الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة العليا للاقتصاد وهـــران
Oran Higher School of Economics

المدرسة العليا للاقتصاد وهران
Ecole Supérieure d'Economie d'Oran

Polycopié

Présenté par:

Dr. DJILALI MEDJAHED

Spécialité : **MATHEMATIQUES**

Module : **ANALYSE MATHEMATIQUES III**

Les fonctions à deux variables et les intégrales doubles

Cours et exercices d'applications

السيدة: سمعون خليصة
مديرة المدرسة العليا
للإقتصاد بوهران
بالنيابة

Année Universitaire 2020/2021

EXTRAIT DU PROCES VERBAL DE LA REUNION DU CONSEIL SCIENTIFIQUE DE L'ECOLE SUPERIEURE D'ECONOMIE D'ORAN

DU 14 Avril 2021

Conseil Scientifique de L'école Supérieure d'économie, s'étant réuni le quatorze avril l'an deux mille vingt et un (14 avril 2021), sous la présidence de Madame SEMAOUNE Khalissa, en une session extra ordinaire, a donné un avis favorable aux résultats d'expertise du polycopié pédagogique en mathématique de **M.DJILALI MEDJAHED**,

Maitre de conférences B en Mathématiques, comme suit :

-Le polycopié pédagogique en Mathématiques, intitulé « **Les fonctions à deux variables et les intégrales doubles cours et exercices d'application** », adressé aux étudiants de deuxième année cycle préparatoire, proposé par **M.DJILALI MEDJAHED**, a recueilli un avis favorable, après annonce des résultats des rapports d'expertise, émis par les experts suivants :

1) Mme MEZEGHRANI Fatima Zohra MCA UNIV Oran 1
2) M ELHAFFAF Amir PR ESE Oran

La Présidente du Conseil Scientifique

السيدة: سمعون خليصة
مديرة المدرسة العليا
للإقتصاد بوهران
بالنيابة

Preface

Ce cours s'adresse aux étudiants de deuxième annèe cycle préparatoire de l'ecole supérieure d'économie, comporte le module d'analyse III (1^{er} semestre). Il contient l'essentiel du cours avec des exemples. Des exercices d'applications sont proposés avec (et sans) des solutions en fin de chaque chapitre pour permettre les étudiants de tester ses connaissances et de se préparer aux tests et aux examens finaux.

On a utilisé les logiciels computationnelle *Mathematica* et *Maple* pour réaliser des figures afin d'interpéter graphiquement les résultats obtenues.

D'aprés mon expérience, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années, j'ai décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à ce module. Vu le programme proposé par le ministère , j'ai partagé ce modeste travail en duex chapitres, Les fonctions à deux variables et Les intégrales doubles.

J'ai présenté ces deux chapitres qui sont programmés au module d'analyse III, en respectant le contenu (cours et exercices) et l'ordre des chapitres suivant le canevas donné par le ministère. Enfin, vu les erreurs répétées souvent dans les copies des examens de ce module, jai constaté que la majorité des étudiants ne donnent pas l'importance au cours et ils font des exercices en se basant directement sur les corrigés.

Je conseille alors les étudiants de lire d'abord le cours attentivement, de faire tous les exemples cités aprés chaque résultat donné et enfin de passer à résoudre les exercices proposé .

Finalement, j'espère que ce document peut aider les étudiants qui veulent maitriser bien cette partie d'analyse mathématique.

Table des matières

Chapitre 1

Les fonctions à deux variables

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Fonction de deux variables

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ non vide. La correspondance, qui, à tout élément $X = (x, y)$ de $\mathcal{D}$ associe le nombre réel z est appelée une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ et on la note par $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Pour montrer que $f(X)$estl'élément de $\mathbb{R}$ associé à X, on utilise la notation $X \longmapsto f(X)$. Par définition, $\mathcal{D}$ est appelé le **domaine de définition** de la fonction f et $Imf = \{z \in \mathbb{R} : \exists X \in \mathcal{D}\text{tel que } f(X) = z\}$ l'**image** de $\mathcal{D}$ par f.
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k), lafonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est représentée par sa **surface**.

$$\Sigma = \{(x, y, z = f(x, y) : (x, y) \in D\}.$$

Σ est aussi appelé le **graphe** de la fonction f.

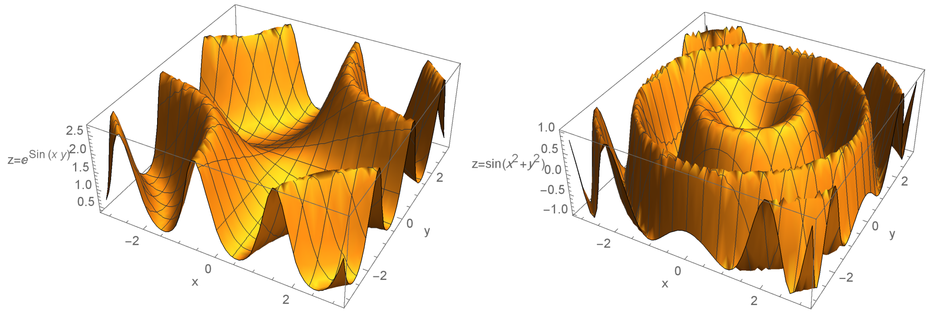
— **Fonctions partielles**
Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $A(a, b)$ un point intérieur de $\mathcal{D}$, Les fonctions :

$$x \longmapsto f(x, b) \ et \ y \longmapsto f(a, y)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b , sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A .

— **Lignes de niveau**
Soit $k \in \mathbb{R}$; l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D} \ ; \ f(x, y) = k\}$ est la courbe de niveau k de la fonction f.
Les courbes de niveau d'une fonction f (x, y) fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace. La courbe de niveau k est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal $z = k$.

Exemples 1.1. 1. On représente la surface de $f, f_1 : [-\pi, \pi]^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = e^{\sin(xy)}$, $f_1(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

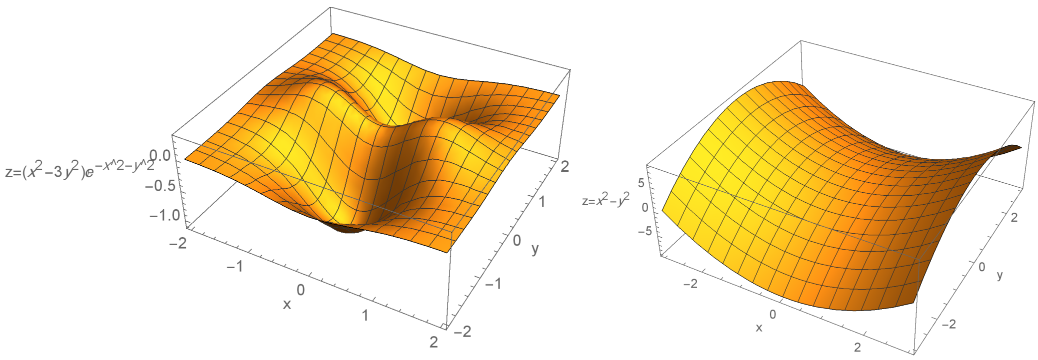


(a) $f(x,y) = e^{\sin(xy)}$ (b) $f_1(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

FIGURE 1.1 – les surfaces de fonctions f, f_1 réspectivement

.

2. La surface de la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :$f_2(x,y) = (x^2 - 3y^2)e^{-x^2-y^2}$ comme l'indique la figure ci-dessous et Le graphe de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_3(x,y) = x^2 - y^2$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ qui a la forme d'une selle de cheval, comme l'indique la représentation en perspective de la figure ci-dessous.



(a) $f_2(x,y) = (x^2 - 3y^2)e^{-x^2-y^2}$ (b) $f_3(x,y) = x^2 - y^2$

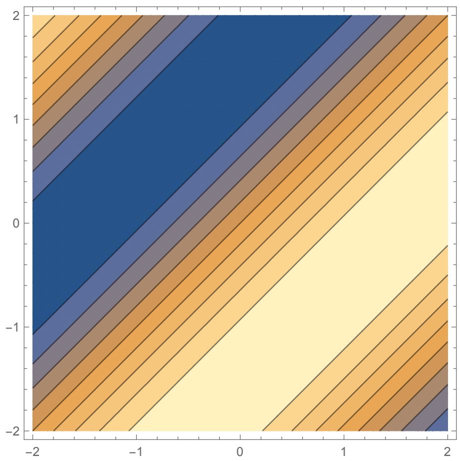
FIGURE 1.2 – les surfaces de fonctions f_2, f_3 réspectivement

.

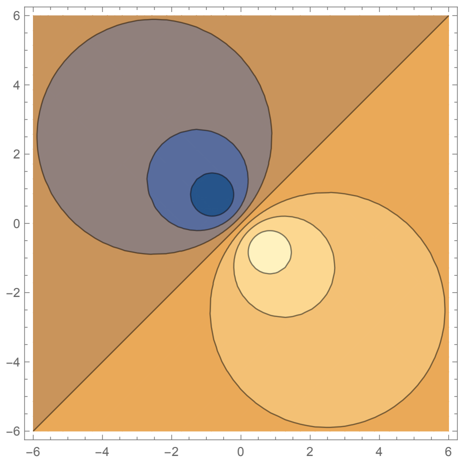
Exemple 1.2. Soient $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 \geqslant 4\}$ et $f$définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

1. Au point $(2,1)$, les fonctions partielles $f_1 : t \longmapsto \sqrt{t^2-1}$ et $f_1 : t \longmapsto \sqrt{4-t^2}$ sont définies respectivement sur : $\mathcal{D}_1 =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et $\mathcal{D}_2 = [-2, 2]$
2. Au point $(0,0)$, la première fonction partielle $f_1 : t \longmapsto |t|$ est définie sur $\mathbb{R}$, alors que la deuxième fonction partielle n'est définie qu'en 0.

