



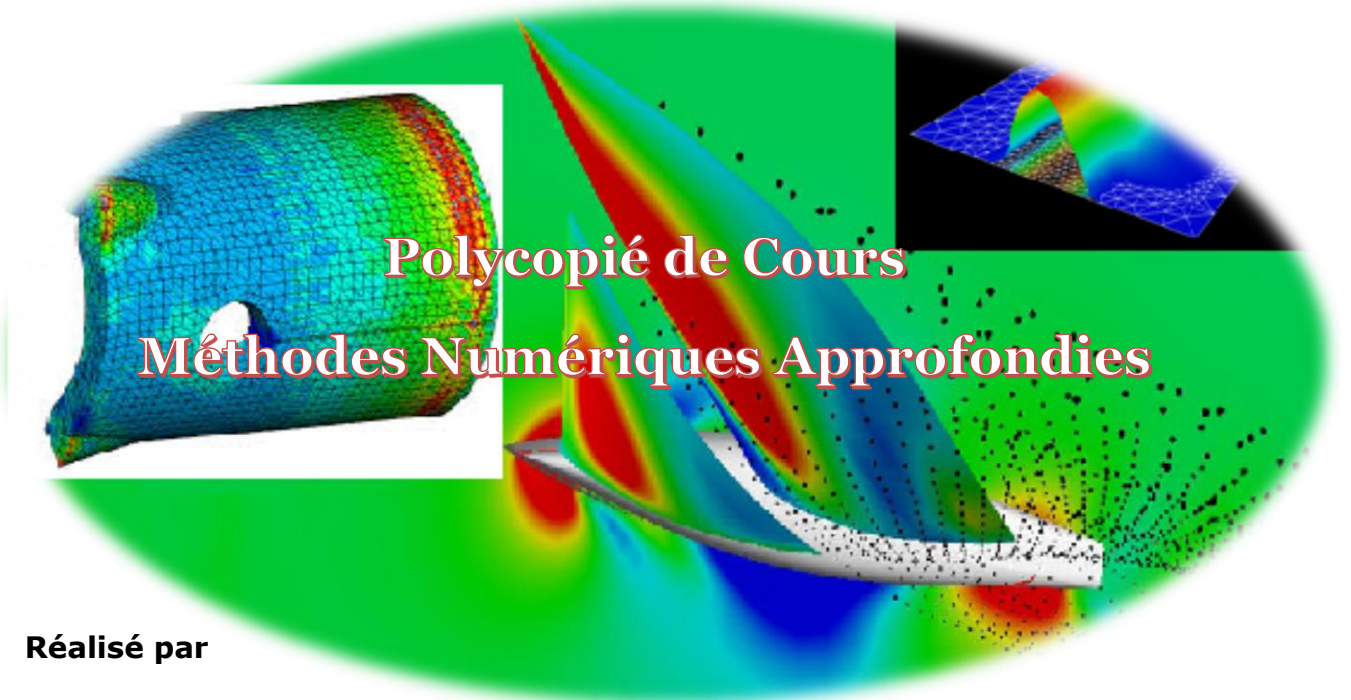
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté de Génie Mécanique

Département de Génie Mécanique



Réalisé par

Phd. BENDAOU D Nadia

Année Universitaire 2020-2021

Avant-propos

Un grand nombre de problèmes d'ingénierie se réduisent à des équations aux dérivées partielles qui, à cause de leur complexité, doivent être remplacées par des approximations. La théorie concernant les équations aux dérivées partielles ne constitue pas un ensemble aussi complet que celle des équations aux dérivées ordinaires. D'autre part, dans le cas où les solutions analytiques existent, ces solutions sont triviales ou tellement simples qu'elles ne sont pas utiles en pratique.

Au cours de ces dernières années, les méthodes de travail de l'ingénieur ont été modifiées par les progrès de l'informatique et par des outils d'analyse numérique parus sur le marché du logiciel.

Le but de ce polycopié de cours est de fournir une description systématique et détaillée des méthodes d'analyses numériques tel que la méthode de différences finies et la méthode des volumes finis appliquée aux problèmes de transfert thermique en 1D et 2D cas stationnaire et instationnaire. Comme prérequis, je suppose que le lecteur soit déjà familiarisé avec les méthodes numériques. La méthode des volumes finis est l'une des plus populaires techniques d'approximation pour les Équations aux Dérivées Partielles (EDP) dans les sciences de l'ingénieur.

Chapitre 1

Equation différentielle du premier ordre

Chapitre 1 Equation différentielle du premier ordre.....	3
1.1 Généralité sur l'analyse numérique.....	4
1.2 Equations différentielles.....	4
1.3 Résolution numérique des équations différentielles du premier ordre...5	
1.3.1 Méthode de développement de série de Taylor.....	5
1.3.2 Méthode d'Euler.....	8
1.3.3 Méthode de Rung-Kutta.....	11
1.3.4 Méthode d'Adams-Bashforth à pas multiple).....	13
1.3.5 Méthode de prédiction-correction.....	14
1.4 Résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires.....	17

1.1 Généralité sur l'analyse numérique

L'analyse numérique est une discipline à l'interface des mathématiques et de l'informatique. Elle s'intéresse tant aux fondements qu'à la mise en pratique des méthodes permettant de résoudre, par des calculs purement numériques, des problèmes d'analyse mathématique.

Plus formellement, l'analyse numérique est l'étude des algorithmes permettant de résoudre numériquement par discrétisation les problèmes de *mathématiques continues* (distinguées des mathématiques discrètes). Cela signifie qu'elle s'occupe principalement de répondre de façon numérique à des questions à variable réelle ou complexe comme l'algèbre linéaire numérique sur les champs réels ou complexes, la recherche de solution numérique d'équations différentielles et d'autres problèmes liés survenant dans les sciences physiques et l'ingénierie. Branche des mathématiques appliquées, son développement est étroitement lié à celui des outils informatiques.

1.2 Equations différentielles

En mathématiques, une équation différentielle est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. C'est un cas particulier d'équation fonctionnelle.

On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

- les équations différentielles ordinaires (EDO) où la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable ;
- les équations différentielles partielles, plutôt appelées équations aux dérivées partielles (EDP), où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Sans plus de précision, le terme *équation différentielle* fait le plus souvent référence aux équations différentielles ordinaires.

On rencontre également d'autres types d'équations différentielles (liste non exhaustive :

- les équations intégro-différentielles qui font intervenir les dérivées de fonction(s) et ses/leurs intégrale(s);
- les équations différentielles holomorphes (EDH) où la ou les fonctions inconnues dépendent d'une seule variable complexe;
- les équations différentielles stochastiques (EDS) où un ou plusieurs termes de l'équation différentielle sont des processus stochastiques;
- les équations différentielles abstraites (en) (EDA) où les fonctions inconnues et leurs dérivées prennent leurs valeurs dans des espaces fonctionnels abstraits (espace de Hilbert, espace de Banach, etc.);
- les équations différentielles à retard (en) (EDR) dans lesquelles la dérivée de la fonction inconnue à un moment donné est exprimée selon les valeurs de la fonction aux temps précédents.

1.3 Résolution numérique des équations différentielles du premier ordre

1.3.1 Méthode de développement de série de Taylor [1, 2, 3]

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y(x_0) = y_0$$

Le développement de Taylor au voisinage de $x_i = x_0 + i h$

h c'est le pas

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!} \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x_i, y_i) + \frac{h^4}{4!} \cdot f^{(4)}(x_i, y_i) + O(h^5)$$

Exemple :

Appliquer la méthode de développement de Taylor avec un pas $h = 0,1$ et pour un ordre de deux l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = f(x, y(x)) = -x y^2(x)$$

$$y(x_0) = y_0 = 1 \quad x \in [0, 0.5]$$

$$y(x) = \frac{2}{2 + x^2}$$

Avec le pas $h = 0,1$, nous allons calculer les valeurs approchées de $y(x)$ au voisinage de :

$$x = 0, \quad x = 0.1, \quad x = 0.2, \quad x = 0.3, \quad x = 0.4 \quad \text{et} \quad x = 0.5$$

Pour le développement de Taylor d'ordre de deux est de la forme suivante :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!} \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1} \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_i, y_i)$$

On a

$$y'(x) = -x y^2(x)$$

$$y''(x) = (-x)' \cdot y^2(x) + (y^2(x))' \cdot (-x)$$

$$y''(x) = -y^2(x) - x \cdot 2 y(x) \cdot y'(x)$$

$$y''(x) = -y^2(x) - x \cdot 2 y(x) \cdot (-x \cdot y^2(x))$$

$$y''(x) = -y^2(x) + 2 x^2 \cdot y^3(x)$$

La formule de Taylor devient :

$$y_{i+1} = y_i + h (-x_i y^2(x_i) + \frac{h^2}{2} (-y^2(x_i) + 2 x_i^2 \cdot y^3(x_i)))$$

Pour $i = 0$

$$y_1 = y_0 + h (-x_0 y^2(x_0) + \frac{h^2}{2} (-y^2(x_0) + 2 x_0^2 \cdot y^3(x_0)))$$

$$x_0 = 0 \quad y(x_0) = 1$$

$$y_1 = 0,995$$

Pour $i = 1$

$$y_2 = y_1 + h (-x_1 y^2(x_1) + \frac{h^2}{2} (-y^2(x_1) + 2 x_1^2 \cdot y^3(x_1)))$$

$$x_1 = 0,1$$

$$y_2 = 0,98$$

Pour $i = 2$

$$y_3 = y_2 + h (-x_2 y^2(x_2) + \frac{h^2}{2} (-y^2(x_2) + 2 x_2^2 \cdot y^3(x_2)))$$

$$x_2 = 0,2$$

$$y_3 = 0,9578$$

.

.

.

Jusqu'à la fin d'itération

1.3.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une procédure qui permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du premier ordre avec une condition initiale.

On cherche donc une solution approchée d'une équation ordinaire se mettant sous la forme suivante :

$$y'(x) = f(x_i, y_i)$$

$$y(0) = y_0 = 1 \quad x \in [0, T]$$

$f(x_i, y_i)$ est une fonction suffisamment régulière

On choisit l'intervalle de longueur T sur lequel on veut approcher $y(x_i)$ et un nombre de pas $n > 1$.

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en $n \geq 1$ sous un intervalle de longueur $h = T/n$ et on approche la solution $y(x_1)$ de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0, T] = [0, n \cdot h]$.

Solution d'Euler explicite :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_i+h} f(x_i, y_i) dt$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \quad \text{avec } i \text{ varie de } 0 \text{ à } T \text{ avec un pas de } h$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$y_0 = y(0)$$

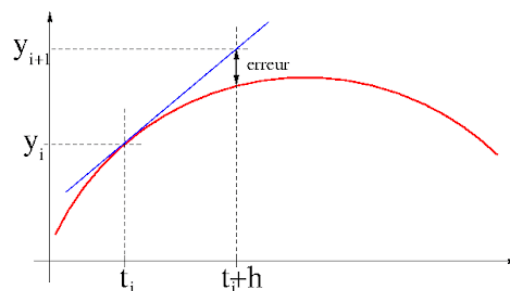


Figure 1.1 Schéma explicite d'Euler

Solution d'Euler implicite :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_{i+1})$$

$$y_0 = y(0)$$

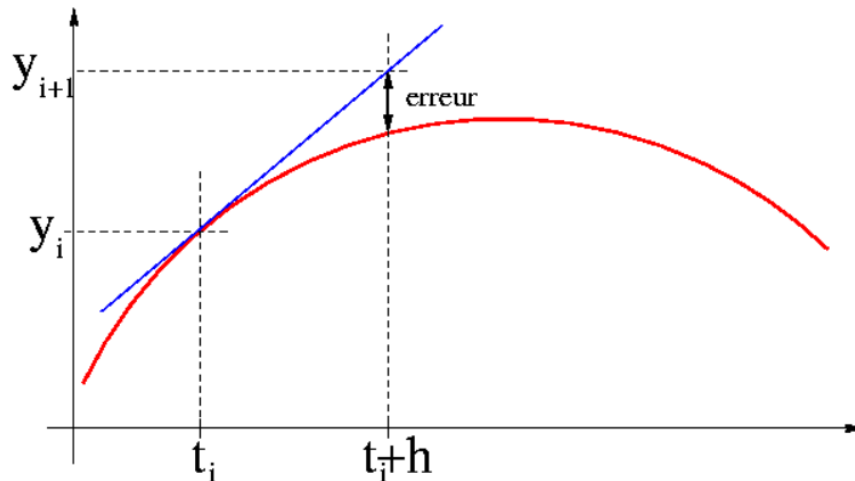


Figure 1.2 Schéma implicite d'Euler

Application

Approximer l'équation différentielle ci-dessous par la méthode d'Euler sur un intervalle de $[0, 1]$ avec un pas de $h = 0,1$ (la précision 10^{-3})

$$y' = f(x_i, y_i) = x^2 + y$$

$$y(0) = 1$$

Solution d'Euler explicite

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Pour $i = 0$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot (x_0^2 + y_0)$$

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot (0^2 + 1)$$

$$y_1 = 1,1$$

Pour $i = 1$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot (x_1^2 + y_1)$$

$$y_2 = 1,1 + 0,1 \cdot (0,1^2 + 1,1)$$

$$y_2 = 1,211$$

Pour $i = 2$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot (x_2^2 + y_2)$$

$$y_3 = 1,211 + 0,1 \cdot (0,2^2 + 1,211)$$

$$y_3 = 1,335$$

Pour $i = 3$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3)$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot (x_3^2 + y_3)$$

$$y_4 = 1,335 + 0,1 \cdot (0,3^2 + 1,335)$$

$$y_4 = 1,4775$$

Pour $i = 4$

$$y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4)$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot (x_4^2 + y_4)$$

$$y_5 = 1,4775 + 0,1 \cdot (0,4^2 + 1,4775)$$

$$y_5 = 1,64$$

.

