

République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de  
l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf-Oran



Faculté de Chimie  
Département de Génie Chimique



---

# MECANIQUE DES FLUIDES

Cours et exercices corrigés

---

**Khalida BEKRENTCHIR**

Docteur en Génie des Procédés  
Laboratoire d'Ingénierie des procédés et de l'environnement (LIPE)  
Département de Génie Chimique- Faculté de Chimie  
Université des Sciences et de la Technologie M. Boudiaf d'Oran  
[Khalida.BEKRENTCHIR@gmail.com](mailto:Khalida.BEKRENTCHIR@gmail.com)

# Avant propos

Ce polycopié de cours de Mécanique des Fluides répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la deuxième année *universitaire filière génie des procédés*. Il constitue une introduction à la mécanique des fluides pour les étudiants de Génie des procédés.

Ce document couvre la majorité des aspects de la mécanique des fluides. Il est constitué de quatre chapitres qui s'enchaînent comme suit :

Le chapitre I traite les propriétés des fluides à savoir la masse volumique, le poids volumique et la viscosité...etc. Elles sont utilisées ultérieurement.

Le chapitre II est consacré à l'étude des fluides au repos. La loi fondamentale en statique des fluides et les forces exercées par les fluides sur des objets solides sont traités. Cette partie donne les fondements nécessaires à l'étude des barrages.

Dans le chapitre III, l'écoulement des fluides parfait est étudié. Les équations qui régissent ce type d'écoulement comme l'équation de continuité et l'équation de Bernoulli sont démontrés. Elles sont la base de plusieurs d'applications en hydraulique en particulier dans le dimensionnement des réseaux d'alimentation en eau potable et l'évacuation des eaux usées, ainsi dans la plupart des instruments de mesures de pressions et de débits qu'on peut rencontrer dans beaucoup de processus industriels de fabrication chimique surtout.

Enfin le chapitre IV est consacré à l'étude l'écoulement des fluides réels. La notion du régime d'écoulement et les calculs les pertes de charge due par les forces de frottement sont expliqués. Elles sont indispensable pour le dimensionnement des diverses installations industriels.

A la fin de chaque chapitre, des exercices sont proposés avec des réponses permettant de tester les connaissances des étudiants et de se préparer aux examens.

Pour la rédaction de ce polycopié, j'ai utilisé de nombreux documents citée dans la liste bibliographié. J'espère que ce polycopié constituera une invitation à la lecture de ces livres.

# Table des matières

## Chapitre 1 : Définitions et propriétés des fluides

Introduction.....	1
1.1 Définition physique d'un fluide.....	2
1.1.1 Etats de la matière.....	2
1.1.2 Matière divisée.....	4
1.1.2.1 Dispersions.....	4
1.1.2.2 Suspensions.....	4
1.1.2.3 Emulsions.....	4
1.2 Fluide parfait et fluide réel.....	5
1.3 Fluide Compressible et incompressible.....	5
1.4 Les caractéristiques d'un fluide.....	5
1.4.1 Masse volumique.....	6
1.4.2 Densité et poids spécifique.....	6
1.4.2 Compressibilité isotherme.....	7
1.5 Rhéologie d'un fluide.....	7
1.5.1 Viscosité des fluides.....	7
1.5.2 Expérience de base.....	8
1.5.3 Viscosité dynamique.....	9
1.5.4 Viscosité cinématique.....	9
1.6.5 Variation de la viscosité en fonction de la température.....	10
1.5.6 Les différents types de fluides.....	11
1.6 Tension de surface d'un fluide.....	11
1.6.1 Quelques observations simples.....	11
1.6.2 Origine de la tension superficielle.....	12
1.6.3 Définition de la tension superficielle.....	13
1.6.4 Conséquences de l'existence de la tension superficielle.....	13
1.6.4.1 Formation de bulles.....	13
1.6.4.2 Contact entre liquide et solide : angle de raccordement.....	13
1.6.4.3 Ascension d'un liquide dans un tube capillaire : LOI de JURIN.....	14
1.7 Applications.....	15

## Chapitre 2 : Statique des fluides

2.1 Notion sur les pressions.....	
2.1.1 Définition de la pression.....	
2.1.2 Unité pression.....	
2.1.3 Pression absolue et pression relative.....	
2.1.4 Pression en un point d'un fluide.....	
2.2 Loi fondamentale de statique des fluides.....	
2.2.1 Conséquences et applications du principe de l'hydrostatique.....	
2.2.1.1 Surface de niveau : surface isobare.....	
2.2.1.2 Pression pour des fluides non miscibles superposés.....	
2.2.2 Instruments de mesure de la pression.....	
2.2.2.1 Baromètre de Torricelli.....	
2.2.2.2 Le tube manométrique simple ou piézomètre.....	
2.2.2.3 Le tube manométrique en forme de « U ».....	
2.2.2.4 Le manomètre différentiel.....	
2.3 Théorème de Pascal : transmission de pression.....	
2.3.1 Application : Vérin hydraulique.....	

2.4	Forces s'exerçant sur une surface immergée (forces hydrostatiques).....
2.4.1	Force de pression élémentaire sur une paroi.....
2.4.2	Forces de pression sur une plaque plane horizontale.....
2.4.3	Forces de pression sur une plaque plane verticale.....
2.4.4	Forces de pression sur une plaque plane oblique.....
2.4.5	Cas général (formule pratique).....
2.4.6	Centre de poussée.....
2.5	Applications.....

### **Chapitre 3 : Dynamique des fluides incompressibles parfaits**

4.1	Notions générales sur l'écoulement.....
4.1.1	Écoulement permanent ou stationnaire.....
4.1.2	Trajectoire et lignes de courant.....
4.1.2.1	Trajectoire.....
4.1.2.2	Ligne de courant.....
4.2	Equation de continuité ou conservation de la masse.....
4.3	Débit masse et débit volume.....
4.3.1	Débit masse.....
4.3.2	Débit volumique.....
4.3.3	Relation entre débit massique et débit volumique.....
4.4	Théorème de Bernoulli.....
4.4.1	Autres formes du théorème de Bernoulli.....
4.4.2	Equation de Bernoulli avec échange de travail.....
4.5	Applications aux mesures des débits et des vitesses.....
4.5.1	Venturi.....
4.5.2	Diaphragmes.....
4.5.3	Tubes de Pitot.....
4.6	Théorème d'Euler.....
4.7	Applications.....

### **Chapitre 4 : Dynamique des fluides incompressibles réels**

4.1	Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds.....
4.2	Analyse dimensionnelle.....
4.2.1	Notions de dimensions.....
4.2.1.1	Systèmes d'unités.....
4.2.1.2	Dimension.....
4.2.1.3	Exemples de dimensions secondaires.....
4.2.2	Théorème de Vashy-Buckingham.....
4.2.3	Exemple d'analyse dimensionnelle: Nombre de Reynolds.....
4.3	Pertes de charges.....
4.3.1	Pertes de charges singulières.....
4.3.2	Pertes de charges linéaires.....
4.3.3	Pertes de charge totales.....
4.4	Généralisation du théorème de Bernoulli aux fluides réels.....
4.5	Application.....

## Chapitre 1 :

### Définitions et propriétés des fluides

#### Objectifs

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

- Définir les différents types des fluides ;
- Connaître les propriétés physiques d'un fluide.

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui étudie le comportement des fluides (liquides et gaz) au repos et en mouvement et les forces internes associées. Son importance s'explique par le fondement théorique qu'elle offre à de nombreuses disciplines - le génie des procédés, le génie énergétique, le génie environnemental, le génie naval, le génie civil, l'agriculture, l'agroalimentaire -, ce qui indique l'ampleur de son champ d'investigation.

La mécanique des fluides comprend deux grandes sous branches:

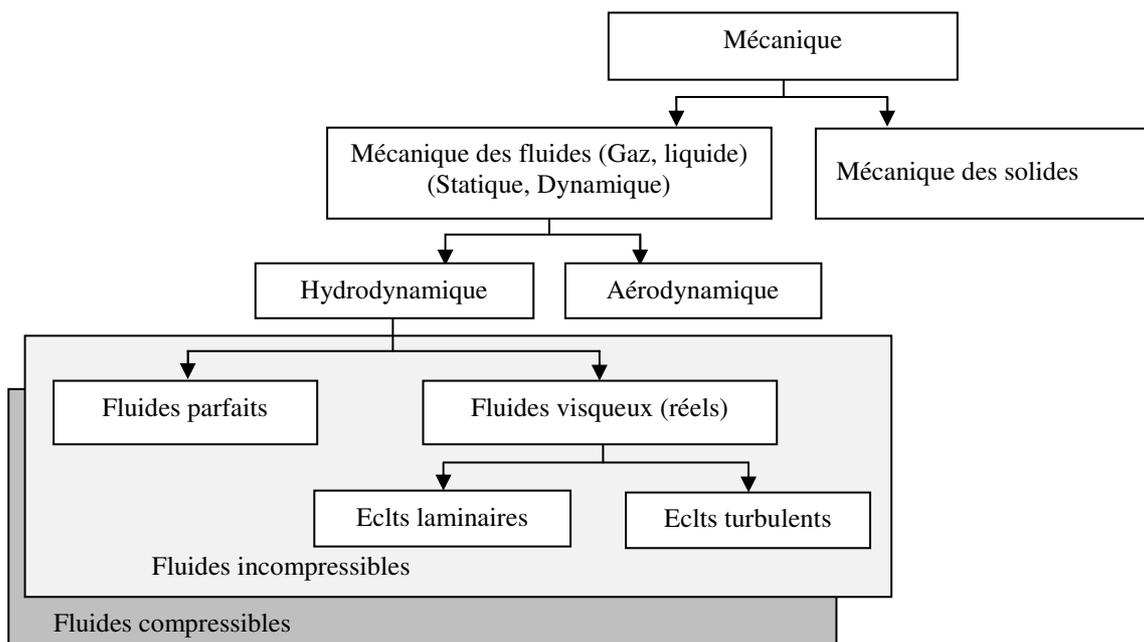
- **La statique des fluides**, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- **La dynamique des fluides** qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides :

Le terme **hydrodynamique** s'applique à l'écoulement des liquides ou des gaz à faible vitesse. Dans ce cas, le gaz est considéré comme incompressible : sa masse volumique est constante.

**L'aérodynamique**, ou dynamique des gaz, s'intéresse au comportement des gaz lorsque les changements de vitesse et de pression sont trop importants pour pouvoir négliger la compressibilité des gaz.

Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique (**CFD** ou **Computational Fluid Dynamics** en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs.



## 1.1 Définition physique d'un fluide

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel **continu, déformable**, sans rigidité et qui **peut s'écouler**.

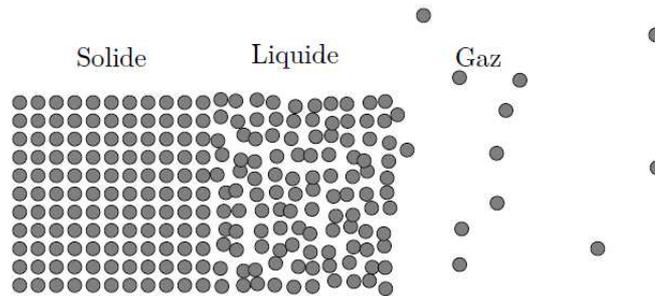
- **continu** ; ses propriétés varient d'une façon continue, propriétés considérées comme caractéristiques non d'un point sans volume mais d'une particule, volume de fluide extrêmement petit autour d'un point géométrique ; par exemple, on affecte à chaque point P, pour chaque instant t, une masse volumique  $\rho$  représentative de la population des molécules intérieures au volume  $dV$  de la particule ;
- **déformable** (il n'a pas de forme propre) ; les molécules peuvent facilement glisser les unes sur les autres ; cette mobilité fait que le fluide prendra la forme du récipient qui le contient ;
- **qui peut s'écouler** ; mais tout fluide peut s'écouler plus ou moins facilement d'un récipient à un autre ou dans une conduite : des forces de frottements qui s'opposent au glissement des particules de fluide les unes contre les autres peuvent apparaître car tout fluide réel a une viscosité.

### 1.1.1 Etats de la matière

La matière est constituée d'atomes, de molécules ou des ions. Ces particules sont liées entre elles par des forces de liaison (liaisons covalentes, ioniques, métalliques, de Van der Waals ou d'hydrogène). Selon la grandeur de la force liant ces constituants entre eux, on distingue trois états de matière : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux. En pratique, la notion de fluide regroupe les liquides et les gaz.

- **L'état solide** (ordonné : ordre à grande échelle ou amorphe : pas d'ordre) : les atomes sont dans des positions fixes dans l'espace. Les forces d'interaction sont importantes. Les atomes ne peuvent donc que vibrer autour de leur position d'équilibre avec des faibles amplitudes.
- **L'état gazeux** : les atomes sont dilués dans l'espace. Il n'y a pas de volume propre et la compression est possible. Les forces de cohésion sont faibles (les majoritaires étant les forces de répulsion). Le mouvement est possible et c'est un mouvement désordonné (Brownien) avec interactions par collisions.
- **L'état liquide** : c'est l'état intermédiaire entre les deux précédents. Il peut donc être perçu comme un solide désordonné ou un gaz très dense. Les atomes sont proches les uns des autres et ont donc un volume propre. Un liquide est incompressible. Le mouvement est possible mais les forces d'attraction sont insuffisantes pour maintenir

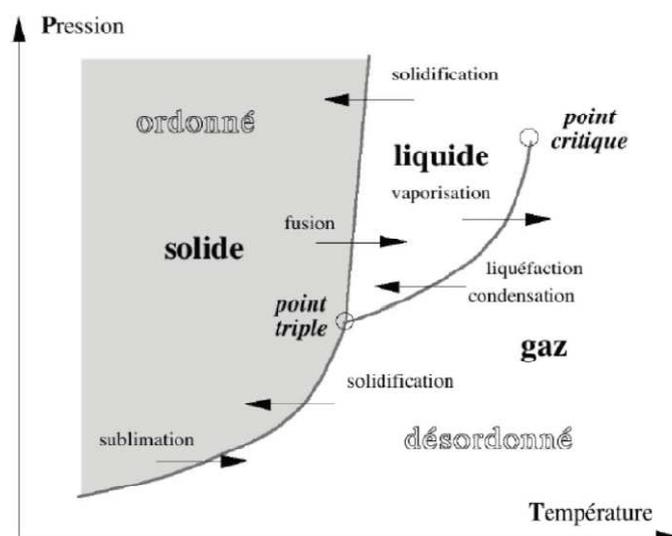
les atomes en place (mouvement de translation et de rotation). Un liquide peut s'écouler.



Le passage d'un état de la matière à un autre s'effectue par transition de phase lors d'un changement d'état thermodynamique provoqué par une modification de sa pression, de sa température et/ou de son volume. Les transformations de phase ou changements d'états sont :

- 1) Fusion : C'est la transformation de la matière de l'état solide à l'état liquide.
- 2) (Liquéfaction (condensation)) : C'est la transformation de l'état gazeux à l'état liquide.
- 3) Solidification (condensation ou déposition): C'est le passage de l'état gazeux à l'état solide
- 4) Gazéification (vaporisation) : C'est la transformation d'un liquide en vapeur.
- 5) Solidification : C'est l'inverse de la fusion .On l'appelle aussi congélation lorsque la transformation se réalise à basses températures).
- 6) Sublimation : C'est le passage de l'état solide à l'état gazeux.

Les transformations 1, 4 et 6 se font avec absorption d'énergie par contre, les transformations 2,5 et 3 s'accompagnent d'un dégagement de chaleur.



L'eau, par exemple, à  $T_0 = 273 \text{ }^\circ \text{K}$  et  $P_0 = 1 \text{ atm}$ , se trouve sous 3 états (les 3 phases solide, liquide et gazeuse sont présentes). C'est le point triple de l'eau dans le diagramme  $(P, T)$ .

### 1.1.2 Matière divisée (Dispersion, suspensions, émulsions)

Un fluide n'est jamais à l'état purement liquide ou gazeux, sa composition est en réalité un mélange de différentes matières dont l'une d'entre elles est principale et contenant les autres qui peuvent être à des proportions différentes. Un fluide peut être à deux phases coexistant en équilibre thermodynamique ou en état pur en présence de particules en bulles de gaz, en gouttelettes ou en corps solides avec existence d'interfaces multiples entre la phase continue (liquide) et la phase dispersée (particules).

#### 1.1.2.1 Dispersions :

Les dispersions sont des mélanges de particules très fines de taille inférieure à un  $\mu\text{m}$ . Ces particules sont souvent de forme colloïdale comme les argiles. Les dispersions ne sédimentent pas seules et ne peuvent pas être filtrées mais elles forment des mélanges chimiquement très sensibles à ce qui peut modifier la nature de leurs interactions. Une modification simple de propriété d'une solution peut affecter complètement le comportement inter-facial des particules, provoquant des variations brutales de comportement du mélange, par exemple, l'ajout de sel à un gel de cheveux peut le liquéfier.

#### 1.1.2.2 Suspensions

Les suspensions sont des mélanges de particules fines ou grosses de tailles supérieures à 1  $\mu\text{m}$ , généralement sans interaction entre elles. A l'inverse des dispersions, les suspensions sédimentent à des vitesses qui dépendent de la taille des particules et des conditions de dépôt et peuvent être filtrées mécaniquement. Les suspensions sont généralement peu sensibles aux variations chimiques du liquide. Le transport en suspension de particules fines (sable, limon, silt) peut se faire dans un cours d'eau.

#### 1.1.2.3 Emulsions

Le mélange de deux substances liquides en gouttelettes forme une émulsion. La plupart des liquides sont non miscibles. Le lait ou la mayonnaise sont des exemples d'émulsion de globules de graisse dans une phase aqueuse. La stabilité des émulsions est un problème important (coalescence des gouttelettes, séparation des phases). Les mousses sont des cas particuliers d'émulsion où les gouttelettes sont des bulles de gaz. Les chutes d'eau dans les cascades et l'écume des vagues sont des émulsions d'air dans de l'eau. Le phénomène de cavitation dans les conduites peut mener à la formation d'émulsions.

## 1.2 Fluide parfait et fluide réel

Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour

simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération.

### 1.3 Fluide Compressible et incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.). Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

### 1.4 Les caractéristiques d'un fluide

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques on a : la masse volumique, la densité et la compressibilité.

#### 1.4.1 Masse volumique

La masse volumique ou masse spécifique est la masse de l'unité de volume du corps considéré. Si  $m$  est la masse d'un volume  $V$  de fluide, la masse volumique s'écrit :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ordres de grandeur des masses volumiques (à 20 °C)

Eau (le standard liquide)	1 000 kg/m <sup>3</sup>
Huile	914 kg/m <sup>3</sup>
Mercure	13 400 kg/m <sup>3</sup>
Air (le standard gazeux)	1,2 kg/m <sup>3</sup> << $\rho_{\text{eau}}$

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante ;  
 $\rho_{\text{gaz}} \ll \rho_{\text{liquide}}$ .

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression. Pour un gaz parfait, l'équation d'état donne par :

$$\rho = \frac{P}{rT}$$

Où  $r$  est la constante massique des gaz parfaits  $r = \frac{R}{M}$  avec  $R = 8,314 \text{ J/mole } ^\circ\text{K}$  et  $M$  masse molaire du gaz.

### 1.4.2 Densité et poids spécifique

La densité d'un fluide est le rapport de la masse volumique à la masse volumique d'un fluide de référence. La densité est donc une grandeur adimensionnelle.

$$d = \frac{\text{masse volumique de fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

- pour les gaz  $\rho_{ref}$  est celle de l'air à  $T=0$  °C et à pression atmosphérique,  $\rho_{ref} = 1,29349 \text{ Kg/m}^3$
- pour les liquides et les solides  $\rho_{ref}$  est celle de l'eau à  $T=3,98$  °C et à pression atmosphérique,  $\rho_{ref} = 1000 \text{ Kg/m}^3$

Le poids spécifique représente la force de gravité agissant sur la masse par unité de volume. il s'écrit :

$$\omega = \frac{m \cdot g}{V} \Rightarrow \omega = \rho \cdot g \text{ [N/m}^3\text{]}$$

avec  $g$  l'accélération de la gravité.

### 1.4.3 Compressibilité isotherme

La propriété physique qui permet de faire la différence entre un liquide et un gaz est la compressibilité. Un liquide est un fluide occupant un volume déterminé, ou du moins ce volume ne peut varier que très peu, et seulement sous l'action de fortes variations de pression ou de température. Un gaz, au contraire, occupe toujours le volume maximal qui lui est offert: c'est un fluide essentiellement compressible (ou expansible).

La compressibilité traduit la diminution de volume en réponse à un accroissement de pression. Pour quantifier cet effet on introduit le coefficient de compressibilité isotherme défini par :

$$E = - \frac{dP}{\left(\frac{dV}{V}\right)} = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad [Pa^{-1}] \quad (\text{à température constante})$$

Où  $V = \frac{1}{\rho}$  est le volume massique [ $m^3/kg$ ].

#### Remarque :

- Un accroissement de pression entraîne une diminution de volume, et inversement ; d'où la nécessité de mettre un signe moins devant le coefficient de compressibilité.
- Pour une masse donnée de fluide, on peut aussi écrire :  $E = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$
- Le coefficient de compressibilité est l'inverse du module d'élasticité isostatique du milieu, généralement noté  $\chi$ , aussi appelé module de compressibilité. C'est une

variable intensive toujours positive, le volume du corps ne pouvant que diminuer, lorsqu'on augmente la pression.

Ordres de grandeur des compressibilités à 20 °C

Eau	$4,1 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Mercure	$4,4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Air	$\approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$

Pour un liquide la compressibilité est très faible. A l'inverse, pour un gaz, la compressibilité est grande.

Pour les gaz parfaits, on déduit de l'équation d'état des gaz parfaits :  $\chi = \frac{1}{p}$

## 1.5 Rhéologie d'un fluide

La rhéologie est une branche de la physique qui étudie l'écoulement ou la déformation des corps sous l'effet des contraintes qui leur sont appliquées, compte tenu de la vitesse d'application de ces contraintes ou plus généralement de leur variation au cours du temps.

### 1.5.1 Viscosité des fluides

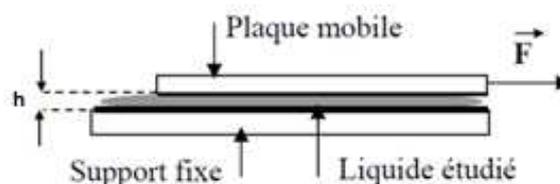
La viscosité se définit comme la résistance d'un fluide à sa mise en mouvement. Cette résistance est due principalement à l'interaction entre les molécules du fluide. Certains liquides coulent facilement, comme l'eau et l'alcool éthylique ; ils sont relativement peu visqueux. D'autre, par contre, comme les huiles épaisses, la glycérine et la mélasse, sont très visqueux et résistent d'avantage à l'écoulement. Dans le cas des gaz, la résistance à l'écoulement est particulièrement faible à cause de leur cohésion minimale.

### 1.5.2 Expérience de base

L'expérience représentée ci-dessous peut être réalisée simplement en prenant du miel au de l'huile pour boîte de vitesse).

On met un fluide entre deux plaques (l'une fixe, l'autre mobile) et l'on étudie la force  $\mathbf{F}$  qu'il faut appliquer pour déplacer la plaque mobile à une vitesse constante  $\mathbf{U}$ .

On fait varier l'épaisseur  $e$  de liquide et aussi la surface  $S$  de la plaque mobile.



L'expérience montre que  $F$  est proportionnel à  $U$  et  $S$ , mais inversement proportionnel à l'épaisseur  $h$  du liquide.

### 1.5.3 Viscosité dynamique

Les observations qui découlent de l'expérience décrite ci-dessus peuvent être traduites par une expression mathématique de la forme suivante :

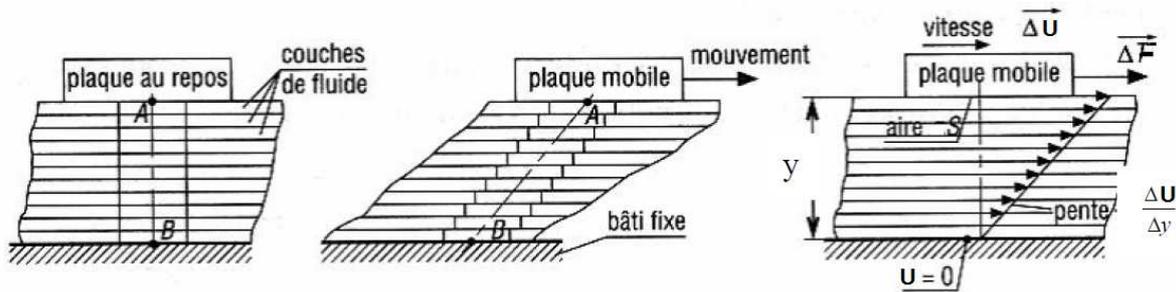
$$F = \mu \cdot S \cdot \frac{U}{h}$$

Le coefficient de proportionnalité  $\mu$  qui apparaît dans cette relation est appelé coefficient de viscosité dynamique.

