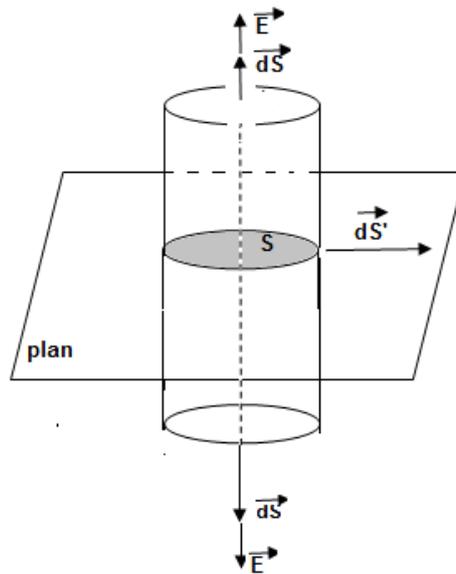
$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0} = \frac{Ca^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{2a^2\pi}$$

### Exercice 6

Calculer le champ électrique pour un plan chargé avec une distribution de charge

### Solution



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{dS}'$$

On a choisi la surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h

Le champ électrique est parallèle aux surfaces S qui sont en face du plan chargé et il est perpendiculaire à la surface latérale du cylindre (surface de Gauss)

D'où le flux se réduit à la somme des deux flux des surfaces d'en face du plan

$$\Phi = 2 \iint E \cdot dS = 2ES$$

La charge intérieure est égale

$$Q_{inter} = \iint \sigma dS = \sigma S$$

D'où

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

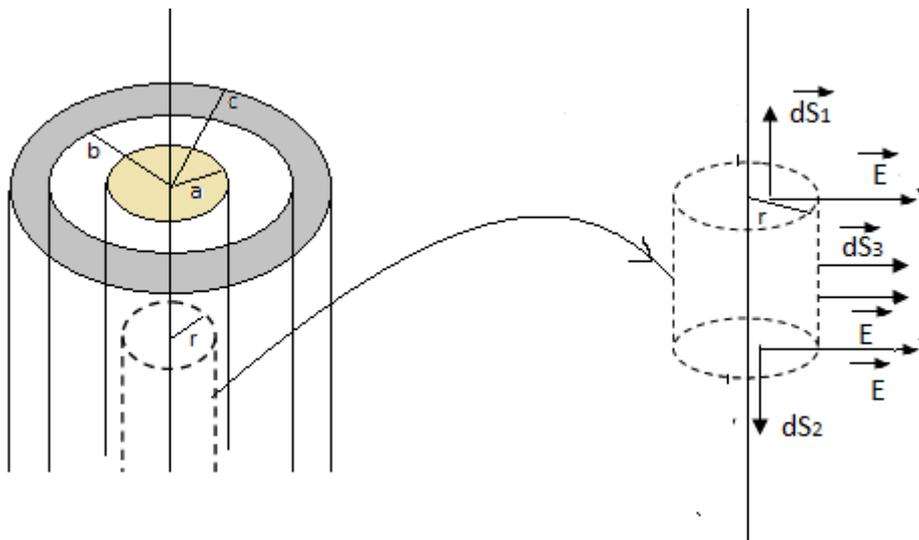
### Exercice 7

Soient trois cylindres coaxiaux de hauteur infinie A, B, C de rayons respectifs a, b, c

tels que  $a < b < c$ . Le cylindre A est chargé en surface avec une densité  $\sigma > 0$ . L'espace compris entre les deux cylindres B et C est chargé avec une densité volumique  $\rho > 0$

1. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique en tout point de I 'espace'
2. Sachant que  $V(O) = V_0$ , en déduire le potentiel dans les deux régions :  $r < a$  et  $a < r < b$

### Solution



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3$$

On a choisi la surface de Gauss un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$

$$\Phi = \iint E \cdot dS_3 = ES = E2\pi rh$$

La charge intérieure dépend de la région choisie

Région  $r < a$   $Q_{inter} = 0$

D'où le champ est nul  $E = 0$

Région  $a < r < b$

$$S = \iint r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr$$

$$\frac{Q_{inter}}{\epsilon_0} = \iint \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi ah}{\epsilon_0}$$

$$E2\pi rh = \frac{\sigma 2\pi ah}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}$$

Région  $b < r < c$

$$\frac{Q_{inter}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi ah + \iiint \rho dv}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi ah + \rho h \iint dS}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi ah + \int \rho h r dr d\theta}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\sigma 2\pi ah + \rho h \int_0^{2\pi} d\theta \int_b^r r dr}{\epsilon_0}$$

$$\frac{Q_{inter}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi ah + \rho h 2\pi \int_b^r r dr}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi ah + \rho h \pi (r^2 - b^2)}{\epsilon_0} = \pi h \frac{\sigma 2a + \rho (r^2 - b^2)}{\epsilon_0}$$

$$E2\pi rh = \pi h \frac{\sigma 2a + \rho (r^2 - b^2)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{2\sigma a + \rho (r^2 - b^2)}{2\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r - \frac{b^2}{r} \right)$$

Région  $r > c$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{inter}}{\epsilon_0} &= \frac{\sigma 2\pi a h + \iiint \rho dv}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi a h + \rho h \iint dS}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi a h + \int \rho h r dr d\theta}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\sigma 2\pi a h + \rho h \int_0^{2\pi} d\theta \int_b^c r dr}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\frac{Q_{inter}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi a h + \rho h 2\pi \int_b^c r dr}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi a h + \rho h \pi (c^2 - b^2)}{\epsilon_0} = \pi h \frac{\sigma 2a + \rho (c^2 - b^2)}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r h = \pi h \frac{\sigma 2a + \rho (c^2 - b^2)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{2\sigma a + \rho (c^2 - b^2)}{2\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{2\sigma a + \rho (c^2 - b^2)}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Calcul du potentiel

Région  $r < a$

$$V = - \int E \cdot dr$$

Comme le champ électrique est nul

$$V_1 = C_1$$

Dans cette région tous les points sont au même potentiel

Au point  $r=0$  le potentiel est donné par la valeur  $V_0$  donc

$$V_1 = V_0$$

Région  $a < r < b$

$$V_2 = - \int \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \cdot dr = - \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln r + C_2$$

Au point  $r=a$  le potentiel est continu c'est-à-dire

$$V_1(r = a) = V_2(r = a)$$

$$V_0 = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln a + C_2$$

D'où

$$C_2 = V_0 + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln a$$

$$V_2 = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln \frac{a}{r} + V_0$$

### III .1 Conducteur en équilibre électrostatique

#### III .1.1 Définition d'un conducteur

La matière contient un très grand nombre d'atomes ou de molécules Figure III.1. Chaque atome contient un noyau chargé positivement et plusieurs électrons qui l'entourent.

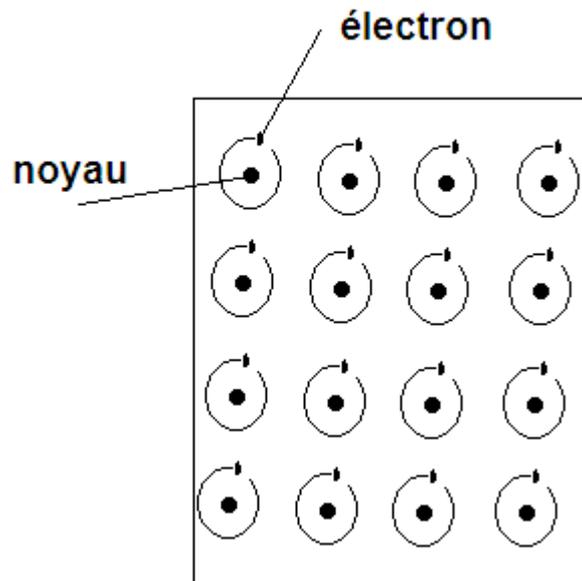


Figure III.1

Il s'avère que les matériaux peuvent être largement divisés en trois catégories selon leur comportement lorsqu'ils sont placés dans un champ électrique. Dans certains matériaux, les électrons externes de chaque atome ou molécule ne lui sont que faiblement liés. Ces électrons sont presque libres de se déplacer dans tout le corps du matériau et sont appelés électrons libres. Ils sont également connus sous le nom d'électron de conduction. Lorsqu'un tel matériau est placé dans un champ électrique, les électrons libres se déplacent dans une direction opposée au champ. Ces matériaux sont appelés conducteurs.

Une autre classe de matériaux s'appelle les isolants dans lesquels tous les électrons sont étroitement liés à leurs atomes ou molécules respectifs. En effet, il n'y a pas d'électrons libres. Lorsqu'un tel matériau est placé dans un champ électrique, les électrons peuvent légèrement se déplacer à l'opposé du champ mais ils ne peuvent pas quitter leurs atomes ou molécules

parents et ne peuvent donc pas se déplacer sur de longues distances. Ces matériaux sont également appelés diélectriques.

Dans les semi-conducteurs, le comportement est comme un isolant à la température 0 K. mais à des températures plus élevées, un petit nombre d'électrons sont capables de se libérer et ils répondent au champ électrique appliqué. Comme le nombre de libres dans un semi-conducteur est beaucoup plus petit que celui d'un conducteur, son comportement se situe entre un conducteur et un isolant et, par conséquent, le nom de semi-conducteur.

Un électron libéré dans un semi-conducteur laisse un trou dans sa position liée normale. Ces trous contribuent également à la conduction. Les conducteurs ont un grand nombre d'électrons libres partout dans le matériau alors que les isolateurs n'en ont pas. En gros, les métaux sont conducteurs et les non-métaux sont des isolants.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux matériaux conducteurs.

### III.2 Equilibre électrostatique

Un équilibre électrostatique impose aux charges à l'intérieur d'un conducteur d'être immobile Figure III.2.

Cette condition se traduit par une force électrostatique de chaque charge comme étant nulle.

$$\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0} \quad (3.1)$$

on déduit que le champ électrique intérieur est nul.

$\vec{E}_{int} = \vec{0}$  et d'après la loi locale

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rho_{int} = 0 \quad (3.2)$$

Comme il s'agit d'un conducteur, deux cas impose à la charge d'être nulle,

- cas d'un conducteur neutre, charge positive est égale à la charge négative.
- Cas ou toute les charges se répartissent à la surface du conducteur, au lieu qu'il soit chargé en volume, il aura une distribution de charge surfacique  $\sigma$ .

Si on s'intéresse au deuxième cas  $V_{int} = \text{const} = V_0$

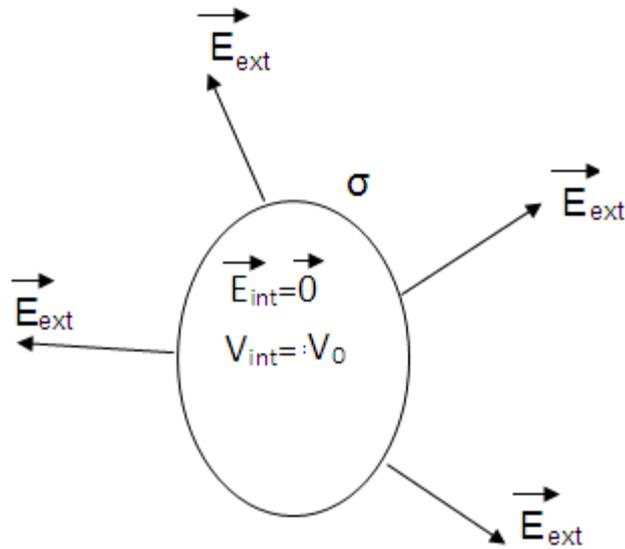


Figure III.2

### III.3 Condition de passage

A l'interface du conducteur et l'extérieur, il y a la surface du conducteur. Notons l'indice int la partie intérieur du conducteur et par l'indice ext la partie extérieur du conducteur.

Construisons un cylindre infiniment petit dont les bases se trouvent de part et d'autre de la surface du conducteur avec une hauteur infiniment petite Figure III.3

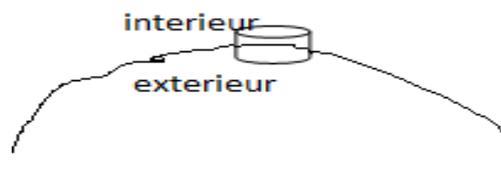


Figure III.3

De part et d'autre il y a un champ électrique interne et un autre externe, chaque'un est composé par une composante normale à l'interface et une autre composante tangentielle à la même interface.

