

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Des Sciences et de la Technologie d'Oran
Mohamed Boudiaf

USTO-MB

Faculté de physique

Département de physique énergétique



Polycopié de Physique II- Electricité

Cours et exercices corrigés

Pour les étudiants de première année L1 (S.T et S.M)

Dr. Charaoui Zohra

2020/2021

AVANT- PROPOS

Conforme aux programmes officiels du LMD, ce polycopié de cours de physique II électricité s'adresse aux étudiants de première année de l'enseignement supérieur dans le domaine des Sciences et Technologie (S.T) et des Sciences de la Matière (SM). Il est conçu dans le but de permettre à l'étudiant d'avoir un outil de travail et de référence, à reprendre le cours et à approfondir les connaissances acquises par des applications.

Ce polycopié traite l'ensemble du programme du module d'électricité (physique 2), est structuré de la manière suivante :

- **Rappels mathématiques** : on a consacré le début de ce programme à l'introduction de différents éléments mathématiques de base tel que : Eléments de longueur, de surface, de volume dans des systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques, dérivées et intégrales multiples afin de faciliter l'apprentissage des cours traités dans ce manuscrit.
- **Electrostatique** : branche de physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques par rapport à l'observateur.
- **Electrocinétique** : branche de physique qui étudie les effets des charges électriques en mouvement.
- **Electromagnétisme** : branche de physique qui étudie les interactions entre courants électriques et champs magnétiques.

Afin d'aider l'étudiant à mieux assimiler ces connaissances, on a inclus un bon nombre d'exercices résolus à la fin de chaque partie. Chaque chapitre contient quelques exemples résolus dont chacun est conçu pour illustrer un concept spécifique en relation avec une section particulière du chapitre.

Notre souhait est de rendre le sujet plus accessible et plus utile à l'étudiant tout en fournissant à l'enseignant un outil de travail efficace.

Chaaroui Zohra

Remerciement

*Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance au
professeur Amine Bouziane Hamou pour son aide
dans la réalisation de ce polycopié.*

Sommaire

Chapitre 1	Rappels mathématiques	1
1	Rappels mathématiques.....	1
1.1	Les vecteurs	1
1.1.1	Présentation d'un vecteur position et sa dérivée par rapport au temps	2
1.1.1.1	En coordonnées cartésiennes.....	2
1.1.1.2	En coordonnées cylindriques	3
1.1.1.3	En coordonnées sphériques	5
1.2	Les Intégrales	6
1.2.1	Définitions	6
1.2.1.1	Fonction primitive.....	6
1.2.1.2	Intégrale simple	7
1.2.1.3	Intégrale multiple	7
1.2.2	Méthodes de calcul d'intégrales	7
1.2.2.1	Primitives	7
1.2.2.2	Intégration par parties.....	8
1.2.2.3	Intégration par changement de variables	9
1.3	Opérateurs mathématiques	10
1.3.1	L'opérateur gradient.....	10
1.3.1.1	En coordonnées cartésiennes.....	10
1.3.1.2	En coordonnées cylindriques	10
1.3.1.3	En coordonnées sphériques	10
1.3.2	L'opérateur divergence	11
1.3.2.1	En coordonnées cartésiennes.....	11
1.3.2.2	En coordonnées cylindriques	11
1.3.2.3	En coordonnées sphériques	11
1.3.3	L'opérateur rotationnel.....	11
1.3.3.1	En coordonnées cartésiennes.....	11
1.3.3.2	En coordonnées cylindriques	11
1.3.3.3	En coordonnées sphériques	12
	Exercices corrigés.....	12
Chapitre 2	Electrostatique.....	21

2	<i>Electrostatique</i>	21
2.1	Phénomène d'électrisation	21
2.1.1	Les trois types d'électrisation.....	21
2.1.1.1	Electrisation par frottement.....	21
2.1.1.2	Electrisation par influence et par contact	22
2.2	Interaction électrostatique.....	23
2.3	Loi de Coulomb dans le vide.....	24
2.3.1	Force de Coulomb	24
2.3.1.1	Expression mathématique de la force de Coulomb	25
2.3.1.2	Principe de superposition	26
2.3.2	Champ électrostatique	28
2.3.2.1	Notion de champ	28
2.3.2.2	Définition du champ électrostatique.....	29
2.3.2.3	Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles.....	31
2.3.2.4	Lignes de champ électrostatique.....	32
	2.3.2.4.1 Cas d'une seule charge	32
	2.3.2.4.2 Cas de deux charges ponctuelles	33
2.3.3	Circulation d'un champ électrostatique E créé par une charge q	34
2.3.4	Potentiel électrostatique	36
2.3.4.1	Propriétés du potentiel électrostatique	37
2.3.4.2	Potentiel électrostatique créé par un système de plusieurs charges	37
2.3.5	La relation entre le champ E et le potentiel V	38
2.3.6	Energie potentielle électrostatique	40
	Exercices corrigés	41
2.4	Dipôle électrique	55
2.4.1	Moment dipolaire	55
2.4.2	Potentiel créé par un dipôle	55
2.4.3	Champ électrique créé par un dipôle	56
2.4.4	Les lignes de champ d'un dipôle électrique	57
2.4.5	Les surfaces équipotentielles d'un dipôle électrique.....	58
2.4.6	Energie d'un dipôle placé dans un champ électrique	59
2.4.7	Mouvement d'un dipôle dans un champ électrique uniforme.....	59

2.4.7.1	Résultante des forces appliquées.....	59
2.4.7.2	Moment des forces appliquées	60
Exercices corrigés.....		60
2.5	Distribution continue des charges.....	69
2.5.1	Distribution linéique de charges notée (λ)	69
2.5.2	Distribution surfacique de charges notée (σ).....	69
2.5.3	Distribution volumique de charges notée (ρ)	70
2.5.4	Champ et potentiel électrique créés par une distribution continue de charges ..	70
2.5.4.1	Cas d'une distribution linéique de charges	70
2.5.4.2	Cas d'une distribution surfacique de charges	73
2.5.4.3	Cas d'une distribution volumique de charges	77
2.5.5	Théorème de Gauss	79
2.5.5.1	Le flux élémentaire d'un champ \mathbf{E} à travers une surface dS	79
2.5.5.2	Le flux d'un champ \mathbf{E} à travers une surface finie S	80
2.5.6	Enoncé du théorème de Gauss	81
2.5.6.1	Dans le cas d'une distribution discontinue de charges :	81
2.5.6.2	Dans le cas d'une distribution continue de charges :.....	82
2.5.6.3	L'intérêt du théorème de Gauss.....	82
Exercices corrigés.....		84
2.6	Les conducteurs.....	103
2.6.1	Loi de conservation de charge.....	103
2.6.2	Conducteur en équilibre électrostatique.....	103
2.6.2.1	Cas d'un conducteur neutre	103
2.6.2.2	Cas d'un conducteur chargé (isolé)	104
2.6.3	Théorème de Coulomb.....	106
2.6.4	Conducteur présentant une cavité	107
2.6.5	Pression électrostatique.....	108
2.6.6	Phénomène d'influence entre deux conducteurs chargés.....	110
2.6.6.1	Influence partielle.....	110
2.6.6.2	Influence d'un conducteur relié au sol.....	111
2.6.6.3	Influence totale.....	112
2.7	Capacité d'un conducteur isolé	112
2.8	Capacité d'un condensateur	113

2.8.1	Groupement des condensateurs.....	116
2.8.1.1	Condensateurs en série	116
2.8.1.2	Condensateurs en parallèle	118
2.9	Energie électrostatique d'un conducteur.....	119
Exercices corrigés.....		120
Chapitre 3 Electrocinétique.....		134
3	Electrocinétique.....	134
3.1	Définitions générales	134
3.1.1	Courant électrique	134
3.1.2	Dipôle.....	134
3.1.3	Circuit électrique	134
3.1.4	Générateur électrique	135
3.1.5	Récepteur électrique	135
3.1.6	Sens du courant continu	135
3.1.7	Résistance électrique.....	136
3.2	Loi d'Ohm.....	136
3.3	Lois de Kirchhoff	136
3.3.1	Première loi de Kirchhoff (loi des nœuds).....	136
3.3.2	Deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles)	137
3.4	Association des résistances	139
3.4.1	Résistances en série.....	139
3.4.2	Résistances en parallèle	140
3.5	Effet Joule	142
3.5.1	Energie dissipée par effet Joule	142
3.5.2	Puissance dissipée par effet Joule	143
Exercices corrigés.....		143
Chapitre 4 Electromagnétisme.....		154
4	Electromagnétisme.....	154
4.1	Champ magnétique créé par un aimant.....	154
4.1.1	Champ magnétique terrestre	154
4.1.2	Les pôles d'un aimant.....	155
4.1.3	Lignes d'un champ magnétique	156

4.1.4	Interaction entre les pôles d'un aimant.....	157
4.2	Champ magnétique créé par un courant	157
4.2.1	Champ magnétique créé au voisinage d'un fil rectiligne.....	157
4.2.2	Propriétés d'un champ magnétique créé au voisinage d'un fil rectiligne	158
4.3	Force magnétique de Lorentz.....	159
4.3.1	Définition.....	159
4.3.2	Caractéristiques de la force magnétique de Lorentz	159
4.4	Force électromagnétique de Lorentz	160
4.5	Force de Laplace	160
4.5.1	Définition.....	160
4.5.2	Expression de la force de Laplace	161
4.5.3	Caractéristiques de la force de Laplace	162
4.6	Loi de Biot et Savart.....	164
4.6.1	Propriétés d'un champ magnétique créé par un courant	164
4.6.2	Calcul du champ magnétique	165
4.6.2.1	Fil rectiligne infini	165
4.6.2.2	Spire circulaire	166
4.7	Dipôle magnétique	168
4.7.1	Moment magnétique.....	168
	Exercices corrigés.....	168
	Références.....	19381

Chapitre 1
Rappels mathématiques

Chapitre 1 Rappels mathématiques

1 Rappels mathématiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire un rappel des principales notions de mathématiques dont nous aurons besoin pour résoudre différents exercices concernant ce chapitre.

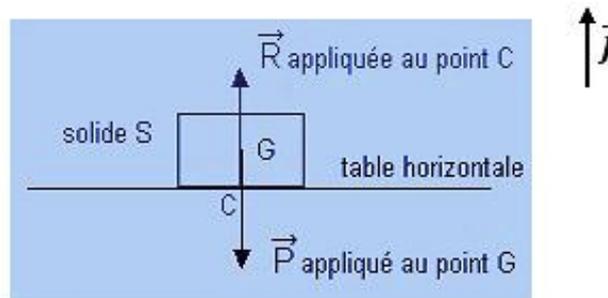
1.1 Les vecteurs

Un vecteur est un objet mathématique qui possède une intensité et une direction. Il est caractérisé par :

1. un point d'application
2. une direction
3. un sens
4. une intensité

Q : un solide « S » de masse 5Kg est posé sur une table horizontale, donner les caractéristiques des forces appliquées à ce solide ? $g=10m/s^2$

R : le solide S est soumis à deux forces : le poids \vec{P} et la réaction de la table \vec{R} . « S » étant en état d'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$



Les caractéristiques des deux forces :

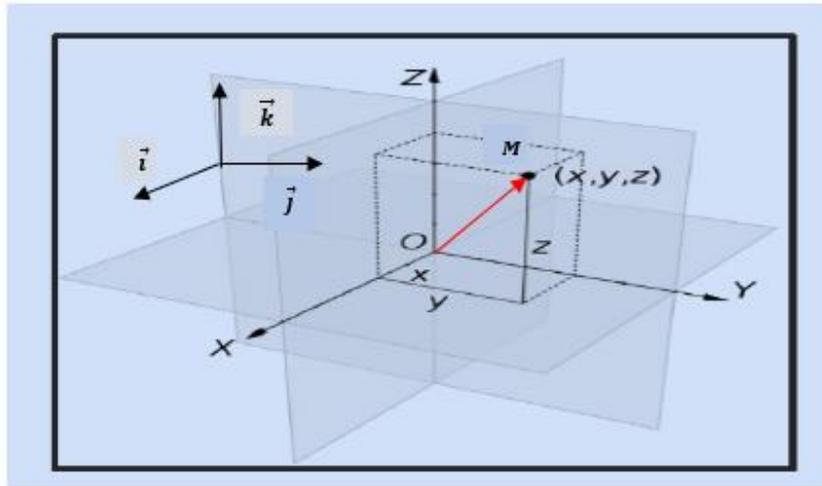
Caractéristiques	point d'application	direction	sens	intensité
\vec{P}	Centre de gravité « G »	Verticale	$-mg\vec{j}$	50 N
\vec{R}	Point de contact « C »	Verticale	$+R\vec{j}$	50 N

1.1.1 Présentation d'un vecteur position et sa dérivée par rapport au temps

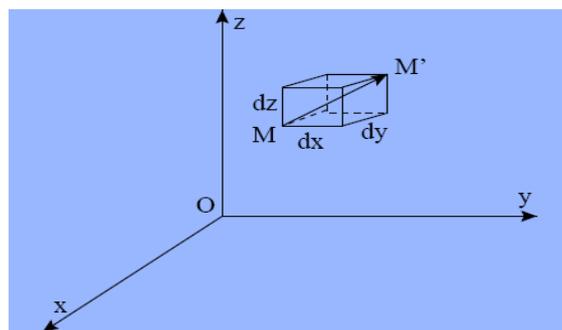
1.1.1.1 En coordonnées cartésiennes

- ❖ Soit un système de coordonnées cartésiennes $OXYZ$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la position d'un point « M » est :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



- ◆ L'élément de longueur $d\vec{OM}$ est : $d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$
- ◆ L'élément de surface : $x = cte : dS = dydz$
 $y = cte : dS = dx dz$
 $z = cte : dS = dx dy$
- ◆ L'élément de volume : $d\tau = dx dy dz$



- ❖ **Dérivées du vecteur position par rapport au temps**

Dans le système des coordonnées cartésiennes, les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont constants dans le temps :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$



Les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ne changent ni de longueur ni de direction dans le temps

La dérivée première du vecteur position \vec{OM} est :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

La dérivée seconde du vecteur position \vec{OM} est :

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

1.1.1.2 En coordonnées cylindriques

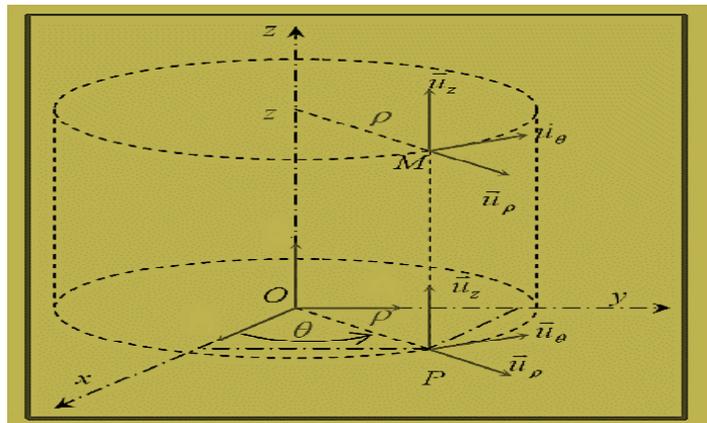
❖ Soit un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, Z) de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la position d'un point « M » est :

$$\vec{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

avec :

$$\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$



♦ L'élément de longueur $d\vec{OM}$ est : $d\vec{OM} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\vec{u}_\rho + dz\vec{u}_z$

$$d\vec{u}_\rho = -\sin \theta d\theta \vec{i} + \cos \theta d\theta \vec{j}$$

$$d\vec{u}_\rho = d\theta \left(\frac{-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}}{\vec{u}_\theta} \right)$$

$$d\vec{u}_\rho = d\theta \vec{u}_\theta$$

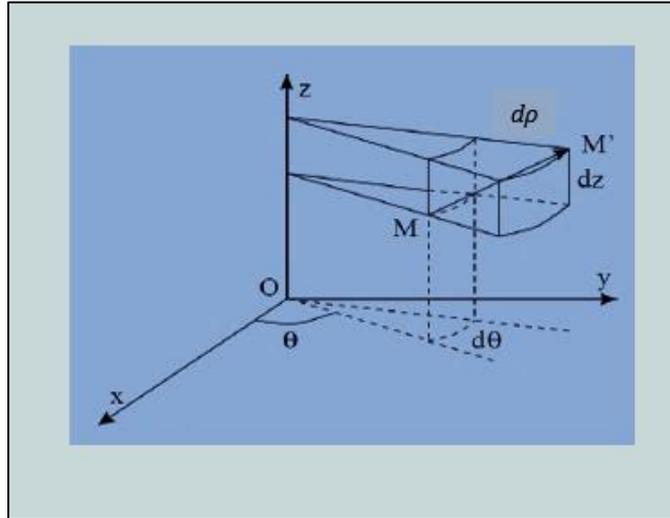
$$d\vec{OM} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

◆ L'élément de surface : $\rho = cte : dS = \rho d\theta dz$

$$\theta = cte : dS = \rho dz$$

$$z = cte : dS = \rho d\rho d\theta$$

◆ L'élément de volume : $d\tau = \rho d\rho d\theta dz$



❖ **Dérivées du vecteur position par rapport au temps**

Dans le système des coordonnées cylindriques les vecteurs \vec{u}_ρ et \vec{u}_θ changent dans le temps tandis que le vecteur \vec{u}_z est constant :

$$\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

où :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{i} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{j} = -\dot{\theta} \vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$$

La dérivée première du vecteur position \vec{OM} est :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

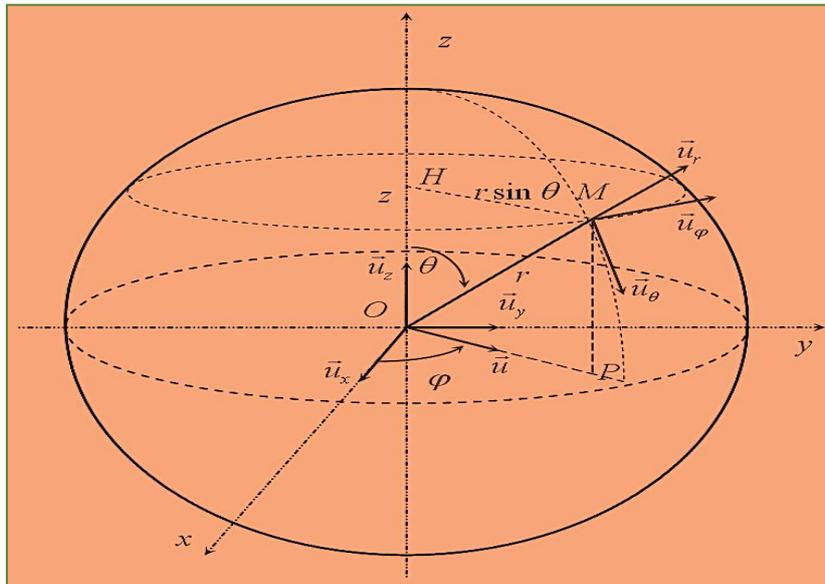
La dérivée seconde du vecteur position \overline{OM} est :

$$\frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + z\vec{u}_z)$$

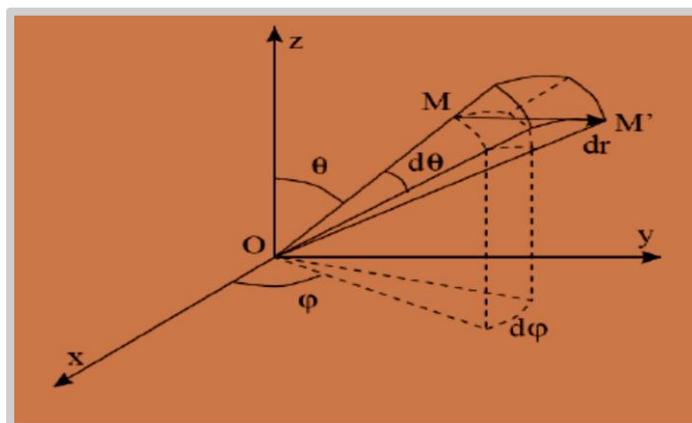
$$\frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

1.1.1.3 En coordonnées sphériques

❖ Soit un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, la position d'un point « M » est : $\overline{OM} = r\vec{u}_r$



- ◆ L'élément de longueur $d\overline{OM}$ est : $d\overline{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi$
- ◆ L'élément de surface : $r = cte : dS = r^2 d\theta \sin \theta d\varphi$
 $\theta = cte : dS = r dr \sin \theta d\varphi$
 $\varphi = cte : dS = r dr d\theta$
- ◆ L'élément de volume : $d\tau = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$



❖ **Dérivées du vecteur position par rapport au temps**

Dans le système des coordonnées sphériques les vecteurs $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ et \vec{u}_φ changent dans le temps :

$$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_r}{dt} &= (\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{i} + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{j} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_z \\ &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= (-\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \vec{i} + (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi) \vec{j} \\ &\quad - \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_z \\ &= -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{j} = -\dot{\varphi} (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \varphi \vec{u}_\theta)$$

● La dérivée première du vecteur position \overrightarrow{OM} est :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

● La dérivée seconde du vecteur position \overrightarrow{OM} est :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{u}_\theta \\ &\quad + (2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + r\ddot{\varphi} \sin \theta) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

1.2 Les Intégrales

1.2.1 Définitions

1.2.1.1 Fonction primitive

On appelle **fonction primitive** de la fonction $f(x)$, une autre fonction $F(x)$ telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Exemples

1. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{y^2}{2} + z^2$ est la fonction primitive de $f(x) = x^2 + 3y + 2z$
2. $F(x) = -2 \cos x + 2x$ est la fonction primitive de $f(x) = 2 \sin x + 2$

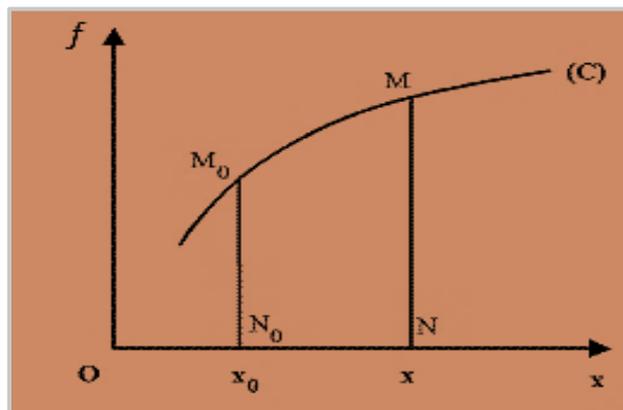
1.2.1.2 Intégrale simple

Soient les droites N_0M_0 d'abscisse x_0 fixe et NM d'abscisse x variable. L'aire (N_0M_0MN) représente l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ entre les points x_0 et x :

$$\text{L'aire } (N_0M_0MN) = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

$$\text{L'aire } (N_0M_0MN) = F(x) + \text{constante}$$

$F(x)$ est la fonction primitive de $f(x)$



L'ensemble des primitives de $f(x)$ est appelé *intégrale indéfinie* où :

$$\int f(x)dx = F(x) + \text{constante}$$

1.2.1.3 Intégrale multiple

L'intégrale multiple est une forme d'intégrale qui s'applique aux fonctions de plusieurs variables réelles.

Exemples

- ☀ Pour une fonction à deux variables : $\iint f(x, y)dx dy$
- ☀ Pour une fonction à trois variables : $\iiint f(x, y, z)dx dy dz$

1.2.2 Méthodes de calcul d'intégrales

1.2.2.1 Primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . Si sa primitive F est facile à déterminer, on peut alors utiliser la formule bien connue :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Des primitives usuelles sont données dans le tableau ci-dessous :

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
e^x	e^x	$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}, b \neq 0$	$\ln x + \sqrt{x^2+b} $
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$

Exemples

- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = 1$

1.2.2.2 Intégration par parties

Soit f et g des fonctions définies sur un intervalle I , nous avons :

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

Exemples

- Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 t^2 e^t \, dt$

Dans cette intégrale, nous posons $f'(x) = e^t$ et $g(x) = t^2$

Calculons $f(x)$ et $g'(x)$: $f(x) = e^t$ et $g'(x) = 2t$

$$\int_0^1 t^2 e^t \, dt = [t^2 e^t]_0^1 - 2 \underbrace{\int_0^1 t e^t \, dt}_{I_1}$$

Appliquons une deuxième fois l'intégration par parties pour le calcul de l'intégrale I_1 :

Nous posons : $u'(x) = e^t \Rightarrow u(x) = e^t$, $v(x) = t \Rightarrow v'(x) = 1$

$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e + 1 = 1$, alors :

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^1 - 2 = e - 2$$

2. Calculer $\int x \sin x dx$

Nous posons : $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$ et $f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

1.2.2.3 Intégration par changement de variables

L'intégration par changement de variables est un procédé d'intégration qui consiste à considérer une nouvelle variable d'intégration afin de remplacer une fonction de la variable d'intégration initiale.

Exemples

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$$

Posons : $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1 \Rightarrow dx = dy$,

$$0 \leftarrow x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 \leftarrow y \rightarrow 2$$

On aura :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{(y-1)^2}{y} dy = \int_1^2 \frac{y^2 - 2y + 1}{y} dy = \int_1^2 y dy - \int_1^2 2 dy + \int_1^2 \frac{1}{y} dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 - 2[y]_1^2 + [\ln(y)]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

alors,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

2. Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

Posons : $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2 \Rightarrow dx = 2y dy$,

$$0 \leftarrow x \rightarrow 1 \Rightarrow 0 \leftarrow y \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{2y}{1+y} dy = \int_0^1 \frac{2+2y-2}{1+y} dy = \int_0^1 \left(\frac{2(1+y)}{1+y} - \frac{2}{1+y} \right) dy \\ &= \int_0^1 2 dy - \int_0^1 \frac{2}{1+y} dy = 2[y]_0^1 - 2[\ln(1+y)]_0^1 \end{aligned}$$

alors,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2(1 - \ln(2))$$

1.3 Opérateurs mathématiques

1.3.1 L'opérateur gradient

1.3.1.1 En coordonnées cartésiennes

Soit $f(x, y, z)$ une **fonction scalaire** définie dans un repère cartésien, le gradient de f est une opération mathématique **vectorielle** appliquée à la fonction f tel que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$



Le gradient donne la direction de variation maximum d'une fonction.

1.3.1.2 En coordonnées cylindriques

Soit $f(\rho, \theta, z)$ une **fonction scalaire** définie dans un repère cylindrique, le gradient de f est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

1.3.1.3 En coordonnées sphériques

Soit $f(r, \theta, \varphi)$ une **fonction scalaire** définie dans un repère sphérique, le gradient de f est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

1.3.2 L'opérateur divergence

1.3.2.1 En coordonnées cartésiennes

Soit $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ une fonction vectorielle définie dans un repère cartésien, la divergence de \vec{V} est une opération mathématique **scalaire** appliquée à la fonction vectorielle \vec{V} tel que :

$$\text{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

1.3.2.2 En coordonnées cylindriques

Soit $\vec{V}(V_\rho, V_\theta, V_z)$ une fonction vectorielle définie dans un repère cylindrique, la divergence de \vec{V} est :

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

1.3.2.3 En coordonnées sphériques

Soit $\vec{V}(V_r, V_\theta, V_\phi)$ une fonction vectorielle définie dans un repère sphérique, la divergence de \vec{V} est :

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

1.3.3 L'opérateur rotationnel

1.3.3.1 En coordonnées cartésiennes

Soit $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ une fonction vectorielle définie dans un repère cartésien, le rotationnel de \vec{V} est une opération mathématique **vectorielle** appliquée à la fonction \vec{V} tel que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

1.3.3.2 En coordonnées cylindriques

Soit $\vec{V}(V_\rho, V_\theta, V_z)$ une fonction vectorielle définie dans un repère cylindrique, le rotationnel de \vec{V} est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_\rho \vec{u}_\rho + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_\theta \vec{u}_\theta + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_z \vec{u}_z$$

où :

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_{\theta} = \frac{\partial V_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_z = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_{\theta}) - \frac{\partial V_{\rho}}{\partial \theta} \right]$$

1.3.3.3 En coordonnées sphériques

Soit $\vec{V}(V_r, V_{\theta}, V_{\varphi})$ une fonction vectorielle définie dans un repère sphérique, le rotationnel de \vec{V} est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_r \vec{u}_r + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_{\theta} \vec{u}_{\theta} + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_{\varphi} \vec{u}_{\varphi}$$

où :

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (V_{\varphi} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \varphi} \right]$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_{\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_{\varphi})}{\partial r}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_{\varphi} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r V_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

Exercices corrigés

Exercice 1

1. Calculer le gradient des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y, z) = x^2 + 2y - z^3$$

$$f_2(x, y, z) = 3x + 2z - z^3$$

2. Donner la divergence des vecteurs suivants :

$$\vec{V} = (x + 2y)\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} - y^3\vec{k}$$

$$\vec{U} = (z + y)\vec{i} + (z^2 + 1)\vec{j} - (z^3 - 2)\vec{k}$$

Exercice 2

On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique :

$$\vec{V} = \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

1. Calculer $\text{div}(\vec{V})$
2. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$

Exercice 3

1. Donner le rotationnel des fonctions suivantes :

$$\vec{V} = (x + 2y)\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} - y^3\vec{k}$$

$$\vec{U} = (z + y)\vec{i} + (z^2 + 1)\vec{j} - (z^3 - 2)\vec{k}$$

2. Soit :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2yz \\ x^3z \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

- ◆ Calculer la divergence de \vec{V}
- ◆ Calculer le rotationnel de \vec{V}

Exercice 4

Soit M(t) un point d'un solide en rotation autour de l'axe OZ à la vitesse angulaire ω constante ($\omega = \dot{\theta}$). Le vecteur position \overrightarrow{OM} en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho \cos\theta(t)\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

ρ et z sont des constantes

1. Ecrire le vecteur vitesse du point M(t)
2. Calculer le rotationnel du vecteur vitesse

Exercice 5

Calculer la divergence de la fonction suivante exprimée en coordonnées sphériques (θ et φ sont des constantes) :

$$\vec{V} = r \cos\theta \vec{u}_r + r \sin\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_\varphi$$

Exercice 6

Déterminer le gradient de la fonction suivante en coordonnées sphériques (θ et φ sont des constantes) :

$$f(r, \theta, \varphi) = r(\cos\theta + \sin\theta \cos\varphi)$$

Exercice 7

Soit un vecteur :

$$\vec{V} = \rho(2 + \sin^2\theta)\vec{u}_\rho + \rho \sin\theta \cos\theta \vec{u}_\theta + 3z\vec{k}$$

(θ et ρ sont des constantes)

1. Calculer la divergence de \vec{V}
2. Calculer le rotationnel de \vec{V}

Exercice 8

1. Soit le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$
 - ◆ Retrouver la dérivée seconde de \overrightarrow{OM} ($\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$) en coordonnées cylindriques
2. Soit le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$
 - ◆ Retrouver la première dérivée de \overrightarrow{OM} ($\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$) en coordonnées sphériques

Exercice 9

Appliquer l'intégration par parties pour calculer :

$$1. \int \frac{\ln x}{x} dx ; \quad 2. \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx ; \quad 3. \int x^2 \cdot \ln(x) dx$$

Exercice 10

Appliquer l'intégration par changement de variables pour calculer :

$$1. \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx ; \quad 2. \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx ; \quad 3. \int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$$

Solutions des exercices

Exercice 1

1. Calcul du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f_1 = 2x\vec{i} + 2\vec{j} - 3z^2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f_2 = 3\vec{i} + (2 - 3z^2)\vec{k}$$

2. Calcul de la divergence :

$$\text{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{div}\vec{V} = 1$$

$$\text{div}\vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\text{div}\vec{U} = -3z^2$$

Exercice 2

$$\vec{V} = \frac{\vec{u}_r}{r^2} = V_r \vec{u}_r$$

$$1. \quad \operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 + 0 + 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \mathbf{0}$$

$$2. \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V})_r \vec{u}_r + (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V})_\theta \vec{u}_\theta + (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V})_\phi \vec{u}_\phi$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$$

Exercice 3

1).

$$\diamond \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = (-3y^2 - 1)\vec{i} + 0\vec{j} + 2(x - 1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = (-3y^2 - 1)\vec{i} + (2x - 2)\vec{k}$$

$$\diamond \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{U}) = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{U}) = (0 - 2z)\vec{i} - (0 - 1)\vec{j} + (0 - 1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{U}) = -2z\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

2). Soit :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2 y z \\ x^3 z \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad \operatorname{div} \vec{V} &= 2xyz + 0 + 0 \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 2xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) &= (2y - x^3) \vec{i} - \vec{j}(2x - x^2y) + 2x^2z \vec{k} \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos[\theta(t)] \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = -\rho \dot{\theta} \sin \theta(t) \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \cos \theta(t) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = -\rho \dot{\theta} \sin \theta(t) \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \cos \theta(t) \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\rho \omega \sin \theta \\ \rho \omega \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = 0 \vec{u}_\rho + 0 \vec{u}_\theta + \omega \cos \theta (2 + \omega) \vec{u}_z$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \omega \cos \theta (2 + \omega) \vec{u}_z$$

Exercice 5

$$\vec{V} = r \cos \theta \vec{u}_r + r \sin \theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 3 \cos \theta + 2 \cos \theta - \sin \varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 5 \cos \theta - \sin \varphi$$

Exercice 6

$$f(r, \theta, \varphi) = r(\cos \theta + \sin \theta \cos \varphi)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = (\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi)\vec{u}_r + \frac{1}{r}r(-\sin\theta + \cos\theta\cos\varphi)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}(-r\sin\theta\sin\varphi)\vec{u}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = (\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi)\vec{u}_r + (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta)\vec{u}_\theta - \sin\varphi\vec{u}_\varphi$$

Exercice 7

$$\vec{V} = \rho(2 + \sin^2\theta)\vec{u}_\rho + \rho\sin\theta\cos\theta\vec{u}_\theta + 3z\vec{k}$$

$$1. \quad \text{div}\vec{V} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{\rho} [2\rho(2 + \sin^2\theta) + \rho\cos\theta\cos\theta - \rho\sin\theta\sin\theta] + 3$$

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{\rho} [2\rho(2 + \sin^2\theta) + \rho\cos^2\theta - \rho\sin^2\theta] + 3$$

$$\text{div}\vec{V} = [4 + 2\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta] + 3$$

$$\text{div}\vec{V} = 8$$

$$2. \quad (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = 0$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})_\theta = \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho} = 0$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})_z = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\theta) - \frac{\partial V_\rho}{\partial\theta} \right] = \frac{1}{\rho} [2\rho\sin\theta\cos\theta - 2\rho\sin\theta\cos\theta]$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$$

Exercice 8

1. En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u}_z + z\frac{d\vec{u}_z}{dt}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\dot{\rho} + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{u}_\rho + \ddot{z}\vec{u}_z + \vec{0}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

2. En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Nous avons besoin de calculer :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Les vecteurs unitaires sont :

$$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

En dérivant ces trois vecteurs par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \vec{i} - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \vec{j} + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \vec{j} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \left(\frac{\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{u}_z}{\vec{u}_\theta} \right) + \dot{\varphi} \sin \theta \left(\frac{-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}}{\vec{u}_\varphi} \right)$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

alors,

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

Exercice 9

1. Pour le calcul de $\int \frac{\ln x}{x} dx$:

Nous posons $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln x$

Calculons $f(x)$: $f(x) = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow f(x) = \ln x$

Calculons $g'(x)$: $g'(x) = \frac{1}{x}$

Appliquant l'intégration par parties :

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)(\ln x) - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

2. Pour le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) dx$:

Nous posons $f'(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x$

Calculons $f(x) : f(x) = \int \cos(x) dx \Rightarrow f(x) = \sin x$

Calculons $g'(x) : g'(x) = 1$

Appliquant l'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) dx = [x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

3. Pour le calcul de $\int x^2 \ln(x) dx$:

Nous posons $f'(x) = x^2$ et $g(x) = \ln(x)$

Calculons $f(x) : f(x) = \int x^2 dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3}$

Calculons $g'(x) : g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$$

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right) + C$$

Exercice 10

1. Calcul de :

$$\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Posons : $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$,

$$1 \leftarrow x \rightarrow 4 \Rightarrow 1 \leftarrow u \rightarrow 2$$

$$\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 2u \left(\frac{1-u}{u} \right) du = \int_1^2 2du - \int_1^2 2udu$$

$$= [2u - u^2]_1^2 = -1$$

$$\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -1$$

2. Calcul de :

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$$

Posons : $u = \ln x \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx = xdu$, $1 \leftarrow x \rightarrow e \Rightarrow 0 \leftarrow u \rightarrow 1$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \int_0^1 u^n du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1}$$

3. Calcul de $\int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$:

Posons : $u = x^2 \Leftrightarrow 2xdx = du \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u-4)^2} du = -\frac{1}{2(u-4)}$$

$$\int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2-4)} + C$$

Chapitre 2
Electrostatique

Chapitre 2 Electrostatique

2 Electrostatique

L'électrostatique est une branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques en état de repos.

2.1 Phénomène d'électrisation

Vous avez tous observé, un jour, en vous peignant, que vos cheveux étaient attirés par le peigne (voir figure 1). Le même phénomène d'attraction apparaît lorsque vous déballez un article enveloppé de cellophane.

Ces deux phénomènes sont dus à l'électrisation du peigne et de la feuille de cellophane.

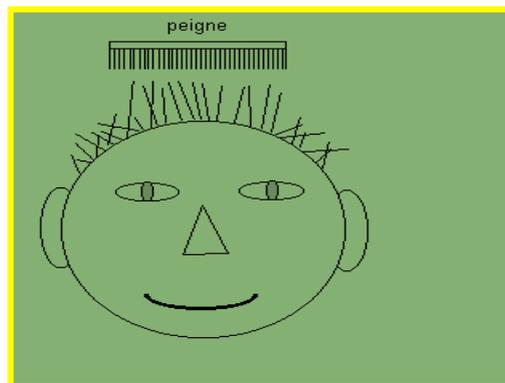
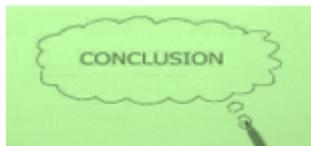


Figure 1. Electrisation d'un peigne



Sous l'effet de frottement, des matériaux acquièrent une propriété appelée « **électricité** », cette propriété électrique donne naissance à une interaction plus grande que celle de gravitation.

2.1.1 Les trois types d'électrisation

2.1.1.1 Electrisation par frottement

Si l'on frotte une baguette (verre, ébonite, matière plastique...) contre un chiffon quelconque (tissu de laine, drap, peau de chat) on observe **que la baguette est capable d'attirer de menus objets** tels que : cheveux, duvet, confettis tel qu'il est montré sur la figure 2.

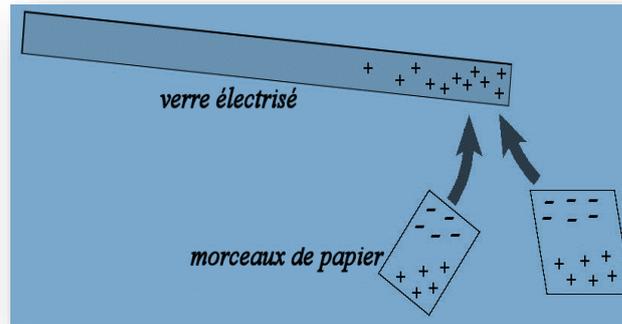


Figure 2. Electrification de la baguette du verre



C'est le frottement qui a provoqué l'électrification de la baguette du verre

2.1.1.2 Electrification par influence et par contact

Prenons une boule en métal suspendue par un fil non conducteur d'électrification.

Observation 1 :

Lorsqu'on approche une règle en PVC (matière plastique) électrisée de la boule : la boule est déplacée vers la règle (figure 3).

Observation 2 :

Après contact avec la règle, la boule est **repoussée** (figure 4).

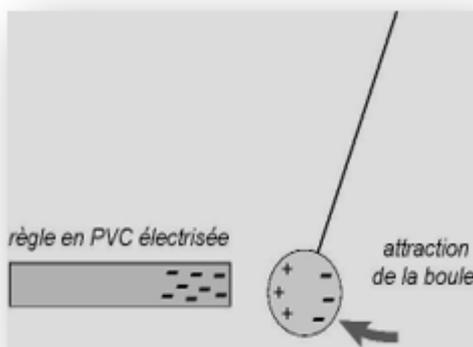


Figure 3. Attraction de la boule

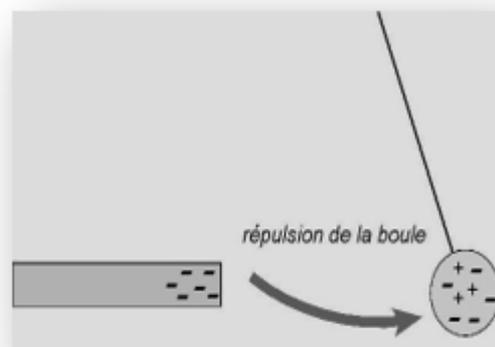


Figure 4. Répulsion de la boule

Interprétation

Observation 1 : La boule est neutre (elle n'est pas électrisée), avant le contact et sous l'influence des charges de la règle, les électrons sont repoussés d'un côté de la boule. Il se crée une dissymétrie dans la répartition des électrons ce qui permet une attraction (fig.3) : **c'est ce qu'on appelle l'électrisation par influence.**

Observation 2 : Lors du contact, un transfert d'électrons se produit de la règle vers la boule (figure 5), ce qui lui permet d'avoir un nombre d'électrons plus élevé (**elle n'est plus neutre**) et s'éloigne de la règle (figure 4) : **c'est ce qu'on appelle l'électrisation par Contact.**

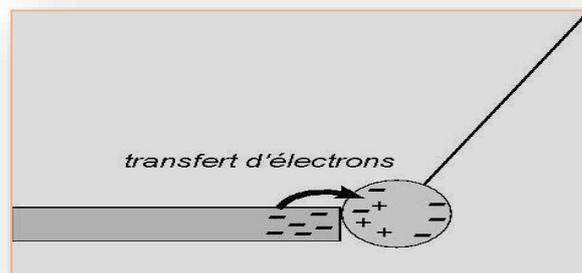


Figure 5. Transfert d'électrons lors d'une électrisation par contact

2.2 Interaction électrostatique

Nous caractérisons l'état d'électrisation d'un corps en définissant sa charge électrique représentée par le symbole « q ». Afin de déterminer la nature de la charge électrique « q », nous effectuons l'expérience suivante :

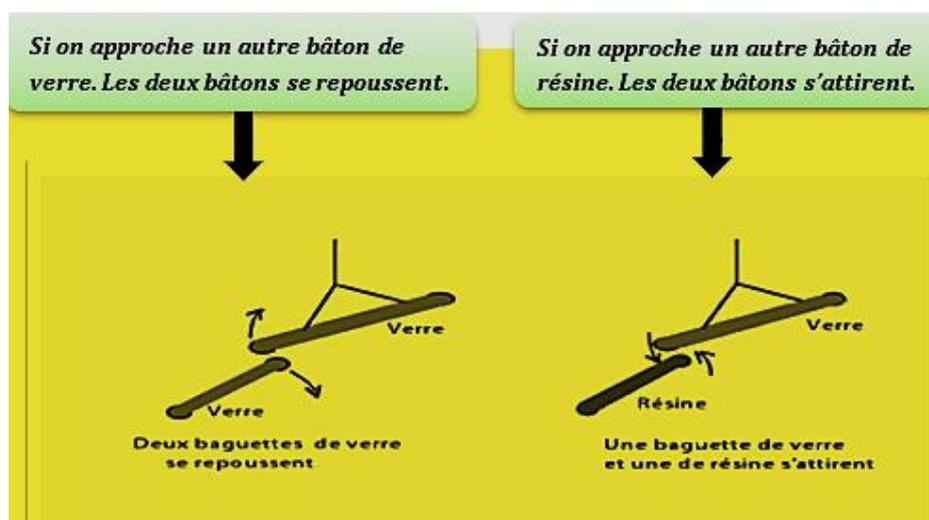


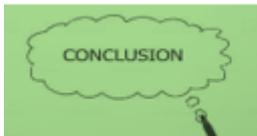
Figure 6

On suspend par un fil isolant **un bâton de verre électrisé** et nous en approchons deux bâtons de natures différentes comme il est indiqué sur la figure 6.

En analysant cette expérience on conclut que les matériaux se trouvent en deux catégories :

La première catégorie contient ceux qui attirent la baguette de verre et repoussent celle de résine.

La deuxième catégorie contient ceux qui attirent la baguette de résine et repoussent celle de verre.



- ◆ **Tous les corps d'une même catégorie se repoussent entre eux.**
- ◆ **Tous les corps de catégorie différente s'attirent.**

Quand ce phénomène a été constaté, on a admis qu'il existait deux sortes d'électrisations appelées respectivement "**vitreuse**" et "**résineuse**".

Au 18^{me} siècle, on a changé ces appellations pour les remplacer par "positive" et "négative" :

- ☀ Un état d'électricité vitreuse « **positif** »
- ☀ Un état d'électricité résineuse « **négatif** »

Résumé:

Deux corps dans des états électriques de même signe se repoussent alors que deux corps dans des états électriques de signe différent s'attirent (voir figure 7).

