الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

المدرسة العليا للاقتصاد وهران
École Supérieure d'Économie- Oran

Polycopié

Présentée par:
Dr. MOHAMED ELARBI BENATTIA

Spécialité : **MATHEMATIQUES**

Module : **ANALYSE MATHEMATIQUES I**

Cours et exercices d'applications

Oran 2020

Table des matières

Remerciements

A l'issue de ce travail, je tiens à exprimer toute ma gratitude à l'ensemble des personnes qui ont contribué, chacune à sa manière, à l'accomplissement de ce polycopié. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon encadreur le professeur BELGHABA Kacem . Les mots me manquent pour exprimer ma gratitude. Je le remercie pour son encadrement et ses conseils avisés et aussi pour sa qualité humaine et chaleureuse, et surtout pour la confiance qu'il m'a accordé.
Je remercie tous les enseignants qui m'ont donné une partie de leur savoir au niveau du l'Ecole Supérieure d'Economie d'Oran et en particulier mes collègues qui m'a toujours aidé scientifiquement, sans oublier mes parents, mes frères, mes sœurs et ma famille. Merci pour votre patience

Mohamed ELARBI BENATTIA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail aux mes êtres les plus chers aux monde.
A la mémoire de ma Mère.
A mon Père qui a tant sacrifié pour mes études.
A mes Frères et Sœurs.
A tous mes amis et mes collègues.
A mes enfants Bilal , Abderrahmanne , Ibrahim et Zakaria.
A ma chère femme.
Enfin, je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Avant - propos

Ce polycopié couvre le premier semestre de programme d'Analyse de première année d'école supérieure d'économie qui y trouveront autant les notions et les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer. le respect du programme officiel est un principe que nous avons suivi à la lettre. Nous avons privilégier l'exposé des méthodes de calcul (théorèmes, propositions,..) sans démontrer quoi que ce soit pour aller directement vers le but et ceci en ajoutant des exercices avec des solutions détaillées.

Le premier chapitre rappelle les nombres réels et les différentes application telles que les intervalles, la valeur absolue, la borne supérieure et la borne inférieure et autres. Le second chapitre initie le lecteur aux limites et fonctions continues à variable réelle. Le troisième chapitre est consacré aux comparaison de fonctions(petit O et équivalence....). Le chapitre quatre est réservé aux dérivabilité des fonctions dans l'ensemble des nombres réels et ses applications. Nous espérons que la pratique de ce polycopié aidera les étudiants à assimiler plus rapidement les notions et les méthodes introduit au cours. Nos plus grands remerciements s'adresser à tout ceux et celles qui ont contribué à la formation des étudiants aux Ecole Supérieure d'Economie.

Symboles logiques et mathématiques

1. $=$: égalité, $x = y$: x est égal à y.
2. $\vee$: ou, $a \vee b$: a ou b.
3. $\wedge$: et, $a \wedge b$: a et b.
4. $\Rightarrow$ implication,
   (a) $a \Rightarrow b$: a implique b, ou a donc b.
   (b) a : condition suffisante de b ; pour que b il suffit a.
   (c) b : condition nécessaire de a, pour que a il faut b.
5. $\Leftrightarrow$ équivalence, $a \Leftrightarrow b$: a est équivalente à b,
   (a) condition nécessaire et suffisante, pour que a il faut et il suffit b,
   (b) a si et seulement b.
6. $\in$: appartenance, $a \in A$: a appartient à A.
7. $\subset$: inclusion, $A \subset B$: A est inclus dans B.
8. $\supset$: contenance, $A \supset B$: A contient B.
9. $\cap$: intersection, $A \cap B$: A inter B.
10. $\cup$: réunion, $A \cup B$: A union B.
11. $\emptyset$: vide.
12. $\leq, \geq$ inégalités larges, $x \leq y$: x inférieur ou égal à y.
13. $y \geq x$: y supérieur ou égal à x.
14. $<, >$ inégalités strictes, $x < y$: x est strictement inférieur à y.
    (a) $y > x$: y est strictement supérieur à x.
15. ∞ : infini.
16. $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.
17. $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs.
18. $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels.
19. $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
20. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: ensemble des nombres irrationnels.

Alphabet grec

α : alpha.	β : beta.	γ : gamma.
Γ : Gamma.	ζ : zeta.	η : eta.
θ : theta.	ϑ : vartheta.	λ : lambda.
μ : mu.	π : pi.	ϕ : phi.
τ : tau.	ω : omega.	Σ : Sigma.
ε : epsilon.	σ : sigma.	δ : delta.

Types de raisonnement mathématique

Les principaux types de raisonnement mathématiques sont les suivants :

1)Raisonnement déductif :

Il se base sur le raisonnement logique suivant : si p est une proposition vraie et si la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie, alors q est vraie. C'est le raisonnement le plus utilisé qui consiste à déduire un résultat à partir d'axiomes ou de propositions déjà démontrées ou supposées vraies, par une suite finie d'implications logiques de la forme suivante : supposons qu'on veut démontrer que la proposition q est vraie sachant que la proposition p, appelée hypothèse, est vraie, alors la chaine des implications suivantes :

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow ..... \Rightarrow p_n \Rightarrow q$$

où p_1, p_2, ..., p_n sont des résultats vrais intermédiaires, implique en fin de compte que q est vraie.

2) Raisonnement par la contraposée :

Il se base sur l'équivalence logique suivante :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

Ainsi, si on veut démontrer que la relation $(p \Rightarrow q)$ est vraie, il faut et il suffit de démontrer la relation $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$, appelée contraposée de la première.

3) Raisonnement par l'absurde :

Il se base sur le principe de tiers exclu, c'est à dire qu'en mathématiques une proposition est soit vraie, soit fausse. Il consiste, pour démontrer qu'une proposition p soit vraie, à supposer qu'elle est fausse, c'est à dire que $\overline{p}$ est vraie. Alors, par un raisonnement logique, on aboutit à une absurdité ou à une contradiction avec l'hypothèse ou avec un résultat établi comme vrai. Dans ce cas $\overline{p}$ est fausse, donc p est vraie.

4) Raisonnement par récurrence :

Celui-ci permet de démontrer qu'une proposition $P(n)$, dépendant de l'entier n, soit vraie à partir de n_0 fixé. Il consiste :

1. à démontrer que $P(n_0)$ est vraie,
2. à supposer que $P(n)$, $n \geqslant n_0$ est vraie et démontrer que $P(n+1)$ est vraie.

Alors, on conclut que$P(n)$est vraie$\forall\, n \geqslant n_0$.

Chapitre 1

Les nombres réels. Eléments de topologie

1.1 Rappel

On rappelle que l'ensemble des **entiers naturels** est noté par $\mathbb{N} = \Big\{0, \ \ 1, \ \ 2, \ \ \ldots, \ \ n, \ \ \ldots\Big\}$, l'ensemble des **entiers relatifs** noté par $\mathbb{Z} = \Big\{\ldots, -n, \ \ \ldots, \ \ -2, \ \ -1, \ \ 0, \ \ 1, \ \ 2, \ \ \ldots, \ \ n, \ \ \ldots\Big\}$ où $(-n)$ vérifie l'équation $n + a = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et l'ensemble des **entiers rationnels** est défini par $\mathbb{Q} = \Big\{r = \frac{p}{q}, \quad p, \, q \in \mathbb{Z}\,, \quad q \neq 0\Big\}$ qui muni des lois somme et produit, est un corps commutatif dans lequel : $\forall \, x, \ y \ \in \mathbb{Z}$, l'équation $by + a = x \, (y \neq 0)$ admet des solutions.

Proposition 1.1. *Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Par exemple

$$\frac{4}{5} = 0.8 \quad \frac{11}{8} = 1.\underleftrightarrow{27}2727...$$

Montrons que $x = 4.2\underleftrightarrow{156}156...$ est rationnel. L'idée est d'abord de faire apparaitre la partie périodique juste après la virgule. Dans ce cas la période commence un chiffre après, donc on multiple par 10, on obtient

$$10x = 42.156156156.... = 42 + 0.156156... \tag{1.1}$$

On pose $e = 0.156156...$, on va décaler tout vers la gauche de la longueur du période, on multiple e par 1000 on obtient :

$1000e = 156.156156.. = 156 + e \Rightarrow 999e = 156 \Leftrightarrow e = \frac{156}{999}$, par substitution la valeur de e dans Eq (1.1), nous donne :

$$10x = 42 + e = 42 + \frac{156}{999} = \frac{41958 + 156}{999} = \frac{42114}{999} \Rightarrow x = \frac{42114}{9990}.$$

Définition 1.1. On appelle nombre irrationnel tout développement décimal illimité non périodique.

— On appelle ensemble des nombres réels, l'ensemble noté $\mathbb{R}$, formé des nombres rationnels et irrationnels.

1.2 Définition axiomatique des nombres réels

L'ensemble des nombres réels, muni de deux lois de compositions internes : somme noté $(+)$ et produit noté $(.)$, ainsi que d'une relation $\leq$, satisfaisant aux axiomes suivants :
(A_1) : $x+y=y+x$, $\forall\, x,\ y\ \in \mathbb{R}$ **(commutativité).**
(A_2) : $x+(y+z)=(x+y)+z$, $\forall\, x,\ y\,,z\ \in \mathbb{R}$ **(associativité).**
(A_3) : $\exists e\ \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre** pour la loi $(+)$, noté $e=0$, vérifiant $x+0=0+x=x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
(A_4) : $\forall x\ \in \mathbb{R} \exists x'\ \in \mathbb{R}$, appelé **élément symétrique** de x, noté $x'=-x$, vérifiant $x+x'=0$.
(A_5) : $x.y=y.x$, $\forall\, x,\ y\ \in \mathbb{R}$.
(A_6) : $x.(y.z)=(x.y).z$, $\forall\, x,\ y\,,z\ \in \mathbb{R}$.
(A_7) : $\exists e'\ \in \mathbb{R}$, appelé **élément neutre** pour la loi $(.)$, noté $e'=1$, vérifiant $x.1=1.x=x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
(A_8) : $\forall x\ \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 0\ \exists\, x'=x^{-1}\ \in \mathbb{R}$, appelé **élément inverse** de x, vérifiant $x.x'=1$, ou $x'=\dfrac{1}{x}$.
(A_9) : $x.(y+z)=x.y+x.z$, $\forall\, x,\ y\,,z\ \in \mathbb{R}$ **(distributivité).**
(A_{10}) : $x \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $\leq$ est **réflexive.**
(A_{11}) : $\forall\, x,\ y\ \in \mathbb{R}$, $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x=y$, $\leq$ **est antisymétrique.**
(A_{12}) : $\forall\, x,\ y\,,z\ \in \mathbb{R}\ \ (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$, $\leq$ **est transitive.**
(A_{13}) : $\forall\, x,\ y\ \in \mathbb{R}$, on a, soit $(x \leq y)$, soit $(y \leq x)$ **(ordre total).**
(A_{14}) : $\forall\, x,\ y\ \in \mathbb{R}$, $(x \leq y) \Rightarrow (x+z \leq y+z)$, $\forall z\ \in \mathbb{R}$.
(A_{15}) : $\forall\, x,\ y\ \in \mathbb{R}$, et $z\ \geq 0$, on a $(x \leq y) \Rightarrow (x.z \leq y.z)$.

1.3 Puissance, exponentielle et logarithme d'un nombre réel.

En plus des opérations somme et produit, on définit la puissance entière d'un nombre réel $x \neq 0$ par
$$x^0=1,\ x^n=x^{n-1}.x,\ n \geq 1.$$

La racine n-ième d'un nombre réel positif a existe toujours dans $\mathbb{R}$ et elle est unique, c'est à dire il existe un seul $x > 0$ tel que $x^n = a$. On note dans ce cas $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. De même,

1. Si $a > 0$, $a \neq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, alors il existe un seul réel y, noté $y = a^x$ appelé puissance de a avec exposant réel ou exponentielle de base a de x.
2. Si $a > 0$, $a \neq 1$ et $y > 0$, alors il existe un seul réel x, noté $x = \log_a(y)$ appelé logarithme de y de base a. Donc

$$y = a^x,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \log_a(y),\ y > 0.$$

Le nombre $a > 0$, $a \neq 1$ tel que $\log_a(a) = 1$ est appelé nombre de Néper, on le note $a = e$ ($e = 2,718281.....$). Dans ce cas, on note exponentielle par e^x ou $\exp(x)$ et $\log_e(x) = \ln(x)$ appelé logarithme néperien.

1.3.1 Propriétés de l'exponentielle et du logarithme $a > 0,\ a \neq 1$

1. $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R},\ a^{x+y} = a^x a^y$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
3. $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R},\ (a^x)^y = a^{xy}$.
4. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, b > 0,\ b \neq 1 :\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.
5. $\forall\, x,\ y > 0,\ \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
6. $\forall\, x,\ y > 0,\ \log_a(\dfrac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
7. $\forall\, x > 0,\ \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
8. Si $a > 1$, alors $\left(x > x' \Rightarrow a^x > a^{x'} \ et\ \log_a(x) > \log_a(x')\right)$.
9. Si $0 < a < 1$, alors $\left(x > x' \Rightarrow a^x < a^{x'} \ et\ \log_a(x) < \log_a(x')\right)$.