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{Tint} + \vec{E}_{Nint}$$

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_{Text} + \vec{E}_{Next}$$

Les conditions de passage à l'interface imposent la continuité des composantes tangentielles et la discontinuité des composantes normales, cette discontinuité est égale au rapport entre la distribution de charge surfacique  $\sigma$  de l'interface par la permittivité du vide  $\epsilon_0$ , ce rapport a été déduit par la méthode du théorème de Gauss (Exercice du chapitre 2)

$$\vec{E}_{Tint} = \vec{E}_{Text} \quad (3.3)$$

$$\vec{E}_{Next} - \vec{E}_{Nint} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (3.4)$$

Comme le champ électrique interne est nul donc ses deux composantes sont nulles :

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{Tint} + \vec{E}_{Nint} = \vec{0}$$

Donc la composante tangentielle du champ externe est nulle

$$\vec{E}_{Text} = \vec{0} \quad (3.5)$$

D'où la composante normale du champ externe qui est non nulle et le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique  $\sigma$  vaut ;

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_{Next} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (3.6)$$

Le sens du champ dépend du signe de la distribution de charge.

### III.4 Pression électrostatique

Considérons maintenant une surface élémentaire  $dS$  du conducteur de densité surfacique, les charges exercent une pression sur la surface du conducteur.

Si on prend en prenant en considération l'expression du champ électrique au voisinage du conducteur et l'expression de la charge ainsi que la définition de la pression on aura :

$$dq = \sigma dS$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

la force sur un élément de charge de surface

$$d\vec{F} = dq\vec{E}$$

La pression électrostatique vaut ainsi

$$P = \frac{F}{dS} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (3.7)$$

### III .5 Potentiel électrique

Si on s'intéresse au potentiel à l'intérieur du conducteur Figure III.4, la différence de potentiel entre deux points quelconques est

$$V_b - V_a = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow V_b = V_a$$

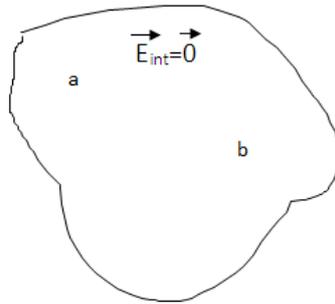


Figure III.4

Tous les points d'un conducteur en équilibre électrostatique sont au même potentiel, ce qui implique que sa surface est une surface équipotentielle.

Prenons l'exemple d'une sphère de rayon  $R$  chargée, son potentiel à une distance  $r$  de la sphère est  $V = k \frac{Q}{r}$ , la sphère sera considérée comme une charge ponctuelle, alors qu'intérieur de la sphère le potentiel est donné par  $V = k \frac{Q}{R}$ . Pour ce qui est du champ électrique, il est nul à l'intérieur de la sphère et inversement proportionnel à la distance au carré à l'extérieur de la sphère. On trace un graphe représentant le champ électrique et ainsi que le potentiel électrique en fonction de la distance  $r$  Figure III.5.

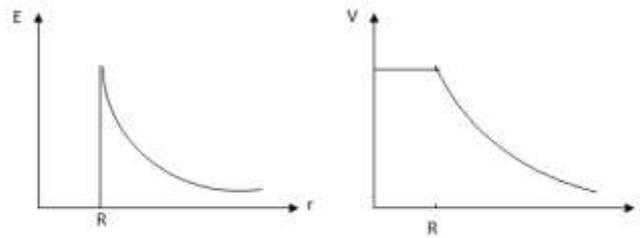


Figure III.5

### Une cavité à l'intérieur d'un conducteur

Soit un conducteur chargé possède une cavité vide. Le champ est nul dans le conducteur, et Qu'en est il dans la cavité ?

En appliquant le Théorème de Gauss et on choisissant la surface de Gauss entourant la cavité vide, le flux sera nul Figure III.6.

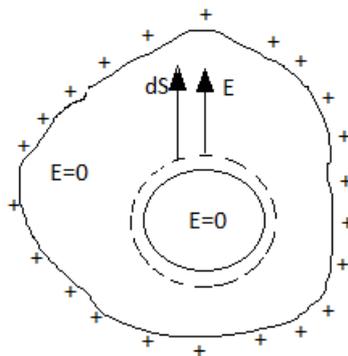
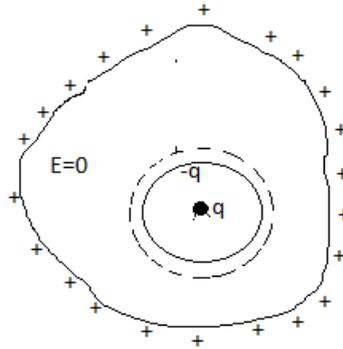


Figure III.6

Ce qui implique qu'il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface de Gauss. Comme la cavité est vide, cela indique qu'il n'y a pas de charge sur la paroi de la cavité. Toute la charge excédentaire du conducteur se trouve sur sa surface extérieure. L'autre conclusion est que le champ électrique à l'intérieur de la cavité est aussi nul. Ce résultat permet de protéger un corps d'un champ électrique en le plaçant dans un conducteur.

Si une charge  $q$  est placée dans la cavité du conducteur, le champ électrique à l'intérieur de celle-ci n'est plus nul



Comme le champ à l'intérieur du conducteur doit être nul donc le flux à travers la surface de Gauss qui entoure la cavité sera nul ce qui implique que la charge intérieure sera nulle. Pour cela une charge  $-q$  va se répartir sur la surface de la cavité.

**Conducteur de géométrie irrégulière**

Dans le cas d'un conducteur quelconque de géométrie irrégulière, on le considérera comme un ensemble de deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  de rayon  $R_1$  et  $R_2$  respectives ( $R_1 < R_2$ ), reliées entre elles par un fil Figure III.7, assez long pour éviter les influences.

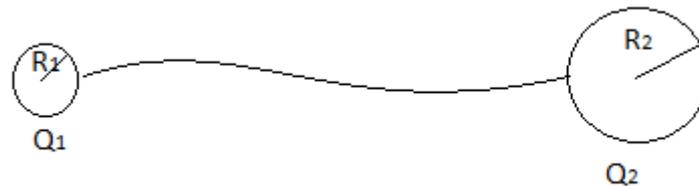


Figure III.7

Cet ensemble est un conducteur en équilibre électrostatique, tous ses points sont au même potentiel électrique, on suppose que  $Q_1$  est la charge de la sphère  $S_1$  et  $Q_2$  est la charge de la sphère  $S_2$ , leur potentiels sont égaux :

$$K \frac{Q_1}{R_1} = K \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \tag{3.8}$$

Le champ électrique au voisinage de chaque sphère est donné par  $E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$  et  $E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$

Le rapport entre ces deux champs est ;

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (3.9)$$

Sachant que  $\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}$  et  $\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$

Donc

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 = \frac{Q_1 R_2 R_2}{R_1 Q_2 R_1}$$

D'où le rapport entre les deux champs :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (3.11)$$

Le champ électrique au voisinage de la petite sphère est plus grand que celui de la grande sphère. En conclusion, si un conducteur est de géométrie non sphérique et qui a des extrémités pointues, le champ électrique au voisinage de ces points est plus intense par rapport aux voisinage des autres régions, ce phénomène est nommé effet de pointe. Ce champ ionise les molécules d'air et le rend conducteur, cas autour de l'anneau de protection d'un isolateur d'une ligne de haute tension.

### Conducteurs en contact

Lorsque deux conducteurs chargés sont mis en contact ou reliés par un fil conducteur, il y transfert de charge en les conducteurs.

Si deux conducteurs ont des charges  $Q_1$  et  $Q_2$  et sont au potentiel  $V_1$  et  $V_2$  avant contact, leurs charges et potentiels deviendront après contact  $Q'_1$ ,  $Q'_2$ ,  $V'_1$  et  $V'_2$

ils seront au même potentiel donc

$$V'_1 = V'_2$$

Et la charge doit être conservée

$$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$$

### III.6 Capacité d'un conducteur

La capacité pour un conducteur est définie comme la quantité de Charge par unité du potentiel électrique. Lorsque la charge est fournie au fur à mesure au conducteur son potentiel électrique augmente, cette charge est proportionnelle au potentiel. Le facteur de proportionnalité est la capacité du conducteur, elle s'exprime en farad. Farad est une unité

très grande pour la mesure de la capacité , on utilise de petite unité avec farad tels que milli (m), micro ( $\mu$ ) ou nano (n).

$$Q = C V \quad (3.12)$$

Capacité d'une sphère conductrice

Soit une charge est attribuée à une sphère conductrice de rayon R, le champ électrique produit à une distance r de la sphère est donnée par

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

$$V = k \frac{Q}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (3.13)$$

### III.7 Condensateur

#### III .7.1 définition

Un condensateur est constitué de deux conducteurs qu'on appelle armatures en influence totale. Ces deux armatures sont séparées par de l'air ou par un diélectrique (isolant) (mica, plastique, eau ou autre). Ils emmagasinent des charges. Quand le condensateur est chargé, une de ces armatures se charge avec une charge Q, par influence l'autre armature se charge avec une charge  $-Q$ . un champ électrique s'installe entre les armatures avec des lignes qui vont de la charge positive a la charge négative, et chaque armature aura son potentiel, et une différence de potentiel apparait entre les deux armatures qu'on note  $\Delta V$ .

$$\Delta V = V(+Q) - V(-Q)$$

La capacité du condensateur est :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(+Q) - V(-Q)} \quad (3.14)$$

Les condensateurs peuvent prendre différentes formes, on peut citer quelques un

- Les condensateurs plan ; sont constitués par deux plaques parallèles de surface  $S$  chaqu'une, séparées par une petite distance  $d$  Figure III.8a.
- les condensateurs cylindriques, sont composés par un cylindre conducteur de rayon  $R_1$  et de longueur  $h$ , entouré d'un cylindre creux conducteur, de rayon  $R_2$  et de même longueur  $h$ . Cet ensemble est appelée un câble coaxial Figure III.8b.
- Les condensateurs sphérique sont composés d'une sphère creuse conductrice de rayon  $R_2$  et d'une sphère conductrice de rayon  $R_1$  au centre de la sphère creuse Figure III.8c.

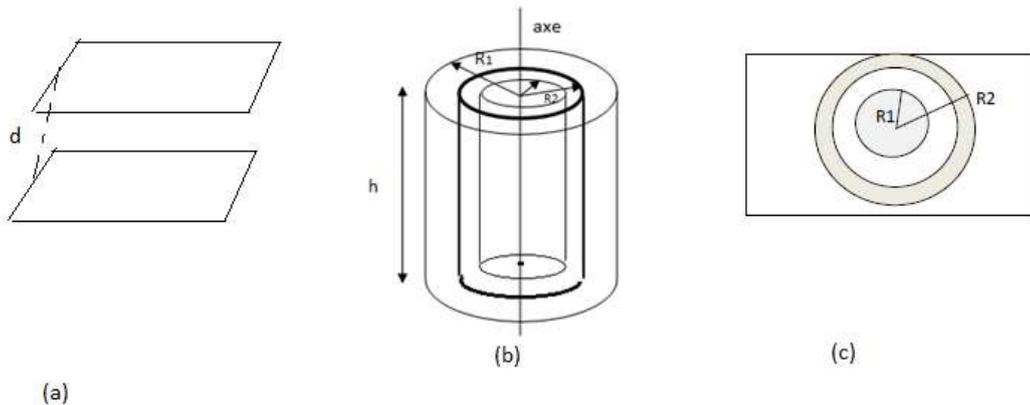


Figure III.8

### III.7.2 Charge du condensateur

En branchant chaque armature d'un condensateur aux bornes d'une source (pile) de Force électromotrice f.e.m  $E$ . la figure illustre le phénomène de charge. Au départ il y a pas de charge sur les armatures. La pile produit un champ électrique dans les fils. Le champ électrique arrive à l'armature reliée au pôle positive de la pile et les électrons vont se déplacer dans le sens inverse. Une charge négative se crée sur l'armature reliée au pôle négative de la pile et une charge positive sur l'autre armature Figure III.9.

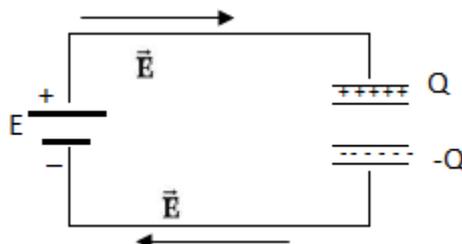


Figure III.9

### III.7.3 L'énergie d'un condensateur

Les condensateurs peuvent emmagasiner de l'énergie. Lorsqu'on un condensateur est chargé, un travail est effectué pour déplacer des charges d'une armature à l'autre, il est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle. Pour charger un condensateur on branche un générateur entre ses armatures. Ce générateur provoque le passage des électrons d'une armature à l'autre, ainsi la distribution des électrons dans l'espace sera modifiée, il s'ensuit une augmentation de l'énergie potentielle électrique du système de charges. Cette augmentation d'énergie potentielle électrique est appelée énergie du condensateur.