Dans le Système International, la viscosité dynamique,  $\mu$ , a pour unité : [Kg/m.s] ou [Pa.s]. Dans le système CGS, l'unité est le poise [PI] où 1poise=1[g/cm.s].

**Remarque :**

En fait, lorsqu'un fluide s'écoule entre deux plaques ou dans un conduit, on peut modéliser la situation de la façon suivante : on imagine le liquide formé de couches très fines et parallèles d'épaisseur  $\Delta y$  (on prend un axe Oy perpendiculaire à la direction de la vitesse d'écoulement), entre deux couches successives il y a une différence de vitesse de déplacement notée  $\Delta U$ . Une force  $\Delta F$  dite de cisaillement est nécessaire pour maintenir cette différence de vitesse.



On suppose que pour ce modèle on peut appliquer la même relation que celle tirée de l'expérience précédente :

$$\Delta F = \mu \cdot S \cdot \frac{\Delta U}{\Delta y}$$

Le rapport  $\frac{\Delta U}{\Delta y}$  est la variation de vitesse perpendiculairement à la direction d'écoulement, on l'appelle aussi gradient de vitesse ou le taux de cisaillement.

Comme il est difficile de connaître la surface  $S$  qui subit la force de cisaillement, on préfère introduire la notion de contrainte de cisaillement  $\tau$  en [N.m<sup>-2</sup>] :

$$\tau = \frac{\Delta F}{A} \quad \text{donc} \quad \tau = \mu \cdot \frac{\Delta U}{\Delta y}$$

On rencontre parfois le terme de viscosité relative,  $\mu_r$ : c'est un nombre sans dimension qui est définie par le rapport de la viscosité dynamique d'un fluide (viscosité absolue) à la viscosité d'un fluide de référence  $\mu_0$ :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

#### 1.5.4 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique,  $\nu$ , est définie comme étant : la viscosité dynamique sur la masse volumique. Elle est exprimée comme suit :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

La viscosité cinématique,  $\nu$ , a pour unité dans le système SI : [m<sup>2</sup>/s] ; dans le système CGS, l'unité est le stokes ou 1 stokes = 1 [cm<sup>2</sup>/s].

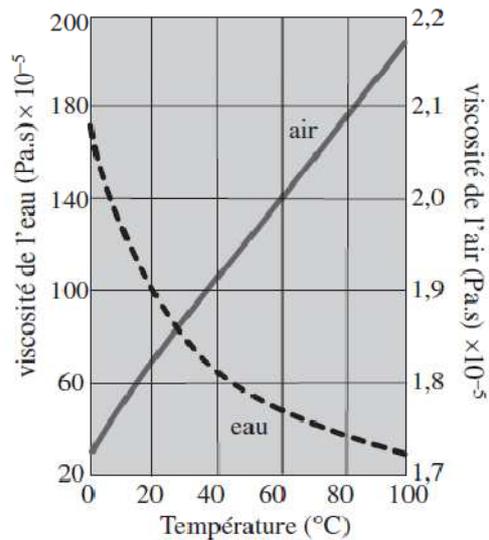
À titre d'exemple, les valeurs de viscosité dynamique et cinématique pour quelques fluides à la température ambiante (20 °C) sont :

fluide	viscosité dynamique $\mu$ [PI]	viscosité cinématique $\nu$ [m <sup>2</sup> /s]
glycérine	0,8	6,8 10 <sup>-4</sup>
huile	0,3	4 10 <sup>-4</sup>
alcool	1,2 10 <sup>-3</sup>	2,2 10 <sup>-6</sup>
eau	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-6</sup>
air	18 10 <sup>-6</sup>	15 10 <sup>-6</sup>

D'une manière générale, la viscosité dynamique  $\mu$  des liquides est beaucoup plus grande que celle des gaz, mais leur viscosité cinématique  $\nu$  peut être inférieure car les gaz ont une faible masse volumique.

#### 1.5.5 Variation de la viscosité en fonction de la température

Dans le cas des gaz, une augmentation de la température entraîne un mouvement plus intense des molécules et accroît le mélange moléculaire et donc la viscosité augmente. Dans le cas d'un liquide, lorsque la température augmente les molécules se séparent entre elles, décroissant l'attraction entre elles et donc la viscosité diminue. La relation entre la température et la viscosité est par conséquent inversée pour un gaz et un liquide.



Variation de la viscosité en fonction de la température.

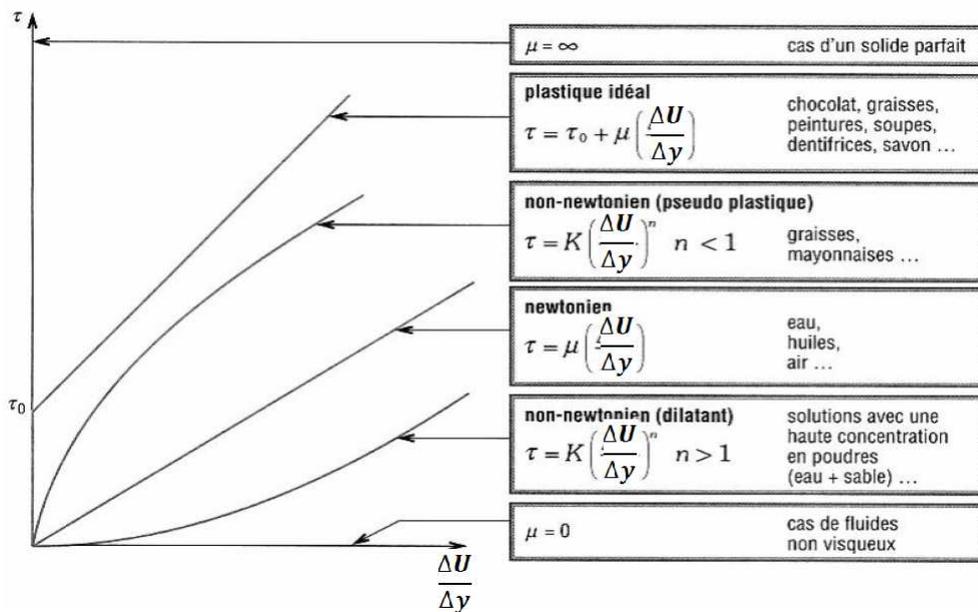
### 1.5.6 Les différents types de fluides

Les fluides peuvent être classés en trois grandes familles :

- les fluides viscoélastiques (par ex. : farines de blé, poudres diverses).
- les fluides dont les caractéristiques varient plus ou moins rapidement en fonction du temps (peintures, solution de plâtre...).
- les fluides dont les caractéristiques sont stables. Ces fluides peuvent présenter différents comportements caractérisés par la relation entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le gradient de vitesse  $\frac{\Delta U}{\Delta y}$  comme l'indique le tableau ci-dessous :

Deux grandes familles de fluides :

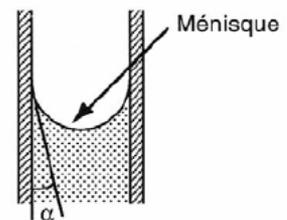
- les fluides newtoniens pour lesquels la viscosité  $\mu$  ne dépend pas de la contrainte de cisaillement  $\tau$  (ni du gradient de vitesse). Le graphe est donc une droite. C'est le cas des gaz, vapeurs, liquides purs, liquides de masse molaire faible, solutions peu concentrées... ;
- les fluides non-newtoniens pour lesquels  $\mu$  dépend de la contrainte de cisaillement  $\tau$ . Le tableau ci-dessous montre la grande variété des réactions possibles. C'est le cas des polymères, des purées, des gels, des boues, des pâtes, du sang, des peintures...). L'étude des propriétés de ces fluides constitue le domaine de la rhéologie.



### 1.6 Tension de surface d'un fluide

#### 1.6.1 Quelques observations simples

- La surface libre d'un liquide est plane et horizontale pourtant si l'on regarde la surface libre d'un liquide à l'intérieur d'un tube transparent (burette, tube à essai, pipette ...) on remarque la formation d'un "ménisque", le raccordement entre la surface libre air/liquide et la paroi ne se fait pas à angle droit.
- les bulles ou gouttes ont une forme sphérique ;
- film d'eau savonneuse qui se forme sur un anneau métallique trempé dans l'eau savonneuse ;
- on peut déposer à la surface de l'eau une aiguille ou une lame de rasoir sans qu'elle coule...
- la sève d'un arbre monte à des hauteurs considérables sans l'aide d'aucune pompe...

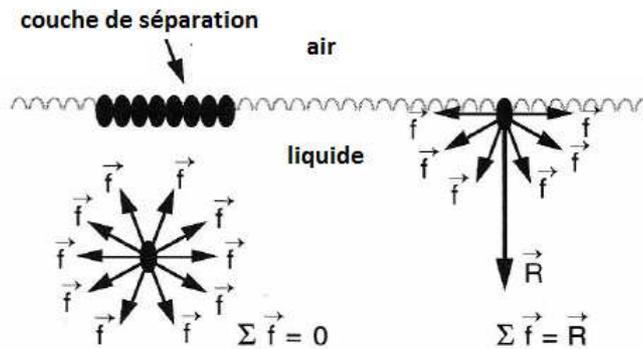


Toutes ces observations montrent que la surface de séparation entre deux fluides se comporte comme une sorte de membrane élastique.

#### 1.6.2 Origine de la tension superficielle

Si l'on considère une molécule au sein d'un liquide, elle est soumise à des forces intermoléculaires d'attraction exercées par les molécules voisines. La résultante de ces forces est nulle en moyenne. Pour une molécule proche de la surface de séparation liquide/air, cette résultante n'est plus nulle (puisque'il y a dissymétrie dans la répartition des molécules autour d'une molécule donnée) et elle est dirigée vers l'intérieur du liquide, perpendiculairement à la

surface de séparation. On peut estimer que l'épaisseur de cette couche de séparation varie de 1 à 100 nm. Cette couche agit donc comme une membrane qui comprime en quelque sorte le liquide. La forme sphérique des gouttes et des bulles est expliquée par ces forces dont l'intensité est d'autant plus importante que le rayon de la sphère est petit.



**1.6.3 Définition de la tension superficielle**

Prenons l'exemple d'une bulle d'eau savonneuse, elle peut être comparée à un ballon en caoutchouc : pour augmenter sa taille, donc sa surface, il faut fournir un certain travail, une certaine énergie  $\Delta W$  qui est proportionnelle à l'augmentation de la surface  $\Delta S$ .

Le coefficient de proportionnalité est appelé tension superficielle et notée " $\sigma$ ".

La définition de la tension superficielle est donc donnée par la relation :

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}$$

Pour simplifier encore, imaginons une surface rectangulaire (par exemple : membrane d'eau savonneuse limitée par un cadre en fil métallique de forme rectangulaire) dont l'un des côtés a une longueur  $L$ . Pour augmenter la surface de  $\Delta S$ , il faut exercer sur ce côté  $L$  une force d'intensité  $F$ .

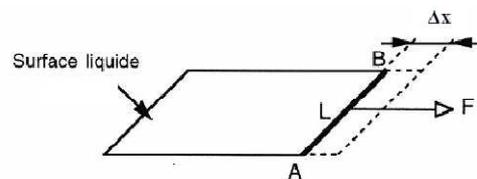
Le côté se déplaçant de  $\Delta x$ , la surface augmente de  $\Delta S = L \Delta x$ .

Le travail de la force  $\mathbf{F}$  est  $\Delta W = F \Delta x$ .

On peut donc écrire que :

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F \cdot \Delta X}{L \cdot \Delta X} = \frac{F}{L}$$

Situation simplifiée illustrant la définition de la tension superficielle :



$$\sigma = \frac{F}{L}$$

**Unité de la tension superficielle :**

La première formule de définition indique que la tension superficielle est donnée en  $J.m^{-2}$ , mais en pratique, c'est la deuxième formule qui sert de référence, l'unité de tension superficielle est donc officiellement le  $N.m^{-1}$ .

**1.6.4 Conséquences de l'existence de la tension superficielle**

**1.6.4.1 Formation de bulles**

Dans tous les cas de formation de bulles il faut que la pression à l'intérieur de la bulle soit plus grande que la pression à l'extérieur de la bulle. On peut démontrer que la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur est donnée par la relation suivante :

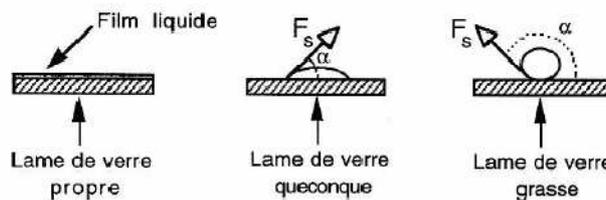
$$P_{int} - P_{ext} = \frac{2\sigma}{R} \quad (R = \text{rayon de la bulle en m})$$

**1.6.4.2 Contact entre liquide et solide : angle de raccordement**

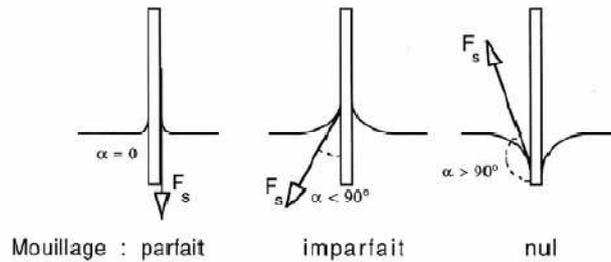
Lorsqu'on pose une goutte de liquide sur la surface d'un solide, on constate plusieurs situations :

- le liquide s'étale largement et forme une couche fine sur la surface, on dit que le liquide mouille parfaitement le solide.
- le liquide ne s'étale presque pas et il se forme un angle de raccordement  $\theta$  entre la surface du solide et celle du liquide. On dit que le liquide mouille imparfaitement le solide.
- le liquide reste pratiquement en "boule", l'angle de raccordement devient supérieur à  $90^\circ$ . On dit que le liquide ne mouille pas le solide

La formation d'un ménisque est la conséquence des deux dernières situations. Les figures ci-dessous illustrent les trois situations :



**Mouillage parfait, imparfait et nul :** pour des surfaces solides horizontales ou verticales (pour un liquide donné et une surface donnée, l'angle de raccordement est le même pour les deux orientations de la surface).

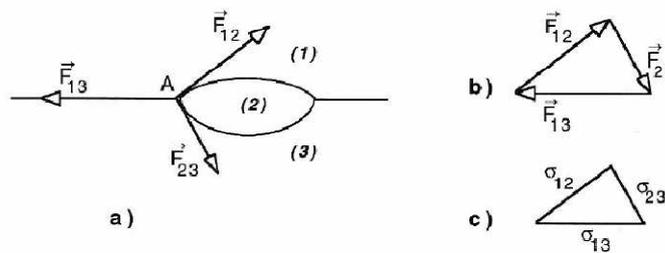


**Remarque :**

Lorsque plusieurs fluides sont en contact, comme le montre le schéma ci-dessous, le point A étant en équilibre, on peut dire que la somme vectorielle des forces en jeu est nulle.

C'est le cas par exemple d'une goutte d'huile (2) posée sur l'eau (3) avec de l'air (1) au-dessus.

On en déduit une relation entre les tensions superficielles ou interfaciales comme l'indique le schéma.



Si les valeurs des tensions superficielles ne permettent pas de faire cette construction, le liquide 2 ne formera pas une goutte mais s'étalera au maximum sur la surface du liquide 3 (benzène sur de l'eau par exemple).

**1.6.4.3 Ascension d'un liquide dans un tube capillaire : LOI de JURIN**

Lorsqu'on plonge un tube fin et ouvert dans un liquide, celui-ci "monte" dans le tube d'une certaine hauteur h. Il se forme également un ménisque. Au contact de la paroi, une force due à la tension superficielle s'exerce sur le liquide verticalement vers le haut. Cette force s'oppose au poids de la colonne de liquide au-dessus de la surface libre du liquide. Puisqu'il y a équilibre, on peut écrire la relation suivante :

$$2\pi r \cdot \sigma \cdot \cos\theta = \pi r^2 \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

Avec

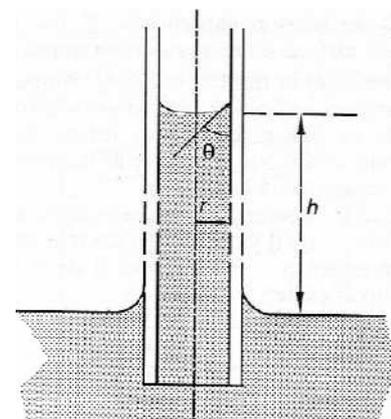
$\sigma$  tension superficielle [N/m]

r rayon du capillaire [m]

$\rho$  masse volumique [kg/m<sup>3</sup>]

$\theta$  angle de raccordement [rad]

h hauteur de l'ascension capillaire [m]



$$\text{donc } h = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos \theta}{r \cdot \rho \cdot g}$$

Cette relation est appelée Loi de Jurin.

Dans le cas où le liquide mouille parfaitement la paroi du capillaire, l'angle de raccordement est nul (c'est le cas de l'eau dans un capillaire en verre propre). La loi de Jurin est encore plus

simple :

$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{r \cdot \rho \cdot g}$$

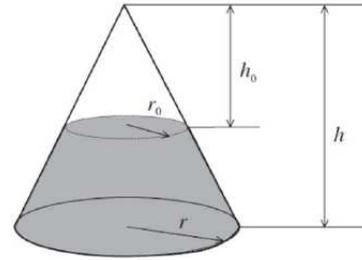
Donc l'ascension capillaire est d'autant plus importante que le tube est fin et que la masse volumique du liquide est faible.

**1.7 Applications**

**Exercice 01 :**

Trouver la hauteur de la surface libre si 0,02 m<sup>3</sup> d'eau sont remplies dans un réservoir de forme conique de hauteur  $h = 0,5$  m et de rayon à la base de  $r = 0,25$  m.

- Combien de quantité d'eau supplémentaire est nécessaire pour remplir entièrement le réservoir ?
- Si ce réservoir contient 30,5 kg d'huile, quelle est la masse volumique de cette huile ?



**Solution :**

$$V_{c\hat{o}ne} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 0,25^2 \times 0,5}{3} = 0,0327 \text{ m}^3$$

Donc le volume d'eau que l'on peut rajouter pour remplir entièrement le réservoir est  $(0,0327 - 0,02) = 0,0127 \text{ m}^3$ . À partir de la figure, on a :  $r_0/0,25 = h_0/0,5$ , donc  $r_0 = h_0/2$ .

Par conséquent :

$$V_{vide-haut\ c\hat{o}ne} = \pi \frac{\left(\frac{h_0}{2}\right)^2}{3} = 0,0127 \text{ m}^3$$

D'où  $h_0 = 0,364 \text{ m}$ . La surface libre serait à  $(0,5 - 0,364) = 0,136 \text{ m}$  de la base du cône.

La masse volumique correspondant à 30,5 kg d'huile est :

$$\rho_{huile} = \frac{m_{huile}}{V_{c\hat{o}ne}} = \frac{30,5}{0,0327} = 932,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

**Exercice 02 :**

Un récipient rigide en acier est rempli d'un liquide à 15 atm. Le volume du liquide est de 1,232 litre. A une pression de 30 atm, le volume du liquide est de 1,231 litre.

- Trouver le module d'élasticité du liquide pour la gamme de pressions données dans le cas isotherme ? Quel est alors le coefficient de compressibilité ?

**Solution :**

- le module d'élasticité est donné par l'équation :  $E = -\delta P / \delta V / V$

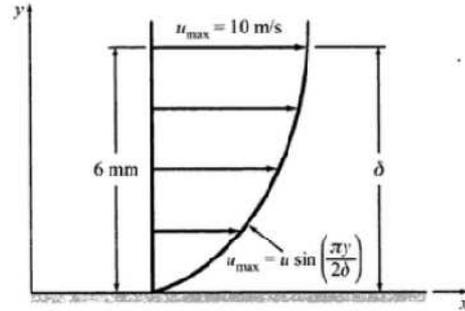
$$E = - \frac{(30 - 15) \times 101325}{1,231 - 1,232} / 1,232 = 1,872 \text{ GPa}$$

- le coefficient de compressibilité est donné par l'équation :  $\chi = \frac{1}{E} = \frac{1}{1,872} = 0,534 \text{ GPa}$

**Exercice 03 :**

Soit un écoulement d'air à 20 °C sur une plaque ayant une distribution de vitesse sinusoïdale  $u_{max} = u \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$ .

- Calculer le taux de cisaillement à  $y=0,3$  mm et  $y=0,6$  mm si la viscosité du fluide est égale à  $1,8 \cdot 10^{-5}$  Ns/m<sup>2</sup>.



**Solution :**

Soit la distribution de vitesse sinusoïdale suivante :  $u_{max} = u \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$

Le taux de cisaillement est donné par l'équation :

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} = \mu \cdot \pi \cdot \left(\frac{u}{2\delta}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

Avec  $\delta=6$  mm,  $\mu=1,8 \times 10^{-5}$  N.s/m<sup>2</sup>,  $u=10$  m/s. on obtient :

$$\tau(0) = 1,8 \times 10^{-5} \times \frac{\pi \times 10}{2 \times 0,006} \cos 0 = 0,047 \text{ Pa}$$

De même, on trouve :  $\tau(3 \text{ mm}) = 0,033 \text{ Pa}$

et  $\tau(6 \text{ mm}) = 0 \text{ Pa}$

**Exercice 04 :**

Un cylindre de rayon  $r_{int} = 0,12 \text{ m}$  tourne dans un autre cylindre de rayon  $r_{ext} = 0,13 \text{ m}$  qui lui est fixe. Les deux cylindres sont coaxiaux et de longueur  $L = 0,3 \text{ m}$ .

Déterminer la viscosité du liquide remplissant l'espace entre les cylindres si un couple de 0,88 N.m est requis pour maintenir une vitesse angulaire de  $\varpi = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ .

**Solution :**

Le couple s'écrit de la façon suivante :

$$C = \underbrace{\tau \cdot S}_{\text{force}} \cdot r = \tau \cdot (2\pi \cdot r \cdot L) \cdot r \Rightarrow \tau = \frac{C}{2\pi \cdot L \cdot r^2} = \frac{0,88}{2 \times \pi \times 0,3 \times r^2} = \frac{0,467}{r^2}$$

Or  $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$  et ici  $dy = -dr$  (car lorsque  $r \searrow, u \nearrow$ )

En intégrant, on obtient donc :

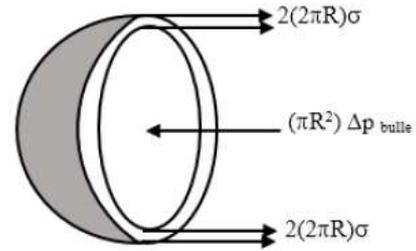
$$\int_{u_{ext}}^{u_{int}} (du) = \frac{0,467}{\mu} \int_{r_{ext}}^{r_{int}} \left(-\frac{dr}{r^2}\right) \Rightarrow u_{int} - u_{ext} = \frac{0,467}{\mu} \left[\frac{1}{r}\right]_{0,13}^{0,12}$$

Or  $u_{int} = \varpi r_{int} = 2\pi \times 0,12 = 0,754 \text{ m.s}^{-1}$  et  $u_{ext} = 0$

D'où :  $\mu = \frac{0,467}{0,754} \left[\frac{1}{0,12} - \frac{1}{0,13}\right] = 0,397 \text{ Pa.s}$

**Exercice 05 :**

Trouver la tension superficielle d'une bulle de savon de 40 mm de diamètre quand la pression interne est de 2,5 N/m<sup>2</sup> plus grande que la pression atmosphérique.



**Solution :**

$$\begin{aligned} \text{A l'équilibre on a : } \Sigma \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{F}_p + \vec{F}_\sigma = \vec{0} \\ &\Rightarrow F_p - F_\sigma = 0 \\ &\Rightarrow F_p = F_\sigma \end{aligned}$$

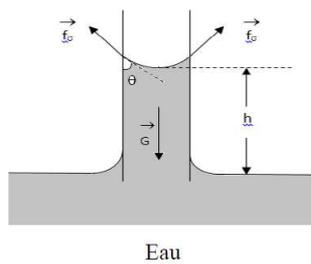
On a :  $F_p = \Delta P \cdot S = (P_{int} - P_{ext}) \cdot \pi \cdot R^2$  et  $F_\sigma = 2\sigma \cdot L = 2\sigma \cdot (2\pi R) = 4\sigma \cdot \pi \cdot R$

En égalant les deux forces, on retrouve :  $\sigma = \frac{\Delta P \cdot R}{4} = \frac{\Delta P \cdot d}{8}$

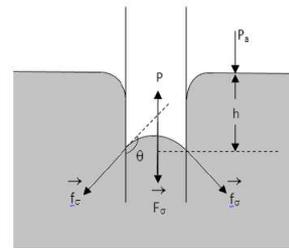
D'où :  $\sigma = \frac{40 \times 10^{-3} \times 2,5}{8} = 0,125 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$

**Exercice 06 :**

Calculer la hauteur capillaire dans un tube de verre de 2,5 mm de diamètre lorsqu'il est immergé verticalement dans : 1)- L'eau ; 2)- Mercure



Eau



Mercure

On prend :  $s = 0,0725 \text{ N/m}$  pour l'eau et  $s = 0,52 \text{ N/m}$  pour le mercure en contact avec l'air. La densité du mercure est égale à 13,6. L'angle de contact  $\theta$  de l'eau est égal à zéro et celui du mercure est égal à 130°. La gravité  $g$  est prise égale à 9,81 m/s<sup>2</sup>.