1.4 Propriété d'Archimède

$\mathbb{R}$ est archimédien si

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ n > x$$

Cette propriété permet de définir la partie entière d'un nombre réel :

Proposition 1.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatifs, la partie entière notée $E(x)$, tel que*

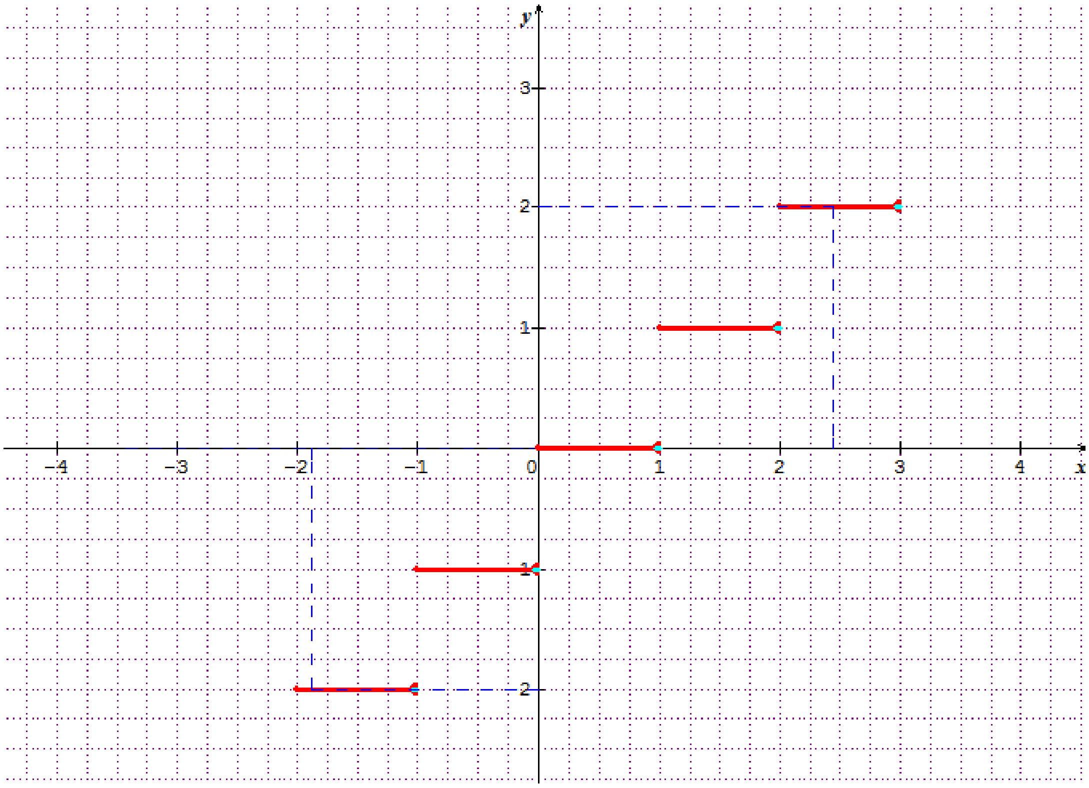
$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemple 1.1. $E(2,145) = 2,\ E(e) = 2,\ E(-1,784) = -2.$

$E(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1.$

— On note aussi $E(x) = [x]$

— Le graphe de la fonction $x \mapsto E(x)$

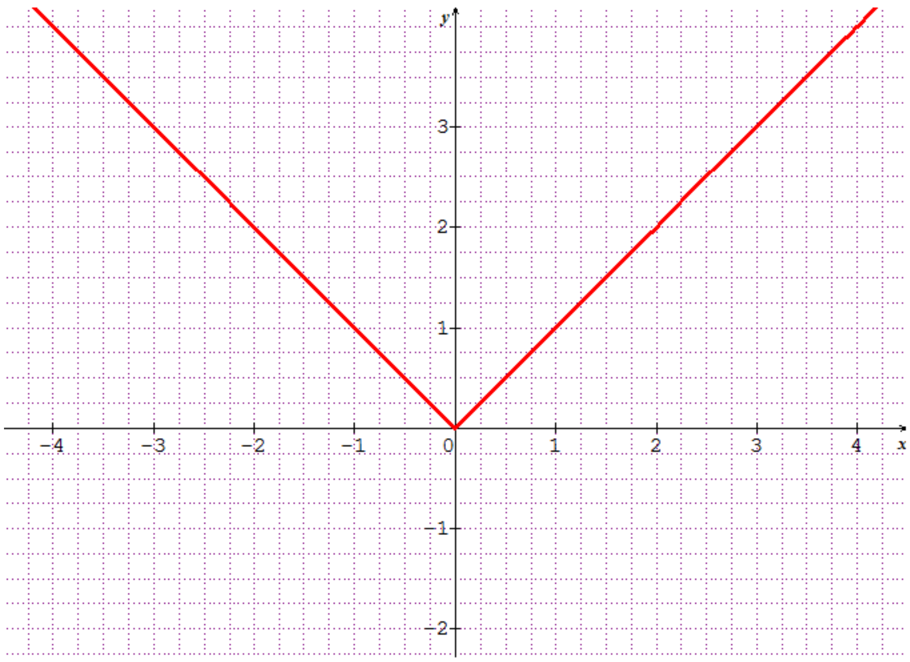


1.5 Valeur absolue

Définition 1.2. Pour un nombre réel x, on définit la valeur absolue de x par :

$$\left|x\right| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Voici le graphe de la fonction $x \mapsto \left|x\right|$:



Proposition 1.3. *Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$:*

1. $\left|x\right| \geqslant 0, \qquad \left|-x\right| = \left|x\right|, \qquad \sqrt{x^2} = \left|x\right|.$
2. $\left|xy\right| = \left|x\right|\left|y\right|, \qquad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{\left|x\right|}{\left|y\right|},\ y \neq 0.$
3. $\left|x+y\right| \leqslant \left|x\right| + \left|y\right|$. **Inégalité triangulaire**.
4. $\left|\left|x\right| - \left|y\right|\right| \leqslant \left|x-y\right|$**. Deuxième inégalité triangulaire**.

Démonstration. Les inégalités triangulaires.

i)- $\begin{cases} -\left|x\right| \leqslant x \leqslant \left|x\right| \\ \\ -\left|y\right| \leqslant y \leqslant \left|y\right| \end{cases}$. En additionnant, $-\left(\left|x\right| + \left|y\right|\right) \leqslant x+y \leqslant \left|x\right| + \left|y\right| \Rightarrow \left|x+y\right| \leqslant \left|x\right| + \left|y\right|$

ii)- Puisque $x = x - y + y$, d'après la première inégalité, on a

$$\left|x\right| = \left|x-y+y\right| \leqslant \left|x-y\right| + \left|y\right| \Rightarrow \left|x\right| - \left|y\right| \leqslant \left|x-y\right|$$

et en intervertissant les rôles de x et y, on a aussi $\left|y\right| - \left|x\right| \leqslant \left|y-x\right|$, mais $\left|y-x\right| = \left|x-y\right|$, alors, $-\left|x-y\right| \leqslant \left|x\right| - \left|y\right|$, on a donc

$$\left|\left|x\right| - \left|y\right|\right| \leqslant \left|x-y\right|$$

$\square$

Proposition 1.4. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$:*

1. $\left|x\right| = a \Leftrightarrow (x = a)$ *ou* $(x = -a)$.
2. $\left|x\right| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.
3. $\left|x\right| \geqslant a \Leftrightarrow (x \geqslant a)$ *ou* $(x \leqslant -a)$.

1.6 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.3. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I)$$

Les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$ sont : $a, b \in I, a \leqslant b$:
1)- $\left[a\,;b\right] = \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$(Intervalle borné extrémité a et b).
2)- $\left]a\,;b\right[= \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, a < x < b\right\}$(Intervalle borné extrémité a et b).
3)- $\left]a\,;b\right] = \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, a < x \leqslant b\right\}$(Intervalle borné extrémité a et b).
4)- $\left[a\,;b\right[= \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, a \leqslant x < b\right\}$(Intervalle borné extrémité a et b).
5)- $\left[a\,;+\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, x \geqslant a\right\}$(Intervalle non borné extrémité a et b).
6)- $\left]a\,;+\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, x > a\right\}$(Intervalle non borné extrémité a et b).
7)- $\left]-\infty\,;b\right] = \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, x \leqslant b\right\}$(Intervalle non borné extrémité a et b).
8)- $\left]-\infty\,;b\right[= \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, x < b\right\}$(Intervalle non borné extrémité a et b).
9)- $\mathbb{R} = \left]-\infty\,;+\infty\right[$(Intervalle ouvert et fermé a la fois de $\mathbb{R}$).

Définition 1.4. Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

1.7 Densité

Théorème 1.1. *i) - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.*

ii) - $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.

1.8 Borne supérieure, borne inférieure

1.8.1 Maximum, minimum

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Définition 1.5. Un réel a est un plus grand élément de A si :

$$a \in A \qquad et \quad \forall\, x \in A, \quad x \leqslant a.$$

S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors $\max A$.

Définition 1.6. Un réel b est un plus petit élément de A si :

$$b \in A \qquad et \quad \forall\, x \in A, \quad x \geqslant b.$$

S'il existe, le plus petit élément est unique, on le note alors $\min A$.

Remarque 1.1. Le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Exemple 1.2. i) - $\max\big[0\,;6\big] = 6, \quad \min\big[0\,;6\big] = 0$

ii) - L'intervalle $]a\,, b[$ n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.
iii) - L'intervalle $]1\,, 7\big]$ n'a pas de plus petit élément et a pour plus grand élément 7.

1.8.2 Majorants, minorants

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1.7. Un réel M est un majorant de A si $\forall\, x \in A, \quad x \leqslant M.$
Un réel m est un minorant de A si $\forall\, x \in A, \quad x \geqslant m.$

Exemple 1.3. i) 2 est majorant de $\big[0\,;1\big]$.
ii) $-1,\ -8$ sont des minorants de $\big[0.5\,;6\big]$.
iii) Si un majorant (resp. Un minorant) de A existe on dit que A est majorée (resp. Minorée). Comme pour le minimum et le maximum il n'existe pas toujours de majorant ni de minorant, en plus on n'a pas l'unicité.

Exemple 1.4. Soit $I = \big]-5\,;2\big]$
— Les majorants de I sont les éléments de $\big[2\,;+\infty\big[$.
— Les minorants de I sont les éléments de $\big]-\infty\,;-5\big]$.

1.8.3 Borne supérieure, borne inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et a un réel.

Définition 1.8. a est la borne supérieure de A si est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.

Définition 1.9. a est la borne inférieure de A si est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Définition 1.10. A est borné s'il est à la fois majoré et minoré c'est-à-dire s'il existes $M,\ m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M.$$

Exemple 1.5. Soit $A = \left]-5\,;2\right]$.

1. $\sup A = 2$ et les majorants de A sont les éléments de $\left[2\,;+\infty\right[$. Donc le plus petit des majorants est 2.
2. $\inf A = -5$ et les minorants de A sont les éléments de $\left]-\infty\,;-5\right]$. Donc le plus grand des minorants est -5.

Théorème 1.2. *i) - Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*
ii) - Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Théorème 1.3. *Si A est un ensemble majoré de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$, alors*

$$\textit{1) - } M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} i) -\ M \textit{ est un majorant de } A, \\ \\ ii) -\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A\ :\ M - \varepsilon < x \leqslant M. \end{cases}$$

Si A est un ensemble minoré de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, alors

$$\textit{2) - } m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i) -\ m \textit{ est un minorant de } A, \\ \\ ii) -\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A\ :\ m \leqslant x < m - \varepsilon. \end{cases}$$

1.9 Exercices

Exercice 1.1. i) - Démontrer que les nombres suivants ne sont pas rationnels :
$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+1$, $\log_2(5)$.
ii) - Montrer que le nombre $x = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ est irrationnel et
$y = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est rationnel.

Solutions

i)-1) Raisonnons par l'absurde, c'est à dire supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^\star$ avec $p\,,\, q$ sont premiers entre eux et trouvons une contradiction.
En élevant le carrée, on obtient

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.2}$$

c'est à dire que p^2 est un entier pair, et dans ce cas p est aussi pair. Soit alors $p = 2k$. En remplaçant dans l'égalité (1.2) et après simplification, on obtient

$$q^2 = 2k^2$$

c'est à dire que q^2 est un entier pair, et dans ce cas q est aussi pair. Ceci contredit le fait que p et q sont premiers entre eux. Donc l'hypothèse que $\sqrt{2} \ \in \mathbb{Q}$ est fausse, c' est à dire que $\sqrt{2} \ \notin \mathbb{Q}$.
2)- $\sqrt{2}+1 \ \notin \mathbb{Q}$, on utilise le résultat de 1). En effet, supposons que $\sqrt{2}+1 = r \ \in \mathbb{Q}$, on a $1 \ \in \mathbb{Q}$ alors $(r-1) \ \in \mathbb{Q}$ c'est à dire $\sqrt{2} \ \in \mathbb{Q}$, Ce qui contredit le résultat de 1). Donc $\sqrt{2}+1 \ \notin \mathbb{Q}$.
3)- Raisonnons par l'absurde, c'est à dire supposons que $\log_2(5) = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $p \ \in \mathbb{Z}^+$ et $q \ \in \mathbb{Z}_+^\star$ avec $p\,,\, q$ sont premiers entre eux et trouvons une contradiction.

$$\log_2(5) = \frac{p}{q} \Leftrightarrow q\ \ln(5) = p\ \ln(2), \tag{1.3}$$

on a

$$\left\{\begin{array}{l} p/q\ \ln(5) \\ \\ PGCD(p\,,q) = 1 \end{array}\right. \overset{d'aprés\, Gauss}{\Longrightarrow} p/\ln(5)$$

c'est à dire $\exists\, k \ \in \ \mathbb{Z}\ :\ \log(5) \ = \ kp$, et de même méthode, on trouve $\log(2) \ = \ k'q$. Par substitution dans (1.3), on obtient $k = k'$, par conséquent $\log(5) = p \ \notin \ \mathbb{Z}$ et $\log(2) = q \notin \mathbb{Z}$. Donc l'hypothèse que $\log_2(5) = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est fausse, alors $\log_2(5) \notin \mathbb{Q}$.
ii) 1)- En élevant l'égalité $x = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ à la puissance 2, et après simplification et arrangement des termes, on obtient l'équation suivante :

$$x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$

2)- $y^2 = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 = 7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}+2\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}$
$= 14 + 2\sqrt{7^2 - 16\times 3} = 16.$

Les deux valeurs possibles de y sont $y = 4$ ou $y = -4$, et comme $y > 0$, alors $y = 4 \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.2. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire que $\sqrt{2} \in R \setminus \mathbb{Q}$).

1. Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

Solutions

1. Si α est rationnel, alors $\sqrt{2} = \dfrac{\alpha - 6}{4}$ est rationnel, ce qui est faux, donc α est irrationnel. Et de même pour β.
2. $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\left(6 + 4\sqrt{2}\right)\left(6 - 4\sqrt{2}\right)} = \sqrt{36 - 32} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$.
3. $\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 12 + 4 = 16 \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \in \mathbb{Q}$, $\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0\right)$.

Exercice 1.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\left|x + 3\right| = 4$, 2) $\left|2 - 4x\right| = 3x$, 3) $\left|2x + 3\right| = \left|x - 2\right|$, 4) $\left|\dfrac{x + 4}{2x - 1}\right| = 1$.

5) $\sqrt{(x - 2)^2} = -x + 2$, 6) $\left|x - 5\right| + \left|x - 2\right| = 7$. 6) $\left|x - 1\right| + \left|x + 1\right| < 10$,

Solutions :

1) $\left|x + 3\right| = 4 \Leftrightarrow (x + 3 = 4) \vee (x + 3 = -4) \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = -7)$.

2) $$\left|2 - 4x\right| = \begin{cases} 2 - 4x & si \quad 2 - 4x \geqslant 0 \\ & ou \\ -2 + 4x & si \quad 2 - 4x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4x & si \quad x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ & ou \\ -2 + 4x & si \quad x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

On résout deux équations :

Si $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a

$$2 - 4x = 3x \Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Si $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, on a

$$-2 + 4x = 3x \Leftrightarrow x = 2 \geqslant \frac{1}{2},$$

alors l'ensemble des solutions $S = \left\{2; \dfrac{1}{2}\right\}$.

3) $$\left|2x + 3\right| = \left|x - 2\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = x - 2 \\ ou \\ 2x + 3 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ ou \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Alors l'ensemble des solutions $S = \left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$.

4) $\left|\dfrac{x+4}{2x-1}\right| = 1$, cette équation a un sens si $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$.

$$\left|\frac{x+4}{2x-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|x+4\right| = \left|2x-1\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+4 = 2x-1 \\ ou \\ x+4 = -2x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5 \\ ou \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

Alors l'ensemble des solutions $S = \left\{5;\ -1\right\}$.

5) $\sqrt{(x-2)^2} = -x+2$: il y a deux méthodes.

Première méthode :

$$\sqrt{(x-2)^2} = -x+2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x-2)^2 = (-x+2)^2 \\ \\ -x+2 \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x-2)^2 = (x-2)^2\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \\ x \leqslant 2 \end{array}\right. ,$$

Donc $S = \left]-\infty\,;2\right]$.

Deuxième méthode :

$$\sqrt{(x-2)^2} = -x+2 \Leftrightarrow \left|x-2\right| = -x+2, \tag{1.4}$$

l'équation (1.4) admet une solution si et seulement si $-x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$, mais dans cet intervalle, on a $\left|x-2\right| = -x+2$, par substitution dans (1.4), on obtient

$$-x+2 = -x+2,\ \textit{est vrais}\ \forall\, x\ \in \mathbb{R}$$

alors, l'ensemble des solutions $S = \left]-\infty\,;2\right]$.

6) $\left|x-5\right| + \left|x-2\right| = 7$, on a

$$\left|x-5\right| = \left\{\begin{array}{c} x-5 \quad si \quad x-5 \geqslant 0 \\ ou \\ -x+5 \quad si \quad x-5 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-5 \quad si \quad x \geqslant 5 \\ ou \\ -x+5 \quad si \quad x \leqslant 5 \end{array}\right. .$$

$$\left|x-2\right| = \left\{\begin{array}{c} x-2 \quad si \quad x-2 \geqslant 0 \\ ou \\ -x+2 \quad si \quad x-2 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-2 \quad si \quad x \geqslant 2 \\ ou \\ -x+2 \quad si \quad x \leqslant 2 \end{array}\right. .$$

On va dresser le tableau des valeurs absolus :

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$\lvert x-5\rvert$	$5-x$		$5-x$	0	$x-5$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	0	$x-2$		$x-2$
$\lvert x-2\rvert+\lvert x-5\rvert$	$-2x+7$		3		$2x-7$

- Si $x \in \left]-\infty\,;2\right]$: on a

$$7-2x=7 \Leftrightarrow x=0.$$

- Si $x \in \left[2\,;5\right]$: on a $3=7$(fausse).
- Si $x \in \left[5\,;+\infty\right[$, on a

$$2x-7=7 \Leftrightarrow x=7.$$

Alors l'ensemble des solutions $S=\left\{0;\ 7\right\}$.

Exercice 1.4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\left|2x+3\right| \leqslant 4$, 2) $\left|x-2\right| > \left|x\right|$, 3) $\left|2x+3\right| \leqslant \left|x-2\right|$, 4) $\left|\dfrac{x+4}{2x-1}\right| < 1$,

5) $\left|x-1\right|+\left|x+1\right| < 10$.

Solutions :

1) $\left|2x+3\right| \leqslant 4 \Leftrightarrow -4 \leqslant 2x+3 \leqslant 4 \Leftrightarrow -7 \leqslant 2x \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$,

donc l'ensemble des solutions $S=\left[-\dfrac{7}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

2) $$\left|x-2\right| > \left|x\right| \Leftrightarrow \left|x-2\right|^2 > \left|x\right|^2 \Leftrightarrow (x-2)^2-x^2>0,$$
$$\Leftrightarrow [x-2-x]\,[x-2+x]>0 \Leftrightarrow -2\,(2x-2)>0$$
$$\Leftrightarrow 4\,(x-1)<0 \Rightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1.$$

Donc, l'ensemble des solutions $S=\left]-\infty\,1\right[$.

3) $$\left|2x+3\right| \leqslant \left|x-2\right| \Leftrightarrow (2x+3)^2 \leqslant (x-2)^2\,,$$
$$\Leftrightarrow [2x+3+x-2]\,[2x+3-x+2] \leqslant 0 \Leftrightarrow (3x+1)\,(x+5) \leqslant 0.$$

On va dresser le tableau de signe de $(3x+1)\,(x+5)$:

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x+1)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc l'ensemble des solutions $S = \left[-5\,;-\dfrac{1}{3}\right]$.

4) $\left|\dfrac{x+4}{2x-1}\right| < 1$, cette inéquation a un sens si $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$.

$$\left|\dfrac{x+4}{2x-1}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|x+4\right| < \left|2x-1\right| \Leftrightarrow (x+4)^2 < (2x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow (x+4+2x-1)\,(x+4-2x+1) < 0 \Leftrightarrow (3x+3)\,(-x+5) < 0.$$

On va dresser le tableau de signe de $(3x+3)\,(-x+5)$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$3x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+3)(-x+5)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

donc l'ensemble des solutions $S = \left]-\infty;\,-1\right[\cup \left]5\,;+\infty\right[$.

5) $\left|x-1\right| + \left|x+1\right| < 10$.

$$\left|x-1\right| = \left\{\begin{array}{l} x-1 \quad si \quad x-1 \geqslant 0 \\ \qquad ou \\ 1-x \quad si \quad x-1 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1 \quad si \quad x \geqslant 1 \\ \qquad ou \\ 1-x \quad si \quad x \leqslant 1 \end{array}\right..$$

$$\left|x+1\right| = \left\{\begin{array}{l} x+1 \quad si \quad x+1 \geqslant 0 \\ \qquad ou \\ -1-x \quad si \quad x+1 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1 \quad si \quad x \geqslant -1 \\ \qquad ou \\ -1-x \quad si \quad x \leqslant -1 \end{array}\right..$$

On va dresser le tableau des valeurs absolus :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert$		$-2x$		2		$2x$	

On a, donc

$$\left|x-1\right|+\left|x+1\right|=\begin{cases}-2x & si\ x\in\left]-\infty\,;-1\right]\\ \\ 2 & si\ x\in\left[-1\,;1\right].\\ \\ 2x & si\ x\in\left[1\,;+\infty\right[.\end{cases}$$

— Dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right]$; on a : $-2x<10\Leftrightarrow x>-5$, alors $x\in\left]-5\,;-1\right]$.
— Dans l'intervalle $\left[-1\,;1\right]$; on a : $2<10$, cette inégalité est vrais, alors $x\in\left[-1\,;1\right]$.
— Dans l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$; on a : $2x<10\Leftrightarrow x<5$, alors $x\in\left[1\,;5\right[$.

Finalement, l'ensemble des solutions $S=\left]-5\,;\,5\right[$.

Exercice 1.5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $m\in\mathbb{N}^\star$

$$0<\frac{mn}{(m+n)^2}\leqslant\frac{1}{4}.$$

— En déduire que $A=\left\{\frac{mn}{(m+n)^2},\ n\in\mathbb{N}^\star,\ m\in\mathbb{N}^\star,\right\}$, Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Solutions :

-) m et n étant positifs, on a $\frac{mn}{(m+n)^2}>0$. D'autre part

$$\frac{1}{4}-\frac{mn}{(m+n)^2}=\frac{(m+n)^2-4mn}{4\,(m+n)^2}=\frac{(m-n)^2}{4\,(m+n)^2}\geqslant 0$$

-) $\frac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc A admet une borne inférieure a telle que $a\geqslant 0$ car il est le grands

des minorants et une borne supérieure b telle que $b \leqslant \dfrac{1}{4}$ car il est le plus petit des majorants.
Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$: $a \leqslant \dfrac{mn}{(m+n)^2}$, en prenant $m = 1$, on a

$$a \leqslant \frac{n}{(1+n)^2} \to 0$$

Ce qui implique que $0 \leqslant a \leqslant 0$, on a donc $a = 0$. Alors $\inf\ A = 0 \notin A$, cela signifie que le $\min\ A$ n'existe pas.
Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$: $\dfrac{mn}{(m+n)^2} \leqslant b$ en prenant $m = n$, on a

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} = \frac{1}{4} \leqslant b$$

on a donc $b = \dfrac{1}{4}$. Alors $\sup\ A = \dfrac{1}{4} \in A$, cela signifie que le $\max\ A = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 1.6. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément s'ils existent :

1)- $E_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, 2)-$E_2 = \left\{2 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$, 3)- $E_3 = \left\{\frac{1+4n}{3-2n},\ n \geqslant 2\right\}$.

4)- $E_4 = \left\{\frac{1}{x},\ 1 \leqslant x \leqslant 2\right\}$, $E_5 = \left\{\frac{1}{x},\ 1 < x < 2\right\}$. $E_6 = \left\{\frac{2^n}{2^n - 1},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$

Solutions :

1)- On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. Alors $\inf\ E_1 = 0$, mais $\min\ E_1$ n'existe pas, et $\sup\ E_1 = \max\ E_1 = 1\ (n = 1)$.

2)- On pose $f(n) = 2 - \dfrac{1}{n}$ telle que $n \geqslant 1$. On a $f'(n) = \dfrac{1}{n^2} > 0$, alors f est strictement croissante.

et d'après $\begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2 \end{cases}$, on a $1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{n} < 2$.

Le plus petit élément de l'ensemble de E_2 est 1, donc $\inf\ E_2 = \min\ E_2 = 1$.
Ainsi, on trouve que $\sup\ E_2 = 2 \notin E_2$, cela signifie que $\max\ E_2$ n'existe pas.

3)- $E_3 = \left\{\dfrac{1+4n}{3-2n},\ n \geqslant 2\right\} = \left\{-2 + \dfrac{7}{3-2n},\ n \geqslant 2\right\}$. Alors $-2 + \dfrac{7}{3-2n} < -2$, ce qui nous donne que E_3 est majoré par 2. Donc $\sup\ E_3 = -2 \notin E_3$ c-à-d $\max\ E_3$ n'existe pas.
D'autre part, pour $n = 2$, on a $-2 + \dfrac{7}{3-2n} \geqslant -9$, alors $\inf\ E_3 = \min\ E_3 = -9$.

4) $1 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$. Alors $\sup\ E_4 = \max\ E_4 = 1$ et $\inf\ E_4 = \min\ E_4 = \dfrac{1}{2}$.

5) $1 < x < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} < 1$. Alors $\sup E_5 = 1$ et $\inf E_5 = \dfrac{1}{2}$.

6) On pose $u_n = \dfrac{2^n}{2^n - 1}$ est à valeur strictement positive,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}}{\dfrac{2^n}{2^n-1}} = 2 \times \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1} < 1$$

Cette suite est strictement décroissante, on en déduit que :
$\sup E_6 = u_1 = 2 \in E_6$, alors $\max E_6 = 2$. Mais $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n}{2^n-1}\right) = 1 = \inf E_6 \notin E_6$. Donc $\min E_6$ n'existe pas.

Exercice 1.7. On considère la partie $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.

Démontrer que A possède une borne inférieure et une borne supérieure, déterminer chacune d'entre elle.

Solutions :

la suite de terme général $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ est ni croissante ni décroissante, elle est même de signe alterné. Nous allons considérer les deux sous suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels définies par

$$v_n = u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \qquad \textit{et} \qquad w_n = u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}.$$

On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n' = w_n' = -\frac{1}{2n^2} < 0.$$

Donc, les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont décroissantes.