Pour comprendre cette énergie, on prend un condensateur déchargé, on applique une petite tension (différence de potentiel d.d.p) entre ses armatures A et B. On continue a lui augmenté sa tension avec la même ddp  $dV$ . Après un certain avec  $n$  fois l'augmentation de la tension  $dV$  entre ces armatures, la tension finale deviendra

$$\Delta V = V_A - V_B = ndV \quad (3.15)$$

L'armature (A) porte la quantité d'électricité  $q$ , l'armature (B) la quantité d'électricité  $-q$  et la

si nous augmentons de  $dV$  nous obtenons l'état d'équilibre suivant. Une très petite quantité d'électricité négative  $-dq$  passe de l'armature (A) au potentiel à l'armature (B). Il s'ensuit la variation de l'énergie potentielle

$$dW = dq(V_A - V_B) \quad (3.16)$$

Sachant que

$$V_A - V_B = \frac{q}{C} \quad (3.17)$$

$$dW = \frac{q}{C} dq \quad (3.18)$$

Cette relation donne la variation  $dW$  de l'énergie, lorsque la charge de l'armature (A) passe de la valeur  $q$  à la valeur très voisine  $q+dq$ .

L'énergie  $W$  emmagasinée dans le condensateur, lorsque la charge de l'armature (A) passe de la valeur zéro (condensateur déchargé) à une valeur  $Q$ , s'obtient :

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{2Q^2}{C} \quad (3.19)$$

$$Q = C(V_A - V_B)$$

$$W = 2C(V_A - V_B)^2 \quad (3.20)$$

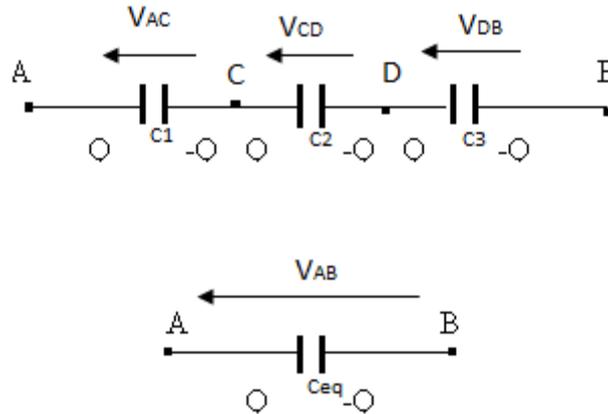
Un condensateur chargé possède une certaine quantité d'énergie qui peut être utilisée pour faire fonctionner un appareil. Cas d'Un défibrillateur cardiaque qui est un appareil qui applique un choc électrique au cœur d'un patient qui bat de façon irrégulière. C'un appareil doté d'un condensateur de capacité C qui se charge lentement, jusqu'à une différence de potentiel de quelque kilovolts. Son énergie emmagasinée est de l'ordre du kilojoule. Une partie de cette énergie est transférée au patient en un temps très court de l'ordre de la milliseconde est nécessaire pour lui venir en aide. Cette puissance nécessaire dépasse largement la puissance que peut donner une pile. Le condensateur se charge lentement, mais il peut se décharger très rapidement

### ***III.8 Groupements de condensateurs***

Un condensateur est caractérisé par sa capacité et sa tension .

#### **III.8.1 Groupement en série.**

Pour un groupement en série de n condensateurs Figure III.10, la capacité du condensateur équivalent sera :



**Figure III.10.**

Nous appliquons une tension qui est la différence de potentiel entre les point A et B.  $V_A - V_B$  entre les bornes A et B est égale a la somme des tensions entre ces bornes

$$V_A - V_B = V_{AB} = V_{AC} + V_{DC} + V_{DB} \quad (3.21)$$

on peut aussi écrire

$$Q = C_1 (V_A - V_C) = C_1 V_{AC} \quad (3.22)$$

$$Q = C_2 (V_C - V_D) = C_2 V_{CD} \quad (3.23)$$

$$Q = C_3 (V_D - V_B) = C_3 V_{DB} \quad (3.24)$$

C'est la même charge qui passera par les armatures de ces trois condensateurs

Et par suit :

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (3.25)$$

On obtient  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$C_1, C_2, C_3 \dots \dots C_n$ , sont montés en série, le condensateur équivalent

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (3.26)$$

III.8.2 Groupement en parallèle

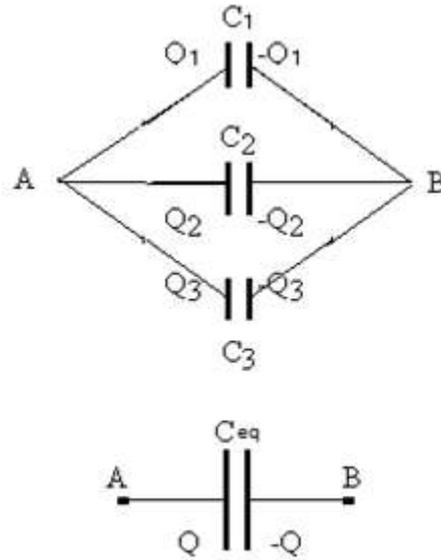


Figure II.11

Les trois condensateurs ont la même tension,

Si la même d.d.p.  $V_A - V_B$  est appliquée au condensateur équivalent, à ce montage, son armature chargée positivement reçoit la quantité d'électricité  $Q_1 + Q_2 + Q_3$ . La capacité  $C$  de ce condensateur est donc telle que :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = C(V_A - V_B) = CV$$

$$Q_1 = C_1V \quad Q_2 = C_2V \quad Q_3 = C_3V$$

$$\text{donc : } Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1V + C_2V + C_3V = C_{eq}V$$

$$\text{Il vient après simplification : } C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

D'une manière générale, la capacité  $C$  du condensateur équivalent à  $n$  condensateurs montés en parallèle, de capacité  $C_1, C_2, C_3 \dots C_n \dots$  est :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (3.28)$$

**III.9 Exercices avec solutions**

**Exercice 1**

Une sphère conductrice de rayon  $R_1$  porte une charge  $Q_1$  positive, calculer son potentiel, sa capacité et sa densité.

2 une seconde sphère conductrice  $S_2$  initialement neutre, de rayon  $R_2 < R_1$  est placée à une distance de  $S_1$  suffisamment éloignée pour que l'on puisse négliger les phénomènes d'influences. Elles sont reliées par un fil conducteur de capacité négligeable.

Calculer les charges des deux sphères lorsque l'équilibre est atteint, en déduire les densités surfaciques calculer leurs rapport

solution

Une sphère conductrice de rayon  $R$ , le champ électrique produit à une distance  $r$  de la sphère est donnée par

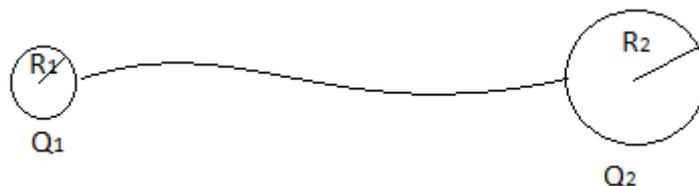
$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

$$V = k \frac{Q}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

2 les deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  de rayon  $R_1$  et  $R_2$  respectives ( $R_1 < R_2$ ), relient entre elles par un fil, assez long pour éviter les influences.



Cet ensemble est un conducteur en équilibre électrostatique, tous ses points sont au même potentiel électrique, on suppose que  $Q_1$  est la charge de la sphère  $S_1$  et  $Q_2$  est la charge de la sphère  $S_2$ , leur potentiels sont égaux :

$$K \frac{Q_1}{R_1} = K \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Le champ électrique au voisinage de chaque sphère est donné par  $E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$  et  $E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$

Le rapport entre ces deux champ est ;

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Sachant que  $\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}$  et  $\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$

Donc

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 = \frac{Q_1 R_2 R_2}{R_1 Q_2 R_1}$$

D'où le rapport entre les deux champs :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

### Exercice 2

Un condensateur plan a des armatures carrées de 4 cm de côté, séparées d'une distance de 8 $\mu$ m. Les armatures sont séparées par un mica de constante diélectrique  $\epsilon_r = 3$

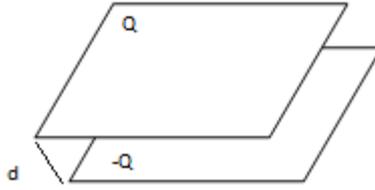
Quelle est la capacité du condensateur ?

### Solution

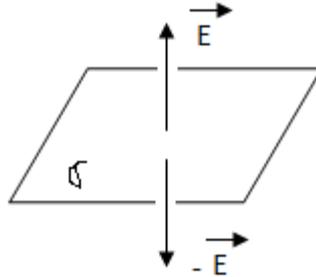
Le condensateur plan Est formé par deux armatures planes de surface S qui vont porté des charges opposées, séparée par une distance petite d'afin d'éviter les effets de bord. On place une charge +Q sur l'armature supérieure et une charge -Q sur l'armature inférieure.

## Chapitre III

---

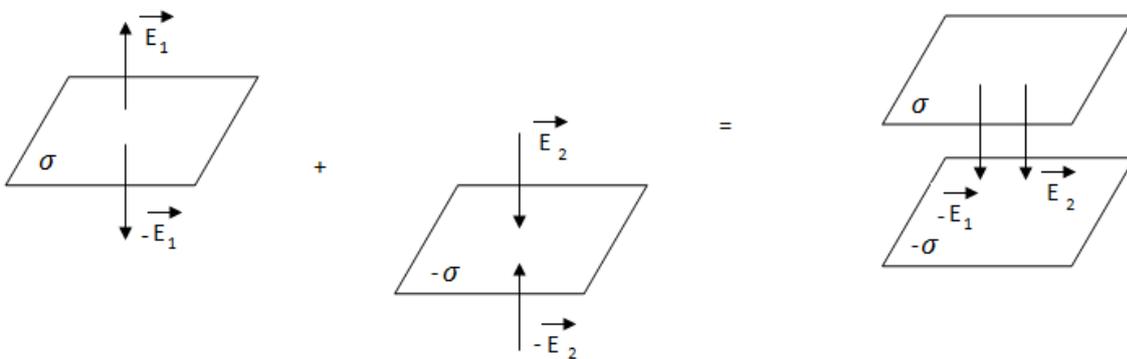


On sait que le champ électrique d'un plan infini avec une distribution de charge surface



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

Comme le condensateur est formé par deux plans parallèle, on calcul le champ électrique du la superposition des champs :



Le plan du haut avec une densité de charge surfacique  $\sigma$  et ce lui du bas avec une densité de charge surfacique  $-\sigma$

Pour le plan du haut

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

Celui du bas

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

En dessus et en dessous de l'ensemble des deux plans le champ total est nul, au milieu on aura la superposition des deux champs

$$-\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{k} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$$

On peut calculer le potentiel

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = - \int -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k} \cdot dz\vec{k} = - \int_0^d -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$\Delta V = \frac{Q d}{S \varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S \varepsilon_0}{d}$$

Si le milieu est différent de l'air et composé d'un diélectrique on utilise la constante diélectrique ;

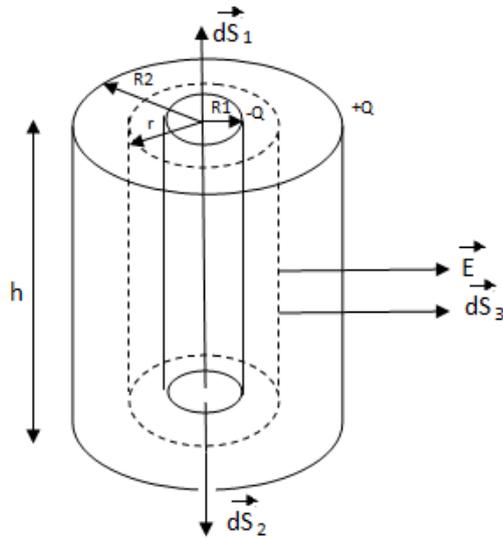
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S \varepsilon_r \varepsilon_0}{d}$$

$$C = \frac{S \varepsilon_r \varepsilon_0}{d} = \frac{16 \times 10^{-2} \times 3 \times 8,85 \times 10^{-12}}{8 \times 10^{-6}} = 53 \cdot 10^{-8} = 5,3 \text{ nF}$$

### Exercice 3

Un condensateur cylindrique est formé de deux conducteurs cylindrique coaxiaux de rayon respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) de hauteur  $h$ . Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique.