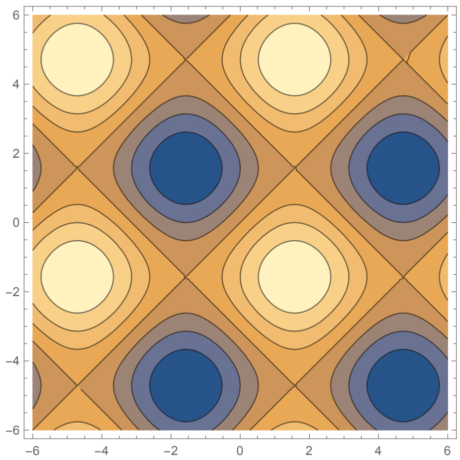
Exemple 1.3. On représente les courbes de niveau des fonctions définies par : $f_1(x,y) = \sin(x-y)$, $f_2(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$, $f_3(x,y) = \sin(x) - \sin(y)$, $f_4(x,y) = \sin(x^2+y^2)$



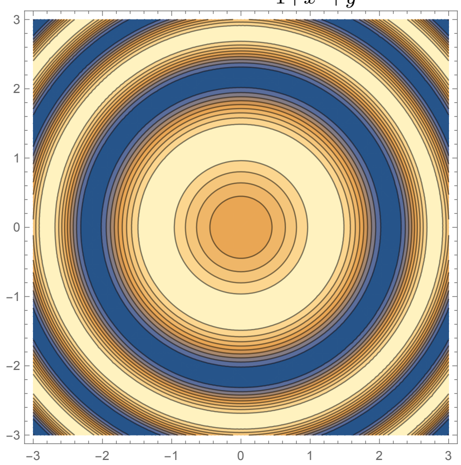
(a) $f_1(x,y) = \sin(x-y)$



(b) $f_2(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$



(c) $f_3(x,y) = \sin(x) - \sin(y)$

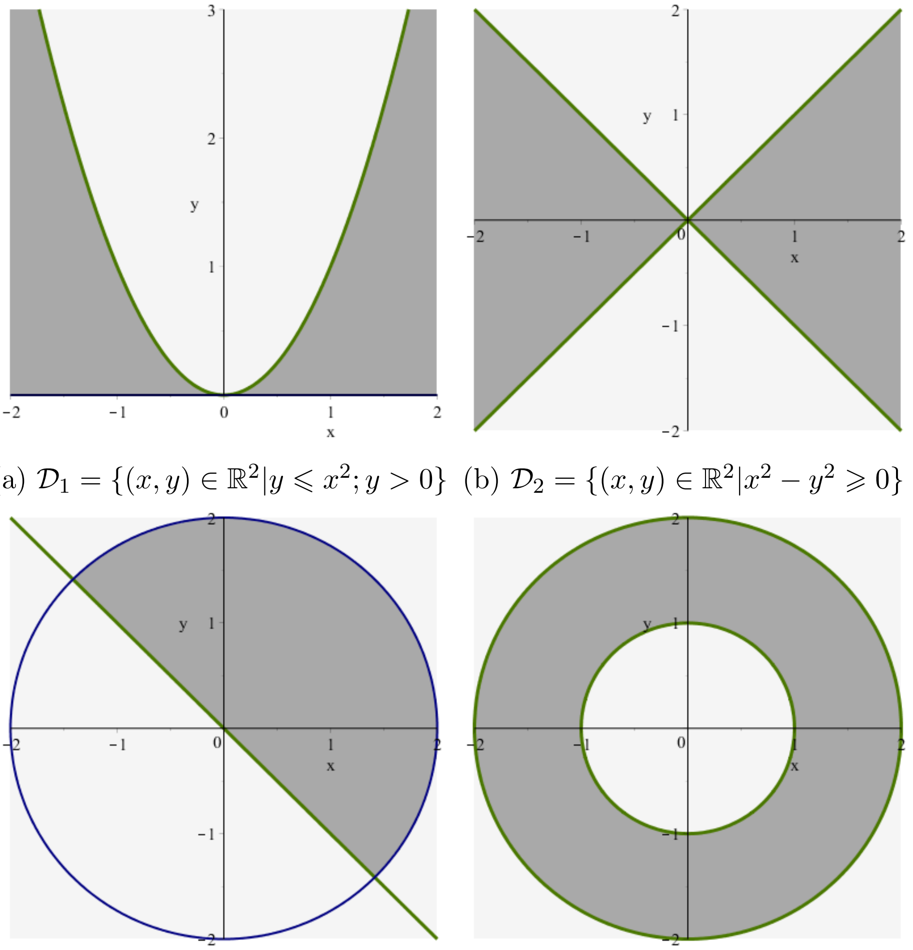


(d) $f_4(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

FIGURE 1.3 – les courbes de niveau des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 réspectivement

.

Exemple 1.4. On représente les domaines de définitions des fonctions définies par : $f_1(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{\ln(y)}$, $f_2(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$, $f_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \sqrt{x+y}$, $f_4(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \ln(x^2+y^2-1)$



(a) $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leqslant x^2 ; y > 0\}$ (b) $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 \geqslant 0\}$

(c) $\mathcal{D}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4 ; y \geqslant -x\}$ (d) $\mathcal{D}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 4 ; x^2 + y^2 \geqslant 1\}$

FIGURE 1.4 – les domaines de définitions des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 réspectivement .

2 Limites et continuité des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Pour étudier des limites et la continuité des fonctions à deux variables, on a besoin d'utuliser la distence entre deux points. Pour cela il faut d'abord introduire la notion de *norme* dans $\mathbb{R}^2$ qui généralise la notion de distance dans $\mathbb{R}$.

Normes

Définition 2.1. On appelle norme sur $\mathbb{R}^2$ toute application N de $\mathbb{R}^2$ dans $[0; +\infty[$ possédant les propriétés suivantes :

1. $N(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (séparation),
2. $N(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda|\, N(\mathbf{x})$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (homogénéité),
3. $N(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ (inégalité triangulaire).

On emploie généralement la notation $\|\mathbf{x}\|$ pour $N(\mathbf{x})$, qui rappelle l'analogie avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

Propriété 2.1. Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| .$$

Boules

Définition 2.2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme on appelle

- *Boule ouverte* de centre $\mathbf{A}$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbf{A}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| < r\}$;
- *Boule fermée* de centre $\mathbf{A}$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbf{A}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| \leqslant r\}$.

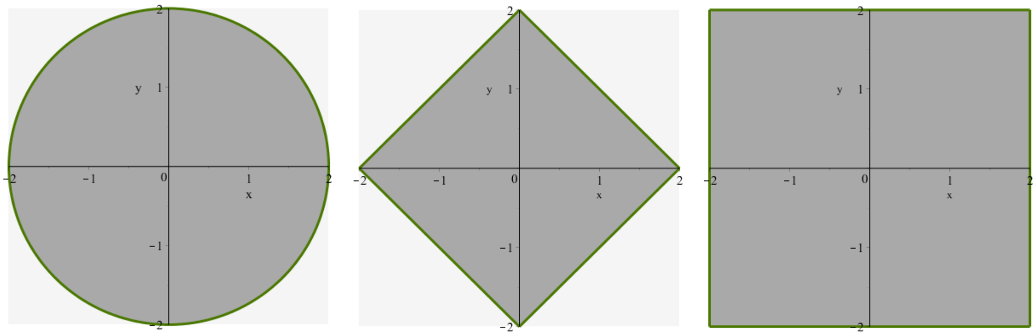
Exemple 2.1. *Normes classiques* :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^2$, on utilise les normes classiques suivantes définies pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| , \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x_1| , |x_2|\}.$$

Notation. On appelle $\|.\|_2$ la norme euclidienne et on la note simplement par $\|.\|$.

Exemple 2.2. On veut dessiner les boules fermées de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 2$ relatives aux trois normes classiques de $\mathbb{R}^2$: $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
La boule fermée de centre $(0,0)$ et rayon $r = 2$ est l'ensemble de points

$$\mathcal{B}((0,0), 2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ \|(x, y)\| \leqslant 2\}.$$



(a) $|x|^2 + |y|^2 \leqslant 4$ (b) $|x| + |y| \leqslant 2$ (c) $\sup\{|x|, |y|\} \leqslant 2$

FIGURE 1.5 – les $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_\infty$ réspectivement

.

Limite en un point

Définition 2.3. — On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage du point A admet pour limite$\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers A si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $\delta > 0$ telque $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ et $\|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\mathbf{x}) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On écrit alors, $\lim\limits_{\mathbf{x} \to A} f(\mathbf{x}) = \ell$.

— On dit que f tend vers $+\infty$ quand $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{A}$, ce que l'on écrit $\lim\limits_{\mathbf{x} \to A} f(\mathbf{x}) = +\infty$ si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} \text{et } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > M.$$

— On dit que f tend vers $-\infty$ quand $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{A}$, ce que l'on écrit $\lim\limits_{\mathbf{x} \to A} f(\mathbf{x}) = -\infty$ si pour tout $M < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} \text{et } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) < M.$$

Proposition 2.1. *Lorsque la limite d'une fonction existe, elle est unique.*

Proposition 2.2. *Une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage du point $\mathbf{x}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{A}$ si et seulement si pour toute suite (x_k) d'éléments de $\mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\}$ qui converge vers $\mathbf{A}$, la suite des images $f(x_k)$ converge vers ℓ.*

Propriétés 2.1. On suppose que $\lim_{\mathbf{x}\to A} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ et $\lim_{\mathbf{x}\to A} g(\mathbf{x}) = \ell_2$. Alors,

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \lim_{\mathbf{x}\to A} (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.
2. $$\lim_{\mathbf{x}\to A} (fg)(\mathbf{x}) = \ell_1\ell_2.$$
3. Si $\ell_2 \neq 0$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} : g(\mathbf{x}) \neq 0$,
$$\lim_{\mathbf{x}\to A} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$
4. $$\lim_{\mathbf{x}\to A} |f(\mathbf{x})| = |\ell_1|$$

Permutation des limites

Proposition 2.3. *Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ *existe ;*
3. $\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ *existe.*

Alors, $\lim_{y\to y_0} \left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \ell.$

Proposition 2.4. *Soient $f, g, h : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to A} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to A} g(\mathbf{x}) = \ell$;
2. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} : g(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant h(\mathbf{x})$.

Alors, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to A} f(\mathbf{x}) = \ell.$

Proposition 2.5. *Soient* $f, g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to A} g(\mathbf{x}) = 0$ *;*
2. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} : |f(\mathbf{x}) - \ell| \leqslant g(\mathbf{x}).$
   Alors, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to A} f(\mathbf{x}) = \ell.$

Remarque. Si la restriction à toute droite passant par **A** admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe !

2.1 Coordonnées polaires

Notation : $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$. On a une application bijective de $\mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi[$ vers $\mathbf{R}^2$ donnée par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x & = r\cos t \\ y & = r\sin t \end{cases} \tag{2.1}$$

Son application réciproque est l'application de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi[$ suivante :

$$\begin{cases} r & = \sqrt{x^2 + y^2} \\ t & = 2\arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{2.2}$$

Donc en particulier, on a $r^2 = x^2 + y^2$. Dans certains exemples d'étude de continuité des fonctions il est utile de passer aux coordonnées polaires.

Souvent c'est pratique d'utiliser les coordonnées polaires pour étudier la continuité, car la condition sur deux variables $(x, y) \to 0$ devient une condition sur une seule variable $r \to 0$.
Astuces :

— Pour prouver qu'une fonction de deux variables n'admet pas de limite en **A**, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par **A** qui n'admet pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.

— Pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable, on passe aux coordonnées polaires. En effet, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour d'un point (x_0, y_0) grâce aux relations :

$$x = x_0 + r\cos(\theta), y = y_0 + r\sin(\theta) \text{ avec} r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Exemple 2.3. Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ avec $f(x, y) = \frac{3x^2-2y^2}{2x^2+3y^2}$ n'existe pas.

1. On utilise la définition de limite. En effet, le long de l'axe horizontal qui a équation $y = 0$, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{3x^2 - 2y^2}{2x^2 + 3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

tandis que, le long de laxe vertical qui a équation $x = 0$, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{3x^2 - 2y^2}{2x^2 + 3y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-2y^2}{3y^2} = \frac{-2}{3}$$

de sorte que les deux limites ne coïncident pas.