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{3}{2}\,, & \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) = 1 \\[2em] w_0 = 0\,, & \lim\limits_{n\to\infty}\left(-1 + \dfrac{1}{2n+1}\right) = -1 \end{cases}$$

Donc, $A = \left\{1 + \dfrac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\} \cup \left\{-1 + \dfrac{1}{2n+1}\ , n \in \mathbb{N}\right\}$, alors :
$\sup A = \max\left(\sup\left\{1 + \dfrac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\},\ \sup\left\{-1 + \dfrac{1}{2n+1}\ , n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \max\left(\dfrac{3}{2}, 0\right) = \dfrac{3}{2}$.

Alors $\max A = \frac{3}{2}$. De même, on a
$\inf A = \min\left(\inf\left\{1+\frac{1}{2n},\ n\in\mathbb{N}^\star\right\},\ \inf\left\{-1+\frac{1}{2n+1}\ ,n\in\mathbb{N}\right\}\right) = \min\left(1\,,-1\right) = -1.$
Le min A n'existe pas.

Exercice 1.8. Soit

$$B = \left\{\frac{2x+1}{x+4},\quad x\in\mathbb{R}\,,\quad x\geqslant -2\right\}.$$

Montrer que B admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Solutions :

On pose

$$f\ :\ \left[-2\,;+\infty\right[\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\ \longmapsto\frac{2x+1}{x+4}$$

Nous allons étudier la fonction f.
f est définie, continue et dérivable sur $\left[-2\,;+\infty\right[$(le seul problème de f est $x=-4$ qui est dehors de l'intervalle de l'étude).

$$f'\left(x\right) = \frac{7}{\left(x+4\right)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-2\,;+\infty\right[$, donc

$$\sup\ B = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+4}\right) = 2\quad et\quad \inf\ B = f\left(-2\right) = \frac{3}{2} = \min\ B.$$

Le max B n'existe pas.

Chapitre 2

Limites et fonctions continues

2.1 Notions de fonction

Définition 2.1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f .

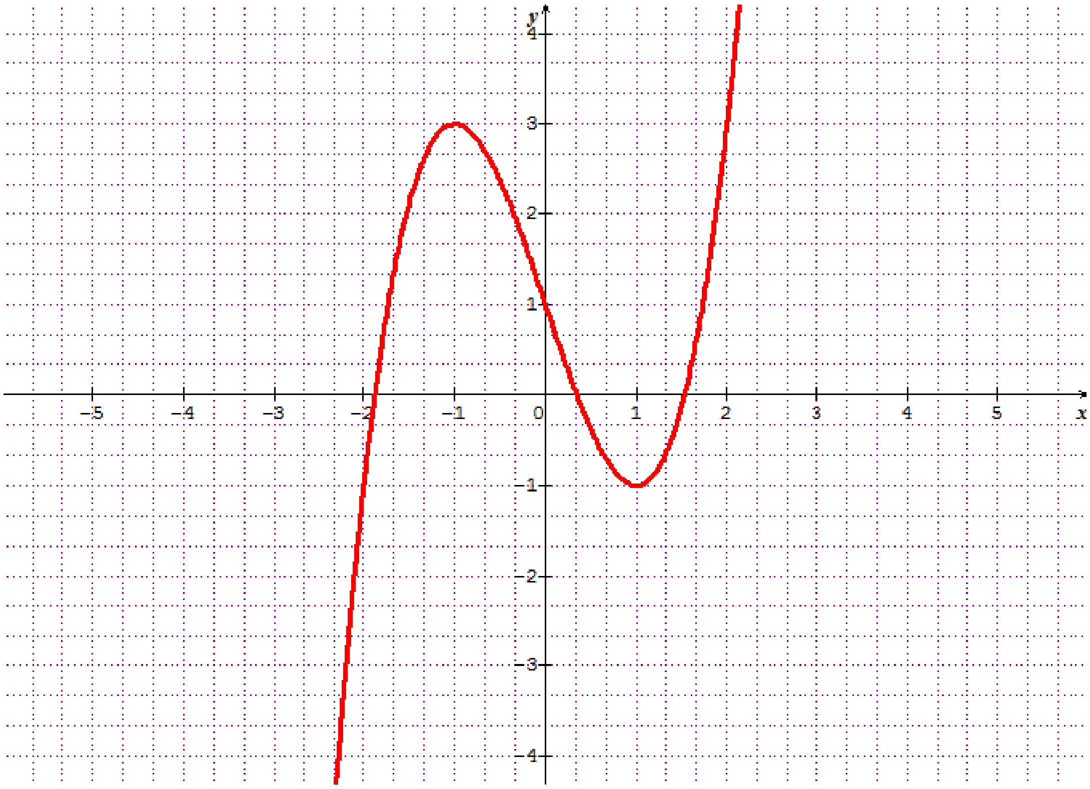
Exemple 2.1. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $1-x^2 \geqslant 0$. Donc $x \in \big[-1\,;1\big] = D_f$.
L'image de $\dfrac{1}{2}$ par f est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on dit que $\dfrac{1}{2}$ est l'antécédent de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Définition 2.2. On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f définie sur un intervalle $U \subseteq \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ \ (x\,;\,f(x))\,/\,x \in U \ \Big\}$$

formé des points $(x\,;\,f(x)) \in \mathbb{R}^2$ du plan muni d'un repère orthonormé $\Big(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\Big)$.

Exemple 2.2. Le graphe Γ_f de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$.



2.2 Opérations sur les fonctions

Soient f , $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions définies sur même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

— La somme de f et g est la fonction $f+g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout $x \in U$.

— Le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$.

— La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in U$.

— L'inverse de f est la fonction $\frac{1}{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in U$, $f(x) \neq 0$.

2.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

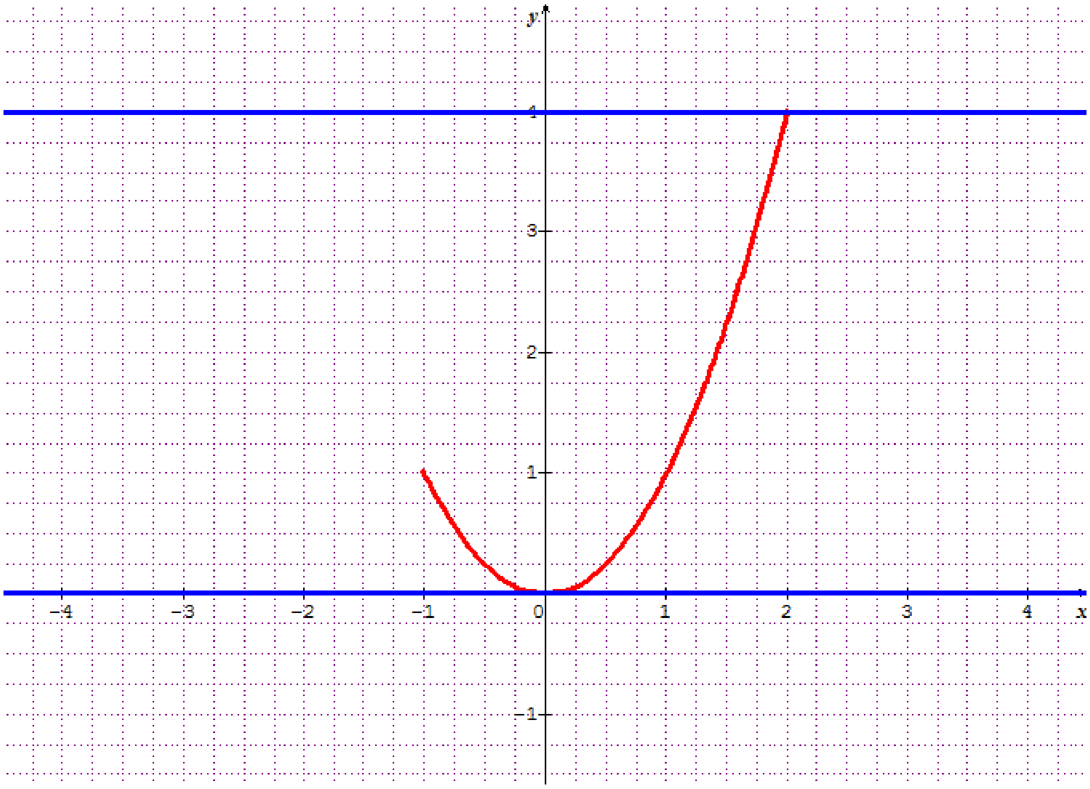
Définition 2.3. Soient f , $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions définies sur même partie U de $\mathbb{R}$.

— f est majorée sur U si $\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in U \ : \ f(x) \leqslant M$.

— f est minorée sur U si $\exists\, m \in \mathbb{R}, \forall\, x \in U \ : \ f(x) \geqslant m$.

— f est bornée sur U si f est majorée et minorée sur U, c'est à dire $\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in U \ :$ $\left|f(x)\right| \leqslant M$.

Exemple 2.3. Soit $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $\left[-1\,;2\right]$, voici le graphe de cette fonction



Nous constatons que $\forall x \in \left[-1\,;2\right]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$. Alors f est majorée par 4 et minorée par 0.

2.3.1 Parité. Fonctions paires et impaires

Définition 2.4. On dit que l'intervalle $U \subset \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine O si

$$\forall\, x \in U \Rightarrow -x \in U$$

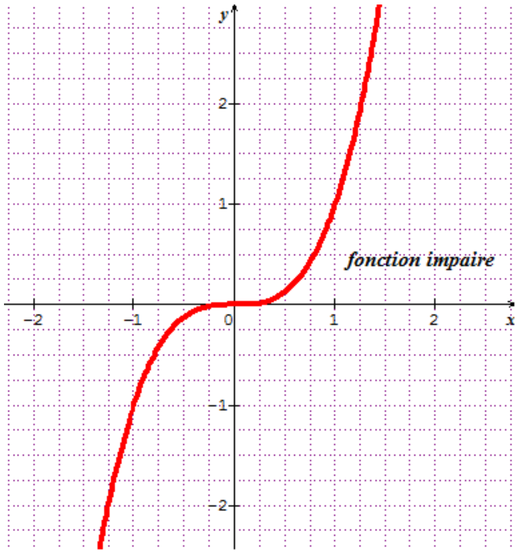
Définition 2.5. Soit $f \ : U \longrightarrow \mathbb{R}$

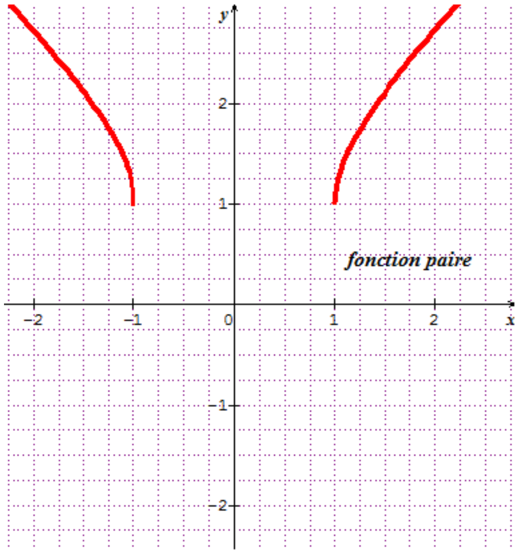
— f est paire sur U si : $\forall\, x \in U \ : \ -x \in U \ et\ f(-x) = f(x)$.

— f est impaire sur U si : $\forall\, x \in U \ : \ -x \in U \ et\ f(-x) = -f(x)$.

Interprétation géométrique :

si f est paire, alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) et si f est impaire, alors il est symétrique par rapport à l'origine des axes.

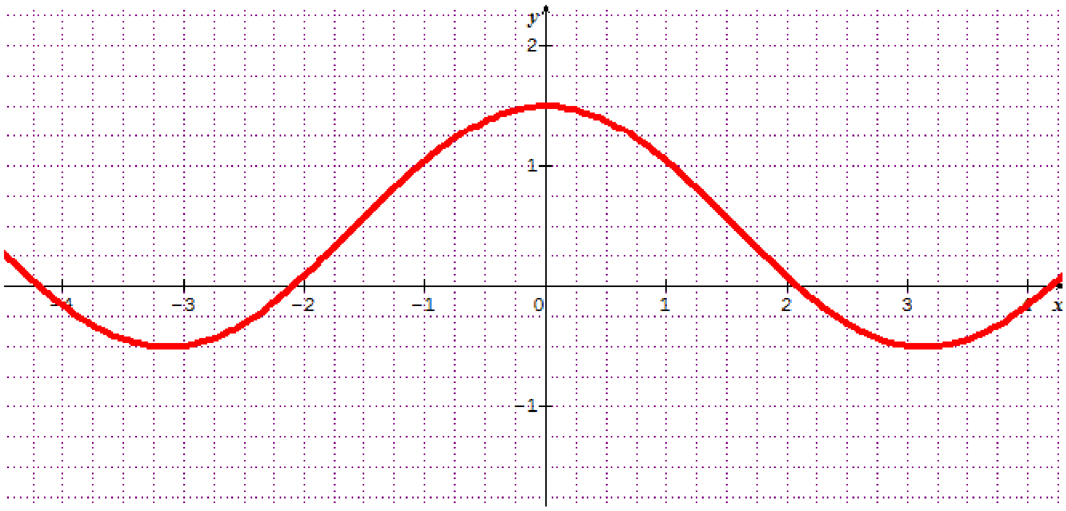




2.3.2 Périodicité. Fonctions périodiques

Définition 2.6. Soit $f\ : U \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est périodique, de période $T > 0$ si :

$$\forall\, x \in U\ :\ x + T \in U,\ x - T \in U\ et\ f\,(x + T) = f\,(x - T) = f\,(x)$$



2.3.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 2.7. Soit $f\ : U \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est :

- Croissante sur U si $\forall\, x_1,\ x_2\ \in U\quad : \ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f\,(x_1) \leqslant f\,(x_2)$.
- Strictement croissante sur U si $\forall\, x_1,\ x_2\ \in U\quad : \ x_1 < x_2 \Rightarrow f\,(x_1) < f\,(x_2)$.
- Décroissante sur U si $\forall\, x_1,\ x_2\ \in U\quad : \ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f\,(x_1) \geqslant f\,(x_2)$.
- Strictement décroissante sur U si $\forall\, x_1,\ x_2\ \in U\quad : \ x_1 < x_2 \Rightarrow f\,(x_1) > f\,(x_2)$.