### Solution



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3$$

Le calcul du module du champ à l'aide du théorème de Gauss. Le flux à travers les deux  $S_1$  et  $S_2$  de la surface de Gauss est nul, car et sont perpendiculaires. Il ne reste que le flux à travers le côté du cylindre

$$\Phi = \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3$$

$$\Phi = \iint_{S_3} E \cdot dS_3 = E \iint dS_3 = ES_3 = E2\pi rh$$

$$\Phi = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

La charge intérieure à la surface de Gauss est celle du cylindre de rayon  $R_1$

$$E2\pi rh = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{-Q}{2\pi rh\epsilon_0}$$

Le calcul du potentiel

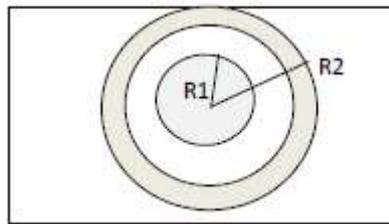
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi rh\epsilon_0} \cdot dr$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi h\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

#### Exercice 4

Un condensateur sphérique se présente comme deux sphères conductrices concentriques de rayon  $R_1$  et  $R_2$  respectivement  $R_1 < R_2$  jouant le rôle d'armature interne et externe.



d'après la définition

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr$$

Avec  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

D'où  $V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$

Nous obtenons

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

#### Exercice 5

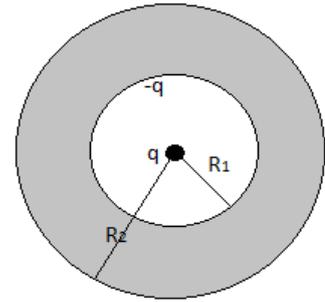
Une sphère conductrice creuse a un rayon intérieur  $R_1 = 2\text{cm}$  et un rayon extérieur  $R_2 = 5\text{cm}$ . La sphère a une charge  $Q = 2,50 \mu\text{C}$ . Au centre de la cavité, il y a une charge ponctuelle  $q = 4,50 \mu\text{C}$ .

- 1- Calculez la charge surfacique sur la surface intérieure de la sphère creuse.
2. Quel est le champ électrique à une distance  $r = 3\text{cm}$  de la charge ponctuelle ?
3. Calculez la charge surfacique sur la surface extérieure de la sphère creuse.

Solution

1 Une charge va être répartie sur la surface de la sphère intérieur avec une charge  $-q$

Le calcul de la distribution de charge surfacique sera déduit



2- la distance de 3cm de la charge q se trouve dans le conducteur ou le champ électrique est nul

3- le fait qu'il y a une partie de la charge du conducteur s'est répartie sur la surface de la cavité, elle sera soustraite de la charge totale du conducteur

$$q' = Q - (-q) = Q + q = 7\mu C$$

$$\sigma' = \frac{dq'}{ds} = \frac{q'}{4\pi R_2^2} = 223\mu C \cdot m^{-2}$$

### Exercice 6

Soit un condensateur plan constitué de deux plaques de même surface S , séparées par une distance d et qui portent une charge totale Q.

1-Déterminer sa capacité C.

2-Calculer la force exercée par l'armature +Q sur l'armature -Q.

3- On introduit une plaque métallique d'épaisseur e entre les armatures. Déterminer la nouvelle capacité C', en considérant ce système (condensateur + plaque) comme l'association en série de deux condensateurs plan.

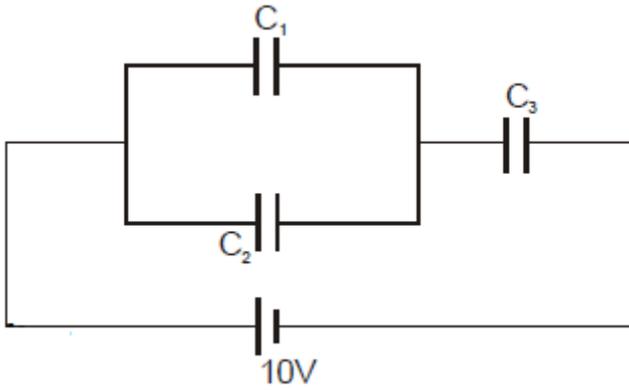
### Exercice 7

Dans le circuit suivant il y a trois condensateurs reliés entre eux et subissent une tension de 10volte, sachant que  $C_1 = 15\mu F$  ;  $C_2 = 10\mu F$  et  $C_3 = 25\mu F$

Trouver

1-la capacité équivalente.

2- la charge puis le potentiel au borne de chaque condensateur.



**Solution**

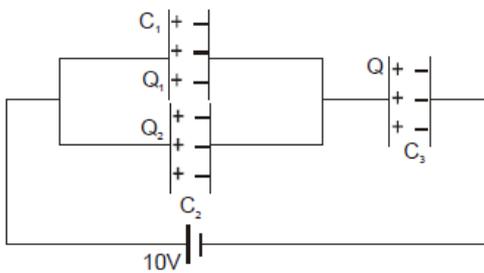
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3 + C_1 + C_2}{(C_1 + C_2)C_3}$$

$$C_{eq} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_3 + C_1 + C_2}$$

AN :

$$C_{eq} = 12.5\mu F$$

2-



La charge totale du circuit est

$$Q = C_{eq}V = 12.5 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 125 \cdot 10^{-6} C = 125\mu C$$

Cette charge se répartissent entre les deux condensateurs C1 et C2, qui sont à la même différence de potentielle, et c'est la même qui traverse le condensateur C3

$$Q_1 = C_1 V_1$$

$$Q_2 = C_2 V_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Comme  $V_1 = V_2$

$$\frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

Donc

$$Q_1 = \frac{QC_1}{C_1 + C_2} = 75\mu F$$

et

$$Q_2 = \frac{QC_2}{C_1 + C_2} = 50\mu F$$

Pour le calcul des tensions

Sur le condensateur C1

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{75}{15} = 5 \text{ VOLT}$$

Sur C3

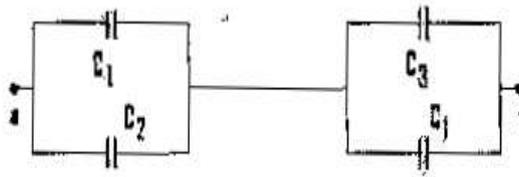
$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{125}{25} = 5 \text{ VOLT}$$

On peut vérifier ces résultats

Comme  $V = V_1 + V_3 = 10 \text{ Volt}$

### Exercice 8

On considère le groupement de condensateur **figure ci dessous**. tel que  $C_1 = 2 \mu F$ ,  $C_2 = 4 \mu F$  et  $C_3 = 1 \mu F$  ,



- Déterminer la capacité du condensateur équivalent entre a et b .
- On crée entre a et b une différence de potentielle  $V = 3 \text{ Volts}$ , on charge tous les condensateurs. Calculer alors la charge portée par chaque condensateur.

**Solution**

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_1 + C_3} = \frac{C_3 + 2C_1 + C_2}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_1)} = \frac{1}{2\mu F}$$

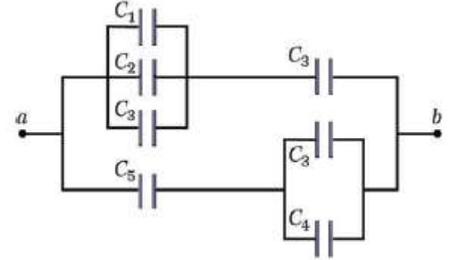
$$C_{eq} = 2\mu F$$

$$Q = C_{eq}V = 210^{-6} \cdot 3 = 6 \cdot 10^{-6} C = 6\mu C$$

**Exercice 9**

Dans le circuit suivant, les condensateurs ont les capacités suivantes :  $C_1 = 3,00 \mu F$ ,  $C_2 = 5,00 \mu F$ ,  $C_3 = 4,00 \mu F$ ,  $C_4 = 2,00 \mu F$  et  $C_5 = 3,00 \mu F$ .

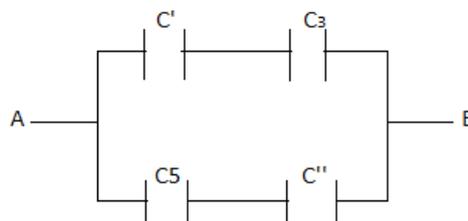
- Quelle est la capacité équivalente entre les points A et B ?
- Si la charge sur  $C_2$  est de  $120 \mu C$ , quelle est la différence de potentiel aux bornes du condensateur  $C_5$  ?



En se basant le fait que la différence de potentiel (ddp) est la même aux bornes des condensateurs reliés en parallèles ainsi que la charge est la même sur les condensateurs en séries.

Dans le cas de ce circuit on a une association de plusieurs condensateurs reliés entre eux d'une façon mixte c'est-à-dire en parallèle et en série. Pour calculer la capacité équivalente on doit passer par plusieurs étapes.

Sur la branche du haut on a  $C_1$ ,  $C_2$  ET  $C_3$  qui sont reliés en parallèle, leurs capacités s'ajoutent



$$C' = C_1 + C_2 + C_3 = 12\mu F$$

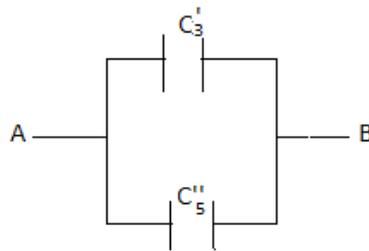
De même sur la branche du bas on procède de la même façon pour  $C_3$  ET  $C_4$

$$C'' = C_4 + C_3 = 6\mu F$$

## Chapitre III

Le circuit ainsi se réduit à deux branches à quatre condensateurs, la branche du haut est formée par le condensateur  $C'$  et  $C_3$  et celle du bas formée par le condensateur  $C''$  et  $C_5$

On simplifie encore le circuit toujours à deux branches avec un condensateur dans chaque une .



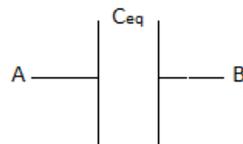
$$\frac{1}{C'_3} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$C'_3 = 3\mu F$$

$$\frac{1}{C''_5} = \frac{1}{C''} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$C''_5 = 2\mu F$$

A la fin on peut calculer la capacité équivalente entre les deux point A et B



$$C_{eq} = C'_3 + C''_5 = 5\mu F$$

2- Comme  $C_1$  ,  $C_2$  ET  $C_3$  qui sont reliés en parallèle leurs ddp sont égales à la ddp de  $C_2$  qu'on notera par  $V_2$ , sachant qu'on a la valeur de la charge sur cette capacité  $Q_2$  on peut calculer sa ddp par la relation

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{120}{5} = 24 V$$

## Chapitre III

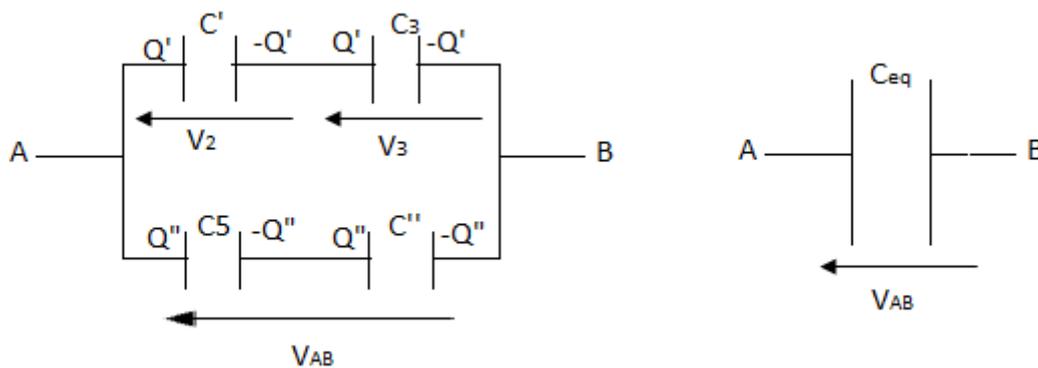
---

Cette ddp est aussi égale la ddp au borne de leur condensateur équivalent de capacité équivalente  $C'$ , donc on peut déduire sa charge qu'on notera par  $Q'$

$$Q' = C' \cdot V_2 = 12 \times 24 = 288 \mu C$$

Cette charge est aussi la charge du condensateur  $C_3$  et aussi la charge de la branche du haut, connaissant la capacité équivalente de cette branche  $C'_3 = 3 \mu F$  on peut calcule sa ddp

$$\frac{Q'}{C'_3} = \frac{288}{3} = 96 V$$



Les deux branches sont parallèles leurs ddp sont égales entre eux et égales à la ddp du circuit équivalent entre les point A et B. on la notera par  $V_{AB}$

$$V_{AB} = 96 V$$

On peut déduire la valeur de la charge de la branche du bas  $Q''$

$$Q'' = V_{AB} \cdot C''_5 = 96 \times 2 = 192 \mu C$$

Elle est aussi la charge du condensateur  $C_5$  sa ddp vaut

$$\frac{Q''}{C_5} = \frac{192}{3} = 64 V$$

# Chapitre IV

## IV.1 L'électrocinétique

### IV.1.1 Définition

C'est l'étude du mouvement des charges. Comme le conducteur est le milieu où les charges sont capables de se déplacer librement, on peut citer les métaux, les solutions ioniques, les semi-conducteurs. Dans les métaux seules les électrons se déplacent librement. Dans d'autres milieux, il existe différents porteurs de charges en mouvement, cas des électrolytes avec plusieurs ions positifs et négatifs cas des gaz ionisés. Dans ces milieux les charges se différencient par leurs charges ou par leurs vitesses ou par les deux à la fois.