.

.

Jusqu'à la fin d'itération

On résume les résultats dans le tableau ci-dessous

10

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
	1	1,1	1,211	1,335	1,4775	1,64	1,829	2,0479	2,2767	2,568	2,905

1.3.3 Méthode de Rung-Kutta

a) Rung-Kutta d'ordre 2

La solution d'une équation différentielle est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left(\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)$$

Avec :

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + h, y_i + h \cdot K_1)$$

$$y_0 = y(0)$$

b) Rung-Kutta d'ordre 4

La solution d'une équation différentielle est donnée par

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left(\frac{1}{6} K_1 + \frac{1}{3} K_2 + \frac{1}{3} K_3 + \frac{1}{6} K_4 \right)$$

Avec :

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot K_2\right)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot K_3)$$

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode de Rung-Kutta d'ordre 2

11

$$y' = f(x_i, y_i) = x^2 + y$$

$$y(0) = 1 \quad x \in [0, 1] \quad h = 0,1$$

$$\text{Pour } i = 0 \quad x_0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + 0,1 \cdot \left(\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)$$

Avec :

$$K_1 = f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0$$

$$K_1 = 0^2 + 1 = 1$$

$$K_2 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot K_1)$$

$$K_2 = f(0 + 0,1, 0 + 0,1 \cdot 1) = f(0,1, 1,1)$$

$$K_2 = 0,1^2 + 1,1 = 1,11$$

$$y_1 = y_0 + 0,1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,11 \right)$$

$$y_1 = 1,1055$$

$$\text{Pour } i = 1 \quad x_1 = 0,1$$

$$y_2 = y_1 + 0,1 \cdot \left(\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)$$

Avec :

$$K_1 = f(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1$$

$$K_1 = 0,1^2 + 1,1055 = 1,1155$$

$$K_2 = f(x_1 + h, y_1 + h \cdot K_1)$$

$$K_2 = f(0,1 + 0,1, 1,1055 + 0,1 \cdot 1,1155) = f(0,2, 1,12705)$$

$$K_2 = 0,2^2 + 1,12705 = 1,25705$$

$$y_2 = 1,1055 + 0,1 \cdot \left(\frac{1}{2} 1,1155 + \frac{1}{2} 1,25705 \right)$$

$$y_2 = 1,224$$

.

.

.

Jusqu'à la fin d'itération

On résume les résultats dans le tableau ci-dessous

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X _i	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Y _i	Y ₀	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆	Y ₇	Y ₈	Y ₉	Y ₁₀
	1	1,1055	1,224	1,339	1,515	1,695	1,905	2,1495	2,4	2,765	3,150

1.3.4 Méthode a pas multiples (Méthode d'Adams-Bashforth):

$$f_n = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad n \geq 0$$

- **Solution d'Adams-Baschforth d'ordre 2 à 2 pas**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [3f_n - f_{n-1}]$$

Solution d'Adams-Baschforth d'ordre 3 à 3 pas

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}] \quad n \geq 2$$

- **Solution d'Adams-Baschforth d'ordre 4 à 4 pas**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] \quad n \geq 3$$

Erreur

$$e_n = y_{\text{exact}}(x_n) - (x_n) \quad \text{approchée}$$

1.3.5 Méthode de Euler modifiée (méthode de Euler-Cauchy)

Méthode de prédiction-correction

La modification apportée à la méthode d'Euler est similaire à celle utilisée pour calculer la dérivée d'une fonction, mais la problématique est ici inversée: on connaît la dérivée (donnée par la fonction f) et on cherche le point de la courbe correspondant. L'idée est donc, au lieu d'utiliser la dérivée au temps t_i pour trouver le point au temps t_i+h , d'utiliser la dérivée au point milieu $(t_i + h/2)$.

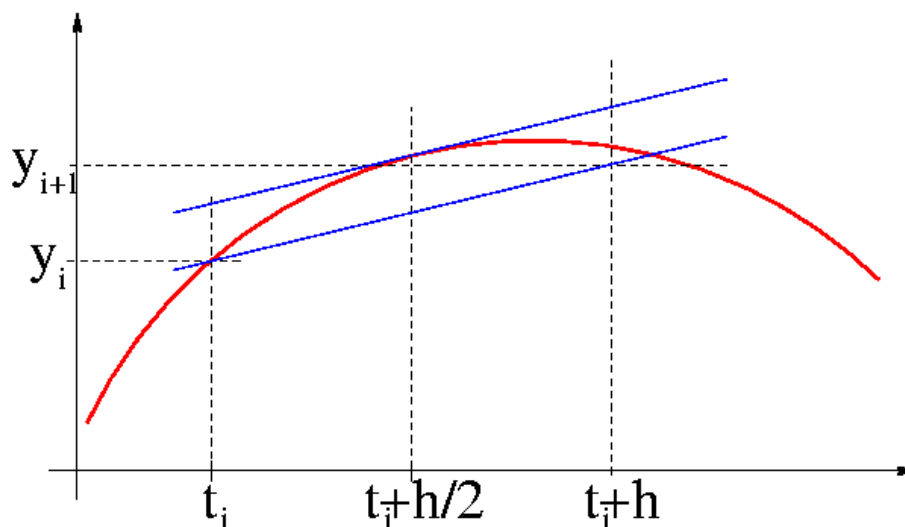


Figure 1.3 Schéma d'Euler modifié

La dérivée en ce point est estimée par:

$$y'(t_i + h/2) = \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} + O(h^2)$$

La méthode de prédiction-corrrection procède en deux étapes à chacune des itérations.

- **Prédiction** : on calcul la solution approchée par la méthode d'Euler explicite

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

- **Correction** : la solution est donnée par la relation suivante :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + f(x_n, y_n)]$$

Mesure de la précision

$$y_{exact} = y_{correction} - \frac{19}{270} (y_{correction} - y_{prédiction})$$

Erreur

$$Erreur = |y(x_n)_{exact} - y_n_{numérique}|$$

Exemple :

Approcher l'équation différentielle suivante par la méthode de prédiction-corrrection dans un intervalle $x \in [0, 0,6]$ avec un pas de 0,2.

$$y' = x^2 + y$$

$$y(0) = 1$$

$$\text{Pour } i = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1$$

Prédiction

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$\bar{y}_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$= 1 + 0,2(x_0^2 + y_0)$$

$$= 1 + 0,2(0^2 + 1)$$

$$\bar{y}_1 = 1,2$$

Correction

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_1, \bar{y}_1) + f(x_0, y_0)]$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0,2}{2} [(0,2^2 + 1,2) + (0^2 + 1)]$$

$$y_1 = 1,224$$

Pour i = 1 x₁ = 0,2 y₁ = 1,2

Prédiction

$$\bar{y}_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$= 1,2 + 0,2(x_1^2 + y_1)$$

$$= 1,2 + 0,2(0,2^2 + 1,2)$$

$$\bar{y}_2 = 1,448$$

Correction

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} [f(x_2, \bar{y}_2) + f(x_1, y_1)]$$

$$y_2 = 1,2 + \frac{0,2}{2} [(0,4^2 + 1,448) + (0,2^2 + 1,2)]$$

$$y_2 = 1,48$$

Pour i = 2 x₂ = 0,4 y₂ = 1,448

Prédiction

$$\bar{y}_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$$

$$= 1,2 + 0,2(x_2^2 + y_2)$$

$$= 1,448 + 0,2(0,4^2 + 1,448)$$

$$\bar{y}_3 = 1,7696$$

Correction

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2} [f(x_3, \bar{y}_3) + f(x_2, y_2)]$$

$$y_2 = 1,448 + \frac{0,2}{2} [(0,6^2 + 1,7696) + (0,4^2 + 1,448)]$$

$$y_2 = 1,9665$$

.

.

.

Jusqu'à la fin d'itération

1.4 Système d'équations différentielles

Dans le cas d'un système d'équations différentielles d'ordre quelconque, une manipulation similaire à la précédente (introduction de nouvelles variables) permet toujours de se ramener au cas d'un système (plus grand) d'équations.

1.4.1 Résolution par la méthode de prédiction -correction

* Prédiction

$$\bar{x}_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x(t_i), y(t_i))$$

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h \cdot g(t_i, y(t_i), x(t_i))$$

***Correction** : la solution est donnée par la relation suivante :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, \bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1})]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [g(t_i, y_i, x_i) + g(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \bar{x}_{i+1})]$$

Exemple :

Résoudre le système d'équation si dessous par la méthode d'Euler modifié

$$x' = x y + t$$

$$y' = t y + x$$

$$T \in [0, 0.5] \quad h = 0.5$$

$$x(0) = 1$$

$$y(0) = -1$$

Pour $i = 0 \quad t_0 = 0$

Prédiction

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_0 + h \cdot f(t_0, x(t_0), y(t_0)) \\ &= x_0 + h \cdot (x_0 \cdot y_0 + t_0) \\ &= 1 + 0.1 \cdot (1 \cdot -1 + 0) \\ \bar{x}_1 &= 0.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= y_0 + h \cdot g(t_0, y(t_0), x(0)) \\ &= y_0 + h \cdot (t_0 \cdot y_0 + x_0) \\ &= -1 + 0.1 \cdot (0 \cdot -1 + 1) \end{aligned}$$

$$\bar{y}_1 = -0.9$$

Correction

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, \bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \\ x_1 &= x_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0, y_0) + f(t_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1)] \\ &= x_0 + h \cdot (x_0 \cdot y_0 + t_0) + (\bar{x}_0 \cdot \bar{y}_0 + t_0) \\ &= 1 + \frac{0.1}{2} \cdot (1 \cdot -1 + 0) + (0.9 \cdot (-0.9) + 0.1) \end{aligned}$$

$$x_1 = 0.9145$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [g(t_i, y_i, x_i) + g(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \bar{x}_{i+1})]$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, y_0, x_0) + f(t_1, \bar{y}_1, \bar{x}_1)]$$

$$= x_0 + h \cdot (t_0 \cdot y_0 + x_0) + (t_1 \cdot \bar{y}_1 + x_1)$$

$$= -1 + \frac{0.1}{2} \cdot (0 \cdot -1 + 1) + (0.1 \cdot (-0.9) + 0.9145)$$

$$y_1 = -0.9088$$

•

•

•

Jusqu'à la fin d'itération

CHAPITRE 2 Méthode de différences finies

2.1 Définition	20
2.2 Dérivée numérique d'une fonction.....	21
2.2.1 Différences à droite.....	22
2.2.2 Différences à gauche.....	23
2.2.3 Différence centrée.....	24
2.3 Classification des équations aux dérivées partielles.....	25
2.4 Résolution des équations au dérivées partielles.....	25
2.5 Résolution d'un problème de conduction en 2D stationnaire.....	27

Chapitre 2 Méthode de différences finies [1]

2.1 Définition

* En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique de recherche de solutions approchées d'équation aux dérivées partielles (EDP), qui consiste à résoudre un système de relations (schémas numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

* Cette méthode est basée sur la technique du développement en série de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la fonction et ses dérivées en un point voisin en espace ou en temps.