2. Utilisons les coordonnées polaires ; on pose :$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^2(3\cos^2(\theta) - 2\sin^2(\theta))}{r^2(2\cos^2(\theta) + 3\sin^2(\theta))}\\ &= \frac{3\cos^2(\theta) - 2\sin^2(\theta)}{2\cos^2(\theta) + 3\sin^2(\theta)}.\end{aligned}$$

Le résultat varie selon θ, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - 2y^2}{2x^2 + 3y^2}$ n'existe pas.

Continuité

Définition 2.4. Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$ si f possède en $\mathbf{A}$ une limite égale à $f(\mathbf{A})$.
Si f est continue en chaque point de $\mathcal{D}$, on dit que f est continue sur $\mathcal{D}$.

Définition 2.5. Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en $\mathbf{A}$ ssi $\forall (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{D}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \mathbf{A}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = f(\mathbf{A})$.

Prolongement par continuité

Définition 2.6. Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{A}\}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to A} f(\mathbf{x}) = \ell$, , la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{D} \cup \{\mathbf{A}\}$ par $\tilde{f}(\mathbf{A}) = \ell$ et $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(x)$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ est la seule fonction continue en $\mathbf{A}$ dont la restriction à $\mathcal{D}$ soit f . On l'appelle le prolongement par continuité de f à A

Propriété 2.2. Les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont continues dans leurs domaines de définition respectifs. La continuité des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) etc., de fonctions continues.

Exemple 2.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrons que f est continue en $\mathbf{O} = (0,0)$. On sait que, pour tout $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, les real $|x|$ et $|y|$ sont inférieurs ou égaux à $\sqrt{x^2+y^2}$. On en déduit que si $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| &\leqslant \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \\ &\leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{O}\| . \end{aligned}$$

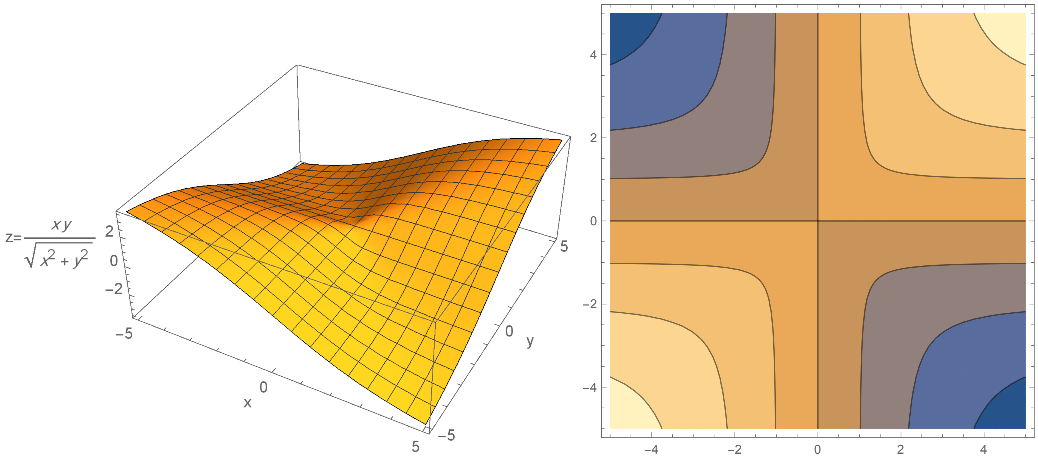
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{O}\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{O})| \leqslant \varepsilon$$

et f est continue en $\mathbf{O}$.

En pratique : Pour l'étude de la continuité,
- On utilise les théorèmes généraux sur les limites et la continuité ;
- Pour montrer la continuité en un point particulier $\mathbf{A}$, on effectue la translation $\mathbf{x} = \mathbf{A} + \mathbf{h}$ et on étudie la limite en $\mathbf{h} = \mathbf{0}$;
- On utilise les coordonnées polaires.

Exemple 2.5.

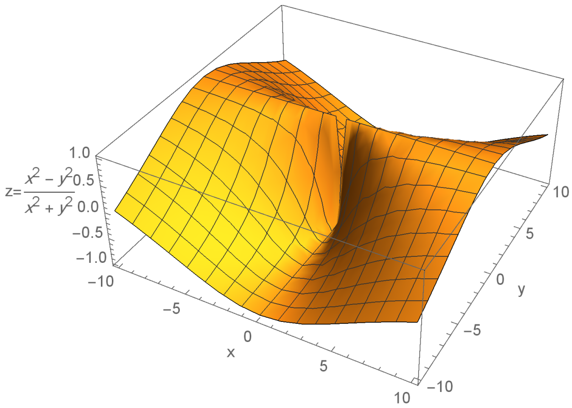


(a) la surface de la fonction f (b) les courbes de niveau de f

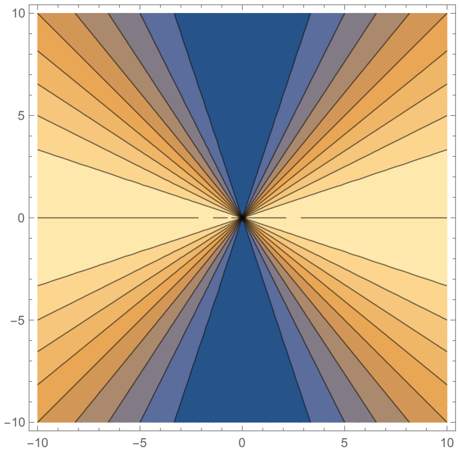
FIGURE 1.6 – la surface et les courbes de niveau de $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ réspectivement

.

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante
$$f :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction de fonctions continues. En $(0,0)$ on a :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2}.$$
Cette limite est égale à $\cos^2\theta - \sin^2\theta$. Le résultat dépend de θ, i.e. il n'y a pas de limite unique, donc la limite n'existe pas et f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :
$$g :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant qu'une fraction des fonctions continues. En $(0,0)$ on a :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\to 0} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\theta}{r}$$



(a) la surface de la fonction f

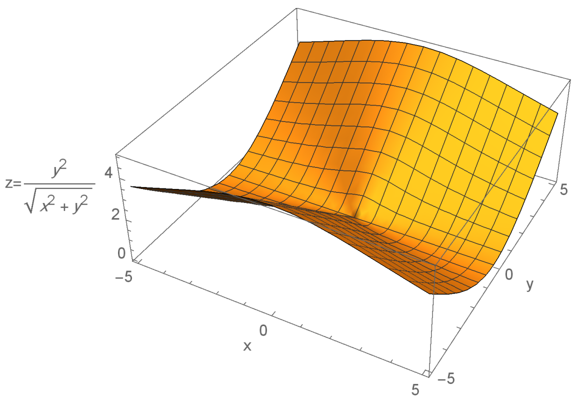


(b) les courbes de niveau de la fonction f

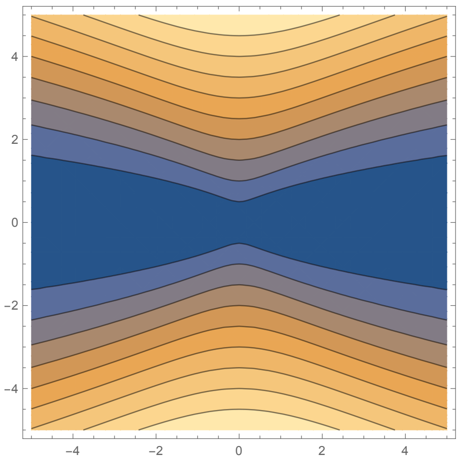
FIGURE 1.7 – la surface et les courbes de niveau de f réspectivement

.

Cette limite est égale au produit des limites : $\lim_{r\to 0}(\sin^2\theta)\lim_{r\to 0} r = 0$, car $|\sin\theta| \leqslant 1$ - une fonction bornée. Finalement, la fonction g est continue en $(0,0)$ et donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.



(a) la surface de la fonction g



(b) les courbes de niveau de g

FIGURE 1.8 – la surface et les courbes de niveau de la fonction g réspectivement

.

3 Calcul différentiel

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^2$

3.1 Dérivées partielles premières

Définition 3.1. Soit $\mathbf{A}(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$. Les dérivées partielles de f en $\mathbf{A}(x_0, y_0)$ sont les dérivées des fonctions partielles f_{y_0} et f_{x_0} évaluées en $\mathbf{A}(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

dérivée partielle de f par rapport à x en $\mathbf{A}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

dérivée partielle de f par rapport à y en $\mathbf{A}$.

Si f admet toutes les dérivées partielles premières, on dit que f est *dérivable.*

Notation. $\frac{\partial f}{\partial x}$ se note $\partial_x f$ ou f_x.

En pratique : pour calculer la dérivée partielle $\partial_x f$(resp. $\partial_y f$), on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x (resp. y) et que l'autre variable, y (resp. x), était une constante.

3.2 Vecteur gradient

Le gradient de f en (x_0, y_0), noté $\nabla f(x_0, y_0)$ ou encore $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières. Il est orthogonal à la courbe de niveau de f passant par (x_0, y_0).

Exemple 3.1. Les dérivées partielles premières de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$,
sont $\partial_x f(x, y) = -4x + 3y^2$, $\partial_y f(x, y) = 6xy - 3y^2$. en $(1, 1)$, $\mathbf{grad} f(, 1)$ est $\nabla f(1, 1) = (-1, 3)$.

3.3 Plan tangent

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A}((x_0, y_0)) f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existent, le plan $\mathcal{P}$ passe par $\mathbf{A}$ et orthogonal au vecteur $\mathbf{n}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -1)$, par définition, ce plan est appelé le plan tangent à la surface $\sum$ au point $\mathbf{A}$. Son équation est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(y_0 - y_0) - (z - f(x_0 - y_0)) = 0.$$

Exemple 3.2. le plan tangent au point $\mathbf{A}(0,1)$ à la surface $\sum$ de $f(x,y) = -x^2 - y^2$, a une équation $-2y - z + 3 = 0$.

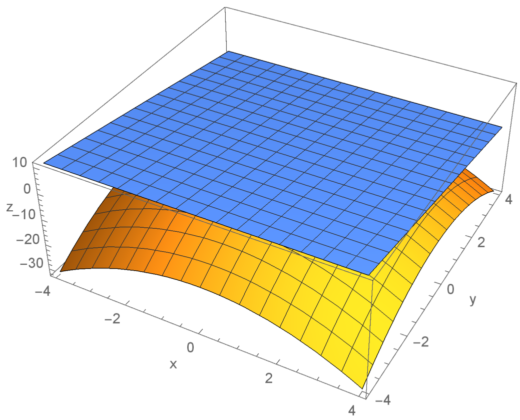


FIGURE 1.9 – Le paln tangent de la surface de la fonction f.

3.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 3.2. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et on note $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ si elle admet en tout point de $\mathcal{D}$ des dérivées partielles d'ordre 1 et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathcal{D}$.

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.*
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, alors $f + g, \lambda f$, ($\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{1}{g}, \dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 3.3. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et les quotients de fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

Proposition 3.2. *Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$, oú I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset I$.*
Si f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors la fonction φof est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. On a,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi of) = (\varphi' of)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\varphi of) = (\varphi' of)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Corollaire. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, f est continue sur $\mathcal{D}$.*

Remarque. Une fonction f peut admettre des dérivées partielles premières en tout point de $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et ne pas être continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Exemple 3.4. Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On montre que $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ et que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.
On a $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h+0)0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0.$
et $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k+0)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{(0(k+0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0}{k} = 0.$
Tandis que la restriction de f sur la droite $y = x$ donne $f(x,x) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$, d'oú f n'est pas continue en $(0,0)$.