On appelle courant électrique un **déplacement d'ensemble de charges électriques** véhiculées par des porteurs de charge.

### IV.1.2 Vecteurs densité de courant

Prenons le cas des métaux où il y a un seul type de charge (électron). Les charges sont libres de se déplacer dans n'importe quelle direction dans leur milieu. Si on leur applique un champ électrique  $\vec{E}$ , il va leur imposer une direction unique.

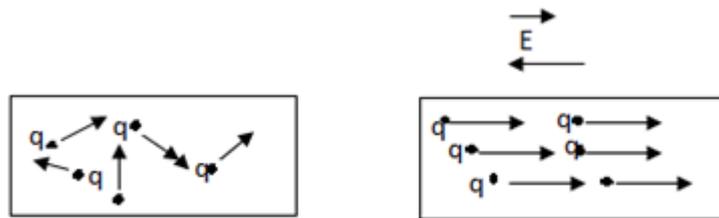


figure IV.1 charges dans un conducteur

Parce qu'elles sont indiscernables (même charge et même masse), elles vont être soumises à une force  $\vec{F} = q\vec{E}$  et vont acquiescent une vitesse moyenne figure IV.1. Le cas des électrons la force sera dans le sens opposé au champ appliqué.

La densité de courant est définie comme la quantité de charge qui par unité de temps traverse l'unité de surface. C'est une grandeur vectorielle elle est proportionnelle à la charge par unité de volume et leurs vitesses.

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = -ne^- \vec{v} \quad (4.1)$$

### IV.1.3 Intensité du courant électrique

## Chapitre IV

On calcule le flux du vecteur densité de courant à travers une surface S orienté :

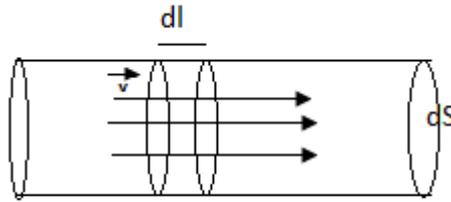


figure IV.2

$$\Phi = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int \rho \cdot v \cdot dS \quad (4.2)$$

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Sachant que le volume  $dV = dl \cdot dS$

Et la vitesse des électrons

$$v = \frac{dl}{dt}$$

$$\Phi = \frac{dq}{dt} = I \quad (4.3)$$

C'est l'intensité du courant électrique, il représente la charge qui traverse une surface par unité de temps. Dans le système international il se mesure en Ampère  $1A = \frac{1Coulomb}{1seconde}$

C'est-à-dire un ampère vaut un nombre d'environ  $10^{19}$  électrons arrivant à la surface S en une seconde.

On peut exprimer la densité de courant dans un conducteur, en fonction d'un champ appliqué

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (4.4)$$

$\sigma$  est la conductivité du matériau, elle s'exprime en siemens a pour valeur

$$\sigma = \frac{ne\tau}{m} \quad (4.5)$$

La résistivité  $\rho$  est définie comme l'inverse de la conductivité :

### IV.1 .4 Différence de potentiel électrique

## Chapitre IV

Une force qui se déplace fournit un travail. Quand, dans un système, existe une force qui peut fournir un travail si on la laisse agir, on dit que ce système possède de l'énergie potentielle. L'énergie potentielle n'étant définie qu'à une constante près, on définit donc entre deux points d'un conducteur une différence de potentiel électrique.

### IV.2 Loi d'ohm

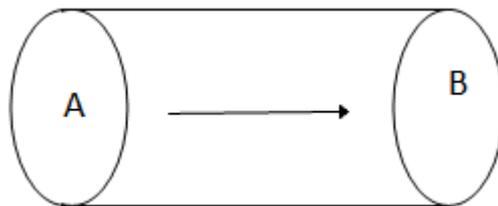
Le calcul de la circulation du champ électrique pour un conducteur limité par deux extrémités de potentiel différent

$$dV = -\vec{E}d\vec{l}$$

$$\int_A^B dV = -\int \vec{E}d\vec{l}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$$

$$V_B - V_A = -\int \frac{j}{\sigma} d\vec{l} \quad (4.6)$$



$$j = \frac{I}{S}$$

$$V_B - V_A = -\int \frac{1}{\sigma} \frac{I}{S} d\vec{l} = -\frac{I}{\sigma} \int \frac{d\vec{l}}{S} \quad (4.7)$$

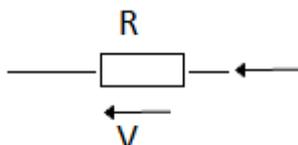
$$V_A - V_B = \frac{1}{\sigma} \int \frac{d\vec{l}}{S} I = RI \quad (4.8)$$

## Chapitre IV

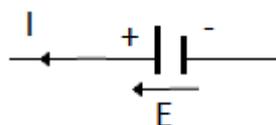
R c'est la résistance du matériau. La différence de potentiel aux bornes d'un matériau est donnée par la relation :

$$V_A - V_B = RI \quad (4.9)$$

Ce matériau est dit dispositif électrique passif parce qu'il consomme de l'énergie.



On distingue des matériaux qui produisent de l'énergie électrique qu'on nomme des dispositifs électriques actifs et qui ont une force électromotrice f.e.m



Ce sont des dipôles électrocinétique ils sont est une portion de circuit comportant deux bornes (par lesquelles entre ou sort le courant). Ils se caractérisent par graphe de la tension  $V$  à leurs bornes en fonction de l'intensité *du courant* qui les traverse figure IV.3.

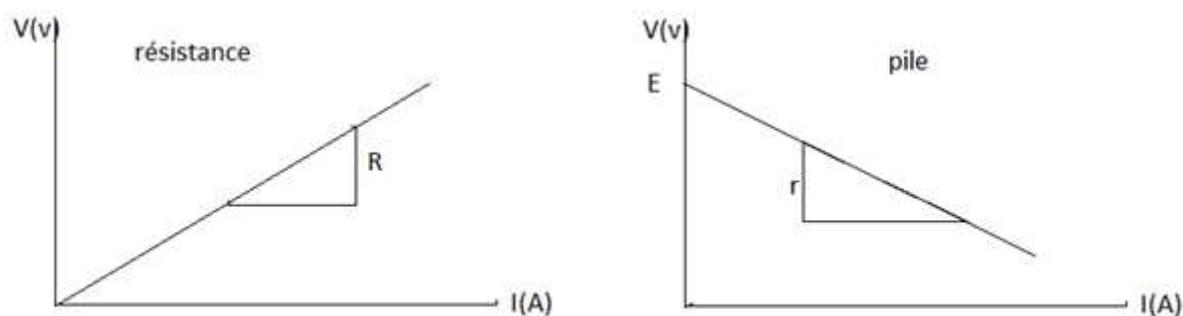


figure IV. 3 caractéristique  $V$  en fonction de  $I$

### IV .3 Circuit électrique

Un ensemble de dispositifs électriques reliés entre eux par des fils conducteurs, forme ce qu'on appelle un circuit électrique. Parmi ces dispositif on peut trouver des Piles, des résistances, des condensateurs et autre. On utilise dans ces circuits, des appareils de mesure du

## Chapitre IV

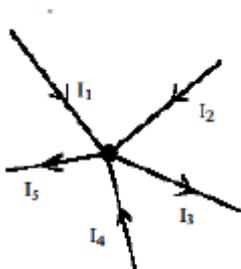
courant électrique l'ampèremètre et des appareils de mesure de la différence de potentiel le voltmètre. Les circuits sont représentés par des schémas et les dispositifs par des symboles.

Dans le circuit électrique est formé lorsqu'un chemin conducteur est créé pour permettre aux électrons libres de se déplacer en continu. Ce mouvement continu d'électrons libres à travers les conducteurs d'un circuit s'appelle un courant, et on l'appelle souvent en termes de «flux», tout comme l'écoulement d'un liquide à travers un tuyau creux. La force motivant les électrons à «circuler» dans un circuit est appelée tension. La tension est une mesure spécifique de l'énergie potentielle qui est toujours relative entre deux points. Lorsque nous parlons d'une certaine quantité de tension présente dans un circuit, nous nous référons à la mesure de la quantité d'énergie potentielle existe pour déplacer des électrons d'un point particulier de ce circuit à un autre point particulier. Sans référence à  $t \sim$  points particuliers, le terme «tension» n'a pas de sens. Les électrons libres ont tendance à se déplacer à travers les conducteurs avec un certain degré de friction ou d'opposition au mouvement. Cette opposition au mouvement est plus proprement appelée résistance. La quantité de courant dans un circuit dépend de la quantité de tension disponible pour motiver les électrons, ainsi que de la quantité de résistance dans le circuit pour s'opposer au flux d'électrons. Tout comme la tension, la résistance est une quantité relative entre deux points. Pour cette raison, les quantités de tension et de résistance sont souvent indiquées comme étant entre ou entre deux points dans un circuit. Pour pouvoir faire des déclarations significatives sur ces quantités dans les circuits, nous devons être capables de décrire leurs quantités de la même manière que nous pourrions quantifier la masse, la température, le volume, la longueur ou tout autre type de quantité physique.

### IV.4 Les lois de Kirchhoff

#### IV.4.1 loi des nœuds

Un nœud dans un circuit est une connexion entre conducteurs ou le courant est conservé puisse que la charge se conserve. Cela se traduit par la somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui quittent ce nœud. C'est la loi des nœuds.



$$\sum i_{entrant} = \sum i_{sortant} \quad (4.10)$$

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

## Chapitre IV

Une branche dans un circuit est formée par plusieurs dispositifs liés en série, un seul courant les traversant, elle est située entre deux nœuds. Plusieurs branches se connectent pour former une maille.

### IV.4.1 loi des mailles

La deuxième loi de Kirchhoff c'est la loi des mailles. La somme algébrique des différences de potentiel aux bornes des éléments formant une maille est nulle.

Le diagramme suivant figure IV.4 représente un circuit formé par une force électromotrice f.e.m  $E$ , trois résistances et un condensateur. On dénombre deux nœuds  $b$  et  $g$  et trois branches, la première formée par la f.e.m  $E$  et la résistance  $R_1$ ,  $I_1$  est le courant qui circule dans cette branche. La deuxième branche est formée par la résistance  $R_2$  traversée par le courant  $I_2$  et la dernière branche est formée par la résistance  $R_3$  et le condensateur  $C$ .

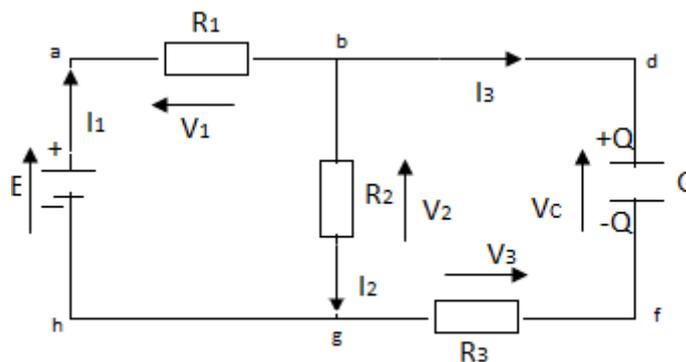


figure IV. 4 circuit électrique

$V_1, V_2, V_3, V_c$  sont les différences de potentiel aux bornes des résistances  $R_1, R_2, R_3$  et le condensateur respectivement. Après l'identification des trois branches, en les combinant on peut former trois mailles. La première maille est formée par la première branche et la deuxième branche. La deuxième maille est formée par la deuxième branche et la troisième branche. Et la dernière maille est formée par la première branche et la troisième branche sans la deuxième.