* Pour obtenir une solution numérique, il faut tout d'abord définir un domaine numérique constitué par un ensemble de points discrets appelé grille de calcul.

* L'étape suivante consiste à approximer ou remplacer toutes les dérivées partielles par un schéma discret. L'EDP sera transformée en équation algébrique appliquée sur l'ensemble des nœuds de la grille, on obtient un système d'équation comportant autant d'équations que d'inconnues. Ce système sera résolu par la méthode approprié.

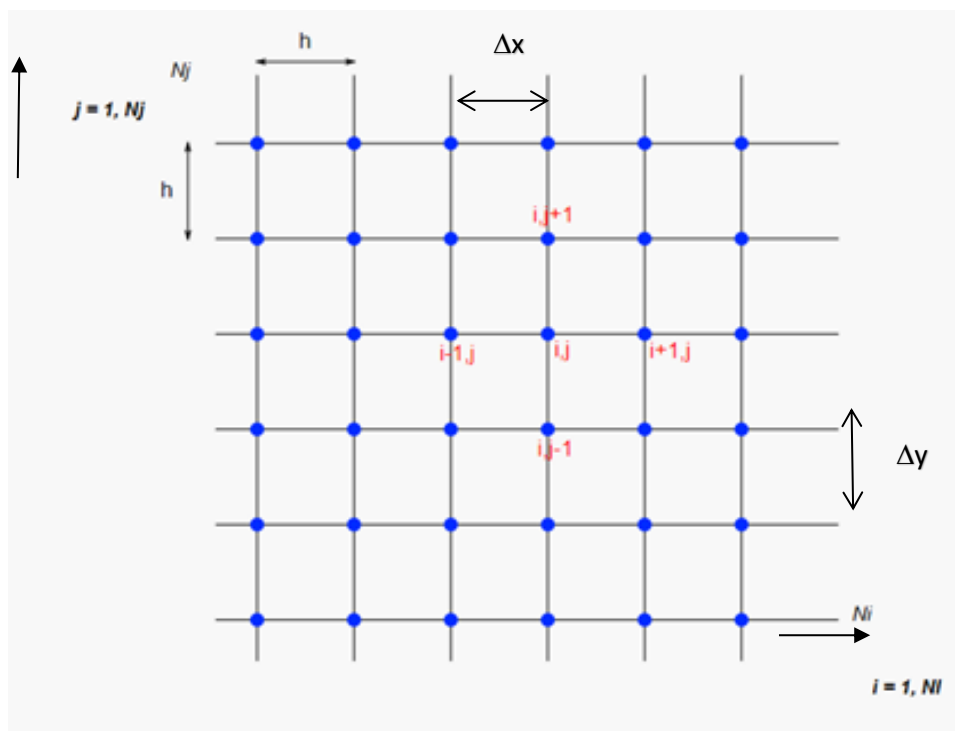


Figure 2.1 Grille de calcul 2D

2.2 Dérivée numérique d'une fonction

2.2.1 différences à droite

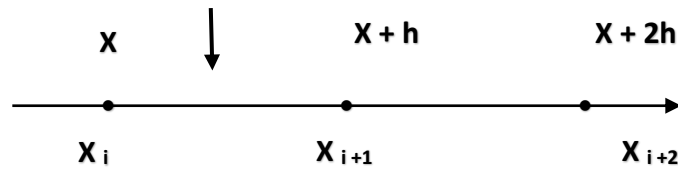


Figure 2.2 Schéma de différence à droite

a) Dérivées successives de $f(x)$ en x_i à l'ordre 1 en h

Calcul de $f' = f'(x)$

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x) - \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \dots$$

Pour chaque point

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x_i) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i)$$

Calcul de $f'' = f''(x)$

$$(-2) \left\{ f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \right\}$$

$$+ \left\{ f(x+2h) = f(x) + 2h f'(x) + 2h^2 f''(x) + 8 \frac{h^3}{6!} f'''(x) \right\}$$

$$= -2f(x+h) + f(x+2h) = -f(x) + h^2 f''(x) + h^3 f'''(x)$$

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} - h f'''(x) + \dots$$

b) Dérivées successives de $f(x)$ en x_i à l'ordre 2 en h

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots$$

On a

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

On remplace $f''(x)$ dans $f'(x)$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} \left[\frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h} - h f'''(x) - \dots \right] - \frac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{2f(x+h) - 2f(x) - f(x) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h} - \frac{4h^2}{3} f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} - \frac{h^2}{3} f'''(x)$$

2.2.2 Différence à gauche

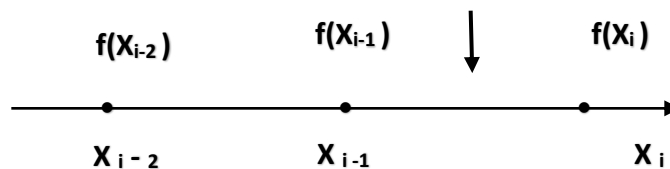


Figure 2.3 Schéma de différence à gauche

a) Dérivées successives de $f(x)$ en x_i à l'ordre 1 en h

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) + \dots$$

b) Dérivées successives de $f(x)$ en x_i à l'ordre 2 en h

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(x)$$

2.2.3 Différence centré

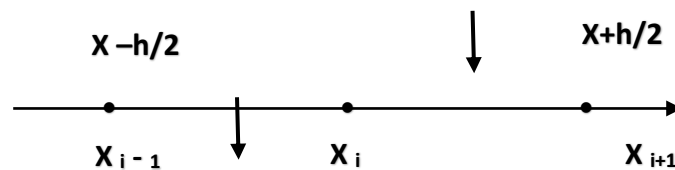


Figure 2.2 Schéma de différence centré

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \quad (2)$$

(1) – (2) on obtient le premier dérivé

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h}{3!} f'''(x) + \dots$$

(1) + (2) on obtient la deuxième dérivée

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

$$f''(x) = \frac{f(x-1) - 2f(x) + f(x+1)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

2.3 Classification des équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une relation faisant intervenir les variables indépendantes x_1, x_2, \dots , la fonction f est ses dérivées partielles.

Exemple :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + f + C = 0 \quad \text{ordre 3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - C = 0 \quad \text{ordre 2}$$

EDP est linéaire, si les coefficients dépendent que de x et y

Exemple :

$$a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial f}{\partial x} + a_5 \frac{\partial f}{\partial y} + a_6 f + a_7 = 0 \dots (1)$$

L'équation (1) est linéaire si a_i ne dépend que de x et y .

Classification des équations aux dérivées partielles linéaire du second ordre à deux variables

Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + d \frac{\partial f}{\partial x} + e \frac{\partial f}{\partial y} + gf + k = 0 \dots (2)$$

On calcul le déterminant :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

L'équation est dite de type :

- Elliptique si $\Delta < 0$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0$
- Parabolique si $\Delta = 0$ $\left(\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)$

- Hyperbolique si $\Delta > 0$ $\left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$

2.4 Résolution des équations aux dérivées partielles

❖ Un problème au dérivée partielle nécessite :

- Un domaine D
- Une EDP
- Des conditions aux limites
- Des conditions initiales

Pour obtenir une approximation numérique de la solution, nous devons approcher l'E.D.P en chaque nœud du domaine discrétisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et aux nœuds avoisinants.

❖ Discrétisation du domaine

L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud M de coordonnées

$$x_M = i \Delta x = ih$$

$$y_M = j \Delta y = jh$$

La fonction au point $M(x_M, y_M)$ prend la valeur $f(i \Delta x, j \Delta y) = f(ih, jh)$

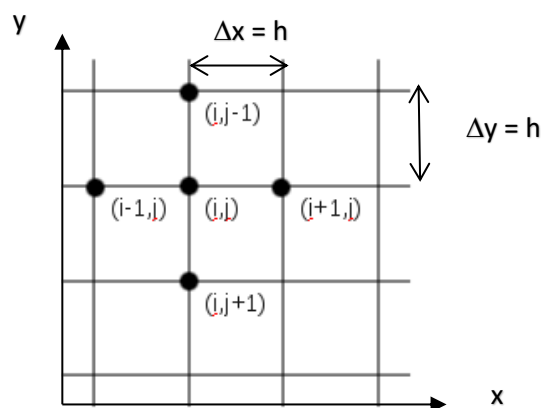


Figure 2.2 Maillage de la grille de calcul

2.5 Résolution d'un problème de conduction en 2D stationnaire (pas variation suivant le temps)

2.5.1 Equation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ stationnaire}$$

$$T = T(x, y)$$

$\Delta x \Delta y l$ volume de contrôle

Bilan de chaleur : $\sum \Delta x \Delta y l = 0$

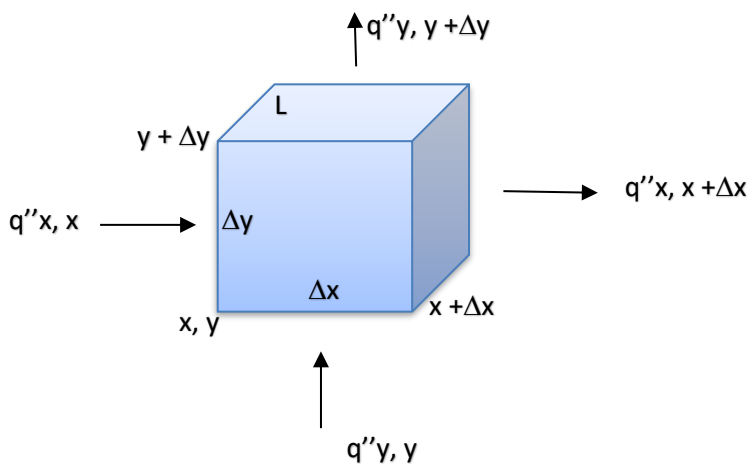


Figure 2.3 Bilan de chaleur

Débit entrant/x + débit sortant/x + Débit entrant/y + débit sortant/y = 0

$$L \cdot \Delta y \cdot q''_{x,x} - L \cdot \Delta y \cdot q''_{x, x+\Delta x} + L \cdot \Delta x \cdot q''_{y,y} - L \cdot \Delta x \cdot q''_{y, y+\Delta y} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q''_{x+\Delta x} - q''_x}{\Delta x} = \frac{\partial q''_x}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{q''_{y+\Delta y} - q''_y}{\Delta y} = \frac{\partial q''_y}{\partial y} = 0$$

Selon Fourier

$$\frac{\partial q''_x}{\partial x} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial q''_y}{\partial y} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad k \text{ constant}$$

Bilan de chaleur devient :

$$\frac{\partial q''_x}{\partial x} + \frac{\partial q''_y}{\partial y} = 0$$

On remplace q_x'' et q_y''

On obtient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{E.D type Elliptique}$$

2.5.2 Résolution de l'équation différentielle type Elliptique

2.5.2 .1-Discritisation du domaine

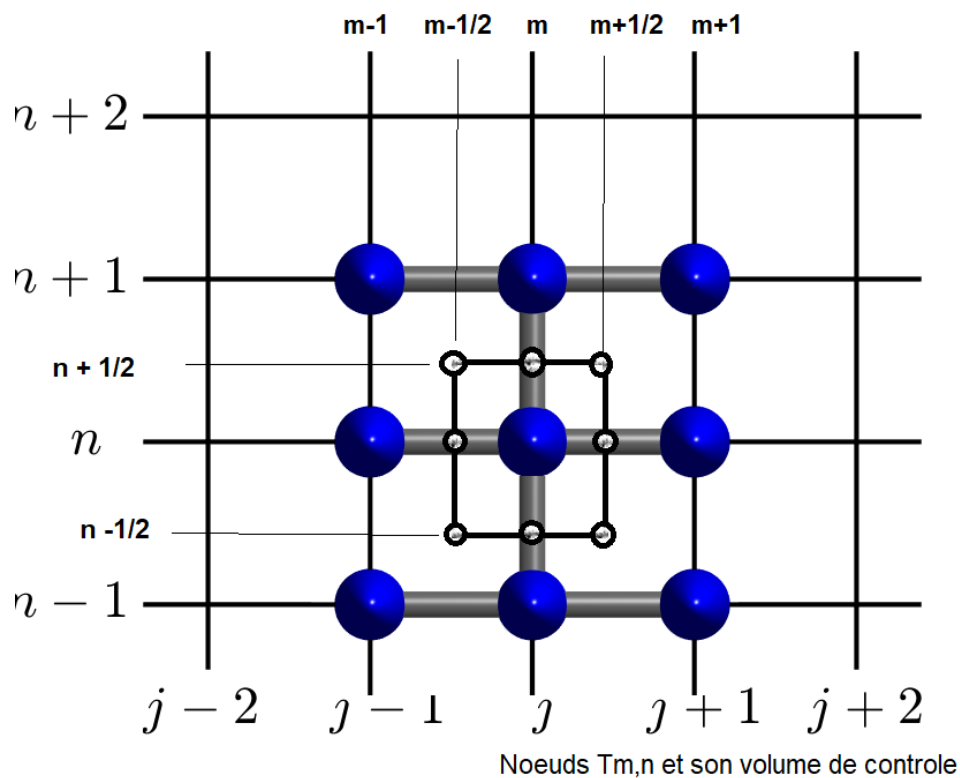


Figure 2.4 Discrétisation du domaine

2- On remplace la fonction continue $T(x,y)$ par l'ensemble de points discrets $T_{m, n}$