**Solution :**

A l'équilibre des forces on a :  $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G} + \vec{F}_\sigma = \vec{0} \Rightarrow G = F_\sigma \cdot \cos\theta$

Le poids de la colonne de liquide dans le tube est donné par :

$$G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g$$

et la force de tension superficielle est donné par :  $F_\sigma = \sigma \cdot L = \sigma \cdot 2\pi \cdot r$

En égalant les deux forces, on retrouve :  $h = \frac{4 \cdot \sigma \cdot \cos\theta}{d \cdot \rho \cdot g}$

pour l'eau :  $h = \frac{4 \times 0,0725 \times \cos 0}{10^3 \times 9,81 \times 2,5 \cdot 10^{-3}} = 11,8 \text{ mm}$

pour le mercure :  $h = \frac{4 \times 0,52 \times \cos 130}{13,6 \cdot 10^3 \times 9,81 \times 2,5 \cdot 10^{-3}} = -4 \text{ mm}$

## Chapitre 2 :

### Statique des fluides

#### Objectifs

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable :

- Démontrer la relation de l'hydrostatique ;
- Calculer la pression en tout point d'un fluide immobile ;
- Calculer les efforts exercés par un fluide au repos sur une surface indéformable ;
- Déterminer le point application de la résultante des efforts exercés.

Dans ce chapitre, on étudie l'hydrostatique (la statique des fluides) qui s'occupe les conditions d'équilibre des fluides au repos et l'interaction des fluides avec les surfaces et les corps solides immergés, on notera que les forces de frottement qui sont dues essentiellement à la viscosité ne se manifestent pas (pas d'écoulement) et l'étude reste valable pour les fluides réel.

## 2.1 Notion sur les pressions

### 2.1.1 Définition de la pression

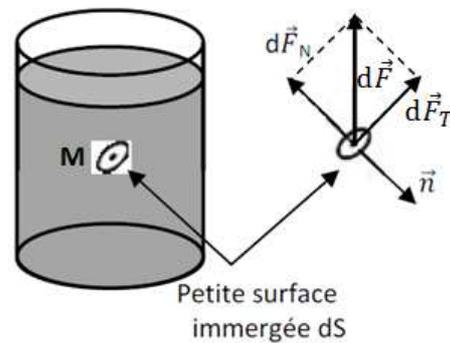
La pression est une grandeur scalaire, elle désigne la composante normale de la force par unité de surface qu'exerce le fluide sur un élément de surface  $dS$ .

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée  $S$ .

Considérons  $d\vec{F}$  la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire  $dS$ .

On peut toujours décomposer  $d\vec{F}$  en deux composantes:

- une composante  $d\vec{F}_T$  tangentielle à  $dS$ ;
- une composante  $d\vec{F}_N$  normale à  $dS$ .



La force tangentielle  $d\vec{F}_T$  n'apparaît qu'en dynamique des fluides visqueux : Elle correspond aux frottements visqueux des couches fluides en mouvement les unes par rapport aux autres et par rapport à la paroi de la conduite.

La force normale  $d\vec{F}_N$  est la force de pression élémentaire, elle s'exprime par :

$$d\vec{F}_N = -P \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Avec;  $dS$  : Elément de surface

$\vec{n}$  : Vecteur unitaire en  $M$  de la norme extérieur à la surface.

$d\vec{F}_N$  : Composante normale de la force élémentaire exercée sur l'élément de surface  $dS$ .

$P$  : La pression en  $M$  (Pascal).

D'où la pression est donnée par l'expression suivante :  $P = \frac{\|d\vec{F}_N\|}{dS}$

### 2.1.2 Unité pression

Dans le système international (SI), une pression s'exprime en Newton par mètre carré ( $N/m^2$ ), également appelé Pascal (Pa). Cette unité est la seule qui a une valeur légale, et la seule utilisée avec rigueur par la communauté scientifique.

Autres unités de pression :

On rencontre aussi des unités de pression anciennes (mais encore utilisées parfois), ou d'usage particulier à certaines disciplines :

- Le bar, vaut 105 Pa=100 kPa
- L'atmosphère (atm), vaut environ 1 bar : 1 atm = 1.01325 bar = 101.325 kPa
- Le mètre de colonne d'eau (mCE), égal à la pression qui règne sous un mètre d'eau sous gravité terrestre, vaut 9810 Pa
- Le millimètre de mercure (mmHg), vaut 133 Pa

### 2.1.3 Pression absolue et pression relative

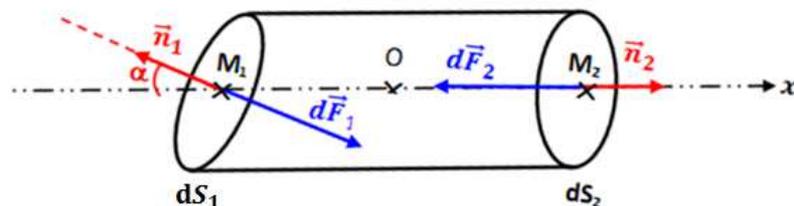
- La pression absolue est la pression réelle mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.
- La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

$$P_{relative} = P_{absolue} - P_{atmosphérique}$$

### 2.1.4 Pression en un point d'un fluide

Dans un fluide en équilibre la pression est indépendante de la direction, pour montrer cela, on prend un élément du liquide à une profondeur quelconque d'un réservoir plein de liquide ouvert à l'atmosphère.

Considérons un volume de fluide élémentaire de forme cylindrique. L'élément de fluide se trouve dans un fluide au repos (à l'équilibre). Le cylindre de fluide est centré sur l'axe  $Ox$ . Une seule de ses bases est orthogonale à l'axe  $Ox$ , l'autre fait un angle, avec l'axe (l'orientation de la surface est repérée grâce à la normale).



Le bilan des forces extérieures appliquées sur l'élément de fluide cylindrique est :

- Poids de l'élément fluide ;
- Forces de pression sur la paroi latérale de cylindre ;

Ces deux forces existent mais sont orthogonales à  $Ox$  donc leur projection est égale à 0. On ne les compte pas.

- Forces de pression sur les surfaces  $dS_1$  et  $dS_2$  :

$$d\vec{F}_1 = -P_1 \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_1$$

$$d\vec{F}_2 = -P_2 \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_2$$

Appliquons le principe fondamental de la statique ( $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ) à l'élément fluide cylindrique, en projection sur l'axe  $Ox$ , on obtient :

$$\|d\vec{F}_1\| \cos\alpha - \|d\vec{F}_2\| = 0 \quad (\text{projection sur l'axe}(Ox))$$

$$P_1 \cdot dS_1 \cdot \cos\alpha - P_2 \cdot dS_2 = 0$$

Comme les surfaces  $dS_1$  et  $dS_2$  sont liées par :  $dS_1 \cdot \cos\alpha = dS_2$

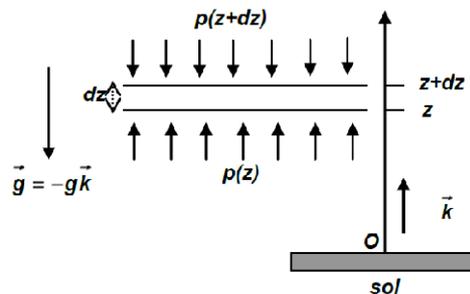
On en déduit alors :  $P_1 = P_2$ .

On conclure que :

- La pression  $P$  exercée sur une surface est indépendante de l'orientation de la surface considérée.
- La pression est la même en tout point d'un même plan horizontal d'un fluide en équilibre (surface isobare).

## 2.2 Loi fondamentale de statique des fluides

Dans le champ de pesanteur, on considère une tranche de fluide mince à l'altitude  $z$ , d'épaisseur  $dz$  et de section unité  $S$  en équilibre dans un référentiel  $R$  lié au sol supposé galiléen. L'axe des  $z$  est vertical ascendant.



L'équilibre de cette tranche est obtenu en faisant le bilan des forces extérieures exercées sur cette tranche :

- Les forces de surface, la pression agit sur la face supérieure et inférieure de l'élément.

Ces forces s'écrivent de la façon suivante :

- Force de pression sur la surface inférieure :

$$\vec{F}(z) = P(z) \cdot S \cdot \vec{k}$$

- Force de pression sur la surface supérieure :

$$\vec{F}(z + dz) = -P(z + dz) \cdot S \cdot \vec{k}$$

- Les forces de viscosité et de turbulence n'existent pas puisqu'il n'y a pas de vitesse relative entre les particules de fluide.

- Les forces de volume : il n'en existe qu'une seule la force de pesanteur. Elle s'écrit de la façon suivante :  $\vec{F} = -m \cdot g \cdot \vec{k} = -\rho \cdot g \cdot S \cdot dz \cdot \vec{k}$

Les forces d'inertie n'existent pas puisque le fluide est au repos (vitesse nulle).

L'écriture du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$P(z + dz) - P(z) + \rho \cdot g \cdot dz = 0$$

Si on pose :  $P(z + dz) - P(z) = dP$ , On en déduit que :

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dz$$

Pour obtenir la différence de pression entre deux points  $M_1$  à la hauteur  $Z_1$  et  $M_2$  à la hauteur  $Z_2$ , il suffit d'intégrer l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\int_1^2 dP = -\rho \cdot g \cdot \int_1^2 dz$$

On obtient :  $P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$

Ou bien :  $\frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 = \frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1$

Conclusion :

Pour tout point  $i$  quelconque, dans un liquide au repos, définie par son altitude  $Z_i$  par rapport à un plan de référence, on a :  $\frac{P_i}{\rho \cdot g} + z_i = C^{ste}$

C'est la relation fondamentale de la statique des fluides. Elle est encore appelée le principe de l'hydrostatique.

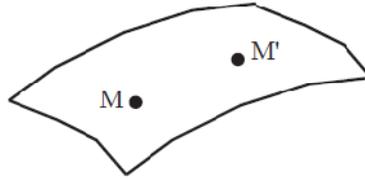
NB : L'équation générale de l'hydrostatique peut s'écrire en pression absolue ou en pression effective si  $P_1$  est effective alors  $P_2$  est effective, si  $P_1$  est absolue alors  $P_2$  est absolue.

**2.2.1 Conséquences et applications du principe de l'hydrostatique**

Comme conséquences immédiates de cette équation, on tire les propositions suivantes:

**2.2.1.1 Surface de niveau : surface isobare**

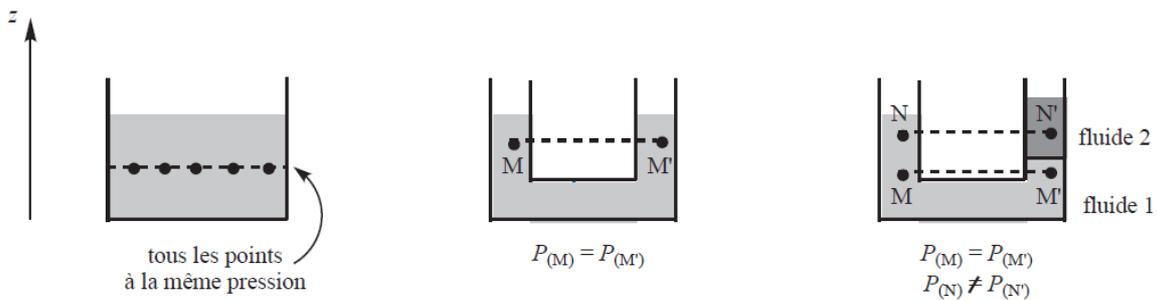
Une surface isobare est telle que la pression soit identique en chacun de ses points. Considérons deux points  $M$  et  $M'$  très voisins dans un même fluide, et soit  $dP_{M \rightarrow M'}$  la variation de pression quand on va de  $M$  à  $M'$ . Cette variation de pression est très petite car les deux points sont très voisins.



Si  $M$  et  $M'$  sont sur une surface isobare, alors la variation de pression quand on va de l'un à l'autre est nulle par définition. Dans le cas d'un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur, l'équation locale de la statique des fluides implique alors :

$$dP_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot dz_{M \rightarrow M'} = 0 \Rightarrow dz_{M \rightarrow M'} = 0$$

Ce qui revient à dire que  $M$  et  $M'$  sont à la même altitude. Dans un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur, les surfaces isobares sont des plans horizontaux. En d'autres termes, en deux points à la même altitude dans un même fluide, la pression est la même ; c'est le cas des points sur une horizontale dans les dispositifs à gauche et au centre ci-dessous.



Dans le dispositif à droite, qui comporte deux liquides différents, il y a égalité des pressions sur une horizontale au sein d'un même fluide ( $P_{(M)} = P_{(M')}$ ), mais pas dans deux fluides différents ( $P_{(N)} \neq P_{(N')}$ ).

**2.2.1.2 Pression pour des fluides non miscibles superposés**

On considère deux fluides (I) et (II) non miscibles (ex. eau et huile), de masse volumique  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , dans un même récipient et soient deux points A et B de la surface de séparation supposée (par l'absurde) non horizontale :

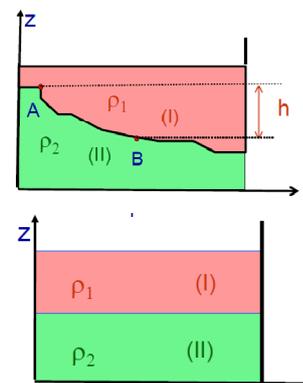
$$\left. \begin{array}{l} \text{dans le fluide I, } P_B - P_A = \rho_1 \cdot g \cdot h \\ \text{dans le fluide II, } P_B - P_A = \rho_2 \cdot g \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_1 \cdot g \cdot h = \rho_2 \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow g \cdot h \cdot (\rho_1 - \rho_2) = 0$$

Or  $g \neq 0$  et  $(\rho_1 - \rho_2) \neq 0$  donc :  $h = 0$

Conclusion (puisque  $h=0$ ) :

La surface de séparation de deux liquides non miscibles au repos est horizontale. Et puisque  $\rho_1 - \rho_2 > 0 \Rightarrow \rho_1 > \rho_2$   
Et par la suite le fluide (II) le plus lourd est en dessous.



**2.2.2 Instruments de mesure de la pression**

**2.2.2.1 Baromètre de Torricelli (Manomètre à mercure)**

Le baromètre ne sert qu'à mesurer la pression atmosphérique. Le premier baromètre a été inventé par l'italien Evangelista Torricelli en 1644. Il remplit de mercure un tube de verre d'un mètre de long, ferme à une extrémité. Il le retourne et le plonge dans une cuvette remplie de mercure. Il constate alors que le niveau de mercure dans le tube s'abaisse, laissant un espace de vide au-dessus de lui. Il vient de découvrir la pression atmosphérique.

La  $P_{atm}$  est obtenue en mesurant la hauteur  $h$  de Hg :  $h = 76 \text{ cm}$

Principe de la statique entre  $A$  et  $B$  :

$$P_A + \rho_m g z_A = P_B + \rho_m g z_B \Rightarrow P_{atm} = P_{vide} + \rho_m g (z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow P_{atm} = P_{vide} + \rho_m g h$$

$$\Rightarrow P_{atm} = 0 + 13600 * 9.8 * 0.76$$

$$\Rightarrow P_{atm} = 101292 \text{ Pa}$$

Au niveau de la mer :  $P_{atm} = 1 \text{ atm} = 1,0133.105 \text{ Pa}$ , soit 762 mm de Hg.

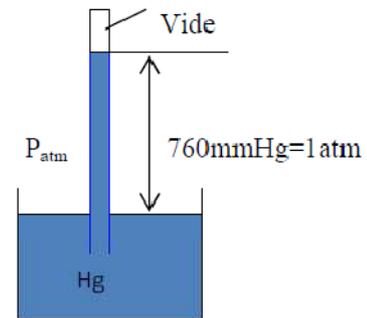


Fig. 12 : Baromètre

**2.2.2.2 Le tube manométrique simple ou piézomètre**

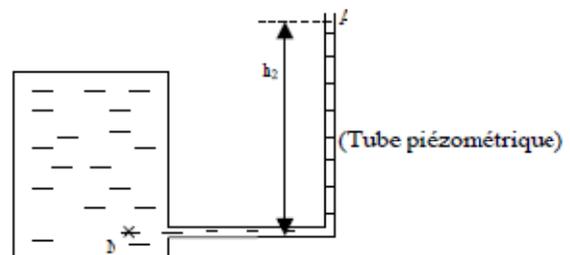
Le piézomètre est l'instrument de mesure de la pression le plus simple, c'est un tube raccorde au point où on veut déterminer la pression. C'est un dispositif utilise uniquement pour la mesure des pressions des Liquides et non les gaz.

Soit  $B$  un point d'un liquide en équilibre dont on veut mesurer la pression.

La pression en  $B$  est donnée par :

$$P_B = P_A + \rho g h_2$$

$P_A$  et  $P_B$  sont appelées « Pressions Manométriques » et  $h_2$  est appelé « Hauteur Manométrique ».



**2.2.2.3 Le tube manométrique en forme de « U »**

Il s'agit d'un dispositif utilise pour la mesure des pressions dans les liquides et les gaz.

Soit un réservoir contenant un liquide (1) de masse volumique  $\rho_l$ , un tube en U est relié à celui-ci contenant un liquide (2) (appelé liquide manométrique) de masse volumique  $\rho_m$ .

Déterminer la pression effective en A ?

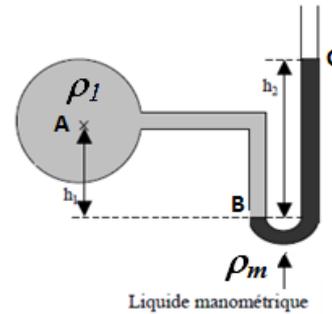
Principe de la statique entre A et B :

$$P_A + \rho_1 g z_A = P_B + \rho_1 g z_B \Rightarrow P_A = P_B - \rho_1 g h_1$$

Principe de la statique entre B et C :

$$P_B + \rho_m g z_B = P_C + \rho_m g z_C \Rightarrow P_B = P_C + \rho_m g h_2$$

et  $P_C = P_{atm} \Rightarrow P_A = P_{atm} + \rho_m g h_2 - \rho_1 g h_1$

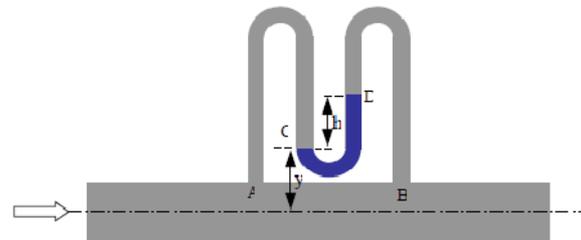


Si le fluide (1) est un gaz, sa densité est négligeable devant celle du liquide manométrique.

**2.2.2.4 Le manomètre différentiel**

C'est un tube raccorde entre deux point ou en veut déterminer la différence de pression ou hauteur piézométrique, il peut être à un seul liquide avec valve d'entrer d'air, ou a deux liquides.

Exemple : Un manomètre différentiel est fixé entre deux sections A et B d'un tuyau horizontal où s'écoule de l'eau. La dénivellation du mercure dans le manomètre est h, le niveau le plus proche de A étant le plus bas.



Déterminer la différence de pression entre les sections A et B ?

Principe de la statique entre A et C :

$$P_A + \rho g z_A = P_C + \rho g z_C \Rightarrow P_A = P_C + \rho g y$$

Principe de la statique entre C et D :

$$P_C + \rho_m g z_C = P_D + \rho_m g z_D \Rightarrow P_C = P_D + \rho_m g h$$

Principe de la statique entre D et B :

$$P_D + \rho g z_D = P_B + \rho g z_B \Rightarrow P_D = P_B - \rho g (h+y)$$

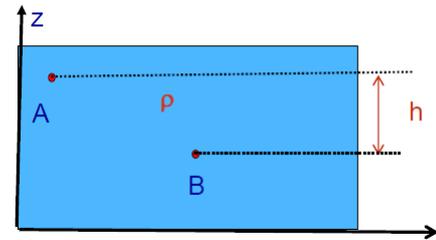
Donc :  $P_A - P_B = g h (\rho_m - \rho)$

**2.3 Théorème de Pascal : transmission de pression**

Le théorème de Pascal s'énonce comme suit : dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point. Cette loi a des applications extrêmement importantes en hydraulique.

Soient deux points A et B (fixes) du fluide, fluide incompressible: On a  $P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h$   
Et puisque g est considérée constante, donc la différence de pression ne dépend que de la différence d'altitude (h), qui demeure constante, donc : toute variation de pression en A se transmet en B.

Si : A subit une variation de pression  $dP: P_A \rightarrow P_A + dP$   
 Donc, B subit la même variance de pression :  $P_B \rightarrow P_B + dP$



Exemples d'applications: Vérin hydraulique, Frein de voiture, .....

**2.3.1 Application : Vérin hydraulique**

Un vérin hydraulique est basé sur le fait qu'un liquide au repos transmet intégralement la pression et pas les forces.

Cette figure montre un vérin rempli d'huile fermé par deux bouchons étanches de surface  $S_A$  et  $S_B$ .

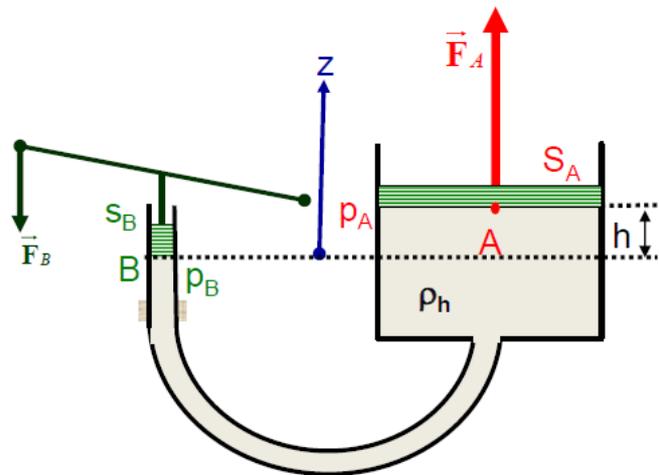
On a:  $P + \rho \cdot g \cdot z = C^{ste}$

On peut définir les variables :

Entre A et B :  $P_B = P_A + \rho_h \cdot g \cdot h$

Comme les pressions en A et B ( $P_A=P_B$ ) sont proches (car h est supposé petit), on a :  $F_A = P_A \cdot S_A$  et  $F_B = P_B \cdot S_B$

Et puisque:  $S_A \gg S_B$  alors  $F_A \gg F_B$



La presse multiplie la force  $F_1$  par  $S_2/S_1$ . On obtient ainsi une très forte force. Avec un tel vérin un mécanicien peut soulever à la main une voiture ou un avion pour changer une roue de secours.

Remarque :

Par contre avec un tel système les travaux sont égaux en effet :

$W_{F2} = F_2 \cdot \Delta L_2 = P_2 \cdot S_2 \cdot \Delta L_2$  et  $W_{F1} = F_1 \cdot \Delta L_1 = P_1 \cdot S_1 \cdot \Delta L_1$

Fluide incompressible, donc :  $S_2 \cdot \Delta L_2 = S_1 \cdot \Delta L_1$  et puisque :  $P_1 = P_2$

On donc :  $W_{F2} = W_{F1}$ . La presse ne multiplie pas l'énergie.

**2.4 Forces s'exerçant sur une surface immergée (forces hydrostatiques)**

La poussée hydrostatique sur une paroi provient des forces de pressions du fluide agissant sur cette surface.

La caractérisation de la pression du fluide sur la surface dépend de:

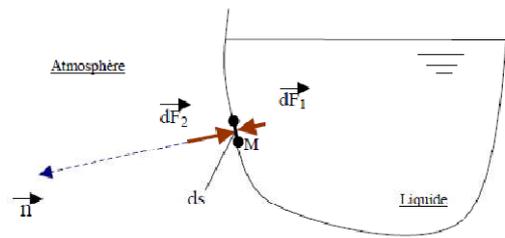
- Force de poussée hydrostatique ( $\vec{F}$ ): Les forces élémentaires  $dF$ , exercées sur la paroi, sont toutes parallèles et admettent donc une résultante  $\vec{F}$  normale à la paroi.

- Centre de poussée ( $D$ ) : C'est le point d'application de la résultante de la force de poussée  $\vec{F}$  sur la surface de contact  $S$ .
- Le barycentre ( $C$ ) : C'est le centre de gravité de la surface immergée de la paroi.

**2.4.1 Force de pression élémentaire sur une paroi**

Soit un élément de surface  $dS$ , centré sur le point  $M$ , à la profondeur  $z$  au-dessous de la surface libre d'un liquide (incompressible) et  $\vec{n}$  la normale sortante de la paroi. On note  $P_0$  la pression atmosphérique.