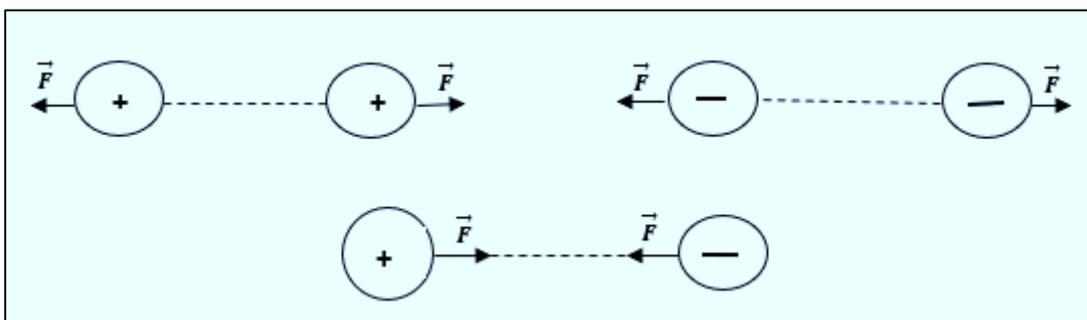


Figure 7. Interaction entre deux charges électriques

2.3 Loi de Coulomb dans le vide

2.3.1 Force de Coulomb

Dans le but de déterminer les propriétés de la force électrostatique exercée entre deux charges ponctuelles, **Charles Augustin Coulomb** (1736-1806) effectua une série de mesures de cette interaction à l'aide d'une balance de torsion (figure 8). Cette étude lui a permis d'annoncer la loi régissant cette force.



Figure 8. Balance de Coulomb

Enoncé de la loi de Coulomb :

L'interaction électrostatique entre deux particules chargées est proportionnelle au produit des deux charges et inversement proportionnelle au carré de leurs distance, sa direction se trouvant le long de la droite joignant les deux charges.

2.3.1.1 Expression mathématique de la force de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées par une distance r (figure 9). La charge q_1 exerce sur q_2 une force d'interaction électrostatique donnée par :

$$\vec{F}_{1/2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

De même q_2 exerce sur q_1 une force d'interaction électrostatique donnée par :

$$\vec{F}_{2/1} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{2/1}$$

La constante de proportionnalité K vaut : $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ .SI } (Nm^2C^{-2})$

La constante ϵ_0 est appelée la permittivité électrique du vide (unité : Farad/m).

- ☀ Si q_1 et q_2 sont de même signe cette force est **répulsive**
- ☀ Si q_1 et q_2 ont des signes opposés cette force est **attractive**

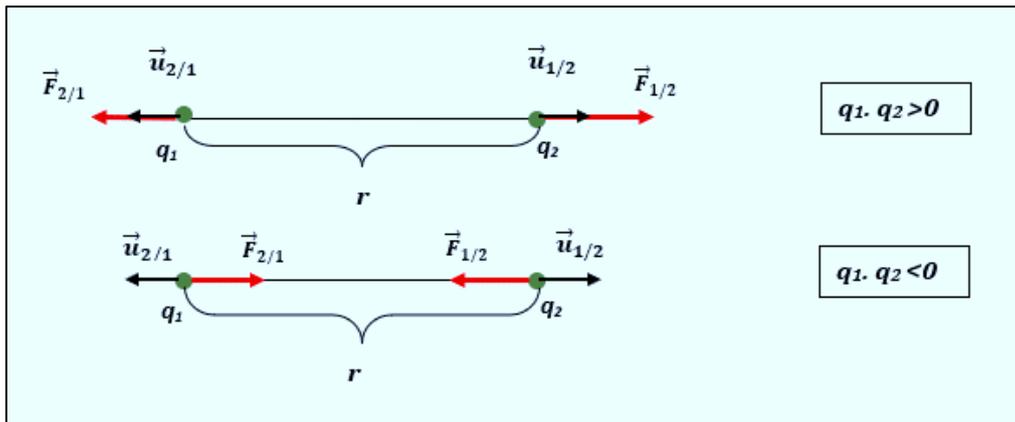


Figure 9. Forces de Coulomb entre deux charges ponctuelles

A retenir

Les caractéristiques de la force de Coulomb :

- * La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges
- * Elle est proportionnelle au produit des charges
- * Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux charges.

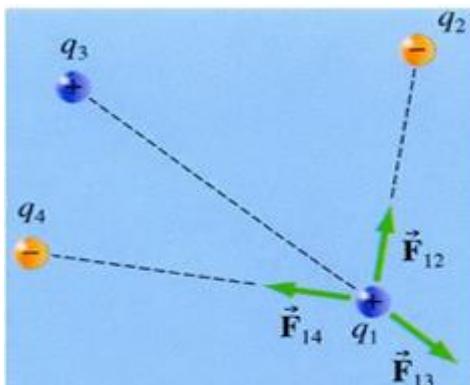
2.3.1.2 Principe de superposition

Les forces électriques obéissent au **principe de superposition** ce qui signifie que la force résultant de l'action de plusieurs charges est la somme des forces produites par chacune des charges.

Exemple

\vec{F}_{12} , \vec{F}_{13} et \vec{F}_{14} représentent les forces électrostatiques exercées par les charges q_2 , q_3 et q_4 sur la charge q_1 (voir figure 10).

D'après le **principe de superposition**, la force totale exercée sur q_1 est :



$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

Figure 10. Application du principe de superposition

Q : Calculer l'intensité de la force électrostatique agissant sur la charge q (voir figure 11), sachant que : $q_1 = -1,5 \cdot 10^{-3} C$; $q_2 = 0,5 \cdot 10^{-3} C$; $q = -0,2 \cdot 10^{-3} C$; $r_1 = 1,2 m$ et $r_2 = 0,5 m$

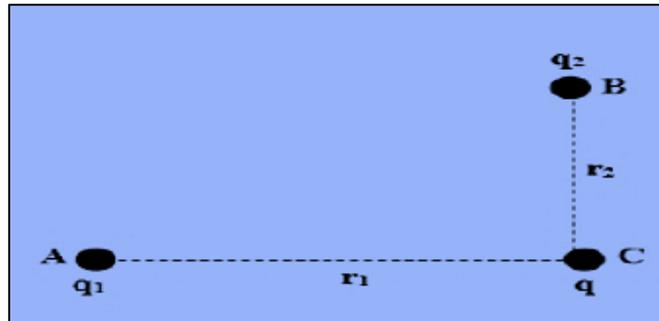


Figure 11

R : Faisons la représentation des forces appliquées sur q (figure 12) :

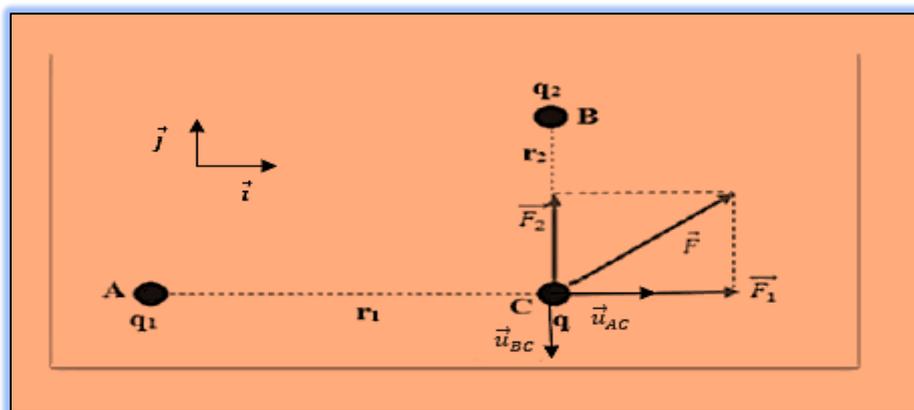


Figure 12. Représentation des forces électrostatiques

q_1 et q ont le même signe, dans ce cas \vec{F}_1 est répulsive :

$$\vec{F}_1 = \frac{K q_1 q}{r_1^2} \vec{u}_{AC}$$

q_2 et q ont un signe opposé, dans ce cas \vec{F}_2 est attractive :

$$\vec{F}_2 = \frac{K q_2 q}{r_2^2} \vec{u}_{BC}$$

La force totale exercée sur q :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = \frac{K q_1 q}{r_1^2} \vec{u}_{AC} + \frac{K q_2 q}{r_2^2} \vec{u}_{BC}$$

Nous avons : $\vec{u}_{AC} = \vec{i}$; $\vec{u}_{BC} = -\vec{j}$

alors :

$$\vec{F} = \frac{K q_1 q}{r_1^2} \vec{i} - \frac{K q_2 q}{r_2^2} \vec{j}$$

Le module de la force \vec{F} :

$$|\vec{F}| = \sqrt{\left(\frac{K q_1 q}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{K q_2 q}{r_2^2}\right)^2}$$

A.N : $|\vec{F}| = 4,1 \cdot 10^3 N$

2.3.2 Champ électrostatique

2.3.2.1 Notion de champ

En général, **le champ** est une propriété physique s'étendant sur une région de l'espace. Cette propriété est une grandeur mesurable associée à chaque point de cet espace. Le champ peut être scalaire ou vectoriel.

Un champ scalaire

Lorsque cette grandeur mesurable est caractérisée par une valeur numérique on est en présence **d'un champ scalaire**.

Exemple

La distribution de la température à travers l'espace est mesurée à l'aide d'un thermomètre (figure 13). La température dans cet espace est un champ scalaire.

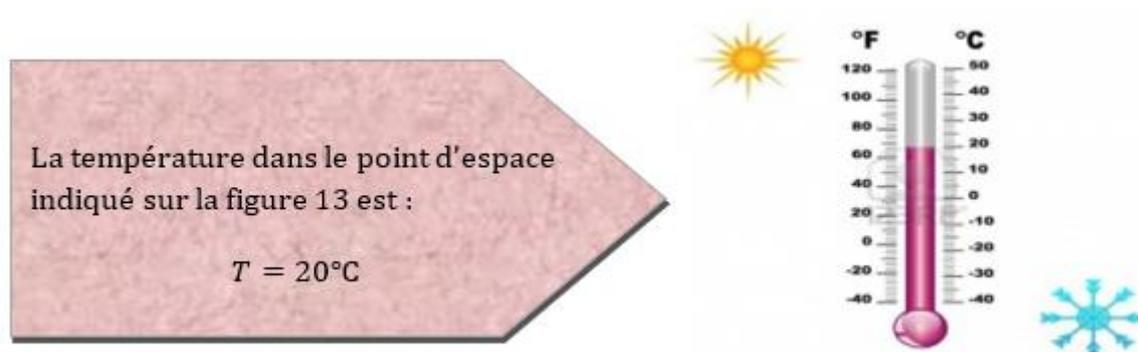


Figure 13. Thermomètre

Un champ vectoriel

Lorsque cette grandeur mesurable a les caractéristiques d'un vecteur on est en présence **d'un champ vectoriel**.

Exemple :

La figure 14 indique que le champ de gravitation terrestre est caractérisé par un point d'application, une direction et un sens : \vec{g} est un champ vectoriel

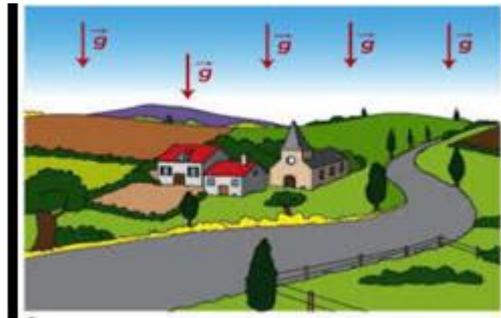


Figure 14. Champ de gravitation terrestre

2.3.2.2 Définition du champ électrostatique

Toute région dans laquelle une charge électrique subit une force, due à la présence d'autres charges, est appelée **champ électrique**.

● Caractéristiques du champ électrostatique

Soit une charge ponctuelle q_0 en un point « O » et des charges q_1 , q_2 et q_3 placées aux points M_1 , M_2 et M_3 respectivement (figure 15) avec :

$$|\vec{OM}_1| = |\vec{OM}_2| = |\vec{OM}_3| = r$$

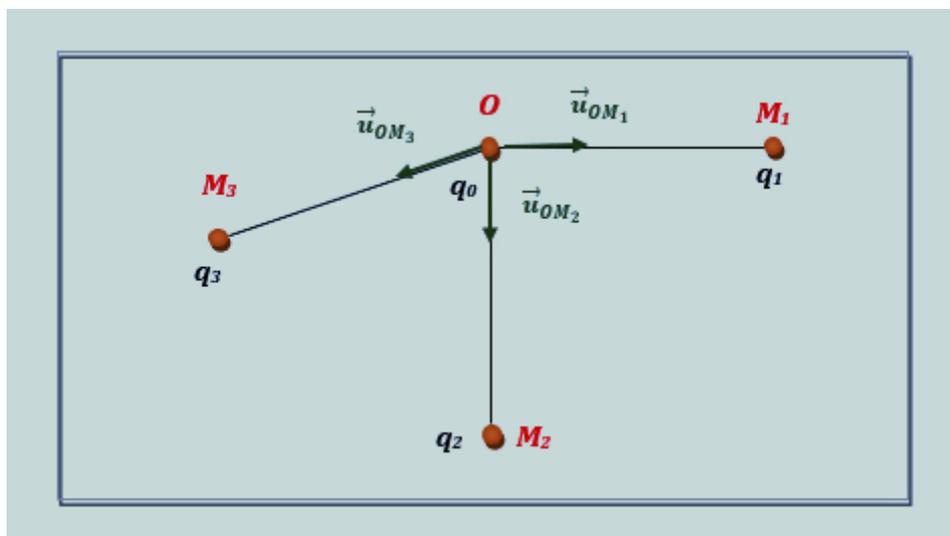


Figure 15

D'après la loi de Coulomb les forces électrostatiques exercées par q_0 sont :

Sur q_1 :

$$\vec{F}_1 = \frac{Kq_0q_1}{r^2} \vec{u}_{OM_1} = q_1 \cdot \vec{E}_1$$

Sur q_2 :

$$\vec{F}_2 = \frac{Kq_0q_2}{r^2} \vec{u}_{OM_2} = q_2 \cdot \vec{E}_2$$

Sur q_3 :

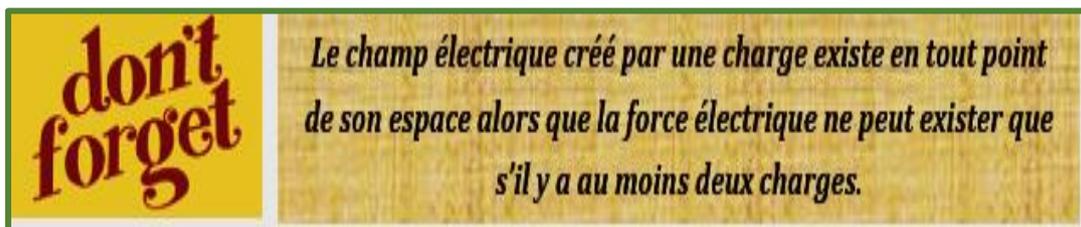
$$\vec{F}_3 = \frac{Kq_0q_3}{r^2} \vec{u}_{OM_3} = q_3 \cdot \vec{E}_3$$

Nous remarquons que toutes les forces appliquées par q_0 contiennent le terme $\frac{Kq_0}{r^2} \vec{u}_{OM_n}$ où le vecteur \vec{u}_{OM_n} indique le vecteur unité dirigé de la charge q_0 vers n'importe quelle charge q_n .

Cette grandeur vectorielle $\frac{Kq_0}{r^2} \vec{u}_{OM_n}$ représente le champ électrique créé par q_0 (située au point O) en un point M_n où :

$$\vec{E} = \frac{Kq_0}{r^2} \vec{u}_{OM_n} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{OM_n}$$

« r » représente la distance entre la charge qui crée le champ et le point M_n .



Soit \vec{E} le champ électrique créé en un point M par une charge q_0 . Si on place une charge q en M , la force de Coulomb appliquée par q_0 sur q peut être déterminée par :

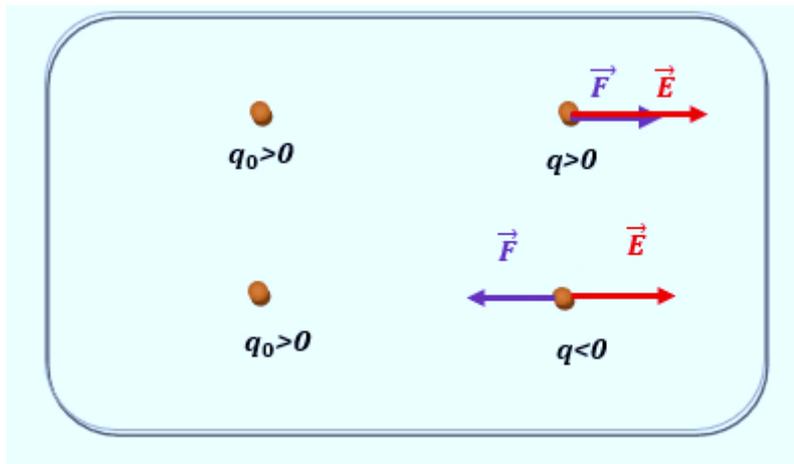
$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (A)$$

D'après l'équation (A) :

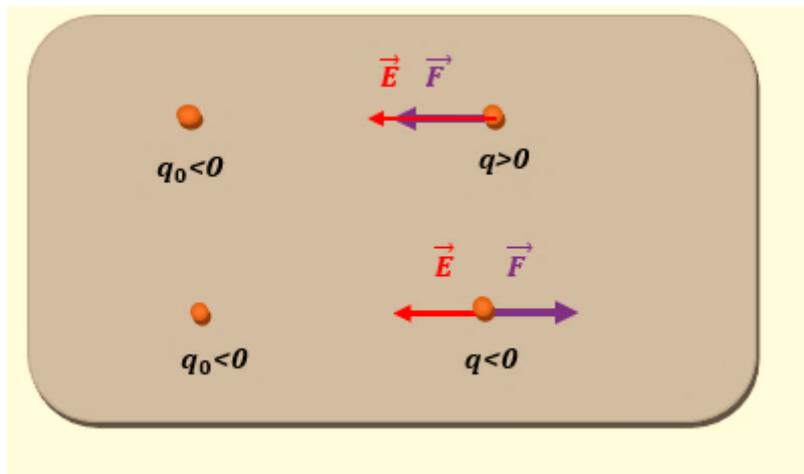
- Si $q > 0$: \vec{E} et \vec{F} ont le même sens
- Si $q < 0$: \vec{E} et \vec{F} ont des signes opposés

Explication

1. Dans le cas où $q_0 > 0$



2. Dans le cas où $q_0 < 0$

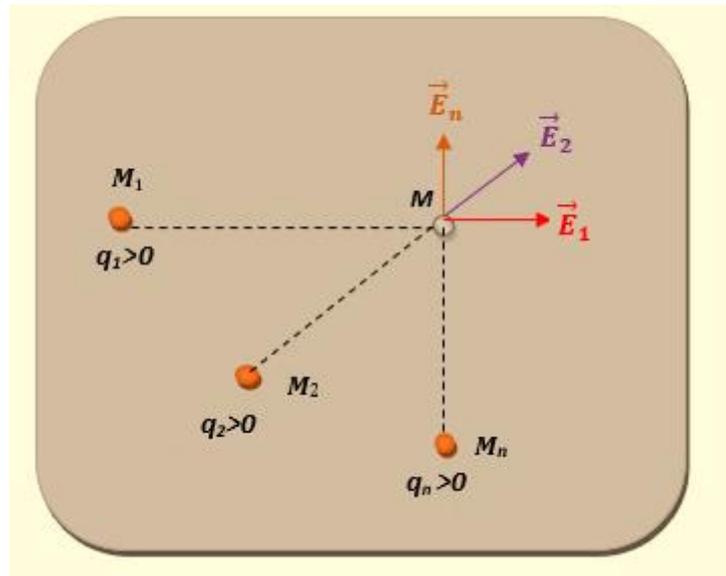


A retenir

- Le vecteur \vec{E} créé par une charge $q > 0$ en M est dirigé de q vers M
- Le vecteur \vec{E} créé par une charge $q < 0$ en M est dirigé de M vers q

2.3.2.3 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Soit un ensemble de charges ponctuelles $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ situées au points $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$. Chaque charge crée au point M un champ électrostatique comme le montre la figure 16.

Figure 16. Champ \vec{E} créé par n charges positives

Les champs électrostatiques obéissent au **principe de superposition** ; le champ électrostatique total créé au point M est égal à la somme vectorielle des champs créés par $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$:

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

$$\vec{E}_M = \frac{Kq_1}{(M_1M)^2} \vec{u}_1 + \frac{Kq_2}{(M_2M)^2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{Kq_n}{(M_nM)^2} \vec{u}_n$$

$$\vec{E}_M = \sum_{i=1}^n \frac{Kq_i}{(M_iM)^2} \vec{u}_i$$

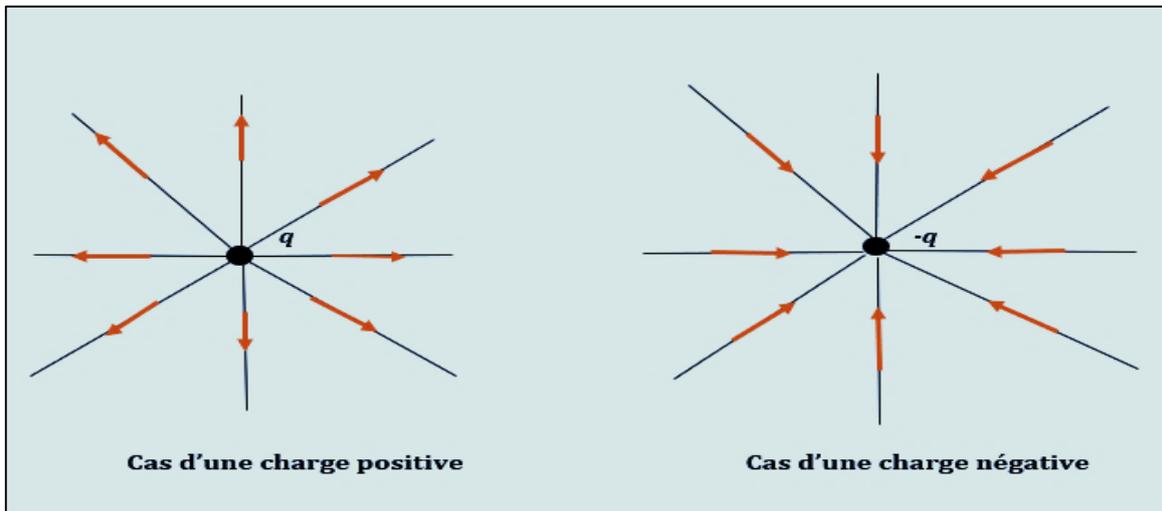
\vec{u}_i représente le vecteur unitaire dirigé de la charge q_i vers le point M .

2.3.2.4 Lignes de champ électrostatique

Une ligne de champ est une courbe telle qu'en chacun de ses points, le champ électrique soit porté par la tangente à la courbe.

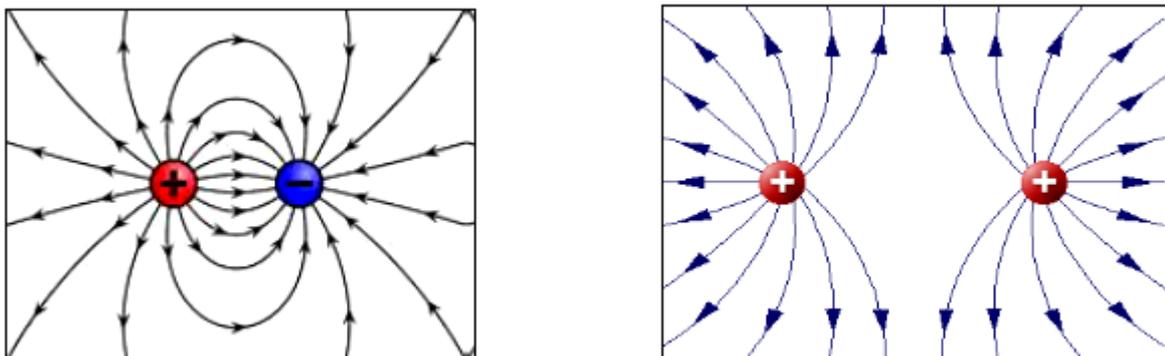
2.3.2.4.1 Cas d'une seule charge

Dans ce cas les lignes de champ sont des droites qui se coupent au point où est placée la charge.



2.3.2.4.2 Cas de deux charges ponctuelles

Les lignes de champ dans le cas de deux charges ponctuelles de même signe et celles de deux charges de signe opposé sont représentées sur le schéma ci-dessous :



Q : Déterminer le champ électrostatique créé par trois charges ponctuelles identiques ($q > 0$) placées aux sommets d'un triangle équilatéral, en son centre géométrique G .

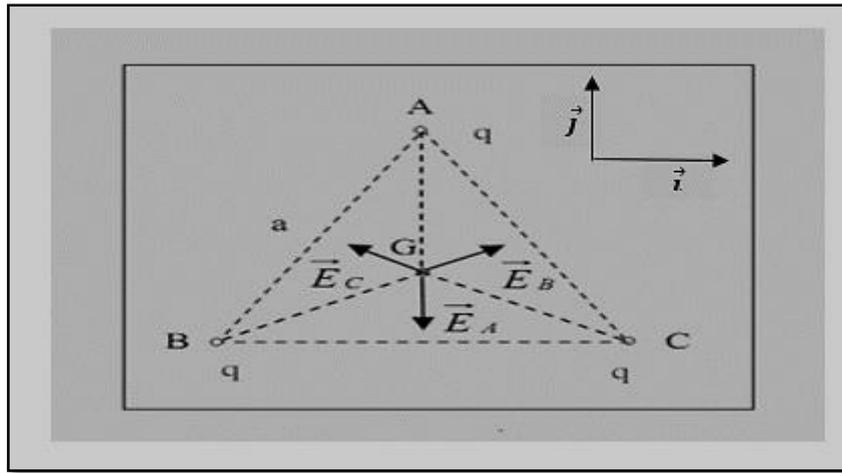
R : En appliquant le principe de superposition, le champ total au point G est (voir le schéma ci-dessous :

$$\vec{E}_G = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E}_G = \frac{Kq}{(AG)^2} \vec{u}_{AG} + \frac{Kq}{(BG)^2} \vec{u}_{BG} + \frac{Kq}{(CG)^2} \vec{u}_{CG}$$

$\Delta(ABC)$ est un triangle équilatéral alors la distance $(AG) = (BG) = (CG)$, le champ total est :

$$\vec{E}_G = \frac{Kq}{(AG)^2} (\vec{u}_{AG} + \vec{u}_{BG} + \vec{u}_{CG})$$



La projection des trois vecteurs unitaires \vec{u}_{AG} , \vec{u}_{BG} et \vec{u}_{CG} sur la base (\vec{i}, \vec{j}) donne :

$$\vec{u}_{BG} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{u}_{AG} = -\vec{j}$$

$$\vec{u}_{CG} = -\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

θ est l'angle entre la droite (BC) et la droite (BG) ; $\theta = \frac{\pi}{6}$

Le champ total au point G est :

$$\vec{E}_G = \frac{Kq}{(AG)^2} \left(-\vec{j} + 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \vec{j} \right)$$

Alors : $\vec{E}_G = \vec{0}$

2.3.3 Circulation d'un champ électrostatique \vec{E} créé par une charge q

Le champ électrostatique en un point M créé par une charge fixe et ponctuelle $q > 0$ (voir figure 17) est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

« r » représente la distance entre q et le point M .

Pour un déplacement élémentaire \vec{dl} autour de M , la circulation élémentaire est définie par :

$$dC(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

En se basant sur la figure 17, calculons le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{dl}$

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{dl}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

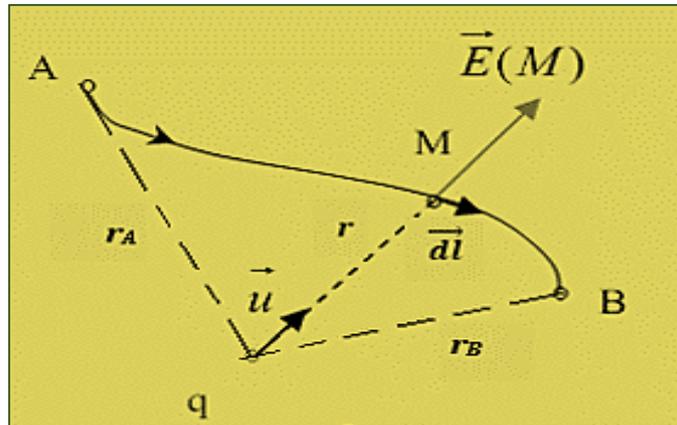


Figure 17. Circulation d'un champ électrostatique \vec{E}

$dr = \vec{u} \cdot d\vec{l}$ (dr est la projection de $d\vec{l}$ sur \vec{u})

La circulation élémentaire s'écrit alors :

$$dC(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

La circulation totale de \vec{E} du point A au point B est :

$$C_A^B(\vec{E}) = \int_A^B dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_A^B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$C_A^B(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

r_A et r_B représentent les positions des deux points A et B par rapport à la charge q qui crée le champ \vec{E} .

CONCLUSION

La circulation de \vec{E} entre deux points ne dépend que de leurs positions initiales et finales et non pas du trajet suivi. On dit que \vec{E} est à circulation conservative.

\mathcal{Q} : Un champ électrostatique \vec{E} part du point A et revient au point A selon la trajectoire fermée (figure 18). Calculer la circulation de \vec{E} dans ce cas.

\mathcal{R} : La circulation du champ \vec{E} est donnée par :

$$C_A^A(\vec{E}) = \int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

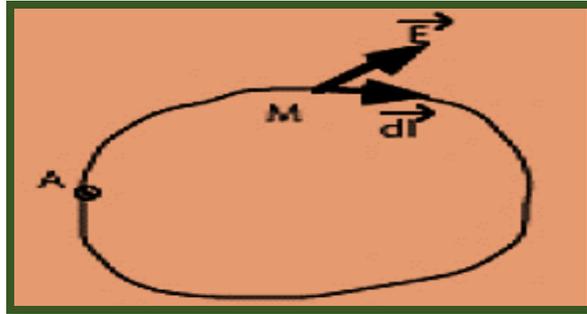


Figure 18. Circulation du champ \vec{E} sur un parcours fermé



La circulation d'un champ électrostatique \vec{E} à travers un contour fermé est nulle.

2.3.4 Potentiel électrostatique

Dans le paragraphe précédent nous avons défini la circulation élémentaire d'un champ \vec{E} par l'équation :

$$dC(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Cette équation peut s'écrire comme :

$$dC(\vec{E}) = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}\right) = -dV$$

L'expression en **couleur rouge** est une fonction scalaire qui dépend de q et de r ; c'est une grandeur électrostatique appelée le potentiel électrostatique V tel que :

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(M) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Le potentiel électrostatique créé par la charge q en un point M à une distance r est donné par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{CONSTANTE}$$

2.3.4.1 Propriétés du potentiel électrostatique

- * L'unité du potentiel électrostatique dans le système SI est le Volt :
 $(V = Nm^2C^{-2}Cm^{-1} = NmC^{-1} = Kgms^{-2}mC^{-1} = Kg m^2 s^{-2} C^{-1})$
- * Le potentiel est déterminé par la différence de potentiel entre deux points, il est donc défini à une constante près
- * Quand la distance r tend vers l'infini $V(M)$ tend vers 0 , alors :

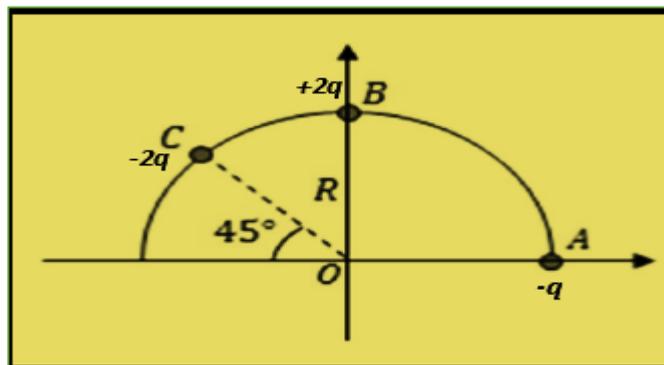
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

2.3.4.2 Potentiel électrostatique créé par un système de plusieurs charges

Le principe de superposition est aussi valable pour le calcul du potentiel électrostatique. Le potentiel en un point M créé par un ensemble de charges $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ placées à des distances $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ de M est donné par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Q : Trois charges ponctuelles q_A, q_B et q_C sont placées respectivement aux points A, B et C appartenant à un cercle de centre O et de rayon R selon la figure ci-dessous. Calculer le potentiel électrostatique au point O .



\mathcal{R} : En appliquant le principe de superposition, le potentiel électrostatique au point O est :

$$V_O = V_A + V_B + V_C$$

$$V_A = K \frac{q_A}{r_A} = K \frac{-q}{R}$$

$$V_B = K \frac{q_B}{r_B} = K \frac{2q}{R}$$

$$V_C = K \frac{q_C}{r_C} = K \frac{-2q}{R}$$

$$V_O = K \frac{-q}{R} + K \frac{2q}{R} + K \frac{-2q}{R}$$

$$V_O = -K \frac{q}{R}$$

2.3.5 La relation entre le champ \vec{E} et le potentiel V

On présente les propriétés électrostatiques de l'espace soit par le champ électrique soit par le potentiel électrique. Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire de \vec{E} :

En coordonnées cartésiennes :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

Alors :

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -(E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

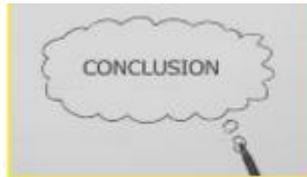
Par identification :

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Le champ électrostatique peut s'écrire :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$



- *Le champ électrostatique dérive du potentiel électrostatique V .*
- *Le champ électrostatique est orienté vers les potentiels décroissants*

don't forget

Quand on te demande de **déduire** \vec{E} ou V , utiliser l'équation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Q :

1. Déduire le vecteur champ électrique de l'expression du potentiel :

$$V(x, y, z) = 3x^2y + z^2$$

2. Calculer le module du champ \vec{E} au point $A(1, 2, -1)$.

R : 1. Pour déduire \vec{E} , il suffit de calculer en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = 6xy\vec{i} + 3x^2\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$\vec{E} = -6xy\vec{i} - 3x^2\vec{j} - 2z\vec{k}$$

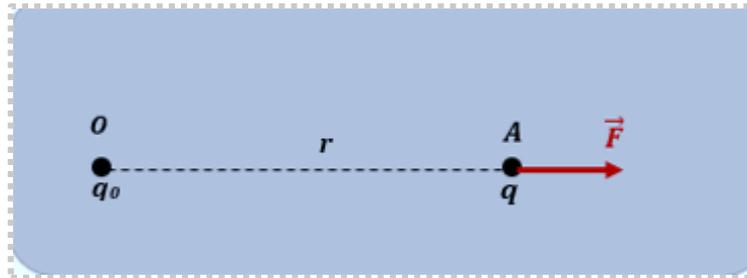
3. Le module du champ \vec{E} au point $A(1, 2, -1)$ est :

$$|\vec{E}| = \sqrt{36x^2y^2 + 9x^4 + 4z^2}$$

A.N: $|\vec{E}| = 12,53 \text{ V/m}$

2.3.6 Energie potentielle électrostatique

- ◆ **Définition** : l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.
- ◆ **Expression de l'énergie électrostatique** : Soient q_0 et q deux charges ponctuelles positives, séparées par une distance r et \vec{F} est la force exercée par q_0 sur q comme le montre le schéma ci-dessous :



Pour transporter la charge q depuis l'infini jusqu'à la position A , il faut appliquer une force $(-\vec{F})$ où :

$$dW_{\infty \rightarrow A} = -\vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow W_{\infty \rightarrow A} = \int_{\infty}^A -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{\infty \rightarrow A} = \int_{\infty}^A -q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Sachant que : $\int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^A dV$, alors :

$$W_{\infty \rightarrow A} = q \left(V_A - \underbrace{V_{\infty}}_0 \right)$$

$$W_{\infty \rightarrow A} = qV_A$$



Le potentiel électrostatique à l'infini loin des charges est nul

D'après la définition de l'énergie potentielle de la charge q :

$$E_p = qV = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Q : Quatre charges électriques ponctuelles q_0, q_A, q_B et q_C sont placées aux points $(0,0)$ $A(a,0), B(0,a)$ et $C(-a,0)$ respectivement comme le montre la figure ci-dessous.

- Calculer l'énergie potentielle électrostatique de la charge q_0 dans le cas où :

$q_A = q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}, q_B = -2q, q_C = 2q, q_0 = -q$ et $a = 5 \text{ cm}$.

R : L'énergie électrostatique de la charge q_0 :

$$E_p = \frac{Kq_Aq_0}{a} + \frac{Kq_Bq_0}{a} + \frac{Kq_Cq_0}{a}$$

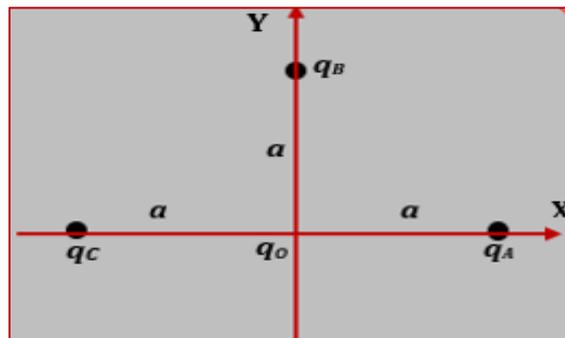
$$E_p = \frac{Kq_0}{a}(q_A + q_B + q_C)$$

$$E_p = \frac{-Kq}{a}(q - 2q + 2q)$$

$$E_p = \frac{-Kq^2}{a}$$

A.N :

$$E_p = -7.2 \cdot 10^{-7} \text{ joule}$$



Exercices corrigés



Afin de résoudre correctement un exercice en électrostatique on doit représenter son schéma et les grandeurs vectorielles demandées (\vec{F} et \vec{E}).

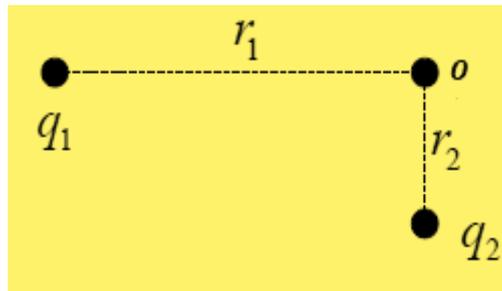
Exercice 1

Deux charges ponctuelles $q_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ et $q_2 = -4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ séparées à une distance $d = 110 \text{ cm}$. Le point O se trouve à une distance $x = 66 \text{ cm}$ de la charge q_1 .

1. Calculer le potentiel au point O
2. Quelles sont la valeur et la direction du champ électrique en ce point ?

Exercice 2

Soient q_1 et q_2 deux charges ponctuelles disposées selon le schéma suivant :



1. Calculer le potentiel électrique créé par les charges q_1 et q_2 au point O
 2. Calculer l'énergie électrostatique d'une charge q_3 placée au point O .
- $q_1 = -1.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$, $q_2 = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$, $q_3 = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$, $r_1 = 1.2 \text{ m}$ et $r_2 = 0.5 \text{ m}$

Exercice 3

Soient trois charges ponctuelles situées aux points A , B et C . Tous les points sont sur une droite, le point C est entre les points A et B . Les distances $AC = 3,0 \text{ cm}$ et $BC = 5,0 \text{ cm}$.

- Calculer la force qui s'exerce sur la charge q_C par les charges q_A et q_B dans le cas où :
 $q_A = 30 \text{ nC}$, $q_B = 10 \text{ nC}$ et $q_C = 50 \text{ nC}$.

Exercice 4

Trois charges Q_1 , Q_2 et Q_3 sont situées aux sommets d'un triangle rectangle, la distance entre Q_1 et Q_2 est ($y = 1 \text{ m}$) et celle entre Q_1 et Q_3 est ($x = 2 \text{ m}$).

- Calculer la force qui s'exerce sur la charge Q_3 due à la présence des charges Q_1 et Q_2 .

$Q_1 = 30 \mu\text{C}$, $Q_2 = -60 \mu\text{C}$ et $Q_3 = 40 \mu\text{C}$.

Exercice 5

Quatre charges ponctuelles identiques $-q$ ($q > 0$) sont fixées aux sommets A , B , C et D d'un carré de côté a .

- Déterminer le champ électrique au centre O du carré.

Exercice 6

On considère trois charges ponctuelles situées aux sommets du triangle équilatéral (ABC) de côté « d » avec : $q_1 = +3q$, $q_2 = +q$, $q_3 = +2q$. Ces trois charges sont placées respectivement en A , B et C .

1. Déterminer le champ électrique créé par les trois charges q_1 , q_2 et q_3 à l'origine O
2. Déterminer le potentiel électrique créé par les trois charges q_1 , q_2 et q_3 au point O
3. On place une charge $q_4 = -q$ au point O , déterminer :
 - a) La force électrique exercée sur la charge q_4
 - b) L'énergie potentielle de la charge q_4 .

Exercice 7

Quatre charges positives de même valeur q sont placées sur les sommets d'un carré de côté a .

1. Calculer le potentiel au point M_1 puis au point M_2 situés au milieu du côté a
2. Calculer l'énergie potentielle d'une charge q placée au point M_1
3. Calculer l'énergie potentielle d'une charge $-q$ placée au point M_2 .

Exercice 8

On considère un système de trois charges ponctuelles : deux charges positives ($+q$) et une charge négative ($-3q$). Ces charges disposées respectivement aux points $A(0, a)$, $B(0, -a)$ et $O(0, 0)$.

1. Exprimer le potentiel électrique V au point $M(x, 0)$ en fonction de a , q et x
2. Dédire le champ électrostatique \vec{E} au point $M(x, 0)$
3. Dédire l'énergie potentielle d'une charge q placée au point $M(x, 0)$.

Exercice 9

Deux charges électriques ponctuelles q et $q' = -2q$ ($q > 0$) sont placées respectivement aux points O et A d'un axe $X'OX$ tel que la distance ($OA=d$).

1. Exprimer puis représenter les champs électriques créés par les charges q et q' au point M au milieu de la droite OA
2. Calculer le potentiel V au point M
3. Déterminer l'énergie potentielle d'une charge $q''=3q$ placée au point M .

On donne $q = 1\mu\text{C}$, $d = 1.2\text{m}$, $K = 9 \cdot 10^9$ (SI)

Exercice 10

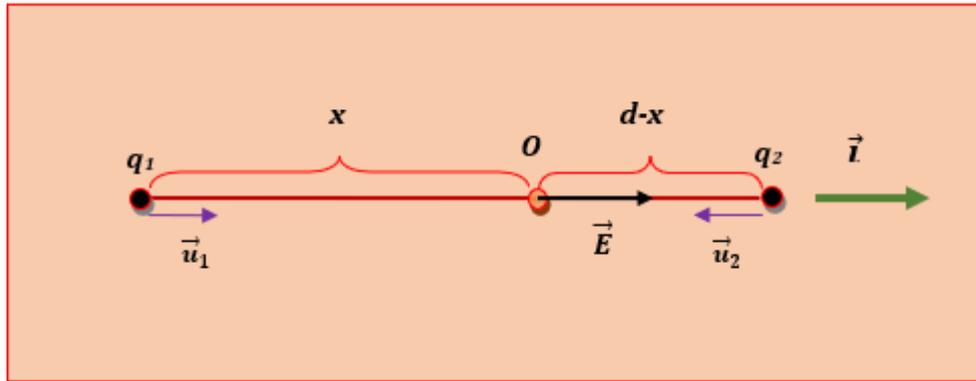
Trois charges électriques ponctuelles q_A , q_B et q_C sont placées aux points $A(a, 0)$, $B(0, a)$ et $C(-a, 0)$ respectivement. On donne : $q_A = q = 2 \cdot 10^{-9}$ C, $q_B = -2q$, $q_C = 2q$ et $a = 5$ cm

1. Calculer le potentiel électrique créé par ces trois charges à l'origine « O »
2. Déterminer le champ électrique créé au point O
3. En déduire :
 - ◆ La force électrostatique \vec{F} exercée sur une charge $-q$ placée en O .
 - ◆ L'énergie potentielle de la charge $-q$ placée en O .