Autour de chaque noeud, on peut définir un volume de contrôle $\Delta x \cdot \Delta y \cdot L$

2.5.2 .2 Bilan de chaleur sur une maille autour du nœud $T_{m,n}$ intérieur

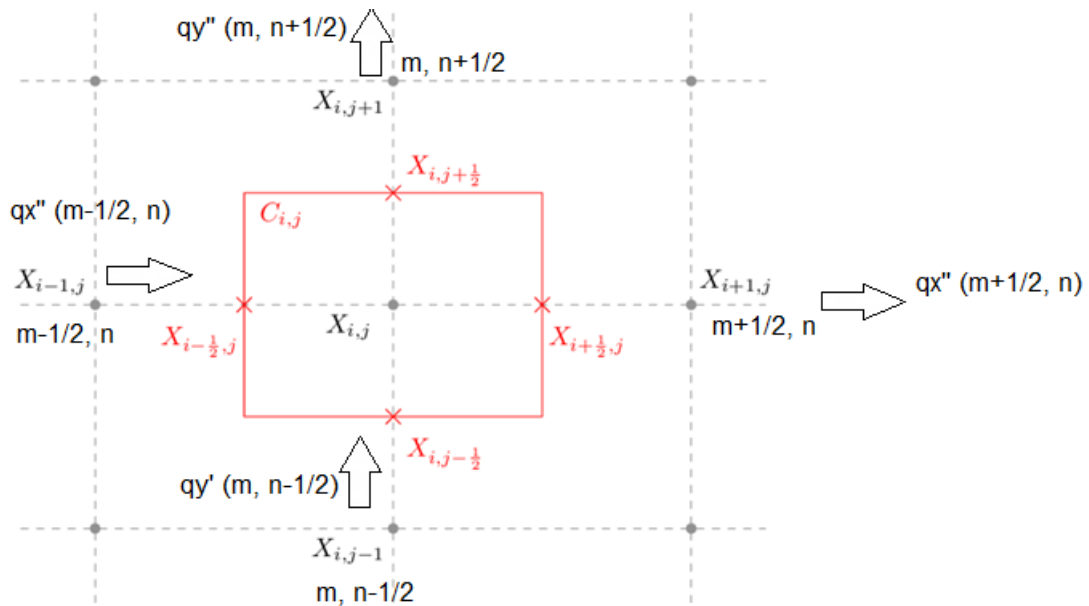


Figure 2.5 Bilan de chaleur autour du nœud i,j

$$L \cdot \Delta y \cdot q''_{x(m-\frac{1}{2}, n)} - L \cdot \Delta y \cdot q''_{x(m+\frac{1}{2}, n)} + L \cdot \Delta x \cdot q''_{y(m, n-\frac{1}{2})} - L \cdot \Delta x \cdot q''_{y(m, n+\frac{1}{2})} = 0$$

q'' donné par la loi de Fourier : $q'' = -k (dT/dx)$

$$\text{pente de } AB = \frac{y_B - y_A}{x_b - x_a} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Appliquer cette loi de pente entre les nœuds :

nœuds (m, n) et nœuds $(m-1, n)$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{dx}$$

$$q''_{x(m-\frac{1}{2}, n)} = (-k) \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$q''_{x(m+\frac{1}{2}, n)} = (-k) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q''_y(m, n - \frac{1}{2}) = (-k) \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$q''_y(m, n + \frac{1}{2}) = (-k) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

En remplace ces expression des flux dans le bilan de chaleur avec $\Delta x = \Delta y$

$$L \cdot \Delta y \cdot (-k) \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - L \cdot \Delta y \cdot (-k) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \\ + L \cdot \Delta x \cdot (-k) \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} - L \cdot \Delta x \cdot (-k) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} = 0$$

$$- [T_{m,n} - T_{m-1,n} - T_{m+1,n} - T_{m,n} + T_{m,n} - T_{m,n-1} - T_{m,n+1} - T_{m,n}] = 0$$

$$- 4 T_{m,n} + T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1} = 0$$

On fait le bilan pour chaue nœud, on obtient un système de MxN d'équation linéaire à MxN inconnues de T_m, n .

Condition aux limites :

Aux frontières du domaine

- La température est connue
- La densité du flux est connue (Face isolé $\rho = 0$)
- Echange par convection avec l'environnement

2.5.2 .3 Convection dans un coin intérieur

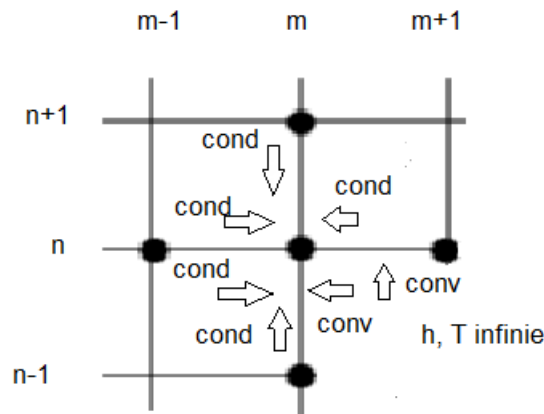


Figure 2.5 Bilan de chaleur autour du nœud i,j coin intérieur

Bilan de chaleur T_m, n

Avec $q_{int} = \frac{k S (T_{ext} - T_{int})}{\Delta x}$ conduction

$q_{int} = h S (T_{ext} - T_{int})$ convection

$$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} - 6 T_{m,n} - 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{m,n} = 0$$

2.5.2 .4 Convection sur la surface :

Bilan de nœud $T_{m, n}$

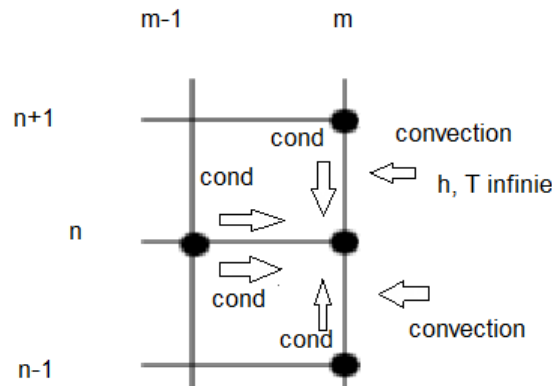


Figure 2.5 Bilan de chaleur autour du nœud i, j de surface

$$2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} - 2 T_{m,n} - 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{m,n} = 0$$

2.5.2 .5 Convection sur un coin extérieur

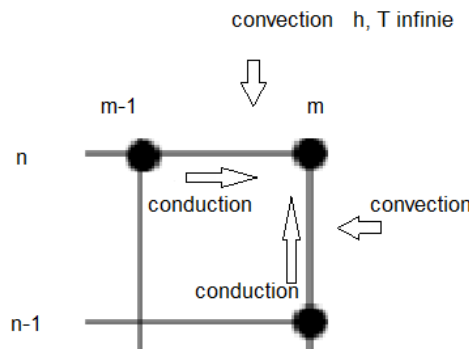


Figure 2.5 Bilan de chaleur autour du nœud i, j de coin extérieur

$$(T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) + 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} - 2 \left(\frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) T_{m,n} = 0$$

Si la surface est isolé thermiquement on a $h = 0$

Chapitre 3 Résolution des équations paraboliques

3.1 Introduction.....	33
3.2 Problème de conduction cas stationnaire.....	34
3.3 Problème de conduction cas instationnaire.....	37
3.3.1 Schémas explicite.....	38
3.3.2 Schéma implicite.....	40
3.3.3 Schéma mixte.....	41
3.4 Conduction instationnaire 2D.....	42

3.1 Introduction [5]

Il existe trois méthodes de base pour la résolution d'équation aux dérivées partielles de type parabolique :

- Méthode explicite
- Méthode implicite
- Méthodes mixtes (Crank-Nicholson)

Dans ce chapitre, on va traiter cas de conduction stationnaire et instationnaire en 1D. L'équation de Fourier traduisant le transfert de chaleur par conduction est examinée par la méthode de différence finie et elle est de la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{C \rho} \nabla^2 T \dots \dots (1)$$

Avec :

$T(x, y, t)$: Température de l'espace et du temps

C : Chaleur spécifique

ρ : masse volumique

λ : conductivité thermique

t : temps

C , ρ et λ sont variables avec la température, elles sont considérées des constantes dans la suite du cours.

On pose $a = \frac{\lambda}{C \rho}$, l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \dots \dots (2) \quad \text{1D suivant la direction } x$$

3.2 Etude de la conduction en 1D cas stationnaire

Si le cas traité est stationnaire, l'équation (2) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \dots \dots (3) \quad \text{Le problème est résolu par la pose des conditions aux limites :}$$

$$T(1) = 1 \quad \text{et} \quad T(N_i) = 0$$

i varie de 1 à N_i

N_i c'est le nombre de nœuds

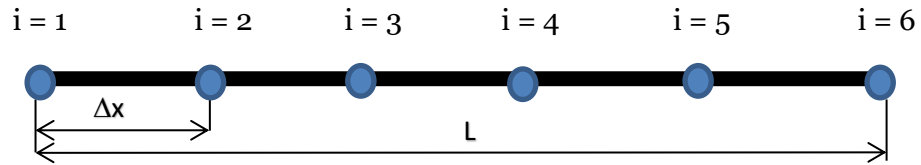


Figure 3.1 maillage 1D

$N_i = 6$

$$\Delta x = \frac{1}{N_i - 1}$$

L'équation (3) sera discrétisée par un schéma centré de second ordre

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} = 0 \dots \dots (4) \quad \Delta x^2 \neq 0$$

Donc $T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = 0$

Le nombre total de nœuds est 6, nœud (1) et le nœud (6) réservés pour les conditions aux limites et les quatre restant sont calculés par la méthode des différences finies.