3.5 Dérivées des fonctions composées :

(*règle de dérivation en chaîne*)

1. Cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières. Si x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x(t), y(t))$ est dérivable et :
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t).$$
2. Cas $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   Si f est une fonction des deux variables x et y , elles-mêmes fonctions des deux variables u et v, on peut définir la fonction composée :
$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$
   et écrire, lorsque les diverses dérivées partielles qui interviennent sont définies :
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v);$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

3.6 Fonction différentiable

Définition 3.3. On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe des constantes réelles A et B telles que :

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) = Ah+Bk+\|(h, k)\|\,\varepsilon(h, k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Dans ce cas : $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et en note :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Théorème 3.3. *Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0).*
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).
Les deux réciproques sont fausses.

En pratique :
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pour que f soit différentiable en (x_0, y_0) de $\mathcal{D}$, il suffit de montrer que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - h\partial_x f(x_0, y_0) - k\partial_y f(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Note. les fonctions élémentaires telles que les polynôme, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont différentiables dans leur domaine respectif et que les propriétés de différentiabilité relatives aux sommes, produits, etc., existent.

Exemple 3.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On étudie la différentiabilité de f en $(0,0)$, tout d'abord on cherche $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_x f(0,0)$. On a : $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+0,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h+0-0)^3 - 0}{((h+0)^2+0)h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3}{h^3} = 1.$
et $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k+0) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{(0-k-0)^3 - 0}{((k+0)^2+0)k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{-k^3}{k^3} = -1.$
Donc les dérivées partielles premières esistent, maintenant, en appliquant la définition de la différentiabilité , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - h\partial_x f(0,0) - k\partial_y f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{(h-k)^3}{h^2+k^2} - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-2h^2k + 2hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

on passe en coordonnées polaires : on pose $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-2h^2k+2hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{-2r^3\cos^2\theta\sin\theta + 2r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^3}$$
$$= \lim_{r\to 0}(-2\cos^2\theta\sin\theta + 2\cos\theta\sin^2\theta).$$

Comme la limite dépend de θ, la limite n'existe pas, d'oú la fonction f n'est pas différentiabile en $(0,0)$.

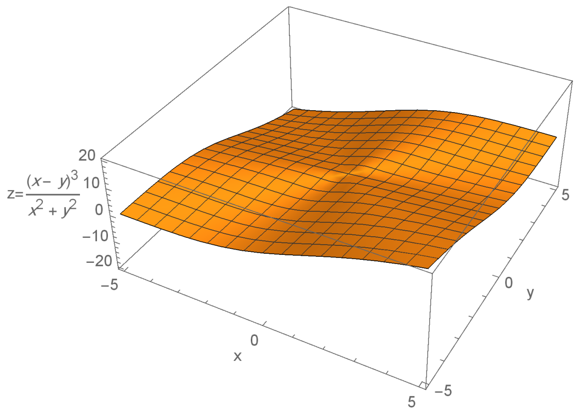


FIGURE 1.10 – la surface de la fonction f

.

3.7 Dérivées partielles de second ordre

Définition 3.4. Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en $(x0, y0)$. On les note

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0,y_0); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0,y_0); \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0,y_0); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.8 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 3.5. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et on note $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$ si elle admet en tout point de $\mathcal{D}$ des dérivées partielles d'ordre 2 et sont toutes des fonctions continues sur $\mathcal{D}$.

Proposition 3.4. *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.*
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, alors $f+g, \lambda f$, $(\lambda \in \mathbb{R}$ $)$ et fg sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Exemple 3.6. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et les quotients de fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition.

Proposition 3.5. *Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$, oú I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset I$.*
Si f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et si φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors la fonction $\varphi o f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

Theorem de Schwarz

Théorème 3.6. *Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction possédant des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues en $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$. On a alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{A}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{A}).$$

Exemple 3.7. Donnons un contre-exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de polynômes, et on trouve, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

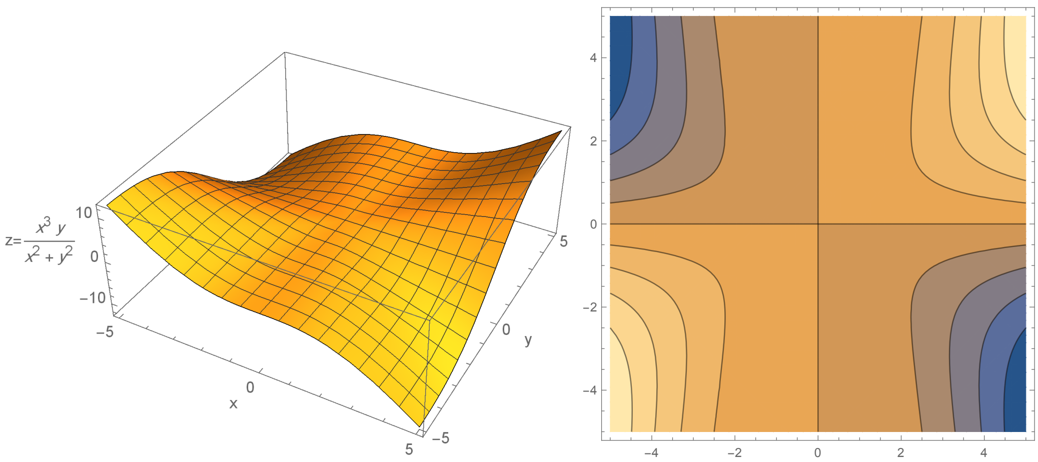
On a d'autre part $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, car les fonctions partielles en $\mathbf{0}$ sont nulles. On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{h}(\frac{\partial f}{\partial y}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = \lim_{k\to 0} 0 = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas toutes deux continues en $(0,0)$. La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$. Par contre, elle est de classe $\mathcal{C}^1$, car on montre aisément que les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues en $(0,0)$.



(a) la surface de la fonction f (b) les courbes de niveau de f

FIGURE 1.11 – la surface et les courbes de niveau de la fonction f résprectivement
.

— **Fonction de classe $\mathcal{C}^k$**
Si les fonctions dérivées partielles d'ordre k sont continues sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, on dit que f est de $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{D}$.
Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
Exemple 3.8. les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine respectif.

— **La matrice Hessienne**
Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. La matrice Hessienne de f en (x_0, y_0) est la matrice de taille 2×2 dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x_0, y_0) & \partial_{xy} f(x_0, y_0) \\ \partial_{yx} f(x_0, y_0) & \partial_{yy} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le réel $\Delta H_f(x_0, y_0) = \partial_{xx} f(x_0, y_0)\partial_{yy} f(x_0, y_0) - \partial_{xy} f(x_0, y_0)\partial_{yx} f(x_0, y_0)$.

3.9 Polynôme de Taylor d'ordre 2

le polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de (x_0, y_0) est donné par

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\partial_{xx} f(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\partial_{xy} f(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \partial_{yy} f(x_0, y_0)(y - y_0)^2\Big). \end{aligned}$$

4 Extremums

Définition 4.1. Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathcal{D}$.
On dit que f admet un maximum global (ou absolu) en $\mathbf{A}$ si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{A}).$$

On dit que f admet un maximum global (absolu) en $\mathbf{A}$ si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{A}).$$

On dit que f admet en $\mathbf{A}$ un extremum global si elle admet en $\mathbf{A}$ un maximum ou un minimum global.

Définition 4.2. Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathcal{D}$.
On dit que f admet un maximum local (ou relatif) en $\mathbf{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{A}, r) \cap \mathcal{D}, f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{A}).$$

On dit que f admet un maximum local (ou relatif) en $\mathbf{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{A}, r) \cap \mathcal{D}, f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{A}).$$

On dit que f admet en $\mathbf{A}$ un extremum local si elle admet en $\mathbf{A}$ un maximum ou un minimum local.

Remarques.
- Si f admet en $\mathbf{A}$ un extremum global, elle admet en $\mathbf{A}$ un extremum local.
- Si les inégalités précédentes sont strictes pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{A}$, on dit qu'on a un extremum strict.

4.1 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème 4.1. *Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, possédant sur $\mathcal{D}$ des dérivées partielles d'ordre 1, et $\mathbf{A}$ un point de $\mathcal{D}$. Si f admet un extremum local en $\mathbf{A}$, alors $\nabla f_{\mathbf{A}} = 0$.*

4.2 Les points critiques (stationnaires)

Définition 4.3. Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, possédant sur $\mathcal{D}$ des dérivées partielles d'ordre 1, et $\mathbf{A}$ un point de $\mathcal{D}$. Si $\nabla f_{\mathbf{A}} = 0$, on dit que $\mathbf{A}$ est un point critique (stationnaire) de f.

Note.
- Pour déterminer les extremums sur un ouvert d'une fonction possédant des dérivées partielles, on commence par déterminer ses points critiques.
- L'annulation du gradient n'est qu'une condition nécessaire d'extremum et n'est pas suffisante.

Etude directe : Après avoir déterminé un point critique (x_0, y_0), on peut aussi étudier directement le signe de la différence

$$D(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$

Si cette différence est de signe constant pour h et k voisins de 0, il s'agit d'un extrémum local (un maximum si $D < 0$, un minimum si $D > 0$). Sinon, il s'agit d'un point selle (col).
Mieux, si le signe est constant pour h et k quelconques, alors l'extrémum est global.

Exemples 4.1. 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^2y - xy^2$.
On a $\partial_x f(x,y) = y(2x-y), \partial_y f(x,y) = x(x-2y)$.
Son gradient est nul en $(0,0)$, mais $f(0,0) = 0$ et pour h et k voisins de 0, on a $D(h,k) = h^2k - hk^2$, la restriction de f sur la droite $y = -x$ donne $D(h,-h) = -2h^3$ et la différence D change de signe au voisinage de 0, donc f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$. D'où $(0,0)$ est un point selle.

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy - x + 5y - 3$$

a pour dérivées partielles

$$\partial_x f(x,y) = -2x + y - 1, \quad \partial_y f(x,y) = x - 2y + 5).$$

Le seul point critique est $(1,3)$. En faisant un changement d'origine, on étudie, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(1+h, 3+k) = -h^2 - k^2 + hk + 4.$$

Comme $-h^2 - k^2 + hk = -(h - \frac{1}{2}k)^2 - \frac{3}{4}k^2 \leqslant 0$, on a $f(1+h,3+k) \leqslant 4$, *i.e.* $f(1+h,3+k) \leqslant f(1,3)$, ce qui montre que f admet un maximum global en (1, 3).

3. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{16}xy$$

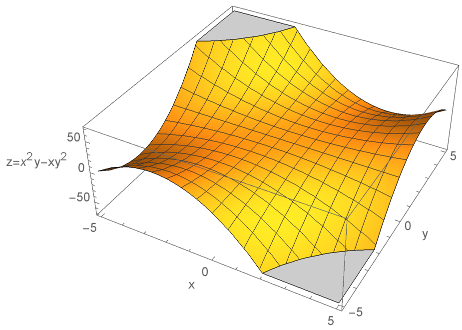
a pour dérivées partielles

$$\partial_x f(x,y) = 2x - \frac{1}{16}y, \quad \partial_y f(x,y) = 2y - \frac{1}{16}x).$$

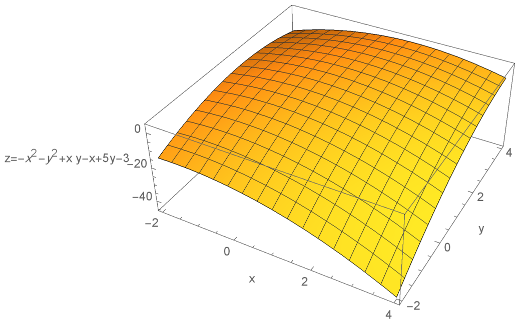
Le seul point critique est $(0,0)$. On étudie, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(h,k) = h^2 + k^2 - \frac{1}{16}hk.$$

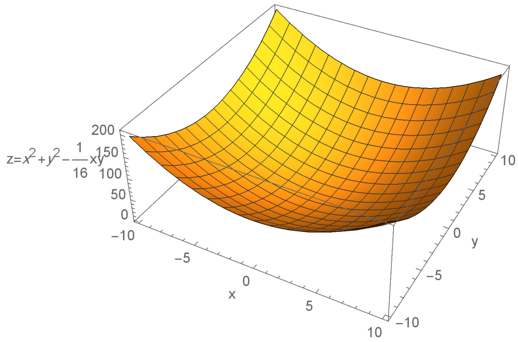
Comme $h^2 + k^2 - \frac{1}{16}hk = (h - \frac{1}{2}k)^2 + \frac{15}{16}k^2 \geqslant 0$, on a $f(h,k) \geqslant 0$, *i.e.* $f(h,k) \geqslant f(0,0)$, ce qui montre que f admet un minimum global en (0, 0).



(a) La surface de la fonction f_1



(b) La surface de la fonction f_2



(c) La surface de la fonction f_3

FIGURE 1.12 – Les surfaces des fonctions f_1, f_2, f_3 réspectivement
.

4.3 Conditions suffisantes du second ordre

Théorème 4.2. *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et* $\mathbf{A}$ *un point critique de f . On pose*

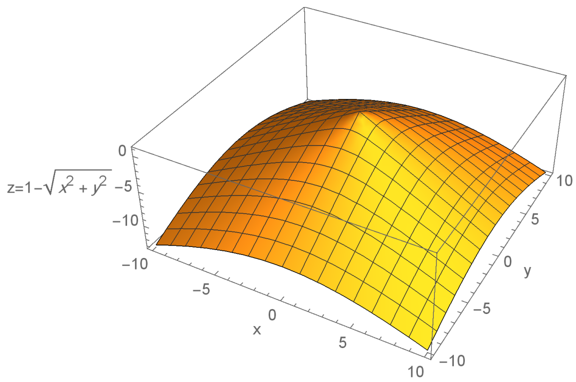
$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{A}),\ \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{A}),\ \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{A}) \quad \textit{(notations de Monge).}$$

— *Si $rt - s^2 > 0$, la fonction f admet un extremum local en* $\mathbf{A}$ *qui est un minimum si $r > 0$ et un maximum si $r < 0$.*
— *Si $rt - s^2 < 0$, la fonction f n'a pas un extremum en* $\mathbf{A}$.
— *Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.*

Remarques. — Le nombre $rt - s^2$ est le déterminant de la matrice Hessienne de f.
— Pour le cas $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes, on utilise l'étude directe (la précédente).

Recherche des extrema :

- Déterminer des points où f n'est pas de classe C^1 et regarder les valeurs de f en ces points. Par exemple, la fonction $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ admet un maximum à l'origine mais on ne le trouve pas parmi les points critiques.
- Rechercher les points critiques.
- Etudier les points critiques.



(a) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

FIGURE 1.13 – La surface de la fonction f

.

Exemple 4.2. Extrema locaux et globaux de $f(x,y) = -2x^2y + 2x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -4xy + 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(-y+1) & = 0 \\ -x^2 + y & = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,1)$.

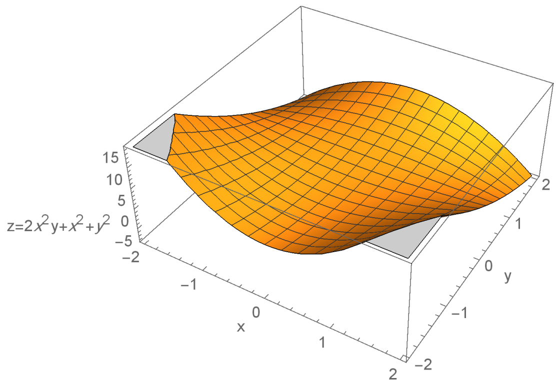
pt critique	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,1)$
$r = -4y+4$ $s = -4x$ $t = 2$ $\Delta = rt - s^2$ Signe de r	4 0 2 8 > 0	0 -4 2 -16	0 4 2 -16
Nature du pt critique :	min	pt selle	pt selle

Les extrema globaux : on voit que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global. Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,-2) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x^2+4 = -\infty$$



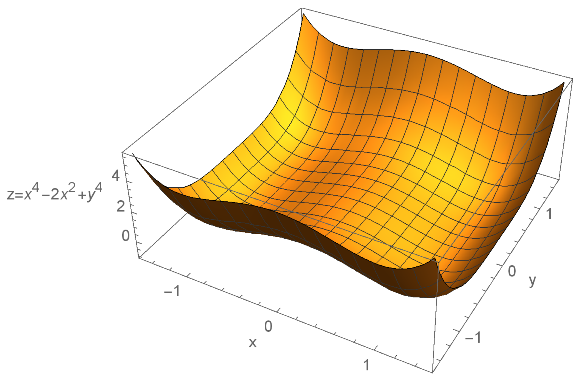
(a) $f(x,y) = -2x^2y + 2x^2 + y^2$

FIGURE 1.14 – La surface de la fonction f

.

Exemple 4.3. On cherche des extrema locaux de $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On trouve 3 points critiques $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ pour lesquels on ne peut pas utiliser le critère car $RT - S^2 = 0$ mais $g(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1$ donc en $(\pm 1, 0)$ il y a un minimum local. En $(0,0)$ on a $g(0,0) = 0$ et au voisinage de $(0,0)$ on a des valeurs positives et négatives $g(0,y) = y^4 > 0$ et $g(y,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ pour x suffisamment petit. Donc $(0,0)$ n'est pas un max ni un min, c'est un point-selle.



(a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$

FIGURE 1.15 – La surface de la fonction f

.

5 Applications économiques des fonctions à deux variables

5.1 Applications économiques des dérivées partielles

Dans ce paragraphe, nous allons voir deux applications économiques des dérivées partielles : le Coût marginal et la productivité marginale.

— **Coût marginal**

La fonction de coût conjointe :

$$C = Q(x, y)$$

est definie comme etant le coût de production des quantités x et y de deux biens. Nous pouvons calculer les dérivées partielles de C par rapport a x et par rapport a y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &: \quad \text{coût margmal par rapport à x.} \\ \frac{\partial C}{\partial y} &: \quad \text{coût marginal par rapport à y.} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Exemple 5.1. Si la fonction de coût conjointe pour produire des quantités x et y de deux biens est :

$$C = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

calculons le coût marginal par rapport a x :$\frac{\partial C}{\partial x} = 2x - y + 3$
et le coût marginal par rapport a x :$\frac{\partial C}{\partial y} = -x + 2y - 2$.

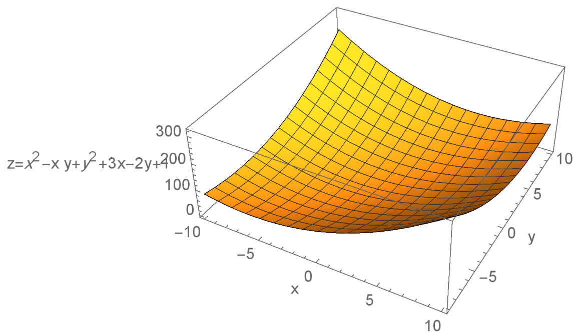


FIGURE 1.16 – La surface de $C(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$
.

— **Productivité marginale**
Pour produire la plupart des biens, on a besoin d'au moins deux facteurs de production tels que le travail, le capital, la terre, les materiaux ou les machines. Une fonction de production $z = f(x, y)$ signifie qu'une quantite z d'un bien est fabriquée a I'aide des quantites x et y de deux facteurs de production. On peut alors calculer la derivée partielle de z par rapport a x qui nous donne la productivité marginale de x et la derivée partielle de z par rapport a y qui nous donne la productivité marginale de y.
Exemple 5.2. Si la fonction de production d'un bien est donnée par : $Z = x^2 - 3y^2 + 2xy$
la productivité marginale de x est égale a :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2x + 2y$$

et la productivité marginale de y est égale a :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -3x + 2x.$$

5.2 Multiplicateurs de Lagrange

Dans de nombreuses applications pratiques de maximisation ou de minimisation, le problème est de maximiser ou minimiser une fonction donnée assujettie a certaines conditions ou contraintes sur les variables impliquées.
La methode des multiplicateurs de Lagrange est employée pour obtenir un maximum ou un minimum d'une fonction soumise a des contraintes d'egalite.
Supposons que $f(x, y)$, appelée fonction objectif, doit etre maximisée ou minimisée sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Formons une fonction auxiliaire appelée un lagrangien :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

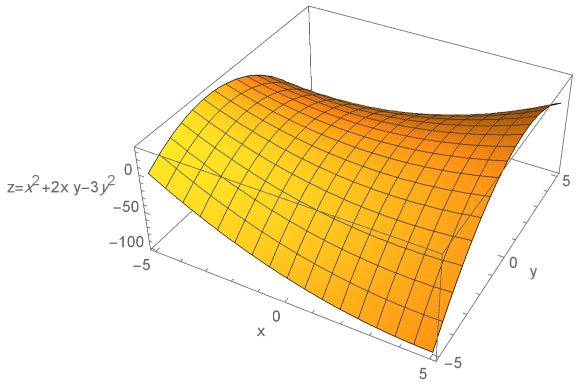


FIGURE 1.17 – le Graphe de $Z = x^2 - 3y^2 + 2xy$

.

oú λ (multiplicateur de Lagrange) est une inconnue. Pour que cette fonc-tion passe par un extrémum, il faut que les trois equations suivantes soient satisfaites simultanement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda . \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda . \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= g(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

La solution du système de trois equations a trois inconnues (x, y et λ) ci-dessus fournit les points critiques de la fonction sous contrainte. Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il reste encore à determiner s'il s'agit effectivement d'un extremum. Pour cela, on utilisera le resultat suivant :

— On a un maximum en $(x, y) = (a, b)$ si, $\Delta > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$

— On a un minimum en $(x, y) = (a, b)$ si, $\Delta > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$ avec $\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y})^2$.
Si $\Delta \leqslant 0$, il faut examiner la fonction au voisinage de x, y.