Solutions des exercices**Exercice 1**

1. Le potentiel au point O :

$$V_O = \frac{Kq_1}{x} + \frac{Kq_2}{d-x}$$



$$V_O = K \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{d-x} \right)$$

A.N : $V_O = 0 \text{ Volt}$

2. Le champ électrique au point O :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = \frac{Kq_1}{x^2} \vec{u}_1 + \frac{Kq_2}{(d-x)^2} \vec{u}_2$$

D'après la figure ci-dessus, nous avons : $\vec{u}_1 = \vec{i}$; $\vec{u}_2 = -\vec{i}$, alors :

$$\vec{E} = \frac{Kq_1}{x^2} \vec{i} - \frac{Kq_2}{(d-x)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E} = K \left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(d-x)^2} \right) \vec{i}$$

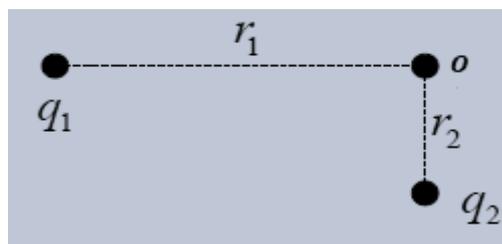
$$|\vec{E}| = \left| K \left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(d-x)^2} \right) \right|$$

A.N : $|\vec{E}| = 3,1 \cdot 10^5 \text{ V/m}$

La direction du champ total est suivant le vecteur unitaire \vec{i}

Exercice 2

1. Faisons d'abord le schéma :



Le potentiel créé au point O est :

$$V_0 = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{Kq_2}{r_2}$$

$$V_0 = K \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

A.N: $V_0 = -2.25 \cdot 10^6 V$

2. L'énergie électrostatique E_p d'une charge q_3 est :

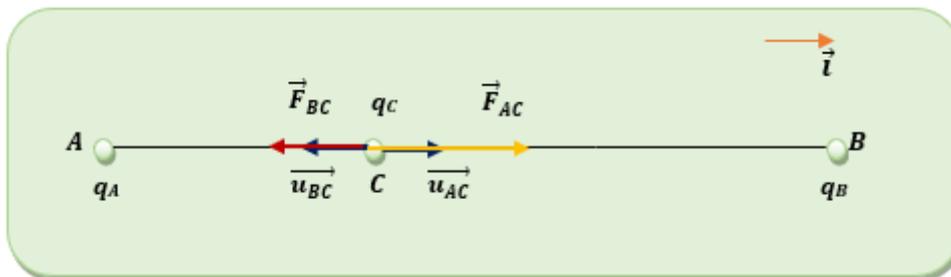
$$E_p = q_3 V_0$$

$$E_p = Kq_3 \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

A.N: $E_p = -450 J$

Exercice 3

Faisons tout d'abord le schéma :



En appliquant le principe de superposition, la force totale qui s'exerce sur la charge q_c est :

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC}$$

$$\vec{F} = \frac{Kq_A q_C}{(AC)^2} \vec{u}_{AC} + \frac{Kq_B q_C}{(BC)^2} \vec{u}_{BC}$$

$$\vec{u}_{AC} = \vec{i}; \vec{u}_{BC} = -\vec{i}$$

Alors :

$$\vec{F} = Kq_c \left(\frac{q_A}{(AC)^2} - \frac{q_B}{(BC)^2} \right) \vec{i}$$

La direction de la force totale est suivant le vecteur unitaire \vec{i}

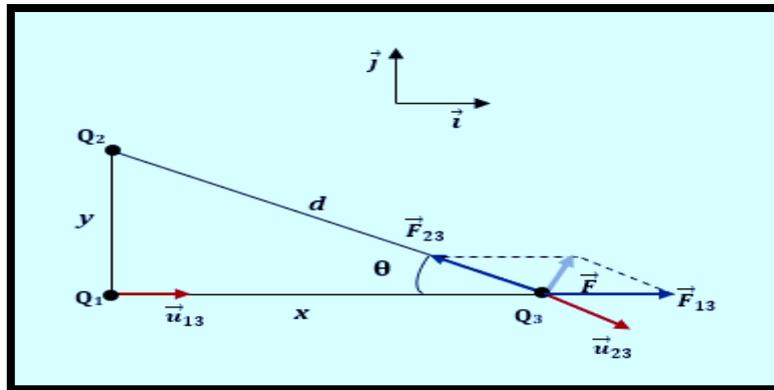
Le module de cette force est :

$$|\vec{F}| = \left| Kq_c \left(\frac{q_A}{(AC)^2} - \frac{q_B}{(BC)^2} \right) \right|$$

A.N: $|\vec{F}| = 1,3 \cdot 10^{-2} N$

Exercice 4

Faisons tout d'abord le schéma :



Soit \vec{F}_{23} est la force exercée par la charge Q_2 sur Q_3 :

$$\vec{F}_{23} = K \frac{Q_2 Q_3}{d^2} \vec{u}_{23}$$

Où :

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$\vec{u}_{23} = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

Alors \vec{F}_{23} s'écrit :

$$\vec{F}_{23} = K \frac{Q_2 Q_3}{x^2 + y^2} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

Soit \vec{F}_{13} est la force exercée par la charge Q_1 sur Q_3 :

$$\vec{F}_{13} = K \frac{Q_1 Q_3}{x^2} \vec{u}_{13}$$

Où : $\vec{u}_{13} = \vec{i}$

Alors \vec{F}_{13} s'écrit :

$$\vec{F}_{13} = K \frac{Q_1 Q_3}{x^2} \vec{i}$$

La force totale qui s'exerce sur Q_3 est :

$$\vec{F} = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13}$$

$$\vec{F} = K \frac{Q_2 Q_3}{x^2 + y^2} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) + K \frac{Q_1 Q_3}{x^2} \vec{i}$$

Nous avons :

$$d^2 = x^2 + y^2, \cos \theta = \frac{x}{d}, \sin \theta = \frac{y}{d}$$

$$\vec{F} = KQ_3 \left[\left(\frac{Q_2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{Q_1}{x^2} \right) \vec{i} - \frac{Q_2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{j} \right]$$

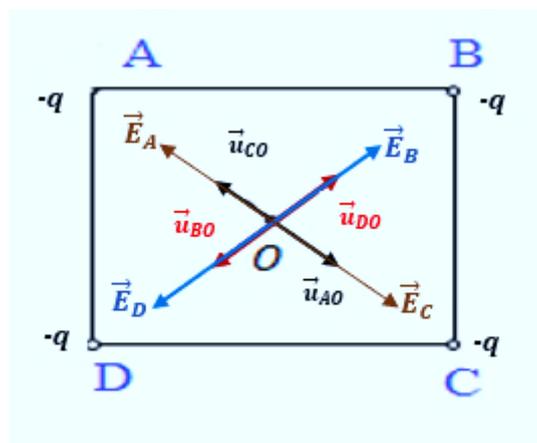
$$|\vec{F}| = KQ_3 \sqrt{\left(\frac{Q_2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{Q_1}{x^2} \right)^2 + \left(\frac{Q_2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)^2}$$

A.N :

$$|\vec{F}| = 2.25 \text{ N}$$

Exercice 5

Faisons tout d'abord le schéma :



Soit \vec{E}_A le champ créé en O par la charge q_A au point A :

$$\vec{E}_A = K \frac{q_A}{(AO)^2} \vec{u}_{AO}$$

Soit \vec{E}_B le champ créé en O par la charge q_B au point B :

$$\vec{E}_B = K \frac{q_B}{(BO)^2} \vec{u}_{BO}$$

Soit \vec{E}_C le champ créé en O par la charge q_C au point C :

$$\vec{E}_C = K \frac{q_C}{(CO)^2} \vec{u}_{CO}$$

Soit \vec{E}_D le champ créé en O par la charge q_D au point D :

$$\vec{E}_D = K \frac{q_D}{(DO)^2} \vec{u}_{DO}$$

Le champ électrostatique total créé en O est :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$\vec{E} = K \frac{q_A}{(AO)^2} \vec{u}_{AO} + K \frac{q_B}{(BO)^2} \vec{u}_{BO} + K \frac{q_C}{(CO)^2} \vec{u}_{CO} + K \frac{q_D}{(DO)^2} \vec{u}_{DO}$$

Sachant que : $q_A = q_B = q_C = q_D = -q$

$$|\vec{AO}| = |\vec{BO}| = |\vec{CO}| = |\vec{DO}| = r$$

$$\vec{u}_{CO} = -\vec{u}_{AO} \text{ et } \vec{u}_{DO} = -\vec{u}_{BO}$$

Alors le champ \vec{E} s'écrit :

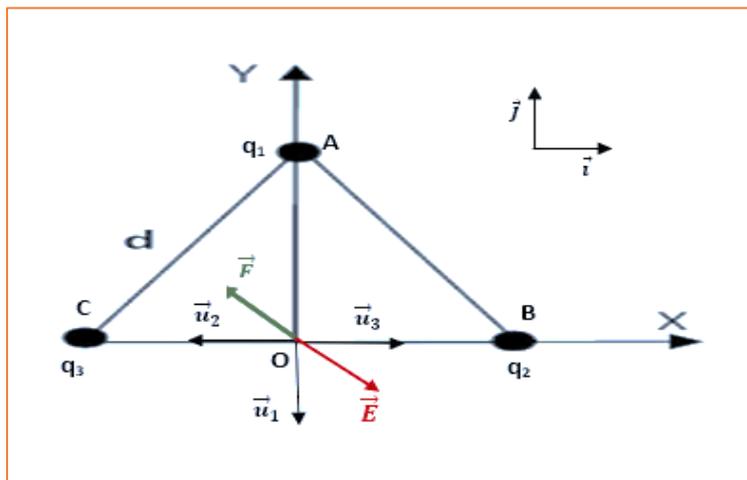
$$\vec{E} = -K \frac{q}{r^2} (\vec{u}_{AO} + \vec{u}_{BO} - \vec{u}_{AO} - \vec{u}_{BO})$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Le champ total créé par quatre charges identiques aux sommets d'un carré est nul au centre de ce carré.

Exercice 6

Faisons tout d'abord le schéma :



1. D'après le principe de superposition, le champ électrique à l'origine O :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E} = K \frac{q_1}{(AO)^2} \vec{u}_1 + K \frac{q_2}{(BO)^2} \vec{u}_2 + K \frac{q_3}{(CO)^2} \vec{u}_3$$

En remplaçant : $q_1 = +3q$; $q_2 = +q$; $q_3 = +2q$

$$\vec{u}_1 = -\vec{j} ; \vec{u}_2 = -\vec{i} ; \vec{u}_3 = \vec{i}$$

$$OA = d \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}d , \quad OC = OB = \frac{d}{2}$$

Nous obtenons :

$$\vec{E} = \frac{4Kq}{d^2} (\vec{i} - \vec{j})$$

2. Le potentiel créé au point O :

$$V = K \frac{q_1}{OA} + K \frac{q_2}{OB} + K \frac{q_3}{OC}$$

$$V = \frac{6Kq}{d} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \right)$$

3. a). La force électrique exercée sur la charge q_4 :

$$\vec{F} = q_4 \cdot \vec{E}$$

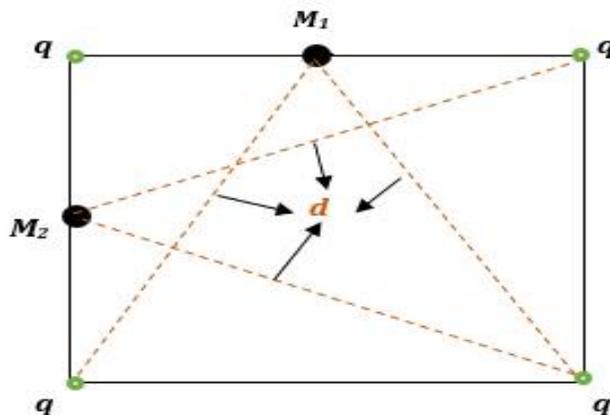
$$\vec{F} = -\frac{4Kq^2}{d^2} (\vec{i} - \vec{j})$$

b). L'énergie potentielle de la charge q_4 :

$$E_p = q_4 \cdot V \Rightarrow E_p = -\frac{6Kq^2}{d} \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \right)$$

Exercice 7

Faisons tout d'abord le schéma :



1.

- Le potentiel créé par les quatre charges au point M_1 :

$$V(M_1) = K \frac{q}{a/2} + K \frac{q}{a/2} + K \frac{q}{d} + K \frac{q}{d}$$

Nous avons : $d = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

Alors :

$$V(M_1) = \frac{4Kq}{a} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}} \right)$$

- Le potentiel créé par les quatre charges au point M_2 :

$$V(M_2) = \frac{4Kq}{a} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}} \right)$$

2. L'énergie potentielle d'une charge « q » placée au point M_1 :

$$E_p(M_1) = qV(M_1)$$

$$E_p(M_1) = \frac{4Kq^2}{a} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}} \right)$$

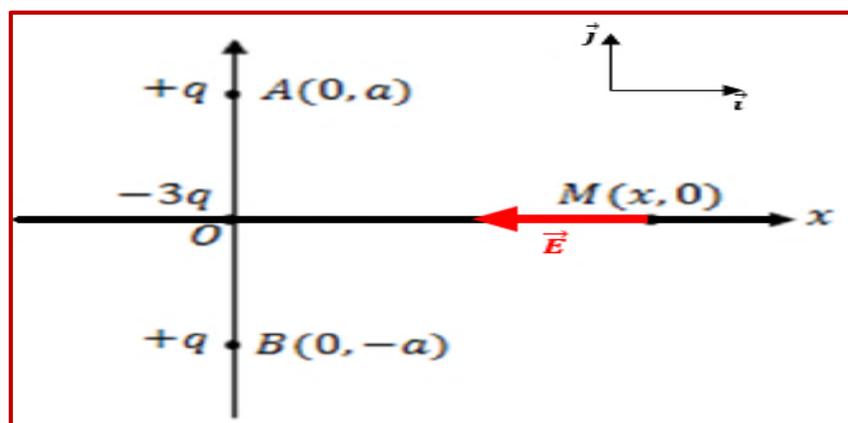
3. L'énergie potentielle d'une charge « $-q$ » placée au point M_2 :

$$E_p(M_2) = -qV(M_2)$$

$$E_p(M_2) = \frac{-4Kq^2}{a} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}} \right)$$

Exercice 8

Faisons tout d'abord le schéma :



1. Le potentiel électrique V au point $M(x, 0)$:

$$V(M) = V_O + V_A + V_B$$

$$V(M) = -\frac{3Kq}{(OM)} + \frac{Kq}{(AM)} + \frac{Kq}{(BM)}$$

Nous avons :

$$OM = x ; AM = BM = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Alors :

$$V(M) = -\frac{3Kq}{x} + \frac{Kq}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{Kq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V(M) = -\frac{3Kq}{x} + \frac{2Kq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

2. Le champ électrostatique \vec{E} au point $M(x, 0)$:

Du moment que V est en fonction de « x » :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{i}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{-3Kq}{x^2} + \frac{2Kqx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \right) \vec{i}$$

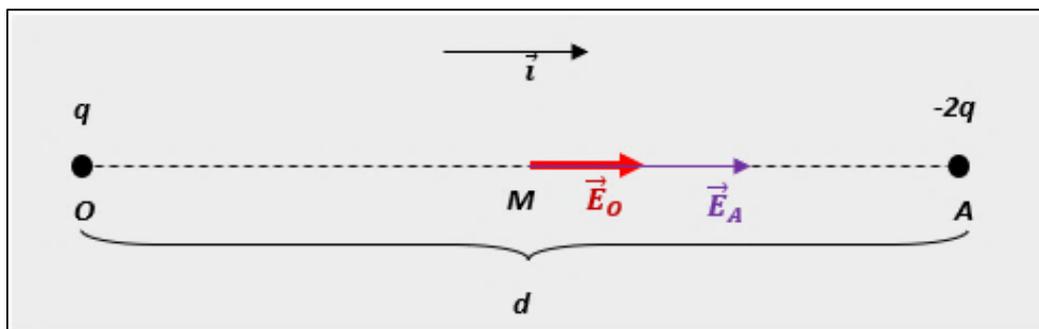
3. L'énergie potentielle d'une charge q au point $M(x, 0)$:

$$E_p = qV(M)$$

$$E_p = -\frac{3Kq^2}{x} + \frac{2Kq^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Exercice 9

Faisons tout d'abord le schéma :



1. Le champ électrique au point M :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_O + \vec{E}_A$$

$$\vec{E}_M = K \frac{q}{(d/2)^2} \vec{u}_{OM} - K \frac{2q}{(d/2)^2} \vec{u}_{AM}$$

$$\vec{E}_M = K \frac{q}{(d/2)^2} \vec{i} - K \frac{2q}{(d/2)^2} (-\vec{i})$$

$$\vec{E}_M = 12K \frac{q}{(d)^2} \vec{i}$$

$$|\vec{E}_M| = 12K \frac{q}{(d)^2}$$

A.N : $|\vec{E}_M| = 7,5 \cdot 10^4 \text{ V/m}$

2. Le potentiel V au point M :

$$V(M) = K \frac{q}{d/2} - K \frac{2q}{d/2}$$

$$V(M) = \frac{-Kq}{d/2}$$

A.N : $V(M) = -1,5 \cdot 10^4 \text{ V}$

3. L'énergie potentielle d'une charge $q'' = 3q$ placée au point M :

$$E_p = q'' \cdot V(M)$$

$$E_p = 3q \cdot \left(\frac{-Kq}{d/2} \right)$$

$$E_p = \frac{-3Kq^2}{d/2}$$

A.N : $E_p = -4,5 \cdot 10^{-2} \text{ joule}$

Exercice 10

1. Le potentiel créé au point O :

$$V_O = V_A + V_B + V_C$$

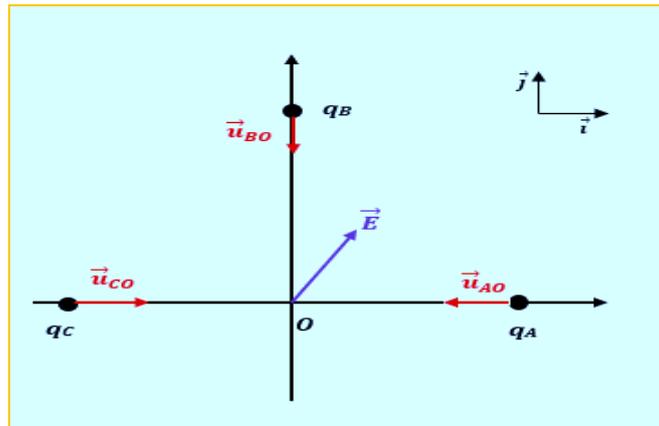
D'après le schéma ci-dessous :

$$V_o = K \frac{q}{a} - 2K \frac{q}{a} + 2K \frac{q}{a}$$

$$V_o = K \frac{q}{a}$$

A.N :

$$V_o = 360 \text{ V}$$



2. Le champ électrique créé au point O :

$$\vec{E}_o = K \frac{q_A}{a^2} \vec{u}_{AO} + K \frac{q_B}{a^2} \vec{u}_{BO} + K \frac{q_C}{a^2} \vec{u}_{CO}$$

Nous avons : $\vec{u}_{AO} = -\vec{i}$; $\vec{u}_{BO} = -\vec{j}$; $\vec{u}_{CO} = \vec{i}$

alors :

$$\vec{E}_o = K \frac{q}{a^2} \vec{i} + K \frac{2q}{a^2} \vec{j} \Rightarrow |\vec{E}_o| = K \frac{q}{a^2} \sqrt{5}$$

A.N :

$$|\vec{E}_o| = 1,6 \cdot 10^4 \text{ V/m}$$

3.

♦ La force électrostatique \vec{F} exercée sur une charge $-q$ placée en O :

$$\vec{F} = -q\vec{E}_o \Rightarrow \vec{F} = -K \frac{q^2}{a^2} \vec{i} - K \frac{2q^2}{a^2} \vec{j}$$

Le module de \vec{F} :

$$|\vec{F}| = K \frac{q^2}{a^2} \sqrt{5}$$

A.N: $|\vec{F}| = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$

- ◆ L'énergie potentielle de la charge $-q$ placée en O :

$$E_p = -qV_0$$
$$E_p = -K \frac{q^2}{a}$$

A.N : $E_p = -7,2 \cdot 10^{-7} \text{Joule}$

2.4 Dipôle électrique

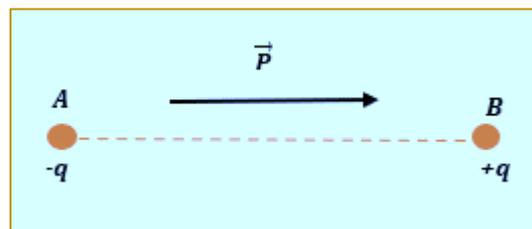
Introduction

Un dipôle électrique est un système de deux charges $(-q, +q)$ ponctuelles, égales, de signe opposé et séparées par une petite distance « a ». Les calculs du champ et du potentiel créés par un dipôle, en un point M dans son espace environnant, se font toujours en des points très éloignés du dipôle ($OM \gg a$). Le dipôle électrique est utilisé en physique et en chimie pour décrire certaines liaisons entre molécules qui peuvent être modélisées par un dipôle. Ce dernier peut être permanent ou induit comme par exemple un nuage électronique qui se déforme sous l'action d'un champ extérieur.

2.4.1 Moment dipolaire

On caractérise un dipôle électrique par un vecteur \vec{P} orienté, par convention, de la charge négative à la charge positive tel que :

$$\vec{P} = q \cdot \overrightarrow{AB}$$



Le vecteur \vec{P} est appelé le moment électrique dipolaire, son unité est le coulomb-mètre ou le debye (D) : $1D = 3,336 \cdot 10^{-30} C \cdot m$

2.4.2 Potentiel créé par un dipôle

Le Potentiel créé par un dipôle au point M (figure 1) est :

$$V_M = \frac{Kq}{(BM)} - \frac{Kq}{(AM)}$$

Cherchons les distances (BM) et (AM) , la figure 1 montre que :

$$(\overrightarrow{BM})^2 = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2 = (OM)^2 + (OB)^2 - 2(OM)(OB) \cos \alpha$$

$$(BM)^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2r \frac{a}{2} \cos \alpha$$

$$BM = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar \cos \alpha} = r \sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r} \cos \alpha}$$

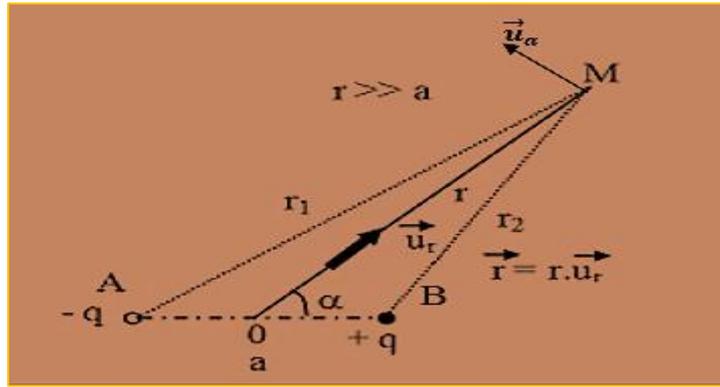


Figure 1

$$(\overline{AM})^2 = (\overline{AO} + \overline{OM})^2 = (\overline{OM} - \overline{OA})^2$$

$$(\overline{AM})^2 = (OM)^2 + (OA)^2 - 2(OM)(OA) \cos(\pi - \alpha)$$

$$(AM)^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2r \frac{a}{2} \cos \alpha \Rightarrow AM = r \sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r} \cos \alpha}$$

L'hypothèse $r \gg a$ nous permet de négliger a^2 devant r^2 , ce qui donne :

$$BM = r \left(1 - \frac{a}{r} \cos \alpha\right)^{\frac{1}{2}}, AM = r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_M = Kq \left(\frac{1}{r \left(1 - \frac{a}{r} \cos \alpha\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$V_M = \frac{Kq}{r} \left(\left(1 - \frac{a}{r} \cos \alpha\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

En utilisant le développement limité en premier ordre : $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, nous obtenons :

$$V_M = \frac{Kq}{r} \left(\left(1 + \frac{a}{2r} \cos \alpha\right) - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \alpha\right) \right)$$

$$V_M = \frac{Kqa \cos \alpha}{r^2} = \frac{K\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

2.4.3 Champ électrique créé par un dipôle

Nous allons déduire le champ électrique en coordonnées polaires en utilisant la relation :

$$\vec{E}_M = -\overline{grad} V_M$$

V_M dépend de r et de α , alors :

$$\vec{E}_M = -\frac{\partial V_M}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_M}{\partial \alpha} \vec{u}_\alpha$$

$$\vec{E}_M = \frac{2Kqa \cos \alpha}{r^3} \vec{u}_r + \frac{Kqa \sin \alpha}{r^3} \vec{u}_\alpha$$

2.4.4 Les lignes de champ d'un dipôle électrique

Les lignes de champ est une courbe « Γ » tangente au champ électrique en tout point de l'espace. L'allure de cette courbe dans le cas d'un dipôle électrique consiste à résoudre l'équation :

$$\vec{E} \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{2Kqa \cos \alpha}{r^3} \vec{u}_r + \frac{Kqa \sin \alpha}{r^3} \vec{u}_\alpha \right) \wedge (dr \vec{u}_r + r d\alpha \vec{u}_\alpha) = \vec{0}$$

$$\frac{2Kqa \cos \alpha d\alpha}{r^2} (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\alpha) + \frac{Kqa \sin \alpha}{r^3} dr (\vec{u}_\alpha \wedge \vec{u}_r) = \vec{0}$$

$$\frac{2Kqa \cos \alpha d\alpha}{r^2} \vec{k} - \frac{Kqa \sin \alpha}{r^3} dr \vec{k} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{2Kqa \cos \alpha d\alpha}{r^2} - \frac{Kqa \sin \alpha}{r^3} dr \right) \vec{k} = \vec{0}$$

$$\frac{2Kqa \cos \alpha d\alpha}{r^2} = \frac{Kqa \sin \alpha}{r^3} dr$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \alpha d\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{d(\sin \alpha)}{\sin \alpha}$$

Par intégration :

$$\int \frac{dr}{r} = 2 \int \frac{d(\sin \alpha)}{\sin \alpha}$$

On obtient :

$$\ln r = 2 \ln |\sin \alpha| + C$$

$$\ln r = \ln(\sin^2 \alpha) + C$$

$$r = A \sin^2 \alpha$$

La figure 2 montre le tracé des lignes de champ d'un dipôle électrique :

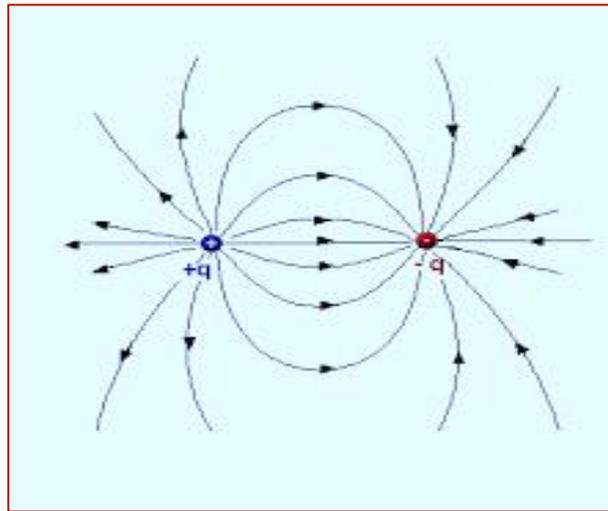


Figure 2. Lignes de champ d'un dipôle électrique

2.4.5 Les surfaces équipotentielles d'un dipôle électrique

Les surfaces équipotentielles représentent l'ensemble des points, situés à une distance r du centre du dipôle, ayant le même potentiel électrique V_0 tel que :

$$V_0 = \frac{Kqa \cos \alpha}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{Kqa \cos \alpha}{V_0}} = \underbrace{\sqrt{\frac{Kqa}{V_0}}}_B \cdot \sqrt{\cos \alpha}$$

$$r = B\sqrt{\cos \alpha}$$

B représente une constante.

L'allure de ces surfaces équipotentielles est représentée sur la figure 3.

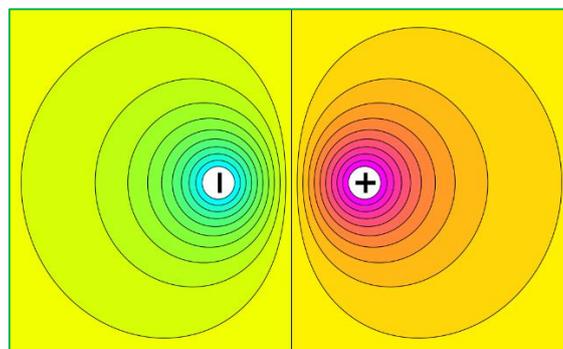


Figure 3. Les surfaces équipotentielles d'un dipôle électrique

2.4.6 Energie d'un dipôle placé dans un champ électrique

L'énergie d'un dipôle placé dans un champ électrique \vec{E} est l'énergie qu'il faut fournir pour amener les charges $+q$ et $-q$ de l'infini à leurs positions respectives en B et A :

$$E_p = q(V_B - V_A)$$

$$V_B - V_A = \int_A^B dV = \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -E \cdot dl \cos \theta$$

θ représente l'angle formé entre le champ \vec{E} et le vecteur \overrightarrow{AB}

$$V_B - V_A = -E \cos \theta \int_A^B dl = -E \cdot AB \cdot \cos \theta$$

$$V_B - V_A = -\vec{E} \cdot \vec{a}$$

Alors,

$$E_p = -q\vec{E} \cdot \vec{a} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

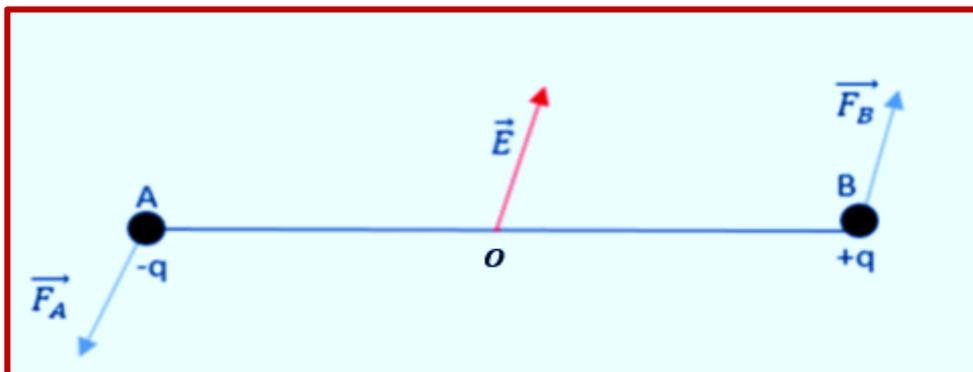
L'énergie potentielle admet sa valeur minimale lorsque $\theta = 0$.

NOTE	<i>Un dipôle est en équilibre stable quand il est orienté parallèlement au champ appliqué.</i>
-------------	--

2.4.7 Mouvement d'un dipôle dans un champ électrique uniforme

2.4.7.1 Résultante des forces appliquées

Si on place un dipôle électrique dans un champ uniforme \vec{E} , les charges qui le constituent seront soumises à un couple de forces de même intensité et de sens opposés.



La résultante des forces appliquées sur le dipôle :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

2.4.7.2 Moment des forces appliquées

Le moment total des forces appliquées par rapport au point O, à mi-distance de A et de B, est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_A) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_B)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = (\vec{OB} - \vec{OA})q\vec{E}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = q\vec{AB} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{P} \cdot \vec{E}$$



Le moment des forces appliquées par rapport à un point donné est indépendant du choix de ce dernier.



Vérifier cette note en recalculant le moment de ces deux forces par rapport à un point O' différent de O.

Exercices corrigés

Exercice 1

Un dipôle de moment $\vec{P} = qa\vec{i}$ est constitué de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ placées dans le vide aux points A et B de l'axe OX ($AB=a$) de part et d'autre de l'origine O. Un point M éloigné des charges est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) .

1. Calculer le potentiel $V(\mathbf{M})$ du dipôle au point M
2. Déduire le champ électrique $\vec{E}(\mathbf{M})$ en coordonnées polaires ainsi que son module
3. On place ce dipôle dans un champ électrique uniforme \vec{E}_0 orienté suivant l'axe OX, le potentiel de ce champ est nul au point O
 - a. Donner l'expression du nouveau potentiel $V'(\mathbf{M})$ au point M en coordonnées polaires
 - b. Définir une surface équipotentielle
 - c. Quelles sont les surfaces équipotentielles $V' = 0$.

Exercice 2

La molécule d'eau (H_2O) peut être modélisée par un atome d'oxygène portant la charge -2δ relié à deux atomes d'hydrogène portant chacun la charge $+\delta$. L'angle entre les deux liaisons O-H est noté α et la distance entre un atome d'oxygène et un atome d'hydrogène est notée d . $e = 1,60.10^{-19} C$, $d=0,952 \text{ \AA}$, $\alpha=104,50^\circ$

1. Faire un schéma de la molécule d'eau
2. Déterminer l'expression (vectorielle) du moment dipolaire de la liaison O-H et calculer sa valeur en (D) puis en (C. m) sachant que le moment dipolaire de la molécule d'eau est de 1,85 D.

Exercice 3

Soit un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{P} = q\vec{AB} = qAB\vec{u}_x$ dirigé suivant l'axe OX et centré sur le point O , origine du repère. Ce dipôle est plongé dans un champ électrique $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_x$ où E_0 est une constante.

1. Rappeler l'expression du potentiel créé par le dipôle électrostatique en un point M en coordonnées polaires.
2. Retrouver l'expression de ce potentiel en coordonnées cartésiennes
3. Dédire le champ du dipôle en coordonnées cartésiennes
4. Dédire le potentiel V_0 créé en un point M par le champ \vec{E}_0 où ce potentiel est nul au point O
5. En déduire l'expression du potentiel total créé par le dipôle et par le champ extérieur \vec{E}_0 au point M en coordonnées cartésiennes.

Exercice 4

Soit un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{P} dirigé suivant l'axe OX et centré sur le point O , origine du repère. La distance entre les deux charges : $AB = 2a$.

1. Calculer directement le champ créé par un dipôle en un point M' sur l'axe OX du dipôle
2. Calculer directement le champ créé par un dipôle en un point M situé sur l'axe OY perpendiculaire au dipôle en son milieu.

Exercice 5

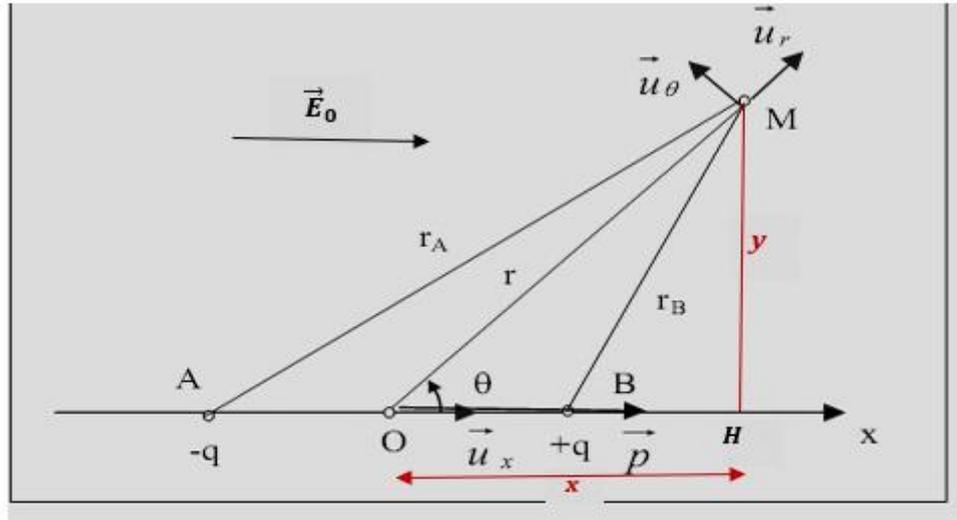
Calculer la charge électrique δq portée par le dipôle des halogénures d'hydrogène suivants où P est la valeur du moment dipolaire, d est la distance entre les deux atomes.

A-B	P (Debye)	d(pm)	δq (C)
H-F	1,82	92	
H-Cl	1,08	127	
H-Br	0,79	142	
H-I	0,38	161	

Solutions des exercices

Exercice 1

1. Faisons d'abord le schéma :



Le potentiel au point M :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_A - r_B}{r_A r_B} \right)$$

Le point $H(x, y)$ est la projection du point M sur l'axe Ox , en appliquant la relation de Pythagore dans les triangles OMH , BMH et AMH , nous obtenons :

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ r_B^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \\ r_A^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \end{cases}$$

Ce système d'équations nous permet de calculer :

$$r_A^2 - r_B^2 = (r_A - r_B)(r_A + r_B) = 2ax$$

$x = r \cos \theta$, alors :

$$(r_A - r_B)(r_A + r_B) = 2ar \cos \theta \Rightarrow (r_A - r_B) = \frac{2ar \cos \theta}{(r_A + r_B)}$$

Expérimentalement $r \gg a$, ce qui nous permet d'écrire :

$$r_A + r_B \approx 2r \quad \text{et} \quad r_A \cdot r_B \approx r^2$$

L'expression du potentiel $V(M)$ devient :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

2. **On déduit** le champ électrique de la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta\right)$$

Le module du champ électrique :

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta \Rightarrow E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$$

$$E = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$$

3. Le nouveau potentiel au point M sera :

$$V'(M) = V(M) + V_0(M)$$

$V(M)$: le potentiel au point M dû à la présence du dipôle

$V_0(M)$: le potentiel au point M dû à la présence du champ appliqué \vec{E}_0 tel que :

$$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 \Rightarrow V_0 = -\int E_0 dx = -E_0 x + C1$$

Au point $x = 0$, nous avons : $V_0 = 0 \Rightarrow C1 = 0$:

$$V_0 = -E_0 x$$

Alors le nouveau potentiel est :

$$V'(M) = \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 x$$

Nous avons : $x = r \cos \theta$, alors :

$$V'(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta$$

b. Une surface équipotentielle est le lieu des points ayant une même valeur du potentiel.

c. Pour déterminer les surfaces équipotentielles il faut résoudre l'équation : $V' = 0$

$$V'(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^2} - E_0 r\right) \cos \theta = 0$$

Cette équation est vérifiée pour :

$$r = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{E_0}}$$

La valeur r étant constante, dans ce cas la surface équipotentielle est une sphère de centre O et de rayon :

$$r = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{E_0}}$$

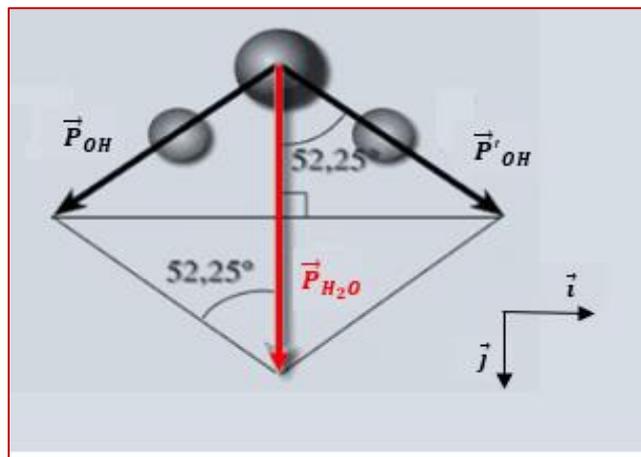
ou :

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Dans ce cas la surface équipotentielle est le plan médiateur OY .

Exercice 2

1. Le schéma de la molécule d'eau :



2. Le moment dipolaire de la molécule d'eau est : $\vec{P}_{H_2O} = \vec{P}_{OH} + \vec{P}'_{OH}$

Par projection sur les vecteurs \vec{i} et \vec{j} , on obtient :

$$P_{H_2O}\vec{j} = -P_{OH} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{i} + P'_{OH} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{i} + P_{OH} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{j} + P'_{OH} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{j}$$

Nous avons : $P_{OH} = P'_{OH}$, le moment dipolaire devient :

$$P_{H_2O}\vec{j} = 2P_{OH} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{j} \Rightarrow \vec{P}_{OH} = \frac{\vec{P}_{H_2O}}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

La valeur du moment dipolaire \vec{P}_{OH} est :

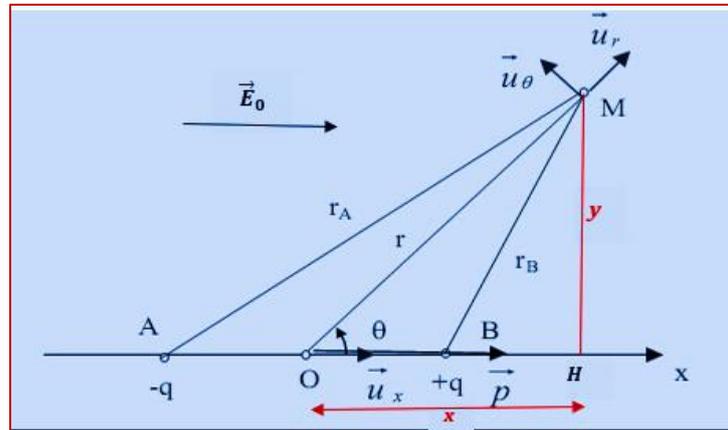
$$P_{OH} = \frac{P_{H_2O}}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

A.N : $P_{OH} = 1,36 D, : P_{OH} = 4,54 \times 10^{-30} C.m$

Exercice 3

1. Le potentiel créé par un dipôle, en coordonnées polaires, au point M distant de « r » du dipôle est :

$$V(M) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



2. L'expression du potentiel V en coordonnées cartésiennes :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$V(M) = \frac{Px}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. Le champ du dipôle au point M en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}$$

$$E_x = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$E_y = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{i} + \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \vec{j} \right]$$

4. Le champ est donné par l'expression : $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$

En utilisant la relation $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0$, on obtient :

$$-\frac{dV_0}{dx} = E_0 \Rightarrow V_0 = - \int E_0 dx$$

$$V_0 = -E_0 x + cste$$

à $x = 0, V_0 = 0 \Rightarrow cste = 0$

$$V_0 = -E_0 x$$

5. Le potentiel total au point M est la somme du potentiel créé par le dipôle et celui créé par le champ \vec{E}_0

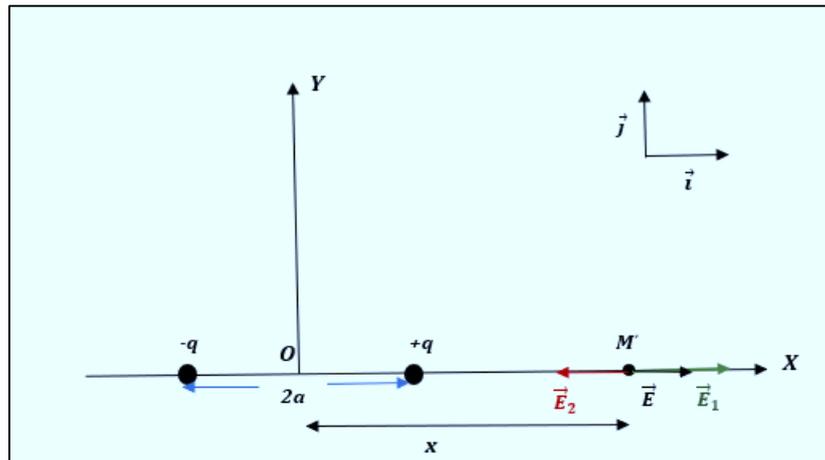
En coordonnées cartésiennes :

$$V_{tot}(M) = V(M) + V_0$$

$$V_{tot}(M) = -E_0 x + \frac{Px}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 4

1. Faisons d'abord le schéma :



$$\vec{E}(M') = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}(M') = \frac{Kq}{(x-a)^2} \vec{i} - \frac{Kq}{(x+a)^2} \vec{i} = Kq \left(\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) \vec{i}$$

$$\vec{E}(M') = Kq \left(\frac{4ax}{x^2 \left(1 + \frac{a^2}{x^2} + \frac{2a}{x} \right) x^2 \left(1 + \frac{a^2}{x^2} - \frac{2a}{x} \right)} \right) \vec{i}$$

Par hypothèse : $x \gg 2a \Rightarrow \frac{2a}{x} \ll 1$ et $\frac{a^2}{x^2} \ll 1$, le champ électrique peut s'écrire :

$$\vec{E}(M') \approx \frac{4Kqa}{x^3} \vec{i}$$

Sachant que : $\vec{P} = 2qa\vec{i}$

$$\vec{E}(M') = \frac{\vec{P}}{2\pi\epsilon_0 x^3}$$

2. Le champ au point M :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{-Kq}{r^2} \vec{u}_1 + \frac{Kq}{r^2} \vec{u}_2 = \frac{Kq}{r^2} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

D'après le schéma ci-dessous : $r^2 = y^2 + a^2$

$$\vec{E}(M) = \frac{Kq}{y^2 + a^2} (-\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} - \cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j})$$

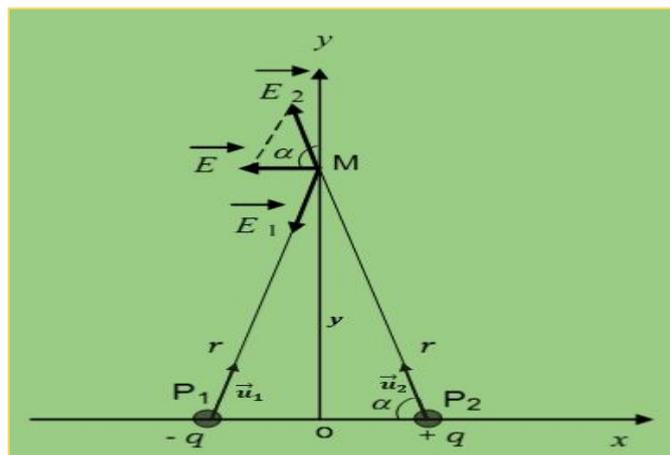
$$\vec{E}(M) = \frac{-2Kq \cos \alpha}{y^2 + a^2} \vec{i}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{(y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{-2Kqa}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i} = \frac{-2Kqa}{\left[y^2 \left(1 + \frac{a^2}{y^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

$y \gg a$; en négligeant a^2/y^2 devant 1 , nous aurons :

$$\vec{E}(M) = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 y^3}$$



Exercice 5

Calcul de la charge électrique « δq » :

$$P = \delta q \times d \Rightarrow \delta q = \frac{P}{d}$$

<i>A-B</i>	<i>P (Debye)</i>	<i>d(pm)</i>	<i>δq (C)</i>
<i>H-F</i>	<i>1,82</i>	<i>92</i>	<i>$6,59.10^{-20}$</i>
<i>H-Cl</i>	<i>1,08</i>	<i>127</i>	<i>$2,84.10^{-20}$</i>
<i>H-Br</i>	<i>0,79</i>	<i>142</i>	<i>$1,86.10^{-20}$</i>
<i>H-I</i>	<i>0,38</i>	<i>161</i>	<i>$7,88.10^{-21}$</i>

2.5 Distribution continue des charges

Introduction

Dans le cas d'un très grand nombre de charges, celles-ci peuvent être réparties uniformément suivant une droite, sur une surface plane ou dans un volume.