On applique l'équation (4) au nœuds 2, 3, 4 et 5, on obtient le système d'équations suivant

Avec $T(1) = 1$ et $T(6) = 0$

$$i = 2 \quad T_1 - 2T_2 + T_3 = 0$$

$$i = 3 \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = 0$$

$$i = 4 \quad T_3 - 2T_4 + T_5 = 0$$

$$i = 5 \quad T_4 - 2T_5 + T_6 = 0$$

On applique les conditions aux limites

$$i = 2 \quad 1 - 2T_2 + T_3 = 0$$

$$i = 3 \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = 0$$

$$i = 4 \quad T_3 - 2T_4 + T_5 = 0$$

$$i = 5 \quad T_4 - 2T_5 + 0 = 0$$

On aura

$$i = 2 \quad 2T_2 + T_3 = -1 \dots \dots \dots (5)$$

$$i = 3 \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$i = 4 \quad T_3 - 2T_4 + T_5 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$i = 5 \quad T_4 - 2T_5 + 0 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution par la méthode d'élimination de Gauss

1) Elimination de T2 de l'équation (6)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a'_{22} = a'_{22} - \frac{a_{21} - a_{12}}{a_{11}}$$

2) Elimination de T3 de l'équation (7)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32} - a'_{23}}{a'_{22}}$$

3) Elimination de T4 de l'équation (8)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1/3 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

$$a'''_{44} = a''_{44} - \frac{a''_{43} - a''_{43}}{a''_{33}}$$

On obtient le système d'équation suivant :

$$i = 2 \quad 2T_2 + T_3 = -1 \dots \dots \dots (9)$$

$$i = 3 \quad -\frac{3}{2}T_3 + T_4 = -\frac{1}{2} \dots \dots \dots (10)$$

$$i = 4 \quad -\frac{4}{3}T_4 + T_5 = -\frac{1}{3} \dots \dots \dots (11)$$

$$i = 5 \quad -\frac{5}{4}T_5 = -\frac{1}{4} \dots \dots \dots (12)$$

De l'équation (12) $T_5 = 0,2$

On remplace dans l'équation (11) $T_4 = 0,4$

On remplace dans l'équation (10) $T_3 = 0,6$

On remplace dans l'équation (9) $T_2 = 0,8$

Le flux de chaleur à gauche

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Le flux de chaleur à droite

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$$

3.3 Etude de la conduction en 1D cas instationnaire

On remplace l'équation (2) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Dans ce genre de problème, on a besoin des conditions aux limites ainsi que des conditions initiales (solution pour $t = 0$), la température varie suivant le temps et l'espace.

$$T(t, x) = T(n.\Delta t, i\Delta x)$$

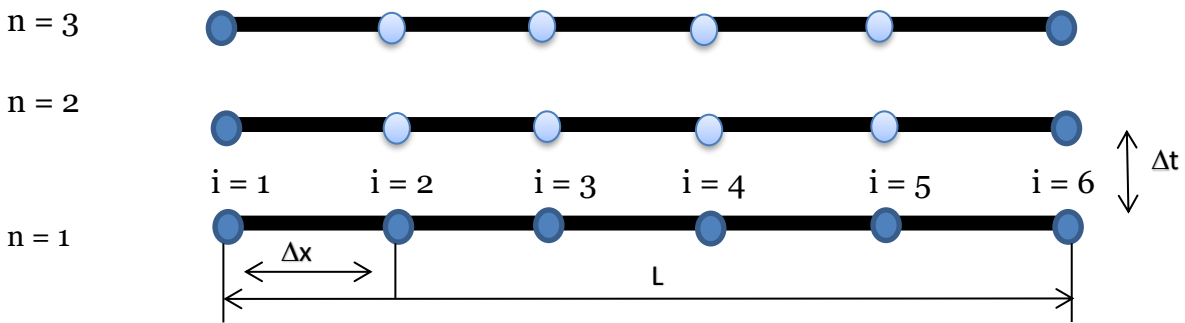


Figure 3.2 Maillage 1D (cas Instationnaire)

3.3.1 Schéma explicite

Le schéma explicite permet de formuler l'expression de la variable au point i et à l'instant $n+1$ en fonction de la solution déjà calculer au temps n .

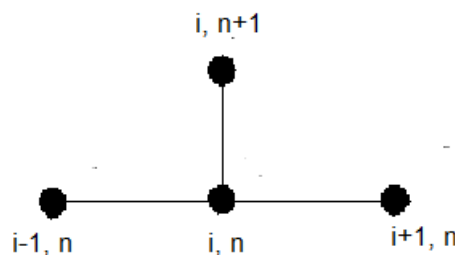


Figure 3.3 Schéma explicite

L'équation (2) sera approximée par le schéma explicite suivant :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \dots \dots (13)$$

On a utilisé un schéma avant d'ordre 1 pour le temps et un schéma centré d'ordre 2 pour l'espace.

L'équation (3) sera arrangée comme suite :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n \dots \dots \dots (14)$$

Avec $\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Pour le problème de conduction de la température :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)T_i^n + \lambda T_{i+1}^n \dots \dots \dots (15)$$

Les conditions aux limites :

$$T(t, 0) = 1 \quad , \quad T(t, 1) = 0$$

Les conditions initiales :

$$T(0, x) = 0 \quad , \quad (0 < x < 1)$$

$$Ni = 6, \Delta x = 0,2 \quad , \quad n = 2 \quad , \quad \Delta t = 0,01 \quad \lambda = 0,25$$

$$\text{Pour } \Delta x = 0,4 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad \Delta t = 0,01 \quad \lambda = 0,0625$$

$$\text{Pour } \Delta x = 0,6 \quad , \quad n = 4 \quad , \quad \Delta t = 0,01 \quad \lambda = 0,0277$$

$$\text{Pour } \Delta x = 0,8 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad \Delta t = 0,01 \quad \lambda = 0,0156$$

$$T(1) = 1 \quad \text{et} \quad T(6) = 0$$

$$\begin{array}{l}
 i = 2 \\
 i = 3 \\
 i = 4 \\
 i = 5
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 T_2^{n+1} = \lambda T_1^n + (1 - 2\lambda)T_2^n + \lambda T_3^n \\
 T_3^{n+1} = \lambda T_2^n + (1 - 2\lambda)T_3^n + \lambda T_4^n \\
 T_4^{n+1} = \lambda T_3^n + (1 - 2\lambda)T_4^n + \lambda T_5^n \\
 T_5^{n+1} = \lambda T_4^n + (1 - 2\lambda)T_5^n + \lambda T_6^n
 \end{array} \right.$$

$$i = 2 \quad T_2^{n+1} = \lambda + (1 - 2\lambda)T_2^n + \lambda T_3^n$$

$$i = 3 \quad T_3^{n+1} = \lambda T_2^n + (1 - 2\lambda)T_3^n + \lambda T_4^n \dots \dots \dots (16)$$

$$i = 4 \quad T_4^{n+1} = \lambda T_3^n + (1 - 2\lambda)T_4^n + \lambda T_5^n$$

$$i = 5 \quad T_5^{n+1} = \lambda T_4^n + (1 - 2\lambda)T_5^n$$

Sous forma matricielle

$$\begin{bmatrix} (1 - 2\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & (1 - 2\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \\ T_5^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2^{n+1} - \lambda \\ T_3^{n+1} \\ T_4^{n+1} \\ T_5^{n+1} \end{bmatrix}$$

La solution du système donne directement la solution de l'équation pour n'importe quelle valeur du paramètre λ .

3.3.2 Schéma implicite

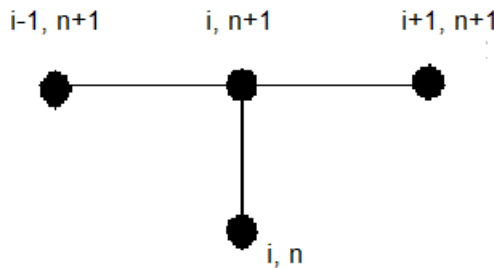


Figure 3.4 Schéma implicite

Pour le problème de la conduction thermique non stationnaire

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \dots \dots (17)$$

Après groupement et arrangement, on aura :

$$T_i^n = \lambda T_{i-1}^{n+1} - (1 + 2\lambda)T_i^{n+1} + \lambda T_{i+1}^{n+1} \dots \dots \dots (18)$$

Pour chaque nœud $N_i = 6 \quad T(1) = 1 \quad T(6) = 0$

$$\begin{cases}
 i = 2 & \left[\begin{array}{l} -T_2^n = \lambda T_1^{n+1} - (1 + 2\lambda)T_2^{n+1} + \lambda T_3^{n+1} \\ -T_3^n = \lambda T_2^{n+1} - (1 + 2\lambda)T_3^{n+1} + \lambda T_4^{n+1} \dots\dots\dots (19) \\ -T_4^n = \lambda T_3^{n+1} - (1 + 2\lambda)T_4^{n+1} + \lambda T_5^{n+1} \\ -T_5^n = \lambda T_4^{n+1} - (1 + 2\lambda)T_5^{n+1} + \lambda T_6^{n+1} \end{array} \right.
 \end{cases}$$

On dispose d'un système de quatre équation à quatre inconnus

$$\begin{bmatrix} -(1 + 2\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -(1 + 2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -(1 + 2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -(1 + 2\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ T_4^{n+1} \\ T_5^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_2^n - \lambda \\ -T_3^n \\ -T_4^n \\ -T_5^n \end{bmatrix}$$

3.3.3 Schéma mixte de Crank-Nicholson

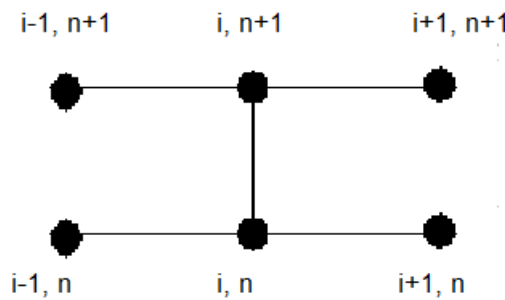


Figure 3.3 Schéma mixte

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \left[\alpha \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \alpha) \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] \dots\dots\dots (1720)$$

$\alpha = 0$ Schéma explicite

$\alpha = 1$ Schéma implicite

$\alpha = 1/2$ Schéma mixte de Crank-Nicholson

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \lambda \alpha (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + \lambda (1 - \alpha)(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

$$-\lambda \alpha T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda \alpha)T_i^{n+1} - \lambda \alpha T_{i+1}^{n+1} = \lambda (1 - \alpha)T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda(1 - \alpha))T_i^n + \lambda (1 - \alpha)T_{i+1}^n$$

i = 2

$$-\lambda \alpha T_1^{n+1} + (1 + 2\lambda \alpha)T_2^{n+1} - \lambda \alpha T_3^{n+1} = \lambda (1 - \alpha)T_1^n + (1 - 2\lambda(1 - \alpha))T_2^n + \lambda (1 - \alpha)T_3^n$$

i = 3

$$-\lambda \alpha T_2^{n+1} + (1 + 2\lambda \alpha)T_3^{n+1} - \lambda \alpha T_4^{n+1} = \lambda (1 - \alpha)T_2^n + (1 - 2\lambda(1 - \alpha))T_3^n + \lambda (1 - \alpha)T_4^n$$

i = 4

$$-\lambda \alpha T_3^{n+1} + (1 + 2\lambda \alpha)T_4^{n+1} - \lambda \alpha T_5^{n+1} = \lambda (1 - \alpha)T_3^n + (1 - 2\lambda(1 - \alpha))T_4^n + \lambda (1 - \alpha)T_5^n$$

i = 5

$$-\lambda \alpha T_4^{n+1} + (1 + 2\lambda \alpha)T_5^{n+1} - \lambda \alpha T_6^{n+1} = \lambda (1 - \alpha)T_4^n + (1 - 2\lambda(1 - \alpha))T_5^n + \lambda (1 - \alpha)T_6^n$$

3.4 Conduction instationnaire 2D

Une plaque rectangulaire soumise à différentes conditions aux limites

$$T(x, y) = T_{i,j}$$

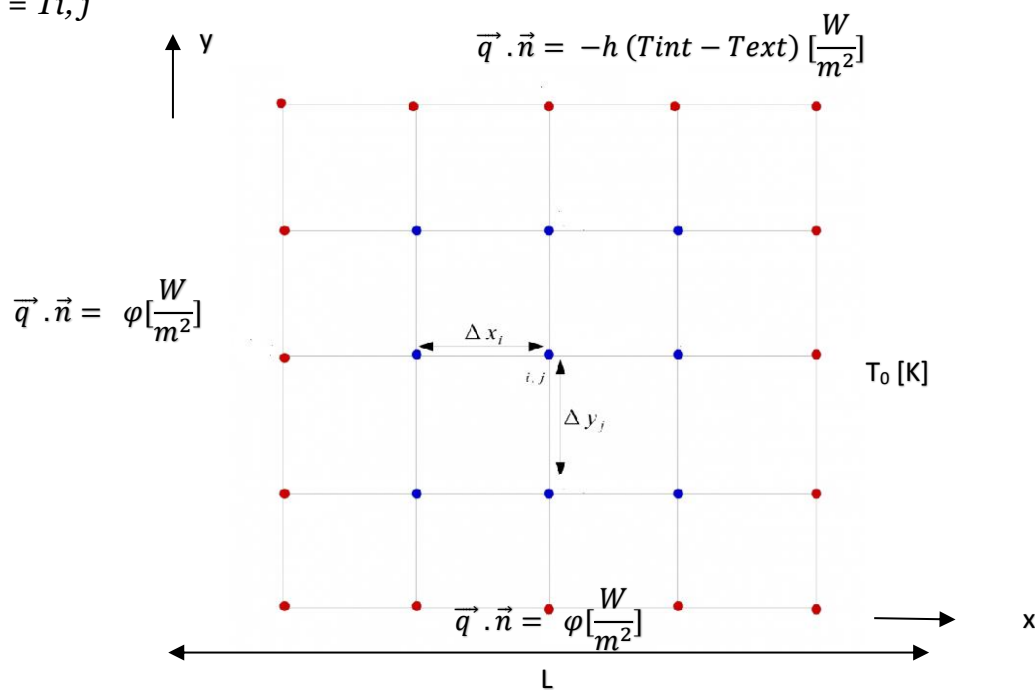


Figure 3.4 Maillage 2D

L'équation de chaleur 2D :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - f = 0 \quad \forall (x, y) \in S \dots \dots \dots (1)$$

La loi de comportement :

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T(x, y) \dots \dots \dots (2)$$

On remplace l'équation (2) dans (1), on obtient :

$$k \left(\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right) + f = 0 \quad \forall (x, y) \in [0, L]$$

$$\lambda = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad \Delta x = \Delta y$$

Discrétisation centrée

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} + \partial(\Delta T) = k \left[\frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right] + f_{i,j}$$

$$\forall i = 2, \dots \dots \dots N - 1$$

$$\forall j = 2, \dots \dots \dots M - 1$$

Construction du système

- Balayer les lignes les unes après les autres et appliquer l'équation discrète ;
- Appliquer les conditions aux limites discrètes ;
- Résoudre le problème.