Exemple 2.4. La fonction $f(x) = x^2$ est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$.

Remarque 2.1. La fonction f est dite monotone sur l'intervalle I si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.

2.4 Limites

Définition 2.8. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il contient un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.

Notons par $\nu\,(x_0)$ l'ensemble des voisinages du point x_0. Ainsi, on peut reformuler les termes de la définition précédente de la manière suivante :

$$V \in \nu\,(x_0) \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0\ : \left]x_0 - \delta\,;\ x_0 + \delta\right[\subset V.$$

Exemple 2.5. L'intervalle fermé $\left[-2\,;2\right]$ est un voisinage de 0. Généralement, l'intervalle $\left[-2\,;2\right]$ est un voisinage de chaque $x_0 \in \left]-2\,;\ 2\right[$, mais ne peut être ni voisinage de 2 ni voisinage de -2.

Limite en un point

2.4.1 Définitions

Soit $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou un extrémité de I.

Définition 2.9. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$$

on dit que f tends vers ℓ lorsque x tends vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$

Exemple 2.6. Considérons la fonction $f(x) = 4x+2$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Au point $x = 0$, on a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 2$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\left|f(x)-2\right| = \left|4x\right| = 4\left|x\right| < \varepsilon$. Si l' on a $\left|x\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Le bon choix sera alors de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Proposition 2.1. *Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.*

Démonstration. Si f admet deux limites ℓ et ℓ' au point x_0, alors on a, par définition :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

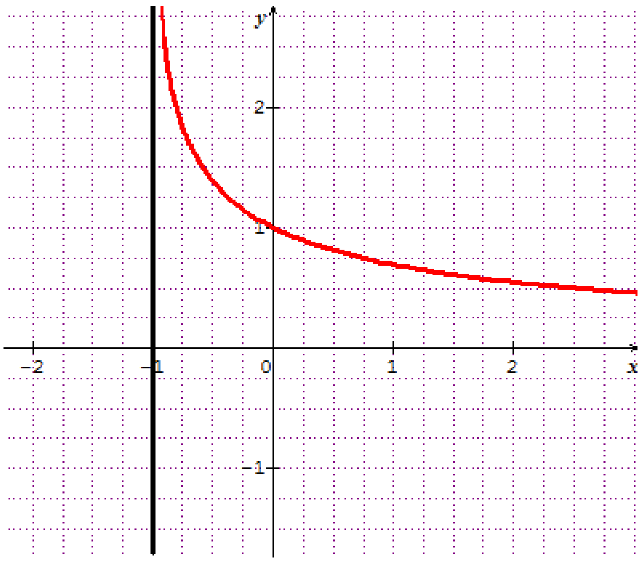
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta' > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \delta' \Rightarrow \left|f(x) - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\delta'' = \min(\delta\ , \delta')$, alors
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta'' > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \delta'' \Rightarrow \left|\ell - \ell'\right| = \left|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\right|$

$$< \left|f(x) - \ell\right| + \left|f(x) - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

comme ε est quelconque, alors $\left|\ell - \ell'\right| < \varepsilon$ implique que $\ell = \ell'$. □

Exemple 2.7. Considérons la fonction f dont le graphe a pour allure



$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \ \textit{et} \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

Définition 2.10. Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $\left]a\,;\,x_0\right[\cup\left]x_0\,;\,b\right[$

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

on note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

on note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

2.4.2 Limite en l'infini

Définition 2.11. Soit $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction définie sur l'intervalle de la forme $I = \left]a\,;\,+\infty\right[$.

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x > B \Rightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$$

on note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x > B \Rightarrow f(x) > A$$

on note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $\left]-\infty\,;\,a\right[$.

2.4.3 Limite à droite et à gauche

Définition 2.12. Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $\left]a\,;\,x_0\right[\cup\left]x_0\,;\,b\right[$.

— On dit que la fonction f admet ℓ comme limite à droite de x_0, c'est a dire quand x tend vers x_0^+ si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$$

on notera $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell$.

— On dit que la fonction f admet ℓ comme limite à gauche de x_0, c'est a dire quand x tend vers x_0^- si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon$$

on notera $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \ell$.

Proposition 2.2. *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors*

— $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f + g)(x) = \ell + \ell'$.

— $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$.

— Si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

— Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$(ou $-\infty$) alors $\lim \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Proposition 2.3. *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow \ell} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée.

Voici liste des formes indéterminées $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 1^∞ , ∞^0.

Proposition 2.4. - *Si* $f \leqslant g$ *et si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leqslant \ell'$.

— Si $f \leqslant g$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

— Si $f \leqslant g$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Théorème 2.1. *(Théorème des gendarmes)*

si $f \leqslant g \leqslant h$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *alors* g *a une limite en* x_0 *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Proposition 2.5. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle* $I =]a\,;\, b[\subset \mathbb{R}$ *(a et b peuvent être infinis) et* $x_0 \in I$ *(x_0 fini, infinis ou extrémité de I).*

Si g *est bornée et* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$, *alors*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (f \times g)(x) = 0.$$

Exemple 2.8. On va calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x = 0$ et la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ bornée au voisinage de 0, d'après la proposition (2.5), on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

2.4.4 Les limites remarquables

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 = 1.$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty \; , n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n \, (\ln x)^m = 0 \; , n, \, m \in \mathbb{N}^\star.$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^m}{x^n} = 0 \; , n, \, m \in \mathbb{N}^\star.$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{mx}}{x^n} = +\infty, \; n, \, m \in \mathbb{N}^\star, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n \, e^{mx} = 0 \; , n, \, m \in \mathbb{N}^\star.$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

2.4.5 Exercices

Exercice 2.1. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$.
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$.
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.
6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\lambda}{x}\right)^x$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sin\ \pi x}$.

11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln\left(x+2\right)-\ln\left(x\right)\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Solutions :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2\ x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}.\dfrac{x^2}{\sin^2\ x}=1\times 1=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\dfrac{0}{0}=F.I.$ On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\frac{1+x-1-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{x\left(1-x\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{\left(1-x\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

Alors, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=l\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-x\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\dfrac{0}{0}=F.I.$ On pose $x+1=t^6$, $x\longrightarrow 0\Rightarrow t\longrightarrow 1$. On a

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\frac{t^3-1}{t^2-1}=\frac{\left(t-1\right)\left(t^2+t+1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)}$$

Alors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\left(t-1\right)\left(t^2+t+1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^2+t+1\right)}{\left(t+1\right)}=\frac{3}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} = \dfrac{0}{0} = F.I.$ On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$= \frac{1+x^2-1-x}{x^2} = \frac{x\,(1-x)}{x^2} = \frac{(1-x)}{x}$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x} = -1.$$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \dfrac{0}{0} = F.I.$ On pose $x-1=t$, lorsque $x\to 1 \Rightarrow t\to 0$. On a

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(t+1)}{t}$$

D'où

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1.$$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{x} = 4\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{4x} = 4\times 1 = 4.$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{\lambda}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lambda \frac{\ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)}{\frac{\lambda}{x}}} = e^{\lambda}$, car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)}{\frac{\lambda}{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

avec $t = \dfrac{\lambda}{x}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = F.I.$ On a

$$\frac{\ln(1+e^{2x})}{x} = \frac{\ln\ e^{2x}(1+e^{-2x})}{x} = \frac{2x+\ln(1+e^{-2x})}{x} = 2+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}\right) = 2.$$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-2x^2-x+2}=\dfrac{0}{0}=F.I.$ Alors 1 est un racine de (x^3+x-2) et (x^3-2x^2-x+2).

$$x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$$

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)\left(x^2-x-2\right)$$

d'où

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-2x^2-x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}{(x-1)\left(x^2-x-2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+2\right)}{\left(x^2-x-2\right)}=-2.$$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{sin\ \pi x}=\dfrac{0}{0}=F.I$, on pose $x-1=t$, si $x\to 1\Rightarrow t\to 0$. D'où

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{sin\ \pi x}=\lim_{t\to 0}\frac{t\,(t+2)}{sin\ \pi(t+1)}=-\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{(t+2)}{\frac{sin\ \pi t}{\pi t}}=-\frac{2}{\pi}.$$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+1}=1^{\infty}=F.I.$ On a

$$\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x+1}=e^{(x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}=e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{5}{x-2}\right)}=e^{\frac{5(x+1)}{x-2}\frac{\ln\left(1+\frac{5}{x-2}\right)}{\frac{5}{x-2}}}$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x+1}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{5(x+1)}{x-2}\frac{\ln\left(1+\frac{5}{x-2}\right)}{\frac{5}{x-2}}}=e^5$$

car, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5\,(x+1)}{x-2}=5$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{5}{x-2}\right)}{\frac{5}{x-2}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$, avec $\left(\dfrac{5}{x-2}=t\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=1^{+\infty}=F.I.$ On a

$$\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=e^{x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}=e^{x\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}=e^{\frac{2ax}{x-a}\frac{\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}{\frac{2a}{x-a}}}=e^{2a}.$$

car, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2ax}{x-a}=2a$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}{\frac{2a}{x-a}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$, avec $\left(\dfrac{2a}{x-a}=t\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln(x)\right) = +\infty-\infty = F.I.$ On a

$$x\left(\ln(x+2)-\ln(x)\right) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = 2\times 1 = 2.$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$, avec $\dfrac{2}{x} = t$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = +\infty\times 0 = F.I$, on a

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = x^2 e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right) = x^2 e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)$$

$$= \frac{1}{x(x+1)}x^2 e^{\frac{1}{x+1}}\frac{\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)}{\frac{1}{x(x+1)}} = \frac{x^2}{x(x+1)}e^{\frac{1}{x+1}}\frac{\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)}{\frac{1}{x(x+1)}}$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}e^{\frac{1}{x+1}}\frac{\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)}{\frac{1}{x(x+1)}} = 1\times 1 = 1.$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x(x+1)} = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)}{\frac{1}{x(x+1)}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 0$, avec $t = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Exercice 2.2. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{x+\sin\, x}{2x+1}$$

1. Montre que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$\frac{x-1}{2x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x-1}{2x+1}.$$

2. Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solutions :

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin\, x \leqslant 1$, alors

$$x - 1 \leqslant x + \sin\, x \leqslant x + 1 \tag{2.1}$$

par multiplication de (2.1) par $\frac{1}{2x+1}$, on obtient

$$\frac{x-1}{2x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x-1}{2x+1}$$

car $\frac{1}{2x+1} > 0$ dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

2. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

2.5 Continuité en un point

Définition 2.13. Soit f une fonction définie sur I et soit $x_0 \in I$.

f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

c'est à dire $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition 2.14. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemple 2.9. Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & si \quad x \neq 0 \\ \\ 0, & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Au point $x_0 = 0$, on a

$$\Big|f(x) - f(0)\Big| = \Big|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big| \leqslant \Big|x\Big| < \varepsilon$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta = \varepsilon$. Ainsi

$$\Big|x\Big| < \delta \Rightarrow \Big|f(x) - f(0)\Big| < \varepsilon$$

Donc f est continue au point 0.

Exemple 2.10. Les fonctions suivantes sont continues :

1. Une fonction constante sur un intervalle.
2. La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\big[0, +\infty\big[$.
3. Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction valeur absolue $x \mapsto \big|x\big|$ continue sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction exp sur $\mathbb{R}$.
6. La fonction ln sur $\big]0, +\infty\big[$.

Proposition 2.6. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit λ un réel. Alors, on a les résultats suivants :*

— La fonction $(f + g)$ est continue sur I. Autrement dit, la somme de deux fonctions continues sur un même intervalle est continue sur cet intervalle.

— La fonction $(f - g)$est continue sur I. Autrement dit, la différence de deux fonctions continues sur un même intervalle est continue sur cet intervalle.

— La fonction $(f \times g)$est continue sur I. Autrement dit, le produit de deux fonctions continues sur un même intervalle est continue sur cet intervalle.

— La fonction (λf)est continue sur I. Autrement dit, le produit d'un réel par une fonction continue sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

— Si $f(x) \neq 0, \forall x \in I$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I. Autrement dit, l'inverse d'une fonction continue sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Proposition 2.7. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

2.5.1 Continuité à droite et à gauche en un point

Définition 2.15. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue à droite (respectivement à gauche) en $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$,(respectivement $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$).

Exercice 2.3. Soit la fonction f définie sur par $\left]0, +\infty\right[$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}\,, si\ x \geqslant 2. \\ \\ \dfrac{4}{x^2}\,, si\ 0 < x < 2. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2.

Solutions :

Etudions la continuité de la fonction f en 2.
D'une part, $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} \sqrt{x-1} = 1 = f(2)$,
D'une part, $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} \dfrac{4}{x^2} = 1 = f(2)$.
Ainsi, $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = f(2)$. Donc, la fonction f est continue en 2.

Exercice 2.4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \left|x\right| + x + 1\,, si\ x \leqslant 1. \\ \\ \sqrt{x}\,(x^2+2)\ \,, si\ x > 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. Etudier la continuité de f en 1.
3. En déduire la continuité de f sur son domaine de définition.

Solutions :

1)- Pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$, $f(x) = \left|x\right| + x + 1$. Sur cet intervalle, f est la somme de la fonction valeur absolue continue sur $\mathbb{R} \supset \left]-\infty, 1\right[$, et de la fonction affine $x \mapsto x+1$, continue sur $\mathbb{R} \supset \left]-\infty, 1\right[$. Par conséquent f est continue sur $\left]-\infty, 1\right[$.