Dans un espace donné, une distribution continue de charges est un ensemble de charges ponctuelles supposées collées l'une à l'autre. Cette distribution peut être linéique, surfacique ou volumique.

Exemples :

Dans ces exemples, les charges électriques sont colorées en couleur orange.

2.5.1 Distribution linéique de charges notée (λ)

Lorsque la charge q est répartie sur un fil avec une densité linéaire λ , chaque élément dl de ce fil porte une charge $dq = \lambda dl$



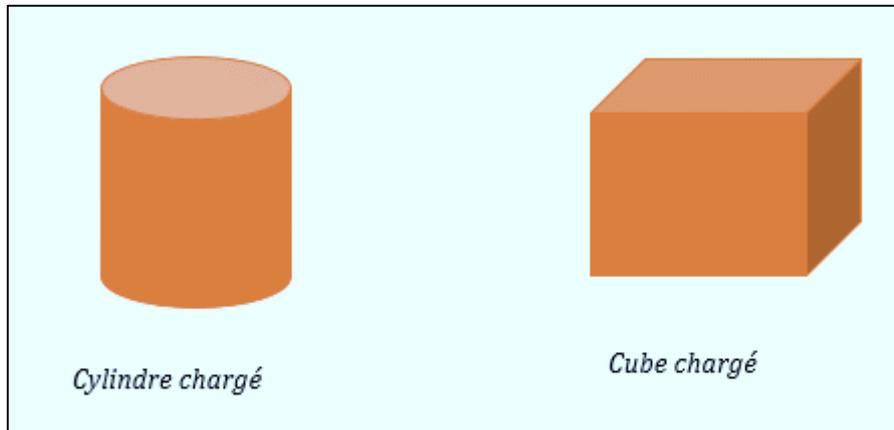
2.5.2 Distribution surfacique de charges notée (σ)

Lorsque la charge q est répartie sur une surface avec une densité surfacique σ , chaque élément dS porte une charge $dq = \sigma dS$



2.5.3 Distribution volumique de charges notée (ρ)

Lorsque la charge q est répartie dans un volume avec une densité volumique ρ , chaque élément dV porte une charge $dq = \rho dV$



2.5.4 Champ et potentiel électrique créés par une distribution continue de charges

Quelle que soit la nature de la distribution des charges (*linéique, surfacique ou volumique*) le principe de superposition reste toujours valable pour le calcul du champ et du potentiel électrique.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les étapes à suivre pour déterminer ces deux grandeurs.

2.5.4.1 Cas d'une distribution linéique de charges

Soit un fil chargé par une distribution constante $\lambda > 0$ (figure 1). Afin de déterminer le champ électrique créé par les charges de ce fil en un point M :

1. On divise cette répartition en un nombre infini de petits segments élémentaires $d\mathbf{l}$ de charge dq tel que $dq = \lambda d\mathbf{l}$
2. On calcule le champ élémentaire $d\vec{E}$ créé en M par l'élément $d\mathbf{l}$ (voir figure 1) soit :

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

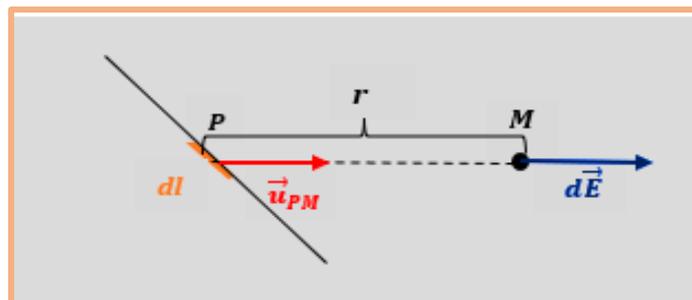


Figure 1

3. Afin de calculer le champ total \vec{E} créé par le fil au point M , on fait la somme vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$ sur toute la longueur du fil :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{K\lambda dl}{r^2} \vec{u}_{PM}$$



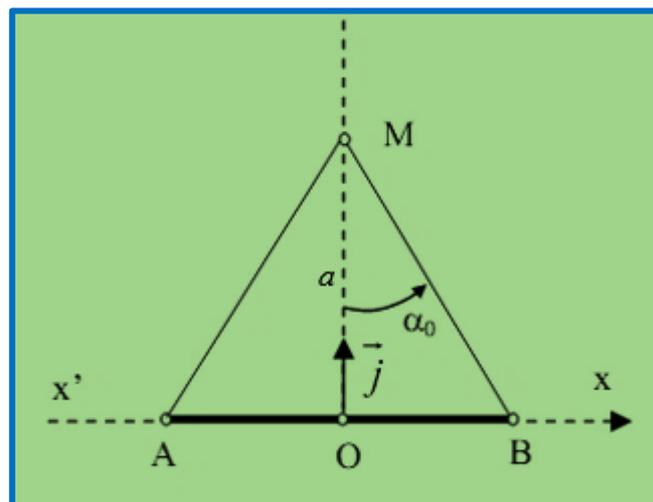
Pour déterminer le potentiel total V créé au point M par le fil, on suit les mêmes étapes citées ci-dessus et on calcule :

$$V = \int dV = \int \frac{K\lambda dl}{r}$$

Application 1

Soit un segment AB de longueur $2L$ uniformément chargé avec une densité linéique constante $\lambda > 0$. On désigne par O le milieu du segment AB .

Calculer le champ \vec{E} créé par cette distribution en un point M à une distance a de la médiatrice de AB .



Solution

Prenons deux éléments de charges dq de longueur dx centrés en deux point P_1 et P_2 *symétriques* par rapport à l'origine O et à une distance « x » de O (figure 2). Soient :

$d\vec{E}_1$ le champ créé au point M par la charge dq située en P_1

$d\vec{E}_2$ le champ créé au point M par la charge dq située en P_2

D'après le principe de superposition, le champ total créé au point M par P_1 et P_2 est :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$$

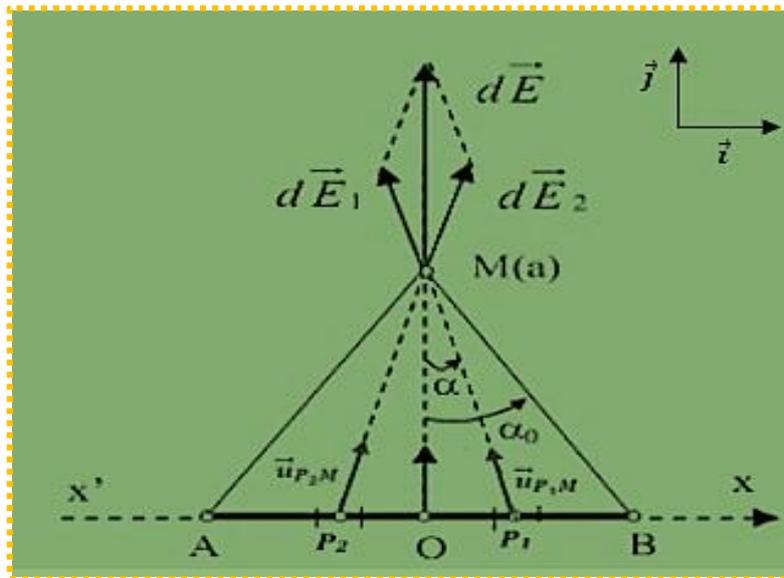


Figure 2

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{(P_1M)^2} \vec{u}_{P_1M} + \frac{Kdq}{(P_2M)^2} \vec{u}_{P_2M}$$

Nous avons : $dq = \lambda dx$

$$P_1M = P_2M = \frac{a}{\cos \alpha}$$

$$\vec{u}_{P_1M} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$$

$$\vec{u}_{P_2M} = \sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$$

Le champ électrique élémentaire au point M devient alors :

$$d\vec{E} = \frac{K\lambda dx \cos^2 \alpha}{a^2} (\vec{u}_{P_1M} + \vec{u}_{P_2M})$$

$$d\vec{E} = \frac{2K\lambda dx \cos^3 \alpha}{a^2} \vec{j}$$

Nous pouvons choisir soit la variable « x » ou la variable « α » pour calculer le champ total \vec{E} .

D'après la figure 2 :

$$x = a \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Alors :

$$d\vec{E} = \frac{2K\lambda}{a} \cos \alpha d\alpha \vec{j}$$

Le champ total au point M est :

$$\vec{E} = \frac{2K\lambda}{a} \vec{j} \int_0^{\alpha_0} \cos \alpha \, d\alpha \Rightarrow \vec{E} = \frac{2K\lambda}{a} \sin \alpha_0 \vec{j}$$

Nous avons :

$$\sin \alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$$

Alors :

$$\vec{E} = \frac{2K\lambda}{a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}} \vec{j}$$

2.5.4.2 Cas d'une distribution surfacique de charges

Soit S une de surface chargée par une distribution constante $\sigma > 0$. Afin de déterminer le champ électrique créé par les charges S en un point M :

1. On divise cette répartition en un nombre infini de petites surfaces élémentaires dS de charge dq tel que : $dq = \sigma dS$
2. On calcule d'abord le champ élémentaire $d\vec{E}$ créé par l'élément dS (figure 3) soit :

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

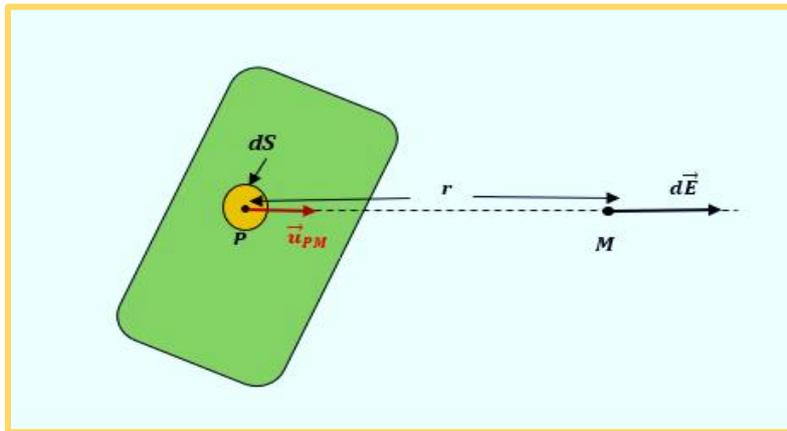


Figure 3

3. Afin de calculer le champ total \vec{E} créé par la surface S au point M , on fait la somme vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$:

$$\vec{E} = \iint d\vec{E} = \iint \frac{K\sigma dS}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

NOTE Pour déterminer le potentiel V créé au point M par une surface chargée S , on suit les mêmes étapes citées ci-dessus et on calcule :

$$V = \iint dV = \iint \frac{K\sigma dS}{r}$$

Application 2

Soit un disque plan circulaire de rayon R porte une distribution de charges surfacique uniforme de densité $\sigma > 0$. M est un point de l'axe de révolution du disque situé à une distance « a » du centre O (figure 4).

Calculer le champ électrique créé par le disque au point M .

Solution

Faisons d'abord le schéma :

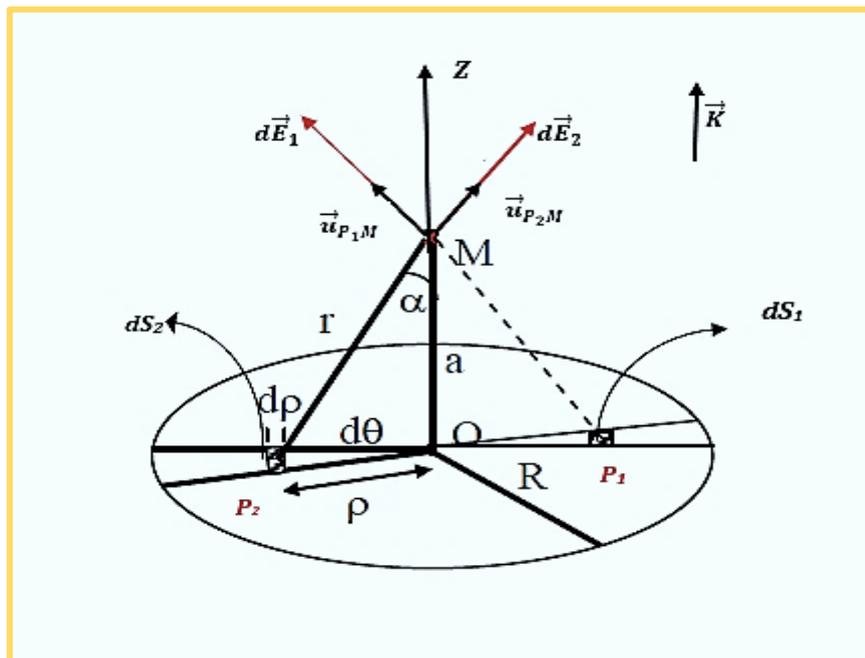


Figure 4

Soient dS_1 et dS_2 deux éléments de surface symétriques par rapport au point O , situés aux points P_1 et P_2 respectivement (voir figure 4).

- Le champ créé par l'élément dS_1 de charge dq au point M est :

$$d\vec{E}_1 = \frac{Kdq}{(P_1M)^2} \vec{u}_{P_1M} = \frac{K\sigma dS_1}{(P_1M)^2} \vec{u}_{P_1M}$$

- Le champ créé par l'élément dS_2 de charge dq au point M est :

$$d\vec{E}_2 = \frac{Kdq}{(P_2M)^2} \vec{u}_{P_2M} = \frac{K\sigma dS_2}{(P_2M)^2} \vec{u}_{P_2M}$$

Nous avons :

$$P_1M = P_2M = r ; dS_1 = dS_2 = dS$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2}$$

Le champ élémentaire total créé par dS_1 et dS_2 en M est :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$$

$$d\vec{E} = \frac{K\sigma dS}{r^2} (\vec{u}_{P_1M} + \vec{u}_{P_2M})$$

La projection des vecteurs unitaires sur le plan (\vec{i}, \vec{j}) et sur l'axe \vec{k} donne :

$$\vec{u}_{P_1M} = (\vec{u}_{P_1M})_{x,y} + \cos \alpha \vec{k}$$

$$\vec{u}_{P_2M} = (\vec{u}_{P_2M})_{x,y} + \cos \alpha \vec{k}$$

$$\vec{u}_{P_1M} + \vec{u}_{P_2M} = (\vec{u}_{P_1M})_{x,y} + (\vec{u}_{P_2M})_{x,y} + 2\cos \alpha \vec{k}$$

$$(\vec{u}_{P_1M})_{x,y} = -(\vec{u}_{P_2M})_{x,y}$$

$$\vec{u}_{P_1M} + \vec{u}_{P_2M} = 2\cos \alpha \vec{k}$$

Alors :

$$d\vec{E} = \frac{2K\sigma dS}{r^2} \cos \alpha \vec{k} = \frac{2K\sigma a dS}{r^3} \vec{k}$$

$$d\vec{E} = \frac{2Ka\sigma dS}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k}$$

La figure 5 représente un agrandissement de l'élément de surface dS . Cette figure montre

que : $dS = \widehat{O_1O_2} \cdot d\rho = \rho d\rho d\theta$

$\widehat{O_1O_2}$ représente l'arc O_1O_2

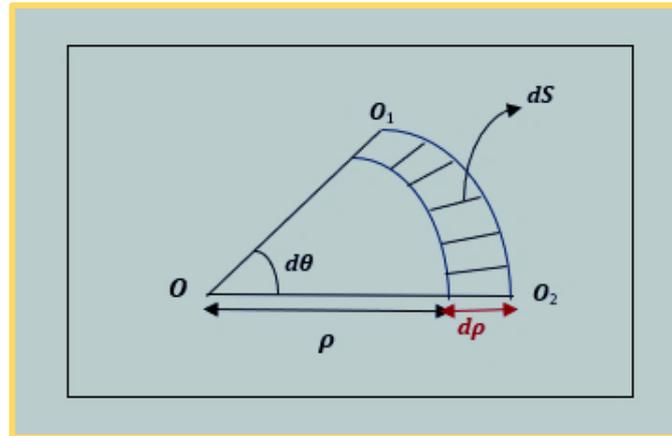


Figure 5

Le champ électrique élémentaire s'écrit alors :

$$d\vec{E} = \frac{2K\alpha\sigma\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Le champ total créé par le disque au point M est :

$$\vec{E} = \iint \frac{2K\alpha\sigma\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Etant donné que ρ et θ sont deux variables indépendantes, l'intégrale peut s'écrire :

$$\vec{E} = 2K\alpha\sigma\vec{k} \underbrace{\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}}_{I_2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta}_{I_1}$$

L'intégrale sur $d\theta$ est de 0 à π au lieu de 2π car nous avons fait la somme des deux parties symétriques du disque.

Calculons les intégrales I_1 et I_2 :

$$I_1 = \int_0^\pi d\theta = \pi$$

$$I_2 = \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}$$

L'intégrale I_2 se calcule par la méthode de changement de variables, en posant :

$\rho^2 + a^2 = f$, $2\rho d\rho = df$, donc :

$$\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int f^{-3/2} df = -\frac{1}{\sqrt{f}}$$

$$\vec{E} = 2Ka\sigma\pi \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right]_0^R \vec{k}$$

$$\vec{E} = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right] \vec{k}$$

2.5.4.3 Cas d'une distribution volumique de charges

Soit (V) un volume chargé par une distribution constante $\rho > 0$. Afin de déterminer le champ électrique créé par les charges de (V) en un point M :

1. On divise cette répartition en un nombre infini de petits volumes élémentaires (dV) de charge dq tel que : $dq = \rho dV$
2. On calcule d'abord le champ élémentaire $d\vec{E}$ créé en M par l'élément dV (figure 6) soit :

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

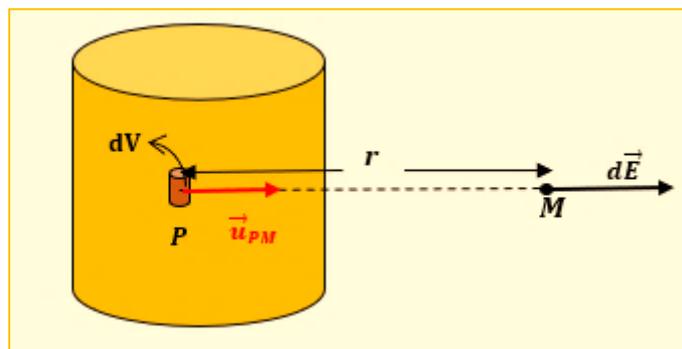


Figure 6

3. Afin de calculer le champ total \vec{E} créé par les charges de V au point M, on fait la somme vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$:

$$\vec{E} = \iiint d\vec{E} = \iiint \frac{K\rho dV}{r^2} \vec{u}_{PM}$$



Pour déterminer le potentiel total V créé au point M par le volume chargé \mathbb{V} , on suit les mêmes étapes citées ci-dessus et on calcule :

$$V = \iiint dV = \iiint \frac{K\rho d\mathbb{V}}{r}$$

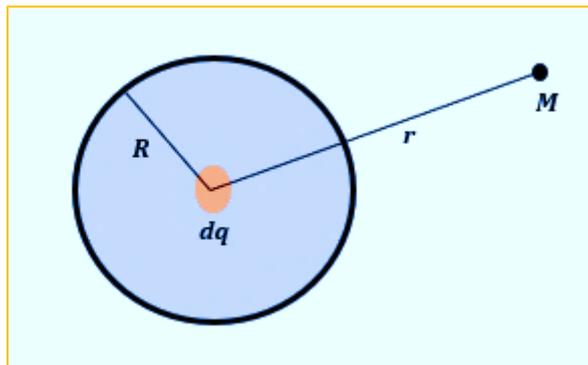
Application 3

Soit une sphère de rayon R porte une distribution de charges volumique uniforme de densité $\rho > 0$. M est un point situé à une distance r du centre O de cette sphère.

1. Calculer le potentiel électrique créé par la sphère au point M
2. Déduire le champ électrique créé par la sphère au point M . Conclure.

Solution

1. Faisons d'abord le schéma :



Le potentiel élémentaire dV créé par la charge dq au point M est :

$$dV = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\rho d\mathbb{V}}{r}$$

$d\mathbb{V}$ est le volume élémentaire occupé par dq

Le potentiel créé par la charge totale de la sphère au point M est :

$$V = \int_0^R \frac{K\rho d\mathbb{V}}{r} = \frac{K\rho}{r} \int_0^R d\mathbb{V}$$

$$V = \frac{K\rho}{r} \mathbb{V}$$

\mathbb{V} représente le volume de la sphère chargée ($\mathbb{V} = 4\pi R^3/3$)

Le potentiel total créé par la sphère chargée est :

$$V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

2. Le champ électrique \vec{E} créé par la sphère au point M :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Le potentiel V ne dépend que de la variable r , alors :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

CONCLUSION

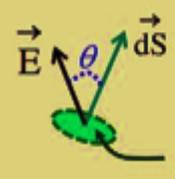
Le champ créé par une sphère chargée est radial

2.5.5 Théorème de Gauss

Définitions

2.5.5.1 Le flux élémentaire d'un champ \vec{E} à travers une surface dS

Le flux élémentaire d'un champ \vec{E} à travers une surface dS est la quantité scalaire :

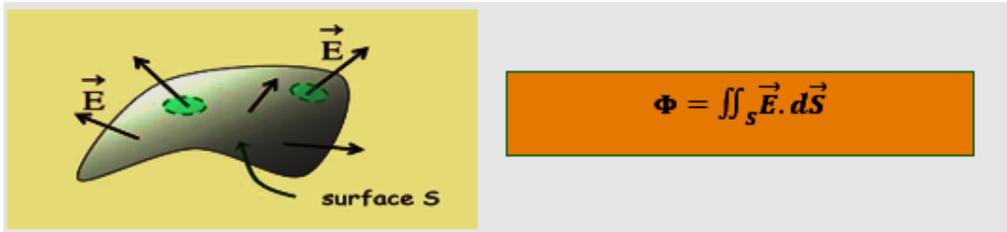


$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos \theta$$

- $d\vec{S}$ est appelé vecteur élémentaire de la surface S
- $d\vec{S}$ est toujours normal à S (il est perpendiculaire à la tangente à la surface).
- $d\vec{S}$ est dirigé vers l'extérieur du volume limité par S .

2.5.5.2 Le flux d'un champ \vec{E} à travers une surface finie S

Le flux d'un champ \vec{E} à travers une surface finie S est la quantité scalaire :



Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface est la mesure du nombre de lignes de ce champ traversant cette surface

Application

Soit S une surface sphérique fermée, contenant une charge q positive en son centre (voir figure 7).

1. Calculer le flux du champ créé par cette charge en un point M à une distance r de q
2. Dédire la valeur du flux créé par un ensemble de charges q_i situé à l'intérieur de la sphère.

Solution

1. Faisons d'abord le schéma afin de désigner le vecteur $d\vec{S}$ et le champ \vec{E} :

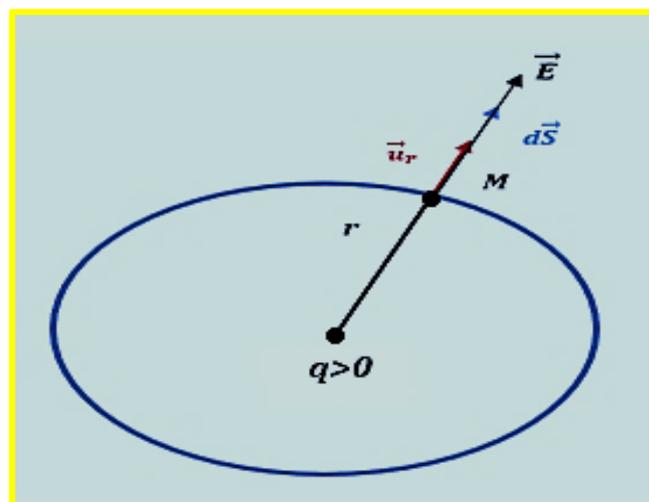


Figure 7

Par définition, le flux du champ à travers l'élément de surface $d\mathbf{S}$ est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

\oiint représente une intégrale sur une surface fermée

Le champ électrique créé par q en M est :

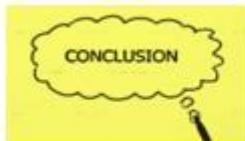
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

alors :

$$\Phi = \oiint E \cdot dS \cdot \cos 0 = \oiint E \cdot dS$$

$$\Phi = E \oiint dS = E \cdot S \Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Le flux du champ électrique à travers une sphère fermée ne dépend que de la charge qui crée ce champ.

2. En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges q_i :

$$\Phi = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

2.5.6 Enoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ électrique envoyé à travers une surface fermée S_G (appelée surface de Gauss) quelconque vaut $(1/\epsilon_0)$ multiplié par la charge algébrique totale contenue dans le volume délimité par cette surface.

2.5.6.1 Dans le cas d'une distribution discontinue de charges :

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{\text{intérieures à } S_G}}{\epsilon_0}$$

2.5.6.2 Dans le cas d'une distribution continue de charges :

Une distribution linéique de charges : $\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_l \lambda dl$

Une distribution surfacique de charges : $\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_S \sigma dS$

Une distribution volumique de charges : $\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$

2.5.6.3 L'intérêt du théorème de Gauss

1. Le théorème de Gauss crée un lien entre le flux du champ électrostatique et les charges appelées **charges sources** qui créent ce champ
2. Le théorème de Gauss est valable pour une surface fermée quelconque lorsque les charges sources possèdent des symétries élevées.

Les étapes à suivre pour le calcul d'un champ \vec{E} en un point M en appliquant le théorème de Gauss :

1. Faire un schéma détaillé de l'objet chargé
2. Distinguer les différentes positions possibles du point M où on peut déterminer \vec{E}



3. Tracer la surface fermée de Gauss S_G , c'est une surface imaginaire
4. Indiquer les vecteurs \vec{dS} et \vec{E} dans les différentes positions possibles du point M sur la surface S_G
5. Calculer le flux à travers S_G :

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (1)$$

6. Calculer la charge totale ($\sum_i q_i$) à l'intérieur de S_G dans le cas d'une distribution discontinue ou $\int dq_i$ dans le cas d'une distribution continue afin d'exprimer le flux :

$$\Phi = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} \text{ ou } \Phi = \frac{\int dq_i}{\epsilon_0} \quad (2)$$

7. Déduire la valeur du champ E en utilisant les équations (1) et (2) :

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

ou

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\int dq_i}{\epsilon_0}$$

8. Donner la formule du vecteur \vec{E} en choisissant sur le schéma un vecteur unitaire correspondant.

Application

On considère une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée en surface de densité surfacique de charge σ uniforme. Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.

Solution

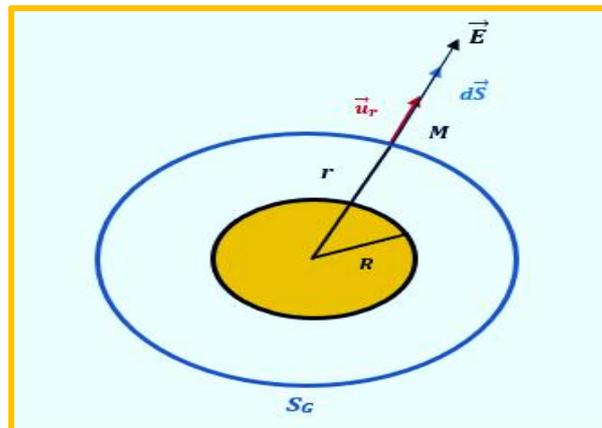
Le point M à une distance r du centre de la sphère peut être soit à l'intérieur ($r \leq R$) ou à l'extérieur ($r \geq R$) de (S) comme il est montré sur le schéma ci-dessous :

1. Pour $r \leq R$:

Dans ce cas $\sum Q_i = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

2. Pour $r \geq R$:

La surface de Gauss (S_G) est une sphère de rayon r



$$\iint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \iint_0^r \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

$$\iint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S$$

S représente la surface chargée à l'intérieur de S_G : $S = 4\pi R^2$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_G = E \cdot S_G = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\iint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\sigma R^2}{\epsilon_0}$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0}$$

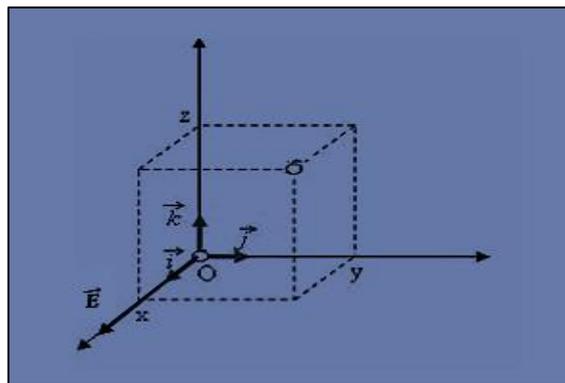
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\sigma R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Exercices corrigés

Exercice 1

On considère la surface fermée d'un cube d'arrête « a » placé dans une région où règne un champ électrique $\vec{E} = x^2 \vec{i}$.



1. Calculer le flux du champ à travers la surface totale du cube
2. En déduire la charge à l'intérieur du cube.

Exercice 2

Soit un anneau de rayon R chargé d'une densité linéique λ constante et positive.

1. Calculer le champ électrique créé par ce cercle au point M situé à une distance z de son centre O
2. Déduire le potentiel électrique au point M
3. Représenter la variation du champ électrique E et celle de V en fonction de z .

Exercice 3

Une cellule détectrice est constituée d'un cylindre creux (rayon R , longueur L), dont la surface latérale métallique est chargée négativement ($-Q$) et d'un fil central fin chargé positivement ($+Q$).

Appliquer le théorème de Gauss pour calculer :

- Le champ électrique $E(r)$ dans la cellule en fonction de Q , L et r où r est la distance à l'axe de la cellule (avec $r < R$).

Exercice 4

Une demi-sphère creuse de centre O et de rayon R est chargée avec une densité surfacique constante $\sigma > 0$.

Calculer le potentiel électrique au point O .

Exercice 5

Un disque plan circulaire de centre O et de rayon R porte une distribution de charges surfacique uniforme de densité $\sigma > 0$.

1. Déterminer le potentiel électrostatique $V(z)$, en un point M de l'axe de révolution de disque
2. En déduire le champ électrostatique au point M
3. En déduire le champ électrostatique d'un plan infini de densité $\sigma > 0$ au point M .

Exercice 6

Calculer, en utilisant le théorème de Gauss : le champ créé en tout point de l'espace par un plan uniformément chargé de densité de charges $\sigma > 0$.

Exercice 7

Un plan P est percé d'une ouverture circulaire de centre O et de rayon R , il porte une distribution de charge surfacique uniforme de densité $\sigma > 0$.

- Calculer le champ électrostatique en un point M de la droite perpendiculaire au plan et passant par le centre O où $OM = z$.

Exercice 8

Une sphère de rayon R contient une charge q uniformément répartie dans son volume.

- 1 - Déterminer la densité volumique de charge ρ au sein de la sphère
- 2 - Exprimer le champ électrique créé en un point M en fonction de ρ en appliquant le théorème de Gauss
- 3- Tracer les variations de E en fonction de la position du point M dans l'espace.

Exercice 9

On creuse dans une sphère de centre O et de rayon R une cavité sphérique de même centre O et de rayon $R/4$.

Dans le volume sphérique restant, la densité volumique de charges est $\rho_0 = \text{cte} > 0$.

1. En utilisant théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique créé par cette sphère
2. Déduire le potentiel électrique (en prenant $V(\infty) = 0$).

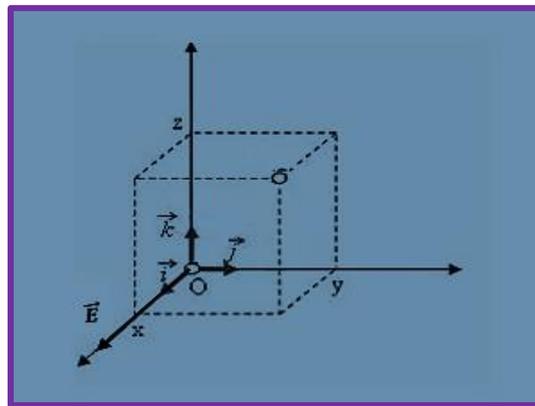
Exercice 10

Soit une distribution volumique de charge $\rho > 0$ répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie et de rayons respectifs R_1 et $R_2 (R_1 < R_2)$.
Exprimer le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

Solutions des exercices

Exercice 1

Faisons d'abord le schéma :



1. Le vecteur surface \vec{dS} est perpendiculaire à chaque surface du cube.

Par définition :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

A travers les deux surfaces parallèles au plan (XOZ), nous avons $\vec{E} \perp \vec{dS} \Rightarrow \phi_1 = 0$

A travers les deux surfaces parallèles au plan (XOY), nous avons $\vec{E} \perp \vec{dS} \Rightarrow \phi_2 = 0$

A travers les deux surfaces parallèles au plan (YOZ), nous avons $\vec{E} // \vec{dS} \Rightarrow \phi_3 \neq 0$

$$\phi_T = \underbrace{\phi_1}_0 + \underbrace{\phi_2}_0 + \phi_3 \Rightarrow \phi_T = \phi_3$$

$$\phi_T = \oiint_{S_1} E \cdot dS_1 + \oiint_{S_2} E \cdot dS_2$$

S_1 est la surface limitée par $x = a$ et S_2 est la surface limitée par $x = 0$, alors :

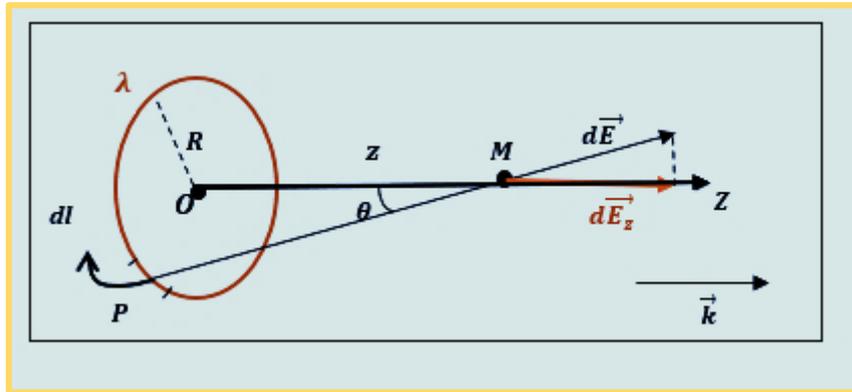
$$\phi_T = a^2 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 \Rightarrow \phi_T = a^4$$

2. Soit Q la charge à l'intérieur du cube : $\phi_T = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = \epsilon_0 \phi_T$

$$Q = \epsilon_0 a^4$$

Exercice 2

1. Faisons d'abord le schéma :



Par raison de symétrie du cercle, le champ total créé est suivant l'axe OZ soit :

$$d\vec{E}_z = dE \cos \theta \vec{k}$$

dE est la valeur du champ créé par la charge dq de l'élément dl situé au point P , alors :

$$d\vec{E}_z = \frac{Kdq}{(PM)^2} \cos \theta \vec{k}$$

$$d\vec{E}_z = \frac{K\lambda dl}{(PM)^2} \cos \theta \vec{k}$$

D'après le schéma, nous avons :

$$(PM)^2 = z^2 + R^2$$

$$\cos \theta = \frac{z}{PM} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$d\vec{E}_z = \frac{K\lambda z dl}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}$$

$$\vec{E}_z = \frac{K\lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k} \int_0^{2\pi R} dl$$

Le champ total créé par l'anneau au point M est :

$$\vec{E} = \vec{E}_z = \frac{\lambda z R}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}$$

2. Le potentiel électrique V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow V = - \int E \cdot dz$$

$$V = - \int \frac{\lambda z R}{2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} dz = - \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \int \frac{z dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Cette intégrale se calcule par changement de variables en posant :

$$z^2 + R^2 = t \Rightarrow 2z dz = dt$$

$$V = - \frac{\lambda R}{4\epsilon_0} \int t^{-3/2} dt$$

$$V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{t}} + C$$

$$V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} + C$$

Quand $z \rightarrow \infty$ $V \rightarrow 0$ ce qui implique que $C = 0$, alors:

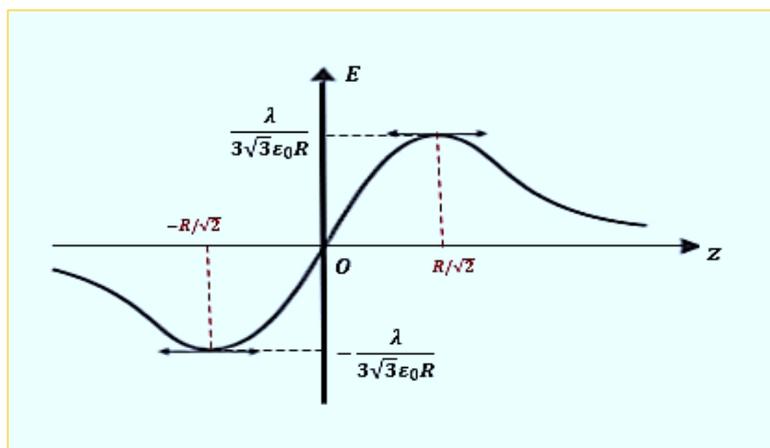
$$V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

3. L'intensité du champ électrique :

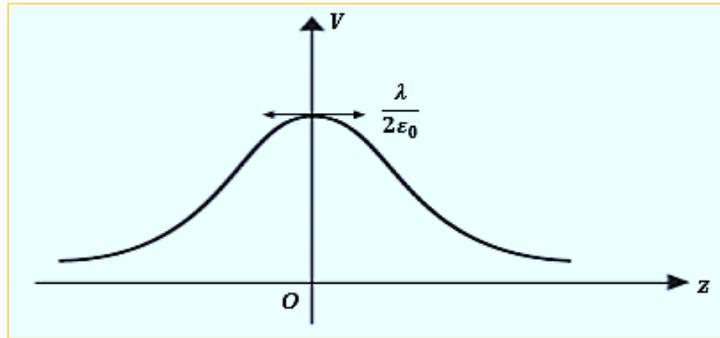
$$E(z) = \frac{\lambda z R}{2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Le potentiel :

$$V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$



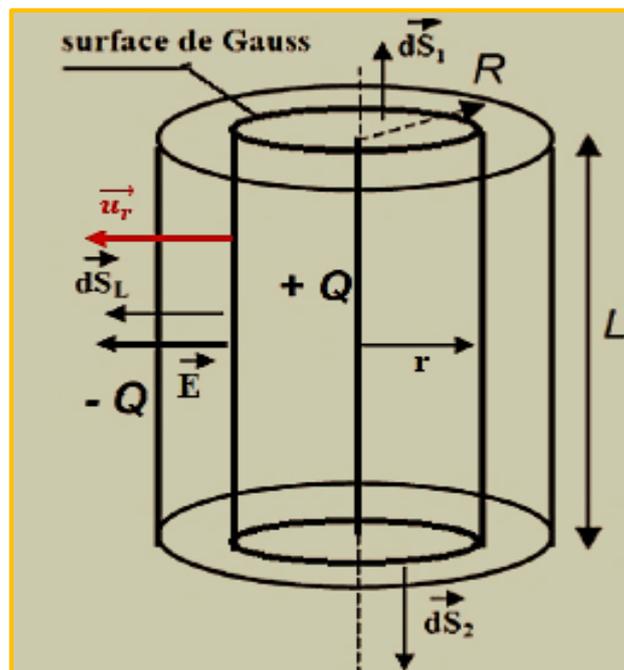
La fonction $E(z)$



La fonction $V(z)$

Exercice 3

Faisons d'abord le schéma :



D'après la symétrie de l'objet $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

La surface de Gauss est un cylindre de rayon r et hauteur L

Le flux total :

$$\Phi_T = \iint_0 \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_0 \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_L$$

Puisque $\vec{E} \perp \vec{dS}_1$ et $\vec{E} \perp \vec{dS}_2$

$$\Phi_T = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_L$$

En appliquant le théorème de Gauss :

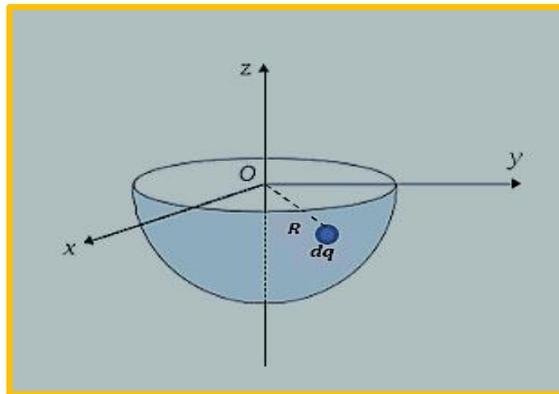
$$\iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{S_L \epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}$$

Alors : $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL} \vec{u}_r$

Exercice 4

Faisons d'abord le schéma :



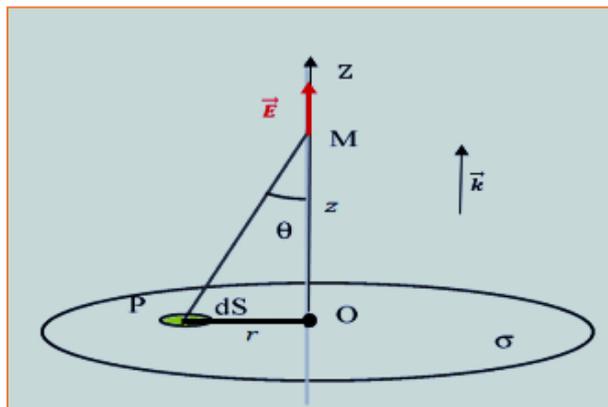
Le potentiel électrique créé au point **O** par la charge élémentaire **dq** de la surface sphérique est :

$$dV(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{R} \Rightarrow V(O) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \iint dS = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$V(O) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

Exercice 5

Faisons d'abord le schéma :



1. Le point M est repéré par sa coordonnée z

Le potentiel au point M créé par une charge élémentaire dq dans l'élément de surface dS est :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(PM)} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0(PM)}$$

$$dV = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Nous calculons cette intégrale par la méthode de changement de variables ;

$z^2 + r^2 = u \Rightarrow 2r dr = du$, en remplaçant dans l'intégrale, nous aurons :

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int \frac{1}{2} u^{-1/2} du$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [u^{+1/2}] ; V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + r^2}]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + R^2} - |z|]$$

Si $z > 0$:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + R^2} - z]$$

Si $z < 0$:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + R^2} + z]$$

2. Afin de déduire le champ électrique du potentiel électrique il faut :

<p>PETIT RAPPEL !</p>	<p>On utilise toujours la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ pour <u>déduire</u> \vec{E} de (V) ou (V) de \vec{E}</p>
------------------------------	---

Pour $z > 0$: $\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{k} \Rightarrow E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} [\sqrt{z^2 + R^2} - z]$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \vec{k}$$

Pour $z < 0$:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \vec{k}$$

3. Un plan infini, uniformément chargé est assimilé à un disque de rayon très grand ; un rayon R qui tend vers l'infini :

Pour $z > 0$:
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

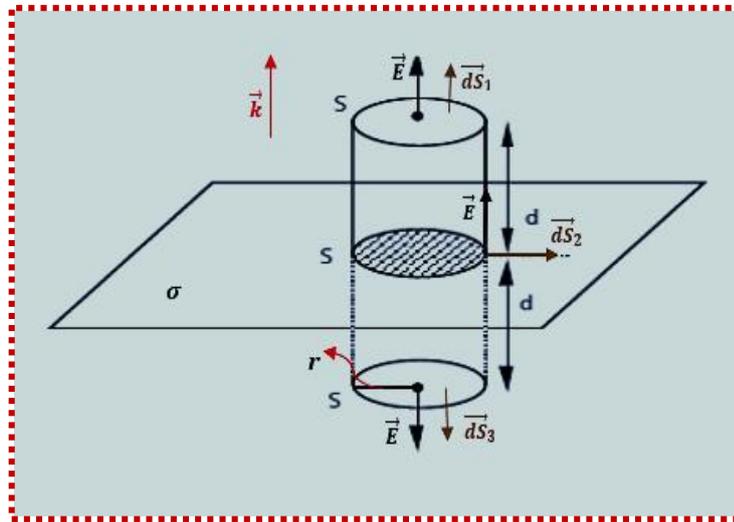
Pour $z < 0$:
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$



Le champ créé par un plan infini chargé est constant, il est indépendant de la position du point M.