## Chapitre IV

Le choix du sens du courant est arbitraire, c'est-à-dire on peut le choisir dans n'importe quel sens, le bon choix se confirme après calcul si le courant a une valeur positive dans le cas où on aura une valeur négative on change le sens et on garde la valeur positive.

Après avoir choisi le sens du courant, la différence du potentiel (tension) au borne du dipôle passif (Résistance) sera dans le sens inverse du courant. Le sens de la tension entre le dipôle actif (générateur du courant) sera du pôle négative vers le pôle positive.

En appliquant la loi des mailles on doit choisir un sens et on aura pour :

La première maille  $V_1 - E = 0$  (4.11)

La deuxième maille  $V_3 + V_C - V_2 = 0$  (4.12)

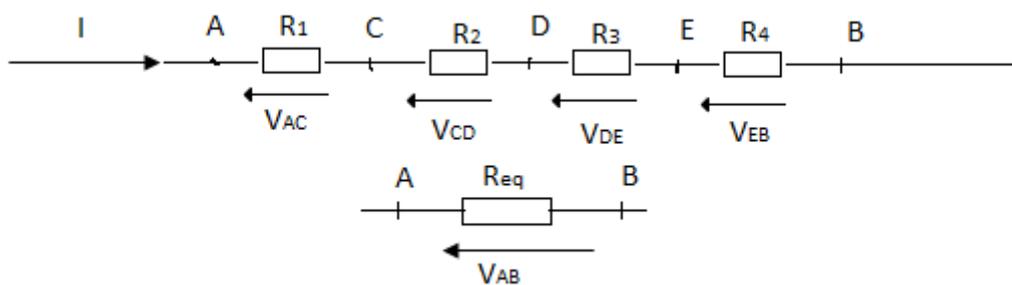
La troisième maille  $V_3 + V_C + V_1 + E = 0$  (4.13)

En appliquant maintenant la loi des nœuds, au niveau du nœud b tous les courants partent du nœud donc  $I_3 + I_1 + I_2 = 0$  (4.14)

### IV.5 Association des résistances

#### IV.5 .1 Association des résistances en série

On a des résistances qui sont associées en série, on déterminera leur résistance équivalente.



La tension au borne de chaque résistance est la différence de potentiel entre le point où rentre le courant et le point où ressort :

$$V_{AC} = V_A - V_C = R_1 I$$

$$V_{CD} = V_C - V_D = R_2 I$$

$$V_{DE} = V_D - V_E = R_3 I$$

$$V_{EB} = V_E - V_B = R_4 I$$

## Chapitre IV

$$V_{AB} = V_A - V_B = R_{eq}I$$

$$V_{AB} = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_B) = R_1I + R_2I + R_3I + R_4I$$

$$V_{AB} = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)I$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

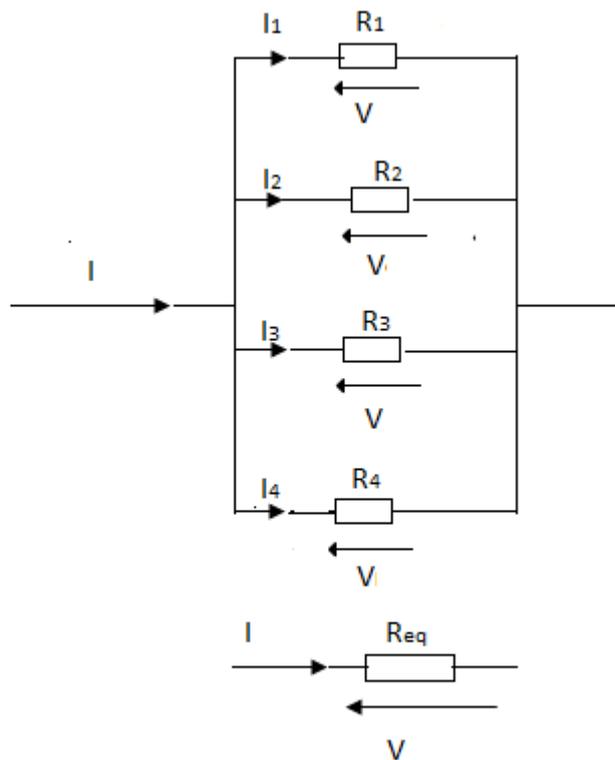
Pour n résistances en série la résistance équivalente est

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (4.14)$$

### IV.5 Association des résistances en parallèle

Le courant I qui arrive à cet ensemble de résistance figure, il se partage entre ces trois branches formées par une résistance chaque'une, il sera égale à la somme de ces courants :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$



## Chapitre IV

comme les résistances sont à la même tension  $V$

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \frac{V}{R_4}$$
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

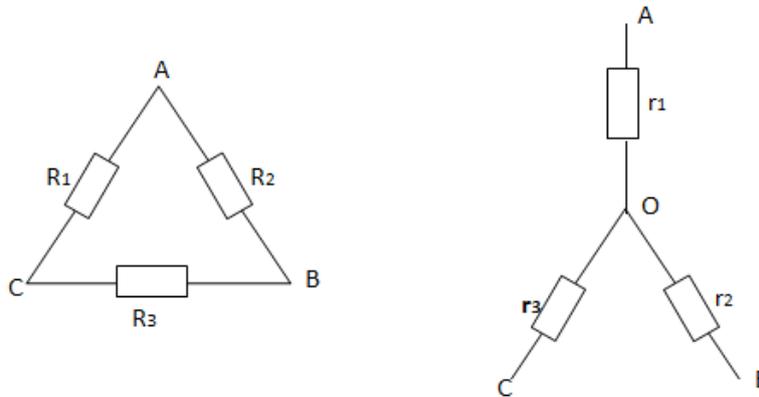
Pour  $n$  résistances en parallèles leurs résistance équivalente est égale à :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (4.15)$$

On peut trouver un groupement de résistances associées en parallèle et en série.

### IV.5.3 équivalence triangle-étoile

Une association des résistances peut être sous forme d'un triangle ou d'une étoile. Un Passage d'une association en triangle à une association en étoile est possible et le cas inverse est aussi possible, pour se faire on procède comme suit.



Connaissant les résistances du groupement en triangle  $R_1, R_2$  et  $R_3$ , on calcul les résistances du groupement en étoile  $r_1, r_2$  et  $r_3$

On choisi le sens de A vers C dans le triangle. Il y a deux branches une branche formée par les deux résistances  $R_2$  et  $R_3$  et une autre branche formée par  $R_1$  ces deux branches sont parallèle.

$$\frac{1}{r_1 + r_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)}$$

## Chapitre IV

---

$$r_1 + r_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.16)$$

On choisit le sens de A vers B dans le triangle. Il y a deux branches une branche formée par les deux résistances  $R_1$  et  $R_3$  et une autre branche formée par  $R_2$  ces deux branches sont parallèles.

$$\frac{1}{r_1 + r_2} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2(R_1 + R_3)}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

On choisit le sens de B vers A dans le triangle. Il y a deux branches une branche formée par les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  et une autre branche formée par  $R_3$  ces deux branches sont parallèles.

Dans la suite des calculs on combine ces trois équations :

$$\frac{1}{r_2 + r_3} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3(R_1 + R_2)}$$

$$r_2 + r_3 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.17)$$

$$r_1 + r_3 + r_1 + r_2 - r_2 - r_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2(R_1 + R_3) - R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$2r_1 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_1 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.18)$$

## Chapitre IV

---

$$-r_1 - r_3 + r_1 + r_2 + r_2 + r_3 = \frac{-R_1(R_2 + R_3) + R_2(R_1 + R_3) + R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$2r_2 = \frac{2R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.19)$$

$$r_1 + r_3 - r_1 - r_2 + r_2 + r_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3) - R_2(R_1 + R_3) + R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$2r_3 = \frac{2R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.20)$$

Dans le cas inverse on détermine les résistances du groupement en triangle  $R_1, R_2$  et  $R_3$ , en fonction des résistances du groupement en étoile  $r_1, r_2$  et  $r_3$

$$R_1 = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_2} \quad (4.21)$$

$$R_2 = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_3} \quad (4.22)$$

$$R_3 = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_1} \quad (4.23)$$

## Chapitre IV

### IV.6 Exercice résolues

#### Exercice 1

Un conducteur électrique a une section carrée de 2 mm de côté et 12 m de long. La résistance entre ses extrémités est de 0,072  $\Omega$ .

- Quelle est la résistivité du matériau ?
- Si l'amplitude du champ électrique dans le conducteur est de 0,12 V.m<sup>-1</sup> quel est le courant total ?
- Si le matériau a  $8 \times 10^{28}$  électrons libres par mètre cube, trouvez la vitesse moyenne.

#### Solution

$$\frac{1}{\sigma} \int \frac{dl}{S} = R$$

$$\rho \frac{l}{S} = R \Rightarrow \rho = \frac{S}{l} R$$

$$S = a^2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$$

$$\rho = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{12} 0,072 = 2,4 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$$

-

$$E = \frac{V}{l} \Rightarrow V = E \cdot l = 0,12 \times 12 = 1,44 \text{ V}$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1,44}{0,072} = 20 \text{ A}$$

-

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = -ne^{-}\vec{v}$$

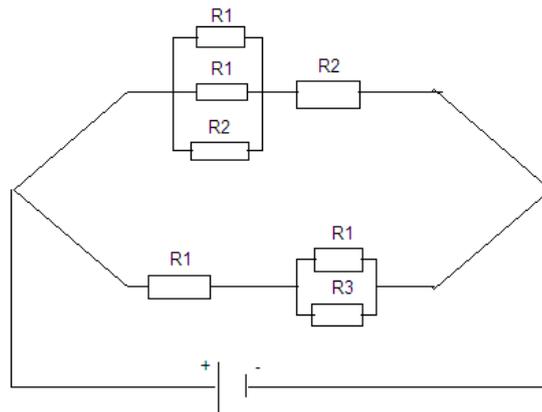
$$I = JS = nSev$$

$$v = \frac{I}{nSe} = \frac{20}{8 \times 10^{28} \times 4 \times 10^{-6} \times 1,6 \times 10^{-19}} = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

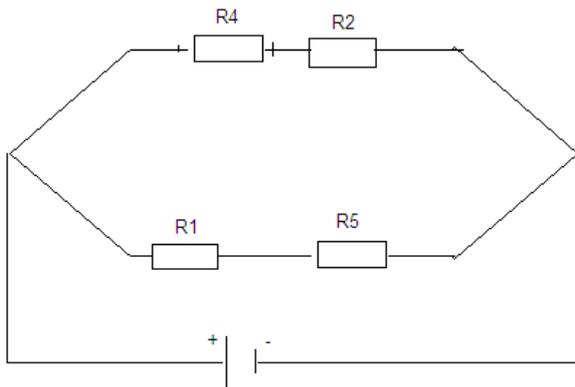
#### Exercice 2

Soit le groupement de résistances dans le circuit suivant, sachant que  $R_1=1\Omega$ ,  $R_2= 2\Omega$  et  $R_3=3\Omega$ , on se propose de déterminer la résistance équivalente de ce groupement. Déterminer le courant débité par la f.e.m de valeur  $E=5\text{v}$

## Chapitre IV



### Solution



$R_4$  est la résistance équivalente de  $R_1$ ,  $R_1$  et  $R_2$

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

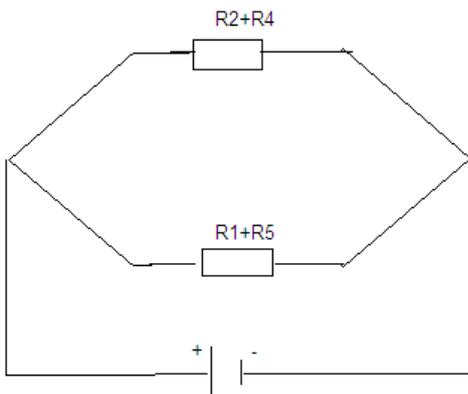
$$R_4 = \frac{2}{5} \Omega$$

De même pour  $R_5$

$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$R_5 = \frac{3}{4} \Omega$$