Exemple 5.3. Soient à determiner les minima et maxima de la fonction objectif

$$f(x, y) = 6xy - 4x^2 - 3y^2$$

sous la contrainte :$2x + y = 25$.
La contrainte s'écrit $g(x, y) = 2x + y - 25 = 0$. Le Lagrangien est donnée par :

$$F(x, y) = 6xy - 4x^2 - 3y^2 + \lambda(5x + y - 25).$$

Résolvons le système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 6y - 8x + 2\lambda = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 6x - 6y + \lambda = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 2x + y - 28 = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

On obtient $x_0 = 9, y_0 = 10$. Pour determiner si le point critique $(9, 10)$ est un extremum, il faut calculer les derivées partielles du deuxième ordre :

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -8, \ t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -6, \ s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6.$$

Et comme $\Delta = rt - s^2 = 12 > 0, r < 0$ et $t < 0$, alors la fonction objectif sous la contrainte $2x + y = 28$: possède un maximum en $x_0 = 9$ et $y_0 = 10$.
Nous avons donc trouvé la solution qui maximise la fonction objectif tout en respectant la contrainte.

Remarque. Remarquons que cette même fonction, si elle n'est pas soumise à la contrainte $2x + y = 28$ ne possède pas un maximum au même point, cette fonction possède un maximum en (0, 0).

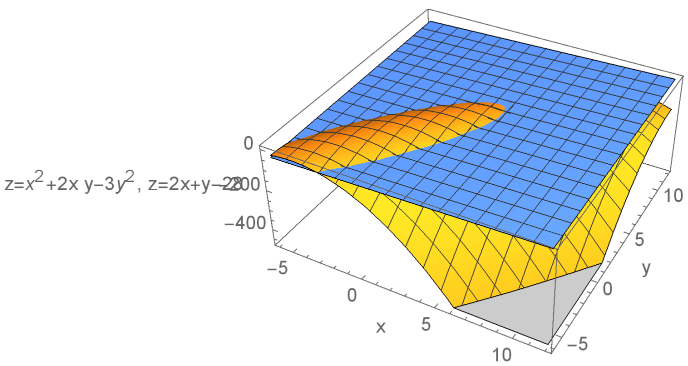


FIGURE 1.18 – Le Graphe de $f(x, y) = 6xy - 4x^2 - 3y^2, \ g(x, y) = 2x + y - 28$.

5.3 Applications économiques des multiplicateurs de Lagrange

II y a beaucoup d'applications économiques des minima et maxima sous contraintes. Par exemple, si un producteur fabrique deux biens, il pent vouloir minimiser le coût total tout en devant fabriquer une quantité totale minimale specifiée ; une compagnie peut désirer maximiser ses ventes résultant de deux publicités effectuées, tout en observant la contrainte du budget de publicité ; un consommateur pent vouloir maximiser sa fonction d'utilité provenant de la consommation de certains biens, tout en étant restreint par son budget.

Exemple 5.4. Un consommateur dépense son revenu de 34 mDA pour l'achat de deux biens : x et y. Les prix de x et de y sont respectivement $2mDA$ et 3 mDA. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule :

$$U = -2x^2 - y^2 + xy - 2x - 10y.$$

Combien d 'unités du bien x et du bien y doit-il consommer pour maximiser son utilité ?
La fonction objectif a maximiser est $U = -2x^2 - y^2 + xy - 2x - 10y$.
La contrainte est $2x + 3y - 34 = 0$.
Formons la fonction auxiliaire :

$$F(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + xy - 2x - 10y + \lambda(2x + 3y - 34).$$

On cherche ensuite les dérivées partielles par rapport a x, y et λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -4x + y - 2 + 2\lambda. \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2y + x - 10 + 3\lambda. \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 2x + 3y - 34. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Pour trouver un extremum, on annule ces 3 derivées partielles :

$$\begin{aligned} & -4x + y - 2 + 2\lambda = 0. \\ & -2y + x - 10 + 3\lambda = 0. \\ & 2x + 3y - 34 = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

et en résolvant pour x et y, on trouve : $x = 5, y = 8$.
On calcule les derivées partielles de deuxième ordre afin de déterminer la nature de ce point critique :

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -4, \; t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2, \; s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1.$$

Et comme $\Delta = rt - s^2 = 7 > 0, r < 0$ et $t < 0$, il s'agit d'un maximum.

Par consequent, quand le consommateur dépense 10 mDA et 24 mDA pour l'achat de deux biens x et y respectivement, son utilité est maximal sous la contrainte d'un revenu de 34 mDA.

Note. On notera que, dans ce cas, la valeur de λ ne présente pas d'interet et n'est donc pas cherchée.

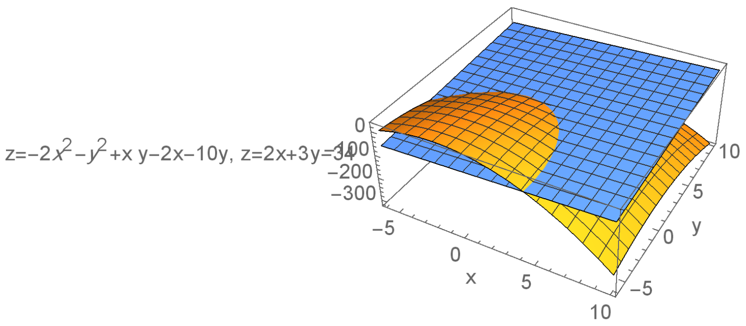


FIGURE 1.19 – Le Graphe de $f(x,y)=-2x^2-y^2+xy-2x-10y,\ g(x,y)=2x+3y-34$.

6 Exercices corrigés

Exercice 6.1. *Soient* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^2$. *Montrer que*

$$\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}\leqslant\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}+\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}.$$

Solution 6.1. *On a :*

$$\begin{aligned}\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}&=1-\frac{1}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}\leqslant 1-\frac{1}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}\\&=\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}\leqslant\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}+\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}.\end{aligned}$$

Exercice 6.2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{xy^2}{y^4-4y^2x+5x^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ f(0,0)=0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. *Montrez que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.*
2. *Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.*

Solution 6.2. *Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans $\mathbb{R}^2$ puisque*

$$y^4-4y^2x+5x^2=(y^2-2x)^2+x^2$$

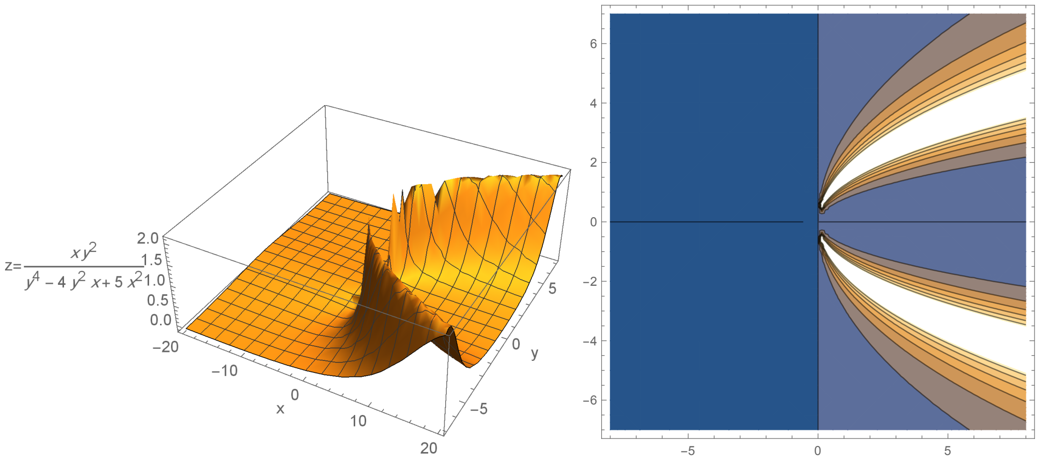
ne s'annule qu'en (0,0).

1. *La restriction de f aux droites $x=0$ et $y=0$ est la fonction nulle.*
   La restriction de f à la droite $y=mx$, avec $m\neq0$, donne :
   $$f(x,mx)=\frac{m^2x}{m^4x^2-4m^2x+5}$$
   et tend vers 0 quand x tend vers 0.
   Comme $f(0,0)=0$, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est donc continue.

2. Considérons la restriction de f à la parabole $x = y^2$. On a :

$$f(x, x^2) = \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, $f(y^2, y)$ ne tend pas vers 0 quand y tend vers 0.



(a) La surface de la fonction f (b) Les courbes de niveau de f

FIGURE 1.20 – La surface de et Les courbes de niveau de la fonction f réspectivement

.

Exercice 6.3. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par : $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ f admet-elle une limite en $(0,0)$?*

Solution 6.3. *Pour trouver la valeur de la limite, si elle existe, il suffit de calculer la limite d'une restriction à une courbe continue passant par $(0,0)$. On a $f(0,y) = 0$ pour tout, donc si la limite existe elle est 0. Pour vérifier que c'est bien la limite on passe en coordonnées polaires : on pose $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.*

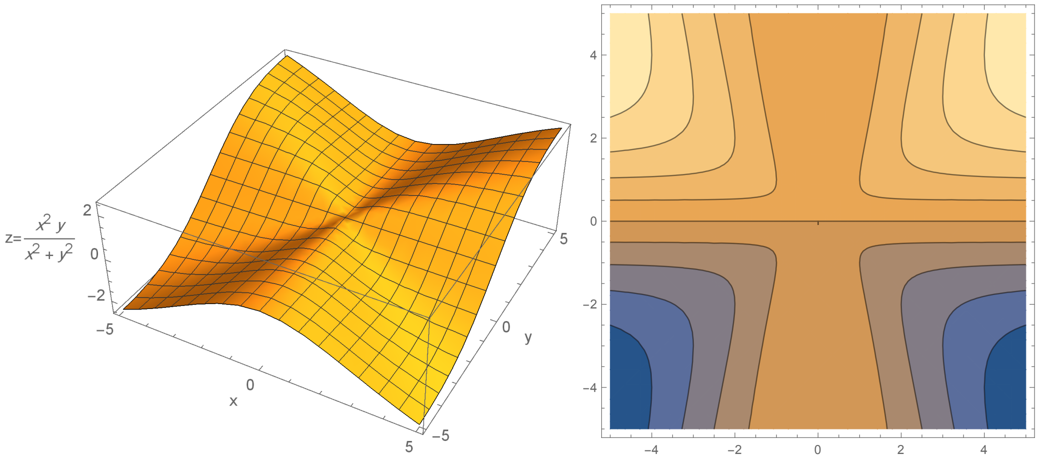
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} r\cos^2(\theta)\sin(\theta),\end{aligned}$$

en effet, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ car la fonction $\theta \mapsto \cos^2(\theta)\sin(\theta)$ est une fonction bornée.

Exercice 6.4. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$f:\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} & si\ y \neq 0, \\ 0 & si\ y = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ mais que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.



(a) La surface de de la fonction f (b) Les courbes de niveau de f

FIGURE 1.21 – La surface de et Les courbes de niveau de la fonction f réspectivement

.

Solution 6.4. $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, *et* $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$.
La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ car la restriction de f à la parabole $x = y^2$ donne : $\lim\limits_{y\to 0} f(y^2, y) = 1 \neq 0 = f(0,0)$.