Exercice 6

Par raison de symétrie, le champ \vec{E} ne peut être que perpendiculaire au plan.



La surface de Gauss est un cylindre ayant des parois perpendiculaires au plan, des bases parallèles au plan et situées de part et d'autre à la même distance d .

S_G est un cylindre de rayon r et de hauteur $2d$

$$\iint dq_{int} = \iint \sigma dS = \sigma S$$

S est la surface du cercle à rayures sur le schéma ; c'est la seule surface où se trouvent des charges :

$$\iint dq_{int} = \sigma \pi r^2$$

$$\frac{\iint dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

Le flux total à travers la surface de Gauss est :

$$d\phi_T = \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_0 + \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

$$\phi_T = \oint_{S_G} (\vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E} \cdot d\vec{S}_3) = E \cdot (S_1 + S_3)$$

$$S_1 = S_3 = \pi r^2$$

$$\phi_T = 2E \cdot \pi r^2$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\phi_T = \frac{\iint dq_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

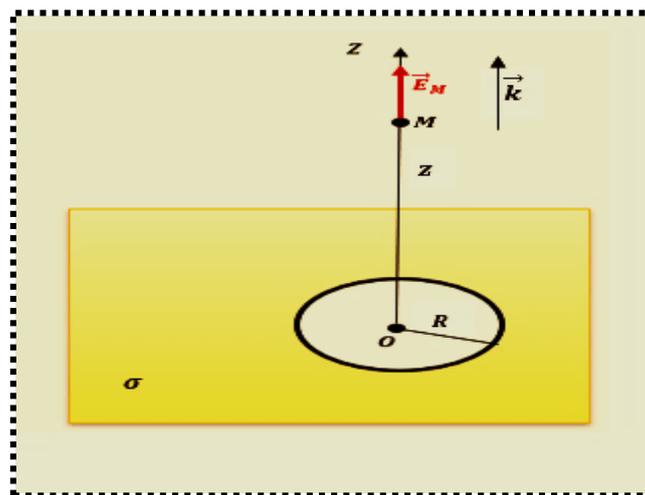
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$



Le champ est uniforme et indépendant de la distance d.

Exercice 7

Faisons d'abord le schéma :



En se basant sur le principe de superposition, le champ \vec{E}_M au point M sera :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_P - \vec{E}_d$$

\vec{E}_P : le champ créé par le plan (sans ouverture), voir exercice 6

\vec{E}_d : le champ créé par le disque, voir exercice 5

Alors,

Pour $z > 0$, nous avons : $\vec{E}_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$ et $\vec{E}_d = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right) \vec{k}$

Le champ au point M est :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_P - \vec{E}_d = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right) \vec{k}$$

Exercice 8

1. La densité de charge ρ :

$$\rho = \frac{q}{V} \Rightarrow \rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

2. La distribution de charges est invariante par toute rotation autour du point O , alors $\vec{E}(M)$ ne dépend que de la variable « r » :

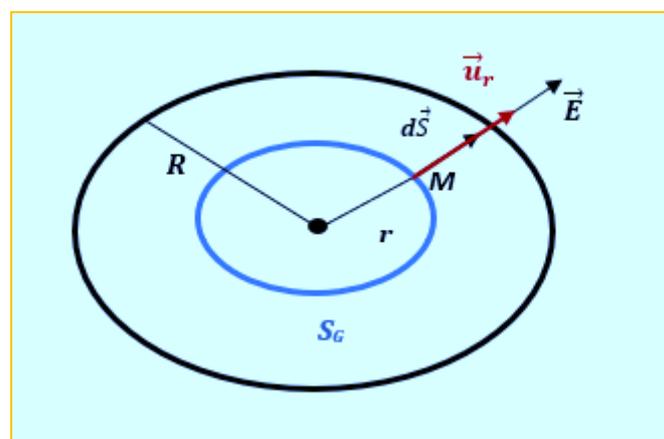
$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$$



Dans le cas d'une sphère, on choisit toujours comme surface de Gauss une sphère fermée de rayon r

Premier cas :

Le point M est à l'intérieur de la sphère ; $r \leq R$



$$\iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \iiint_0^r \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

Nous avons :

- $\vec{E} \parallel d\vec{S}$
- dq_{int} représente l'élément de charge à l'intérieur de S_G
- $S_G = 4\pi r^2$
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ représente le volume où se trouve la charge intérieure de S_G , alors :

$$\iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} [V]_0^r$$

$$\iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_G = E \cdot S_G = E \cdot 4\pi r^2$$

Appliquons le théorème de Gauss :

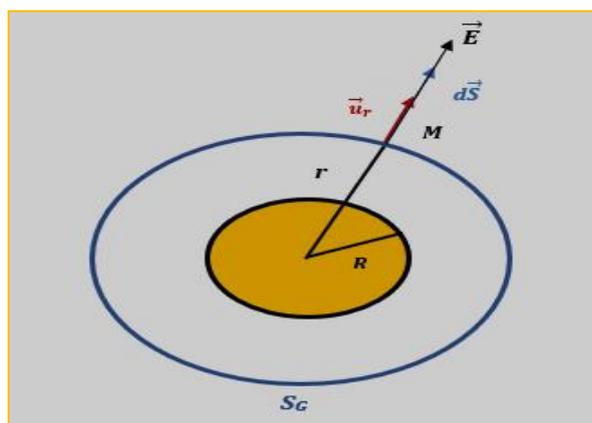
$$\Phi = \iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Deuxième cas :

Le point M est à l'extérieur de la sphère ; $r \geq R$



$$\iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \iiint_0^r \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

$$\iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} V$$

V représente le volume occupé par les charges à l'intérieur de S_G : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho R^3}{3\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_G = E \cdot S_G = E \cdot 4\pi r^2$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\Phi = \iiint_0^r \frac{dq_{int}}{\epsilon_0}$$

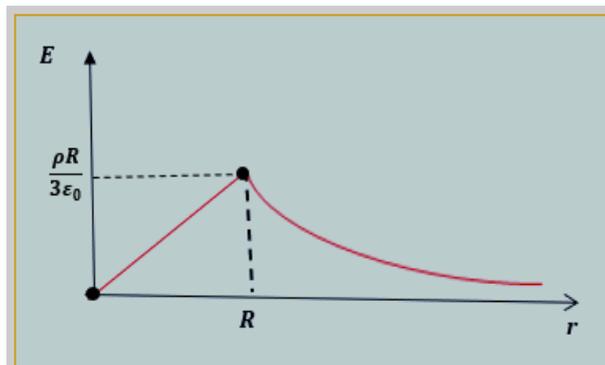
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

3. Nous avons : $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ si $r \leq R$ et $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ si $r \geq R$

Calculons la valeur de E pour $r = R$:

Quand $r = R$, $E(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$ pour les deux intervalles de « r » ce qui implique que **le champ est une fonction continue.**



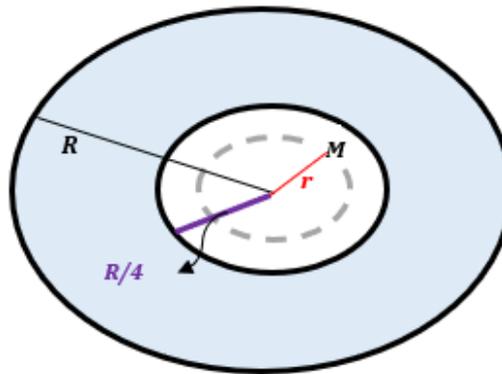
Exercice 9

Afin de calculer le champ créé par la sphère en un point M distant de « r » du centre « O », nous allons appliquer le théorème de Gauss pour les trois positions possibles de M .

NOTE

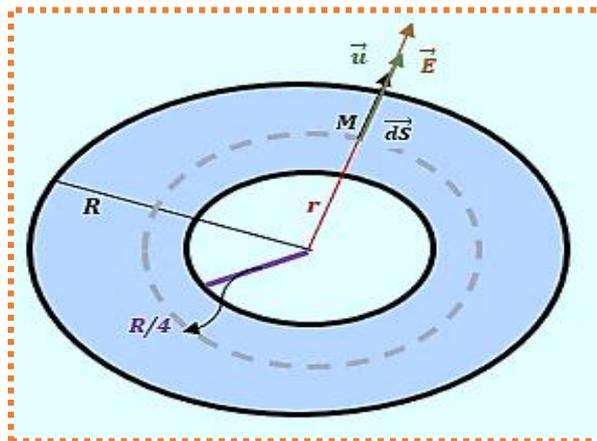
Pour chaque cas, la surface de Gauss (S_G) est une sphère de rayon r , indiquée par une sphère en tirets gris sur les schémas où : $S_G = 4\pi r^2$. Les charges sont en couleur bleu sur les schémas.

a. $r \leq R/4$



A l'intérieur de la cavité $\iiint dq_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

b. $R/4 \leq r \leq R$



$$\iiint dq_{int} = \iiint \rho_0 dV = \rho_0 [V]_{R/4}^r$$

$$\frac{\iiint dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0}{3\epsilon_0} \left[r^3 - \frac{R^3}{64} \right]$$

Le champ est radial ; $\vec{E} \parallel \vec{dS}$:

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot S_G$$

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot 4\pi r^2$$

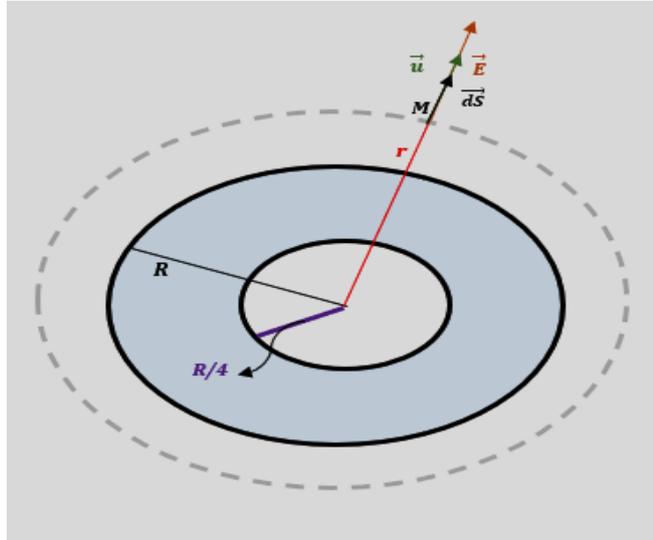
Appliquons le théorème de Gauss:

$$\phi = \frac{\iiint dq_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[r^3 - \frac{R^3}{64} \right] \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[r - \frac{R^3}{64r^2} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[r - \frac{R^3}{64r^2} \right] \vec{u}$$

c. $r \geq R$



$$\iiint dq_{int} = \iiint \rho_0 dV = \rho_0 [V]_{R/4}^R$$

$$\frac{\iiint dq_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[R^3 - \frac{R^3}{64} \right]$$

Le champ est radial ; $\vec{E} \parallel \vec{dS}$:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot S_G \Rightarrow \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot 4\pi r^2$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint dq_{int}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[R^3 - \frac{R^3}{64} \right] \Rightarrow E = \frac{21\rho_0 R^3}{64\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{21\rho_0 R^3}{64\varepsilon_0 r^2} \vec{u}$$

2. On calcule le potentiel en utilisant la relation :

$$V(r) = - \int E \cdot dr$$

Pour $r \geq R$:

$$V1(r) = -\frac{21\rho_0 R^3}{64\varepsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow V1(r) = \frac{21\rho_0 R^3}{64\varepsilon_0 r} + C_1$$

Quand $r \rightarrow \infty, V1(r) \rightarrow 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$V1(r) = \frac{21\rho_0 R^3}{64\varepsilon_0 r}$$

Pour $R/4 \leq r \leq R$:

$$V2(r) = -\int \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left[r - \frac{R^3}{64r^2} \right] dr$$

$$V2(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(-\frac{r^2}{2} - \frac{R^3}{64r} \right) + C_2$$

La continuité de $V2(r)$ en $(r = R)$ impose que $V1(R) = V2(R)$ ce qui implique :

$$\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(-\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{64R} \right) + C_2 = \frac{21\rho_0 R^3}{64\varepsilon_0 R} \Rightarrow C_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

Alors :

$$V2(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(-\frac{r^2}{2} - \frac{R^3}{64r} \right) + \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

Pour $r \leq R/4$:

$$V3(r) = -\int 0 \cdot dr \Rightarrow V3(r) = C_1$$

La continuité de $V(r)$ en $(r = R/4)$ impose que $V3(R/4) = V2(R/4)$ ce qui implique :

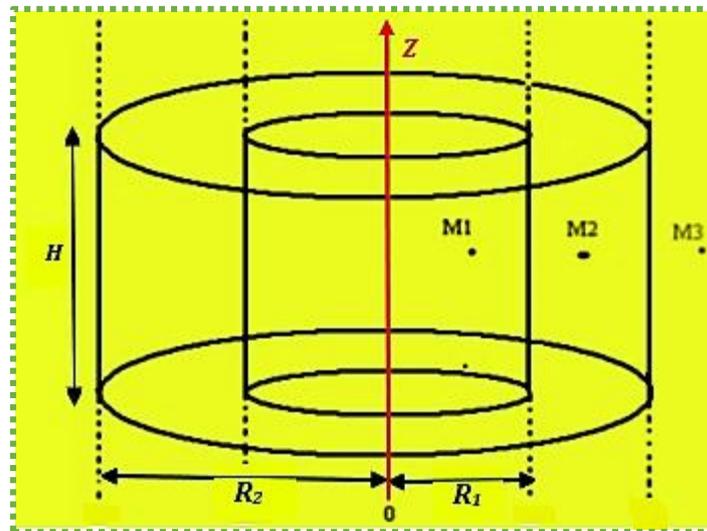
$$\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(-\frac{R^2}{32} - \frac{R^3}{16R} \right) + \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} = C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{15\rho_0 R^2}{32\varepsilon_0}$$

Alors :

$$V3(r) = \frac{15\rho_0 R^2}{32\varepsilon_0}$$

Exercice 10

Faisons d'abord le schéma :



Le champ électrique peut être créé dans les trois régions suivantes indiquées sur le schéma ci-dessus :

- a. Au point $M1$ à distance r de l'axe OZ tel que $r \leq R_1$
- b. Au point $M2$ à distance r de l'axe OZ tel que $R_1 \leq r \leq R_2$
- c. Au point $M3$ à distance r de l'axe OZ tel que $r \geq R_2$



la surface de Gauss (S_G) dans le cas d'un cylindre infini est un cylindre fini de rayon r et de hauteur H .

- a. $r \leq R_1$

$$\iiint dq_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M1) = \vec{0}$$

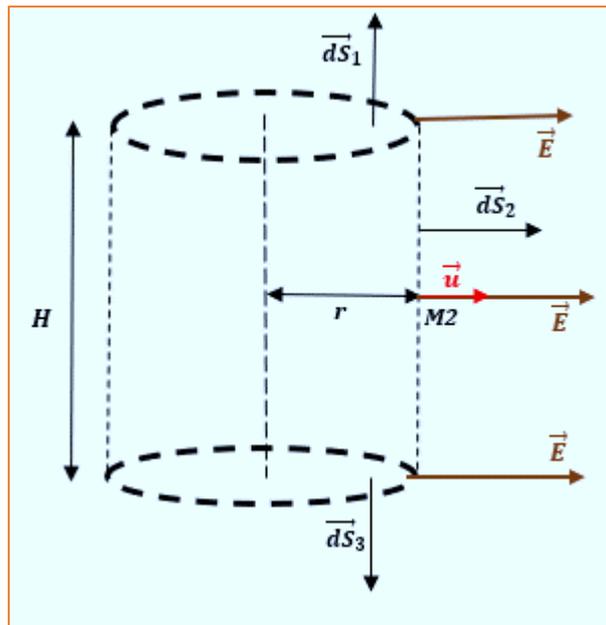
- b. $R_1 \leq r \leq R_2$

La surface de Gauss au point $M2$ et les directions des vecteurs surfaces et celles des vecteurs champs électriques sont représentés sur le schéma ci-dessous :

$$\iiint dq_{int} = \iiint \rho dV = \rho[V]_{R_1}^r$$

$$\iiint dq_{int} = \rho[\pi r^2 H - \pi(R_1)^2 H]$$

$$\frac{\iiint dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho[\pi r^2 H - \pi(R_1)^2 H]}{\epsilon_0}$$



Le flux total à travers la surface de Gauss est :

$$d\phi_T = \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{dS}_1}_0 + \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{dS}_3}_0$$

$$d\phi_T = E \cdot dS_2$$

$$\phi_T = \oiint_{S_G} E \cdot dS_2 = E \cdot S_2$$

$$\phi_T = E \cdot 2\pi r H$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$E \cdot 2\pi r H = \frac{\rho[\pi r^2 H - \pi(R_1)^2 H]}{\epsilon_0}$$

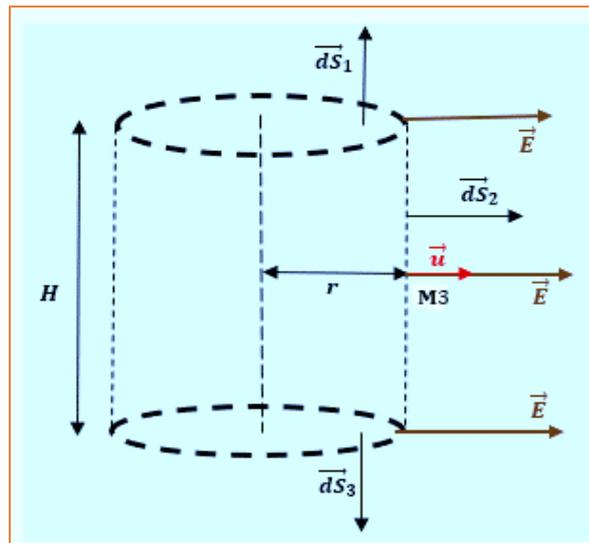
$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{(R_1)^2}{r} \right) \vec{u}$$

c. $r \geq R_2$

$$\iiint dq_{int} = \iiint \rho dV = \rho[V]_{R_1}^{R_2}$$

$$\iiint dq_{int} = \rho[\pi(R_2)^2 H - \pi(R_1)^2 H]$$

$$\frac{\iiint dq_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho[\pi(R_2)^2 H - \pi(R_1)^2 H]}{\epsilon_0}$$



Le flux total à travers la surface de Gauss est :

$$d\phi_T = \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{dS}_1}_0 + \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{dS}_3}_0 = \vec{E} \cdot \vec{dS}_2$$

$$\phi_T = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 = E \cdot S_2$$

$$\phi_T = E \cdot 2\pi r H$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$E \cdot 2\pi r H = \frac{\rho[\pi(R_2)^2 H - \pi(R_1)^2 H]}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2r\epsilon_0} ((R_2)^2 - (R_1)^2) \vec{u}$$

2.6 Les conducteurs

Définition

Un conducteur est un milieu matériel dans lequel existent des charges électriques très faiblement liées à leurs atomes. **Ces charges mobiles** sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique.

Dans le cas des métaux, seuls les électrons sont mobiles.

2.6.1 Loi de conservation de charge

Un corps quelconque, **isolé**, contient un certain nombre de porteurs de charges : ce sont les protons liés aux noyaux des atomes et les électrons qui gravitent autour des noyaux.

La charge électrique d'un système isolé ne peut être ni créée ni annihilée.

Dans **un système isolé**, la charge électrique se conserve :

$$\sum q = 0$$

2.6.2 Conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur électrique en **équilibre électrostatique** est un conducteur qui n'est parcouru par aucun courant. Cette définition signifie que :

- ☀ Toutes les charges électriques libres internes au conducteur sont immobiles
- ☀ Il n'y a aucune charge à l'intérieur du conducteur ; Toutes les charges se répartissent à la surface du matériau
- ☀ Le champ électrique **à l'intérieur** de ce conducteur est toujours nul :

$$\vec{E}_{int} = \vec{0}$$



Deux cas peuvent se présenter suivant la nature électrique du corps :

2.6.2.1 Cas d'un conducteur neutre

Un conducteur neutre est un conducteur dont la charge est nulle, il est caractérisé par :

- Une densité volumique de charges $\rho_{int} = 0$
- Une densité surfacique de charges $\sigma = 0$
- $\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow V_{int} = cte = V_0$, ce qui indique que la surface de ce conducteur est une Equipotentielle.

➤ **Le champ électrique à l'extérieur d'un conducteur neutre**

Nous allons appliquer le théorème de Gauss afin de calculer le champ électrique à l'extérieur d'un conducteur neutre. La surface de Gauss est un cylindre (voir figure 1) :

$$\oiint \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Il n'y a pas de charges à l'intérieur du cylindre, ce qui implique que :

$$\sum Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{ext} = \vec{0}$$

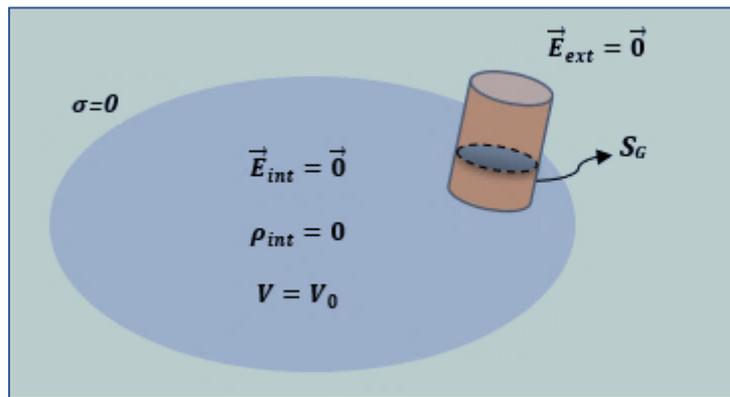


Figure 1. Un conducteur neutre en équilibre électrostatique

2.6.2.2 Cas d'un conducteur chargé (isolé)

Un conducteur isolé est un conducteur non connecté ; il n'est connecté à aucun autre corps et sa charge est constante. Il est caractérisé par :

- $\vec{E}_{int} = \vec{0}$; La charge ne peut se répartir que sur la surface
- $V_{int} = cte = V_0$; La surface de ce conducteur est équipotentielle
- **Le champ électrique à l'extérieur d'un conducteur isolé :**

Nous allons appliquer le théorème de Gauss afin de calculer le champ électrique à l'extérieur d'un conducteur isolé de densité de charge surfacique σ .

On choisit comme surface de Gauss un cylindre (voir figure 2) :

$$\oiint \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

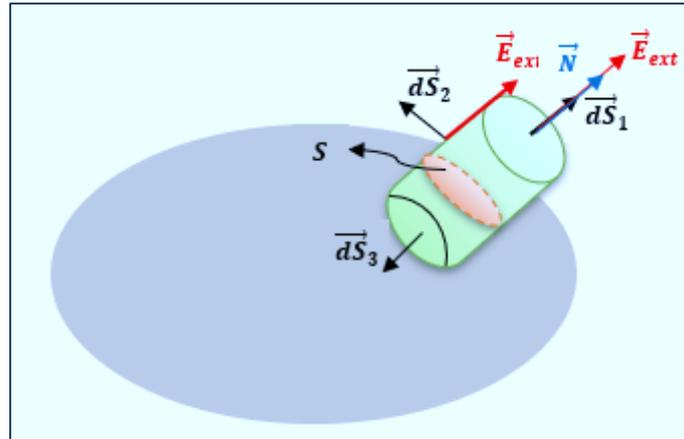


Figure 2. Un conducteur chargé en équilibre électrostatique

Le flux total à travers les trois surfaces indiquées sur la figure 2 est :

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

Avec :

$$\phi_1 = E_{ext} \cdot S_1$$

$$\vec{E}_{ext} \perp \vec{dS}_2 \Rightarrow \phi_2 = 0$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \phi_3 = 0$$

Alors :

$$\phi_T = \phi_1 = E_{ext} \cdot S_1$$

$$E_{ext} \cdot S_1 = \frac{\iint \sigma \cdot dS}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S$$

Les charges intérieures à la surface de Gauss se trouvent sur la surface S (indiquée en couleur rose sur la figure 2) où $S = S_1$, ce qui donne :

$$E_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Soit \vec{N} un vecteur unitaire normal à la surface S_1 de ce conducteur, alors :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}$$

si $\sigma > 0$, le champ électrique est dirigé vers l'extérieur

si $\sigma < 0$, le champ électrique est dirigé vers l'intérieur

2.6.3 Théorème de Coulomb

Le champ extérieur à un conducteur chargé, en équilibre électrostatique, est :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}$$

Les lignes de ce champ sont perpendiculaires à la surface de ce conducteur.

Application

Un conducteur C sphérique de charge Q et de rayon R est en équilibre électrostatique. Exprimer la densité de charge surfacique σ de ce conducteur. Que peut-on conclure ?

Solution

La densité de charge surfacique σ :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$



Pour une charge Q donnée, la densité surfacique σ est d'autant plus élevée que le rayon de courbure est petit. Ce phénomène est appelé « **pouvoir des pointes** ».

Exemple

Paratonnerre de protection d'une statue



Sur une pointe, la densité σ et par conséquent le champ électrique peut atteindre des valeurs très élevées.

2.6.4 Conducteur présentant une cavité

Soit C un conducteur en équilibre électrostatique présentant une cavité, que le corps soit chargé ou non, sa surface externe ou interne est une équipotentielle ($V = \text{constante} = V_0$)

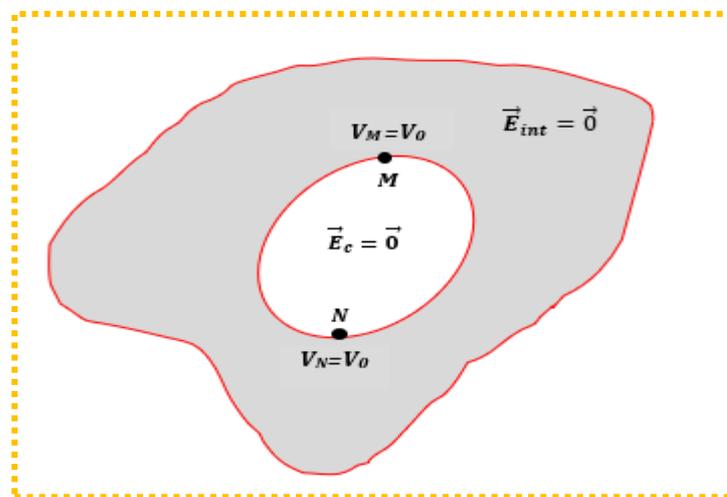


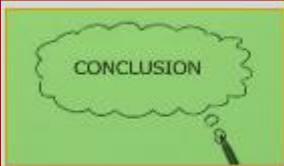
Figure 3. Conducteur à cavité

Soient M et N deux points de la surface interne du conducteur, \vec{E}_c représente le champ à l'intérieur de la cavité (voir figure 3), nous avons :

$$V_M = V_N$$

$$V_M - V_N = -\int_{MN} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_c = \vec{0}$$



Quelles que soient les conditions extérieures au conducteur creux, le champ est nul dans la cavité et dans la partie massive du conducteur.

2.6.5 Pression électrostatique

Soient deux points M_1 et M_2 infiniment proches de la surface d'un conducteur chargé de densité surfacique $\sigma > 0$ (voir figure 4) où :

M_1 est situé à l'extérieur du conducteur

M_2 est situé à l'intérieur du conducteur

dS représente une surface élémentaire située entre les deux points M_1 et M_2

S_1 représente le reste de la surface du conducteur

\vec{E}_1 est le champ créé en M_1 par les charges situées dans dS

\vec{E}_2 est le champ créé en M_1 par les autres charges situées dans S_1 .

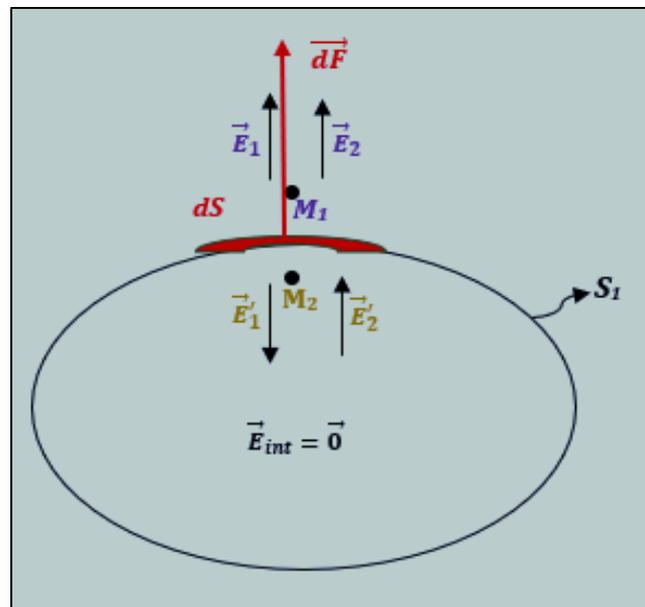


Figure 4

Le champ total créé au point M_1 est :

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Soient :

\vec{E}'_1 : Le champ créé en M_2 par les charges situées dans dS

\vec{E}'_2 : Le champ créé en M_2 par les autres charges situées dans S_1 .

Le champ total créé au point M_2 est :

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = \vec{0}$$

$$\vec{E}'_1 = -\vec{E}'_2$$

Les points M_1 et M_2 **sont infiniment proches**, nous avons :

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{E}'_2 \\ \vec{E}_1 = -\vec{E}'_1 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \\ \vec{E}'_1 = -\vec{E}'_2 \end{cases}$$

On en déduit que : la contribution de l'ensemble de charges du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate.

Le champ total créé au point M_1 (à l'extérieur) est :

$$\vec{E}_{ext} = 2\vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_{ext}}{2}$$

D'après la loi de Coulomb : $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}$, ce qui donne :

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{N}$$

Soit dq la charge de l'élément de surface dS , la force \vec{dF} exercée par l'ensemble des autres charges du conducteur sur dq est :

$$\begin{aligned} \vec{dF} &= dq \cdot \vec{E}_2 = \sigma dS \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{N} \\ \vec{dF} &= \frac{\sigma^2 dS}{2\epsilon_0} \vec{N} \end{aligned}$$



La force \vec{dF} est normale à la surface du conducteur et toujours dirigée vers l'extérieur quel que soit le signe de la charge.

On définit **la pression électrostatique** exercée sur la surface d'un conducteur chargé par :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

La pression électrostatique est la pression subie par la surface d'un conducteur électrique chargé. Elle s'exerce perpendiculairement à la surface du conducteur, de l'intérieur vers l'extérieur. Elle tend ainsi à arracher les charges qui sont retenues sur le conducteur.

2.6.6 Phénomène d'influence entre deux conducteurs chargés

Définition

L'influence électrostatique désigne l'état de répartition des charges électriques d'un conducteur. Il existe deux types d'influence :

2.6.6.1 Influence partielle

Soient C_1 un conducteur chargé positivement ($Q_1 > 0$) et C_2 un conducteur neutre ($Q_2 = 0$). Si on approche C_1 de C_2 on observe que :

- Il n'y a qu'une **partie de lignes de champ** électrostatique issues du conducteur C_1 (voir figure 5), créée par une charge q_1 , qui aboutissent à C_2 (voir figure 6).
- Sur C_2 **une charge négative** apparaît sur la partie faisant face à C_1 (q_2) tandis qu'une charge positive ($-q_2$) apparaît sur la partie opposée afin d'assurer la neutralité du conducteur C_2 (voir figure 6).

● Cet état est appelé **influence partielle de C_1 et C_2**

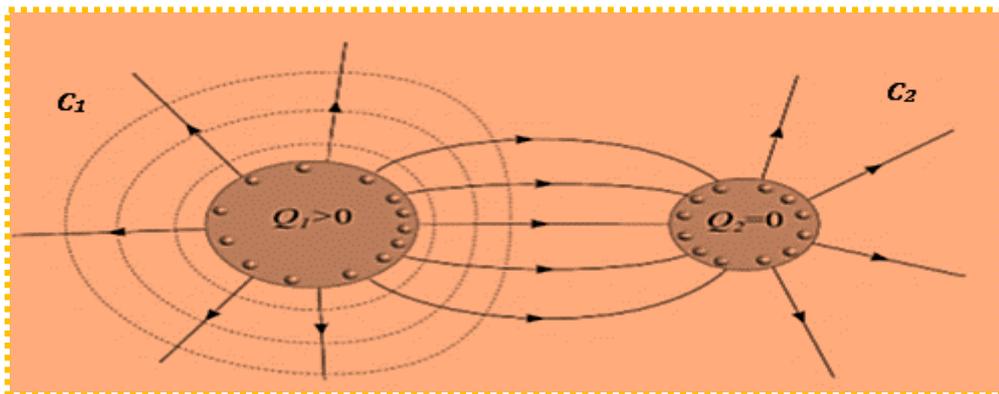


Figure 5

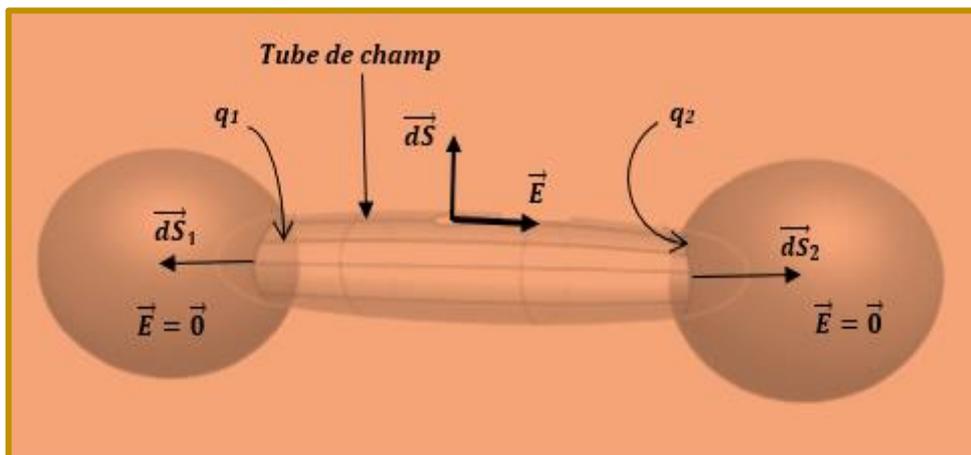


Figure 6

Démonstration :

Les deux conducteurs C_1 et C_2 sont en état d'influence partielle, trouver la relation entre les deux charges q_1 et q_2 ?

En choisissant comme surface de Gauss le tube de champ représenté sur la figure 6 où les deux extrémités de ce tube se trouvent à l'intérieur des deux conducteurs C_1 et C_2 .

Le flux total à travers les trois surfaces du tube est :

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 + \phi$$

Où :

- ϕ_1 est le flux à l'intérieur de C_1
- ϕ_2 est le flux à l'intérieur de C_2
- ϕ est le flux à travers le tube

A l'intérieur des conducteurs : $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \phi_1 + \phi_2 = 0$

Sur le tube de champ $\vec{E} \perp \vec{dS} \Rightarrow \phi = 0$, alors : $\phi_T = 0$

$$\phi_T = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow$$

$$q_1 = -q_2 \Leftrightarrow \sigma_1 dS_1 = -\sigma_2 dS_2$$

dS_1 et dS_2 sont appelés deux éléments correspondants.

Théorème des éléments correspondants

Deux éléments correspondants portent des charges égales en valeur absolue et de signes opposés

2.6.6.2 Influence d'un conducteur relié au sol

La terre est un grand conducteur neutre qui contient un réservoir de charges positives et négatives.

Soit un conducteur C_1 chargé positivement, si on relie C_1 au sol l'ensemble $[C_1 + \text{sol}]$ constitue un nouveau conducteur qu'on va appeler C_2 . La charge initialement de C_1 va se répartir sur ce nouveau conducteur C_2 (voir figure 7).

La surface de C_1 étant négligeable devant celle de la terre, la terre va absorber l'ensemble des charges de C_1 .

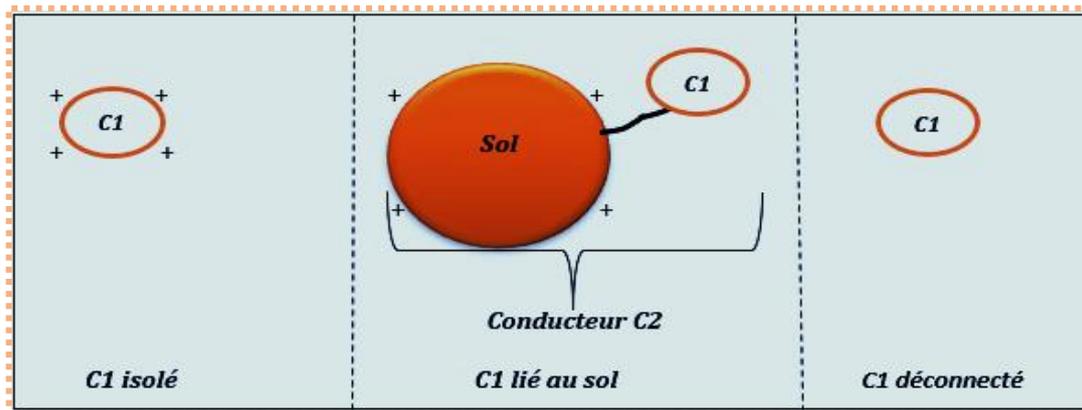


Figure 7

Le sol est représenté par le symbole : 

2.6.6.3 Influence totale

Soient : (2) un conducteur creux initialement neutre

(1) un conducteur chargé par $Q_1 > 0$

On place le conducteur (1) dans le conducteur (2) (voir figure 8). A l'équilibre :

- ☀ la surface interne de (2) va porter une charge $-Q_1$
- ☀ la surface externe de (2) va porter une charge Q_1

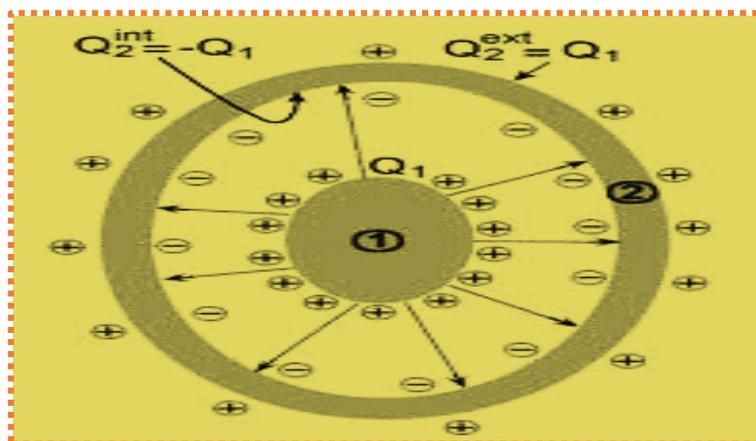


Figure 8

Cet état est appelé l'influence totale entre deux conducteurs

2.7 Capacité d'un conducteur isolé

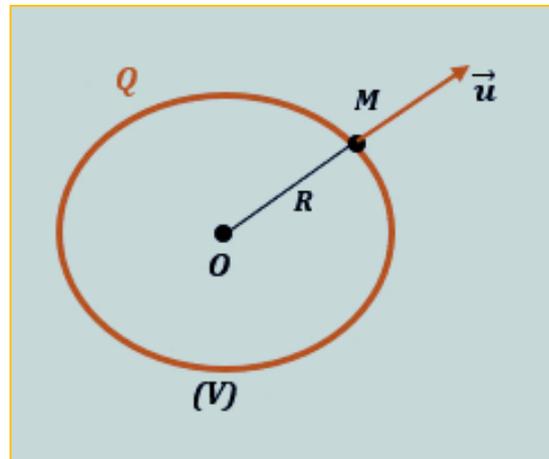
Soit un conducteur porté au potentiel V , il apparaît alors sur sa surface une charge Q . D'après le théorème de superposition des états d'équilibre, si sa charge (Q) est multipliée par une constante k , le potentiel (V) sera multiplié par la même constante k ; Q et V sont proportionnels où :

$$Q = CV$$

Par définition, le coefficient de proportionnalité, noté C , est appelé la capacité du conducteur, elle est exprimée en *Farad*.

Application :

Calculons la capacité d'une sphère conductrice S , de charge Q et de rayon R , portée à un potentiel V .



Solution :

Nous avons déjà calculé, par application du théorème de Gauss, le champ électrique ainsi que le potentiel en un point M à l'extérieur d'une sphère chargée où :

$$\vec{E}(M) = \frac{KQ}{(OM)^2} \vec{u}$$

$$V(M) = \frac{KQ}{OM}$$

Dans le cas où le point M est situé à la surface de S ($OM=R$, voir le schéma ci dessus), le potentiel de ce conducteur devient :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Donc,

$$C = \frac{Q}{V}$$

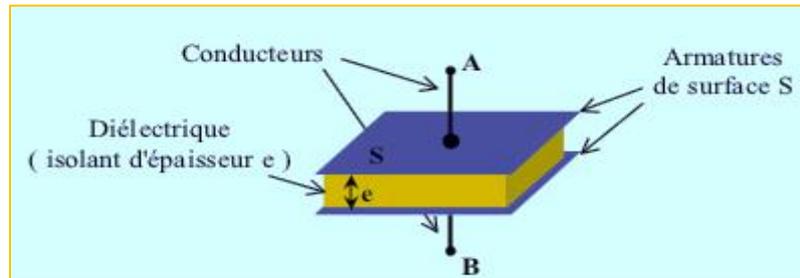
$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

2.8 Capacité d'un condensateur

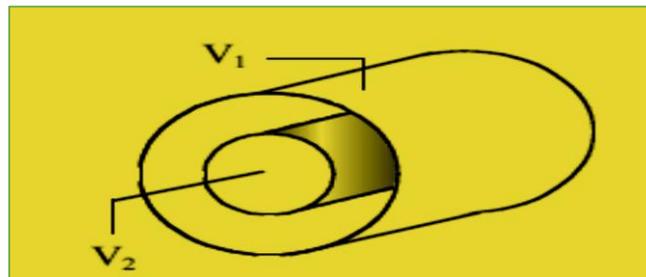
- **Un condensateur** est un composant électronique élémentaire constitué de deux armatures conductrices, séparées par un diélectrique (isolant électrique).

Il y a deux sortes de condensateurs :

☀ Condensateur à armatures rapprochées



☀ Condensateur à influence totale



- La propriété principale d'un condensateur est son pouvoir de stocker des charges électriques opposées sur ses armatures. La valeur absolue de ces charges est proportionnelle à la valeur absolue de la tension qui lui est appliquée.
- La capacité d'un condensateur est donnée par :

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Q représente la charge de chaque armature

ΔV représente la différence de potentiel entre les deux armatures

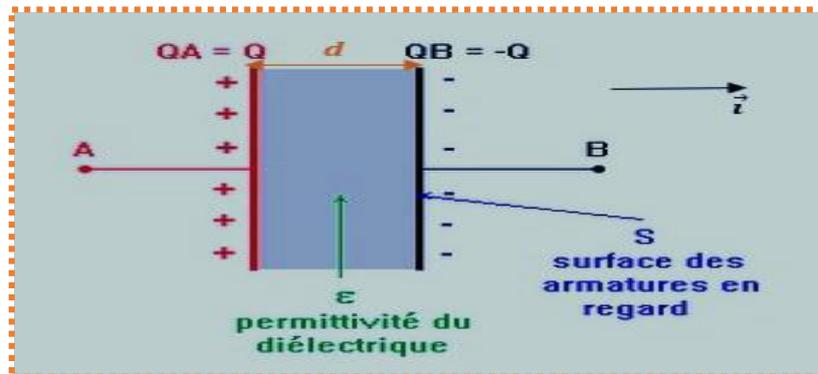
Le condensateur est représenté par le symbole : 

Application

Un **condensateur plan** constitué de deux plaques parallèles A et B , infinies, séparées par une distance d . Ces deux plaques sont séparées par un diélectrique de permittivité ϵ .
Montrer que la capacité de ce condensateur ne dépend pas de sa charge Q .