Pour tout $x \in \left]1,\ +\infty\right[,\ , f(x) = \sqrt{x}\,(x^2+2)$. Sur cet intervalle, f est le produit de la fonction racine carrée continue sur $\mathbb{R}_+ \supset \left]1,\ +\infty\right[$, et de la fonction polynôme $x \mapsto x^2+2$, continue sur $\mathbb{R} \supset \left]1,\ +\infty\right[$. Par conséquent f est continue sur $\left]1,\ +\infty\right[$.
Il nous donne que f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

2)- Etudions la continuité de f en 1

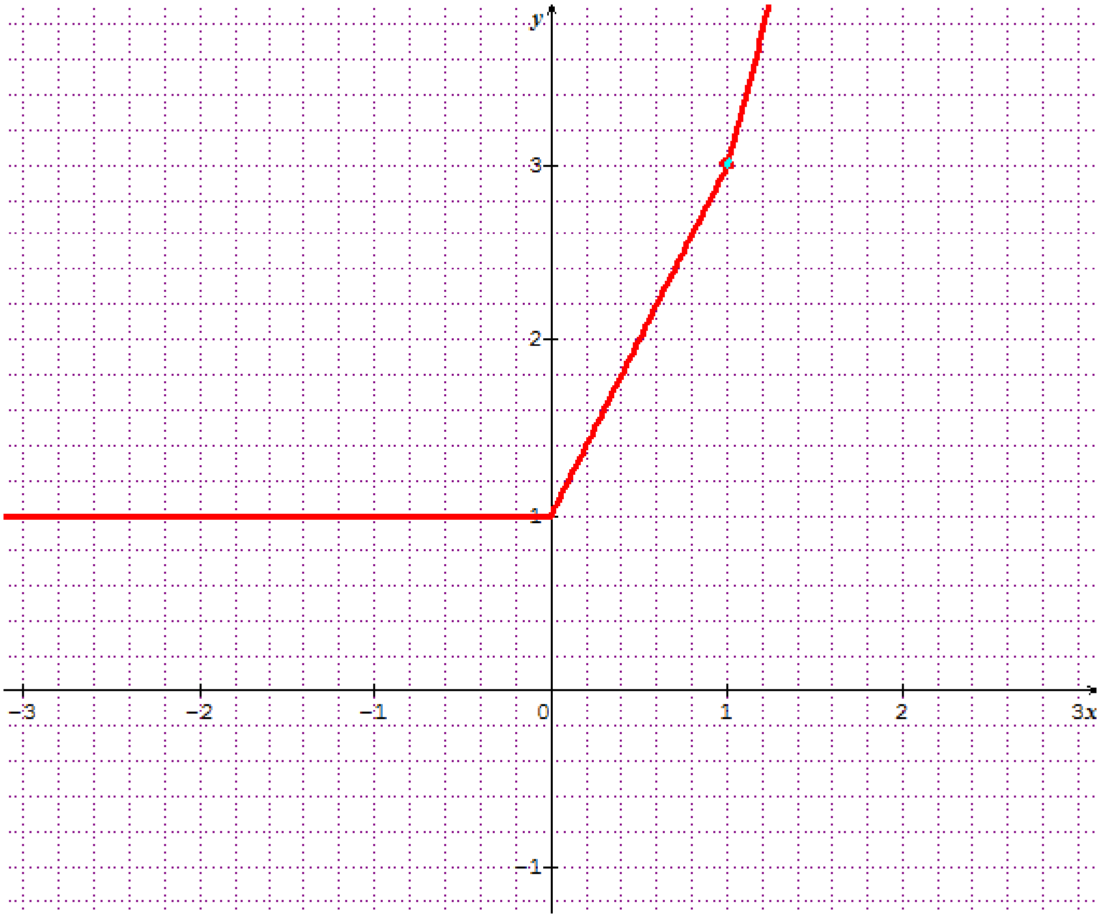
D'une part, $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \left(|x| + x + 1\right) = 3 = f(1)$,

D'une part, $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} \sqrt{x}\,(x^2+2) = 3 = f(1)$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = f(1)$. Donc, la fonction f est continue en 1.

3)- Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$:

D'après la première question, la fonction f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$, et d'après la deuxième question, la fonction f est continue en 1, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.



2.5.2 Prolongement par continuité

Définition 2.16. Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in I$ et qu'elle admet en ce point une limite finie notée ℓ, la fonction définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in I - \{x_0\} \\ \\ \ell, & si\ x = x_0 \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de f au point x_0.

Exercice 2.5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 - 1}$$

Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point 1.

Solution :

On a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 - 1} = \dfrac{0}{0} = F.I.$ Alors $x_0 = 1$ est un racine de $(x^3 + 2x^2 - 3)$ et de $(x^2 - 1)$, donc

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 - 3 = (x-1)(x^2 + 3x + 3) \\ \\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \end{cases}, \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 3x + 3)}{(x+1)} = \frac{7}{2}.$$

Ainsi, le prolongement par continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$ est

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 - 1}, & si\ x \in \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}. \\ \\ \dfrac{7}{2}, & si\ x = 1. \end{cases}$$

Chapitre 3

Comparaison de fonctions

3.1 Notion de voisinage

Définition 3.1. Voisinage

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, On appelle voisinage de a un intervalle de la forme :

— $\left]a - \varepsilon,\ a + \varepsilon\right[$ avec $\varepsilon > 0$ si $a \in \mathbb{R}$.
— $\left]A,\ +\infty\right[$ si $a = +\infty$.
— $\left]-\infty,\ A\right[$ si $a = -\infty$.

Exemple 3.1. Voisinage :

1. $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie au voisinage de 0 puisqu'elle est définie sur $\left]-1,\ 1\right[$.
2. $x \mapsto x^3 + 3x^2$ est positive au voisinage de 0 puisqu'elle l'est sur $\left]-3,\ 3\right[$.
3. $x \mapsto ln\, x$ est positive au voisinage de 0 puisqu'elle l'est sur $\left]1,\ +\infty\right[$.

3.2 Négligeabilité

Définition 3.2. Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage V de a (éventuellement privé de a si f ou g n'est pas définie en a). On dit que f est négligeable devant g s'il existe une fonction $\varepsilon :\ V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ pour tout $x \in V$.
2. $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$.

Méthode : Négligeabilité en pratique

En pratique, la définition précédente est difficile à manipuler. Quand g ne s'annule pas au voisinage de a,

$f \underset{a}{=} o(g)$ équivaut à $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple 3.2. $x^3 + 3x^2 \underset{0}{=} o(x), \quad x^3 + 3x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^4)$.

3.2.1 Exemples fondamentaux

Proposition 3.1. ***Au voisinage de*** $+\infty$

1. Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha < \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$.
2. Soit $a,\ b > 0$, alors $a < b \Leftrightarrow a^x \underset{+\infty}{=} o(b^x)$.
3. Soit $\alpha,\ \beta > 0$, alors $(ln\, x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$.
4. Soit $\alpha,\ \beta > 0$, alors $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$.

Proposition 3.2. ***Au voisinage de*** 0

1. Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha > \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{0}{=} o(x^\beta)$.
2. Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, avec $\beta > 0$. Alors $\left(\left|ln\, x\right|\right)^\alpha \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

Proposition 3.3. ***Au voisinage de*** $-\infty$

1. Soit $\alpha,\ \beta > 0$, alors $e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\left|x\right|^\beta}\right)$.
2. Soit $a,\ b > 0$, alors $a > b \Leftrightarrow a^x \underset{-\infty}{=} o(b^x)$.

3.2.2 Opérations sur les petits o

Proposition 3.4. ***Opérations sur les petits o***

Transitivité

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

Multiplication par un réel non nul

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lambda \neq 0$, alors $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$.

Combinaison linéaire de fonctions négligeables devant une même fonction

Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors pour tout $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{=} o(g)$.

Produit

1. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1\ f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
2. Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f\ h \underset{a}{=} o(gh)$.

Composition à droite

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim\limits_{b} \varphi = a$, alors $f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$.

Remarque 3.1. **Opérations interdites**

— On n'additionne pas des relations de négligeabilité membre a membre :

$$f_1 \underset{a}{=} o(g_1) \quad et \quad f_2 \underset{a}{=} o(g_2) \not\Rightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g_1 + g_2).$$

Par exemple, $x^2 + 2 \underset{+\infty}{=} o\left(x^4\right)$ et $-2 \underset{+\infty}{=} o\left(1 - x^4\right)$, mais $x^2 \underset{+\infty}{\neq} o\left(1\right)$.

— On ne compose pas à gauche :

$$f \underset{a}{=} o(g) \not\Rightarrow \varphi \circ f \underset{a}{=} \varphi \circ g$$

par exemple, $x^2 = o\left(x^4\right)$ mais, si on compose à gauche par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\neq} o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Méthode : Changement de variable

En pratique, la composition à droite s'interprète comme un changement de variable.
Si $f(u) \underset{a}{=} o\left(g(u)\right)$ et $u = \varphi(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} a$, alors $f(\varphi(x)) \underset{b}{=} o\left(g(\varphi(x))\right)$.

Exemple 3.3. Pour comparer $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ en 0^+. On pose $u = \dfrac{1}{x}$, on a $u \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(u) \underset{+\infty}{=} o(u)$ et donc $\ln(\dfrac{1}{x}) \underset{0^+}{=} o(\dfrac{1}{x})$.

3.3 Equivalence

Définition 3.3. Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage V de a (éventuellement privé de a si f ou g n'est pas définie en a). On dit que f est équivalente à g s'il existe une fonction $\eta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. $f(x) = g(x)\eta(x)$ pour tout $x \in V$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \quad \eta(x) = 1$.

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Méthode : Equivalence en pratique

En pratique, la définition précédente est difficile à manipuler. Quand g ne s'annule pas au voisinage de a,

$f \underset{a}{\sim} g$ équivaut à $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple 3.4. $\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$, $\qquad x^3 + 3x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^3$, $\qquad x^3 + 3x^2 \underset{0}{\sim} 3x^2$.

Proposition 3.5. ***Équivalence et négligeabilité***

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow g + f \underset{a}{\sim} g$$

Exemple 3.5. $e^x + x + \ln x \underset{0}{\sim} \ln x$ car $e^x \underset{0}{=} o(\ln x)$ et $x \underset{0}{=} o(\ln x)$.

Proposition 3.6. ***Signe et équivalence***

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

3.3.1 Exemples fondamentaux

Proposition 3.7. ***Logarithme, exponentielle, puissance :***

Un polynôme est équivalent en 0 à son monôme non nul de plus bas degré.

Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme non nul de plus haut degré.

$\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$ *i. e* $\ln(x+1) \underset{0}{=} x + o(x)$.

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ *i. e* $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$.

$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ *i. e* $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$.

Remarque 3.2. Pour $\alpha = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

Proposition 3.8. ***Fonctions circulaires***

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad i.\ e \qquad \sin x \underset{0}{=} x + o(x).$$
$$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad i.\ e \qquad \cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x).$$
$$\tan x \underset{0}{\sim} x \qquad i.\ e \qquad \tan x \underset{0}{=} x + o(x).$$

Proposition 3.9. ***Fonctions hyperboliques :***

$$\sinh x \underset{0}{\sim} x \qquad i.\ e \qquad \sinh x \underset{0}{=} x + o(x).$$
$$\cosh x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad i.\ e \qquad \cosh x \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x).$$
$$\tanh x \underset{0}{\sim} x \qquad i.\ e \qquad \tanh x \underset{0}{=} x + o(x).$$

Remarque 3.3. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}.$

3.3.2 Opérations sur les équivalents

Proposition 3.10. ***Opérations sur les équivalents :***

Réflexivité

$f \underset{a}{\sim} f.$

Symétrie

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$.

Transitivité

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Equivalence et petit o

Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$.

Produit

Si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 g_1 \underset{a}{\sim} f_2 g_2$.

Inverse

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

Puissance

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $f > 0$ au voisinage de 0, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Composition à droite

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_b \varphi = a$, alors $f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.

Remarque 3.4. **Opérations interdites :**

1. On n'additionne pas les équivalents :

$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad et \quad f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2.$$

   Par exemple, $x^2 + 2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $-x^2 \underset{+\infty}{\sim} 1 - x^2$, mais $2 \underset{+\infty}{\nsim} 1$.

2. On ne compose pas à gauche :

$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \varphi \circ f \underset{a}{\sim} \varphi \circ g.$$

   Par exemple, $x \underset{+\infty}{\sim} x + \ln x$ mais, si on compose à gauche par $x \mapsto e^x$, $e^x \underset{+\infty}{\nsim} xe^x$.

Méthode : Déterminer un équivalent d'une somme

Même si l'on n'a pas le droit d'additionner des équivalents, on peut tout de même déterminer un équivalent d'une somme. L'idée est de passer par des relations de négligeabilité pour revenir ensuite à un équivalent.

Exemple 3.6. On veut déterminer un équivalent de $x \mapsto \sinh x + \sin x$ au voisinage de 0, On sait que $\sinh x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$. Ces deux relations peuvent également s'écrire $\sinh x \underset{0}{=} x + o(x)$ et $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$.
On peut alors additionner ces deux relations de négligeabilité, on obtient $\sinh x + \sin x \underset{0}{=} 2x + o(x)$, ce qui équivaut à $\sinh x + \sin x \underset{0}{\sim} 2x$.

Méthode : Changement de variable

En pratique, la composition à droite s'interprète comme un changement de variable.
Si $f(u) \underset{a}{\sim} g(u)$ et $u = \varphi(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} a$, alors $f(\varphi(x)) \underset{b}{\sim} g(\varphi(x))$.

Exemple 3.7. Pour déterminer un équivalent de $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ au voisinage de 0, en pose $u = x^2$. Alors $u \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$. Donc $\ln(1 + x^2) \underset{0}{\sim} x^2$.