L'élément de surface est soumis aux deux forces élémentaires  $d\vec{F}_1$  (action du liquide sur la paroi) et  $d\vec{F}_2$  (action de l'extérieur sur la paroi). Les deux forces sont normales à  $dS$ .



- Expression de la pression au point  $M$  :

$$\Delta P = -\rho \cdot g \cdot \Delta Z \Rightarrow P_M - P_A = \rho \cdot g \cdot (Z_A - Z_M)$$

$$\Rightarrow P_M = P_0 + \rho \cdot g \cdot z \text{ avec } P_A = P_0$$

- Expression de la résultante des forces de pression sur  $dS$  :

- bilan des forces appliquées sur  $dS$  :

1)- force pression exercée par le liquide sur  $dS$  :

$$d\vec{F}_1 = P_M \cdot d\vec{S} = (P_0 + \rho \cdot g \cdot z) \cdot d\vec{S} = (P_0 + \rho \cdot g \cdot z) \cdot dS \cdot \vec{n}$$

2)- force de pression exercée par l'extérieur sur  $dS$  :

$$d\vec{F}_2 = -P_0 \cdot d\vec{S} = -P_0 \cdot dS \cdot \vec{n}$$

- résultante des forces de pression élémentaires exercées sur  $dS$  :

$$d\vec{F}_{paroi} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 \Rightarrow d\vec{F}_{paroi} = \rho \cdot g \cdot z \cdot dS \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_{paroi} = P \cdot dS \cdot \vec{n} \text{ (uniquement l'action du liquide)}$$

La résultante des forces de pression ne tient compte que de l'action du liquide.

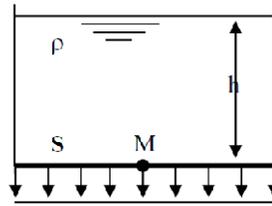
**2.4.2 Forces de pression sur une plaque plane horizontale**

Considérons un réservoir ouvert à l'air libre de sa surface supérieure, de surface de base  $S$  contenant une hauteur  $h$  de liquide de masse volumique  $\rho$ .

Sur une surface horizontale, la pression est uniforme sur toute la surface  $P = \rho \cdot g \cdot h$ , alors :

$$F = \int P \cdot dS \Rightarrow P = \int (\rho \cdot g \cdot h) \cdot dS$$

$$\Rightarrow P = \rho \cdot g \cdot h \cdot \int dS$$



D'où :  $P = \rho \cdot g \cdot h \cdot S$

La force de pression appliquée sur une paroi horizontale, est égale au poids d'une colonne liquide verticale.

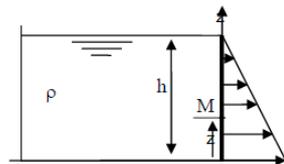
### 2.4.3 Forces de pression sur une plaque plane verticale

La force de pression en un point  $M$  quelconque de la surface verticale  $S$  d'épaisseur  $L$  est :

$$F = \int dF = \int P \cdot dS$$

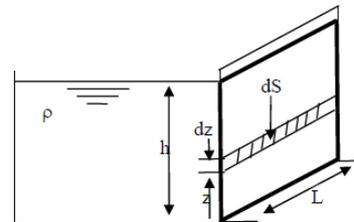
Où  $dF = \rho \cdot g \cdot z \cdot dS$  et  $dS = L \cdot dz$

Alors ;  $F = \int_0^h \rho \cdot g \cdot z \cdot L \cdot dz \Rightarrow F = \rho \cdot g \cdot L \int_0^h z \cdot dz$



$$\Rightarrow F = \rho \cdot g \cdot L \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

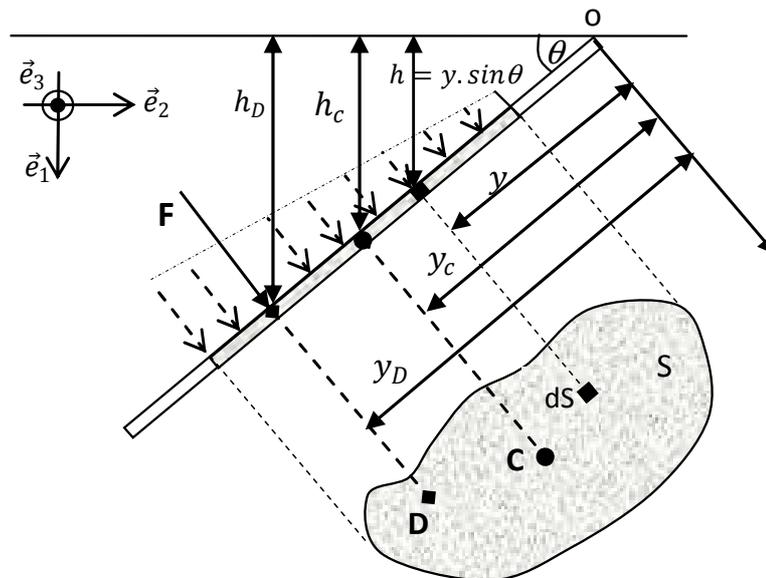
D'où :  $F = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{h^2}{2}$  et  $S = L \cdot h$



Donc :  $F = \rho \cdot g \cdot S \cdot \frac{h}{2}$

### 2.4.4 Forces de pression sur une plaque plane oblique

Soit une paroi  $AB$  de surface  $S$  plane de forme quelconque immergée dans un liquide  $\rho$  et inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale et  $C$  son barycentre.



Considérons la force élémentaire  $dF$  s'exerçant sur une surface élémentaire  $dS$  :

$$dF = P \cdot dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS = \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin\theta \cdot dS$$

D'où  $h = y \cdot \sin\theta$

$F = \int dF$  sur toute la surface  $AB$ , on obtient :

$$F = \int_S P \cdot dS = \int_S \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin\theta \cdot dS = \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot \int_S y \cdot dS$$

Le terme  $\int_S y \cdot dS$  représente le Moment Statique de la surface  $AB$  par rapport à  $Ox$ , qui est défini comme suit :

$$\int_S y \cdot dS = y_c \cdot S$$

avec  $y_c$  : Ordonnée du barycentre de la surface  $AB$ .

L'expression de  $F$  devient :  $F = \rho \cdot g \cdot y_c \cdot \sin\theta \cdot S$

### 2.4.5 Cas général (formule pratique)

En général, la résultante des forces de pression sur une surface plane s'écrit :

$$F = \rho \cdot g \cdot d \cdot S$$

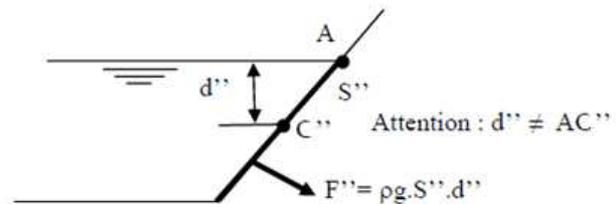
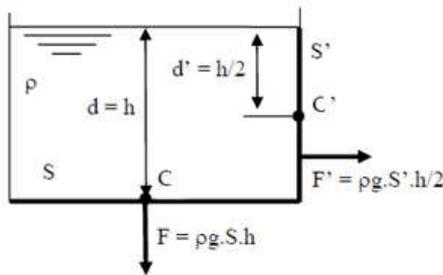
Avec :

$S$  : Surface mouillée considérée (en contact avec le liquide).

$d$  : distance entre le centre de gravité de  $S$  et la surface libre.

$D$  : le point d'application de la résultante de la force de poussée  $F$  sur la surface de contact  $S$  :

- Pour une paroi horizontale :  $d = h$
- Pour une paroi verticale :  $d' = h/2$
- Pour une paroi *Inclinée* :  $d'' = y_c \cdot \sin\theta$



Donc, la force de pression sur une surface plane est égale au produit de la surface immergée par la pression qui subit son barycentre.

### 2.4.6 Centre de poussée

Le centre de poussée est le point d'application de la résultante de la force de poussée  $\vec{F}$  sur la surface de contact  $S$ . Il se détermine par le calcul du moment de la force  $F$  par rapport a un point  $O$  quelconque.

Choisissons le au niveau de la surface libre du fluide,  $OD$  est défini par :

$$\vec{OD} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

ou:  $M$  est le point qui balaye toute la surface  $S_{AB}$ .

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot S = \rho \cdot g \cdot y_c \cdot \sin\theta \cdot S; OM = y_c; dF = \rho \cdot g \cdot y_c \cdot \sin\theta \cdot dS; OD = y_D$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} \wedge \vec{F} &= \int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} \Rightarrow \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot y_c \cdot S \cdot y_D \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} = \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot \int_S y_c^2 \cdot dS \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} \\ \Rightarrow y_D &= \frac{\int_S y_c^2 \cdot dS}{y_c \cdot S} \end{aligned}$$

Le terme  $\int_S y_c^2 \cdot dS$  représente le Moment d'inertie de la surface  $AB$  par rapport à  $Ox$ , qui est défini comme suit :  $\int_S y_c^2 \cdot dS = I_{Ox}$

ou :  $I_{Ox}$  est le moment d'inertie de la surface  $AB$  par rapport l'axe  $Ox$ .

Pour les calculs, on remplace le  $I_{Ox}$  par le  $I_{cx}$  ( $I_{cx}$  est le moment d'inertie de la surface  $AB$  par rapport à un axe passant par son barycentre  $C$  : Connu pour des formes géométriques particulières), à cet effet, on utilise le théorème de Huygens dans la mécanique théorique, ce théorème nous permet d'écrire que :  $I_{Ox} = I_{cx} + y_c^2 \cdot S$

Dans ce cas, on aura donc :  $y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c \cdot S}$  ou  $y_D \cdot \sin\theta = h_D$

Le centre de poussée de la résultante  $F$  se trouve toujours plus bas que le barycentre.

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

Forme	$S, x_c, y_c, I_{Ox}, I_{cx}$
	$S = h \cdot b, x_c = b/2, y_c = h/2$ $I_{Ox} = b \cdot h^3/3, I_{cx} = b \cdot h^3/12$
	$S = h \cdot b / 2, x_c = (a + b)/3, y_c = h/3$ $I_{Ox} = b \cdot h^3/12, I_{cx} = b \cdot h^3/36$
	$S = \pi \cdot r^2, x_c = r, y_c = r$ $I_{Ox} = 5\pi \cdot r^4/4, I_{cx} = \pi \cdot r^4/4$

**2.5 Applications**

**Exercice 01 :**

Calculer la pression absolue en Pa à une profondeur de 6m au-dessous de la surface libre d'une masse d'eau et trouver la pression absolue quand le baromètre affiche 760 mm de mercure (densité 13,57).

**Solution :**

Pression absolue = pression atmosphérique + pression due à 6 m d'eau

$$\text{Pression atmosphérique} = \rho_m \cdot g \cdot h_m = d_m \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h_m$$

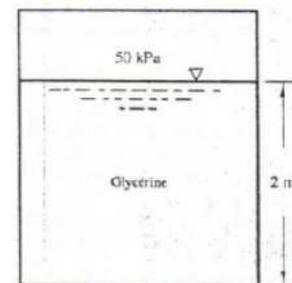
$$\text{Pression atmosphérique} = 13,57 \times 1000 \times 9,807 \times 0,760 = 101141,5524 \text{ Pa}$$

$$\text{Pression due à 6 m d'eau} = \rho_{eau} \cdot g \cdot h_{eau} = 1000 \times 9,807 \times 6 = 58842 \text{ Pa}$$

$$\text{Pression absolue} = 101141,5524 + 58842 = 159983,5524 \text{ Pa} = 159,984 \text{ KPa} = 1,6 \text{ bar}$$

**Exercice 02 :**

Trouver la pression au fond d'un réservoir contenant de la glycérine sous pression. La densité de la glycérine est 1,262.



**Solution :**

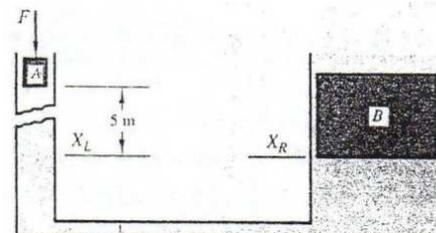
$$P = \text{pression au fond} = 50 \times 10^3 + \rho_{glycérine} \cdot g \cdot h_{glycérine}$$

$$P = 50 \times 10^3 + d_{glycérine} \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h_{glycérine}$$

$$P = 50 \times 10^3 + 1,262 \times 1000 \times 9,807 \times 2 = 74752,868 \text{ Pa} = 74,75 \text{ KPa} = 0,748 \text{ bar}$$

**Exercice 03 :**

Dans la ci-contre, les surfaces des cylindres A et B sont respectivement de 40 et 4000 cm<sup>2</sup> et B a une masse de 4000 kg. Le récipient et les conduites sont remplis d'huile de densité  $d = 0,75$ .



En négligeant le poids du cylindre A, déterminer la force  $F$  qui assurera l'équilibre.

**Solution :**

Déterminons d'abord la pression agissant sur le piston A :

Puisque  $X_L$  et  $X_R$  sont au même niveau dans le même liquide, alors Pression en  $X_L$  = pression en  $X_R$ .

$$\text{Pression en } X_L = \text{Pression sous A} + \text{pression due a 5 m d'huile} = P_A + d_{huile} \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h$$

$$\text{Et Pression en } X_R = \frac{\text{poids de B}}{\text{Surface de B}} = \frac{m_B \times g}{\text{Surface de B}}$$

$$\text{Pression en } X_L = \text{pression en } X_R \Rightarrow P_A + d_{huile} \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h = \frac{m_B \times g}{\text{Surface de B}}$$

AN :

$$P_A + 0,75 \times 1000 \times 9,807 \times 5 = \frac{4000 \times 9,807}{0,4} \Rightarrow P_A + 36776,25 = 98070$$

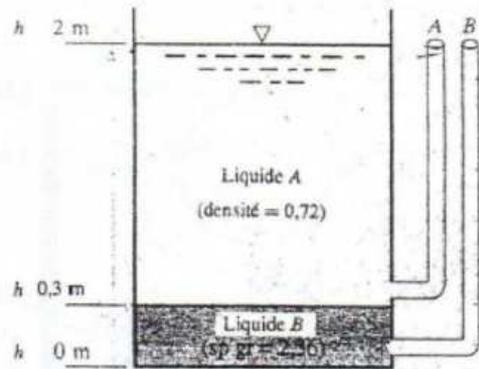
$$\Rightarrow P_A = 61293,75 \text{ Pa}$$

Force  $F = P_A \times S_A = 61293,75 \times 4 \times 10^{-3} = 245,175 \text{ N}$

**Exercice 04 :**

La figure ci-contre représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles A et B de densité de 0,72 et 2,36 respectivement.

Trouver : La hauteur de la surface liquide dans piézomètre A, la hauteur de la surface liquide dans piézomètre B et la pression totale dans le fond du réservoir.



**Solution :**

- La hauteur de la surface liquide dans le piézomètre A :

Le liquide A s'élèvera, dans le piézomètre A, à la même hauteur que le liquide A dans le réservoir  $\Rightarrow h = 2 \text{ m}$ .

- La hauteur de la surface liquide dans le piézomètre B :

Le liquide B s'élèvera, dans le piézomètre B, à la hauteur 0,3 m (pression exercée par le liquide B) plus une hauteur additionnelle  $h'_A$  due à la pression  $P_A$  du liquide A :

$$P_A = \rho_A \cdot g \cdot h_A = d_A \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h_A = 0,720 \times 1000 \times 9,807 \times (2 - 0,3) = 12003,77 \text{ Pa}$$

La hauteur additionnelle  $h'_A$  due à la pression  $P_A$  du liquide A :

$$P_A = \rho_B \cdot g \cdot h'_A$$

$$\Rightarrow h'_A = \frac{P_A}{\rho_B \cdot g} = \frac{P_A}{d_B \cdot \rho_{eau} \cdot g} = \frac{12003,77}{2,36 \times 1000 \times 9,807} = 0,519 \text{ m}$$

Le liquide B s'élèvera, dans le piézomètre B, à la hauteur  $0,3 + 0,519 = 0,819 \text{ m}$

- La pression au fond

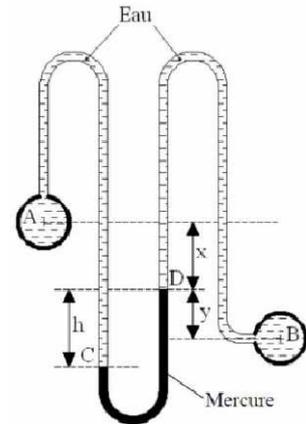
$$P = \rho_A \cdot g \cdot h_A + \rho_B \cdot g \cdot h_B = d_A \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot d_A + d_B \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h_B$$

$$P = (0,720 \times 1000 \times 9,807 \times 1,7) + (2,36 \times 1000 \times 9,807 \times 0,3) = 0,19 \text{ bar}$$

**Exercice 05 :**

Les récipients *A* et *B* contiennent de l'eau aux pressions respectives de 2,80 et 1,40 bar.

Calculer la dénivellation *h* du mercure du manomètre différentielle. On donne :  $x + y = 2$  m et la densité du mercure  $d = 13,57$ .



**Solution :**

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points *A* et *C* on trouve :

$$P_C - P_A = \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_A - Z_C) \Rightarrow P_C = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (h + x)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points *C* et *D* on trouve :

$$\begin{aligned} P_C - P_D &= \rho_{mercure} \cdot g \cdot (Z_D - Z_C) \Rightarrow P_D = P_C + \rho_{mercure} \cdot g \cdot h = P_C + d_{mercure} \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h \\ \Rightarrow P_D &= P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (h + x) - d_{mercure} \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot h \\ \Rightarrow P_D &= P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot x + \rho_{eau} \cdot g \cdot h \cdot (1 - d_{mercure}) \end{aligned}$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points *D* et *B* on trouve :

$$\begin{aligned} P_B - P_D &= \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_D - Z_B) \Rightarrow P_B = P_D + \rho_{eau} \cdot g \cdot y \\ \Rightarrow P_B &= P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot x + \rho_{eau} \cdot g \cdot h \cdot (1 - d_{mercure}) + \rho_{eau} \cdot g \cdot y \\ \Rightarrow P_B &= P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (x + y) + \rho_{eau} \cdot g \cdot h \cdot (1 - d_{mercure}) \\ \Rightarrow h &= \frac{P_B - (P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (x + y))}{\rho_{eau} \cdot g \cdot (1 - d_{mercure})} \end{aligned}$$

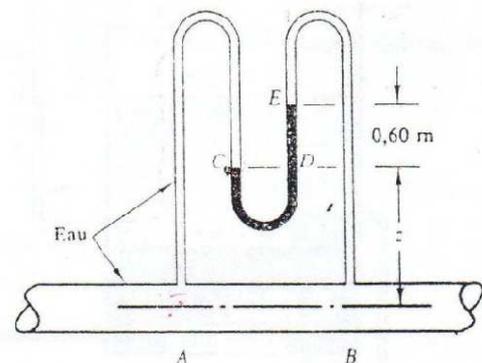
AN :

$$h = \frac{1,4 \times 10^5 - (2,8 \times 10^5 + 1000 \times 9,807 \times 2)}{1000 \times 9,807 \times (1 - 13,57)} = 1,295 \text{ m}$$

**Exercice 06 :**

Un manomètre différentiel est fixé entre deux section *A* et *B* d'un tuyau horizontal où s'écoule de l'eau. La dénivellation du mercure dans le manomètre est de 0,60 m, le niveau le plus proche de *A* étant le plus bas.

Calculer la différence de pression en Pa entre les sections *A* et *B* ( $d_{mercure} = 13,57$ ).



**Solution :**

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points A et C on trouve :

$$P_A - P_C = \rho_{eau} \cdot g \cdot z \quad (1)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points C et E on trouve :

$$P_C - P_E = \rho_{mercure} \cdot g \cdot (Z_E - Z_C) \Rightarrow P_C - P_E = 0,6 \cdot d_{mercure} \cdot \rho_{eau} \cdot g \quad (2)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points E et B on trouve :

$$P_B - P_E = \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_E - Z_b) \Rightarrow P_B - P_E = \rho_{eau} \cdot g \cdot (z - 0,6) \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow (P_A - P_C) + (P_C - P_E) - (P_B - P_E) \\ = (\rho_{eau} \cdot g \cdot z) + (0,6 \cdot d_{mercure} \cdot \rho_{eau} \cdot g) - (\rho_{eau} \cdot g \cdot (z + 0,6))$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = \rho_{eau} \cdot g \cdot z + 0,6 \cdot d_{mercure} \cdot \rho_{eau} \cdot g - \rho_{eau} \cdot g \cdot z - 0,6 \cdot \rho_{eau} \cdot g$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = 0,6 \cdot d_{mercure} \cdot \rho_{eau} \cdot g - 0,6 \cdot \rho_{eau} \cdot g$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = 0,6 \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot (d_{mercure} - 1)$$

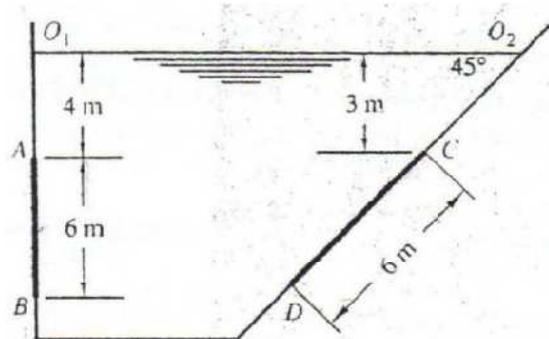
AN :

$$P_A - P_B = 0,6 \times 1000 \times 9,807 \times (13,57 - 1) = 73964,394 \text{ Pa}$$

**Exercice 07 :**

Le barrage de la figure ci-contre comporte deux portes d'évacuation d'eau AB et CD. Sachant que la porte en AB forme une surface rectangulaire de largeur  $l=3 \text{ m}$  et la porte CD forme une surface triangulaire de base 4 m. Le sommet du triangle est en C.

Calculer la force résultante due à l'action de l'eau sur les deux surfaces et la profondeur du centre de poussée.



**Solution :**

1)- La surface AB (surface rectangulaire):

La résultant des forces  $F = \rho \cdot g \cdot d \cdot S$  avec  $d$  est la distance entre le centre de gravité de  $S_{AB}$  et la surface libre.

Le centre de gravité d'un rectangle:  $h_c = \frac{AB}{2}$  donc  $d = \frac{AB}{2} + 4 = \frac{6}{2} + 4 = 7 \text{ m}$

et

$$S = AB \cdot l = 6 \times 3 = 18 \text{ m}^2$$

donc

$$F = 10^5 \times 9,81 \times 7 \times 18 = 123606000 \text{ N}$$

Le centre de poussée :  $y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c \cdot S}$  avec  $I_{cx} = \frac{l \cdot AB^3}{12}$  et  $y_c = d$  (plan vertical) = 7 m

donc  $y_D = 7 + \frac{3 \times 6^3 / 12}{7 \times 18} = 7,43 \text{ m}$

2)- La surface CD (surface triangulaire):

La résultant des forces  $F = \rho \cdot g \cdot d \cdot S$  avec  $d$  est la distance entre le centre de gravité de  $S_{CD}$  et la surface libre.

Le centre de gravité d'un triangle :  $h_c = \frac{2}{3} \cdot CD$  donc  $d = \frac{2}{3} \cdot CD \cdot \sin 45 + 3 = \frac{2}{3} \times 6 \times \sin 45 + 3 = 5,83 \text{ m}$

et  $S = \frac{b \cdot AB}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12 \text{ m}^2$

donc  $F = 10^5 \times 9,81 \times 5,83 \times 12 = 68612244,11 \text{ N}$

Le centre de poussée :  $y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c \cdot S}$  avec  $I_{cx} = \frac{l \cdot CD^3}{36}$

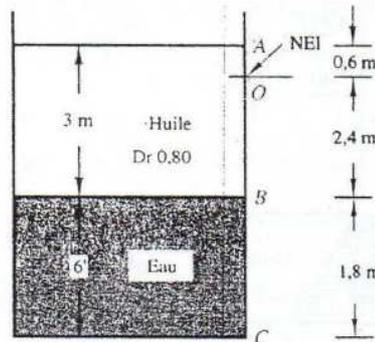
et  $y_c = \frac{d}{\sin 45}$  (plan incliné) =  $\frac{((2 \cdot CD \cdot \sin 45) / 3) + 3}{\sin 45} = 8,2426 \text{ m}$

donc  $y_D = 8,2426 + \frac{4 \times 6^3 / 36}{8,2426 \times 12} = 8,49 \text{ m}$ .

**Exercice 08 :**

Le réservoir de la figure ci-contre contient de l'huile et de l'eau.

Déterminer la force résultante agissant sur le cote ABC qui à 1,20 m de large et la profondeur du centre de poussée.



**Solution :**

La force totale agissant sur ABC vaut  $(F_{AB} + F_{bc})$ .