Démonstration

Faisons d'abord le schéma :



Généralement, on suit trois étapes pour déterminer la capacité de n'importe quel condensateur. **On calcule** :

1. Le champ électrique à l'intérieur du condensateur qui est la somme des deux champs créés par les deux armatures planes et infinies.

Nous avons déjà calculé le champ créé par un plan chargé en appliquant le théorème de Gauss, alors :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{i} + \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{i} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{i}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{S\epsilon}$$

2. La différence de potentiel entre A et B par la relation :

$$dV = -E \cdot dx$$

$$\int_A^B dV = - \int_0^d \frac{Q}{S\epsilon} dx$$

$$V_A - V_B = \frac{Q d}{S\epsilon}$$

3. La capacité de ce condensateur en utilisant la relation :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\epsilon}{d}$$



La capacité ne dépend que des dimensions du condensateur et du milieu dans lequel il est placé.

2.8.1 Groupement des condensateurs

2.8.1.1 Condensateurs en série

Soient trois condensateurs de capacités C_1 , C_2 et C_3 mis en série (Voir figure 9). On les porte aux potentiels U_1 , U_2 et U_3 . La tension totale U , entre A et B, est donnée par :

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Nous avons dans ce cas : $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ où Q est la charge portée par chaque condensateur :

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

$$U = Q \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{C_i} \right)$$

La tension totale entre A et B correspond à celle d'un condensateur unique de capacité équivalente égale à :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{C_i}$$

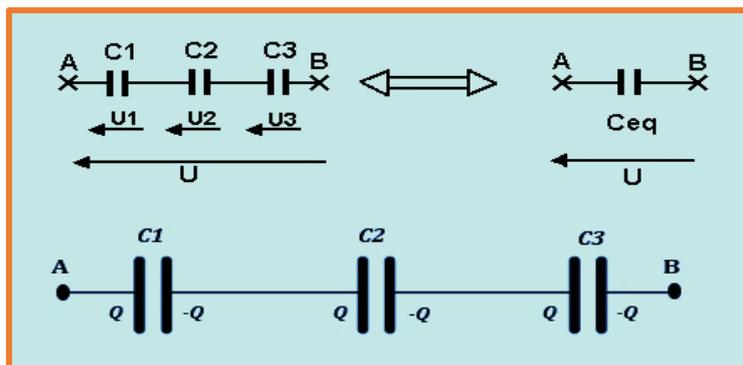


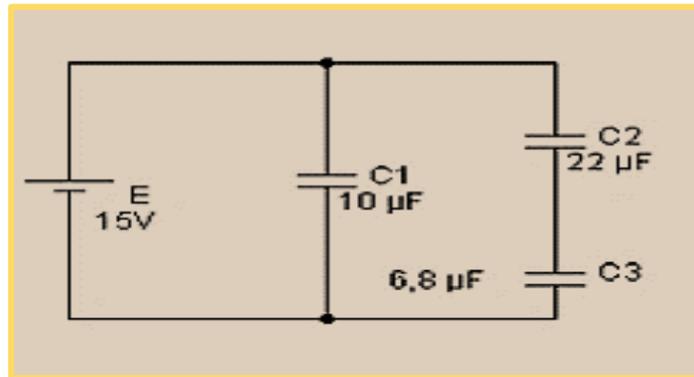
Figure 9

En général : la capacité équivalente de n condensateurs de capacités C_i mis en série est :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Application

Calculez la charge et la tension aux bornes de chacun des condensateurs suivants :

**Solution**

Pour le condensateur C1 :

Soit U_{C1} est la tension aux bornes de C1, alors :

$$U_{C1} = E$$

$$Q_1 = C1U_{C1} = C1.E$$

$$A.N : Q_1 = 150 \mu C, U_{C1} = 15 V$$

Pour les condensateurs C2 et C3 :

- Les condensateurs C2 et C3 sont en série, calculons leur capacité équivalente C :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3} \Rightarrow C = \frac{C2.C3}{C2 + C3}$$

Les condensateurs C2 et C3 portent une même charge ($Q_2 = Q_3$) parce qu'ils sont parcourus par le même courant, le schéma de ce circuit indique que :

$$E = U_{C2} + U_{C3}$$

$$E = \frac{Q_2}{C2} + \frac{Q_3}{C3}$$

$$E = Q_2 \left(\frac{C2 + C3}{C2C3} \right)$$

$$Q_2 = E \left(\frac{C2C3}{C2 + C3} \right)$$

$$A.N : Q_2 = Q_3 = 77,92 \mu C$$

- Les tensions aux bornes de C2 et C3 :

$$U_{C2} = \frac{Q}{C2}, \quad U_{C3} = \frac{Q}{C3}$$

A.N : $U_{C2} = 3.54 V$, $U_{C3} = 11,46 V$

2.8.1.2 Condensateurs en parallèle

Soient trois condensateurs de capacités C_1, C_2 et C_3 mis en parallèle (Voir figure 10). Q_1, Q_2 et Q_3 sont les charges portées par C_1, C_2 et C_3 respectivement.

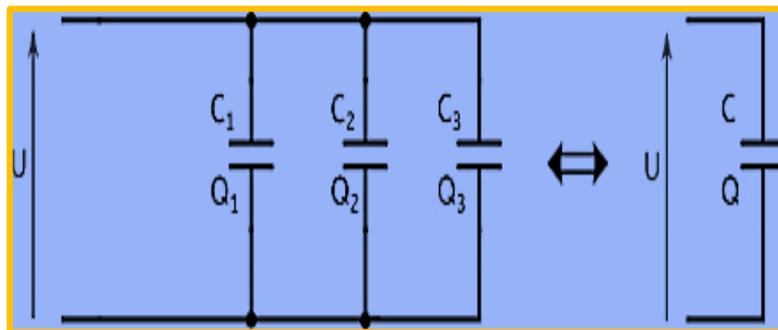


Figure 10

Nous avons :

$$Q_1 = C_1 U_1, \quad Q_2 = C_2 U_2, \quad Q_3 = C_3 U_3$$

U_1, U_2 et U_3 représentent les potentiels aux bornes de C_1, C_2 et C_3 respectivement, la figure 10 indique que :

$$U_1 = U_2 = U_3 = U$$

C est la capacité équivalente de C_1, C_2 et C_3

D'après le principe de la conservation de charge, la charge totale Q du circuit équivalent (figure 10), est égale à :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow CU = (C_1 + C_2 + C_3)U$$

où:

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Alors :

$$C = \sum_{i=1}^3 C_i$$

En général : la capacité équivalente de n condensateurs de capacités C_i mis en parallèle est donnée par :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

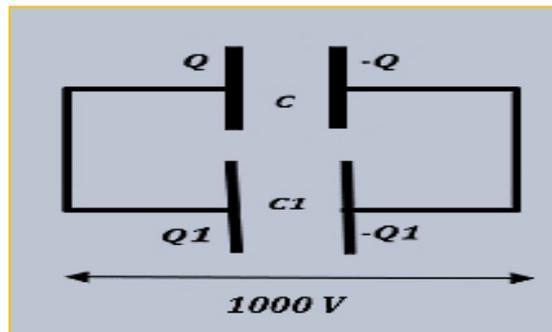
Application

Deux condensateurs de capacités 5 nF et 10 nF sont montés en parallèle.

1. Quelle est la capacité équivalente ?
2. Une différence de potentiel égale à 1000 Volts est appliquée à l'ensemble. Trouver la charge de chacun des condensateurs.

Solution

Faisons d'abord un schéma :



1. La capacité équivalente de ce circuit est :

$$C_{eq} = C + C1$$

A.N: $C_{eq} = 15 \text{ nF}$

2. Soient V et $V1$ les tensions aux bornes de C et de $C1$ respectivement

$$C \parallel C1 \Rightarrow V = V1 = 1000 \text{ V}$$

Par conséquent :

$$Q = CV \Rightarrow Q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ coulomb}$$

$$Q1 = C1V \Rightarrow Q1 = 10^{-5} \text{ coulomb}$$

2.9 Energie électrostatique d'un conducteur

Au cours du transfert de charges sur un conducteur, sa charge totale ainsi que la valeur absolue de son potentiel augmentent.

L'énergie interne du conducteur lorsqu'il atteint sa charge complète Q est donnée par :

$$E_p = \int_0^Q V dq$$

$$E_p = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

La capacité de ce conducteur est définie comme étant la somme des charges électriques du conducteur divisée par son potentiel :

$$C = \frac{Q}{V}$$

Alors, l'énergie interne du conducteur s'écrit :

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

- Pour n conducteurs en équilibre, chacun d'eux porte une charge Q_i et se trouve porté à un potentiel V_i

L'énergie emmagasinée dans ce système est :

$$E_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Un conducteur C sphérique de rayon R est en équilibre électrostatique.

1. Si Q est la charge de ce conducteur, comment est-elle répartie ?
2. Quelle est la valeur du champ électrique à l'intérieur (\vec{E}_{int}) de ce conducteur ?
3. Dédire le potentiel électrique à l'intérieur (V_{int}) de ce conducteur
4. En utilisant le théorème de Gauss, calculez le champ électrique à l'extérieur (\vec{E}_{ext}) de ce conducteur
5. Dédire le potentiel électrique à l'extérieur (V_{ext}) de ce conducteur
6. Donner l'expression du potentiel électrique à l'intérieur (V_{int}).

Exercice 2

Soient deux sphères conductrices S et S' , de rayons R et R' , reliées par un fil conducteur. On suppose que le fil est assez long où le potentiel de chaque sphère ne peut être dû qu'à l'influence de sa propre charge.

1. Exprimer le rapport de charges portées par chacune des sphères Q/Q' à l'équilibre
2. En déduire le rapport des densités de charge σ/σ'
3. Discuter les résultats trouvés dans les questions 1 et 2.

Exercice 3

Une sphère conductrice creuse S , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , est placée dans le vide. La sphère S porte une charge Q_0

1. Déterminer en tout point de l'espace le sens et la direction du champ électrique \vec{E} créé par la sphère en appliquant le théorème de Gauss
2. Calculer \vec{E} en fonction de la densité de charge σ de cette sphère
3. Dédire le potentiel en tout point de l'espace
4. Réécrire ce potentiel en fonction de Q_0
5. Calculer le potentiel V en kV de la sphère S et sa capacité en pF .
($R_2=36\text{ cm}$, $Q_0=2,8\text{ }\mu C$)

Exercice 4

Un conducteur sphérique S de rayon R est maintenu au potentiel constant V . Au voisinage se trouve un autre conducteur sphérique $S1$ de rayon $R1$ portant une charge constante $Q1$. Les deux centres des sphères, espacés d'une distance L , restent dans un même plan horizontal.

1. Calculer la charge Q de S et le potentiel $V1$ de $S1$ en fonction de V , $Q1$, R , $R1$ et L
2. Calculer la force électrostatique qui existe entre ces deux conducteurs en fonction de $Q1$
3. Calculer l'énergie électrostatique du système formé par les deux conducteurs à la distance $L=L_0$ en fonction de R , V , L_0 , $R1$ et $Q1$.

Exercice 5

Soit un condensateur cylindrique de hauteur h , de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de charge $Q>0$.

1. Calculer la capacité de ce condensateur en fonction de sa densité σ
2. Que devient la capacité quand l'épaisseur « e » de ce cylindre est négligeable devant la valeur de ses rayons ?

Exercice 6

Soit un condensateur plan dont les armatures, séparées par de l'air, ont une surface S . Soit « e » la distance entre les deux armatures.

1. Donner la capacité de ce condensateur ?
2. On introduit parallèlement à ces armatures une plaque métallique d'épaisseur « d ». Que devient la capacité de ce condensateur ? Que peut-on conclure ?

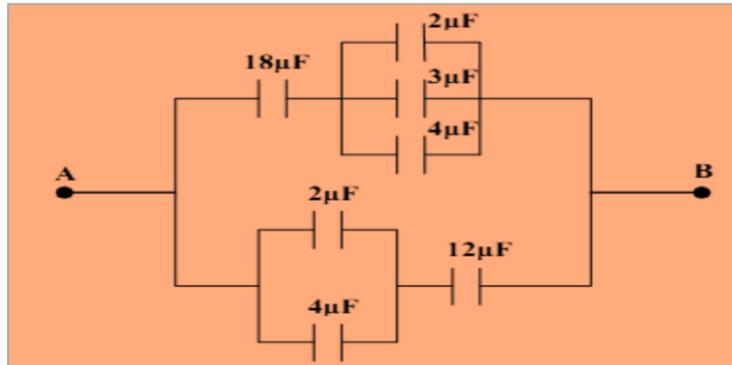
Exercice 7

On charge un condensateur C sous une tension V_0 . Ce condensateur étant isolé, on le relie parallèlement à un autre condensateur initialement neutre $C1$.

1. Déterminer le potentiel de chaque condensateur
2. En déduire les charges portées par chaque condensateur.

Exercice 8

Déterminez la capacité équivalente du circuit suivant :



Exercice 9

Un condensateur de capacité $100\mu F$ doit avoir une réserve d'énergie de 50 Joules de façon à pouvoir actionner une lampe de flash.

1. Quelle est la tension nécessaire pour charger le condensateur ?
2. Quelle est la charge qui traverse la lampe de flash ?

Exercice 10

1) Quelle est la charge Q_1 d'une sphère métallique (A) de rayon $R_1 = 6cm$ lorsqu'elle est portée au potentiel $V_0 = 45\ 000$ volts ? Dans tout le problème on suppose que cette sphère est isolée.

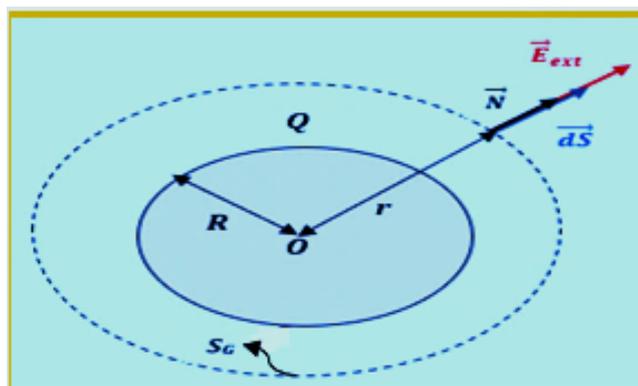
2) On entoure la sphère (A) par une autre sphère métallique creuse (B) concentrique, de rayons $R_2 = 12$ cm et $R_3 = 15$ cm, initialement neutre et isolée.

- a) Quelles sont les charges portées par (B) ?
 - b) Calculer les potentiels V_A et V_B des deux sphères.
- 3) La sphère (B) est reliée à la terre ($V_B = 0$). Quel est le nouveau potentiel V'_A ?

Solution des exercices

Exercice 1

Faisons d'abord le schéma :



1. D'après la définition : " Il ne peut y avoir de charges libres à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique" ; la charge Q ne peut se répartir que sur la surface de la sphère.

2. Selon la définition citée ci-dessus : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$.

3. En coordonnées sphériques, la relation : $\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{grad} V_{int}$ donne :

$$\frac{dV_{int}}{dr} = 0 \Rightarrow V_{int} = \text{constante}$$

$$V_{int} = V_0$$

4. La surface de Gauss est une sphère de rayon r (la sphère en tirets sur le schéma) :

$$\oiint \vec{E}_{ext} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_{ext} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Soit \vec{N} le vecteur unitaire normal à la surface de la sphère, alors :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{N}$$

5. Le potentiel électrique à l'extérieur V_{ext} :

$$\vec{E}_{ext} = -\overrightarrow{grad} V_{ext} \Rightarrow V_{ext} = - \int E_{ext} \cdot dr$$

$$V_{ext} = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

A l'extérieur du conducteur : $V_{ext} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$, ce qui implique que $C = 0$, alors :

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

6. L'expression du potentiel électrique à l'intérieur V_{int} calculé dans la question 3 :

En appliquant les conditions de continuité du potentiel à la surface sphérique du conducteur :

$$V_{ext}(R) = V_{int}(R)$$

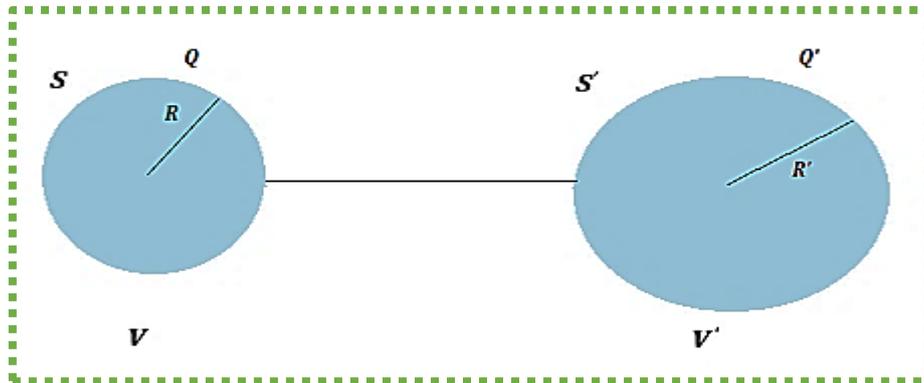
$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = V_{int} = V_0$$

$$V_{int} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La surface du conducteur (externe ou interne) est une équipotentielle

Exercice 2

Faisons d'abord le schéma :



1. Nous avons déjà calculé le potentiel d'un conducteur sphérique chargé :

Le potentiel de la sphère S est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Le potentiel de la sphère S'est :

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{R'}$$

Du moment que les deux conducteurs sont reliés par un fil conducteur, à l'équilibre :

$$V = V' \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{Q'}{R'}$$

Alors :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}$$

2. La relation entre les densités et les charges est :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad \sigma' = \frac{Q'}{4\pi R'^2}$$

Alors :

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{R'}{R}$$

3.

* Le rapport : $\frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}$ indique la relation d'équivalence :

$$R' \gg R \Leftrightarrow Q' \gg Q$$

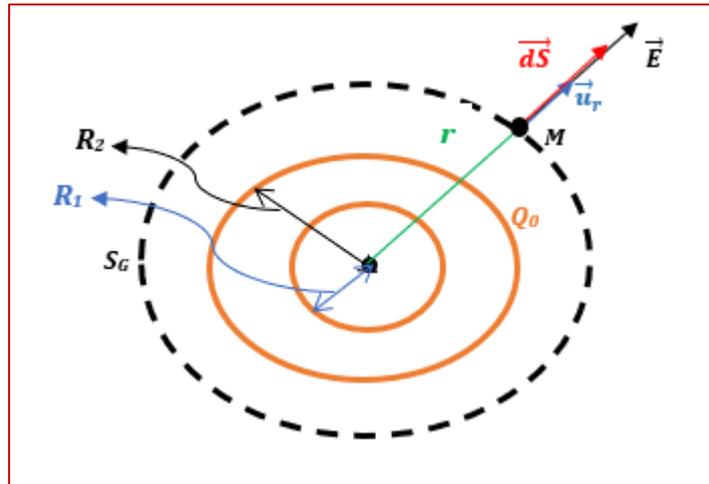
Comme dans le cas d'un conducteur relié au sol, la charge portée par le conducteur de rayon R sera négligeable devant celle portée par celui de rayon R' .

* Dans le rapport : $\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{R'}{R}$ indique la relation d'équivalence :
 $R \ll R' \Leftrightarrow \sigma \gg \sigma'$

Dans ce cas les charges s'accumulent sur les surfaces de faible dimension, c'est un phénomène physique appelé **le pouvoir de pointes**.

Exercice 3

1. La sphère S est un conducteur, la charge ne peut être que surfacique ; elle est répartie sur sa surface externe.



- Le champ à l'intérieur de la sphère : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
- Pour un point M à l'extérieur de la sphère, la surface de Gauss S_G est une sphère de rayon $OM=r$; « O » est le centre de la sphère S .

$$\oiint \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(M) // \vec{dS} \Rightarrow E \cdot S_G = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\epsilon_0}$$

$$E(M) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ce système est à symétrie sphérique, le champ $\vec{E}(M)$ est radial :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

2. Nous avons :

$$\sigma = \frac{Q_0}{4\pi(R_2)^2}$$

Alors,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(R_2)^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

3. Le point M peut se trouver en trois régions :

a. $r \leq R_1, \vec{E}_1 = \vec{0} \quad , \vec{E}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_1 \Rightarrow V_1 = C_1$

b. $R_1 \leq r \leq R_2, \vec{E}_2 = \vec{0} \quad , \vec{E}_2 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_2 \Rightarrow V_2 = C_2$

c. $r \geq R_2$, dans ce cas nous avons trouvé : $E(M) = \frac{\sigma(R_2)^2}{\epsilon_0 r^2}$

$$V_M = - \int \frac{\sigma(R_2)^2}{\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{\sigma(R_2)^2}{\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr$$

$$V_M = \frac{\sigma(R_2)^2}{\epsilon_0 r} + C_3$$

Le potentiel est nul à l'infini ce qui implique que $C_3=0$, alors :

$$V_M = \frac{\sigma(R_2)^2}{\epsilon_0 r}$$

Afin de déterminer les potentiels dans les trois régions, nous devons calculer les constantes d'intégration C_1 et C_2 :

- En appliquant les conditions de continuité du potentiel au point $r = R_2$:

$$V_M(R_2) = V_2(R_2) \Rightarrow \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0} = C_2$$

$$V_2 = \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

- Dans la région $r \leq R_1$: $V_1(R_1) = V_2(R_1) \Rightarrow$

$$C_1 = \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

$$V_1 = \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

4. Dans les régions $R_1 \leq r \leq R_2$ et $r \leq R_1$:

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Dans la région $r \geq R_2$:

$$V_M = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

5. Le potentiel propre V de ce conducteur sphérique :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R_2}$$

A.N: $V = 70 \text{ KV}$

La capacité C :

$$C = \frac{Q_0}{V} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R_2$$

A.N: $C = 40 \text{ pF}$

Exercice 4

1.

* La charge Q de S :

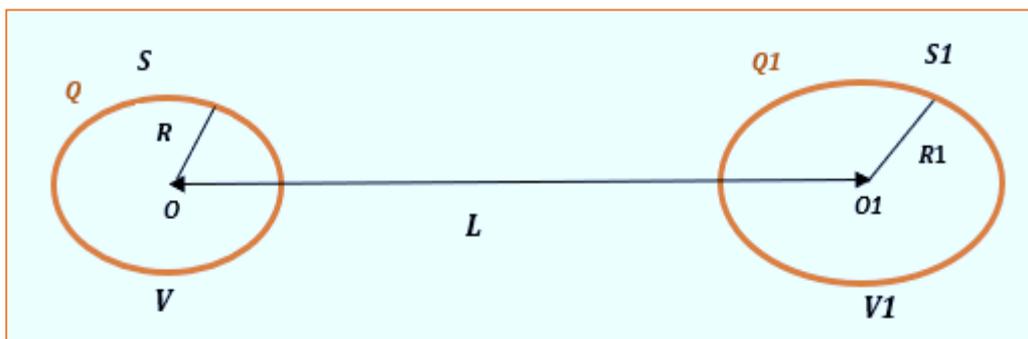
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 L} \Rightarrow$$

$$Q = R \left(4\pi\epsilon_0 V - \frac{Q_1}{L} \right)$$

* Le potentiel V_1 de S_1 :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}$$

$$V_1 = \frac{RV}{L} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{L^2} \right)$$



2. Les deux sphères sont équivalentes à deux charges placées aux centres O et $O1$. Chaque sphère exerce sur l'autre une force électrostatique :

$$\vec{F} = \frac{QQ1}{4\pi\epsilon_0 L^2} \vec{u}$$

\vec{u} représente le vecteur unitaire porté par le vecteur \vec{F} , alors :

$$\vec{F} = \frac{Q1R}{L^2} \left(V - \frac{Q1}{4\pi\epsilon_0 L} \right) \vec{u}$$

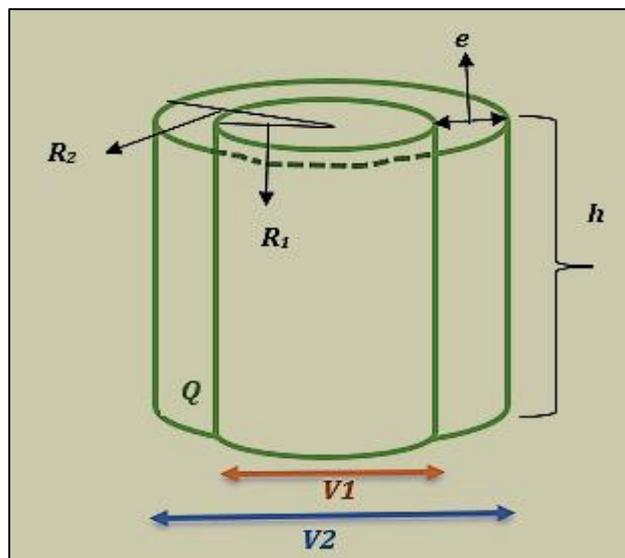
3. L'énergie électrostatique E_e à $L = L_0$:

$$E_e = \frac{1}{2} (QV + Q1V1)$$

$$E_e = \frac{1}{2} \left(4\pi\epsilon_0 R V^2 + \frac{Q1^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R1} - \frac{R}{L_0^2} \right) \right)$$

Exercice 5

Faisons d'abord le schéma :



1. La capacité d'un conducteur de charge surfacique Q :

$$C = \frac{Q}{V}$$

- Pour déterminer la capacité C , il faut calculer Q et V :

$$Q = \sigma S \Rightarrow Q = 2\pi R_1 h$$

- Afin de déduire le potentiel V entre les deux armatures, nous allons appliquer la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow [V]_{V_1}^{V_2} = - \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr$$

Le champ E en un point M situé entre les deux armatures d'un cylindre creux, peut être facilement calculé par application du théorème de Gauss :

$$E = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r}$$

« r » est la position du point M par rapport à l'axe de révolution du cylindre, alors :

$$[V]_{V_1}^{V_2} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r} \cdot dr$$

$$V_2 - V_1 = - \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \cdot dr$$

$$V_2 - V_1 = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_1 - V_2 = V = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Alors, la capacité de ce condensateur est :

$$C = \frac{2\sigma\pi R_1 h}{\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

2. L'épaisseur $e = R_2 - R_1 \Rightarrow R_2 = e + R_1$

La capacité peut s'écrire :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{e + R_1}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)}$$

Dans le cas où $e \ll R_1$, $\ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \cong \frac{e}{R_1}$, la capacité devient :

$$C = \frac{2\pi R_1 h \epsilon_0}{e}$$

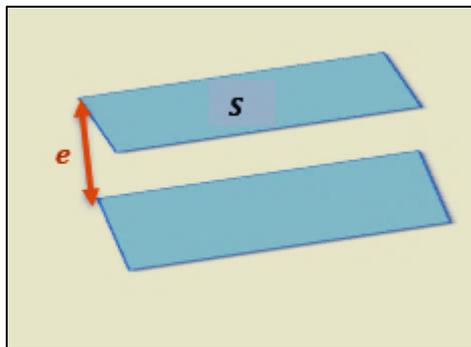
Soit S_1 la surface de l'armature interne du conducteur, alors :

$$C = \frac{S_1 \epsilon_0}{e}$$

Conclusion : Il suffit de réduire l'épaisseur d'un condensateur cylindrique pour augmenter sa capacité.

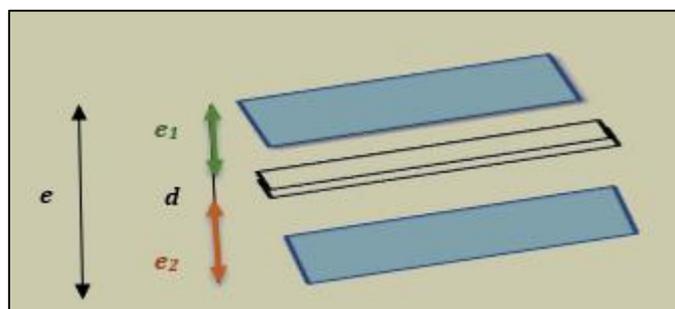
Exercice 6

1. Nous avons déjà calculé (*dans le cours*) la capacité d'un condensateur plan de surface S :



$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

2. En introduisant la lame d'épaisseur « d », on se trouve avec deux condensateurs en série de capacité C_1 , C_2 et d'épaisseur e_1 et e_2 respectivement (voir le schéma).



La capacité C_{eq} de ce système est :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

C_1 et C_2 représentent les capacités des deux condensateurs plans :

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e_1} \text{ et } C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e_2}$$

La capacité du nouveau condensateur est :

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 S}{e - d}$$

Conclusion : Il suffit d'introduire une lame entre deux armatures d'un condensateur plan pour augmenter sa capacité.

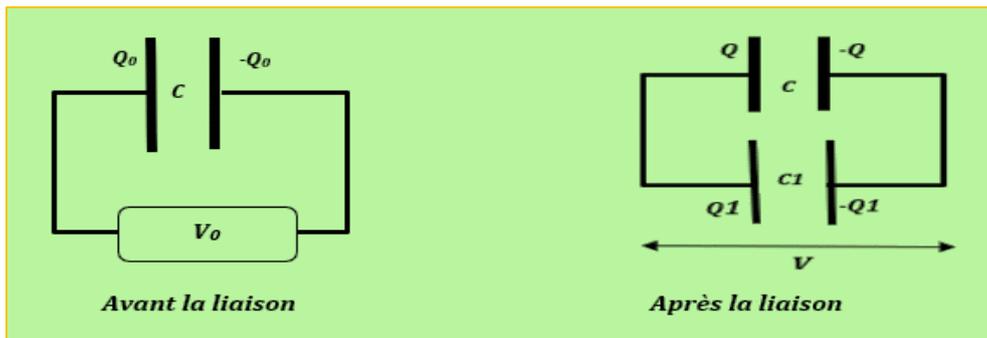
Exercice 7

1. Soit Q_0 la charge portée initialement par le condensateur C , alors :

$$Q_0 = CV_0$$

Après la liaison des deux condensateurs en parallèle :

- Les deux condensateurs auront la même tension V
- La charge initiale Q_0 se partage entre les deux condensateurs.



Soient Q et Q_1 les nouvelles charges portées par les condensateurs C et C_1 , d'après le principe de conservation de charges :

$$Q_0 = Q + Q_1 \Rightarrow CV_0 = CV + C_1V$$

$$V = \frac{C}{C + C_1} V_0$$

2. Les nouvelles charges portées par chaque condensateur seront :

$$Q = CV = \frac{C^2}{C + C_1} V_0$$

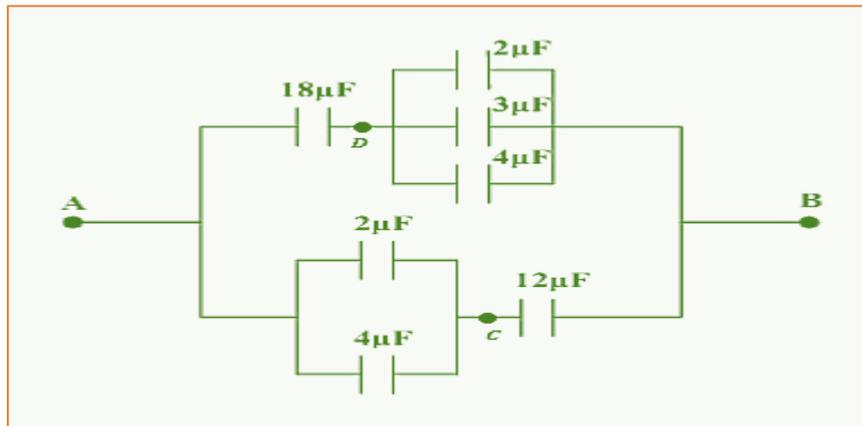
$$Q_1 = C_1V = \frac{CC_1}{C + C_1} V_0$$

Exercice 8

Commençons par le calcul des capacités équivalentes des condensateurs AC et DB :

$$C_{AC} = 2 + 4 \Rightarrow C_{AC} = 6\mu F$$

$$C_{DB} = 2 + 4 + 3 \Rightarrow C_{DB} = 9\mu F$$



Les condensateurs AD et DB sont en série, leur capacité équivalente $C1$ est :

$$\frac{1}{C1} = \frac{1}{C_{AD}} + \frac{1}{C_{DB}} \Rightarrow C1 = \frac{C_{AD}C_{DB}}{C_{AD} + C_{DB}}$$

A.N : $C1 = 6\mu F$

Les condensateurs AC et CB sont en série, leur capacité équivalente $C2$ est :

$$\frac{1}{C2} = \frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C_{CB}} \Rightarrow C2 = \frac{C_{AC}C_{CB}}{C_{AC} + C_{CB}}$$

A.N : $C2 = 4\mu F$

Enfin les capacités $C1$ et $C2$ sont en parallèle, la capacité équivalente de ce circuit est :

$$C_{eq} = C1 + C2$$

$$C_{eq} = 10 \mu F$$

Exercice 9

1. L'énergie emmagasinée E par ce condensateur est :

$$E = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2E}{C}}$$

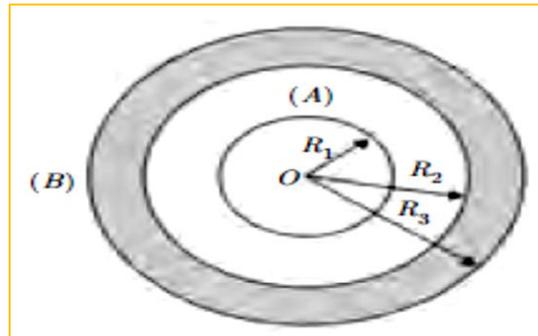
A.N : $V = 10^3 \text{ Volt}$

2. La charge Q qui traverse la lampe :

$$Q = CV$$

A.N : $Q = 0.1 \text{ coulomb}$

Exercice 10



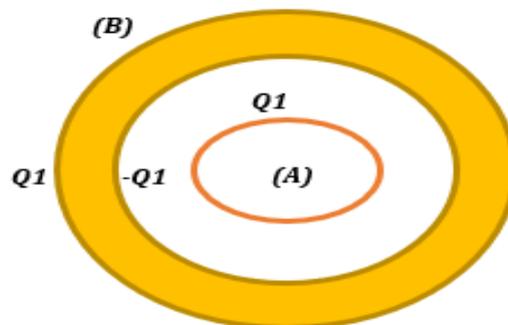
1) Capacité de la sphère A :

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1$$

$$Q_1 = C_1 V_0 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_0$$

A.N : $Q_1 = 0,3 \mu C$

2) a) Par influence totale entre (A) et (B) , la surface interne de (B) porte la charge $(-Q_1)$ et la surface externe porte la charge $(+Q_1)$ comme il est indiqué sur le schéma ci-dessous :



b)

$$V_A = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{KQ_1}{R_2} + \frac{KQ_1}{R_3}$$

$$V_B = \frac{KQ_1}{R_3}$$

A.N : $V_A = 40.5 \text{ KV}$ et $V_B = 18 \text{ KV}$

3) La sphère (B) étant reliée à la terre, elle perd sa charge extérieure $(+Q_1)$ et le potentiel de la sphère A devient :

$$V'_A = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{KQ_1}{R_2}$$

A.N : $V'_A = 22.5 \text{ KV}$

Chapitre 3
Electrocinétique

Chapitre 3 Electrocinétique

3 Electrocinétique

Introduction

L'électrocinétique est l'ensemble des phénomènes et des lois relatifs aux charges électriques en mouvement. C'est un domaine de la physique qui étudie le transport de l'électricité dans les circuits électriques.

3.1 Définitions générales

3.1.1 Courant électrique

La quantité de charge qui traverse une section d'un conducteur par unité de temps est appelée courant électrique.

L'intensité du courant électrique est exprimée en ampère :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Dans le cas où le courant est constant dans le temps, il est appelé **courant continu** et représenté par **I** :

$$I = \frac{Q}{t}$$



Un courant électrique apparaît dans un conducteur quand une différence de potentiel est établie entre les bornes de ce dernier.

3.1.2 Dipôle

Un dipôle est un élément électrique qui possède une borne d'entrée et une borne de sortie, il est qualifié d'actif lorsqu'il fournit de l'énergie et de passif lorsqu'il en consomme.

Exemples

Les résistances, les condensateurs et les bobines sont des éléments passifs tandis que les sources de tensions et les sources de courants sont des éléments actifs.

3.1.3 Circuit électrique

Un circuit électrique est un ensemble simple ou complexe de conducteurs et de composants électriques ou électroniques parcouru par un courant électrique.

- **Un nœud** est un point d'interconnexion relié à au moins trois dipôles
- **Une branche** est une partie du circuit électrique comprise entre deux nœuds consécutifs
- **Une maille** est un ensemble de branches formant une boucle fermée en ne passant pas deux fois par le même nœud.

3.1.4 Générateur électrique

Un générateur électrique est un dipôle actif qui peut faire circuler un courant électrique dans un circuit. Pour qu'un circuit électrique soit complet il doit nécessairement comporter au moins un générateur.

Dans un circuit, un générateur est représenté par les deux symboles suivants :



3.1.5 Récepteur électrique

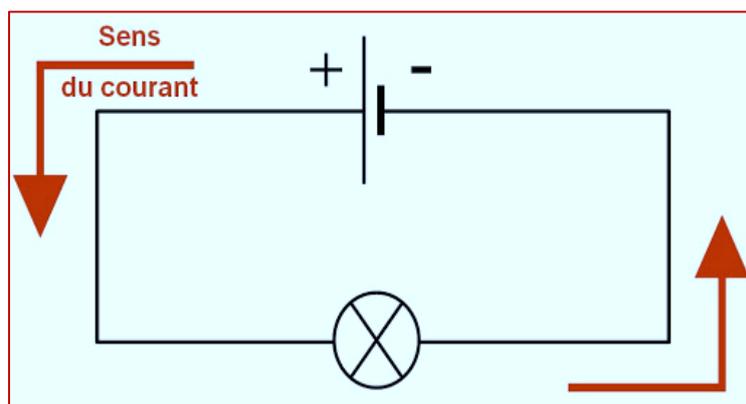
Un récepteur est un dipôle qui reçoit de l'énergie électrique et la convertit en une autre forme d'énergie.

Exemples

- Les fils électriques de tout genre, les lampes à incandescence et les fils chauffants des appareils ménagers transforment de l'énergie électrique en énergie thermique.
- Les moteurs électriques transforment de l'énergie électrique en énergie mécanique et en énergie thermique.

3.1.6 Sens du courant continu

Par convention, dans un circuit électrique en boucle simple et en courant continu, le courant électrique sort du générateur électrique par la borne positive, traverse le circuit électrique et revient au générateur par sa borne négative.



La circulation des charges électriques se fait dans le sens opposé.

3.1.7 Résistance électrique

La résistance électrique traduit la propriété d'un composant à s'opposer au passage d'un courant électrique. Elle est souvent désignée par la lettre **R** et son unité de mesure est en ohm (Ω).

Une résistance peut être représentée par les deux symboles suivants :

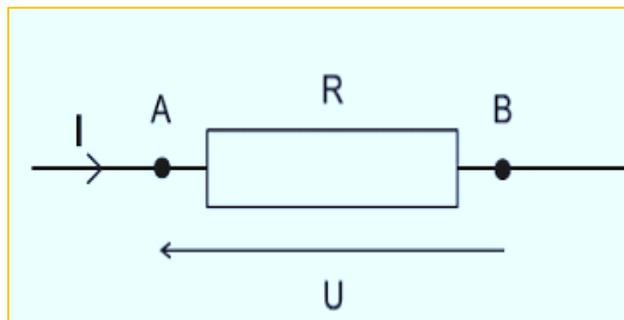


Les conducteurs ont des résistances relativement faibles alors que les isolants ont des résistances extrêmement élevées.

3.2 Loi d'Ohm

Soit **U** la tension aux bornes d'une résistance **R** à température constante, l'expérience montre que **U** est proportionnelle à l'intensité **I** du courant parcourant cette résistance tel que :

$$U = RI$$



3.3 Lois de Kirchhoff

3.3.1 Première loi de Kirchhoff (loi des nœuds)

La **loi des nœuds** est utilisée afin d'établir une relation mathématique concernant les courants électriques parcourant un nœud. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de la charge électrique.

Enoncé de la loi

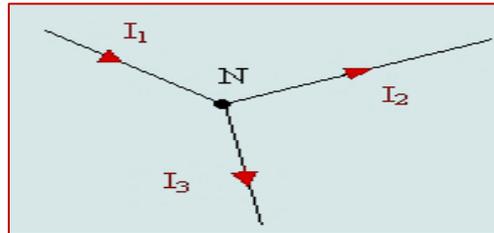
la somme des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en sortent : $\sum I_{\text{entrant}} = \sum I_{\text{sortant}}$.

Cette loi peut être traduite mathématiquement par l'expression :

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

où I_i désigne la valeur algébrique du i ème courant qui traverse un nœud. La valeur de I_i est affectée du signe **(+)** si le courant arrive au nœud considéré et du signe **(-)** s'il s'en éloigne.

Exemple



La première loi de Kirchhoff appliquée au nœud N donne :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

3.3.2 Deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles)

La **loi des mailles** est utilisée afin d'établir une relation mathématique concernant les tensions au sein d'une maille d'un circuit électrique.

Enoncé de la loi

Dans une maille d'un circuit électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle.

Cette loi constitue une généralisation de la loi d'Ohm :

$$\sum (E - RI) = 0$$

don't forget

Comment appliquer la loi des mailles ?

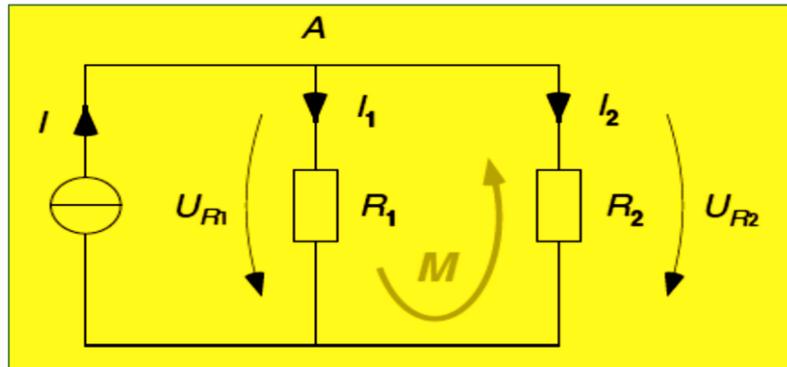
1. On choisit, sur chaque branche, *un sens arbitraire du courant*
2. On choisit *un sens arbitraire de parcours de la maille*
3. Chaque terme RI est affecté d'un signe (+) si le sens du parcours de la maille choisi coïncide avec le sens du courant. Si non on l'affecte du signe (-)
4. La force électromotrice E est affectée du signe du pôle du générateur par lequel entre le sens du parcours choisi.

Application

On définit la tension U_{R_1} aux bornes de la résistance R_1 et la tension U_{R_2} aux bornes de la résistance R_2 . On définit également le courant I_1 traversant la résistance R_1 et le courant I_2 traversant la résistance R_2 .

1. Calculer les intensités I_1 et I_2
2. Calculer les tensions U_{R_1} et U_{R_2} .

Données : $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$ et $I = 2A$

**Solution**

1. Il nous faut donc deux équations linéairement indépendantes pour déterminer les deux inconnues I_1 et I_2 .

L'application de la loi des mailles (**maille M**) donne :

$$\sum U = 0 \Rightarrow R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

L'application de la loi des nœuds (nœud A) donne :

$$\sum I = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

En combinant les deux équations, on obtient :

$$R_1 (I - I_2) - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2}$$

et

$$I_1 = I - I_2$$

A.N : $I_2 = 0,67 A$ et $I_1 = 1,33 A$

2. Calcul des tensions :

$$U_{R_1} = R_1 I_1 \quad \text{et} \quad U_{R_2} = R_2 I_2$$

A.N : $U_{R_1} = 6,7 V$ et $U_{R_2} = 6,7 V$

3.4 Association des résistances

La **résistance équivalente** est un outil de modélisation utilisé dans le domaine de l'électricité. Cela consiste à remplacer dans une partie du circuit un ensemble de résistances par une seule qui doit être équivalente pour le reste du circuit.

3.4.1 Résistances en série

Soient R_1 , R_2 et R_3 trois résistances associées en série comme le montre la figure 1.