Le circuit se réduit encore



La résistance équivalente du groupement se déduit :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_1 + R_5}$$

$$R_2 + R_4 = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

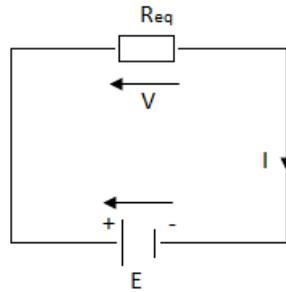
$$R_1 + R_5 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

## Chapitre IV

D'où

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{5}{12} + \frac{4}{7} = \frac{35 + 48}{84} = \frac{83}{84}$$

$$R_{eq} = \frac{84}{83} \Omega$$



Pour le calcul d courant électrique on a

$$E = V = R_{eq} \cdot I$$

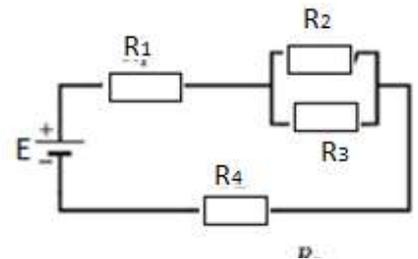
D'où

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = 5 \times \frac{83}{84} = 4.94 \text{ A}$$

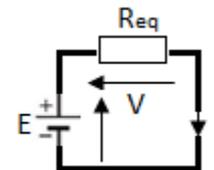
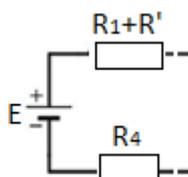
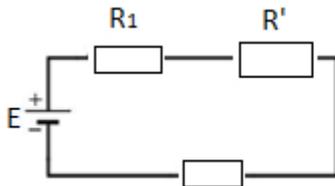
### Exercice 3

Soit le circuit , où  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ ,

$R_2 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 8 \text{ k}\Omega$  et  $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ . Le courant dans la résistance  $R_3$  est de  $0,5 \text{ mA}$ . Quelle est la f.é.m. de la source ?



solution



On calcul la résistance équivalente du circuit

## Chapitre IV

---

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$R' = \frac{8}{3} \text{ k}\Omega$$

$$R' + R_1 = 5 + \frac{8}{3} = \frac{23}{3} \text{ k}\Omega$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1 + R'} + \frac{1}{R_4} = \frac{3}{23} + \frac{1}{1} = \frac{26}{23}$$

$$R_{eq} = \frac{26}{23} \text{ k}\Omega$$

Le courant  $I$  que débite la source  $E$  est la somme sur courant qui traverse la résistance  $R_2$  et le courant qui traverse  $R_3$ . Comme ces deux résistances sont en parallèle alors la ddp à la borne de  $R_2$  est égale la ddp à la borne de  $R_3$

$$R_2 \cdot I_2 = R_3 \cdot I_3 \Rightarrow I_2 = \frac{R_3}{R_2} I_3 = \frac{8}{4} 0.5 = 1 \text{ mA}$$

$$I = I_2 + I_3 = 0.5 + 1 = 1.5 \text{ mA}$$

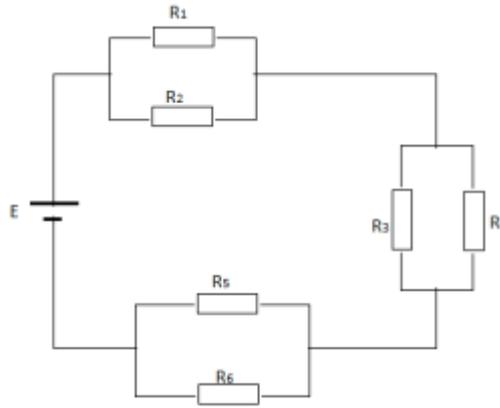
Comme

$$E = V = R_{eq} \cdot I = \frac{26}{23} 10^3 \times 1.5 \cdot 10^{-3} = 1.695 \text{ V}$$

### Exercice 4

Dans le circuit suivant ; les résistances ont les valeurs suivantes :  $R_1=25 \Omega$   $R_2=45 \Omega$   $R_3=150 \Omega$   $R_4=78\Omega$   $R_5=18 \Omega$   $R_6= 55 \Omega$  , le courant traversant la résistance  $R_1$  est égale à 0,98 A.

## Chapitre IV



Calculer la résistance équivalente du circuit, déduire la f.e.m E de la batterie.

Solution

Les résistances R1 et R2 sont en parallèle en les combinant on trouve une résistance

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} = \frac{25 + 45}{25 \cdot 45}$$

$$R' = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} = 16.1 \Omega$$

Les résistances R3 et R4 sont en parallèle en les combinant on trouve une résistance R''

$$R'' = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 51.3 \Omega$$

Les résistances R5 et R6 sont en parallèle en les combinant on trouve une résistance R'''

$$R''' = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = 13.6 \Omega$$

La résistance équivalente du circuit est la combinaison des trois résistances calculées et qui sont reliées en série ;

Les résistances R3 et R4 sont en parallèle en les combinant on trouve une résistance R''

$$R_{eq} = R' + R'' + R''' = 16.1 + 51.3 + 13.6 = 81 \Omega$$

## Chapitre IV

Le courant  $I$  que débite la source  $E$  est la somme du courant qui traverse la résistance  $R_2$  et le courant qui traverse  $R_3$ . Comme ces deux résistances sont en parallèle alors la ddp à la borne de  $R_2$  est égale la ddp à la borne de  $R_3$

$$R_2 \cdot I_2 = R_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 = \frac{25}{45} 0.98 = 0.54 \text{ A}$$

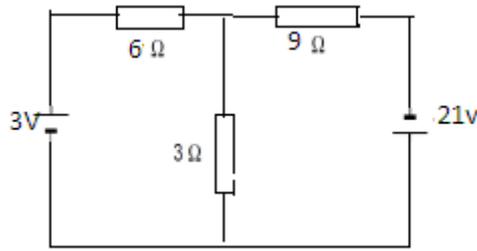
$$I = I_2 + I_1 = 0.54 + 0.98 = 1.52 \text{ A}$$

Comme

$$E = V = R_{eq} \cdot I = 81 \times 1.52 = 123.1 \text{ V}$$

### Exercice 5

Soit le circuit électrique suivant



- représenter les courants de chaque branche dans le circuit
- Calculer l'intensité du courant électrique dans chaque branche

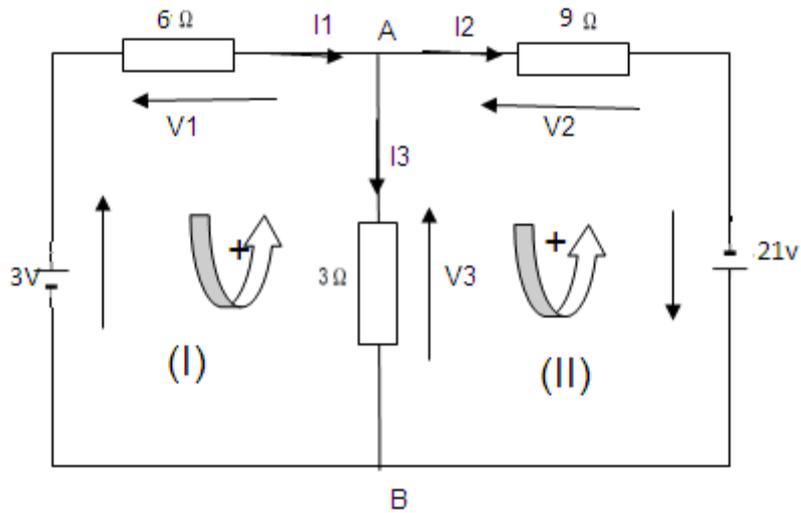
### Solution

Le choix du sens du courant est arbitraire, c'est-à-dire on peut le choisir dans n'importe quel sens, après calcul si le courant a une valeur positive on conclut qu'on a choisi le bon sens dans le cas où on aura une valeur négative on change le sens et on garde la valeur positive.

Après avoir choisi le sens du courant, la différence du potentiel (tension) à la borne du dipôle passif (Résistance) sera dans le sens inverse du courant. Le sens de la tension entre le dipôle actif (générateur du courant) sera du pôle négative vers le pôle positive.

Supposant que les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  traverse les résistances  $6\Omega$ ,  $9\Omega$  et  $3\Omega$  respectivement

## Chapitre IV



$$I_1 = I_2 + I_3$$

Le courant  $I_1$  arrive au nœud A par contre les courant  $I_2$  et  $I_3$  partent du nœud A

Donc  $I_1 = I_2 + I_3$  (1)

En appliquant la loi des mailles :

Pour la maille I  $V_1 - 3 + V_3 = 0$

Maille II  $V_2 - V_3 - 21 = 0$

On remplace les tension par leurs expressions

$$6I_1 - 3 + 3I_3 = 0$$

$$6I_1 + 3I_3 = 3 \quad (2)$$

$$9I_2 - 21 - 3I_3 = 0$$

$$9I_2 - 3I_3 = 21 \quad (3)$$

Si on remplace la valeur de  $I_1$  de l'équation (1) dans l'équation (2) on aura

$$6I_2 + (3 + 6)I_3 = 3$$

$$\Rightarrow 6I_2 + 9I_3 = 3 \quad (4)$$

On multiplie l'équation (3) par 3 et on l'additionne avec l'équation (4) on aura :

$$27I_2 - 9I_3 + 6I_2 + 9I_3 = 63 + 3$$

## Chapitre IV

$$\Rightarrow 33I_2 = 66 \Rightarrow I_2 = \frac{66}{33} = 2 \text{ A}$$

On remplace la valeur de  $I_2$  dans l'équation (3) on peut déterminer la valeur du courant  $I_3$

$$18 - 3I_3 = 21 \Rightarrow I_3 = -\frac{21 - 18}{3} = -1 \text{ A}$$

Avec l'équation (1) on détermine le courant  $I_1$

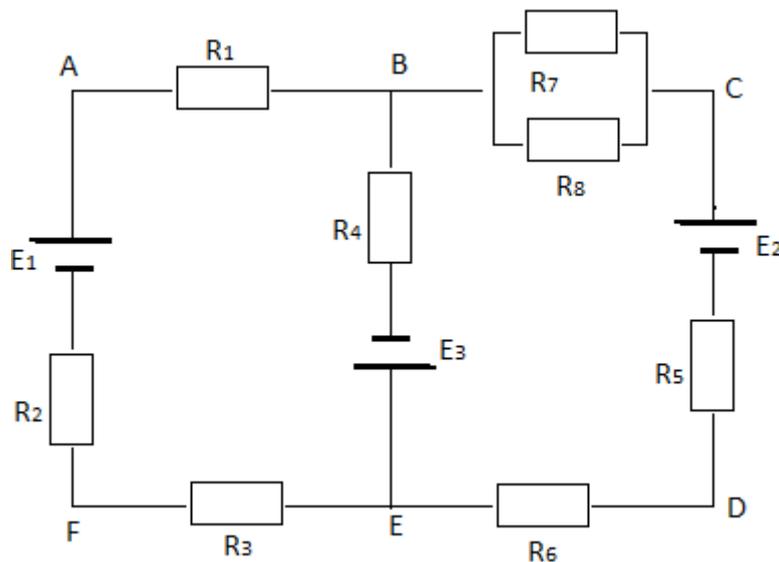
$$I_1 = 2 - 1 = 1 \text{ A}$$

On remarque que le courant  $I_3$  qui vaut 1 A et le courant  $I_2$  qui vaut 2 A sont positives donc le choix de leur sens dans le circuit est adéquat, par contre le courant  $I_3$  est négatif donc la valeur de  $I_1$  vaut 1A et on change son sens dans le circuit.

### Exercice 6

Soit le circuit suivant, tel que les résistances ont les valeurs suivant  $R_1= 1\Omega$  ,  $R_2= 1\Omega$ ,  $R_3=4\Omega$ ,  $R_4= 3\Omega$ ,  $R_5= 1\Omega$ ,  $R_6= 2\Omega$ ,  $R_7= 12\Omega$  et  $R_8= 4\Omega$  . Les f.e.m sont  $E_1= E_2= 3\text{V}$   $E_3= 6\text{V}$ .

Calculer les courants traversant chaque résistance.