Exercice 6.5. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

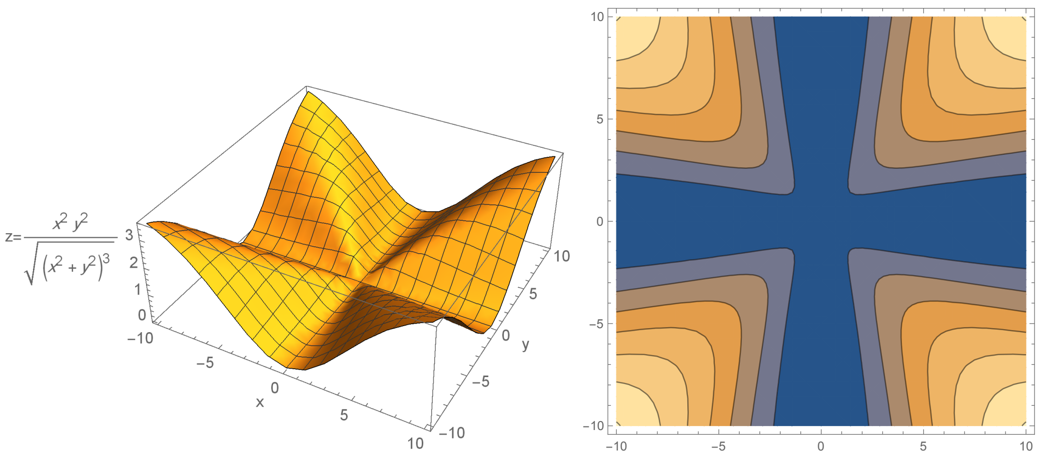
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ *mais que la fonction* $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$.

Solution 6.5. *On a :* $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, *et* $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$.
Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(2y^2-x^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

la restriction de f à la droite $y = x$ donne : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$;
ce qui entraine que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$.



(a) La surface de la fonction f (b) Les courbes de niveau de f

FIGURE 1.22 – La surface de et Les courbes de niveau de la fonction f réspectivement

.

Exercice 6.6. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :* $f(x,y) = e^{x-1}\sin(xy)$. *Donner l'équation du plan tangent à la surface* $\sum$ *de* f *au point* $\mathbf{A}(1, \frac{\pi}{2})$.

Solution 6.6. *Puisque pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}$ *:*
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-1}(\sin(xy) + y\cos(xy))$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x-1}\cos(xy)$,
l'équation du plan tangent à la surface $\sum$ *de* f *au point* $\mathbf{A}(1, \frac{\pi}{2})(x-1)$ *est*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2})(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2}) - (z-1) = 0,$$

d'où, l'équation est $x - z = 0$.

Exercice 6.7. *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *La fonction* f *est -elle continue en* $(0,0)$.
2. *Déterminer si les dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}f(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}f(0,0)$ *existent et les Calculer le cas échéant.*
3. *La fonction* f *est -elle de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
4. *La fonction* f *est -elle différentiable en* $(0,0)$.

Solution 6.7. 1. *-La continuité de* f *en* $(0,0)$ *: on pose* $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ *tels que* $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$.

On étudie la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$. *On a*

$$\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} = r\sin(\theta)\cos(\theta)(\sin(\theta)+\cos(\theta)) \underset{r\to 0}{\to} 0.$$

Car $\forall\theta\in\mathbb{R}, \sin(\theta)\cos(\theta)(\sin(\theta)+\cos(\theta))$ *bornée.*
On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. *La fonction est donc continue en* $(0,0)$. *De plus,* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

2. ***Calcul de*** $\partial_x f(0,0)$: $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0(h+0)\frac{(h+0)+0}{(h+0)^2+0^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0.$
La dérivée partielle par rapport à x *en* $(0,0)$ *existe et égale à* 0.
Calcul de $\partial_y f(0,0)$: $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k+0)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{(0(k+0)\frac{(k+0)+0}{(k+0)^2+0^2}}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0}{k} = 0.$
La dérivée partielle par rapport à y *en* $(0,0)$ *existe et est égale à* 0.

3. ***l'étude de classe*** $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *: on doit calculer les dérivées partielles sur le reste du domaine et vérifier si elles sont continués ou non en* $(0,0)$ *qui est le seul point qui peut poser des problèmes.*
   — ***Calcul de*** $\partial_x f(x,y)$ *pour* $(x,y)\neq(0,0)$ *:*

   $$\partial_x f(x,y) = \frac{(2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x(x^2y+xy^2))}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(-x^2+2xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

   On a $\frac{y^2(-x^2+2xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \sin^2(\theta)\left(\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)+2\sin\theta\cos\theta\right)$. *Par suite :* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2(-x^2+2xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ *n'existe pas car elle dépend de* θ. *On en déduit que la fonction* $\partial_x f(x,y)$ *n'est pas continue en* $(0,0)$ *, mais elle est continue sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.*
   — ***Calcul de*** $\partial_y f(x,y)$ *pour* $(x,y)\neq(0,0)$ *: par symétrie de* f *:*

   $$\partial_y f(x,y) = \frac{x^2(-y^2+2xy+x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

   On a

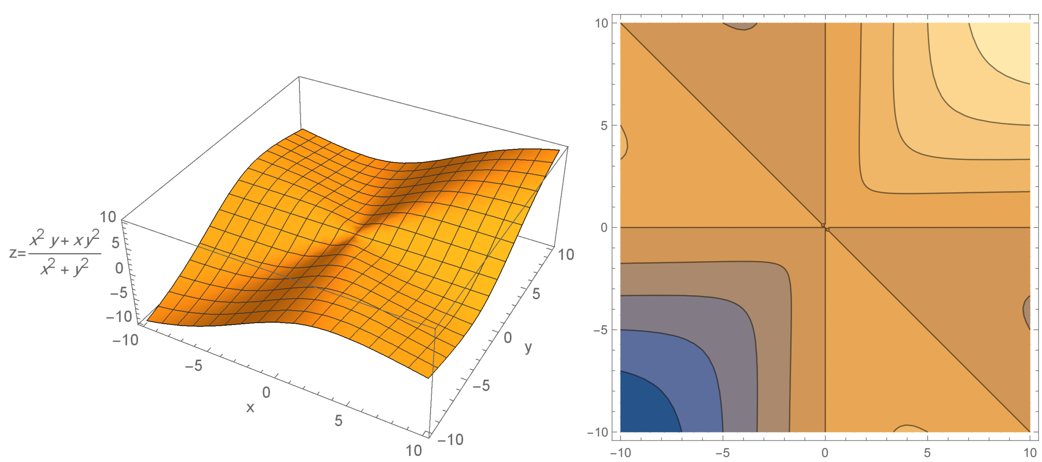
   $$\frac{x^2(-y^2+2xy+x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \cos^2(\theta)\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+2\sin\theta\cos\theta\right).$$

Par suite : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\left(-y^2+2xy+x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ *n'existe pas car elle dépend de* θ.
On en déduit que la fonction $\partial_y f(x,y)$ *n'est pas continue en* $(0,0)$ *, mais elle est continue sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.*
D'où , la fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *, elle admets des dérivées partielles sur* $\mathbb{R}^2$ *et ses dérivées partielles sont continués sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
On conclut que la fonction f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *, mais n'est pas sur* $\mathbb{R}^2$.

4. ***L'étude si*** f *est* ***différentiable*** *en* $(0,0)$ *: Soit la fonction*

$$\varepsilon(h,k):=\frac{f(h+0,k+0)-f(0,0)-h\partial_x f(0,0)-k\partial_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^2k+hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}.$$

On calcule $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2k+hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}$, *on pose* $x=r\cos(\theta), y=r\sin(\theta)$ *tels que* $r>0, \theta\in\mathbb{R}$.
On a $\frac{h^2k+hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}=\sin(\theta)\cos(\theta)(\sin(\theta)+\cos(\theta))$, *donc* $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2k+hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}$ *n'existe pas car elle dépend de* θ *. On conclut que la fonction n'est pas différentiable en* $(0,0)$.



(a) La surface de la fonction f (b) Les courbes de niveau de f

FIGURE 1.23 – La surface de et Les courbes de niveau de la fonction f réspectivement
.

Exercice 6.8. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x,y)=-x^2+2xy+e^{xy}.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(1,0)$.

Solution 6.8. *La fonction f est de class $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a*

$$\partial_x f(x,y) = -2x+2y+ye^{xy}, \quad et \quad \partial_y f(x,y) = 2x+xe^{xy},$$

puis

$$\partial_{xx} f(x,y) = -2+y^2e^{xy}, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 2+(xy+1)e^{xy}, \ et\ \partial_{yy} f(x,y) = x^2e^{xy}.$$

On a alors, $f(1,0)=-1$, $\partial_x f(1,0)=-2$, $\partial_y f(1,0)=2$, $\partial_{xx} f(x,y)=-2$, $\partial_{xy} f(1,0)=3$, $\partial_{yy} f(1,0)=1$.
On a donc,

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(1,0)+\partial_x f(1,0)(x-1)+\partial_y f(1,0)y \\ &+\frac{1}{2}\Big(\partial_{xx} f(1,0)(x-1)^2+2\partial_{xy} f(1,0)(x-1)y+\partial_{yy} f(1,0)y^2\Big) \\ &= -1+-2(x-1)+2y+\frac{1}{2}\Big(-2(x-1)^2+6(x-1)y+y^2\Big) \\ &= -x^2+\frac{1}{2}y^2-y+3xy-1. \end{aligned}$$

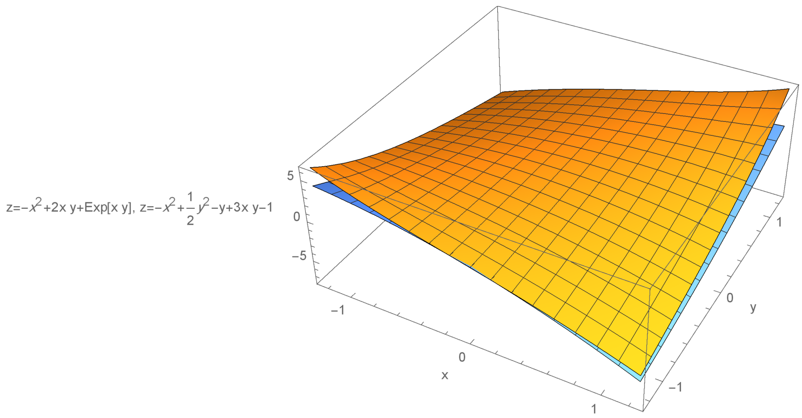


FIGURE 1.24 – La surface de la fonction f et de $P_2(x,y)$

Exercice 6.9. *Étudiez les extrémums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = x^4+y^4-4(x-y)^2.$$

Solution 6.9.