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \lambda (T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n)$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \lambda T_{i-1,j}^n - 4 \lambda T_{i,j}^n + \lambda T_{i+1,j}^n + \lambda T_{i,j-1}^n + \lambda T_{i,j+1}^n$$

$$T_{i,j}^{n+1} = \lambda T_{i-1,j}^n + (1 - 4 \lambda) T_{i,j}^n + \lambda T_{i+1,j}^n + \lambda T_{i,j-1}^n + \lambda T_{i,j+1}^n$$

Chapitre 4

Résolution des équations hyperboliques

4.1 Définition.....	45
4.2 Résolution d'équation d'onde du second degré	46
4.3 Equation de Burger.....	49
4.3.1 Equation de Burger sans viscosité Par la méthode des caractéristiques.....	50
4.3.2 Equation de Burger avec viscosité.....	50
4.4 Ondes sonores dans un fluide.....	51

4.1 Définition [5]

En mathématiques, un problème hyperbolique ou équation aux dérivées partielles hyperbolique est une classe d'équations aux dérivées partielles (EDP) modélisant des phénomènes de propagation en mécanique, émergeant par exemple naturellement en mécanique. Un archétype d'équation aux dérivées partielles hyperbolique est l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \Delta u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Les solutions des problèmes hyperboliques possèdent des propriétés ondulatoires.

Si une perturbation localisée est faite sur la donnée initiale d'un problème hyperbolique, es points de l'espace éloignés du support de la perturbation ne ressentiront pas ses effets immédiatement. Relativement à un point espace-temps fixe, les perturbations ont une vitesse de propagation finie et se déplacent le long des caractéristiques de l'équation. Cette propriété permet de distinguer les problèmes hyperboliques des problèmes elliptiques ou paraboliques, où les perturbations des conditions initiales (ou de bord) auront des effets instantanés sur tous les points du domaine.

Exemple le plus simple c'est EDP hyperbolique est l'équation de propagation d'une onde

L'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \Delta u = 0$$

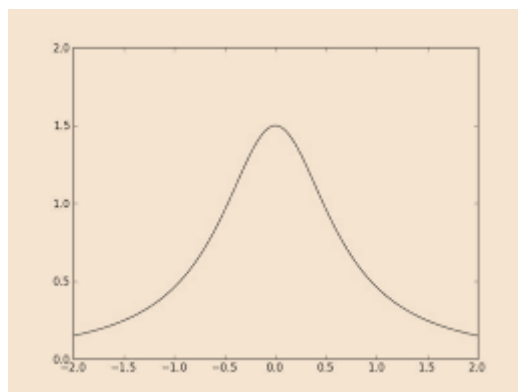


Figure 4.1 Evolution d'une équation D.P Hyperbolique

Est un problème hyperbolique, quelle que soit la dimension.

Par un changement linéaire de variables, toute équation de la forme

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} = F(u_x, u_y, u)$$

Avec F une fonction régulière et A, B, C des coefficients réels vérifiant:

$$B^2 - A \cdot C < 0$$

Peut être transformée en équation des ondes, aux termes d'ordres inférieurs près qui ne sont pas représentatifs de la nature de l'équation. Cette définition est à rapprocher de celle de la conique hyperbole.

Ce genre de problèmes hyperboliques du second ordre peuvent se transformer en un système hyperbolique d'équations différentielles du premier ordre³ tels que ceux considérés dans la suite de cet article.

4.2 Résolution d'équation d'onde du second degré

Résolution d'équation d'onde du second degré à une variable suivant l'espace et une variable suivant le temps :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$u(x, t)$: quantité qui se propage

C : célérité (constant)

Conditions aux limites :

$$u(0, t) = u(L, t) \quad \text{pour } t > 0$$

Conditions initiales :

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

On discrétise l'équation (1) en utilisant le schéma centré pour le temps et l'espace, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^u \quad u \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_\alpha^u \quad \alpha \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

On obtient le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - C^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Avec l'erreur de troncature :

$$\varepsilon = \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^u - \frac{\Delta x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_\alpha^u$$

On pose $\lambda = C \frac{\Delta t}{\Delta x}$ l'équation (2) devient :

$$u_i^{n+1} = 2(1 - \lambda^2)u_i^n + \lambda^2(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - u_i^{n-1} \dots \dots (3)$$

Les conditions aux limites donnent pour le nœud (1) et (m) :

$$u_1^n = u_m^n = 0$$

Première condition initiale donne :

$$u_i^0 = f(x_i)$$

Seconde condition initiale donne u à t_1 ; puisque l'équation (2) démarre avec u_i^0 et u_i^1 , la seconde condition initiale peut être discrétisée avec une différence avant :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^0 = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = g(x) \quad \text{avec } u_i^1 = 0 \quad n = 1$$

$$g(x) = \frac{u_i^1 + u_i^0}{\Delta t} \dots \dots \dots (4)$$

L'équation (4) est d'ordre $O(\Delta t)$, on peut approximer la deuxième condition initiale par le développement en série de Taylor de u_i^1 .

$$u_i^1 = u_i^0 + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^0 + \frac{\Delta t^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^0 \dots \dots \dots (5)$$

On a

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^0 = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^0 \quad \text{L'équation (5) devient :}$$

$$u_i^1 = f(x_i) + \Delta t \cdot g(x_i) + \frac{C^2 \Delta t^2}{2} f''(x_i) \dots \dots \dots (6)$$

L'erreur d'ordre $O(\Delta t^3)$, on peut approximer $f''(x_i)$

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

On remplace dans l'équation (6)

$$u_i^1 = f(x_i) \cdot (1 - \lambda^2) + \frac{\lambda^2}{2} (f_{i+1} + f_{i-1}) + \Delta t \cdot g(x_i) \dots \dots \dots (7)$$

$$i = 1, \dots, N-1 \quad \text{pour } N = 6$$

$$u_i^{n+1} = 2(1 - \lambda^2)u_i^n + \lambda^2(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + u_i^{n-1}$$

$$n = 1$$

$$u_i^2 = 2(1 - \lambda^2)u_i^1 + \lambda^2(u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1) + u_i^0$$

$$n = 2$$

$$u_i^3 = 2(1 - \lambda^2)u_i^2 + \lambda^2(u_{i+1}^2 + u_{i-1}^2) + u_i^1$$

$$n = 3$$

$$u_i^4 = 2(1 - \lambda^2)u_i^3 + \lambda^2(u_{i+1}^3 + u_{i-1}^3) + u_i^2$$

$$n = 4$$

$$u_i^5 = 2(1 - \lambda^2)u_i^4 + \lambda^2(u_{i+1}^4 + u_{i-1}^4) + u_i^3$$

$$n = 5$$

$$u_i^6 = 2(1 - \lambda^2)u_i^5 + \lambda^2(u_{i+1}^5 + u_{i-1}^5) + u_i^4$$

4.3 Equation de Burger

L'**équation de Burgers** est une équation aux dérivées partielles issue de la mécanique des fluides. Elle apparaît dans divers domaines des mathématiques appliquées, comme la modélisation de la dynamique des gaz.

En notant u la vitesse, et ν le coefficient de viscosité cinématique, la forme générale de l'équation de Burgers est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Quand $\nu = 0$, l'équation de Burgers devient l'équation de Burgers sans viscosité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

La matrice jacobienne de cette équation se réduit à la quantité scalaire u , valeur réelle. Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique. Elle peut donc comporter des discontinuités (ondes de choc).

La forme conservative de cette équation est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = 0$$

4.3.1 Equation de Burger sans viscosité Par la méthode des caractéristiques

On cherche une ligne caractéristique $[x(s), t(s)]$ le long de laquelle l'équation de Burgers se réduit à une équation différentielle ordinaire. Calculons la dérivée de ν le long d'une telle courbe :

$$\begin{aligned} \frac{du[x(s), t(s)]}{ds} &= 0 \\ &= \frac{dt}{ds} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

On identifie l'équation de Burgers en faisant (on suppose $t(0) = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} = 1 &\Rightarrow t(s) = s \\ \frac{dx}{ds} = u &\Rightarrow x(s) = x_0 + us = x_0 + ut \end{aligned}$$

Les caractéristiques dans le plan (x, t) sont des droites de pente v le long desquelles la solution est constante.

La valeur en un point (x_c, t_c) s'obtient en "remontant" la caractéristique jusqu'à son origine $x_0 = x_c - ut_c$. Cette valeur est $u = u(x_0)$.

4.3.2 Equation de Burger avec viscosité

On peut transformer cette équation en utilisant la transformation de Hopf-Cole :

$$u = -\frac{2\nu}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

En portant dans l'équation il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$$

Par intégration par rapport à x il s'introduit une "constante" d'intégration fonction du temps que l'on note $g(t)$, déterminée par les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(t)\phi$$

Le nouveau changement de variable $\psi = \phi \exp(\int g dt)$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

On obtient une équation de diffusion analogue à l'équation de la chaleur pour laquelle il existe des solutions analytiques.

4.4 Ondes sonores dans un fluide

On considère une propagation d'une onde sonore plane dans un tube de longueur ($2L$), contenant un fluide au repos de densité (ρ_0) et de pression (p_0).

L'équation de propagation est sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

- Pour un tube fermé :
 - La fluctuation de la vitesse du fluide est nulle
 - La fluctuation de la pression vérifie les conditions de Neumann :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{à } x = -L \text{ et } x = L$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{si } u = 0$$

- Pour un tube ouvert:

Fluctuation de pression $p(x, t)$ est la solution de l'équation d'onde avec les conditions aux limites et les conditions initiales suivants :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$p(-L, t) = 0 \quad ; \quad p(L, t) = 0$$

$$p(x, 0) = \omega(x)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, 0) = 0$$

L'équation (1) décrit la propagation d'onde de pression avec une célérité $C_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$

L'équation (1) devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_0^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad x \in]-L, +L[$$

$$u(-L, t) = 0 \quad ; \quad u(L, t) = 0 \quad \text{C.L}$$

$$u(x, 0) = \omega(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = 0 \quad \text{C.I}$$

Discrétisation par différences finies centrées, le système est écrit sous la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = C_0^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{On pose } G^2 = \frac{C_0^2 \cdot \Delta t^2}{\Delta x^2}$$

L'équation 2 devient :

$$u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} = G^2 \cdot (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$\mathbf{u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + G^2 \cdot (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \dots \dots \dots (3)}$$

Chapitre 5

Calcul d'Erreur

5.1 Stabilité d'un schéma numérique.....	54
5.1.1 schéma explicite.....	54
5.2 Analyse de la stabilité par la transformation de Fourier.....	54
5.3 Consistance d'un schéma numérique.....	55
5.4 Erreur de dispersion et de dissipation.....	55
5.4.1 Dispersion.....	55
5.4.2 Dissipation.....	56

5.1 Stabilité d'un schéma numérique [1]

Le schéma est dit stable si on amorti les erreurs provenant des conditions aux limites et les conditions initiales.