1)- la force  $F_{AB} = \rho \cdot g \cdot d \cdot S_{AB} = \frac{(0,8 \times 10^3)}{\rho} \times 9,81 \times \frac{3}{2} \times \frac{(3 \times 1,2)}{S_{AB}}$

et  $F_{AB} = 42379,2 \text{ N}$

D'où

$F = 58 870 \text{ N}$

$F_{AB}: y_{D_{AB}} = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c \cdot S_{AB}}$  avec  $I_{cx} = \frac{l \cdot AB^3}{12}$

et  $y_c = d = 1,5 \text{ m}$

donc  $y_{D_{AB}} = 1,5 + \frac{1,2 \times 3^3 / 12}{1,5 \times (3 \times 1,2)} = 2 \text{ m}$

2)- la force  $F_{BC}$ : l'eau agit sur la surface BC et n'importe quel liquide superposé peut être

converti en une hauteur d'eau équivalente. Employons un niveau d'eau imaginaire (NEI) pour ce deuxième calcul ; on positionne ce NEI en transforme 3m d'huile en  $h'$  d'eau :

A l'interface entre les deux liquides la pression est  $P = \rho_{huile} \cdot g \cdot AB = \rho_{eau} \cdot g \cdot h'$

Alors  $h' = \frac{\rho_{huile} \cdot AB}{\rho_{eau}} = D_r \cdot AB = 0,8 \times 3 = 2,4 \text{ m}$

La force  $F_{BC} = \rho_{eau} \cdot g \cdot d \cdot S_{BC}$  et  $d = \frac{BC}{2} + h'$

Donc  $F_{BC} = 10^3 \times 9,81 \times \left(\frac{1,8}{2} + 2,4\right) \times \underbrace{(1,8 \times 1,2)}_{S_{BC}} = 69925,68 \text{ N}$

Le point d'application de la force  $F_{BC}$ :  $y_{DBC} = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c \cdot S_{BC}}$  avec  $I_{cx} = \frac{l \cdot BC^3}{12}$  et  $y_c = d = \frac{1,8}{2} + 2,4 = 3,3 \text{ m}$

donc  $y_{DBC} = 3,3 + \frac{1,2 \times 1,8^3 / 12}{3,3 \times (1,8 \times 1,2)} = 3,38 \text{ m de O}$  soit  $0,6 + 3,38 = 3,98 \text{ m de A}$

3)- la force totale résultante  $F = F_{AB} + F_{BC} = 42379,2 + 69925,68$   
 et  $F = 112304,88 \text{ N} = 112,3 \text{ kN}$

Le point d'application de la force totale  $F$ :

Le moment de cette force totale = la somme des moments de ses deux composantes.  
 Utilisant A comme axe, par commodité :

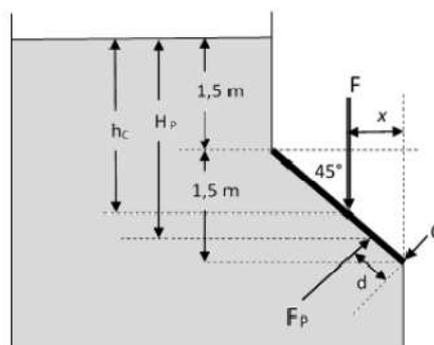
$$F \cdot y_D = F_{AB} \cdot y_{DAB} + F_{BC} \cdot y_{DBC/A} \Rightarrow y_D = \frac{F_{AB} \cdot y_{DAB} + F_{BC} \cdot y_{DBC/A}}{F}$$

$$\Rightarrow y_D = \frac{42379,2 \times 2 + 69925,68 \times 3,98}{112304,88}$$

et  $y_D = 3,23 \text{ m de A}$ .

**Exercice 09 :**

Un clapet incliné pivote autour du point O.  
 Si la largeur du clapet est de 1,2 m et que sa masse est de 2000 kg, déterminer la force verticale qui doit être appliquée au centre pour assurer la fermeture.



**Solution :**

Le point d'équilibre critique est donné lorsque la somme des moments de force par rapport au point O est nulle :

$$(F \times x) + (F_{gravité} \times x) - (F_p \times d) = 0$$

Déterminons d'accord la valeur de  $x$  et de  $F_{gravité}$  :

$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{0,75}{x} = 1 \text{ d'où } x = 0,75 \text{ m}$$

De plus,  $F_{gravité} = m \times g = 2000 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2$

$$F_{gravité} = 19620 \text{ N}$$

Etablissons ensuite les valeurs de la surface et de la profondeur du centre de surface afin de pouvoir calculer la force de pression :

$$\sin 45 = 1,5/b = 0,707$$

Où b représente la hauteur de la porte :

On a :  $b = 2,12$  ;  $S = 2,12 \times 1,20 = 2,54 \text{ m}^2$  ;  $h_c = 1,50 + 0,75 = 2,25 \text{ m}$

Alors  $F_p = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 2,25 \text{ m} \times 2,54 \text{ m}^2$

$$F_p = 56064 \text{ N}$$

Déterminations maintenant le moment d'inertie pour pouvoir calculer  $y_D$  :

$$y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c \cdot S} \text{ avec } I_{cx} = \frac{l \cdot b^3}{12} \text{ et } y_c = \frac{h_c}{\sin 45} = \frac{2,25}{\sin 45} = 3,18 \text{ m}$$

$$y_D = 3,18 + \frac{1,2 \times 2,12^3 / 12}{3,18 \times 1,2 \times 2,12} = 3,3 \text{ m}$$

$d = y - y_D$  avec  $y = \frac{1,5+1,5}{\sin 45} = 4,24 \text{ m}$

donc  $d = 4,24 - 3,3 = 0,94 \text{ m}$

Revenons maintenant à notre équation de départ pour trouver la dernière inconnue, la force F :

$$F = \frac{(F_p \times d) - (F_{gravité} \times x)}{x} = \frac{(56064 \times 0,94) - (19620 \times 0,75)}{0,75}$$

D'où  $F = 58\,870 \text{ N}$

## Chapitre 3 :

# Dynamique des fluides incompressibles parfaits

### Objectifs

Au terme de ce chapitre l'étudiant doit être capable :

- D'écrire l'équation de continuité,
- De calculer les débits massique et volumique,
- D'appliquer le théorème de Bernoulli,
- D'énoncer le théorème d'Euler et d'évaluer les efforts d'interaction d'un fluide avec un obstacle.

La dynamique des fluides concerne l'étude des fluides en mouvement. Il s'agit d'une partie importante du génie des procédés car la majorité des opérations nécessite le transport de fluides ou la réalisation de mélanges fluide-fluide ou fluide-solide. Ce chapitre vise à aborder les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits (on ne tiendra pas compte des effets de viscosité  $\mu = 0$  et  $\rho = \text{cte}$ ), en particulier :

- L'équation de continuité (conservation de la masse),
- Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)
- Le théorème d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement) à partir du quel, on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

## 4.1 Notions générales sur l'écoulement

### 4.1.1 Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement du fluide est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement. Autrement dit, les dérivées partielles par rapport au temps des grandeurs physiques sont nulles ( $\partial/\partial t = 0$ ). C'est-à-dire que :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})$$

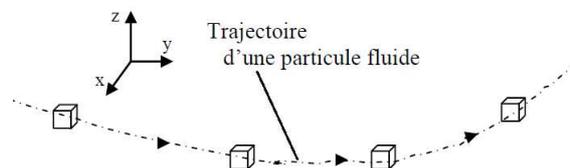
$$u = u(x, y, z); v = v(x, y, z); w = w(x, y, z)$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non-permanent ou instationnaire.

### 4.1.2 Trajectoire et lignes de courant

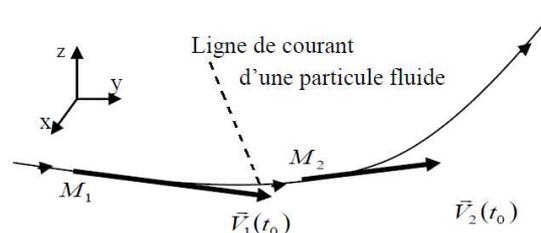
#### 4.1.2.1 Trajectoire

On appelle trajectoire la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est-à-dire l'ensemble de ses positions occupées successivement entre deux instants.

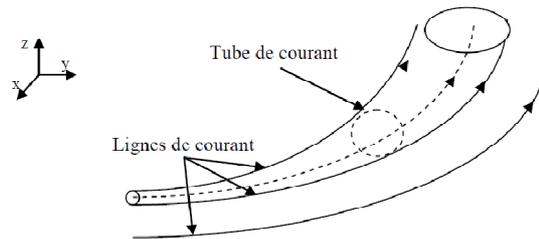


#### 4.1.2.2 Ligne de courant

C'est la courbe tangente en tout point de l'espace au vecteur vitesse, à un instant donné.



Un tube de courant (Veine fluide) est l'ensemble des lignes de courants s'appuyant sur un contour fermé.



Remarque :

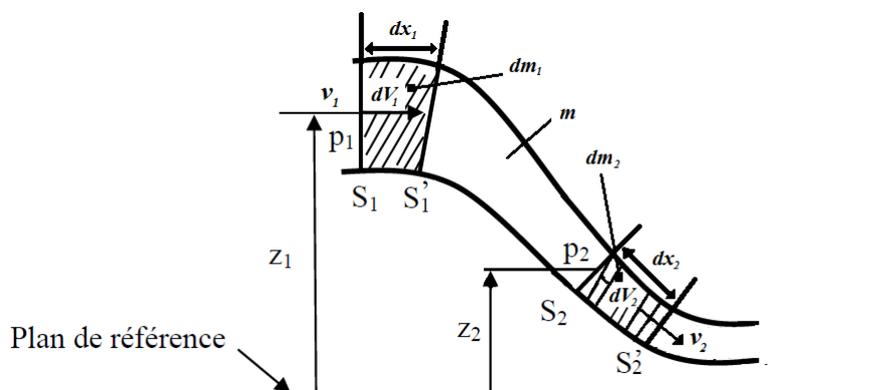
En écoulement permanent, la ligne de courant et la trajectoire se coïncident.

### 4.2 Equation de continuité ou conservation de la masse

Considérons un fluide parfait (liquide), qui s'écoule en régime stationnaire dans la canalisation ci-dessous.

On désigne par :

- $S_1$  et  $S_2$  respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l' instant  $t$ ,
- $S'_1$  et  $S'_2$  respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l' instant  $t' = t + dt$ ,
- $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement a travers les sections  $S_1$  et  $S_2$ .
- $dx_1$  et  $dx_2$  respectivement les déplacements des sections  $S_1$  et  $S_2$  pendant l'intervalle de temps  $dt$ ,
- $dm_1$  : masse élémentaire entrante comprise entre les sections  $S_1$  et  $S'_1$ ,
- $dm_2$  : masse élémentaire sortante comprise entre les sections  $S_2$  et  $S'_2$ ,
- $m$  : masse comprise entre  $S_1$  et  $S_2$ ,
- $dV_1$  : volume élémentaire entrant compris entre les sections  $S_1$  et  $S'_1$ ,
- $dV_2$  : volume élémentaire sortant compris entre les sections  $S_2$  et  $S'_2$ ,



A l'instant  $t$  : le fluide compris entre  $S_1$  et  $S_2$  a une masse égale à  $(dm_1 + m)$ ,

A l'instant  $t + dt$  : le fluide compris entre  $S'_1$  et  $S'_2$  à une masse égale à  $(m + dm_2)$ .

Par conservation de la masse :

$$dm_1 + m = m + dm_2$$

En simplifiant par  $m$ , on obtient :  $dm_1 = dm_2$

Donc,  $\rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2$

Ou encore :  $\rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2$

En divisant par  $dt$ , on aboutit à :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$$

Puisque le fluide est incompressible :  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

On obtient l'équation de continuité de la sorte :

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

Cette relation représente le débit volumique  $Q$  exprimé en ( $m^3/s$ ). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

### 4.3 Débit masse et débit volume

#### 4.3.1 Débit masse

Le débit massique  $q_m$  est la masse élémentaire  $dm$  de fluide qui traverse une surface droite élémentaire  $dS$  pendant un intervalle de temps  $dt$ .

Donc :

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

En tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

$$q_m = \rho \cdot v_1 \cdot S_1 = \rho \cdot v_2 \cdot S_2$$

Soit dans une section droite quelconque  $S$  de la canalisation à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne  $v$  :

$$q_m = \rho \cdot v \cdot S$$

Où :

$q_m$ : Débit massique en [ $kg/s$ ] ;

$\rho$  : Masse volumique en [ $kg/m^3$ ] ;

$S$  : Section de la veine fluide en [ $m^2$ ] ;

$v$  : Vitesse moyenne du fluide à travers  $S$  en [ $m/s$ ].

#### 4.3.2 Débit volumique

Le débit volumique  $Q_v$  est le volume élémentaire  $dV$  de fluide qui traverse une surface droite élémentaire  $dS$  pendant un intervalle de temps  $dt$ .

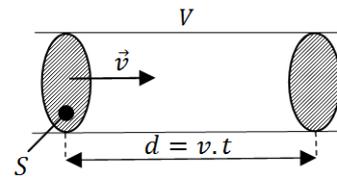
$$Q_v = \frac{dV}{dt}$$

Où :

$dt$  : Intervalle de temps en secondes [s] ;

$dV$  : Volume élémentaire, en [m<sup>3</sup>], ayant traversé une surface  $S$  pendant un intervalle de temps  $dt$  ;

$Q_v$  : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite, en [m<sup>3</sup>/s].



On peut également écrire le débit volumique en fonction de la vitesse d'écoulement:

$$Q_v = \frac{dV}{dt} = S \cdot \frac{dx}{dt} = S \cdot v$$

### 4.3.3 Relation entre débit massique et débit volumique

La masse volumique  $\rho$  est donnée par la relation :

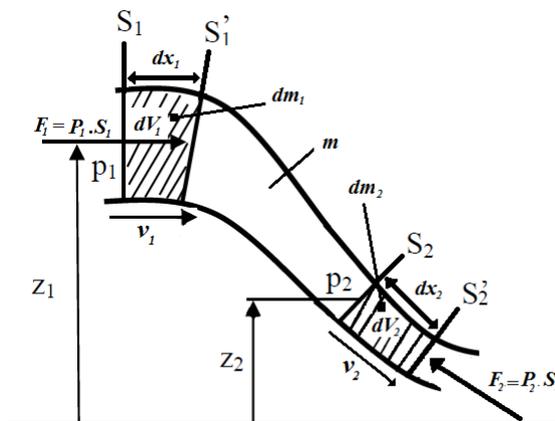
$$\rho = \frac{dm}{dV} \text{ d'où } q_m = \rho \cdot Q_v$$

### 4.4 Théorème de Bernoulli

Soit un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible dans une conduite. Les deux sections  $S_1$  et  $S_2$  délimitent à l'instant  $t$  une certaine masse de fluide.

On note  $Z_1$  et  $Z_2$  respectivement les hauteurs des centres de gravité des masses  $dm_1$  et  $dm_2$ . On désigne par  $F_{p1}$  et  $F_{p2}$  respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections  $S_1$  et  $S_2$ .

A l'instant  $(t + dt)$ , cette masse se déplace et se trouve entre deux sections  $S'_1$  et  $S'_2$ . On a donc  $dm = dm_1 = dm_2$



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à  $dm$  (La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures) :

$$\Rightarrow \Delta E_c(dm) = \sum W_{1 \rightarrow 2}$$

La variation de l'énergie cinétique :  $\Delta E_C(dm) = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot (v_2^2 - v_1^2)$

Travail de force de pesanteur :  $W_p = (z_1 - z_2) \cdot g \cdot dm$

Travail des forces intérieures est nul car le fluide est parfait ( $\mu = 0$ )

Travail des forces de pression : Sur  $S_1$  :  $W_{P1} = F_{P1} \cdot x_1 = P_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt$

Sur  $S_2$  :  $W_{P2} = -F_{P2} \cdot x_2 = -P_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt$

Sur surface latérale :  $W_{PL} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot dm \cdot (v_2^2 - v_1^2) = P_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt - P_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt + (z_1 - z_2) \cdot g \cdot dm$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = P_1 \cdot \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt - P_2 \cdot \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt + (z_1 - z_2) \cdot \rho \cdot g \cdot dm$$

Or, d'après l'équation de conservation du débit :  $dm = \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt$

Donc ;  $\frac{1}{2} \cdot dm \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = P_1 \cdot dm - P_2 \cdot dm + (z_1 - z_2) \cdot \rho \cdot g \cdot dm$

On aboutit à l'équation de Bernoulli :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

$$\Rightarrow P + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = Cte \text{ en [Pa]}$$

Les termes de cette équation sont des énergies par unité de volume [ $J/m^3$ ], ce sont aussi des termes de pression [Pa].

En effet,  $1 J/m^3 = 1 Nm/m^3 = 1 N/m^2 = 1 Pa$

Donc le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie par unité de volume.

- $P$  : Pression statique : C'est la grandeur que l'on mesure par exemple par un manomètre ou l'énergie potentielle de pression/ unité de volume.
- $\rho \cdot g \cdot z$  : Energie potentielle de position par unité de volume
- $\frac{1}{2} \rho \cdot v^2$  : Energie cinétique par unité de volume ou pression dynamique
- La quantité  $\left( P + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \right)$  est appelée aussi la charge du fluide.

#### 4.4.1 Autres formes du théorème de Bernoulli

- En divisant l'expression  $P + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = Cte$  par  $\rho \cdot g$ , on obtient :

$$z + \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{P}{\rho \cdot g} = Cte \text{ en [m]}$$

Tous les termes sont des hauteurs unité le mètre [m] ou de l'énergie par unité de poids ( $J/N = N \cdot m / N = m$ ).

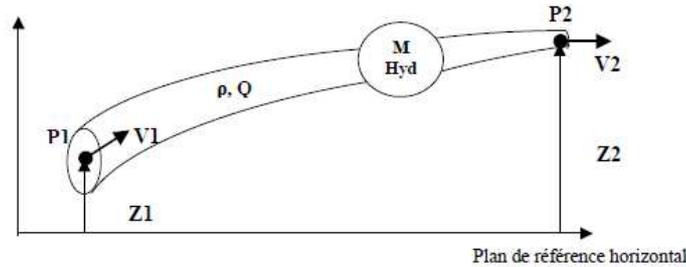
- En divisant toute l'expression par  $\rho$ , on obtient :

$$\frac{1}{2}v^2 + g \cdot z + \frac{P}{\rho} = Cte \quad \text{en [J/kg]}$$

Tous les termes sont des énergies par unité de masse.

**4.4.2 Equation de Bernoulli avec échange de travail**

Dans un écoulement, l'énergie mécanique totale par unité de volume de fluide, peut être modifiée d'une section à l'autre en introduisant dans le circuit une machine hydraulique. La machine peut être récepteur (turbine) ou génératrice (pompe).



Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail  $\Delta W$  pendant une durée  $\Delta t$ .

La puissance  $P$  échangée est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [J/s] \equiv [W]$$

Si  $P > 0$  : la machine fournit de l'énergie au fluide (pompe) ;

Si  $P < 0$  : la machine extrait de l'énergie au fluide (turbine).

L'application de l'équation de Bernoulli entre les points  $P_1$  et  $P_2$  permet d'écrire :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \mp \frac{P}{Q_V}$$

$\frac{P}{Q_V}$ : Quantité positive (unité : Pa), c'est l'énergie par unité de volume fournie par une pompe au liquide ou absorbée par une turbine.

On écrira :  $+ E$  pour une machine hydraulique réceptrice (turbine);

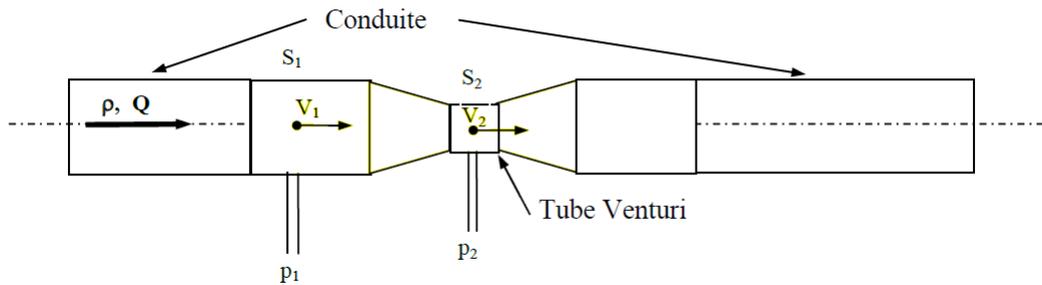
$- E$  Pour une machine hydraulique Génératrice (pompe).

**4.5 Applications aux mesures des débits et des vitesses**

**4.5.1 Venturi**

Le tube de venturi est un tube de section variable. Il permet de mesurer des débits et vitesse connaissant la pression dans les différentes sections.

On suppose qu'il n'y a pas de perte d'énergie (fluide parfait pas de frottement) dans le tube de Venturi.



On applique le théorème de Bernoulli entre les sections  $S_1$  et  $S_2$  du tube Venturi.

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \cdot \left( \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right) = P_1 - P_2 + \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

Tube de Venturi horizontal  $\Rightarrow z_1 - z_2 = 0$

La conservation de débit s'écrit :  $Q_V = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \Rightarrow v_2/v_1 = S_1/S_2$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \cdot \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) = P_1 - P_2 \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}} \Rightarrow Q_V = S_1 \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

Connaissant les caractéristiques du tube Venturi ( $S_1$  et  $S_2$ ), la mesure de la différence de pression ( $P_1 - P_2$ ) permet de déterminer le débit.

En réalité, le débit réel sera légèrement différent du débit trouvé à partir de l'équation précédente. En effet, il y a toujours des frottements (dont on n'a pas tenu compte) qui engendrent une différence de pression plus importante.

Par conséquent, il est nécessaire d'étalonner cet appareil.

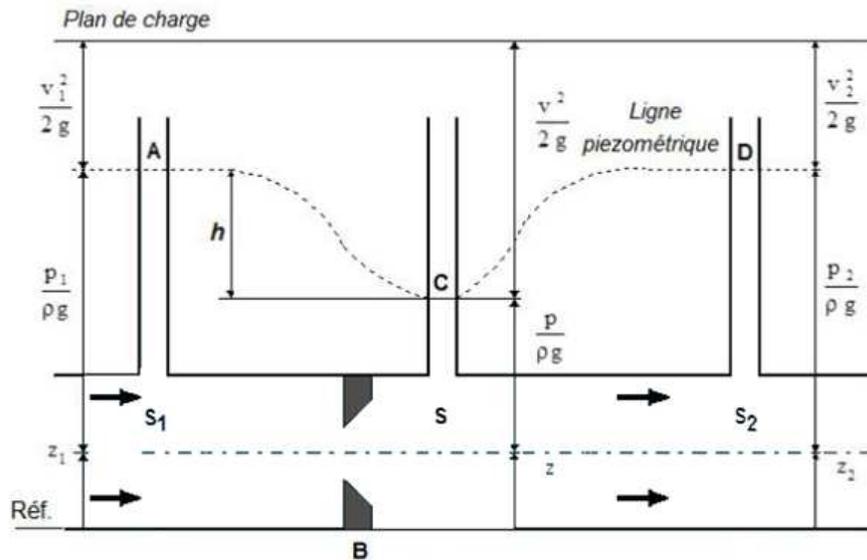
$$Q_{V_{réel}} = C \cdot S_1 \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

C : Coefficient de correction obtenu par étalonnage du venturi.

#### 4.5.2 Diaphragmes

Le diaphragme est utilisé comme instrument de mesure de débit d'un fluide parcourant un circuit hydraulique. Il existe, pour un débit donné, une différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

L'étude consiste à établir une relation entre le débit d'eau  $Q_V$  traversant le diaphragme et la différence de hauteur d'eau  $h$  dans les tubes.



De l'équation de continuité pour un fluide parfait incompressible, le débit du fluide est le même à travers toutes les sections des tubes.

$$\text{On écrit : } Q_V = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 = v \cdot S$$

$$\text{D'où : } v_1 = \frac{S}{S_1} \cdot v$$

On applique l'équation de Bernoulli exprimée en hauteur piézométrique entre les points A et C.

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 + \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{v^2}{2 \cdot g} + z + \frac{P}{\rho \cdot g}$$

Le tube est horizontal, il vient donc :  $z_1 = z_2 = z$

$$\text{On obtient : } \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{P}{\rho \cdot g}$$

$$\text{Ou encore } \frac{P_1 - P}{\rho \cdot g} = \frac{v^2 - v_1^2}{2g} = h$$

Avec,  $h$  est la différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

La synthèse de l'équation de Bernoulli et de l'équation de continuité permet d'exprimer le débit théorique  $Q_{th}$  dans le diaphragme :

$$Q_{th} = S \cdot v$$

$$\text{L'équation de Bernoulli est : } \frac{v^2 - v_1^2}{2g} = h$$

$$\text{Soit : } v^2 - v_1^2 = 2g \cdot h$$

$$\text{L'équation de continuité permet d'exprimer } v_1 \text{ en fonction de } v : v_1 = \frac{S}{S_1} \cdot v$$

$$\text{On obtient : } v^2 - \left(\frac{S}{S_1} \cdot v\right)^2 = 2g \cdot h$$

$$\text{Soit : } v^2 - v^2 \cdot \left(\frac{S}{S_1}\right)^2 = 2g \cdot h$$

Puis,  $v^2 \left(1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right) = 2g \cdot h$

D'où :  $v = \sqrt{\frac{2g \cdot h}{1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2}}$

La relation du débit devient :  $Q_V = \frac{S}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2}} \cdot \sqrt{2g \cdot h}$

La mesure n'a pas lieu en *B* où il se produit une contraction de la veine fluide, mais en *C*. Pour tenir compte de la section en *C*, il faut utiliser un coefficient de contraction *C*.