Remarque 3.5. La plupart des équivalents usuels sont donnés en 0. On essaiera donc presque toujours de se ramener en 0 par changement de variable.

Exemple 3.8. Pour déterminer un équivalent de $x \underset{1}{\sim} \ln x$ en 1, on pose $u = x - 1$.Alors $u \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$ et $x = u + 1$, on a $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ donc $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.

3.4 Lien avec les limites

3.4.1 Limites et petit o

Proposition 3.11. ***Lien avec les limites***

Soit f une fonction définie dans un voisinage de a (éventuellement non définie en a). Alors

$$\lim_{x \to a} f = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{=} \ell + o(1)$$

Exemple 3.9. On veut déterminer la limite éventuelle de $\dfrac{e^{2x} - e^x}{x}$ en 0. On a

$$\begin{aligned} e^{2x} &\underset{0}{=} 1 + 2x + o(x) \\ e^x &\underset{0}{=} 1 + x + o(x). \end{aligned}$$

Ainsi $e^{2x} - e^x \underset{0}{=} x + o(x)$, donc $\dfrac{e^{2x} - e^x}{x} \underset{0}{=} 1 + o(1)$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} = 1$.

3.4.2 Limites et équivalents

Proposition 3.12. ***Les limites et équivalents***

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (éventuellement non définies en a).

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors soit f et g ont toutes deux une limite en a et $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$, soit f et g n'ont pas de limite en a.
2. Soit ℓ un réel non nul. Alors $\underset{a}{lim} f = \ell$ si et seulement si $f \underset{a}{\sim} \ell$.

Exemple 3.10. On veut déterminer la limite de $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^3)(e^{x^2} - 1)}{\sin^3 x(1 - \cos x)}$ en 0. On sait que :

— $\ln(1+x^3) \underset{0}{\sim} x^3$(via le changement de variable $u = x^3$).
— $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$(via le changement de variable $u = x^2$).

— $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
— $\sin^3 x \underset{0}{\sim} x^3$. On en déduit que

$$\frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2}-1)}{\sin^3 x(1-\cos x)} \underset{0}{\sim} 2$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2}-1)}{\sin^3 x(1-\cos x)} = 2$.

3.5 Exercices

Exercice 3.1. Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

1)- $x+1+\ln x$ en 0 et $+\infty$.
2)- $\cos(\sin x)$ en 0 .
3)- $\cosh\sqrt{x}$ en $+\infty$.
4)- $\dfrac{\sin x\ \ln(1+x^2)}{x\ \tan x}$ en 0.
5)- $\ln(\sin x)$ en 0.
6)- $\ln(\cos x)$ en 0.

Solutions :

1. on sait bien qu'en $+\infty$ les polynômes écrasent le logarithme, et en 0, $\ln x$ est la seule fonction de la somme à aller vers l'infini. Ainsi, en 0, on a
$$\frac{x+1+\ln x}{\ln x} = \frac{x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}+1 \underset{0}{\longrightarrow} 1$$
et donc $x+1+\ln x \underset{0}{\sim} \ln x$. En $+\infty$, on a
$$\frac{x+1+\ln x}{\ln x} = 1+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}+1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$$
et donc $x+1+\ln x \underset{+\infty}{\sim} x$.
2. Par composition $\cos(\sin x) \longrightarrow 1$ en 0 et donc $\cos(\sin x) \underset{0}{\sim} 1$.
3. On a $\cosh\sqrt{x} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}$. Or en $+\infty$, $e^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors que $e^{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On déduit que
$$\frac{\cosh\sqrt{x}}{\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
et donc
$$\cosh\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2}.$$

4. On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et que $\tan x \underset{0}{\sim} x$. D'autre part, on a aussi $\tan(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$(via le changement de variable $u = x^2$), et donc on en déduit que
$$\frac{\sin x \, \ln(1+x^2)}{x \tan x} \underset{0}{\sim} \frac{x.x^2}{x.x} = x.$$
5. On a
$$\ln(\sin x) = ln(\frac{\sin x}{x} \times x) = \ln(\frac{\sin x}{x}) + \ln(x)$$
Or $\ln(\frac{\sin x}{x}) \underset{0}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que
$$\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$
6. On sait que $\cos x \underset{0}{\longrightarrow} 1$, or $\ln(\cos x) = \ln(1 - (1 - \cos x)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Exercice 3.2. En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2 - x^4}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\,(3+x)\, \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}\,\sin(\sqrt{x})}$.
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$.
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x+1}\, \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$.

Solutions :

1. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, au voisinage de 0, on a
$$1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad 1+2x \underset{0}{\sim} 1, \quad x^2 - x^4 \underset{0}{\sim} x^2.$$
Or $\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2} \times 1}{x^2} = \frac{1}{2}$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2 - x^4} = \frac{1}{2}$.

2. On a $\ln(1+\sin x) \underset{0}{\sim} \sin x$ (via le changement de variable $u = \sin x$), et $\tan(6x) \underset{0}{\sim} 6x$(via le changement de variable $u = 6x$), d'ou

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)} \underset{0}{\sim} \frac{\sin x}{6x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)} = \frac{1}{6}$.

3. On a

$$\ln(\cos x) = ln(1-(1-\cos x)) \underset{0}{\sim} -(1-\cos x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$1-\cos 2x \underset{0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$$

or $\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4}$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x} = -\frac{1}{4}$.

4. On a

$$x(3+x)\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} \underset{0}{\sim} x \times 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} x(3+x)\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} = 3\sqrt{3}$.

5. On pose $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$, lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, alors $u \to 0$. D'où

$$\frac{l\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} \underset{0}{\sim} \frac{\ln(\cos^2 u)}{u^2} = 2\frac{\ln(\cos u)}{u^2} \underset{0}{\sim} 2\frac{\ln(1-(1-\cos u))}{u^2} \underset{0}{\sim} -2\frac{\frac{u^2}{2}}{u^2} = -1.$$

et donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} = -1$.

6. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variables $u = \frac{1}{x}$. On trouve

$$\sqrt{4x+1} = 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}} = \frac{2}{\sqrt{u}}\sqrt{1+4u} \underset{0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{u}}(1+2u) \underset{0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{u}}$$

De plus,

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \sqrt{u}\frac{\sqrt{1+u}}{(1+2u)}$$

or

$$\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)=\ln\left(1-\sqrt{u}\frac{\sqrt{1+u}}{(1+2u)}\right)\underset{0}{\sim}-\sqrt{u}\frac{\sqrt{1+u}}{(1+2u)}\underset{0}{\sim}-\sqrt{u}$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}\,\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)=\lim_{u\to0}\frac{2}{\sqrt{u}}\times\left(-\sqrt{u}\right)=-2$$

7. On passe à l'exponentielle :

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\exp\left(\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right)$$

or

$$\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)=\ln\left(1-(1-\frac{x}{\sin x})\right)\underset{0}{\sim}-\left(1-\frac{x}{\sin x}\right)=\frac{x-\sin x}{\sin x}$$

On en déduit que

$$\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\underset{0}{\sim}\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)=1$$

et donc

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=e^1=e.$$

Chapitre 4

Dérivabilité

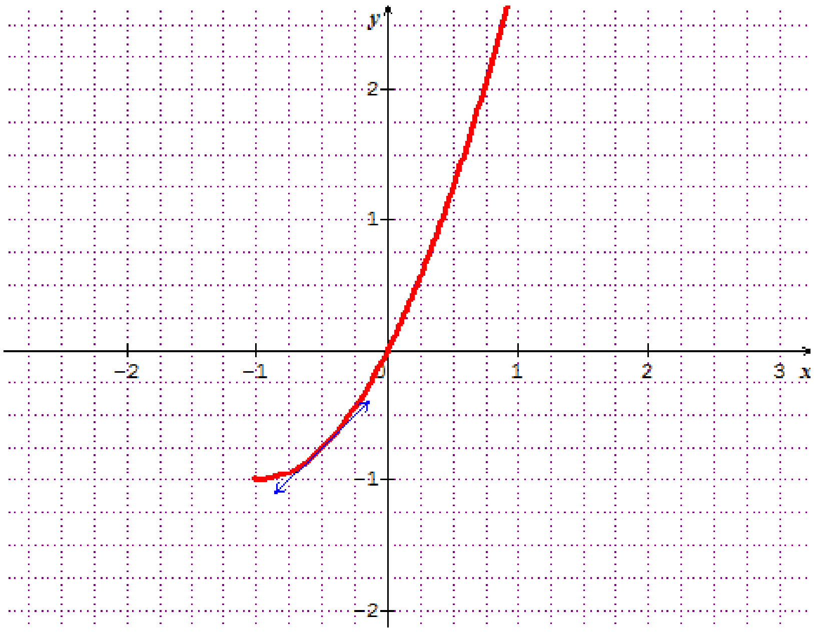
4.1 Dérivabilité en un point, fonction dérivée

4.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4.1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ de f en a admet une limite. Dans ce cas, cette limite s'appelle le nombre dérivée de f en a est se note $f'(a)$

Interprétation géométrique :

Une fonction dérivable en a admet une tangente en a et le nombre dérivé en a est la pente de cette tangente.



Proposition 4.1. ***Dérivabilité implique continuité***
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors f est continue en a.

4.2 Dérivabilité à gauche, à droite

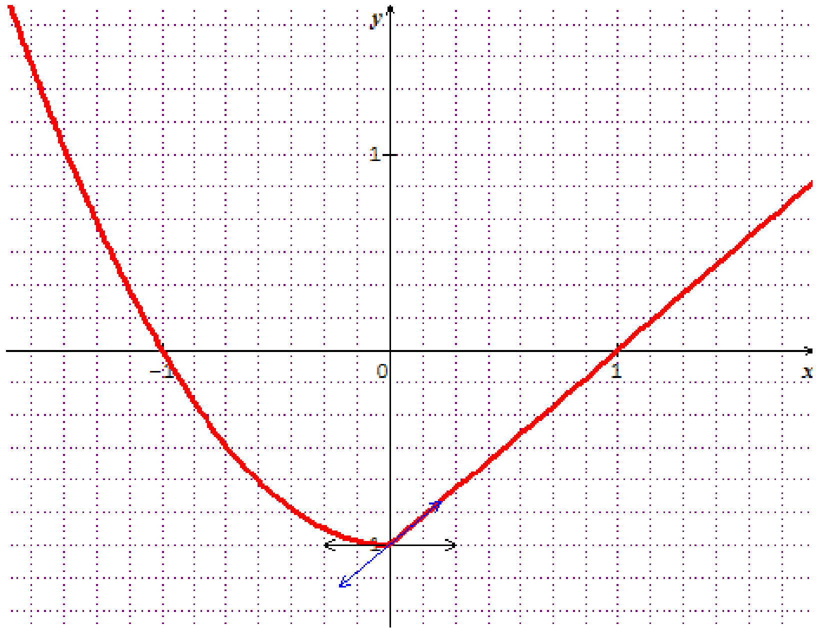
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que f est dérivable à gauche en a si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie à gauche en a. Dans ce cas, cette limite s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en a est se note $f'_g(a)$.
2. On dit que f est dérivable à droite en a si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie à droite en a. Dans ce cas, cette limite s'appelle le nombre dérivé à droite de f en a est se note $f'_d(a)$.

Interprétation géométrique :

Une fonction f dérivable à gauche (resp. à droite) en a admet une demi-tangente à gauche (resp. à droite) en a et $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) est la pente de cette demi-tangente. Les équations de ces tangentes sont

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a), \; si \quad x \leqslant a \\ \\ y = f'_d(a)(x-a) + f(a), \; si \quad x \geqslant a \end{cases}$$



Proposition 4.2. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Exemple 4.1. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{x}{x} = 1 = f'_d(0)$$

Alors, elle est dérivable à droite.
D'autre part,

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1 = f'_g(0)$$

Mais $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.Donc, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Autres écritures de la dérivée

Voici deux autres formulations de la dérivabilité de f en a.

1. f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.
2. f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(a)$) et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ avec

$$f(x) = f(a) + (x-a)\ell + \varepsilon(x)(x-a).$$

Proposition 4.3. ***Dérivabilité sur un intervalle***

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.

Exemple 4.2. La fonction $f(x) = x^3$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. En effet

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{x^3 - a^3}{x-a} = x^2 + ax + a^2 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 3a^2$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en a est $3a^2$. Autrement dit : $f'(x) = 3x^2$.

Exemple 4.3. Montrons que la dérivée de $f(x) = \cos x$ est $f'(x) = -\sin x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes.

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

On a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\cos a-\cos b}{x-a}=\frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right).\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}=\frac{-\sin\left(\frac{x+a}{2}\right).\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$$

Lorsque $x\longrightarrow a$, alors d'une part $\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\to\sin a$ et d'autre part $\frac{.\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\to 1($ posant $u=\frac{x-a}{2}$, alors $u\to 0)$. Ainsi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\longrightarrow -\sin a$ et donc $f'(x)=-\sin x$.

4.2.1 Opérations sur la dérivabilité

Proposition 4.4. ***Opérations algébriques et dérivée en un point***

Soient $f : I\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g : I\longrightarrow\mathbb{R}$.Soit $a\in I$. On suppose que f et g dérivables en a.

Somme

$f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.

Produit

$f.g$ est dérivable en a et $(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

Inverse

Si $f(a)\neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\frac{-f'(a)}{[f(a)]^2}$.

Quotient

Si $g(a)\neq 0$ Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$.

Proposition 4.5. ***Opérations algébriques et dérivée sur un intervalle***

Soient $f : I\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g : I\longrightarrow\mathbb{R}$. On suppose que f et g dérivables sur l'intervalle I.

Somme

$f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'=f'+g'$.

Produit

$f.g$ est dérivable sur I et $(f.g)' = f'.g + f.g'$.