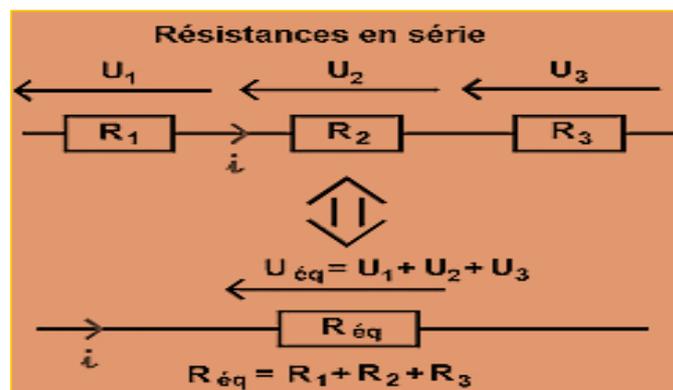


Figure 1

D'après la loi d'Ohm, nous avons :

$$U_1 = R_1 i$$

$$U_2 = R_2 i$$

$$U_3 = R_3 i$$

- La tension totale aux bornes de l'ensemble de ces trois résistances est :

$$U_{\text{eq}} = U_1 + U_2 + U_3$$

$$U_{\text{eq}} = R_1 i + R_2 i + R_3 i$$

$$U_{\text{eq}} = (R_1 + R_2 + R_3) i$$

$$U_{\text{eq}} = R_{\text{eq}} i \Rightarrow$$

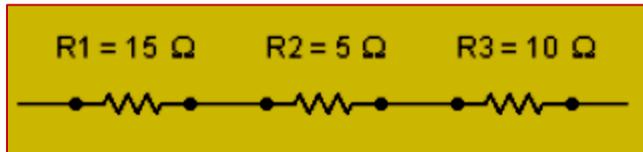
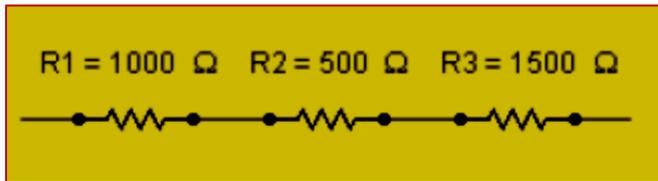
$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3$$

En général, la résistance équivalente de n résistances en série dans un circuit est égale à :

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Application

Calculer la résistance équivalente des circuits (A) et (B) suivants :



Solution

Dans le circuit (A) : $R_{eq} = 3000\Omega$

Dans le circuit (B) : $R_{eq} = 30\Omega$

3.4.2 Résistances en parallèle

Soient R_1 , R_2 et R_3 trois résistances associées en parallèle comme le montre la figure 2.

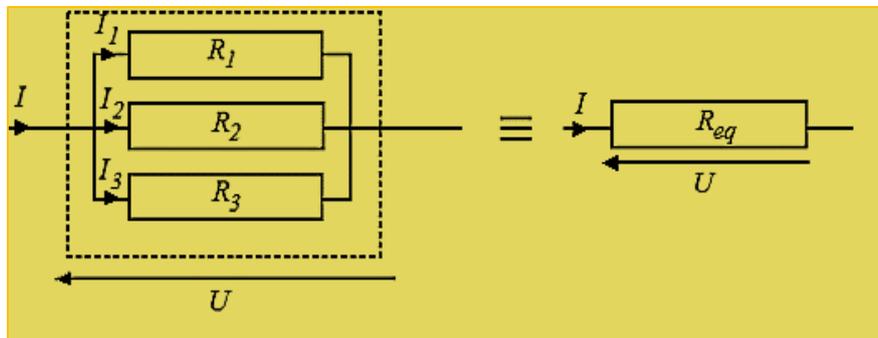


Figure 2

D'après la loi d'Ohm, nous avons :

$$U = R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$U = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$U = R_3 I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{U}{R_3}$$

D'après la loi des nœuds, nous avons :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U$$

La loi d'Ohm appliquée au circuit équivalent s'écrit :

$$I = \frac{U}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U$$

On en déduit que la résistance équivalente s'exprime en fonction des trois résistances par la relation :

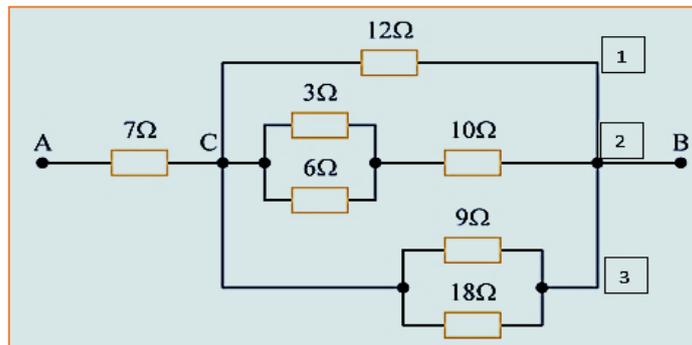
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

En général, la résistance équivalente résultant de l'association de n résistances en parallèle est égale à :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Application

Soit le groupement des résistances suivant :



1. Calculez la résistance équivalente de chacune des branches reliant C et B
2. En déduire la résistance totale du circuit entre A et B.

Solution

1. Les trois branches reliant C et B ont respectivement pour résistance :

La branche 1 : $R_1 = 12 \Omega$

La branche 2 :

Les résistances 3Ω et 6Ω sont en parallèle, leur résistance équivalente est :

$$R_{eq} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} \Rightarrow R_{eq} = 2 \Omega$$

Alors, la résistance totale de cette branche est : $R_2 = (10 + 2)\Omega = 12\Omega$

La branche 3 :

Les résistances 18Ω et 9Ω sont en parallèle, leur résistance équivalente est :

$$R_{eq} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} \Rightarrow R_3 = 6 \Omega$$

La résistance totale entre C et B est formée par l'association en parallèle des résistances calculées R_1 , R_2 et R_3 alors :

$$R_{CB} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}} \Rightarrow R_{CB} = 3 \Omega$$

2. La résistance équivalente du circuit AB est formée par l'association en série des deux résistances R_{AC} et R_{CB} alors :

$$R_{AB} = 3 \Omega + 7 \Omega$$

$$R_{AB} = 10 \Omega$$

3.5 Effet Joule

Tout dipôle parcouru par un courant électrique engendre un transfert thermique vers son environnement. Ce phénomène physique est appelé effet Joule.

3.5.1 Energie dissipée par effet Joule

Soit dq la quantité de charge qui passe d'un point **A** (au potentiel VA) à un point **B** (au potentiel VB) d'un conducteur, le travail des forces électriques est déterminé par l'équation :

$$dW = (VA - VB) dq$$

La quantité de charge dq est reliée au courant par la relation : $dq = I dt$, alors :

$$dW = (VA - VB) I dt$$

Si R est la résistance de ce conducteur, on a donc :

$$V = VA - VB = RI$$

Le travail des forces électriques peut s'écrire :

$$dW = V I dt = RI^2 dt$$

dW représente une énergie dissipée par ce conducteur sous forme de chaleur.

3.5.2 Puissance dissipée par effet Joule

La puissance est définie par :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Dans notre cas :

$$P = RI^2$$

Cette puissance peut s'écrire aussi sous les formes :

$$P = VI \quad \text{ou} \quad P = \frac{V^2}{R}$$

Exercices corrigés

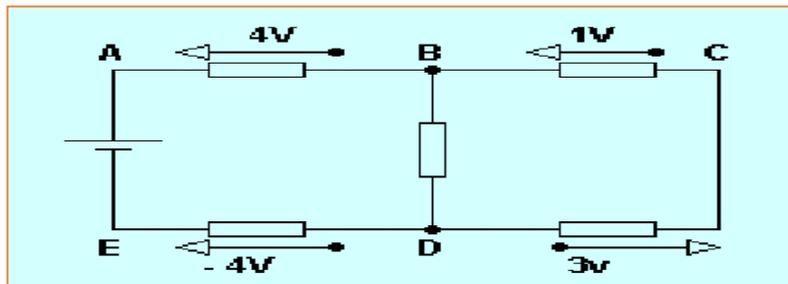
Exercice 1

On branche entre les points A et B deux résistances R_1 et R_2 en parallèle.

1. Déterminer la résistance équivalente de ce circuit
2. Discuter le cas où $R_2 = 0$ et donner le schéma équivalent
3. Discuter le cas où $R_2 = \infty$ et donner le schéma équivalent.

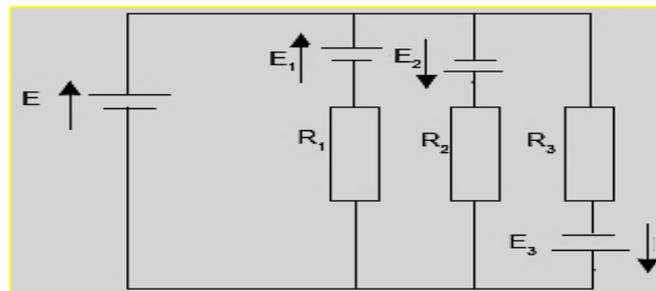
Exercice 2

1. Quel est le nombre de nœuds, de branches et de mailles dans le circuit ci-dessous
2. Calculer les valeurs des tensions U_{BD} et U_{AE} dans ce circuit.



Exercice 3

Dans le circuit suivant, nous avons : $E = 10\text{ V}$; $E_1 = 5\text{ V}$; $E_2 = 3\text{ V}$; $E_3 = 6\text{ V}$; $R_1 = 1\text{ k}$; $R_2 = 2,2\text{ k}$ et $R_3 = 3,3\text{ k}$



Calculer le courant I débité par la source de tension E.

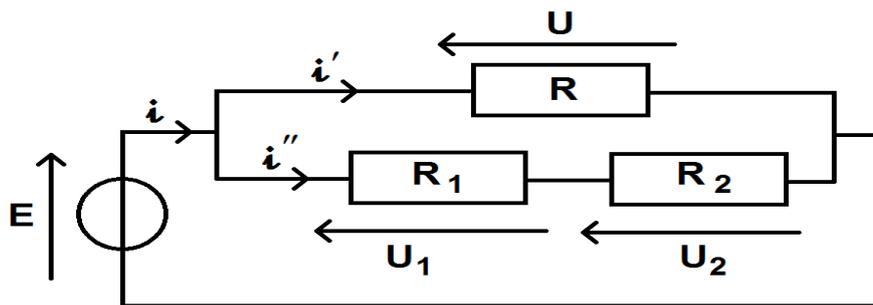
Exercice 4

1. Deux résistances $R_1 = (1,25 \pm 0,01) \Omega$ et $R_2 = (4,52 \pm 0,02) \Omega$ sont montées en série.
 - Calculer la résistance équivalente R_S et l'incertitude absolue ΔR_S
2. Même question si les deux résistances sont montées en parallèle.

Exercice 5

Dans le circuit électrique suivant, nous avons :

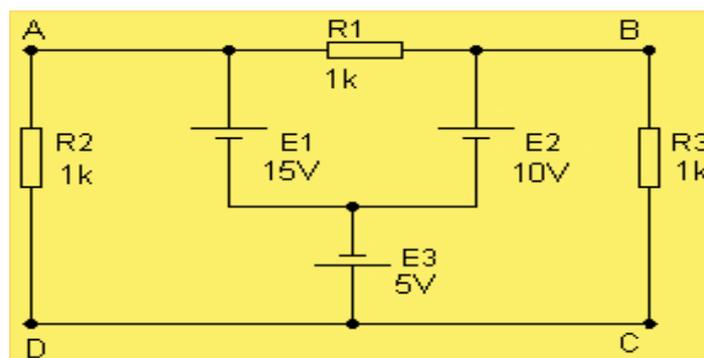
$E = 5V$, $i = 150 \text{ mA}$, $R = 100 \Omega$ et $R_1 = 20 \Omega$



1. Calculer U
2. Calculer i' et i''
3. Calculer U_1 puis U_2
4. Calculer R_2 .

Exercice 6

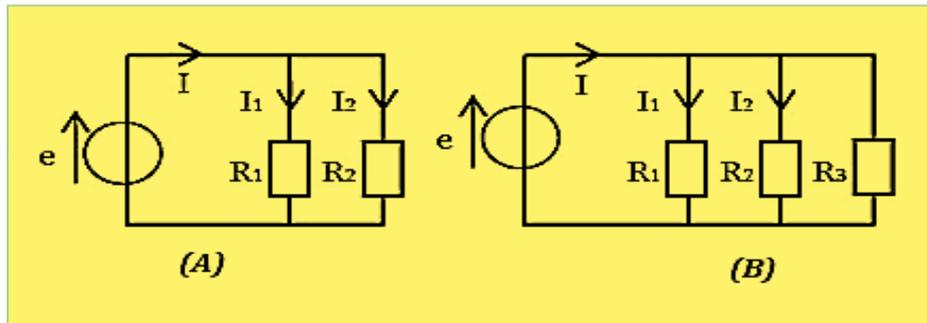
Soit le circuit suivant :



Calculer les courants I_1 , I_2 et I_3 qui circulent respectivement dans les résistances R_1 , R_2 et R_3 .

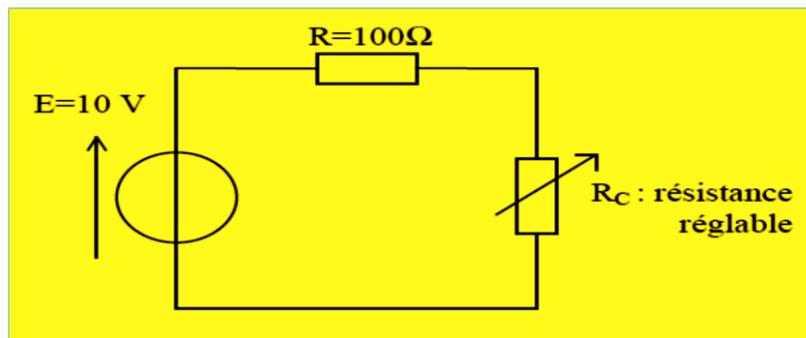
Exercice 7

Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I et des résistances dans les circuits (A) et (B) :



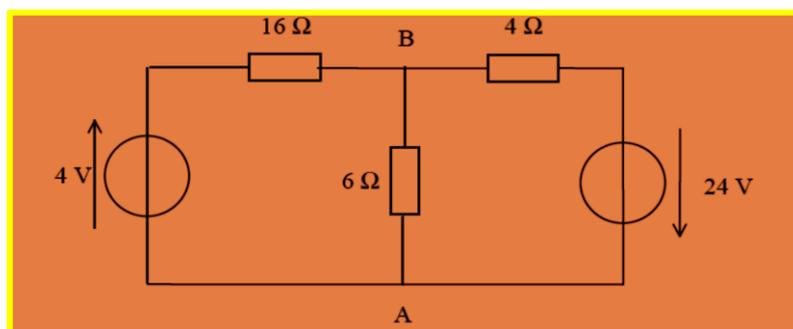
Exercice 8

1. Déterminer la puissance P consommée par R_C en fonction de E , R_C et R .
 2. Pour quelle valeur de R_C la puissance consommée est-elle maximale ?
- Que vaut alors P_{max} ?



Exercice 9

Calculer l'intensité de courant dans la branche AB du circuit ci-dessous en appliquant les lois de Kirchhoff.



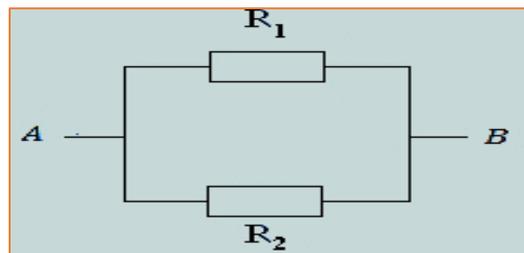
Exercice 10

Une personne passe un aspirateur d'une puissance de 1300 W pendant 8 minutes.

1. Calculer, en joules, l'énergie transférée à cet appareil pendant la durée du nettoyage.
2. Exprimer ensuite ce résultat en kWh.

Solution des exercices**Exercice 1**

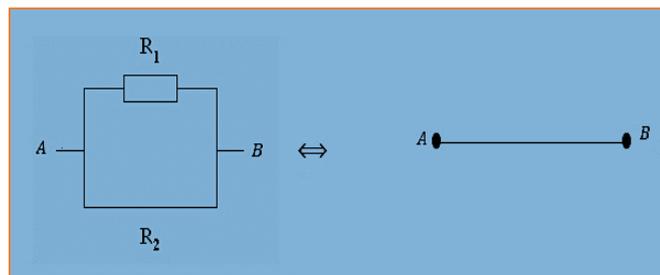
1. La résistance équivalente : $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



2. Si $R_2 = 0$ alors $R_{eq} = 0$; une résistance nulle est équivalente à un fil. **On conclut** que R_1 est **court-circuitée**.

Définition:

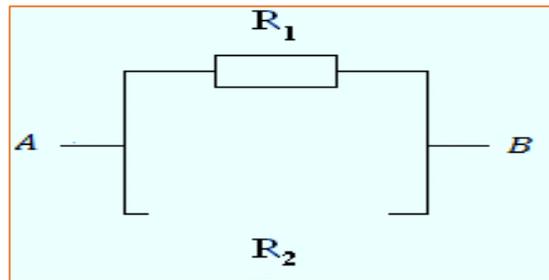
Un court-circuit est la mise en connexion de deux points d'un circuit électrique entre lesquels il y a une différence de potentiel, par un conducteur de faible résistance.



- L'image ci-dessous représente un court-circuit en très basse tension (12V/20A)



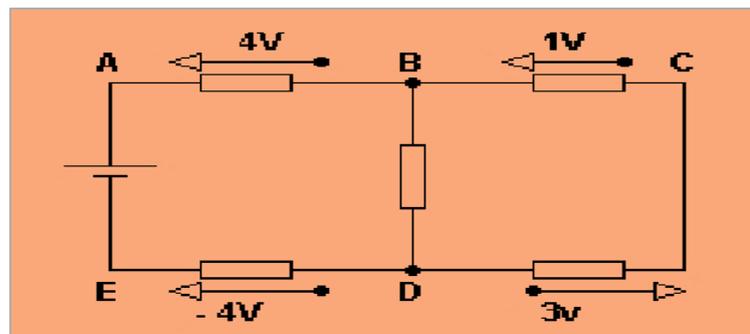
3. Si $R_2 = \infty$ alors $R_{eq} = R_1$; comme si R_2 n'existe pas entre les points A et B.
On conclut qu'une résistance infinie est un circuit ouvert.



Exercice 2

1. Ce circuit comporte :

- ❖ Deux nœuds : B et D
- ❖ Trois branches : BAED, BCD et BD
- ❖ Trois mailles : ABDEA, BCDB et ACEA



2. Calcul des tensions :

- $U_{BD} = U_B - U_D = (U_B - U_C) + (U_C - U_D)$

$$U_{BD} = 1V + 3V$$

$$U_{BD} = 4V$$

- $U_{AE} = U_A - U_E = (U_A - U_B) + (U_B - U_D) + (U_D - U_E)$

$$U_{AE} = 4V + 4V + 4V$$

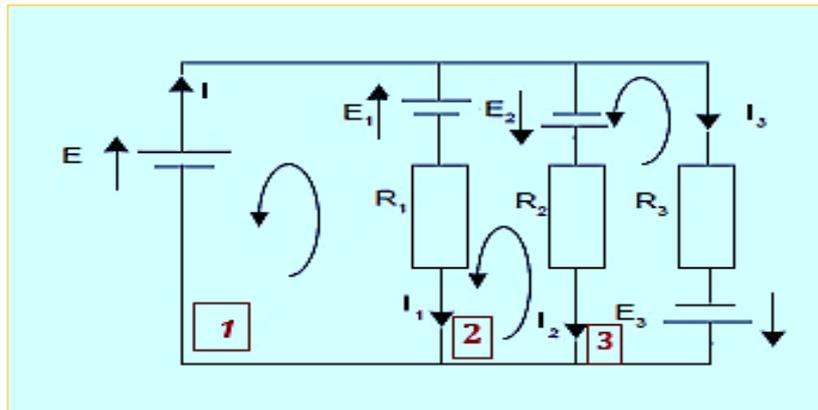
$$U_{AE} = 12V$$



Refaire le même exercice en appliquant la loi des mailles

Exercice 3

Soient I_1 , I_2 et I_3 les courants circulants dans les trois branches du circuit :



D'après la loi des noeuds:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Appliquons la loi des mailles en choisissant un sens arbitraire de parcours:

● Pour la maille 1:

$$E - R_1 I_1 - E_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E - E_1}{R_1}$$

A.N : $I_1 = 5 \text{ mA}$

● Pour la maille 2:

$$E_2 + E_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 + E_1 + R_1 I_1}{R_2}$$

A.N : $I_2 = 5,91 \text{ mA}$

● Pour la maille 3:

$$-E_2 + R_2 I_2 + E_3 - R_3 I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{E_3 - E_2 + R_2 I_2}{R_3}$$

A.N : $I_3 = 4,85 \text{ mA}$

Alors l'intensité I est : $I = I_1 + I_2 + I_3$

A.N : $I = 15,76 \text{ mA}$

Exercice 4

1. $RS = R1 + R2 = (1,25 + 4,52) \Omega = 5,77 \Omega$

$$\Delta RS = \Delta R1 + \Delta R2 = (0,01 + 0,02) \Omega = 0,03 \Omega$$

$$RS = (5,77 \pm 0,03) \Omega$$

2. Soit RP la résistance équivalente des deux résistances $R1$ et $R2$ montées en parallèle :

$$\frac{1}{RP} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \Rightarrow RP = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$$

$$RP = 0,98 \Omega$$

Calcul d'incertitude :

$$RP = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$$

$$\ln(RP) = \ln\left(\frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}\right) \Rightarrow \ln(RP) = \ln R1 + \ln R2 - \ln(R1 + R2)$$

$$\frac{dRP}{RP} = \frac{dR1}{R1} + \frac{dR2}{R2} - \frac{dR1}{R1 + R2} - \frac{dR2}{R1 + R2}$$

$$\frac{dRP}{RP} = \frac{dR1}{R1} \left(\frac{R2}{R1 + R2}\right) + \frac{dR2}{R2} \left(\frac{R1}{R1 + R2}\right)$$

Alors :

$$\Delta RP = \frac{RP}{R1 + R2} \left[\Delta R1 \left(\frac{R2}{R1}\right) + \Delta R2 \left(\frac{R1}{R2}\right) \right]$$

$$RP = (0,98 \pm 0,01)\Omega$$

Exercice 5

1. En appliquant la loi des mailles :

$$U - E = 0$$

$$U = E = 5V$$

2. En appliquant la loi d'Ohm :

$$U = Ri' \Rightarrow i' = \frac{U}{R}$$

$$A.N : i' = 50 mA$$

La loi des nœuds nous donne :

$$i = i' + i'' \Rightarrow i'' = i - i'$$

$$A.N : i'' = 100 mA$$

3. Nous avons :

$$U_1 = R_1 i'' \quad \text{et} \quad U_2 = U - U_1$$

$$A.N : U_1 = 2V \quad \text{et} \quad U_2 = 3V$$

4.

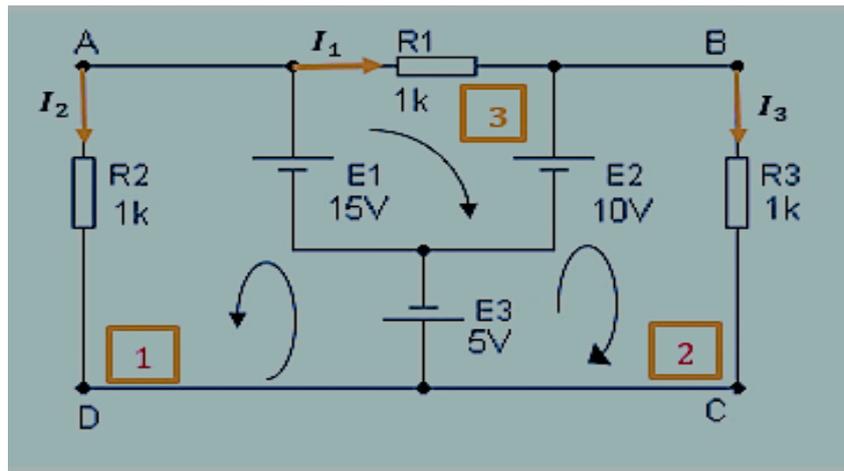
$$U_2 = R_2 i'' \Rightarrow$$

$$R_2 = \frac{U_2}{i''}$$

A.N: $R_2 = 30 \Omega$

Exercice 6

Appliquons la loi des mailles :



Pour la maille 1 :

$$R_2 I_2 - E_1 + E_3 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{E_1 - E_3}{R_2}$$

A.N: $I_2 = 10 \text{ mA}$

Pour la maille 2:

$$R_3 I_3 - E_2 + E_3 = 0$$

$$I_3 = \frac{E_2 - E_3}{R_3}$$

A.N: $I_3 = 5 \text{ mA}$

Pour la maille 3:

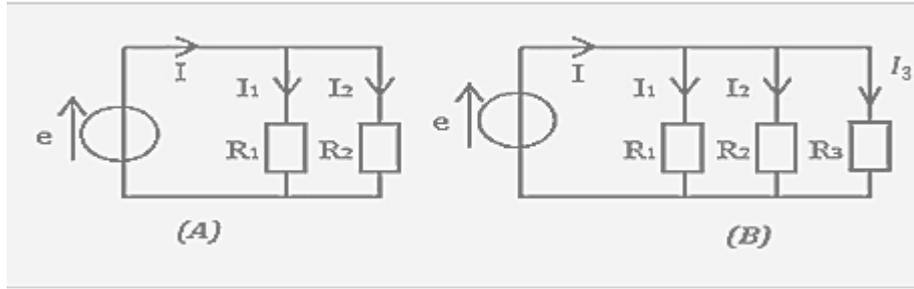
$$R_1 I_1 - E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1}$$

A.N: $I_1 = 5 \text{ mA}$

Exercice 7

Calcul des intensités de courant :



➤ **Le circuit (A)**

La résistance équivalente du circuit (A) est :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Nous avons : $e = R_{eq}I = R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow$

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} I \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} I$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{cases}$$

➤ **Le circuit (B)**

La résistance équivalente du circuit (B) est :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$$

Nous avons : $e = R_{eq}I = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 \Rightarrow$

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} I, I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} I \quad \text{et} \quad I_3 = \frac{R_{eq}}{R_3} I$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} I \\ I_2 = \frac{R_1 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} I \\ I_3 = \frac{R_1 R_2}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} I \end{cases}$$

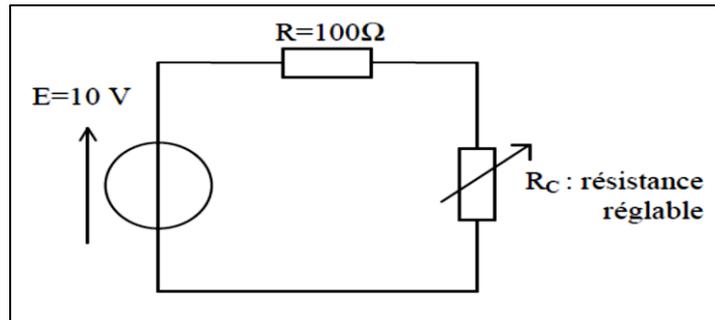
Exercice 8

1. La puissance P consommée par R_c est définie par :

$$P = UI = R_c I^2$$

I est le courant circulant dans le circuit

U est la tension appliquée aux bornes de R_c



Appliquons la loi des mailles à ce circuit :

$$E = (R + R_c)I \Rightarrow I = \frac{E}{R + R_c}$$

Alors la puissance P consommée par R_c est :

$$P = \frac{R_c}{(R + R_c)^2} E^2$$

2. La puissance P est maximale quand sa dérivée par rapport à R_c est nulle :

$$P'(R_c) = \frac{(R + R_c)^2 - 2R_c(R + R_c)}{(R + R_c)^4} E^2$$

$$P'(R_c) = 0 \Rightarrow R_c = R = 100\Omega$$

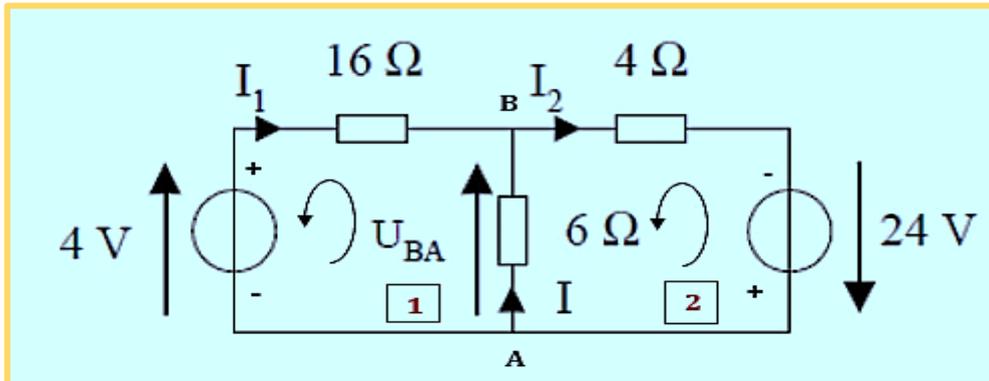
Pour cette valeur de R_c :

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R}$$

$$A.N : P_{max} = 0,25 W$$

Exercice 9

Commençons par désigner les courants (I_1 , I_2 et I) de chaque branche du circuit ci-dessous :



Petit rappel

Nous allons suivre les mêmes étapes données dans le cours :

1. Choisisant un sens arbitraire de parcours dans les mailles (1) et (2)
2. Désignons les signes des deux générateurs
3. Appliquons la loi des nœuds au point **B** : $I + I_1 = I_2 \Rightarrow I = I_2 - I_1$ **(A)**
4. Appliquons la loi des mailles :

La maille (1) : $4 - 16I_1 + 6I = 0 \Rightarrow$

$$I_1 = \frac{4 + 6I}{16} \quad \textbf{(B)}$$

La maille (2) : $-6I - 4I_2 + 24 = 0 \Rightarrow$

$$I_2 = \frac{24 - 6I}{4} \quad \textbf{(C)}$$

Nous avons donc un système de 3 équations **(A)**, **(B)** et **(C)** à 3 inconnues
En remplaçons les équations (B) et (C) dans l'équation (A), on obtient :

$$I = \frac{24 - 6I}{4} - \frac{4 + 6I}{16} \Rightarrow I = 2A$$

Exercice 10

1. L'énergie transférée est :

$$E = P \cdot t$$

AN : $E = 624 \cdot 10^3 J$

2. $P = 1.3 KW$ et $t = 8/60 h$, donc :

$$E = P \cdot t = 1.3 \times 8/60$$

$$E = 0,17 KWh$$

Chapitre 4
Electromagnétisme

Chapitre 4 Electromagnétisme

4 Electromagnétisme

L'électromagnétisme est une partie de la physique qui étudie les interactions entre les courants électriques et les champs magnétiques.

Introduction

Dans la nature, il existe des corps appelés aimants permanents qui exercent des forces entre eux et aussi sur le Fer, le Nickel, le Cobalt et sur différents alliages.

L'aimant est une source qui modifie des propriétés de l'espace où cette modification est attribuée à la présence d'un champ appelé champ magnétique (figure 1).

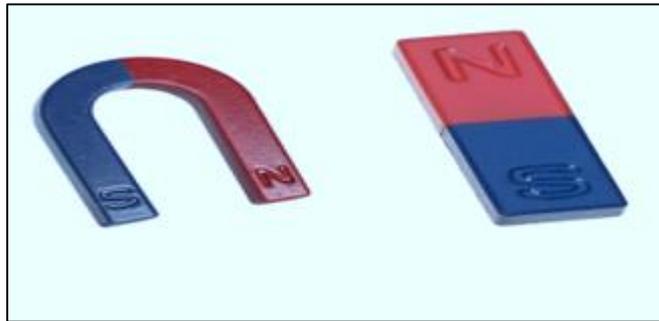


Figure 1. Aimants artificiels

4.1 Champ magnétique créé par un aimant

Un champ magnétique \vec{B} est un champ de force résultant du déplacement des charges (un courant électrique). Il désigne une région de l'espace soumise à l'action d'une force provenant d'un aimant ou d'un courant électrique.

L'unité de l'intensité d'un champ magnétique dans le système international des unités (S.I) est le **Tesla** (T) comme elle peut être calculée en **Gauss** (G) où :

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

4.1.1 Champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est engendré par les mouvements du noyau métallique liquide des couches profondes de la Terre. Ce sont ces mouvements qui font bouger la boussole pour indiquer le nord magnétique.



Le nord magnétique est différent du pôle nord géographique.

Le champ magnétique terrestre joue un rôle essentiel dans le développement de la vie sur Terre, en déviant les particules mortelles du vent solaire formant ainsi les aurores boréales et australes (voir figure 2).



Figure 2. Les aurores boréales dus à des interactions entre des particules chargées issues du Soleil et le champ magnétique terrestre



Dans toute la suite de ce cours, on considère le champ magnétique créé par une distribution de courant indépendante du temps.

4.1.2 Les pôles d'un aimant

Par expérience, en abandonnant une petite aiguille aimantée placée au point M elle s'oriente dans une direction privilégiée. Si on la perturbe un peu, après avoir oscillé quelques instants elle revient à sa position initiale.

On conclut que : Un aimant libre de s'orienter, s'arrête toujours dans la position Nord-Sud terrestre.

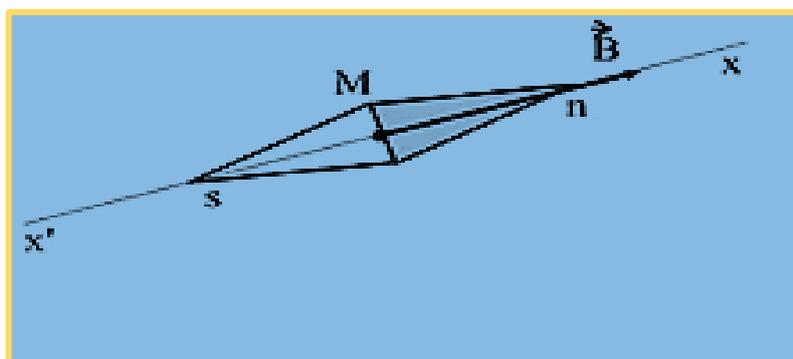


Figure 3. Aiguille aimantée

L'extrémité de l'aiguille qui pointe vers le Nord géographique est appelée **pôle nord** et l'autre extrémité est **le pôle sud**.

Au point M , le vecteur champ magnétique \vec{B} a les caractéristiques suivantes (figure 3) :

- Une direction $x \times x$ de l'axe de l'aiguille aimantée
- Un sens de $s \rightarrow n$ de l'aiguille aimantée
- Une valeur (module ou norme du vecteur) mesurée par un teslamètre.

4.1.3 Lignes d'un champ magnétique

Expérience

Au-dessus d'un aimant droit plaçons une feuille de papier et saupoudrons-y de la limaille de fer (*une poudre formée par usure d'un métal*).

On observe que la limaille de fer s'est répartie selon des lignes courbes autour de l'aimant (figure 4). Ces lignes sont appelées lignes de champ ou **spectre magnétique**.

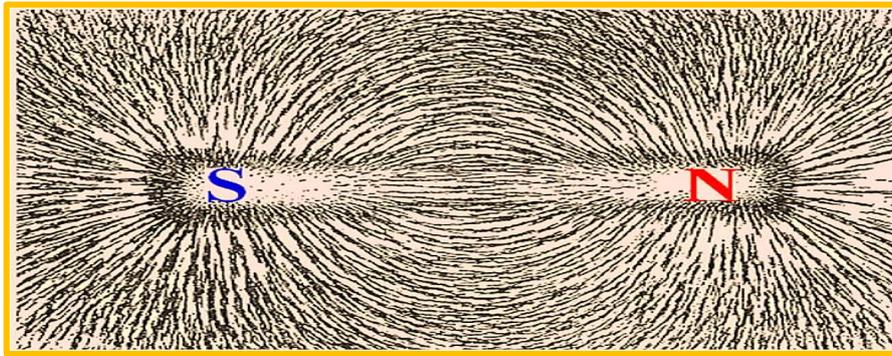


Figure 4. Formes des grains de fer sur un aimant

Interprétation

En plaçant des boussoles dans différents points du spectre magnétique (figure 5) on conclut que :

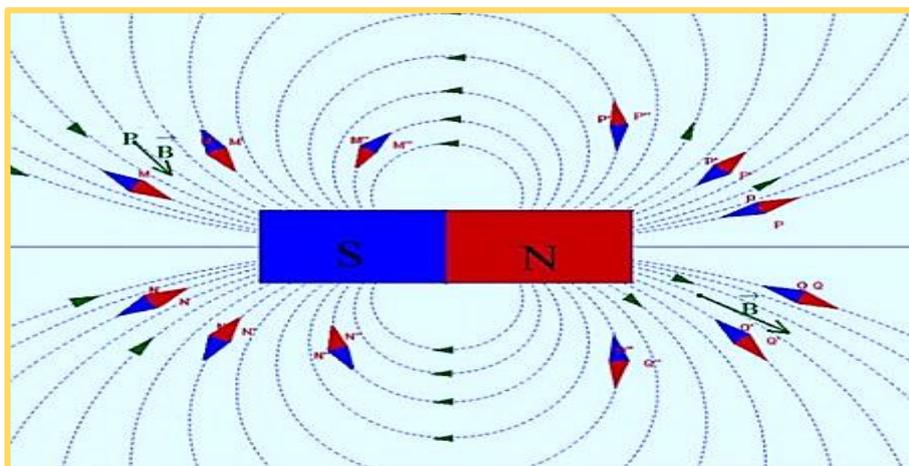
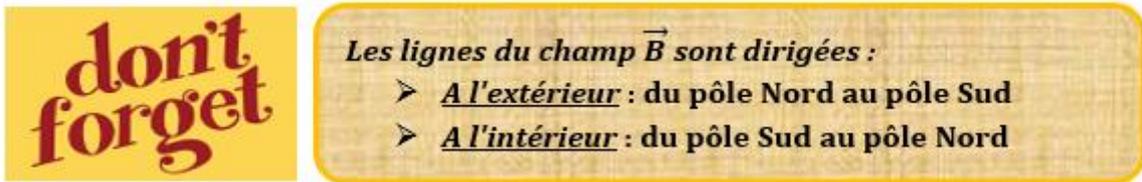


Figure 5. Lignes du champ magnétique d'un aimant droit

- Le vecteur \vec{B} est tangentiel en chaque point des lignes de champ formées
- Les lignes du champ partent perpendiculairement de la surface du pôle nord d'un aimant, s'incurvent vers le pôle sud pour arriver perpendiculairement sur la surface du pôle magnétique sud
- Le champ \vec{B} a la direction et le sens de l'axe Sud-Nord de la petite aiguille aimantée



4.1.4 Interaction entre les pôles d'un aimant

En approchant successivement les pôles *N* et *S* des deux aimants (voir figure 6) on constate que :

- Deux pôles de même nom se repoussent
- Deux pôles de noms différents s'attirent

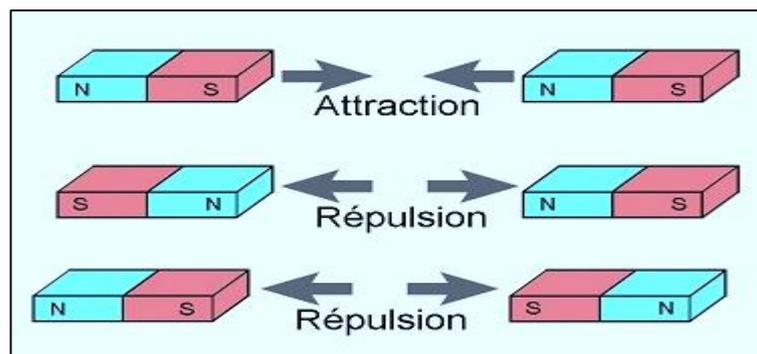


Figure 6. Interaction entre les pôles d'un aimant

4.2 Champ magnétique créé par un courant

4.2.1 Champ magnétique créé au voisinage d'un fil rectiligne

Expérience

Plaçons un peu de limaille de fer sur une plaque en plexiglas posée perpendiculairement à un fil électrique rectiligne (figure 7).

Observation

- Lorsqu'aucun courant ne circule dans le fil, la limaille ne prend pas de direction particulière
- Lorsqu'un courant circule dans le fil, la limaille s'aimante et se dispose en lignes fermées en formant des cercles concentriques comme il est indiqué sur la figure 7. Ces cercles sont appelées **lignes de champ**.

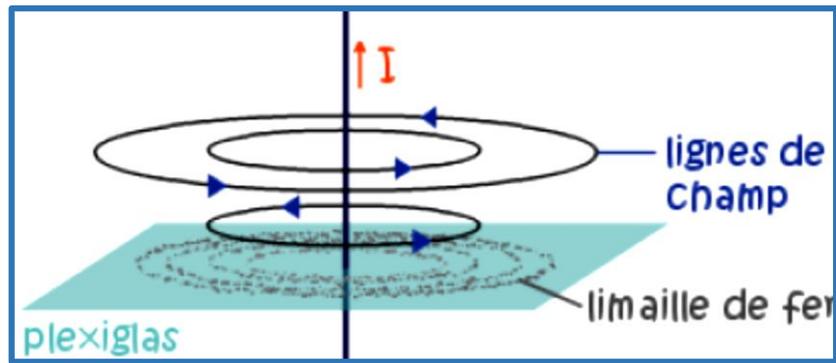


Figure 7. Lignes du champ magnétique d'un fil rectiligne

4.2.2 Propriétés d'un champ magnétique créé au voisinage d'un fil rectiligne

En utilisant des boussoles pour déterminer les propriétés d'un champ magnétique \vec{B} créé au point M au voisinage d'un fil rectiligne parcouru par un courant I (figure 8), on conclut que :

- Le champ \vec{B} est contenu dans un plan perpendiculaire au fil
- Le sens du champ \vec{B} change en fonction du sens du courant qui traverse le fil rectiligne
- La valeur du champ \vec{B} est proportionnelle à l'intensité du courant traversant le fil où :

$$B = k \times I$$

La constante k (exprimée en $T.A^{-1}$) dépend de la position du point M .

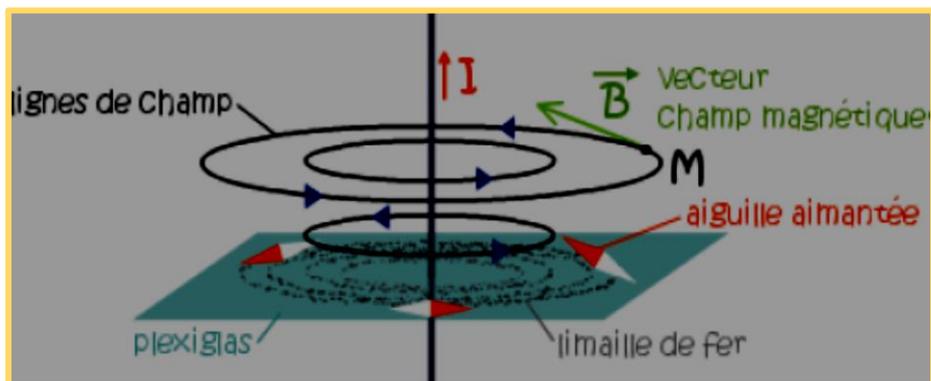


Figure 8. Le vecteur champ magnétique \vec{B} créé par le courant I

- Le sens du champ magnétique peut être déterminé par *la règle de la main droite* :



Si le courant est orienté pour sortir du pouce, le vecteur champ magnétique est dirigé de la paume de la main vers le bout des doigts.

4.3 Force magnétique de Lorentz

4.3.1 Définition

Une charge q , se déplace avec une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} subit une force magnétique appelée force de Lorentz donnée par :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

4.3.2 Caractéristiques de la force magnétique de Lorentz

La force magnétique de Lorentz est un vecteur caractérisé par :

- * Une direction perpendiculaire à $q\vec{v}$ et à \vec{B} donc au plan formé par $q\vec{v}$ et \vec{B}
- * Un sens déterminé par la règle des trois doigts de la main droite (voir figure 9) où :

- ✓ Le pouce représente le sens de $q\vec{v}$ $\left\{ \begin{array}{l} = \text{sens de } \vec{v} \text{ si } q > 0 \\ = \text{sens opposé à } \vec{v} \text{ si } q < 0 \end{array} \right.$
- ✓ L'index représente le sens de \vec{B}
- ✓ Le majeur représente le sens de \vec{F}_m

- * Une norme égale à : $F_m = qvB \sin \alpha$, avec :
 - q : la charge en coulomb (C)
 - v : la vitesse de la charge en mètre/seconde (m/s)
 - B : l'intensité du vecteur champ magnétique en Tesla (T)
 - α : l'angle formé par les vecteurs $q\vec{v}$ et \vec{B}

NOTE

- ☀ La force magnétique de Lorentz est maximale dans le cas où : $\vec{v} \perp \vec{B}$
- ☀ La force magnétique de Lorentz est nulle dans le cas où : $\vec{v} \parallel \vec{B}$
- ☀ La force magnétique de Lorentz est nulle si la charge est au repos.

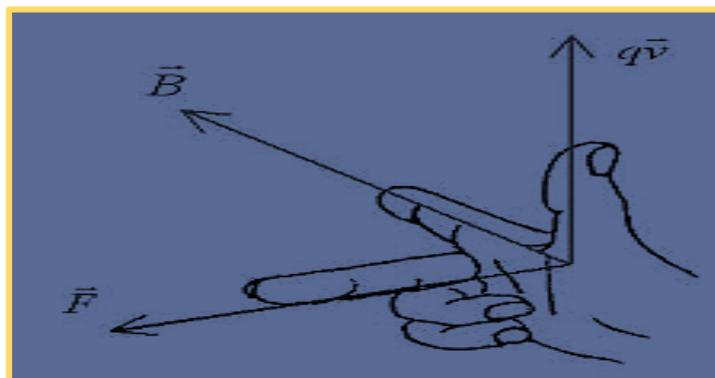


Figure 9. Règle de la main droite

Application

Un électron se déplace au-dessus de l'atmosphère perpendiculairement aux lignes d'un champ magnétique terrestre, à la vitesse de 1000 km/s. Dans cette région le champ est constant et a une intensité de 10^{-6} Tesla.