Le débit réel s'écrit finalement :

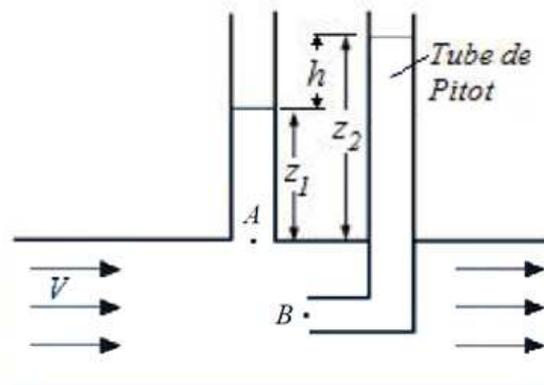
$$Q_{V_{réel}} = C \cdot Q_{th} = C \cdot \frac{S}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2}} \cdot \sqrt{2g \cdot h}$$

**4.5.3 Tubes de Pitot**

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilisé pour faire des mesures de vitesse dans divers écoulements. Le principe est basé sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement.

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en *A* face au courant, et l'autre en *B* est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur. Au point *B*, le liquide a la même vitesse *v* que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide  $P_B = P$ .

En *A*, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est  $P_A$ .



Appliquons le théorème de Bernoulli, entre les deux points *A* et *B*, on obtient :

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + z_2$$

On a :  $z_1 = z_2$  et  $v_1 = 0$  (point d'arrêt)

Alors, il vient :  $\frac{P_1 - P_2}{\rho \cdot g} = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{2g}}$

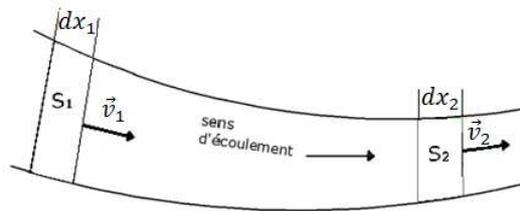
De l'hydrostatique, on a :  $P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot h$

Ce qui donne :  $v_2 = \sqrt{2\rho \cdot g \cdot h}$

**4.6 Théorème d'Euler**

Le théorème de Bernoulli est d'une utilisation trop limitée. En effet, il ne permet pas d'exprimer les actions mécaniques pouvant apparaître entre des fluides et des solides par exemple. Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. D'où la nécessité d'introduire un deuxième théorème.

Considérons une portion de fluide incompressible circulant dans une conduite animée d'un écoulement permanent. Cette portion de fluide est délimitée par une surface fermée (une surface d'entrée  $S_1$  et une surface de sortie  $S_2$ ); la représentation de cette surface permet de définir le système.



On établit le théorème d'Euler à partir de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$\vec{P}$  est la quantité de mouvement du système :

$$d\vec{P} = d(m \cdot d\vec{v}) = m_2 \cdot \vec{v}_2 - m_1 \cdot \vec{v}_1$$

Or  $V_1 = S_1 \cdot dx_1$  et  $V_2 = S_2 \cdot dx_2$

$$d\vec{P} = \rho \cdot S_2 \cdot dx_2 \cdot \vec{v}_2 - \rho \cdot S_1 \cdot dx_1 \cdot \vec{v}_1 = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt \cdot \vec{v}_2 - \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot \vec{v}_1$$

De l'équation de continuité, on a :  $Q_V = S_2 \cdot v_2 = S_1 \cdot v_1$

Ce qui donne :  $d\vec{P} = \rho \cdot Q_V \cdot dt \cdot \vec{v}_2 - \rho \cdot Q_V \cdot dt \cdot \vec{v}_1$

D'où :  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \rho \cdot Q_V \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

Le théorème d'Euler devient donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

telle que  $\sum \vec{F}_{ext}$  : la somme vectorielle des forces extérieures (la résultante des forces extérieures) appliquées à un tronçon de fluide isolé, qui sont :

- Le poids du fluide compris entre  $S_1$ ,  $S_2$  et le tube ;
- Les efforts de pression appliqués sur la section  $S_1$ ,  $S_2$  et le tube ;
- Les efforts du fluide sur la canalisation.

$q_m$ : Le débit massique du fluide ;

$\vec{v}_1$ : Vecteur vitesse du fluide qui entre en  $S_1$  ;

$\vec{v}_2$ : Vecteur vitesse du fluide qui sort de  $S_2$ .

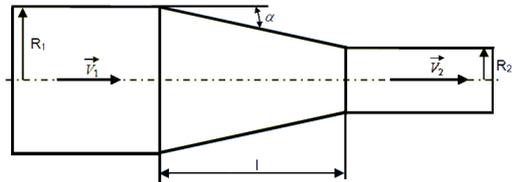
**4.7 Applications**

**Exercice 01 :**

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle  $\alpha$  (schéma ci-contre).

- 1) Calculer le rapport des rayons ( $R_1/R_2$ ).
- 2) Calculer ( $R_1 - R_2$ ) en fonction de  $L$  et  $\alpha$ . En déduire la longueur  $L$ .

On donne :  $R_1 = 50 \text{ mm}$  et  $\alpha = 15^\circ$



**Solution :**

- 1) On applique l'équation de continuité :

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \text{ ou encore } \frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1} \text{ or } S_1 = \pi \cdot R_1^2 \text{ d'où } \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = 2$$

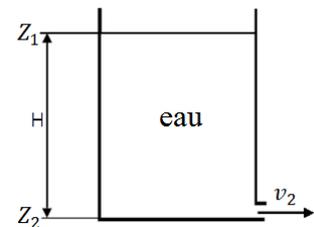
$$2) \tan \alpha = \frac{R_1 - R_2}{l} \text{ donc } l = \frac{R_1 - R_2}{\tan \alpha} \text{ or } R_2 = \frac{R_1}{2} \text{ donc } l = \frac{R_1}{2 \cdot \tan \alpha}$$

$$\text{AN : } l = \frac{50}{2 \times \tan 15} = 93,3 \text{ mm}$$

**Exercice 02 :**

On considère un réservoir rempli d'eau à une hauteur  $H = 3 \text{ m}$  muni d'un petit orifice à sa base de diamètre  $d = 10 \text{ mm}$ .

- 1) En précisant les hypothèses prises en comptes, appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la vitesse  $v_2$  d'écoulement d'eau.



- 2) Déduire le débit volumique  $Q_V$  en (l/s) en sortie de l'orifice.

On suppose que  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

**Solution :**

- 1) Vitesse d'écoulement  $v_2$  :

On applique le théorème de Bernoulli avec les hypothèses suivantes :  $v_1 = 0$  car le niveau dans le réservoir varie lentement et  $P_1 = P_2 = P_{atm}$ .

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (Z_2 - Z_1) = 0 \text{ on obtient : } v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

$$\text{AN : } v_2 = \sqrt{2 \times 9,81 \times 3} = 7,67 \text{ m/s}$$

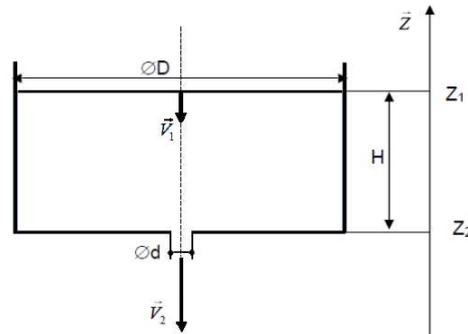
- 2) Débit volumique  $Q_V$  :

$$Q_V = v_2 \cdot S \text{ or } S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \text{ donc } Q_V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot v_2}{4}$$

$$\text{AN : } Q_V = \frac{\pi \times (10 \times 10^{-3})^2 \times 7,67}{4} = 0,6 \text{ l/s}$$

**Exercice 03 :**

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur  $D = 2 \text{ m}$  rempli d'eau jusqu'à une hauteur  $H = 3 \text{ m}$ . Le fond du réservoir est muni d'un orifice de diamètre  $d = 10 \text{ mm}$  permettant de faire évacuer l'eau.



Si on laisse passer un temps très petit  $dt$ , le niveau  $H$  du réservoir descend d'une quantité  $dH$ . On note  $v_1 = dH/dt$  la vitesse de descente du niveau d'eau, et  $v_2$  la vitesse d'écoulement dans l'orifice. On donne l'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

- 1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire l'expression de  $v_1$  en fonction de  $v_2$ ,  $D$  et  $d$ .
- 2) Ecrire l'équation de Bernoulli. On suppose que le fluide est parfait et incompressible.
- 3) A partir des réponses aux questions 1) et 2) établir l'expression de la vitesse d'écoulement  $v_2$  en fonction de  $g$ ,  $H$ ,  $D$  et  $d$ .
- 4) Calculer la vitesse  $v_2$ . On suppose que le diamètre  $d$  est négligeable devant  $D$ . C'est-à-dire  $d/D \ll 1$ .
- 5) Déduire le débit volumique  $Q_V$ .

**Solution :**

- 1) Equation de continuité :

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \text{ or } S_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \text{ et } S_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \text{ donc } v_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot v_2 \quad (1)$$

- 2) Equation de Bernoulli :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (Z_2 - Z_1) = 0 \text{ or } P_1 = P_2 = P_{atm} \text{ donc } \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} - g \cdot H = 0 \quad (2)$$

- 3) On substitue l'équation (1) dans (2) on obtient :  $\frac{v_2^2 - \left(\frac{d}{D}\right)^4 \cdot v_2^2}{2} = g \cdot H$

$$\text{Donc la vitesse : } v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}$$

- 4) Si  $\left(\frac{d}{D}\right) \ll 1$  alors  $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$

$$\text{AN : } v_2 = \sqrt{2 \times 9,81 \times 3} = 7,67 \text{ m/s}$$

$$5) \text{ Débit volumique : } Q_V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_2$$

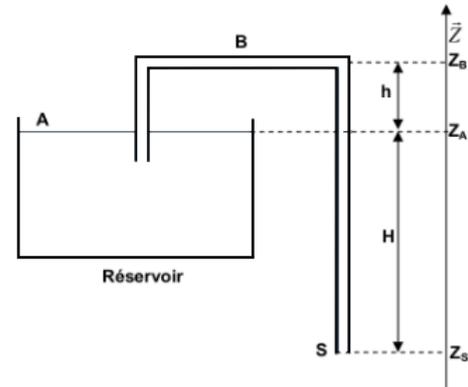
$$\text{AN : } Q_V = \frac{\pi \times 0,01^2}{4} \times 7,67 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

### **Exercice 04 :**

On considère un siphon de diamètre  $d = 10 \text{ mm}$  alimenté par réservoir d'essence de grandes dimensions par rapport à  $d$  et ouvert à l'atmosphère.

On suppose que :

- Le fluide est parfait ;
- Le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement.
- L'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .
- Le poids volumique de l'essence :  $\omega = 6896 \text{ N/m}^3$ .
- $H = Z_A - Z_S = 2,5 \text{ m}$ .



- 1) En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et S, calculer la vitesse d'écoulement  $v_S$  dans le siphon.
- 2) Déduire le débit volumique  $Q_V$ .
- 3) Donner l'expression de la pression  $P_B$  au point B en fonction de  $h, H, \omega$  et  $P_{atm}$ . Faire une application numérique pour  $h = 0,4 \text{ m}$ .
- 4)  $h$  peut-elle prendre n'importe quelle valeur? Justifier votre réponse.

### **Solution :**

1) Théorème de Bernoulli entre S et Z :

$$\frac{v_S^2}{2} + \frac{P_S}{\rho} + g \cdot Z_S = \frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + g \cdot Z_A \text{ or } \omega = \rho \cdot g, P_S = P_A = P_{atm}, v_A = 0 \text{ et } Z_A - Z_S = H$$

$$\text{donc } v_S = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

$$\text{AN : } v_S = \sqrt{2 \times 9,81 \times 2,5} = 7 \text{ m/s}$$

$$2) \text{ Débit volumique : } Q_V = v_S \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\text{AN : } Q_V = 7 \times \frac{\pi \times 0,01^2}{4} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0,55 \text{ l/s}$$

3) Théorème de Bernoulli entre B et S :

$$\frac{v_B^2}{2 \cdot g} + \frac{P_B}{\omega} + Z_B = \frac{v_S^2}{2 \cdot g} + \frac{P_S}{\omega} + Z_S \text{ or } v_S = v_B, Z_B - Z_S = H + h \text{ et } P_S = P_{atm}$$

$$\text{donc } P_B = P_{atm} - \omega \cdot (H + h)$$

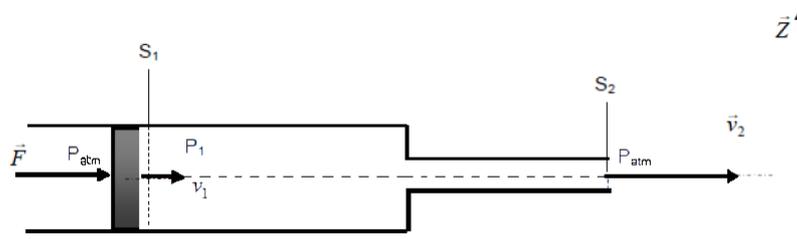
$$\text{AN : } P_B = 10^5 - 6896 \times (2,5 - 0,4) = 80001,6 \text{ Pa} = 0,8 \text{ bar}$$

4) Non. Il faut que  $P_B > 0$  équivaut à  $h < \frac{P_{atm}}{\omega} - H$

$$\text{AN : } h < \frac{10^5}{9,81 \times 700} - 2,5 \text{ donc } h < 12 \text{ m}$$

### **Exercice 05 :**

La figure ci-dessous représente un piston qui se déplace sans frottement dans un cylindre de section  $S_1$  et de diamètre  $d_1 = 4 \text{ cm}$  rempli d'un fluide parfait de masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Le piston est poussé par une force  $F$  d'intensité  $62,84 \text{ N}$  à une vitesse  $v_1$  constante. Le fluide peut s'échapper vers l'extérieur par un cylindre de section  $S_2$  et de diamètre  $d_2 = 1 \text{ cm}$  à une vitesse  $v_2$  et une pression  $P_2 = P_{atm} = 1 \text{ bar}$ .



- 1) Ecrire l'équation de continuité et déterminer l'expression de la vitesse  $v_1$  en fonction de  $v_2$ .
- 2) En appliquant l'équation de Bernoulli, déterminer l'expression de la vitesse d'écoulement  $v_2$  en fonction de  $P_1, P_{atm}$  et  $\rho$ . (On suppose que les cylindres sont dans une position horizontale ( $Z_1 = Z_2$ )).
- 3) Déduire le débit volumique  $Q_V$ .

### **Solution :**

1) Equation de continuité :

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \cdot \frac{S_2}{S_1} = v_2 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = v_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \cdot v_2$$

2) Equation de Bernoulli :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g \cdot (Z_2 - Z_1) = 0 \text{ or } Z_1 = Z_2 \text{ et } P_2 = P_{atm}$$

$$\text{donc } v_2 = \sqrt{\frac{512}{255} \cdot \frac{(P_1 - P_{atm})}{\rho}}$$

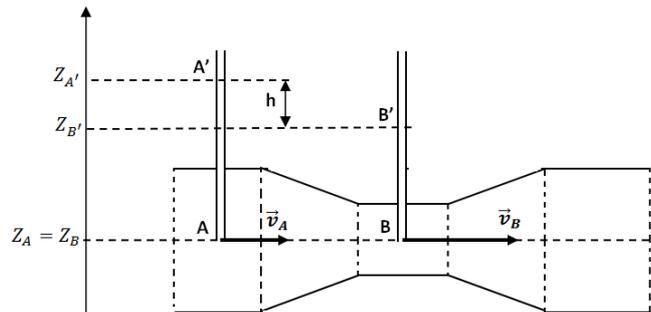
$$\text{AN : } v_2 = \sqrt{\frac{512}{255} \times \frac{(1,5 \cdot 10^5 - 10^5)}{1000}} = 10 \text{ m/s}$$

3) Débit volumique :  $Q_V = v_2 \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}$

$$\text{AN : } Q_V = 10 \times \frac{\pi \times 0,01^2}{4} = 0,785 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

**Exercice 06 :**

Une conduite de section principale  $S_A$  et de diamètre  $d$  subit un étranglement en  $B$  où sa section est  $S_B$ . On désigne par  $a = S_A/S_B$  le rapport des sections. Un fluide parfait incompressible de masse volumique  $\rho$ , s'écoule à l'intérieur de cette conduite. Deux tubes plongent dans la conduite ayant des extrémités respectivement  $A$  et  $B$ . Par lecture directe de la dénivellation  $h$ , les deux tubes permettent de mesurer le débit volumique  $Q_V$ , qui traverse la conduite.



- 1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire l'expression de la vitesse  $v_A$  en fonction de  $v_B$  et  $a$ .
- 2) Ecrire la relation de Bernoulli entre les points  $A$  et  $B$ . en déduire l'expression de la différence de pression ( $P_A - P_B$ ) en fonction de  $\rho$ ,  $v_A$  et  $a$ .
- 3) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points  $A$  et  $A'$ .
- 4) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points  $B$  et  $B'$ .
- 5) Déduire l'expression de la vitesse d'écoulement  $v_A$  en fonction de  $g$ ,  $h$  et  $a$ .
- 6) Donner l'expression de débit volumique  $Q_V$  en fonction de  $d$ ,  $g$ ,  $h$  et  $a$ .

Faire une application numérique pour :

- Un diamètre de la section principale  $d = 50 \text{ mm}$  ;
- Un rapport de section  $a = 2$ ,
- Une accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,
- Une dénivellation  $h = 10 \text{ mm}$ .

**Solution :**

- 1) Equation de continuité :

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \text{ d'où } v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A \text{ donc } v_B = a \cdot v_A$$

- 2) Relation de Bernoulli entre les points  $A$  et  $B$  :

$$P_A + \rho \cdot g \cdot Z_A + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 = P_B + \rho \cdot g \cdot Z_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2 \text{ or } Z_A = Z_B$$

$$\text{donc } P_A - P_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (a \cdot v_A)^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2$$

ou encore,  $P_A - P_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A \cdot (a^2 - 1)$  (1)

3) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre A et A' :

$$P_A - P_{A'} = \rho \cdot g \cdot (Z_{A'} - Z_A) \quad (2)$$

4) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre B et B' :

$$P_B - P_{B'} = \rho \cdot g \cdot (Z_{B'} - Z_B) \quad (3)$$

5) On sait que  $P_{A'} = P_{B'} = P_{atm}$  et  $Z_A = Z_B$

donc,

$$P_A - P_B = (P_A - P_{A'}) - (P_B - P_{B'}) = \rho \cdot g \cdot [(Z_{A'} - Z_A) - (Z_{B'} - Z_B)] = \rho \cdot g \cdot (Z_{A'} - Z_{B'})$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot h \quad (4)$$

D'après la relation (1) et (4) :  $\rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A \cdot (a^2 - 1)$  donc  $v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{(a^2 - 1)}}$

6) On sait que :  $Q_V = S_A \cdot v_A$  ou encore,  $Q_V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{(a^2 - 1)}}$

AN :  $Q_V = \frac{\pi \times 0,05^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times 0,01}{(2^2 - 1)}} = 0,5021 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 0,5 \text{ l/s}$

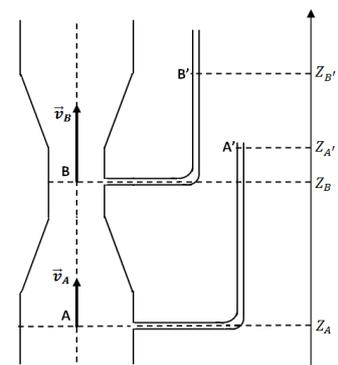
**Exercice 07 :**

Dans le tube de Venturi représenté sur le schéma ci-dessous, l'eau s'écoule de bas en haut.

Le diamètre du tube en A est  $d_A = 30 \text{ cm}$ , et en B il est de  $d_B = 15 \text{ cm}$ . Afin de mesurer la pression  $P_A$  au point A et la pression  $P_B$  au point B, deux manomètres à colonne d'eau sont connectés au Venturi. Ces tubes piézométriques sont gradués et permettent de mesurer les niveaux  $Z_{A'} = 3,061 \text{ m}$  et  $Z_{B'} = 2,541 \text{ m}$  respectivement des surfaces libres A' et B'.

On donne :

- L'altitude de la section A :  $Z_A = 0 \text{ m}$ ,
- L'altitude de la section B :  $Z_B = 50 \text{ m}$ ,
- L'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,
- La pression au niveau des surfaces libres  $P_{A'} = P_{B'} = P_{atm} = 1 \text{ bar}$ ,
- La masse volumique de l'eau est  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .



On suppose que le fluide est parfait.

- 1) Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique entre B et B', et calculer la pression  $P_B$  au point B.
- 2) De même, calculer la pression  $P_A$  au point A.

3) Ecrire l'équation de continuité entre les points  $A$  et  $B$ . En déduire la vitesse d'écoulement  $v_B$  en fonction de  $v_A$ .

4) Ecrire l'équation de Bernoulli entre les points  $A$  et  $B$ . En déduire la vitesse d'écoulement  $v_B$ .

### Solution :

1) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre  $B$  et  $B'$  :

$$P_B - P_{B'} = \rho \cdot g(Z_B - Z_{B'}) \Rightarrow P_B = P_{B'} + \rho \cdot g(Z_B - Z_{B'})$$

$$\text{AN : } P_B = 10^5 + 1000 \times 9,81 \times (2,541 - 0,5) = 120001 \text{ Pa} = 1,2 \text{ bar}$$

2) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre  $A$  et  $A'$  :

$$P_A = P_{A'} + \rho \cdot g(Z_A - Z_{A'})$$

$$\text{AN : } P_A = 10^5 + 1000 \times 9,81 \times (3,061 - 0) = 130007 \text{ Pa} = 1,3 \text{ bar}$$

3) Equation de continuité :

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \Rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A = \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2 \cdot v_A \Rightarrow v_B = 4 \cdot v_A$$

4) Equation de Bernoulli :

$$\frac{v_A^2 - v_B^2}{2} + \frac{P_A - P_B}{\rho} + g \cdot (Z_A - Z_B) = 0 \text{ avec } v_B = 4 \cdot v_A$$

$$\text{donc } v_B = \sqrt{\frac{2}{4^2 - 1} \cdot \left(\frac{P_A - P_B}{\rho} + g \cdot (Z_A - Z_B)\right)}$$

$$\text{AN : } v_B = \sqrt{\frac{2}{4^2 - 1} \cdot \left(\frac{1,3 \cdot 10^5 - 1,2 \cdot 10^5}{1000} + 9,81 \times (0 - 0,5)\right)} = 0,8246 \text{ m/s}$$

### Exercice 08 :

Une pompe  $P$  alimente un château d'eau à partir d'un puit à travers une conduite de diamètre  $d=150$  mm.

On donne :

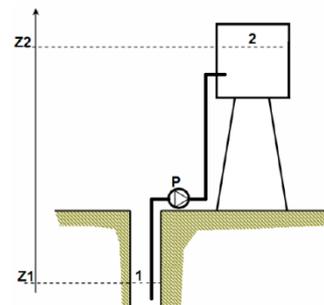
- Les altitudes :  $Z_2 = 26 \text{ m}$  et  $Z_1 = -5 \text{ m}$ ,
- Les pressions  $P_1 = P_2 = 1,013 \text{ bar}$ ,
- La vitesse d'écoulement  $v = 0,74 \text{ m/s}$ ,
- L'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

On négligera toutes les pertes de charges.

1) Calculer le débit volumique  $Q_V$  de la pompe en l/s.

2) Ecrire l'équation de Bernoulli entre les surfaces 1 et 2.

3) Calculer la puissance utile  $P_u$  de la pompe.



- 4) Déduire la puissance  $P_a$  absorbée par la pompe sachant que son rendement est de  $\eta = 80\%$ .

**Solution :**

1) Débit volumique :  $Q_V = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

AN :  $Q_V = 0,4 \times \frac{\pi \times 0,15^2}{4} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 7 \text{ l/s}$

- 2) Equation de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible (avec échange de travail):

$$\frac{1}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho} \cdot (P_2 - P_1) + g \cdot (Z_2 - Z_1) = \frac{P_u}{\rho \cdot Q_V}$$

- 3) Puissance utile de la pompe:

$$P_u = Q_V \cdot \rho \cdot g \cdot (H_1 + H_2)$$

AN :  $P_u = 7 \cdot 10^{-3} \times 1000 \times 9,81 \times (26 + 5) = 2128,77 \text{ W}$

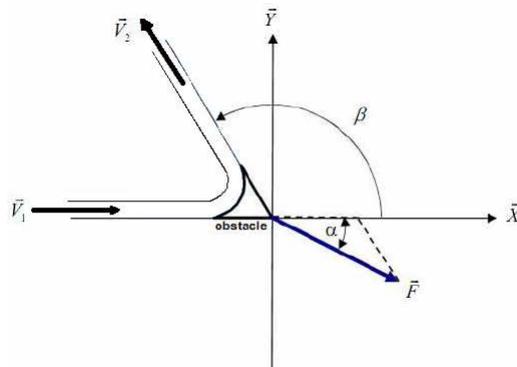
- 4) Puissance absorbée par la pompe :

$$P_a = \frac{P_u}{\eta}$$

AN :  $P_a = \frac{2128,77}{0,8} = 2661 \text{ W}$

**Exercice 09 :**

La figure ci-dessous représente un jet d'eau horizontal qui frappe un obstacle à un débit massique  $q_m = 2 \text{ kg/s}$ . l'obstacle provoque une déflexion du jet d'un angle  $\beta = 120^\circ$ .