5.1.1 schéma explicite

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n \dots \dots \dots (1)$$

Pour introduire le concept de stabilité pour le schéma explicite, soit u^n solution exact et U^n solution numérique à l'instant t , ces deux quantités seront liés par la relation suivante :

$$U_i^n = u_i^n + \delta u_i^n \dots \dots \dots (2)$$

Avec

δu_i^n l'erreur introduite dans le calcul par l'approximation , on remplace (2) dans (1), on obtient :

$$\delta U_i^{n+1} = \lambda \delta U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)\delta u_i^n + \lambda U_{i+1}^n + \Delta t \partial(\Delta t + \Delta x^2) \dots \dots \dots (3)$$

L'équation (3) décrit l'évolution de l'erreur en fonction de temps. Un schéma numérique stable ne doit pas amplifier l'erreur.

Si $(1 - 2\lambda) > 0$, puisque $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ toujours positif (+)

$$|\delta U_i^{n+1}| \leq (1 - 2\lambda)|\delta U_i^n| + \lambda |\delta u_{i-1}^n| + \lambda |U_{i+1}^n| + \Delta t \partial(\Delta t + \Delta x^2)$$

$$\Delta t \leq \Delta t \partial(\Delta t + \Delta x^2)$$

5.2 Analyse de la stabilité par la transformation de Fourier

On pose $U_i^n = \psi(n \Delta t)e^{j \lambda i \Delta x} \dots \dots \dots (4)$

On remplace (4) dans (1), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \psi((n + 1) \Delta t)e^{j \lambda i \Delta x} &= \psi(n \Delta t) [\lambda e^{j \lambda (i-1)\Delta x} + (1 - 2\lambda)e^{j \lambda i \Delta x} + \lambda e^{j \lambda (i+1)\Delta x}] \dots \dots \dots (5) \\ &= \psi(n \Delta t) [\lambda e^{j \lambda i \Delta x} \cdot \lambda e^{-j \lambda \Delta x} + (1 - 2\lambda)e^{j \lambda i \Delta x} + \lambda e^{j \lambda i \Delta x} \cdot \lambda e^{j \lambda \Delta x}] \end{aligned}$$

$$\psi((n + 1) \Delta t) = \psi(n \Delta t) [\lambda e^{-j \lambda \Delta x} + (1 - 2\lambda) + \lambda e^{j \lambda \Delta x}]$$

On pose $G = [\lambda e^{-j \lambda \Delta x} + (1 - 2\lambda) + \lambda e^{j \lambda \Delta x}]$

$$\psi((n + 1) \Delta t) = G \psi(n \Delta t)$$

G : facteur d'amplification

Schéma stable $|G| \leq 1$

On applique l'égalité trigonométrique :

$$2 \cos \alpha = e^{-j\lambda} + e^{j\lambda}$$

$$(1 - \cos \lambda) = 2 \sin^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

On remplace ces expressions dans G

$$G = 1 - 2 \lambda + 2 \lambda \cos(\lambda \Delta x)$$

$$G = 1 - 4 \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right)$$

$|G| \leq 1$ sera vérifié si

$$-1 \leq 4 \sin^2 \left(\frac{\lambda \Delta x}{2} \right) \leq 1$$

5.3 Consistance d'un schéma numérique

Un schéma numérique est dit consistant si

L'erreur tend vers zéro avec $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$

5.4 Erreur de dispersion et de dissipation

5.4.1 Dispersion

Soit l'équation de Burger qui est hyperbolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

L'équation (1) est d'abord discrétisée avec un schéma centré

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -a \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{Et } u(x, t) = v(t) \exp(2 j \pi \omega x) \dots \dots \dots (3)$$

On remplace (3) dans (1), on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i a \frac{v(t) \exp(2 j \pi \omega x)}{\Delta x} \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{Et } v(t) = v(0) \exp \left(-a i \frac{\sin(2 \pi \omega \Delta x)}{\Delta x} t \right)$$

Donc

$$u(x, t) = v(o) \exp \left(-2 \pi \omega i \left(x - a \frac{\sin(2 \pi \omega \Delta x)}{2 \pi \omega \Delta x} t \right) \right)$$

Le schéma propage une sinusoïde de pulsation ω à une vitesse $C(\omega)$ a $\sin(2\pi\omega\Delta x) / 2\pi\omega\Delta x$

L'équation différentielle propage toute perturbation à une vitesse $C_0(\omega) = a$

Dispersion introduite par le schéma numérique est mesurée $\frac{C(\omega)}{C_0(\omega)}$.

5.4.2 Dissipation

Même si les différentes fréquences sont propagées à la bonne vitesse, on n'est pas sûr de conserver l'amplitude de chaque de ces fréquences, c'est cette perte en amplitude que l'on appelle la dissipation.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = -a \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$u(x, t) = u_i^n = \xi^n \exp(2 i \pi \omega x)$$

On a $\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ on obtient le facteur d'amplitude "A"

$$A = \frac{\xi^{n+1}}{\xi} = \frac{1}{1 + (1 - \cos(2 \pi \omega \Delta x) + i \lambda \sin(2 \pi \omega \Delta x))}$$

$$|A| = \frac{1}{1 + 2 (1 - \cos(2 \pi \omega \Delta x) \lambda (1 + \lambda))}$$

$|A| < 1$ pour que le schéma serait stable.

Chapitre 6

Méthode de volume fini

6.1 Introduction.....	57
6.2 Résolution d'un problème de conduction thermique en 1D cas stationnaire.....	57
6.2.1 Conductivité thermique aux interfaces de volume de contrôle.....	58
6.2.2 Conservation du flux aux interfaces.....	59
6.2.3 Terme source « S ».....	60
6.2.4 Conditions aux limites.....	60
6.2.5 Conduction pour différents cas.....	63
6.3 Résolution d'un problème de conduction thermique en 1D cas instationnaire.....	67
6.3.1 Schéma explicité.....	69
6.3 Schéma implicite.....	69
6.3 Schéma mixte de Crank-Nicolson.....	69

6.1 Introduction

En analyse numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite *forte* de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation.

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints en 3D (des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

6.2 Résolution d'un problème de conduction thermique en 1D cas stationnaire [5]

L'équation différentielle est de la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S = 0$$

S : Terme de source de chaleur

λ : Conductivité thermique

T : Température

L'équation est discrétisée sur le volume de contrôle

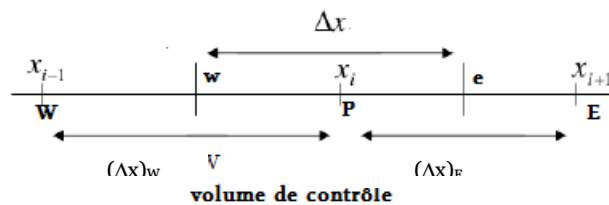


Figure 6.1 Maillage unidimensionnelle

On a $(\Delta x)_W \neq (\Delta x)_E$

6.2.1 Conductivité thermique aux interfaces de volume de contrôle

On a $\lambda_e \neq \lambda_W$

La conductivité est en fonction de la température et se diffère d'un matériau à un autre comme le matériau composite.

La conductivité à l'interface « e » est donnée par la relation suivante : (entre le point P et le point E)

$$\lambda_e = \frac{(\Delta x)_e^+}{(\Delta x)_e} \lambda_P + \frac{(\Delta x)_e^-}{(\Delta x)_e} \lambda_E$$

Si l'interface « e » est situé au mi-distance du point P et point E, on obtient :

$$\lambda_e = \frac{\lambda_P + \lambda_E}{2}$$

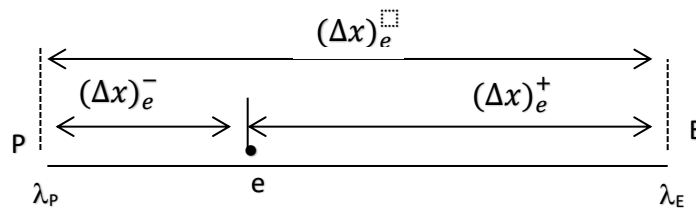


Figure 6.2 La conductivité à l'interface « e »

6.2.2 Conservation du flux aux interfaces

Le flux à l'interface « e » est donné par l'expression suivante :

$$q_e = -\lambda_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e = \frac{\lambda_e (T_P - T_E)}{(\Delta x)_e} = \frac{\lambda_P (T_P - T_e)}{(\Delta x)_e^-} = \frac{\lambda_E (T_e - T_E)}{(\Delta x)_e^+}$$

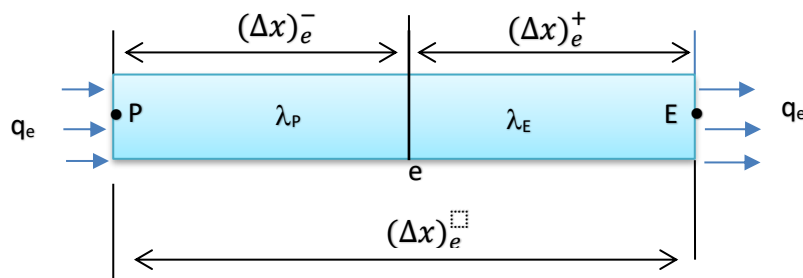


Figure 6.3 Le flux à l'interface « e »

Le flux thermique peut être exprimé comme suite :

$$q_e = \frac{(T_P - T_E)}{\frac{(\Delta x)_e^-}{\lambda_P} + \frac{(\Delta x)_e^+}{\lambda_E}} = \frac{(T_P - T_E)}{\lambda_e}$$

La conductivité thermique à l'interface « e » peut se calculée par la relation suivante :

$$\lambda_e = \frac{(\Delta x)_e}{\frac{(\Delta x)_e^-}{\lambda_P} + \frac{(\Delta x)_e^+}{\lambda_E}}$$

Dans le cas de mi-distance

$$\lambda_e = \frac{2 \lambda_P \lambda_E}{\lambda_P + \lambda_E} \quad \text{Conductivité moyenne des nœuds voisins du maillage}$$

- Si on a un matériau isolé en $(\Delta x)_e^+, \lambda_E \rightarrow 0$ et $q_e = 0$
- Si $\frac{\lambda_E}{\lambda_P} \rightarrow 0$ $\lambda_P \gg \lambda_E$ et $T_e = T_P$ le flux est donne par :

$$q_e = \frac{\lambda_E (T_P - T_E)}{(\Delta x)_e^+}$$

6.2.3 Terme source « S »

Le terme source $\bar{S}(T)$ a une dépendance non linéaire de la température, il faut que ce terme doit être linéariser en T, pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires.

$$\bar{S}(T) = S_c(T_P^*) + S_p(T_P^*)T_P$$

T_P^* : Température obtenue pour l'itération précédente

S_p : Terme source de chaleur optimum.

Il faut que :

$$S_p \leq S_{P \text{ optimum}} < 0$$

6.2.4 Conditions aux limites

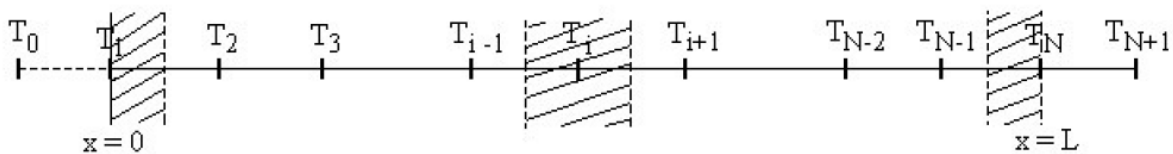


Figure 6.4 Maillage du volume de contrôle en 1D

L'équation de chaleur est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S = 0$$

L'intégration de l'équation de chaleur sur un volume de contrôle autour du nœuds « i » est comme suite :

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_{i+1/2} - \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_{i-1/2} + \bar{S}_i(T_i)\Delta x = 0$$

La dérivée sous la forme discrète, on obtient la relation suivante :

$$\lambda_{i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} - \lambda_{i-1/2} \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + \bar{S}_i(T_i)\Delta x = 0 \quad i = 2, \dots, N - 1$$

\bar{S} est la valeur moyenne de S_i sur le volume de contrôle au tours du point « i »

On regroupe les termes, on obtient :

$$\lambda_{i-1/2}T_{i-1} - (\lambda_{i+1/2} + \lambda_{i-1/2})T_i + \lambda_{i+1/2}T_{i+1} = -\bar{S}_i(T_i)(\Delta x)^2$$

Si $\lambda_{i-1/2} = \lambda_{i+1/2} = \lambda$, on aura

$$\lambda T_{i-1} - 2\lambda T_i + \lambda T_{i+1} = -\bar{S}(T_i)\Delta x^2$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -\frac{\bar{S}(T_i)\Delta x^2}{\lambda}$$

On pose

$$\frac{\bar{S}(T_i)\Delta x^2}{\lambda} = G_i$$

On obtient

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -G_i \quad i = 2, \dots, N - 1$$

Pour les points 1 et N situés aux frontières du domaine de calcul on intègre l'équation De chaleur sur un demi-volume de contrôle.