1. Déterminer la valeur de la force magnétique de Lorentz subie par l'électron
2. Déduire l'accélération de cet électron en supposant que la force de Lorentz est la seule force appliquée.

Solution

1. La force magnétique de Lorentz que subit cet électron est :

$$F = e \cdot v \cdot B \cdot \sin(90^\circ)$$

$$A.N : F = 1,6 \cdot 10^{-19} N$$

2. D'après le premier principe de la dynamique, nous avons :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = ma$$

L'accélération que subit cet électron est :

$$a = \frac{F}{m}$$

$$A.N : a = 1,76 \cdot 10^{11} m/s^2$$

4.4 Force électromagnétique de Lorentz

Une charge q qui se déplace avec une vitesse \vec{v} dans un champ électrique, caractérisé par le vecteur \vec{E} , et dans un champ magnétique, caractérisé par le vecteur \vec{B} , subit une force appelée force électromagnétique de Lorentz définie par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

4.5 Force de Laplace**4.5.1 Définition**

On considère un conducteur rectiligne de longueur $\ell = PM$ parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à PM (voir figure 10).

Les N électrons libres contenus dans ce conducteur, qui constituent le courant, se déplacent avec une certaine vitesse constante \vec{v} à travers \vec{B} .

Chaque électron est soumis à une force magnétique de Lorentz de norme :

$$F_m = |qvB \sin \alpha| = evB \sin \alpha$$

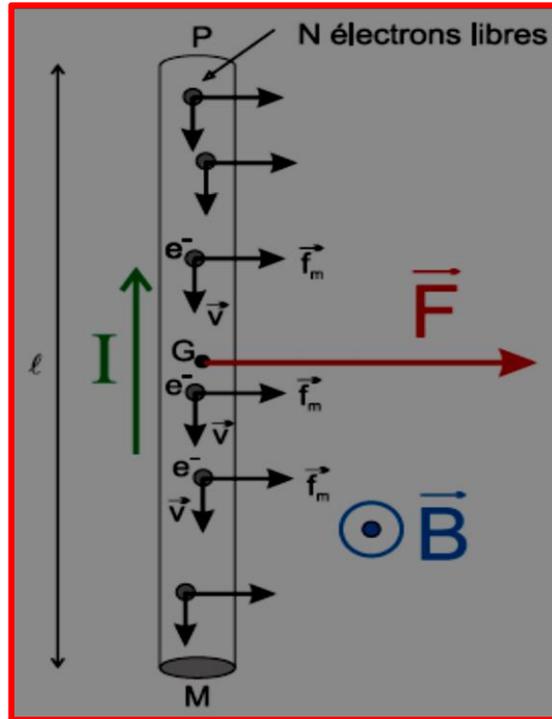


Figure 10

Par définition : La force de Laplace est la force électromagnétique qu'exerce un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant.

4.5.2 Expression de la force de Laplace

D'après la définition du paragraphe (4.5.1), la norme de la force de Laplace appliquée sur le conducteur (figure 10) est :

$$F = NF_m = NevB \sin \alpha \quad (1)$$

Si Δt est le temps qu'il faut aux N électrons pour s'écouler à travers la section M (voir figure 10), alors :

$$\Delta t = \frac{\ell}{v} \quad (2)$$

Ne représente la charge totale du conducteur, l'intensité du courant total est :

$$I = \frac{Ne}{\Delta t} \quad (3)$$

En remplaçant les équations (2) et (3) dans l'expression de la force de Laplace (équation 1), on obtient :

$$F = I \ell B \sin \alpha$$

Dans notre cas : $\alpha = 90^\circ \Rightarrow F = I \ell B$

4.5.3 Caractéristiques de la force de Laplace

Un conducteur de longueur ℓ placé dans un champ magnétique \vec{B} et parcouru par un courant I , est soumis à une force de Laplace \vec{F} caractérisée par :

- ✓ Une direction perpendiculaire au plan formé par le conducteur et \vec{B}
- ✓ Un sens déterminé par la règle des trois doigts de la main droite (figure 11) où :
 - Le pouce représente le sens du courant
 - L'index représente le sens de \vec{B}
 - Le majeur représente le sens de \vec{F}
 - La norme : $F = I \ell B \sin \alpha$ où :

I est l'intensité de courant en ampère (A), B est l'intensité du vecteur champ magnétique en Tesla (T), α est l'angle formé entre \vec{B} et le conducteur.

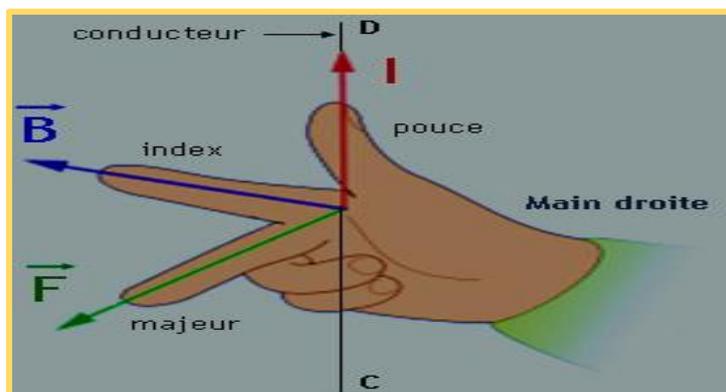


Figure 11. La règle des trois doigts de la main droite

Remarque : le sens de la force de Laplace peut être déterminé en utilisant la règle du bonhomme d'Ampère :

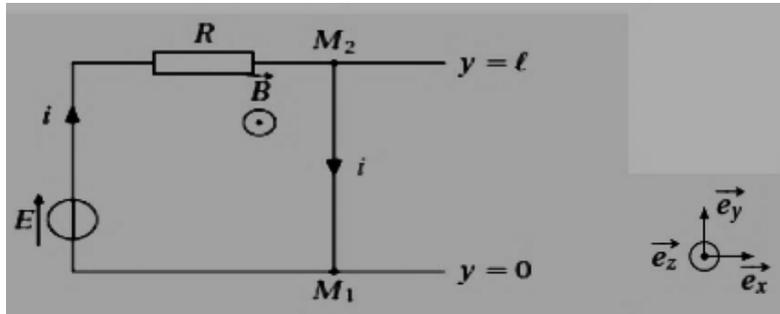
➤ Règle du Bonhomme d'Ampère:

- I entre par les pieds et sort par la tête
- Le bonhomme regarde dans la direction de \vec{B}
- Le bras gauche indique la direction de \vec{F}

Cette loi a des conséquences pratiques considérables : c'est grâce aux forces magnétiques s'exerçant sur des conducteurs que peuvent fonctionner les moteurs, les ampèremètres, voltmètres, les haut-parleurs...

Application

On considère une barre M_1M_2 de longueur ℓ qui glisse sans frottement sur des rails appelés **rails de Laplace**. Le circuit est orienté dans le sens indiqué pour l'intensité i sur la figure ci-dessous. On suppose que la résistance totale du circuit fermé vaut R .



- a. Exprimer l'intensité i en fonction de E et R
- b. Exprimer la force de Laplace qui s'exerce sur la barre en fonction de E, R, B, l et d'un vecteur unitaire.

Solution

- a. En appliquant la loi des mailles au circuit fermé, on obtient :

$$E = iR$$

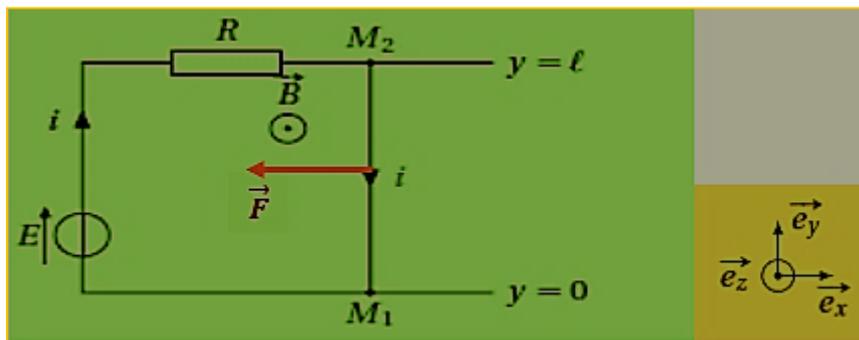
$$i = \frac{E}{R}$$

- b. La force de Laplace qui s'exerce sur la barre M_1M_2 :

$$\vec{F} = i \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{B} = -i l \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = -ilB\vec{e}_x \Rightarrow \vec{F} = -\frac{E}{R} l B \vec{e}_x$$

Représentation de la force \vec{F} :



4.6 Loi de Biot et Savart

Vers 1820, Jean-Baptiste Biot et Felix Savart ont établi empiriquement la loi qui gouverne la génération d'un champ magnétique par un courant.

Soit un fil conducteur, décrivant une courbe C , parcouru par un courant d'intensité I (figure 12).

On considère en un point P une portion élémentaire de fil orientée $\vec{d\ell}$.

Le vecteur position d'un point M relativement au point P est $\vec{r} = \vec{PM}$.

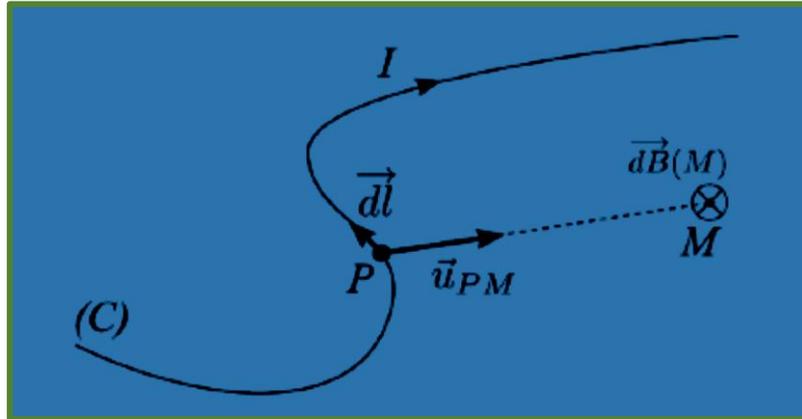


Figure12. Elément de fil conducteur parcouru par un courant I

Le champ magnétique élémentaire créé en M selon la loi de Biot et Savart est donné par :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I d\ell \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I d\ell \wedge \vec{u}_{PM}}{4\pi r^2}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7}$ S. I.

4.6.1 Propriétés d'un champ magnétique créé par un courant

- Le champ magnétique produit est perpendiculaire au plan défini par $\vec{d\ell}$ et \vec{r}
- Le sens du champ magnétique produit est déterminé par la règle du tire-bouchon (figure 13).

NOTE	<i>Le sens du vecteur champ magnétique est donné par l'orientation du pouce, l'index donnant le sens du courant.</i>
-------------	--

- Pour obtenir le champ total produit en un point M , il faut faire la somme de tous les champs élémentaires produits par tous les éléments de fil :

$$\vec{B}(M) = \int_C \vec{dB} = \int_C \frac{\mu_0 I d\ell \wedge \vec{u}_r}{4\pi r^2}$$

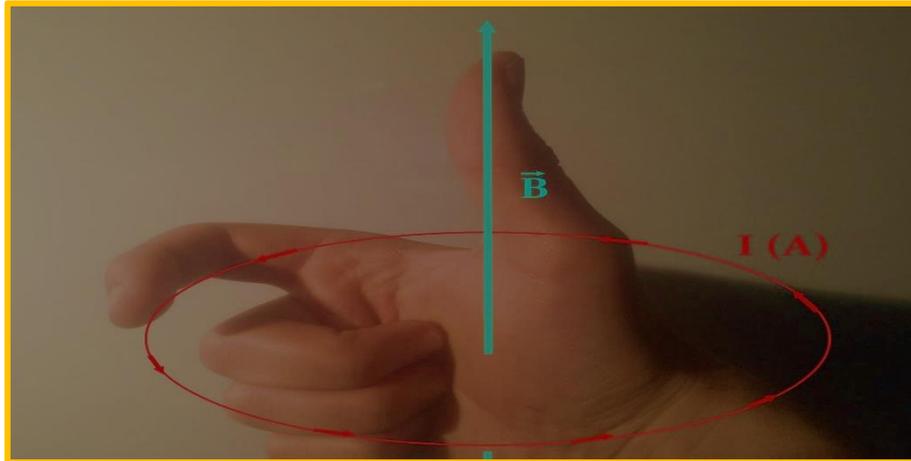


Figure 13. Règle de Tir Bouchon

4.6.2 Calcul du champ magnétique

4.6.2.1 Fil rectiligne infini

On considère un fil rectiligne, infini, parcouru par un courant I permanent. Calculons le champ magnétique créé au point M par un élément \overrightarrow{dOP} vu sous un angle α comme il est représenté sur la figure 14.

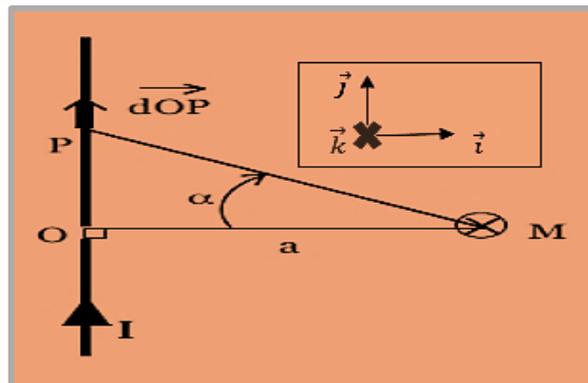


Figure 14

Selon la loi de Biot et Savart :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

La figure 14 indique que :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$$

$$PM = \frac{a}{\cos \alpha}$$

$$OP = PM \sin \alpha = a \tan \alpha \Rightarrow$$

$$dOP = \frac{a d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Dans le système des coordonnées cartésiennes, ce champ magnétique s'écrit :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{dOP} \wedge (\vec{PO} + \vec{OM}))}{\|\vec{PM}\|^3} \Rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{dOP} \wedge \vec{PO} + \vec{dOP} \wedge \vec{OM})}{\|\vec{PM}\|^3}$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{dOP} \wedge \vec{OM})}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dOP \vec{j} \wedge a \vec{i})}{\|\vec{PM}\|^3}$$

Par raison de symétrie, seule la composante selon \vec{k} est non nulle, alors :

$$dB = dB_z \vec{k} = \frac{\mu_0 I a (dOP)}{4\pi \|\vec{PM}\|^3} \vec{k} = \frac{\mu_0 I \cos \alpha \, d\alpha}{4\pi a} \vec{k}$$

L'intensité du champ total créé par le fil infini est :

$$B = \int dB_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi a} \, d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

4.6.2.2 Spire circulaire

Considérons une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant permanent I . Calculons le champ magnétique créé au point M situé sur l'axe z de la spire (figure 15).

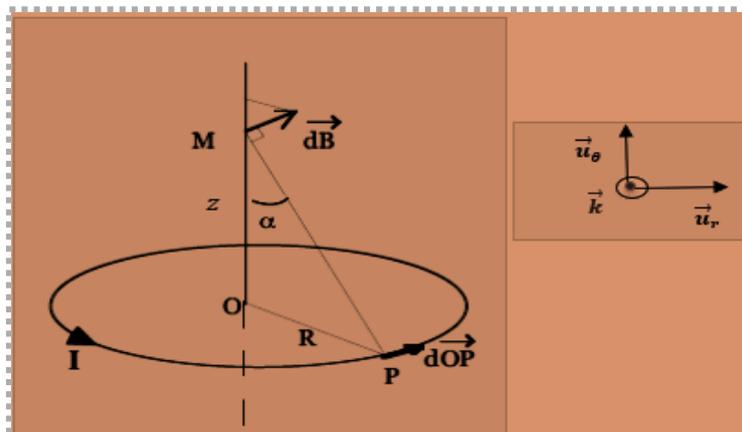


Figure 15

La figure 15 indique que :

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} \quad \text{et} \quad PM = \frac{R}{\sin \alpha}$$

En coordonnées cylindriques, nous avons :

$$\overrightarrow{dOP} = dOP\vec{u}_\theta = Rd\theta\vec{u}_\theta$$

En remplaçant ces équations dans l'équation de Biot et Savart, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dB} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dOP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{Rd\theta\vec{u}_\theta \wedge (-R\vec{u}_r + z\vec{k})}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \\ \overrightarrow{dB} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{R^2 d\theta \vec{k} + Rz d\theta \vec{u}_r}{R^3 / \sin^3 \alpha} \right)\end{aligned}$$

Par raison de symétrie, des points opposés sur la spire vont créer des champs magnétiques qui ont des composantes opposées suivant la direction \vec{u}_r , ainsi la composante radiale du champ s'annule et il ne reste qu'une composante selon z :

$$dB = dB_z \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \sin^3 \alpha \, d\theta \vec{k}$$

L'intensité du champ total créé par la spire au point M est :

$$\begin{aligned}B &= \oint dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \sin^3 \alpha \int_0^{2\pi} d\theta \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Application

Un fil rectiligne infini parcouru par un courant permanent de 10 A.

1. Quelle est l'intensité du champ magnétique produit par ce courant à 5 cm du fil ?
2. Est-ce que ce champ pourrait-il perturber une boussole ? Sachant que l'intensité du champ magnétique terrestre est de $2,2 \cdot 10^{-5}$ T.

Solution

1. L'intensité du champ magnétique créé à une distance r par un fil infini est :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

A.N : $B = 4 \times 10^{-5}$ T

2. Ce champ perturberait une boussole, car il est deux fois plus intense que le champ magnétique terrestre.

4.7 Dipôle magnétique

Un dipôle magnétique pour le champ magnétique est équivalent au dipôle électrostatique pour le champ électrique, il est caractérisé par le vecteur moment magnétique (ou moment dipolaire magnétique).

4.7.1 Moment magnétique

En physique, le moment magnétique est une grandeur vectorielle qui permet de caractériser l'intensité d'une source magnétique. Cette source peut être un courant électrique, ou bien un objet aimanté.

Le moment magnétique d'un corps se manifeste par la tendance qu'a ce corps à s'aligner dans le sens d'un champ \vec{B} comme dans le cas de l'aiguille d'une boussole.

Soit une boucle de surface S parcourue par un courant d'intensité I (figure 16), son moment magnétique $\vec{\mu}$ est défini par :

$$\vec{\mu} = I \cdot S \cdot \vec{n}$$

Il s'exprime en ampères mètres carrés (A. m²)

\vec{n} est le vecteur normal à la surface S .

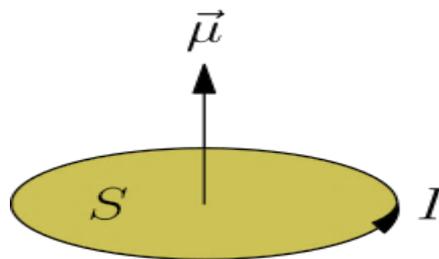
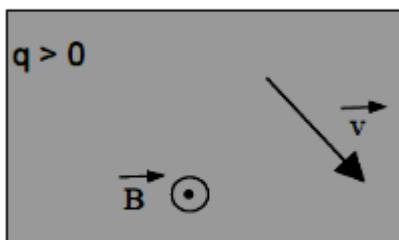


Figure 16. Moment magnétique d'une boucle de courant d'intensité I

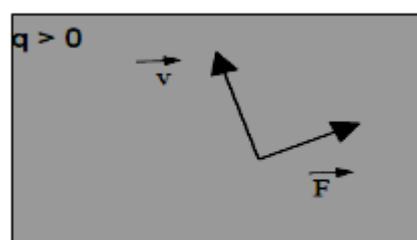
Exercices corrigés

Exercice 1

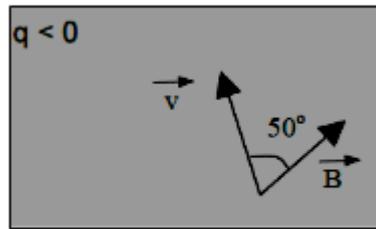
Déterminez dans les cas suivants la direction et le sens du vecteur manquant dans les figures ci-dessous.



Cas (a)



Cas (b)



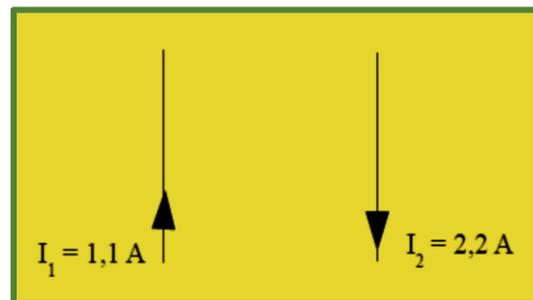
Cas(c)

- Calculer l'intensité de la force appliquée sur la charge q , pour les trois cas ci-dessus, si $v = 6 \cdot 10^4 \text{ m/s}$, $B = 0,2 \text{ T}$ et $|q| = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Exercice 2

Deux fils infinis, séparés par une distance ($d = 15 \text{ cm}$), sont parcourus par un courant de 1,1 A pour le premier et de 2,2 A pour le second.

- Dessinez, sur le schéma, la force qu'exerce le fil 1 sur le fil 2
- Calculez l'intensité du champ généré par le fil 1 sur le fil 2
- Calculez l'intensité de la force, par unité de longueur, qu'exerce le fil 1 sur le fil 2.

**Exercice 3**

Une bobine plate comportant une spire de 5 cm de rayon est parcourue par une intensité de courant I .

- Comment faut-il orienter cette bobine si on veut qu'au centre de cette bobine le champ magnétique total soit nul (en tenant compte du champ magnétique terrestre qui vaut $B_{\text{terrestre}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$) ?
- Quelle doit être l'intensité I dans ce cas ?
- Même question dans le cas où la bobine comporte 50 spires ?

Exercice 4

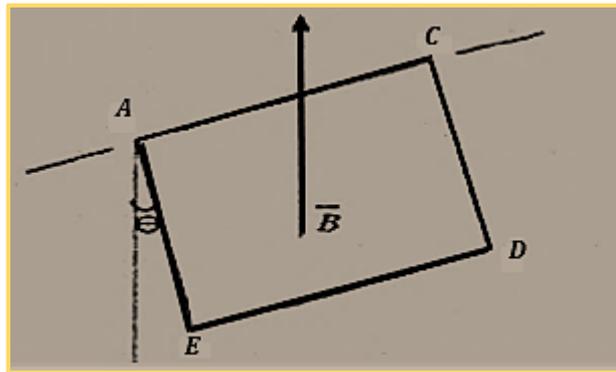
La circulation d'un électron tournant autour d'un proton par un mouvement circulaire uniforme provoque un champ magnétique au voisinage de ce proton, en raisonnant sur une période de révolution de l'électron autour du noyau.

- Calculer l'intensité de ce champ magnétique sachant que le rayon du cercle $R = 0,529 \text{ \AA}$ et la vitesse de l'électron est de 2200 km/s.

Exercice 5

Un cadre ACDE de côté $a = 20 \text{ cm}$ est constitué d'un seul tour de fil conducteur rigide de masse $m = 16 \text{ g}$. Ce cadre, mobile sans frottement autour de son côté AC horizontal, est plongé dans un champ magnétique uniforme et vertical \vec{B} , dirigé vers le haut et d'intensité $B = 0,1 \text{ T}$.

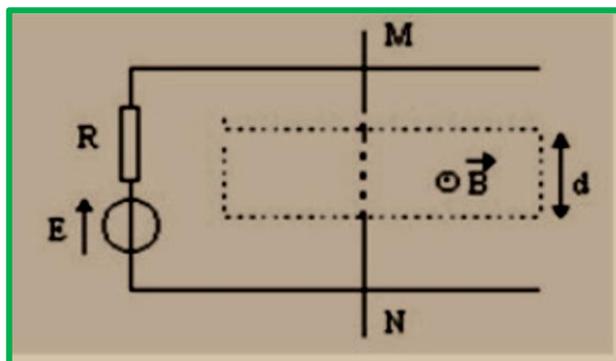
Un courant d'intensité « I » traverse le cadre qui prend une position d'équilibre définie par l'angle θ représenté par la figure ci-dessous.



1. Représenter le sens du courant et les forces électromagnétiques agissant sur les quatre cotés.
2. Exprimer l'intensité I en fonction de : a , B , m , θ et g puis calculer sa valeur pour : $\theta = 21^\circ$ et $g = 9,8 \text{ N/kg}$

Exercice 6

Considérons deux conducteurs parallèles formant un "rail de Laplace" sur lequel peut se déplacer une barre mobile conductrice MN selon le schéma (vu de dessus). Le circuit est formé d'un générateur d'une f.é.m. $E = 5 \text{ V}$ et une résistance $R = 5 \Omega$, la barre MN de longueur totale $L = 0,12 \text{ m}$ a une résistance négligeable et elle crée un court-circuit en refermant le circuit entre les deux points M et N.



On place MN dans l'entrefer d'un aimant en U (de largeur $d = 4 \text{ cm}$) où règne un champ magnétique uniforme de norme $B = 0,1 \text{ T}$.

1. Expliquez comment on doit placer l'aimant en U pour obtenir le champ magnétique \vec{B} tel qu'il est représenté sur la figure c'est à dire perpendiculaire au plan du schéma et dirigé vers le haut
2. Déterminez le sens et l'intensité du courant dans le circuit
3. Déterminez en direction, sens et grandeur la force de Laplace agissant sur la barre MN
4. La barre MN se déplace (à vitesse considérée constante) dans le champ magnétique sur une longueur de $\ell = 6 \text{ cm}$ dans le sens impliqué par la force de Laplace, en déduire le travail exercé lors de ce déplacement de la barre MN .

Exercice 7

Dans une approche classique, on considère que l'électron d'un atome d'hydrogène suit une trajectoire circulaire, de rayon « r » autour du noyau. On note « me » la masse de l'électron.

a) Faire un schéma pour préciser l'orientation du courant et du champ magnétique en accord avec la règle de la main droite.

b) L'électron est animé d'une vitesse donnée en coordonnées cylindriques par $\vec{v} = v \vec{k}$. En raisonnant sur une période de révolution de l'électron autour du noyau, on peut décrire l'effet magnétique de l'électron par une spire circulaire équivalente.

- Déterminer l'intensité du courant circulant dans cette spire en fonction de r , v et de la charge de l'électron (qe).

c) Exprimer, puis calculer le champ magnétique $B(O)$ développé au niveau du noyau par l'électron dans son mouvement orbital, ainsi que le moment magnétique correspondant. On prendra :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}, v = 2,2 \text{ km/s}, r = 0,53 \text{ \AA}$$

Exercice 8

Une particule de masse m et de charge q pénètre avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ dans une zone où existent un champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{j}$ et un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{k}$ uniformes et stationnaires.

À quelle condition le vecteur vitesse de la particule reste-t-il inchangé ? Calculer cette vitesse.

$$B_0 = 0,1 \text{ T} \quad \text{et} \quad E_0 = 50 \text{ V/m.}$$

Exercice 9

On considère une particule de charge $q > 0$, de masse m et de vitesse initiale \vec{v}_0 à l'entrée d'une zone où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme et indépendant du temps. Cette particule décrit une trajectoire circulaire de rayon R_0 dans un plan (xOy) .

1. Déterminer la direction du champ qui provoque cette trajectoire.
2. Déterminer la norme du champ en fonction de m , v_0 , R_0 et q en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 10

Un électron pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{k}$ dans une région où règne un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B \vec{j}$.

1. Donner l'expression de la force magnétique de Lorentz qui s'exerce sur l'électron au moment où il pénètre dans la région du champ.
2. Dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, le mouvement de l'électron est circulaire uniforme donc son accélération est radiale centripète. Trouver le rayon de cette trajectoire
3. En appliquant un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{i}$ dans cette région. Pour quel rapport (E/B) , le mouvement de l'électron est-il rectiligne et uniforme ?

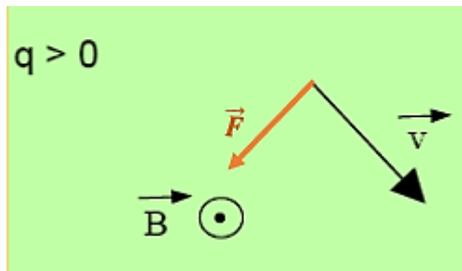
Solution des exercices

Exercice 1



La force de Lorentz est toujours perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{v} et \vec{B}

➤ **Cas -a-**

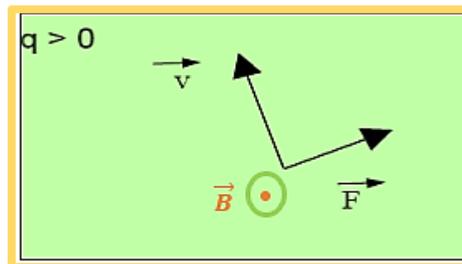


$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\pi/2)$$

$$F = q \cdot v \cdot B$$

A.N : $F = 3,6 \cdot 10^{-5} N$

➤ **Cas -b-**



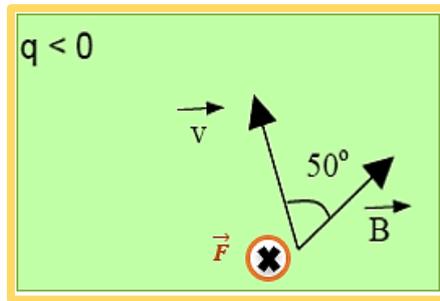
$$F = q \cdot v \cdot B$$

A.N : $F = 3,6 \cdot 10^{-5} N$

➤ Cas -c-

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(50^\circ)$$

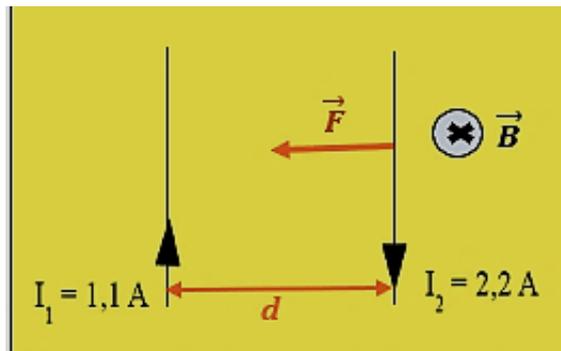
A.N : $F = 2,76 \cdot 10^{-5} \text{ N}$



Exercice 2

a) Nous allons répondre à cette question en deux étapes :

1. Représenter tout d'abord le champ magnétique créé par le fil 1 sur le fil 2 par la règle de la main droite
2. Représenter la force exercée par le fil 1 sur le fil 2 à l'aide du bonhomme d'Ampère (voir figure ci-dessous) :



b) L'intensité du champ magnétique généré par le fil 1 sur le fil 2 est :

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

A.N : $B = 1,47 \cdot 10^{-6} \text{ T}$

c) La force \vec{F} exercée par le fil 1 sur le fil 2 est :

$$\vec{F} = I_2 \cdot \vec{L} \wedge \vec{B} \Rightarrow F = I_2 \cdot L \cdot B$$

L'intensité de cette force par unité de longueur est ($F_L = \frac{F}{L}$):

$$F_L = I_2 \cdot B$$

A.N : $F_L = 1,62 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$

Exercice 3

1. Au centre de la bobine est appliqué :

Le champ magnétique terrestre \vec{B}_{terre}

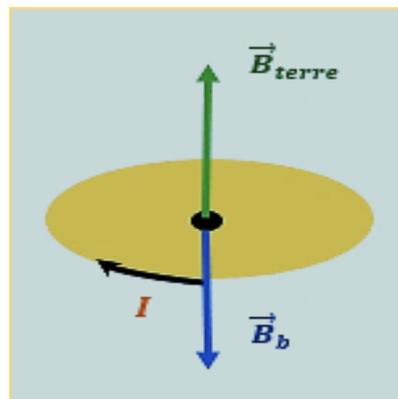
Le champ magnétique créé par la bobine \vec{B}_b

En appliquant le principe de superposition des champs appliqués au centre « O » de la bobine, le champ magnétique total \vec{B} est :

$$\vec{B} = \vec{B}_{terre} + \vec{B}_b$$

Pour que \vec{B} soit nul, il faut que : $\vec{B}_{terre} = -\vec{B}_b$

Alors le plan de la bobine doit être perpendiculaire à l'axe Nord-Sud et le sens du courant comme il est indiqué sur le schéma ci-dessous :



2. Pour que le champ total soit nul, il faut que les intensités des deux champs soient égales :

$$B_{terre} = B_b$$

$$B_{terre} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot R}$$

$$I = \frac{2 \cdot R \cdot B_{terre}}{\mu_0}$$

A.N : $I = 1,75 \text{ A}$

3. Dans le cas où la bobine comporte 50 spires :

$$I = \frac{2 \cdot R \cdot B_{terre}}{n \cdot \mu_0}$$

A.N : $I = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$

Exercice 4

Le champ magnétique généré par la circulation de l'électron est :

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot R}$$

Par définition :

$$I = \frac{\text{la charge en mouvement}}{\text{durée du passage de la charge}} = \frac{e}{T}$$

L'électron est en mouvement circulaire uniforme, sa période de rotation vaut :

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v}$$

Alors :

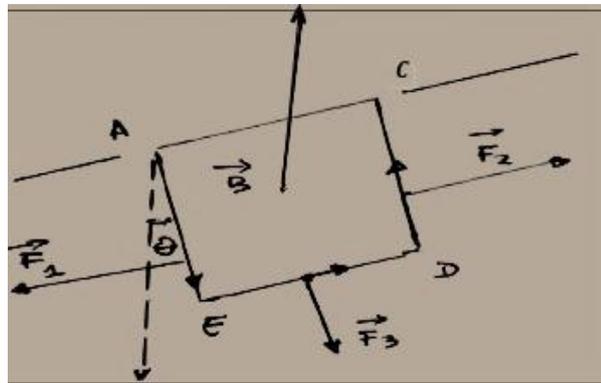
$$B = \mu_0 \cdot \frac{e}{2 \cdot R \cdot T} = \frac{\mu_0 e v}{4\pi R^2}$$

$$A.N : B = 12,6 T$$

Exercice 5

1.

- Le sens du courant est déterminé par la règle du Tir bouchon comme il est indiqué sur le schéma ci-dessous.
- Le sens des forces électromagnétiques, exercées sur les côtés du carré, est déterminé par la règle d'Ampère.



Soient :

$$\vec{F}_1 \text{ est la force de Laplace appliquée sur le côté } AE : \vec{F}_1 = I \cdot \overrightarrow{AE} \wedge \vec{B}$$

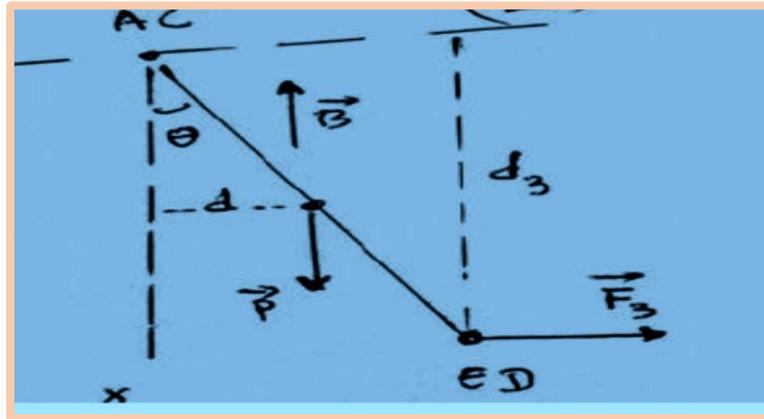
$$\vec{F}_2 \text{ est la force de Laplace appliquée sur le côté } DC : \vec{F}_2 = I \cdot \overrightarrow{DC} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_3 \text{ est la force de Laplace appliquée sur le côté } ED : \vec{F}_3 = I \cdot \overrightarrow{ED} \wedge \vec{B}$$

\vec{F}_1 et \vec{F}_2 n'ont aucun effet sur la rotation du cadre parce qu'elles sont parallèles à l'axe de rotation AC.

\vec{F}_3 , d'après la règle d'Ampère, elle est orientée vers l'extérieur et fait donc tourner le cadre dans le sens indiqué sur la figure.

2. Vue de profil du cadre (figure ci-dessous) :



La condition d'équilibre du cadre mobile autour de l'axe AC exige que la somme algébrique des moments \mathcal{M} de toutes les forces doit être nulle :

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}(\vec{F}_1)_{/AC} + \mathcal{M}(\vec{F}_2)_{/AC} + \mathcal{M}(\vec{F}_3)_{/AC} + \mathcal{M}(\vec{P})_{/AC} = 0$$

$\mathcal{M}(\vec{F}_1)_{/AC} = \mathcal{M}(\vec{F}_2)_{/AC} = 0$; alors :

$$\mathcal{M}(\vec{F}_3)_{/AC} + \mathcal{M}(\vec{P})_{/AC} = 0$$

$$\mathcal{M}(\vec{F}_3)_{/AC} = F_3 \cdot d_3 = F_3 \cdot a \cdot \cos \theta$$

$$\mathcal{M}(\vec{P})_{/AC} = -\frac{a}{2} \cdot mg \sin \theta$$

La condition d'équilibre s'écrit finalement :

$$F_3 \cdot a \cdot \cos \theta = \frac{a}{2} \cdot mg \sin \theta$$

$$I \cdot B \cdot a^2 \cos \theta = \frac{a}{2} \cdot mg \sin \theta$$

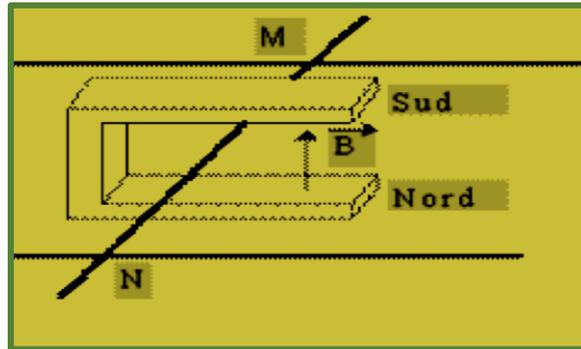
$$I = \frac{mg \tan \theta}{2 \cdot B \cdot a}$$

AN : $I = 1.5 \text{ A}$

Exercice 6

1. Pour avoir le sens de \vec{B} tel qu'il est donné sur la figure, **le pôle sud** de l'aimant doit être placé vers le haut.

Le champ magnétique créé par l'aimant en U est dirigé du pôle nord au pôle sud.



2. Le sens de I est donné par le sens de E (voir le schéma dans l'énoncé de l'exercice), il est dirigé de M vers N .

Nous avons :

$$E - RI = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R}$$

A.N : $I = 1 \text{ A}$

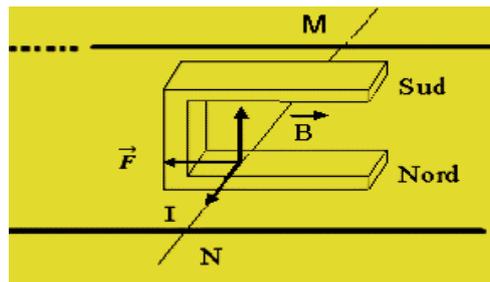
3. La longueur du conducteur soumis au champ magnétique correspond à la distance « d » et non pas à la longueur totale « L » de la barre donc l'intensité de la force de Laplace :

$$F = B \cdot I \cdot d \cdot \sin\alpha = B \cdot I \cdot d \cdot \sin(\pi/2)$$

$$F = B I d$$

A.N : $F = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$

D'après la règle d'Ampère, la force \vec{F} est dirigée vers la gauche comme il est indiqué sur le schéma ci-dessous :



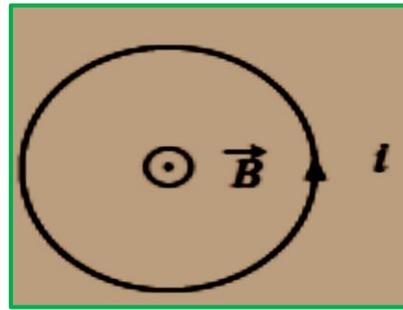
4. Le travail exercé lors de ce déplacement de la barre MN :

$$\mathcal{W} = F \cdot \ell \cdot \cos 0$$

A.N : $\mathcal{W} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$

Exercice 7

- a) On obtient la configuration de la figure ci-contre où la spire est orientée dans le sens défini par le déplacement de l'électron.



b) Sur une période de révolution « T » de l'électron autour du noyau, nous avons :

$$i = \frac{q_e}{T}$$

Avec :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Alors l'intensité i est :

$$i = \frac{q_e v}{2\pi r}$$

c) Le champ $B(O)$ créé par l'électron est :

$$B(O) = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

En remplaçant l'expression de i trouvée en b), on obtient :

$$B(O) = \frac{\mu_0 q_e v}{4\pi r^2}$$

$$A.N : B(O) = 12,6 \cdot 10^{-3} T$$

Le moment magnétique est donné par :

$$\vec{\mathcal{M}} = i \cdot S \cdot \vec{n}$$

Sa norme est :

$$\mathcal{M} = \frac{q_e v r}{2}$$

$$A.N : \mathcal{M} = 9,3 \cdot 10^{-27} A.m^2$$

Exercice 8

La particule est soumise uniquement à la force électromagnétique de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{F} = q(E_0 \vec{j} + v_0 \vec{i} \wedge B_0 \vec{k})$$

Le vecteur vitesse de la particule reste inchangé si son vecteur accélération est nul, c'est-à-dire d'après le premier principe de la mécanique si la force de Lorentz est nulle :

$$\vec{F} = q(E_0 \vec{j} + v_0 \vec{i} \wedge B_0 \vec{k}) = \vec{0}$$

Soit :

$$E_0 - v_0 B_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{E_0}{B_0}$$

A.N : $v_0 = 500 \text{ m/s}$

Exercice 9

1. Une trajectoire purement circulaire ne peut être provoquée que par un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse initiale.

La trajectoire étant contenue dans un plan (xOy), on en déduit que le champ est dirigé selon l'axe z : $\vec{B} = B\vec{k}$

2. La trajectoire étant circulaire, la vitesse et l'accélération s'écrivent en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = R_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

L'application du premier principe de la dynamique (PFD) nous donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

La particule est soumise à la seule force magnétique de Lorentz, alors :

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow q(R_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \wedge B\vec{k}) = m(-R_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta)$$

$$qR_0 \dot{\theta} B \vec{u}_r = -mR_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + mR_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \begin{cases} qB = -m\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que : $\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} = \text{cte}$; la particule tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante en mouvement circulaire uniforme, d'où :

$$|\dot{\theta}| = \frac{qB}{m} = \frac{v_0}{R_0} \Rightarrow$$

$$B = \frac{mv_0}{qR_0}$$

Exercice 10

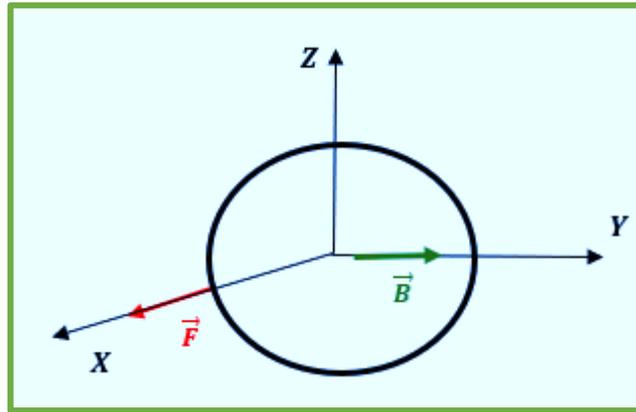
1. La force de Lorentz est :

$$\vec{F} = -e\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -ev_0 \vec{k} \wedge B\vec{j}$$

$$\vec{F} = ev_0 B \vec{i}$$

2. Le mouvement de l'électron étant circulaire uniforme, son accélération centripète :

$$a = \frac{v_0^2}{R}$$



En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow ev_0 B \vec{i} = m \frac{v_0^2}{R} \vec{i}$$

$$R = \frac{mv_0}{eB}$$

3. Dans ce cas, l'électron est soumis à la force électromagnétique de Lorentz :

$$\vec{F} = -e(\vec{v}_0 \wedge \vec{B} + \vec{E})$$

Pour que le mouvement soit rectiligne uniforme, il faut que : $\vec{a} = \vec{0}$

L'application du PFD donne :

$$-e(\vec{v}_0 \wedge \vec{B} + \vec{E}) = m\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow -e(v_0 \vec{k} \wedge B \vec{j}) - eE \vec{i} = \vec{0}$$

$$ev_0 B - eE = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

Références

- [1] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli "La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique" 2ième Edition, Edi-Science, 2006
- [2] Physique 2 Electricité et magnétisme, Harris Benson, éditions de Boeck, 2015
- [3] Physique Générale, Electricité et magnétisme, Douglas Giancoli, éditions de Boeck, 1993