On désigne par  $v_1$  la vitesse d'écoulement de l'eau en entrée de l'obstacle. Elle est portée par l'axe Ox,  $v_2$  désigne la vitesse d'écoulement de l'eau en sortie de l'obstacle. Elle est portée par une direction inclinée de l'angle  $\beta = 120^\circ$  par rapport à l'axe Ox. On admettra que  $v_1 = v_2 = 3 \text{ m/s}$ .

- 1) En appliquant le théorème d'Euler, donner l'expression vectorielle de la force  $F$  exercée par le liquide sur l'obstacle en fonction de  $q_m, v_1$  et  $v_2$  ensuite calculer ses composantes  $F_x$  et  $F_y$ .

2) Quel est son angle d'inclinaison  $\alpha$  ?

**Solution :**

1) L'expression vectorielle de la force  $F$  exercée par le liquide sur l'obstacle :

$$\vec{F} = q_m \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = q_m \cdot \|\vec{v}_1\| \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{cases} F_x = q_m \cdot \|\vec{v}_1\| \cdot (1 - \cos \beta) \\ F_y = -q_m \cdot \|\vec{v}_1\| \cdot \sin \beta \end{cases}$$

$$\text{AN: } \begin{cases} F_x = 2 \times 3 \times (1 - (-0,5)) = 9 \text{ N} \\ F_y = -2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -5,19 \text{ N} \end{cases}$$

2) L'angle d'inclinaison  $\alpha$  :

$$\tan \alpha = \frac{F_x}{F_y}$$

$$\text{AN: } \tan \alpha = \frac{9}{-5,19} = -0,5773 \Rightarrow \alpha = -30^\circ$$

## Chapitre 4 :

# Dynamique des fluides incompressibles réels

### Objectifs

Au terme de ce chapitre l'étudiant doit être capable :

- D'évaluer le nombre de Reynolds ;
- D'identifier les différents régimes d'écoulement d'un fluide (laminaire, transitoire et turbulent) ;
- De calculer les pertes de charges singulières et linéaires ;
- D'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible.

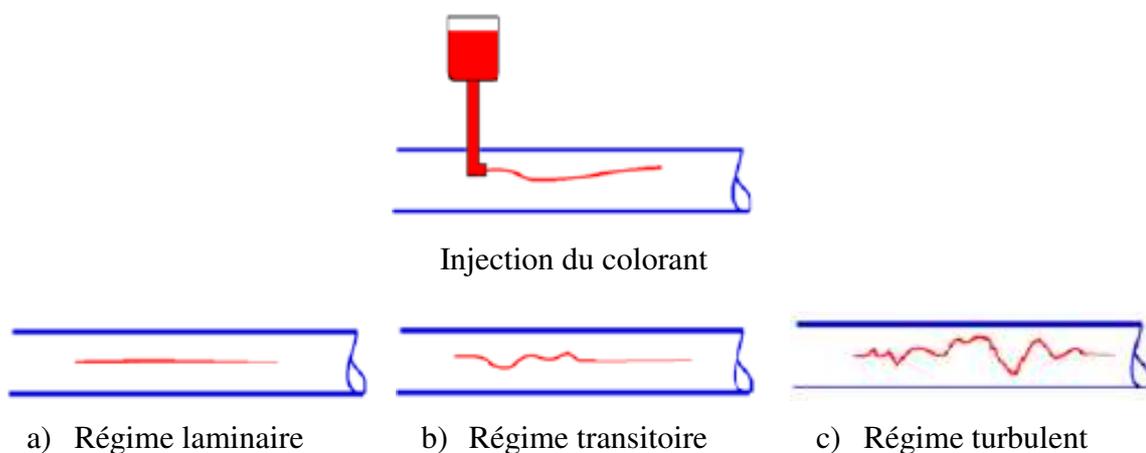
Dans le chapitre précédent nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel...etc.)

#### 4.1 Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds

La connaissance du régime d'écoulement d'un fluide est un point clé en génie des procédés, car il a une influence sur la plupart des phénomènes, en particulier les transferts de chaleur, de matière, les pertes de charges etc...

En 1883 Osborne Reynolds (1842-1912) professeur de l'ingénierie à l'université de Manchester a réalisé des expériences lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne. En injectant sur l'axe de la conduite un colorant il a remarqué qu'à faible vitesse, le colorant reste concentré très près de l'axe, caractéristique d'un écoulement stable laminaire (a), puis à vitesse/débit plus important, des structures tourbillonnaires se forment, de plus en plus énergétiques, provoquant une diffusion rapide due à la turbulence (b et c) qui prend largement le dessus sur la diffusion moléculaire à peine observable à faible vitesse.



En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si

l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds  $Re$ . Il exprime le rapport entre la force d'inertie  $\rho \cdot u^2$  et la force visqueuse  $\mu \cdot \frac{u}{d}$ . Il est donné par la relation suivante :

$$Re = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force visqueuse}} = \frac{\rho \cdot u \cdot d}{\mu} = \frac{u \cdot d}{\nu}$$

$u$ : Vitesse moyenne d'écoulement en  $m/s$

$d$ : Diamètre de la conduite en  $m$

$\mu$  : Viscosité dynamique du fluide en  $Nm^{-2}s$

$\nu$  : Viscosité cinématique du fluide en  $m^2/s$ .

- Si  $Re < 2000$  : l'écoulement est laminaire.
- Si  $2000 < Re < 3000$ : l'écoulement est transitoire.
- Si  $Re > 3000$  : l'écoulement est turbulent.

Ces valeurs peuvent varier légèrement d'un ouvrage à un autre, mais en pratique, les valeurs ne laissent pas d'ambiguïté. Elles seront franchement supérieures ou inférieure à ces limites. Dans les écoulements turbulents, la valeur de  $Re$  est très importante et peut atteindre  $10^5$  jusqu'à  $10^8$ .

#### • Cas des conduites non-circulaire

Dans le cas où la conduite n'est pas circulaire, on définit ce que l'on appelle le diamètre hydraulique  $d_H$  :

$$d_H = 4 \cdot \frac{\text{section droite de la conduite}}{\text{périmètre mouillé}}$$

On peut également définir le rayon hydraulique  $r_H$  en correspondance avec le rayon de la conduite  $r$  :

$$r_H = \frac{\text{section droite occupée par le fluide}}{\text{périmètre mouillé}}$$

- dans le cas d'une conduite circulaire de diamètre  $d$ , on retrouve  $d_H = d$ .
- dans le cas d'une conduite carrée, le diamètre hydraulique n'est autre que le côté du carré.
- pour un fluide circulant dans un espace annulaire, on peut montrer que  $d_H = 2 \cdot e = d_{ext} - d_{int}$ , où  $e$  est l'épaisseur de l'espace annulaire.

## 4.2 Analyse dimensionnelle

Les phénomènes physiques ont une complexité telle qu'il est difficile de les décrire par des équations mathématiques résolubles de par le grand nombre de paramètres. On cherche alors à utiliser l'analyse dimensionnelle qui regroupe les différents paramètres en nombres adimensionnels dont on peut ensuite comparer l'influence sur le phénomène afin de simplifier le problème.

L'expérience prouve que certains de ces nombres peuvent rester constants lors d'un changement d'échelle, on peut donc extrapoler les grandeurs d'une installation industrielle à partir d'essais en laboratoire, on parle alors de similitude.

L'analyse dimensionnelle est utilisée particulièrement en physique, en chimie et en ingénierie, elle permet notamment de vérifier a priori la possibilité d'une équation ou du résultat d'un calcul et elle est utile pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

#### 4.2.1 Notions de dimensions

##### 4.2.1.1 Systèmes d'unités

Pour toute grandeur physique, les unités interviennent : elles sont essentielles à la quantification de cette grandeur.

Un système d'unités est un ensemble d'unités cohérentes entre elles afin de définir l'ensemble des grandeurs observées. On compte plusieurs systèmes d'unités, principalement le système métrique et le système impérial (encore très présent dans les pays anglo-saxons) mais pas seulement : dans le système métrique, les physiciens utilisent le système MKS (pour Mètre - Kilogramme - Seconde) et les chimistes le système CGS (pour Centimètre - Gramme - Seconde). Même si cela peut paraître simple, les conversions entre unités ou les transformations de relations empiriques demandent une certaine rigueur pour leur traitement. Dans ces cas là, les handbooks proposent des tables de conversion conséquentes qui peuvent s'avérer utiles.

##### 4.2.1.2 Dimension

On appelle dimension, le rapport entre l'unité de la grandeur et les sept unités de base du système international, à savoir :

Dimension	Symbole de la dimension	Unité S.I.
Masse	M	kilogramme
Temps	T	seconde
Longueur	L	mètre
Température	$\theta$	Kelvin
Intensité électrique	I	Ampère
Quantité de matière	n	mole
Intensité lumineuse	J	Candela

Pour les sept dimensions de ce tableau on parle de grandeurs fondamentales, pour toutes les autres on parlera de grandeurs secondaires, car elles sont obtenues par composition des sept fondamentales.

**4.2.1.3 Exemples de dimensions secondaires**

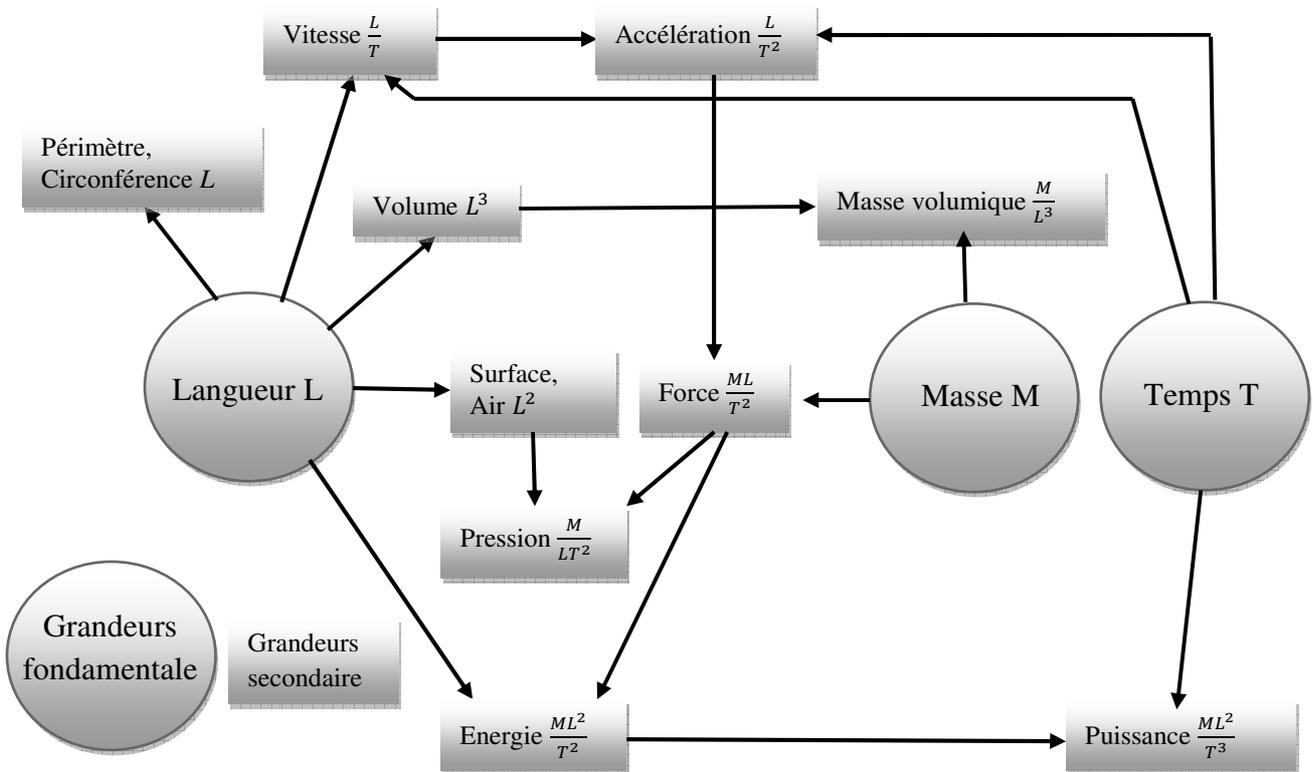
On calcule l'aire d'une surface comme le produit de deux longueurs, donc :  $[S] = L^2$

On calcule une vitesse comme la longueur parcourue au cours d'un temps donnée, donc :

$$[u] = L \cdot T^{-1}$$

On calcule une masse volumique comme le entre une masse et un volume, donc :

$$[\rho] = M \cdot L^{-3}$$



**4.2.2 Théorème de Vashy-Buckingham**

L'analyse dimensionnelle repose sur le fait que ne peuvent être comparées que des grandeurs ayant la même dimension ; en effet, il est possible de comparer deux longueurs entre elles, mais pas une longueur et une masse par exemple. Mathématiquement, cette déclaration est fondée sur le théorème de Vaschy-Buckingham.

▪ **Enoncé du théorème**

Soit un problème physique comportant  $N$  grandeurs différentes (variables)  $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N)$ , comme la vitesse, la pression, la viscosité, etc. dont les dimensions fondamentales desquelles interviennent sont  $J$ . Il existe une relation qui relie toutes ces quantités entre elles, cette relation s'écrit:

$$f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N) = 0$$

Si  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ , représentent les nombres adimensionnels parmi les quantités physiques  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ , on peut alors exprimer la relation précédente sous la forme :

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_K) = 0 \quad K < N$$

Le nombre de  $\pi$  variables sans dimension (noté par  $K$ ) est égal au nombre de variables physiques de départ (noté par  $N$ ) moins le nombre de dimensions fondamentales (noté par  $J$ , souvent  $J = 3$ ) utilisées par ces variables.

$$K = N - J$$

Pour réaliser une analyse dimensionnelle, on doit considérer les neuf étapes suivantes :

1. Dresser la liste de toutes les grandeurs physiques ( $A_i$ ) et leur dimension correspondante.

Omettre toute grandeur physique dépendantes d'une ou d'autres grandeurs.

2. Écrire la fonction

$$f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N) = 0$$

3. Choisir les variables répétitives. Ces variables doivent contenir toutes les  $J$  dimensions du problème. Souvent, on retient une variable parce qu'elle détermine l'échelle, une autre, parce qu'elle détermine les conditions cinématiques ; il faut une variable liée avec la masse ou les forces du système.

4. Écrire les paramètres  $\pi$  en fonction des exposants inconnus :

$$\pi_1 = v^{x_1} \cdot d^{y_1} \cdot \rho^{z_1} \cdot \mu = \left(\frac{L}{T}\right)^{x_1} \cdot L^{y_1} \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^{z_1} \cdot \left(\frac{M}{LT}\right) = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

S'assurer que toutes les quantités  $A_i$  sont incluses dans les groupes  $\pi_i$ .

5. Écrire les équations des paramètres  $\pi$  pour les exposants ; on doit obtenir une somme algébrique nulle pour chaque dimension (homogénéité).

6. Résoudre les équations simultanément.

7. Remplacer les exposants trouvés ( $x_1, y_1, z_1, \dots$ ) dans les expressions de  $\pi$  (formulées en étape 4) pour obtenir les grandeurs  $\pi$  sans dimension.

8. Déterminer la fonction :

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{N-J}) = 0$$

S'assurer que tous les paramètres  $\pi$  sont indépendants les uns des autres.

9. Mettre les résultats sous la forme de nombres sans dimension connus ( $Re, Ma, Fr$ , etc.).

### 4.2.3 Exemple d'analyse dimensionnelle: Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est fonction de la densité, de la viscosité et de vitesse d'un fluide, et d'une longueur caractéristique. Etablir la relation donnant le nombre de Reynolds par l'analyse dimensionnelle.

**Solution :**

Liste des paramètres et leurs dimensions :

paramètre	$Re$	$\rho$	$\mu$	$v$	$l$
dimension	-	$ML^{-3}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$LT^{-1}$	$L$

$$Re = f(\rho, \mu, v, l)$$

Soit

$$Re = K \cdot \rho^a \cdot \mu^b \cdot v^c \cdot l^d$$

Où K est un coefficient sans dimension, à d exterminer expérimentalement.

Alors, en dimensions,  $M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (M^a L^{-3a}) \cdot (M^b L^{-b} T^{-b}) \cdot (L^c T^{-c}) \cdot L^d$

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = M^{a+b} \cdot L^{-3a-b+c+d} \cdot T^{-b-c}$$

En égalant les exposants de M, L et T, nous obtenons :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -3a - b + c + d = 0 \\ -b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ d = -b \\ c = -b \end{cases}$$

En substituant,

$$Re = K \cdot \rho^{-b} \cdot \mu^b \cdot v^{-b} \cdot l^{-b} = K \cdot \left( \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\mu} \right)^{-b}$$

Les valeurs de K et b doivent être déterminées par l'analyse physique ou l'expérience. Ici, K=1 et b=-1

**4.3 Pertes de charges**

Les pertes de charge sont les pertes d'énergie du fluide lorsqu'il se déplace. Cette perte peut être due aux frottements (viscosité) des particules sur les parois des conduites « pertes de charge régulières » ou aux accidents de parcours (coude par exemple, « pertes de charge singulières »).

Cette perte d'énergie se traduit :

- Soit par une chute de pression  $\Delta P$  en [Pa] ou [J/m<sup>3</sup>]
- Soit par une chute de hauteur  $\Delta h$  en [m]
- Soit par une perte d'énergie massique  $\Delta E$  en [J/kg].

**4.3.1 Pertes de charges singulières**

Lorsqu'un écoulement dans une conduite subit des variations brusques (de section ou de direction), il se produit des pertes de charges dites singulières. Elles sont, obligatoirement,

présentes dans toutes les installations, et causent des nuisances mécaniques (corrosion) et hydrodynamiques.

Les pertes de charges singulières peuvent être provoquées par :

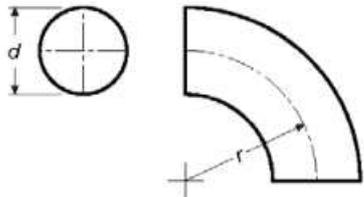
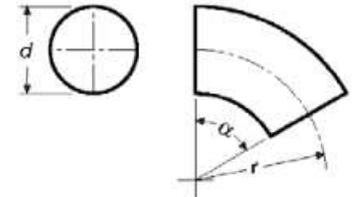
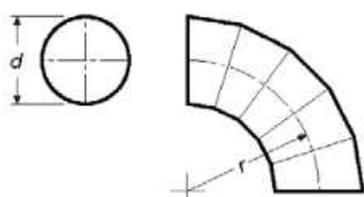
- un changement de section de la conduite (convergent, divergent),
- un changement de direction (coude),
- un branchement ou raccordement,
- un dispositif de mesure et contrôle de débit...

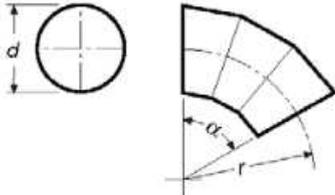
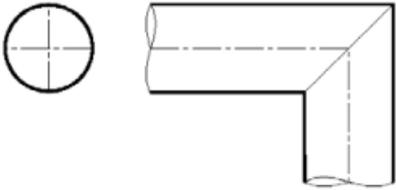
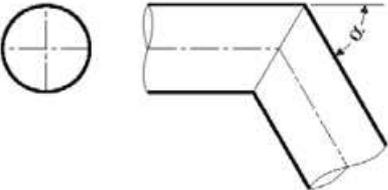
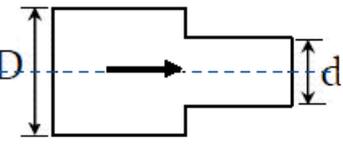
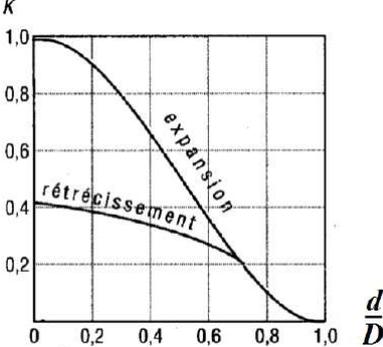
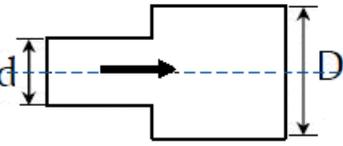
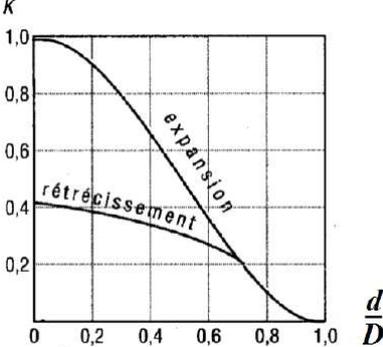
Les pertes de charge singulières sont proportionnelles au carré de la vitesse, elles sont exprimées sous les deux formes suivantes :

$$\Delta P = K \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \text{ ou } \Delta h = K \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Où  $K$  est appelé coefficient de perte de charge singulière (sans dimension dépendant de la nature et de l'origine des pertes de charge).

La valeur de  $K$  sont données par les constructeurs dans leurs catalogues. Quelques valeurs moyennes sont données dans le tableau suivant :

Coude à 90°		<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>r/d</math></th> <th><math>K</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,2</td> </tr> </tbody> </table>	$r/d$	$K$	0,50	0,9	0,75	0,5	1,00	0,4	1,50	0,3	2,00	0,2															
$r/d$	$K$																												
0,50	0,9																												
0,75	0,5																												
1,00	0,4																												
1,50	0,3																												
2,00	0,2																												
Coude à 30°, 45° et 60°		<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2"><math>r/d</math></th> <th colspan="3"><math>K</math></th> </tr> <tr> <th><math>\alpha=30^\circ</math></th> <th><math>\alpha=45^\circ</math></th> <th><math>\alpha=60^\circ</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>0,3</td> <td>0,5</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> </tr> </tbody> </table>	$r/d$	$K$			$\alpha=30^\circ$	$\alpha=45^\circ$	$\alpha=60^\circ$	0,50	0,3	0,5	0,7	0,75	0,2	0,3	0,3	1,00	0,1	0,2	0,3	1,50	0,1	0,2	0,2	2,00	0,1	0,1	0,1
$r/d$	$K$																												
	$\alpha=30^\circ$	$\alpha=45^\circ$	$\alpha=60^\circ$																										
0,50	0,3	0,5	0,7																										
0,75	0,2	0,3	0,3																										
1,00	0,1	0,2	0,3																										
1,50	0,1	0,2	0,2																										
2,00	0,1	0,1	0,1																										
Coude 90° à secteurs		<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>r/d</math></th> <th><math>K</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>1,1</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,6</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,2</td> </tr> </tbody> </table>	$r/d$	$K$	0,50	1,1	0,75	0,6	1,00	0,4	1,50	0,3	2,00	0,2															
$r/d$	$K$																												
0,50	1,1																												
0,75	0,6																												
1,00	0,4																												
1,50	0,3																												
2,00	0,2																												

<p>Coude 30°, 45° et 60° à secteurs</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">r/d</th> <th colspan="3">K</th> </tr> <tr> <th>α=30°</th> <th>α=45°</th> <th>α=60°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> </tr> </tbody> </table>	r/d	K			α=30°	α=45°	α=60°	0,50	0,4	0,6	0,7	0,75	0,2	0,3	0,4	1,00	0,1	0,2	0,3	1,50	0,1	0,2	0,2	2,00	0,1	0,1	0,1
r/d	K																												
	α=30°	α=45°	α=60°																										
0,50	0,4	0,6	0,7																										
0,75	0,2	0,3	0,4																										
1,00	0,1	0,2	0,3																										
1,50	0,1	0,2	0,2																										
2,00	0,1	0,1	0,1																										
<p>Coude 90° à angle vif</p>		<p style="text-align: center;"><math>K = 1,4</math></p>																											
<p>Coude 30°, 45° et 60° à angle vif</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">K</th> </tr> <tr> <th>α=30°</th> <th>α=45°</th> <th>α=60°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,4</td> <td>0,7</td> <td>1,0</td> </tr> </tbody> </table>	K			α=30°	α=45°	α=60°	0,4	0,7	1,0																		
K																													
α=30°	α=45°	α=60°																											
0,4	0,7	1,0																											
<p>Rétrécissement brusque</p>																													
<p>Elargissement brusque</p>																													

### 4.3.2 Pertes de charges linéaires

Les pertes de charge linéaires sont générées par les frottements le long des longueurs droites des conduites. Elles dépendent:

- du type d'écoulement et de la rugosité interne de la conduite ( $\epsilon$ )
- du diamètre de la conduite ( $1/D$ )
- de la pression dynamique ( $v^2/2g$ )
- de la longueur de la conduite.

Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur  $L$  de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre  $d$ , proportionnelle au carré de la vitesse moyenne  $v$  du fluide.

Entre deux points séparés par une longueur  $L$ , dans une conduite de diamètre  $d$  apparaît une perte de pression  $\Delta P$ . Exprimée sous les deux formes suivantes :

$$\Delta P = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \text{ ou } \Delta h = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Où  $\lambda$  est un coefficient sans dimension appelé coefficient de perte de charge linéaire.

Le calcul des pertes de charge linéaires repose entièrement sur la détermination de ce coefficient. La valeur de  $\lambda$  dépend du régime d'écoulement et de la rugosité de la conduite.

#### a) Cas de l'écoulement laminaire : $Re < 2000$

En régime laminaire, seules les forces de viscosité interviennent dans le calcul du coefficient  $\lambda$ . Etant donnée, la vitesse est très faible, l'état de la surface n'intervient pas et donc le coefficient  $\lambda$  est uniquement fonction du nombre de Reynolds  $Re$ .

Nous avons donc :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \text{ avec } Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

#### b) Cas de l'écoulement turbulent : $Re > 3000$

En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds  $Re$  est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de la rugosité  $\varepsilon$  de la conduite.

Plusieurs formules de calcul du coefficient  $\lambda$  sont proposées par différents auteurs. La formule de Colebrook est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$$

#### c) Diagramme de Moody

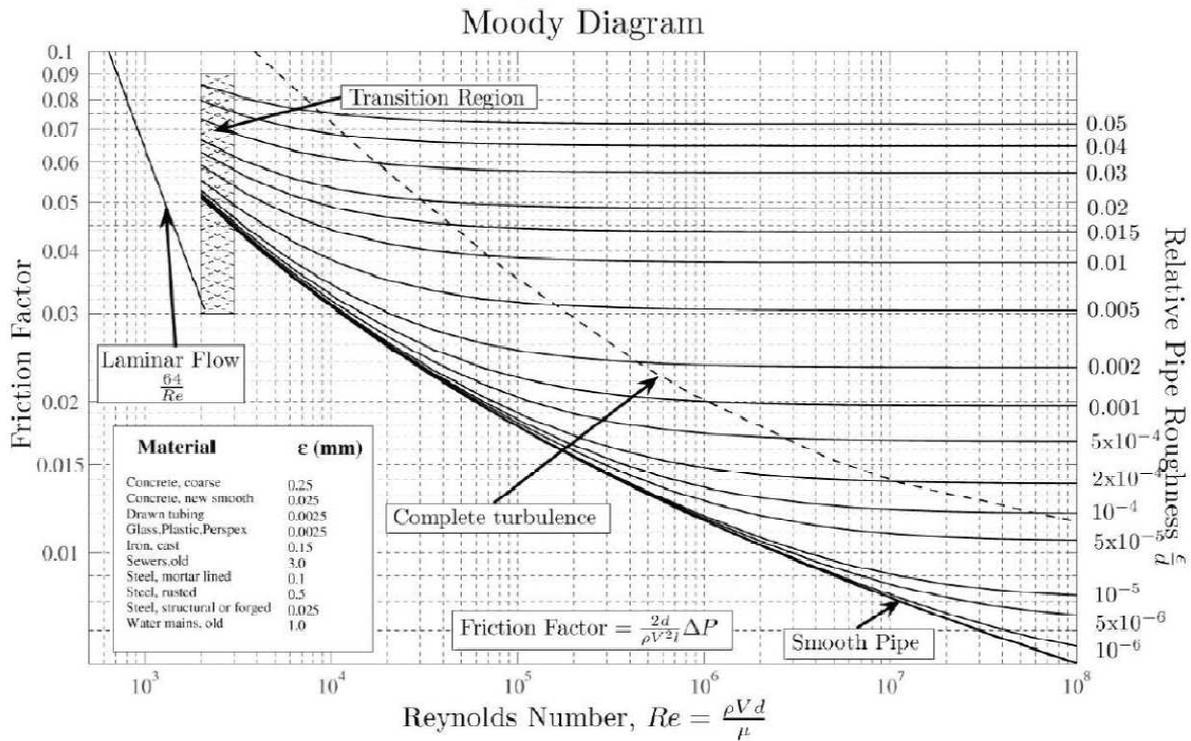
L'utilisation directe de la formule de Colebrook demanderait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations:

- postuler une valeur de  $\lambda$  ;
- calculer le terme de droite ;
- en déduire une nouvelle valeur de  $\lambda$  à partir du terme de gauche ;
- l'intégrer dans le terme de droite, et ainsi de suite.

Généralement, on obtient convergence après 3 ou 4 boucles.

La meilleure alternative à ce calcul itératif est d'utiliser directement le diagramme de Moody. Il s'agit d'un abaque de calcul direct du coefficient de perte de charge, à partir du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la paroi interne de la conduite.

Diagramme de Moody-Stanton reliant le coefficient de perte de charge régulière  $\lambda$  au nombre de Reynolds  $Re$  et à la rugosité relative  $\epsilon/D$ .



Pour s'en servir, il faut préalablement calculer le nombre de Reynolds et la rugosité relative. Une fois que ces grandeurs sont connues, on peut lire directement le coefficient de perte de charge sur le graphique.

### 4.3.3 Pertes de charge totales

Lors d'un écoulement dans une conduite, les pertes de charge totales sont l'addition de deux types de pertes de charge (régulières et singulières).

$$\Delta P_T = \Delta P_S + \Delta P_L$$

Avec :  $\Delta P_S = K_S \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2\right)$  : Pertes de charge singulières ;

$$\Delta P_L = K_L \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2\right) : \text{Pertes de charge par frottement ; où } K_L = \frac{\lambda \cdot L}{d}$$

### 4.4 Généralisation du théorème de Bernoulli aux fluides réels

Lors d'un écoulement de fluide réel, il se produit du frottement entre deux couches voisines ou entre le fluide et paroi du conduit. Ces frottements engendrent des pertes d'énergie.

Et par conséquent la quantité  $z + \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g}$ , qui représente l'énergie mécanique total n'est plus une constante sur une ligne de courant.

L'équation de Bernoulli s'écrit alors :

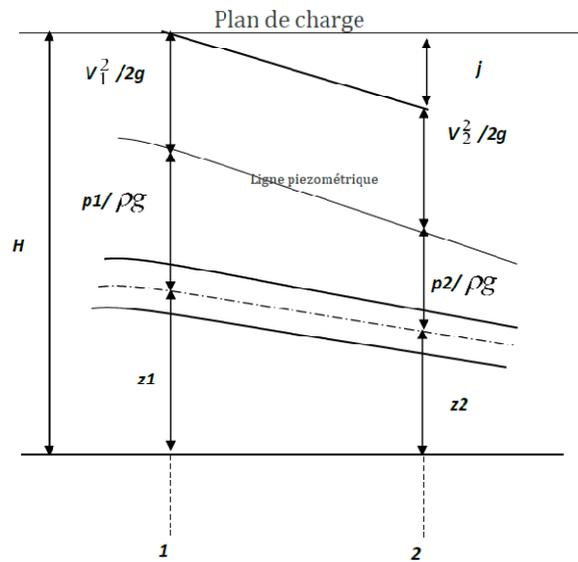
$$z + \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} + j = H = Cte$$

C'est le théorème de Daniel Bernoulli dans le cas d'un fluide réel et qui exprime qu'on tout point en mouvement permanent, la cote, la hauteur représentative de la pression, la hauteur représentative de la vitesse et la perte de charge forment une somme constante.

L'équation de Bernoulli dans le cas d'un fluide réel peut être écrite entre les deux sections (1-1) et (2-2) de la façon suivante :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + j$$

$j$  : Quantité positive, unité [Pa], c'est la Somme de toutes les pertes de charge, singulières et linéaires entre les sections (1) et (2).



## 4.5 Application

### Exercice 01 :

Déterminer la vitesse critique  $v_c$  :

a) pour du fuel moyen à 15°C circulant dans une conduite de 15 cm de diamètre ;

b) pour de l'eau à 15°C circulant dans la même conduite.

La viscosité cinématique à 15°C est :  $\vartheta_{fuel} = 4,47 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  pour du fuel et  $\vartheta_{eau} = 1,142 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  pour de l'eau.

### Solution :

a) pour l'écoulement laminaire, la valeur maximale du nombre de Reynolds est 2000.

$$2000 = Re = \frac{v_c \cdot d}{\vartheta_{fuel}} = v_c \cdot \frac{0,15}{4,47 \times 10^{-6}}$$

$$\text{d'où } v_c = \frac{2000 \times 4,47 \times 10^{-6}}{0,15} = 0,059 \text{ m/s}$$

b) pour de l'eau à 15°C

$$2000 = Re = \frac{v_c \cdot d}{\vartheta_{eau}} = v_c \cdot \frac{0,15}{1,142 \times 10^{-6}}$$

$$\text{D'où } v_c = \frac{2000 \times 1,142 \times 10^{-6}}{0,15} = 0,015 \text{ m/s}$$

### Exercice 02 :

Déterminer le type de l'écoulement ayant lieu dans une conduite de 305 mm quand

a) de l'eau à 15,6 °C circule à la vitesse de 1,067 m/s,

b) du fuel-oil lourd à 15,6 °C et circule avec la même vitesse.

La viscosité cinématique à 15,6 °C est :  $\vartheta_{eau} = 1,142 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  pour de l'eau et  $\vartheta_{fuel} = 4,47 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  pour du fuel-oil.

### Solution :

$$\text{a) } Re = \frac{v \cdot d}{\vartheta_{eau}} = \frac{1,067 \times 0,305}{1,130 \times 10^{-6}} = 288000 > 2000. \text{ L'écoulement est turbulent.}$$

$$\text{b) } Re = \frac{v \cdot d}{\vartheta_{fuel-oil}} = \frac{1,067 \times 0,305}{2,05 \times 10^{-4}} = 1590 < 2000. \text{ L'écoulement est laminaire.}$$

### Exercice 03 :

Pour que les conditions soient celles de l'écoulement laminaire, quelle doit être la taille d'une conduite, s'il doit transporter du fuel-oil moyen à 4,4 °C ( $\vartheta_{fuel-oil} = 6,08 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) à un rythme de  $5,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ ?

### Solution :

$$v = \frac{Q_V}{S} = \frac{4 \cdot Q_V}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \times 5,67 \times 10^{-3}}{\pi \cdot d^2} = 22,68 \cdot \frac{10^{-3}}{\pi \cdot d^2} \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{v.d}{\vartheta_{\text{fuel-oil}}} \text{ donc } 2000 = \frac{22,68 \times 10^{-3}}{\pi.d^2} \left( \frac{\text{¢}}{6,08 \times 10^{-6}} \right)$$

$$\text{d'où } d = \frac{22,68 \times 10^{-3}}{2000 \times 6,08 \times 10^{-6} \times \pi} = 0,59 \text{ m}$$

**Exercice 04 :**

Etablir l'expression de la perte de charge pour l'écoulement turbulent dans une conduite horizontale.

**Solution :**

Ce problème peut s'écrire mathématiquement :

$$f(\Delta P, d, \mu, \rho, l, v, \varepsilon) = 0 \text{ où } \varepsilon \text{ est la rugosité.}$$

Les grandeurs physiques exprimées en fonction des grandeurs fondamentales M, L et T sont :

$$\text{Perte de charge } \Delta P = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \quad \text{Longueur } l = L$$

$$\text{Diamètre } d = L \quad \text{Vitesse } v = L \cdot T^{-1}$$

$$\text{Viscosité } \mu = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \quad \text{Rugosité } \varepsilon = L$$

$$\text{Masse volumique } \rho = M \cdot L^{-3}$$

Il y a 7 grandeurs physiques et 3 fondamentales, d'où (7-3) soit 4 termes en  $\pi$ . Choisissons le diamètre, la vitesse et la masse volumique comme variables qui se répètent avec les exposants inconnus, les termes en  $\pi$  sont :

$$\pi_1 = d^{x_1} \cdot v^{y_1} \cdot \rho^{z_1} \cdot \mu^1 = (L^{x_1}) \cdot (L^{y_1} \cdot T^{-y_1}) \cdot (M^{z_1} \cdot L^{-3z_1}) \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})$$

$$\pi_2 = d^{x_2} \cdot v^{y_2} \cdot \rho^{z_2} \cdot l^1 = (L^{x_2}) \cdot (L^{y_2} \cdot T^{-y_2}) \cdot (M^{z_2} \cdot L^{-3z_2}) \cdot (L)$$

$$\pi_3 = d^{x_3} \cdot v^{y_3} \cdot \rho^{z_3} \cdot \varepsilon^1 = (L^{x_3}) \cdot (L^{y_3} \cdot T^{-y_3}) \cdot (M^{z_3} \cdot L^{-3z_3}) \cdot (L)$$

$$\pi_4 = d^{x_4} \cdot v^{y_4} \cdot \rho^{z_4} \cdot \Delta P^1 = (L^{x_4}) \cdot (L^{y_4} \cdot T^{-y_4}) \cdot (M^{z_4} \cdot L^{-3z_4}) \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})$$

En calculant les exposants, terme par terme, on obtient :

$$\pi_1: \begin{cases} M: z_1 + 1 = 0 \\ L: x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0 \\ T: -y_1 - 1 = 0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} z_1 = -1 \\ x_1 = -1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$$

$$\pi_2: \begin{cases} M: z_2 = 0 \\ L: x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0 \\ T: -y_2 = 0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} z_2 = 0 \\ x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_3: \begin{cases} M: z_3 = 0 \\ L: x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0 \\ T: -y_3 = 0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} z_3 = 0 \\ x_3 = -1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_4: \begin{cases} M: z_4 + 1 = 0 \\ L: x_4 + y_4 - 3z_4 - 1 = 0 \\ T: -y_4 - 2 = 0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} z_4 = -1 \\ x_4 = 0 \\ y_4 = -2 \end{cases}$$

Ainsi les termes en  $\pi$  sont :

$$\pi_1 = d^{-1} \cdot v^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu^1 = \frac{\mu}{\rho \cdot d \cdot v} \text{ et } \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\mu} = Re \text{ (nombre de Reynolds)}$$

$$\pi_2 = d^{-1} \cdot v^0 \cdot \rho^0 \cdot l^1 = \frac{l}{d} : \text{C'est un facteur de forme.}$$

$$\pi_3 = d^{-1} \cdot v^0 \cdot \rho^0 \cdot \varepsilon^1 = \frac{\varepsilon}{d} : \text{C'est la rugosité}$$

$$\pi_4 = d^0 \cdot v^{-2} \cdot \rho^{-1} \cdot \Delta P^1 = \frac{\Delta P}{\rho \cdot v^2} : \text{C'est le nombre d'Euler ou le coefficient de pression.}$$

La nouvelle relation peut à présent s'écrire :  $f_1 \left( \frac{\Delta P}{\rho \cdot v^2}, \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\mu}, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d} \right) = 0$

En résolvant en  $\Delta$ , on obtient :  $\Delta P = \frac{\omega}{g} \cdot v^2 \cdot f_2 \left( Re, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d} \right)$  où  $\rho = \omega/g$ .

Ainsi la chute de la hauteur de pression serait :  $\frac{\Delta P}{\omega} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot (2) \cdot f_2 \left( Re, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d} \right)$

S'il fallait obtenir une expression du type Darcy, l'expérience indiquerait que la chute de pression est fonction de  $l/d$  au premier degré. Ainsi :

$$\frac{\Delta P}{\omega} = \left( \frac{v^2}{2 \cdot g} \right) \cdot \left( \frac{l}{d} \right) (2) \cdot f_3 \left( Re, \frac{\varepsilon}{d} \right)$$

Qui peut s'exprimer :  $\frac{\Delta P}{\omega} = (\text{Facteur } f) \cdot \left( \frac{l}{d} \right) \cdot \left( \frac{v^2}{2 \cdot g} \right)$

### **Exercice 05 :**

De l'huile de viscosité absolue 0,101 Pa.s et de densité 0,850 circule dans 3000 m de conduite de fonte de 300 mm de diamètre au rythme de 44,4 l/s.

Quelle est la perte de charge dans la conduite ?

### **Solution :**

$$v = \frac{Q_V}{S} = \frac{Q_V}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{44,4}{0,24 \times \pi \times 0,3^2} = 0,628 \text{ m/s et } Re = \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\mu} = \frac{0,850 \times 1000 \times 0,3 \times 0,628}{0,101} = 1585$$

Ce qui veut dire que l'écoulement est laminaire.

Ainsi,

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1585} = 0,0404 \text{ et perte de charge} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} = 0,0404 \times \frac{3000}{0,3} \times \frac{0,628^2}{2 \times 9,81} = 8,14 \text{ m}$$

### **Exercice 06 :**

Calculer la perte de charge pour 305 m de longueur de conduite de fonte neuve, sans revêtement, de diamètre intérieur égal à 305 mm, quand :

a) de l'eau à 15,6 °C y coule à 1,525 m/s

b) du fuel-oil moyen à 15,6 °C coule avec la même vitesse.

On donne la rugosité de la fonte  $\varepsilon = 0,244 \text{ mm}$ , la viscosité cinématique de l'eau à  $15,6 \text{ }^\circ\text{C}$   $\nu_{eau} = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et la viscosité cinématique du fuel-oil à  $15,6 \text{ }^\circ\text{C}$   $\nu_{fuel} = 4,41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

**Solution :**

Quand on utilise le diagramme de Moody, on doit d'abord évaluer la rugosité relative et ensuite calculer le nombre de Reynolds.

a) Perte de charge pour l'eau

- la rugosité relative  $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,244}{305} = 0,0008$

-  $Re = \frac{d \cdot v}{\nu} = \frac{0,305 \times 1,525}{1,13 \times 10^{-6}} = 411000$  (écoulement turbulent)

D'après le diagramme de Moody, pour  $\frac{\varepsilon}{d} = 0,0008$  et  $Re = 411000$ ,  $\lambda = 0,0194$

La perte de charge  $\Delta H = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,0194 \times \frac{305}{0,305} \times \frac{1,525^2}{2 \times 9,81} = 2,3 \text{ m}$

b) Perte de charge pour le fuel

- la rugosité relative  $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,244}{305} = 0,0008$

-  $Re = \frac{d \cdot v}{\nu} = \frac{0,305 \times 1,525}{4,41 \times 10^{-6}} = 105000$  (écoulement turbulent)

D'après le diagramme de Moody, pour  $\frac{\varepsilon}{d} = 0,0008$  et  $Re = 105000$ ,  $\lambda = 0,0213$

La perte de charge  $\Delta H = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,0213 \times \frac{305}{0,305} \times \frac{1,525^2}{2 \times 9,81} = 2,53 \text{ m}$

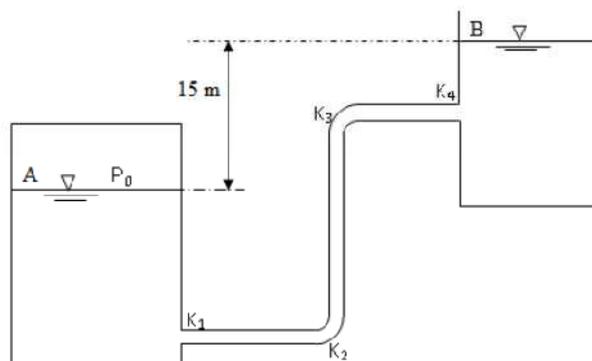
**Exercice 07 :**

Grace à une surpression  $P_0$ , l'eau circule du réservoir A vers le réservoir B au moyen d'une conduite de diamètre  $d = 300 \text{ mm}$  de rugosité  $\varepsilon = 0,3 \text{ mm}$  et de longueur  $l = 170 \text{ m}$ .

Les coefficients des pertes de charges singulières sont  $K_1 = 0,5$  a la sortie du réservoir A,  $K_2 = K_3 = 0,15$  pour les deux coudes et  $K_4 = 1$  a l'entrée du réservoir B.

Déterminez la pression manométrique  $P_0$  pour avoir un débit de  $Q_V = 200 \text{ l/s}$ .

On donne  $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $\nu = 1,005 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$



**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{v_B^2}{2g} + Z_B + \Delta H$$

On a :  $Z_A = 0, Z_B = 15 \text{ m}$  et  $P_B = P_{atm}$  (négligeable) et  $P_A = P_0$

$$v_A = v_B = 0, \text{ alors : } \frac{P_0}{\rho \cdot g} = 15 + \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{Où, } \Delta H = \Delta H_L + \sum \Delta H_s = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \sum K_i \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{Q_V}{S} = \frac{4 \cdot Q_V}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \times 0,2}{\pi \cdot 0,3^2} = 2,83 \text{ m/s}$$

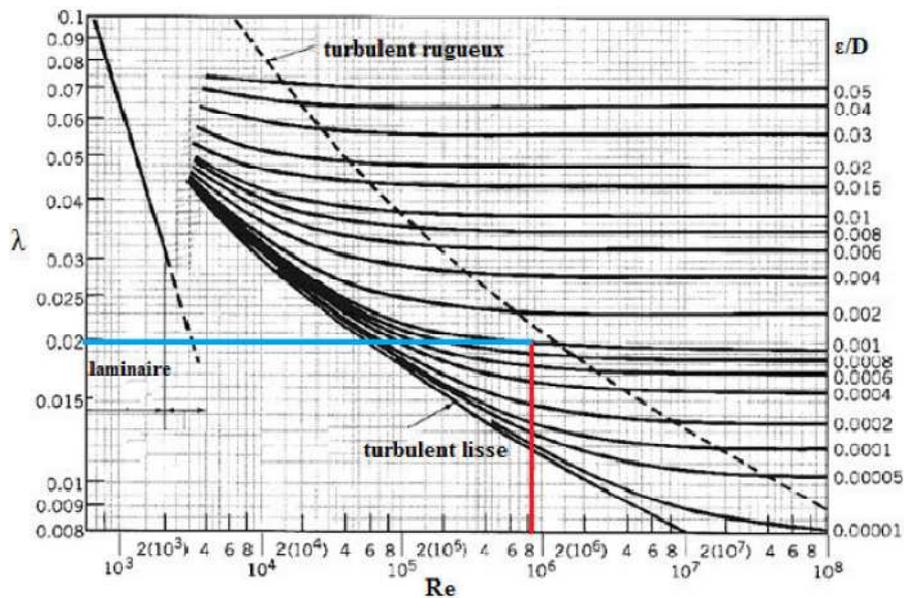
Pour calculer  $\lambda$ , il faut calculer  $\varepsilon/d$  et  $Re$ :

- la rugosité relative  $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,3}{300} = 0,001$

-  $Re = \frac{d \cdot v}{\nu} = \frac{0,3 \times 2,83}{1,005 \times 10^{-6}} = 844776$  (écoulement turbulent)

D'après le diagramme de Moody, pour  $\frac{\varepsilon}{d} = 0,001$  et  $Re = 844776$ ,  $\lambda = 0,0199 \approx$

0,02 (voir la figure ci-dessous).



$$\frac{P_0}{\rho \cdot g} = 15 + 0,02 \times \frac{170}{300} \times \frac{(2,83)^2}{2 \times 9,81} + (0,5 + 0,15 + 0,15 + 1) \times \frac{(2,83)^2}{2 \times 9,81}$$

$$\frac{P_0}{\rho \cdot g} = 19,99 \text{ m} \Rightarrow P_0 = 19,99 \times 103 \times 9,81$$

$$\Rightarrow P_0 = 196,102 \times 10^3 \text{ Pa} = 196,1 \text{ kPa.}$$

## **Bibliographie**

Mécanique des fluides 2 ème édition, Sakir Amiroudiene, Jean-Luc Battaglia, Dunod, Paris, 2011.

Mécanique des fluides appliquée, 2e édition, Jean-Paul Beaudry, Jean-Claude Rolland Berger Eds, 2009.

Hydrodynamique - Une Introduction by Walter H. Graf and M. S. Altinakar, Presses Poly techniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1995.

Mécanique des fluides et hydraulique, Cours et problèmes, 2ème édition, Jack-B Evett, Ranald-V Giles, Cheng Liu, Ediscience International, 1995.

Mécanique des fluides, tome 1, étude des liquides l'hydrostatistique, l'hydrodynamique et les solutions binaires, MS. Maalem, Science Exactes Physique, 1993.

Mécanique des fluides, Ion Paraschivoiu, Michel Prud'homme, Luc Robillard, Presses inter Polytechnique, 2003.

Mécanique expérimentale des fluides, Volume 1 Statique et dynamique des fluides non visqueux, 5ème édition, Raymond Comolet, Elsevier Masson, 1997.

Mécanique expérimentale des fluides, Tome 2 dynamique des fluides réels, Turbomachines, , 4ème édition, Raymond Comolet, Elsevier Masson, 1994.