Inverse

Si f ne s'annule pas sur I. Alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$.

Quotient

Si g ne s'annule pas sur I. Alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Démonstration. Prouvons par exemple $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$.
Soit $a \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)$,

$$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a} = -\frac{1}{f(x)f(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\frac{f'(a)}{f(a)f(a)}$$

□

Proposition 4.6. ***Dérivabilité et composition***

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Proposition 4.7. ***Dérivabilité et fonction réciproque***

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective dérivable en $a \in I$. Alors f^{-1}est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et, dans ce cas on a

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

4.3 Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaitre, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions, u représente une fonction $x \longmapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'.\sin u$
$\sin u$	$u'.\cos u$
$\tan u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

4.4 Dérivées successives

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f'sa dérivée. Si la fonction $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f. Plus généralement on note

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''.........et \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Si la dérivée $n-ième$ $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 4.1. ***Formule de Leibniz***

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + C_n^1 f^{(n-1)}.g^{(1)} + C_n^2 f^{(n-2)}.g^{(2)} + ...C_n^k f^{(n-k)}.g^{(k)} + ... + f.g^{(n)}$$

Autrement dit :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}.g^{(k)}.$$

Exemple 4.4. Calculons les dérivées $n-ième$ de $x \longmapsto (x^2+1)\,e^x$. Notons $f(x) = e^x$, alors $f^{(k)}(x) = e^x$.

Notons $g(x) = x^2 + 1$, alors $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et pour $k \geqslant 3$, on a $g^{(k)}(x) = 0$, appliquons la formule de Leibniz :

$$(f.g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x).g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}.g^{(1)} + C_n^2 f^{(n-2)}.g^{(2)}$$

$$= e^x.\left(x^2+1\right) + n.e^x\,(2x) + n(n-1)e^x = e^x\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right).$$

4.5 Fonction croissante et dérivée

Proposition 4.8. *Soit $f : [a;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;\ b]$ et dérivable sur $]a;\ b[$.*

1. $\forall\, x \in\,]a;\ b[\ \ f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow f$ est croissante.
2. $\forall\, x \in\,]a;\ b[\ \ f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow f$ est décroissante.
3. $\forall\, x \in\,]a;\ b[\ \ f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow f$ est constante.
4. $\forall\, x \in\,]a;\ b[\ \ f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow f$ est strictement croissante.
5. $\forall\, x \in\,]a;\ b[\ \ f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow f$ est strictement décroissante

4.6 Théorèmes fondamentaux

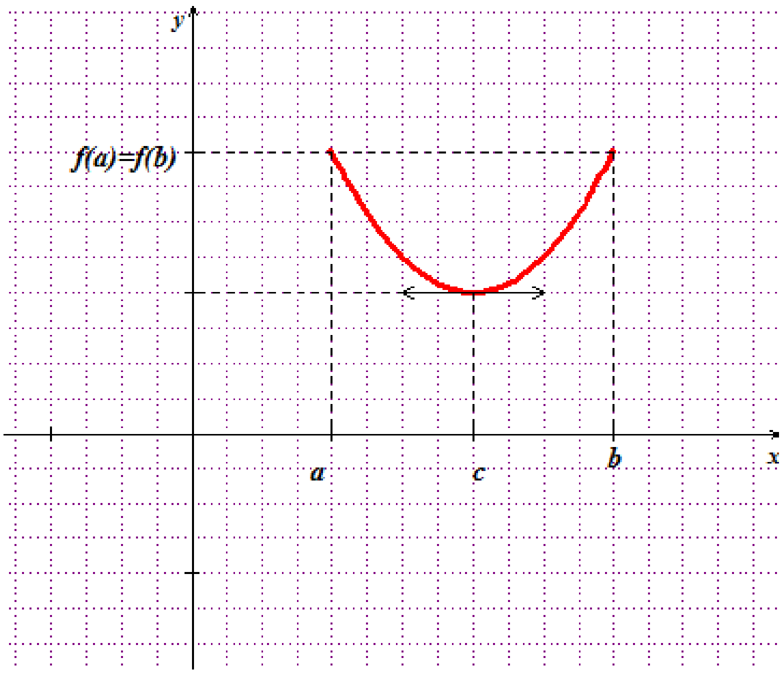
4.6.1 Théorème de Rolle

Théorème 4.2. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;\ b]$ et dérivable sur $]a;\ b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in\,]a;\ b[$ tel que :*

$$f'(c) = 0.$$

Interprétation graphique :

Il existe au moins un point du graphe f où la tangente est horizontale.



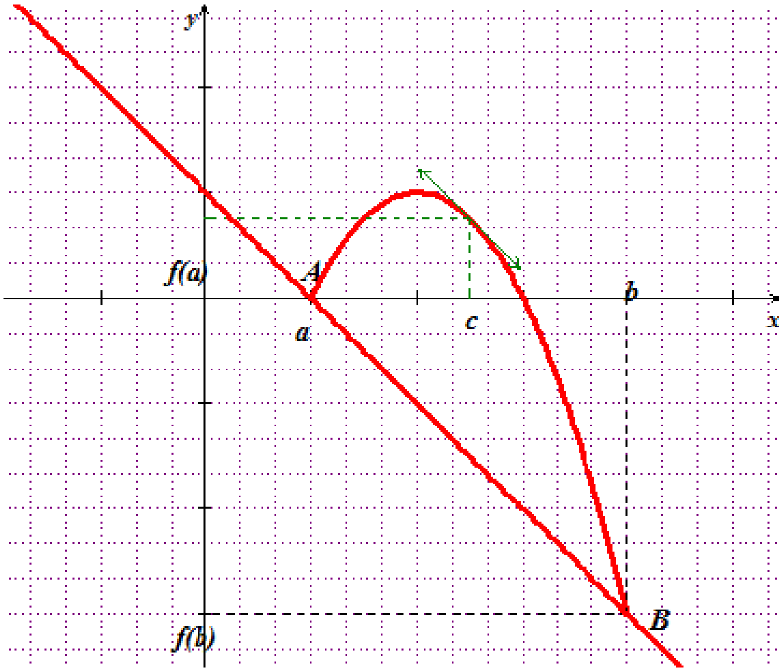
4.6.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 4.3. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;\ b]$ et dérivable sur $]a;\ b[$. Alors il existe $c \in\ ]a;\ b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Interprétation graphique :

Il existe au moins un point du graphe f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A\,(a;\ f(a))$ et $B\,(b;\ f(b))$.



Démonstration. Posons $\ell = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $g(x) = f(x) - \ell\,(x - a)$. Alors $g(a) = g(b) = f(a)$, par le théorème de Rolle, li existe $c \in\ ]a;\ b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \ell = 0$. Ce qui nous donne

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(a) - f(b) = (b - a)f'(c).$$

□

Théorème 4.4. ***(Accroissements finis généralisés)***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;\ b]$ et dérivables sur $]a; b[$ telles que $g'(x) \neq 0$ sur cet intervalle et $g(a) \neq g(b)$, alors il existe $c \in\ ]a;\ b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4.6.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 4.5. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;\, b]$ et dérivable sur $\left]a;\, b\right[$.*

1. Si f' est minorée par m sur $\left]a;\, b\right[$, alors $m\,(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$.
2. Si f' est majorée par M sur $\left]a;\, b\right[$, alors $f(b) - f(a) \leqslant M\,(b-a)$.
3. Si $\left|f'\right|$ est majorée par k sur $\left]a;\, b\right[$, alors $\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant k\left|b-a\right|$.

4.6.4 Règle de l'Hospital

Théorème 4.6. *Soient $f\ g\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, soit $x_0 \in I$. On suppose que*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0.$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x_0) = +\infty$ *ou* $(-\infty)$
2. $\forall\, x \in I \setminus \{x_0\} :\ g'(x) \neq 0$

$$Si \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad alors \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

4.7 Exercices

Théorème 4.7. *Soient $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si \quad x \leqslant 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe $c \in \left]0;\, 2\right[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.
2. Déterminer les valeurs possibles de c.

Solution :

1. Pour utiliser le théorème des accroissements finis, il faut d'abord montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Etudions la continuité de f en $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1)$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$$

donc, f est continue en $x_0 = 1$. Maintenant étudions la dérivabilité, pour $x < 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{3 - x^2}{2} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{2\,(x - 1)} = -\frac{x^2 - 1}{2\,(x - 1)}$$

d'où

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{x^2 - 1}{2\,(x - 1)} = -\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{(x - 1)\,(x + 1)}{2\,(x - 1)} = -1 = f'_g(1)$$

d'autre part, pour $x > 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x}{x\,(x - 1)} = -\frac{x - 1}{x\,(x - 1)}$$

d'où

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{x - 1}{x\,(x - 1)} = -1 = f'_d(1)$$

Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue sur $[0;\ 2]$ et dérivable sur $\left]0;\ 2\right[$. On peut appliquer le théorème d'accroissements finis sur l'intervalle $[0;\ 2]$, donc il existe $c \in \left]0;\ 2\right[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c)$.

2. On a

$$f(2) = \frac{1}{2}, \quad et \quad f0) = \frac{3}{2}$$

Par conséquent,

$$f(2) - f(0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 = -(2 - 0)f'(c) = 2f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$$

- Supposons $0 \leqslant c \leqslant 1$, alors

$$f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

- Supposons $1 < c \leqslant 2$, alors

$$f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

on a $\left(-\sqrt{2} \notin \left]1;\ 2\right]\right)$ et $\left(\sqrt{2} \in \left]1;\ 2\right]\right)$, il y a donc deux solutions $c = \dfrac{1}{2}$ et $c = \sqrt{2}$.

Exercice 4.1. Montrer que pour tout x , y réels, on a

1. $\left|\sin x - \sin y\right| \leqslant \left|x - y\right|$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\quad \dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x.$

Solutions :

1- La fonction *sin* est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $\left[x;\ y\right]$ si $x < y$(ou sur $\left[y;\ x\right]$ si $y < x$) tel que

$$\left|\sin\, x - \sin\, y\right| = \left|cos\, c\right|\left|x - y\right|$$

et comme $\left|\cos\, c\right| \leqslant 1$, on a

$$\left|\sin\, x - \sin\, y\right| \leqslant \left|x - y\right|$$

cas particulier, si $y = 0$. On obtient

$$\left|\sin\, x\right| \leqslant \left|x\right|$$

2-L a fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est continue et dérivable sur $\left[0;\ +\infty\right[$. Donc on peut appliquer le théorème d'accroissements finis sur $\left[0;\ x\right]$

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) = \frac{1}{1+c}(x-0) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

d'autre part, on a

$$0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1+c < 1+x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$$

car $x > 0$. On déduit

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x.$$

Exercice 4.2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[25;\ 26]$. En déduire l'encadrement $\sqrt{26}$.

Solution :

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[25;\ 26]$. On a, la fonction f est con*tinue*sur l'intervalle $[25;\ 26]$ et dérivable sur $\left]25;\ 26\right[$.
Alors, il existe $c \in \left]25;\ 26\right[$ tel que $\sqrt{26} - \sqrt{25} = (26-25)\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$, c'est à dire

$$\sqrt{26} = 5 + \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

on cherche l'encadrement de $\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$ dans l'intervalle $]25;\ 36[$. On a

$$25 < c < 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{c} < 6 \Rightarrow 10 < 2\sqrt{c} < 12 \Rightarrow \frac{1}{24} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{10}.$$

Donc,

$$5 + \frac{1}{24} < \sqrt{26} < 5 + \frac{1}{10} \Rightarrow 5.041 < \sqrt{26} < 5.1.$$

Exercice 4.3. Calculer , à l'aide de la règle de L'Hôspital, les limites suivantes :

1) - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\sin\, x}$, 2) - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin\, x}$, 3)$-\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$, 4)$-\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

5) - $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin{(x - \frac{\pi}{3})}}{1 - 2\cos\, x}$. 6) - $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

Solutions :

1- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\sin\, x} = \dfrac{0}{0} = (F/I)$. On vérifie que :

$f(x) = e^x - 1,\ f(0) = 0,\ f'(x) = e^x$.

$g(x) = \sin\, x,\ g(0) = 0,\ g'(x) = \cos\, x$. Prenons $I = [0,\ 1]$, $x_0 = 0$, $g'(x) = \cos\, x \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x}{\cos\, x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin\, x} = 1.$$

2- De même, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin\, x} = \dfrac{0}{0} = (F.I)$. On a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos\, x} \Rightarrow, \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos\, x} = \frac{0}{0} = (F.I)$$

On applique le théorème de Hospital deuxième fois :

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin\, x} \longrightarrow \underset{x\to 0}{\frac{0}{0}} = F.I$$

On applique le théorème de Hospital troisième fois :

$$\frac{f^{(3)}(x)}{g^{(3)}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos\, x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2.$$

Alors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2.$$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=+\infty\times 0=F.I.$ On a

$$x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}$$

Donc

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=1.$$

4- $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty\times 0=F.I.$ On a

$$x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}}=e^{\frac{1}{x^2}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}+\infty.$$

Donc.

$$\lim_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty.$$

5- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\frac{0}{0}=F.I.$ On a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\cos(x-\frac{\pi}{3})}{2\sin x}\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow}\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

6- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=+\infty-\infty=F.I.$ On a

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\frac{0}{0}=F.I$$

On applique le théorème deuxième fois :

$$\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{e^x}{e^x\left(x+2\right)}=\frac{1}{(x+2)}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Bibliographie

[1] H. Amara. Cours Algèbre et Analyse I. Mathématiques et informatique. 2008-2009.

[2] O. Hamid , K. Saddek. Brochure d'exercices d'analyse mathématique I, 2013.

[3] L. Garcin. Cours d'analyse MPSI.

[4] Exo7. Cours et exercices de maths. exo7.emath.fr.