Il existe trois cas typiques de conditions aux limites rencontrées pour les problèmes de conduction thermique:

1. Température imposée (connue) à la frontière (condition de type Dirichlet) ;
2. Densité du flux thermique imposée, donc dT/dx connue (condition Neumann) ;
3. Densité du flux thermique spécifiée par un coefficient d'échange (h) et une température du fluide environnant (T_f) ou par un flux radiatif (condition de Fourier)

$$Q_N = \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right)_N = \begin{cases} h(T_f - T_N) \\ \varepsilon\sigma(T_f^4 - T_N^4) \end{cases}$$

ε : Coefficient d'émission

σ : Constante de Stefan-Boltzmann

a) Conditions aux limites de Dirichlet

On a T_1 connue, l'équation discrète du nœud 2 est :

$$-(\lambda_{2+1/2} + \lambda_{2-1/2})T_2 + \lambda_{2+1/2}T_3 = -\bar{S}_2(\Delta x)^2 - \lambda_{2-1/2}T_1$$

$\lambda = \text{Constant}$

$$-2T_2 + T_3 = -\frac{\bar{S}_2(\Delta x)^2}{\lambda} - T_1$$

Pour $i = N-1$, l'équation discrète devient :

$$\lambda_{(N-1)-1/2}T_{N-2} - (\lambda_{(N-1)+1/2} + \lambda_{(N-1)-1/2})T_{N-1} + \lambda_{(N-1)+1/2}T_N = -\bar{S}_{N-1}(\Delta x)^2$$

Pour T_N connue, le terme $\lambda_{(N-1)+1/2}T_N$ passe comme terme source

$$\lambda_{(N-1)-1/2}T_{N-2} - (\lambda_{(N-1)+1/2} + \lambda_{(N-1)-1/2})T_{N-1} = -\bar{S}_{N-1}(\Delta x)^2 - \lambda_{(N-1)+1/2}T_N$$

Pour $\lambda = \text{Constant}$

$$T_{N-2} - 2T_{N-1} = -\frac{\bar{S}_{N-1}(\Delta x)^2}{\lambda} - T_N$$

b) Conditions de Neumann

On intègre l'équation de chaleur sur le demi-volume de contrôle (Vc)

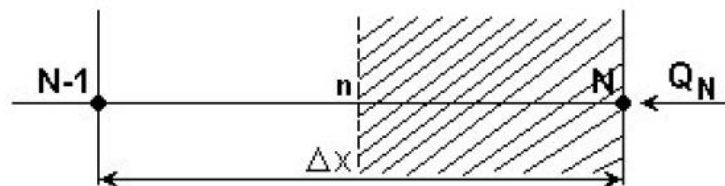


Figure 6.5 Demi-volume de contrôle

$$\int_{Vc} \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{Vc} S dV = 0$$

Pour $dV = A dx = 1$ dx cas unidimensionnel

$$\int_n^N \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_n^N S dx = 0$$

Après intégration, on obtient :

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_N - \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_n + \bar{S}_N \frac{\Delta x}{2} = 0$$

La densité du flux thermique au point N est donnée par :

$$Q_N = - \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_N$$

On utilise la discrétisation centrée au point n :

$$- Q_N - \lambda_n \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta x} + \bar{S}_N \frac{\Delta x}{2} = 0$$

En regroupant les termes avec un flux imposé, on obtient l'équation discrète valable pour le point de frontière N :

$$T_{N-1} - T_N = - \frac{\bar{S}_N (\Delta x)^2}{2\lambda_{N-1/2}} + \frac{Q_N \Delta x}{\lambda_{N-1/2}}$$

6.2.5 Conduction pour différents cas

Cas 1 Plaque très longue

L'équation de chaleur thermique

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S = 0$$

L'intégration se fait sur le volume de contrôle présenté dans la figure ci-dessous :

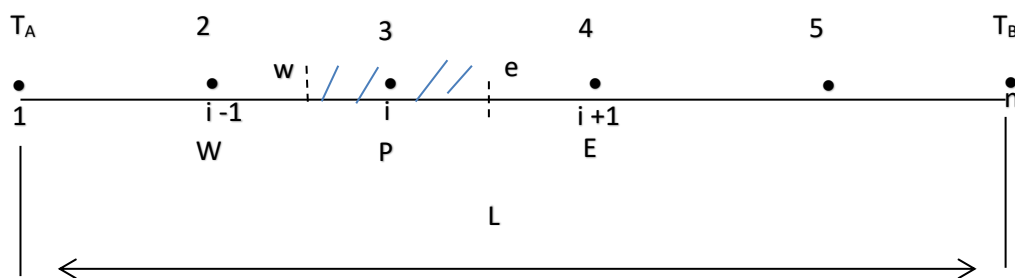


Figure 6.6 Discrétisation de la plaque

La température pour i point est donnée par la relation suivante :

$$a_i T_i = a_{i-1} T_{i-1} + a_{i+1} T_{i+1} + b$$

Ou bien

$$a_p T_p = a_W T_W + a_E T_E + b$$

Avec

$$a_p = a_W + a_E$$

$$a_W = \frac{\lambda_W}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_E}{\Delta x} \quad b = \bar{S} \Delta x \quad \text{où } \bar{S} \text{ terme source moyen}$$

La solution analytique :

$$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{S}{2\lambda} (L - x) \right] x + T_A$$

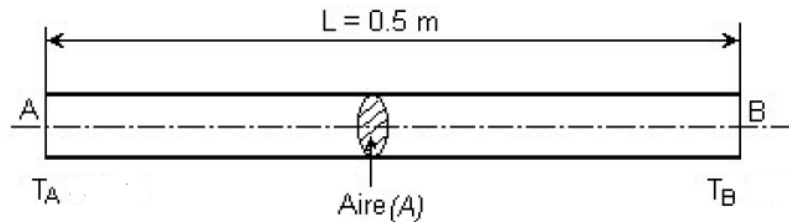
Cas 2 Barre cylindrique avec la température connue sur les deux extrémités

Figure 6.7 Barre cylindrique

La distribution de la température est gouvernée par l'équation de chaleur suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

La température pour i point est donnée par la relation suivante :

$$a_i T_i = a_{i-1} T_{i-1} + a_{i+1} T_{i+1}$$

Ou bien

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e$$

Avec

$$a_p = a_w + a_e$$

$$a_w = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_e = \frac{\lambda_e}{\Delta x}$$

Si $\lambda_w = \lambda_e$

On a

$$a_w = \frac{\lambda_w}{\Delta x} = \frac{\lambda_e}{\Delta x} = \frac{\lambda}{\Delta x} \text{ même matériau lon long de la barre et pas de changement de section}$$

Solution analytique :

$$T(x) = \frac{T_B - T_A}{L} x + T_A$$

Cas 3 Barre cylindrique avec une extrémité à une température connue et l'autre extrémité isolé (flux = 0)

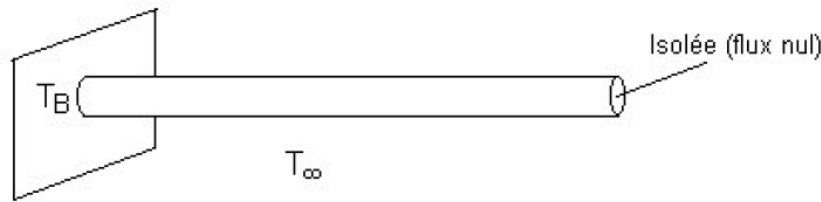


Figure 6.8 Barre cylindrique (extrémité isolé)

La distribution de la chaleur est gouvernée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) - h P (T - T_\infty) = 0$$

La température peut se calculer pour les nœuds internes :

$$a_P T_P = a_W T_W + b + a_E T_E$$

$$a_P = a_W + a_E - S_P$$

$$S_P = -n^2 \Delta x \quad n^2 = \frac{h P}{\lambda A}$$

$$a_W = \frac{1}{\Delta x} = a_E$$

$$b = S_C = n^2 (\Delta x) T_\infty$$

La température peut se calculer pour le nœud externe (extrémité isolé) :

$$a_P = a_W - S_P \quad a_E = 0$$

$$S_P = -n^2 \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \quad n^2 = \frac{h P}{\lambda A}$$

$$a_W = \frac{1}{\Delta x} = a_E$$

$$b = S_C = n^2 \left(\frac{\Delta x}{2} \right) T_\infty$$

Solution analytique :

$$T(x) = (T_B - T_\infty) \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)} + T_\infty$$

6.3 Résolution d'un problème de conduction thermique en 1D cas instationnaire

L'équation différentielles de la conduction 1D instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S$$

ρ : densité en kg/m³

C_p : chaleur spécifique à pression constante en J/kg.K

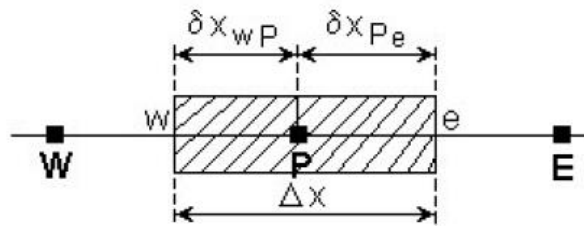


Figure 6.9 Volume de contrôle en 1D

L'intégration de l'équation de chaleur pour le cas instationnaire sur le volume de contrôle et sur un intervalle de temps de t au $t + \Delta t$ donne l'équation si dessous :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S dV dt$$

Sous une autre forme, on aura :

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

A :Aire transversale du volume de contrôle,

$DV = A \Delta x$ présente le volume

Après intégration sur les deux côtés du volume de contrôle, on obtient :

$$\left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} + f \left(\frac{\lambda_e}{\delta x_e} + \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right) \right] T_P = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} [f T_E + (1-f) T_E^0] + \frac{\lambda_w}{\delta x_w} [f T_W + (1-f) T_W^0] + \left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1-f) \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - (1-f) \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right] T_P^0 + \bar{S} \Delta x$$

On pose

$$a_P = f(a_W + a_E) + a_P^0$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w}$$

$$a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}$$

$$b = \bar{S} \Delta x$$

On obtient :

$$a_P T_P = a_W [f T_W + (1-f) T_W^0] + a_E [f T_E + (1-f) T_E^0] + [a_P^0 - (1-f) a_W - (1-f) a_E] T_P^0 + b$$

6.3.1 Schéma explicite :

La *discrétisation explicite* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire donne:

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + [a_P^0 - (a_W + a_E - S_P)] T_P^0 + S_c$$

Avec :

$$a_P = a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}$$

6.3.2 Schéma implicite :

La *discrétisation implicite* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire donne:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_c$$

Avec

$$a_P = a_P^0 + a_W + a_E - S_P \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}$$

6.3.3 Schéma mixte de Crank-Nicolson :

La *discrétisation Crank-Nicolson* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire :

$$a_P T_P = a_E \left[\frac{T_E + T_E^0}{2} \right] + a_W \left[\frac{T_W + T_W^0}{2} \right] + \left[a_P^0 - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2} \right] T_P^0 + b$$

Avec :

$$a_P = \frac{1}{2} (a_W + a_E) + a_P^0 - \frac{1}{2} S_P$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w}$$

$$a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}$$

$$b = S_c + \frac{1}{2} S_P T_P^0$$

Remarque :

Si $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$ et $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$

$$\Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{\lambda}$$

Référence

[1] AZZI A. 2021, « Méthodes numériques aux calculs des écoulements et du transfert de chaleur » Université des sciences et de la technologie d'Oran Mohammed Boudiaf.

[2] Meddour B., 2016, « Cours de Méthode numérique », Université Abbas Laghrour

[3] Manfred G., 2006, « Méthodes numériques », Département d'économétrie Université de Genève.

[4] Quarteroni, A., Sacco A., Saleri, F., « Méthodes numériques, Algorithmes analyse et application », Springer-Verlag, Milano Italia 2004.

[5] Ioan C. Popa « Modélisation numérique du transfert thermique, méthode des volumes finis » Edition: Publisher: Universitaria ISBN: 973-8043-111-1