### Solution

Ce circuit est formé par 8 résistances et trois générateurs,  $R_1$   $R_2$  et  $R_3$  sont en série le même courant  $I_1$  qui les traverse on les regroupe dans une résistance équivalente  $R'$  .  $R_7$ ,  $R_8$  sont en parallèle, leur résistance équivalente est en série avec  $R_5$  et  $R_6$  qui sont traversées par un

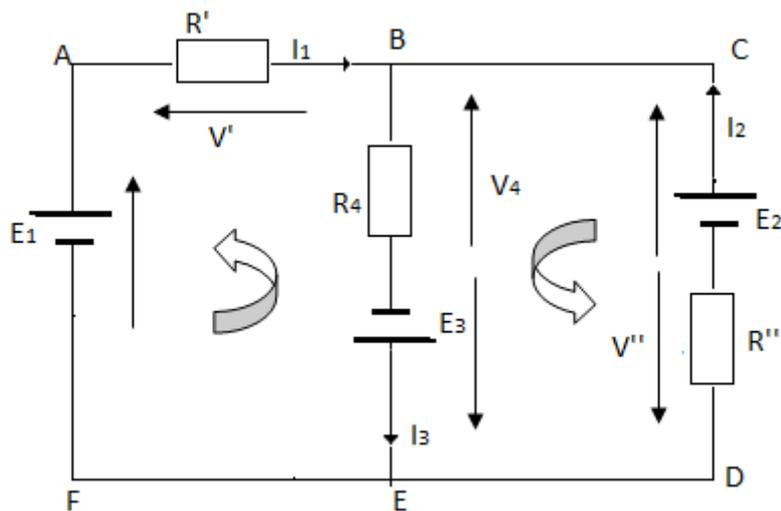
## Chapitre IV

courant  $I_2$ . La résistance  $R_4$  est traversée par le courant  $I_3$ . Le circuit se réduit qu'à trois résistances.

$$R' = R_1 + R_2 + R_3 = 6\Omega$$

$$R_{78} = \frac{R_7 \cdot R_8}{R_7 + R_8} = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 3\Omega$$

$$R'' = R_5 + R_6 + R_{78} = 6\Omega$$



En appliquant les lois de Kirchhoff

Loi des nœuds  $I_1 + I_2 = I_3$

Loi des mailles :

Maille ABEFA  $-E_3 + V_4 + V' - E_1 = 0 \Rightarrow -E_3 + R_4 I_3 + R' I_1 - E_1 = 0$

Maille BCDEB  $E_2 - V_4 - V'' + E_3 = 0 \Rightarrow E_2 - R_4 I_3 - R'' I_2 + E_3 = 0$

Maille ABCDEFA  $E_2 - V'' + V' - E_1 = 0 \Rightarrow E_2 - R'' I_2 + R' I_1 - E_1 = 0$

$$R_4 I_3 + R' I_1 = E_3 + E_1 \Rightarrow 3I_3 + 6I_1 = 6 \quad (1)$$

$$3I_3 + 6I_2 = 6 \quad (2)$$

$$-6I_1 + 6I_2 = 0 \quad (3)$$

## Chapitre IV

De l'équation 3 on déduit

$$I_1 = I_2$$

On remplace le courant  $I_3$  dans l'équation (2) on aura

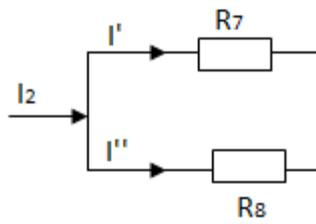
$$3I_1 + 9I_2 = 6 \Rightarrow 12I_1 = 6 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} A$$

$$I_3 = 1 A$$

$I_1$  traverse les résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$

$I_3$  traverse la résistance  $R_4$

$I_2$  traverse les résistances  $R_5$ ,  $R_6$  et  $R_7$



$$R_7 \cdot I' = R_8 \cdot I'' = R_7 \cdot I_2 \Rightarrow I' = \frac{R_8 \cdot I_2}{R_7} = \frac{3 \times 0,5}{4} = 0,375 A$$

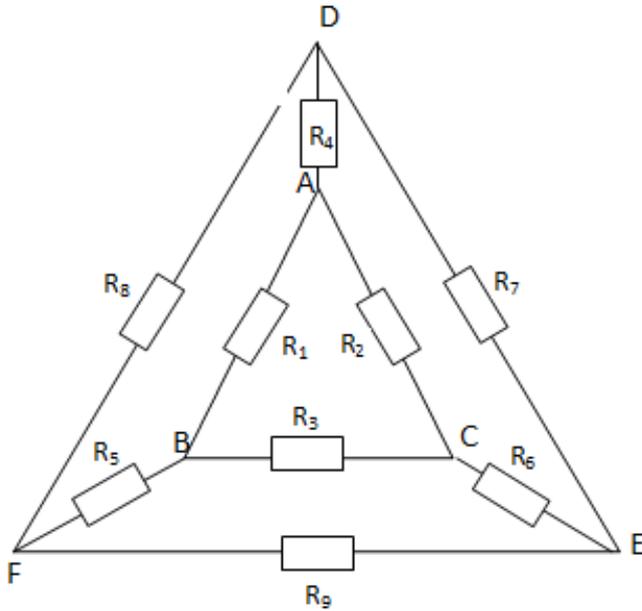
$$I'' = \frac{R_7 \cdot I_2}{R_8} = \frac{3 \times 0,5}{12} = 0,125 A$$

### Exercice 7

Dans le circuit suivant les résistances  $R_1 = 3 \Omega$   $R_2 = 5 \Omega$   $R_3 = 2 \Omega$   $R_4 = 6,5 \Omega$   $R_5 = 9,4 \Omega$   
 $R_6 = 9 \Omega$   $R_7 = 30 \Omega$   $R_8 = 30 \Omega$   $R_9 = 30 \Omega$ .

Calculez la résistance entre les paires de bornes DE, DF et EF.

Si on met une pile de f.e.m  $E=10V$  entre les points E et F. calculer le courant que débite la pile dans le circuit. Est-ce qu'on trouve le même courant si on change les bornes ?



### Solution

Afin de trouver les résistances souhaitées, il faut simplifier le Circuit.

Commençons par la transformation du triangle le plus interne avec des résistances de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ . en une formation d'étoile en utilisant les équations (4.18) (4.18)et (4.20) figure a.

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \times 5}{3 + 5 + 2} = \frac{15}{10} = 1.5\Omega$$

$$r_2 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \times 5}{3 + 5 + 2} = \frac{10}{10} = 1\Omega$$

$$r_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \times 3}{3 + 5 + 2} = \frac{6}{10} = 0.6\Omega$$

La résistance de  $r_1$  en série avec  $R_4$  donne une résistance  $r_4 = 8\Omega$ ,  $r_2$  en série avec une résistance  $R_5$  fait la résistance  $r_5 = 10\Omega$  et la résistance  $r_3$  en série avec la résistance de  $R_6$  donne une résistance de  $r_6 = 10$  figure b .

L'étoile des résistances  $r_4$ ,  $r_5$  et  $r_6$  peut à nouveau être convertie en un triangle équivalent, le calcul des résistances se fait avec les équations (4.21) (4.22)et (4.23) figure c

$$r_7 = \frac{r_4 r_5 + r_4 r_6 + r_5 r_6}{r_6} = \frac{8 \times 10 + 8 \times 10 + 10 \times 10}{10} = 26\Omega$$

$$r_8 = \frac{r_4 r_5 + r_4 r_6 + r_5 r_6}{r_5} = \frac{8 \times 10 + 8 \times 10 + 10 \times 10}{10} = 26\Omega$$

$$r_9 = \frac{r_4 r_5 + r_4 r_6 + r_5 r_6}{r_4} = \frac{8 \times 10 + 8 \times 10 + 10 \times 10}{8} = 32.5 \Omega$$

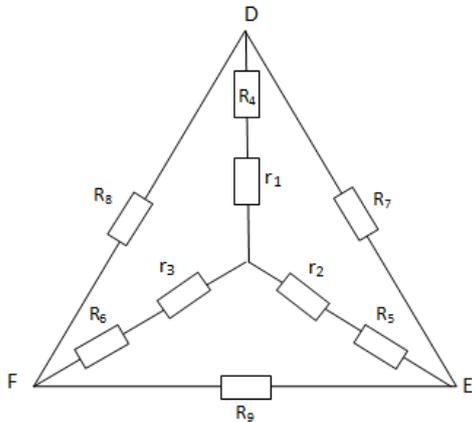


figure a

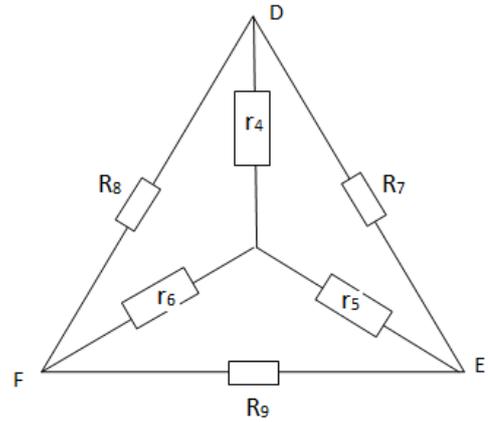


figure b

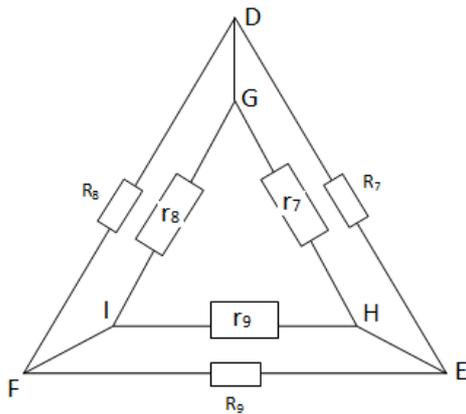


figure c

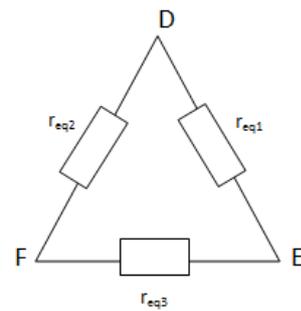


figure d

la branche DE est formée par la résistance  $R_7$  qui en parallèle avec la résistance  $r_7$

$$\frac{1}{r_{eq1}} = \frac{1}{r_7} + \frac{1}{R_7} = \frac{r_7 + R_7}{r_7 R_7} = \frac{26 + 30}{26 \times 30}$$

$$r_{eq1} = \frac{r_7 R_7}{r_7 + R_7} = 13.92 \Omega$$

la branche DF est formée par la résistance  $R_8$  qui en parallèle avec la résistance  $r_8$

## Chapitre IV

---

$$\frac{1}{r_{eq2}} = \frac{1}{r_8} + \frac{1}{R_8} = \frac{r_8 + R_8}{r_8 R_8} = \frac{26 + 30}{26 \times 30}$$

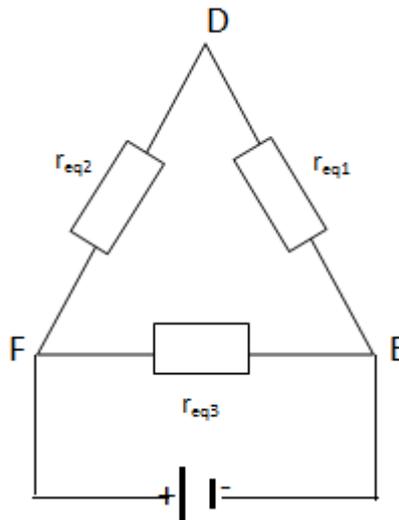
$$r_{eq2} = \frac{r_8 R_8}{r_8 + R_8} = 13.92 \Omega$$

la branche EF est formée par la résistance  $R_9$  qui en parallèle avec la résistance  $r_9$

$$\frac{1}{r_{eq3}} = \frac{1}{r_9} + \frac{1}{R_9} = \frac{r_9 + R_9}{r_9 R_9} = \frac{32.5 + 30}{32.5 \times 30}$$

$$r_{eq3} = \frac{r_9 R_9}{r_9 + R_9} = 15.6 \Omega$$

2 si on branche une pile aux points E et F le circuit se réduit comme suite :



On aura un circuit formé par une pile et trois résistances,  $r_{eq1}$  et  $r_{eq2}$  en série qui sont branchées en parallèle avec la résistance  $r_{eq3}$ . Ils auront une résistance équivalente  $R_{eq}$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{r_{eq3}} + \frac{1}{r_{eq1} + r_{eq2}}$$

$$R_{eq} = \frac{r_{eq3}(r_{eq1} + r_{eq2})}{r_{eq3} + r_{eq1} + r_{eq2}} = \frac{15.6(13.92 + 13.92)}{15.6 + 13.92 + 13.92} = 10 \Omega$$

## Chapitre IV

---

Le courant électrique que débite la pile dans le circuit est donnée par

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{10}{10} = 1A$$

Si on branche la pile entre les autres points le courant change puisque la résistance équivalente change.