— *Comme la restriction $f(x,0)=x^4-4x^2$ peut tendre vers $+\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.*

— *Un extrémum local (relatif) de f vérifie les conditions nécessaires :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3-8(x-y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3+8(x-y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3 &= 0 \\ x^3-2(x-y) &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -y \\ x^3-4x &= 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont donc : $(0,0)$, $(2,-2)$,$(-2,2)$. *Pour les étudier, calculons les dérivées secondes :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8,\ \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12y^2 - 8,\ \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8.$$

pt critique	$(0,0)$	$(2,-2)$	$(-2,2)$
$r = 12x^2 - 8$	*-8*	*40*	*40*
$s = 8$	*8*	*8*	*8*
$t = 12x^2 - 8$	*-8*	*40*	*40*
$\Delta = rt - s^2$	*0*	1536	1536
Signe de r		> 0	> 0
Nature du pt critique :	*rien conclure*	*min local*	*min local*

— *En* $(0,0)$, *on a* $\Delta = 0$. *On ne peut donc pas conclure avec les dérivées secondes.*
Examinons le signe, au voisinage du point étudié, de deux restrictions : on a $f(0+h, 0+k) = h^4 + k^4 - 4(h-k)^2$, *(h,k) voisinage de (0,0).*
pour $k = h$, $f(h,h) = 2h^4 > 0$ *et pour* $k = -h$, $f(h,-h) = 2h^4 - 16h^2 \underset{0}{\equiv} -16h^2 < 0$. *Les signes étant différents, le point (0,0) n'est pas un extrémum.*

— *Avec des transformations algébriques, on peut obtenir :*

$$f(x,y) + 32 = (x^2-4)^2 + (y^2-4)^2 + 4(x+y)^2 \geqslant 0.$$

Il s'agit donc d'un minimum global dont la valeur est $f(2,-2) = f(-2,2) = -32$.

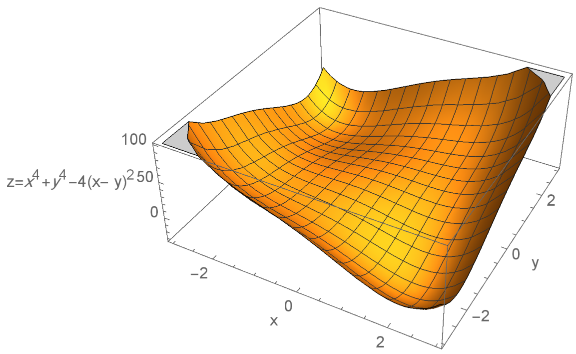


FIGURE 1.25 – La surface de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

Exercice 6.10. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$f(x,y) = x^2 + xy + x + y^3$$

1. *Déterminer les points critiques de f.*
2. *La fonction admet-elle des extrema locaux dans R^2 ?*
3. *Comparer $f(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ et $f(0,-1)$, que peut-on déduire pour la fonction f ?*

Solution 6.10.
1. ***les points critiques de*** f *:*
Les dérivées partielles de premier ordre de f sont : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 3y^2$.
Le point (x,y) est un point critique de f si, et seulement si : $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases}$
On voit donc que si (x,y) est un point critique de f , alors $x = -3y^2$ et donc $-6y^2 + y + 1 = 0$.
Les solutions de cette équation sont : $y_1 = \frac{1}{2}$ et $y_2 = -\frac{1}{3}$.
On a alors, $x_1 = -\frac{3}{4}$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$. les points critiques de f sont donc les points : $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
En effet, on vérifie facilement que ces points sont solutions du système.
2. ***les extrema locaux de*** f *: Notons que f est un polynôme à deux variables, donc une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a :$r := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2,\ s := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$, et $s := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$.*
On a $\Delta := rt - s^2 = 12y - 1$. Au point $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, $\Delta > 0$ et le point est un extremum local.
Comme $r > 0$, le point est un minimum local.
Au point $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ on a $\Delta = -5 < 0$ Ce point est un point selle (un col).
3. ***La déduction pour*** f *: on a $f(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = -\frac{7}{16}, f(0,-1) = -1$, comme $f(0,-1) < f(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, le minimum local n'est pas global.*

Exercice 6.11. *Une firme produit deux types de biens A et B. Son coût total de fabrication, noté C, et la demande respective des deux biens q_A et q_B sont donnés par*

$$\begin{aligned} C &= q_A^2 + q_B^2 + 10 \\ q_A &= 40 - 2p_A - p_B \\ q_B &= 35 - p_A - p_B \end{aligned} \tag{6.1}$$

— *Quels sont les niveaux de production qui maximisent le profit ?*
— *Quels sont les prix de A et B qui suscitent une demande correspondant à ces niveaux optimaux ?*

Solution 6.11. *La fonction profit est donnée par $\Pi(q_A, q_B) = q_A.p_A + q_B.p_B - C(q_A, q_B)$, où $\Pi(q_A, q_B)$ ne dépend que des variables q_A et q_B.*

de $\begin{cases} q_A = 40 - 2p_A - p_B \\ q_B = 35 - p_A - p_B \end{cases}$ *on peut déduire* $\begin{cases} p_A = 5 - q_A + q_B \\ p_B = 30 + q_A - 2q_B \end{cases}$

et donc que $\Pi(q_A, q_B) = 5q_A - 2q_A^2 + 30q_B - 4q_B^2 + 2q_A.q_B - 10.$
Maximiser le profit en fonction niveau de production :

1. *Recherche des points critiques(stationnaires) de* Π.
   Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 *de* Π *(dérivées premières), et résoudre le système*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_A}(q_A, q_B) &= 0 \\ \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_B}(q_A, q_B) &= 0 \end{cases}$$
   Les solutions (q_A^*, q_B^*) *de ce système sont les points critiques.*
$$\begin{cases} 5 - 4q_A + 2q_B = 0 \\ 30 + 2q_A - 8q_B = 0 \end{cases}$$
   Ce système est un système linéaire. Il peut être résolu simplement par substitution. On trouve $q_A = \frac{50}{14}$, $q_A = \frac{65}{14}$, $(\frac{50}{14}, \frac{65}{14})$ *est donc un point critique.*
2. *Test des points critiques.*
   Le point critique $(\frac{50}{14}, \frac{65}{14})$ *est-il un maximum local ?*
   — *Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre* 2 *(dérivées secondes) .*
$$r = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}(q_A, q_B) = -4, \; s = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}(q_A, q_B) = -8, \; t = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}(q_A, q_B) = 2.$$
   — *Pour le point critique* $(\frac{50}{14}, \frac{65}{14})$, *on a* $\Delta = rt - s^2 = 28 > 0$, $r < 0$, $t < 0$, *donc la fonction* Π *possède un maximum local au point* $(\frac{50}{14}, \frac{65}{14})$.

***Conclusion** :*
$q_A = \frac{50}{14}$, $q_A = \frac{65}{14}$ *maximisent le profit en fonction des niveaux de production.*
Les prix associés p_A *et* p_B *sont donnés par* $p_A = 5 - q_A + q_B$ *et* $p_B = 30 + q_A - 2q_B$.
Les prix associés à ce niveau de production sont $p_A = \frac{85}{14}$ *et* $p_B = \frac{340}{14}$.

7 Exercices proposés

Exercice 7.1. *Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en* $(0, 0)$ *des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x, y) = \frac{xy}{x+y}$; $f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$; $f_3(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $f_4(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{y} \sin y$; $f_5(x, y) = \frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$
2. $f_6(x, y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$; $f_7(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$; $f_8(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$; $f_{10}(x, y) = \frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$

Exercice 7.2. *Soient les fonctions définies par*

$$F(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2},\quad G(x,y)=y-\sin x,\quad H(x,y)=\frac{x^2y}{x+y}.$$

1. *Représenter l'ensemble de définition de la fonction F.*
2. *Tracer les courbes de niveau pour la fonction G avec $k=0,1,-2$.*
3. *Montrer que la limite de H n'existe pas en (0,0).*

Exercice 7.3. *Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & sinon.\end{cases}$; $f_2(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon.\end{cases}$
2. $f_3(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon.\end{cases}$; $f_4(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{y}} & si\ y\neq 0\\ 0 & sinon.\end{cases}$
3. $f_5(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{y} & si\ y\neq 0\\ x & sinon.\end{cases}$; $f_6(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x-y} & si\ x\neq y\\ \frac{1}{1+x} & sinon.\end{cases}$

   La fonction f_6 définie sur $\mathcal{D}=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

Exercice 7.4. *Chacune des fonctions suivantes est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$*

- $f_1(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{y^2},\quad f_2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x},\quad f_3(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},$
- $f_3(x,y)=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|},\quad f_4(x,y)=\frac{xy}{x^3+3y^2},\quad f_5(x,y)=(x+y^2)\sin\frac{1}{xy}.$

Exercice 7.5. *Soit* $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto\frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}\ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0)\mapsto 0\end{cases}$.

Étudier la continuité de f et l'existence des dérivées partielles.f est-elle C^1 ?

Exercice 7.6. *Soit la fonction $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par* $f(x,y)=\begin{cases}0\ si\ (x,y)=(0,0),\\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ si\ \ (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1.

Exercice 7.7. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

?tudier la continuité puis la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.8. *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\ si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

— *Déterminer le s fonctions* f'_x *et* f'_y*, sont-elles contiues au point* $(0,0)$.
— *La fonction* f *est-elle differentiable en* $(0,0)$.

Exercice 7.9. *Soit* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y)\longmapsto \begin{cases} \frac{x^3\ln(1+y^2)}{x^2+y^2} \ si\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ si\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

étudier la différentiabilité de f *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.10. *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \ si\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ si\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

— *Calculer* $f'_x(0,0)$ *et* $f'_y(0,0)$.
— *Montrer à l'aide de la définition que* f *n'est pas differentiable en* $(0,0)$.

Exercice 7.11. *Soit* $f(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y)\neq 0$ *et* $f(0,0)=0$.

1. *Étudier la continuité de* f *et de ses dérivées partielles premières sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Exercice 7.12. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0\ si\ y=0 \\ y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)\ \ si\ y\neq 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. *Etudier la continuité de* f.
2. *Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ *sont définies en* $(0,0)$ *mais n'ont pas la même valeur.*

Exercice 7.13. *Soit* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & si\ (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & si(x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ *sont définies en* $(0,0)$ *et ont la même valeur.*
3. *Montrer que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ *ne sont pas continues en (0,0).*

Exercice 7.14. *Déterminer la classe de* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *où* $f(x,y)=\begin{cases} 0\ si\ (x,y)=(0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$.

Exercice 7.15. *Pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, on pose* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Montrer que f *est de classe* C^1 *(au moins) sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.16. *Chercher les extrémums des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$; $f_2(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$;
2. $f_3(x,y) = x^2y^2(1+3x+2y)$; $f_4(x,y) = 2x + y - x^4 - y^4$
3. $f_5(x,y) = xe^y + ye^x$; $f_6(x,y) = \frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$;
4. $f_7(x,y) = x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$; $f_8(x,y) = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}$

Exercice 7.17. *Trouver les points critiques des fonctions définies sur* $\mathbb{R}^2$ *suivantes et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.*

1. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$
2. $g(x,y) = x\,(x+1)^2 - y^2$
3. $h(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.
4. $k(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
5. $p(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Existent- ils des exrtrema globaux ?

Exercice 7.18. *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = (x^2 - y)(2x^2 - y).$$

1. *Montrer que, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)$$

   admet un minimum local en 0.
2. *Montrer que f n'admet pas de minimum local en* $(0,0)$.

Exercice 7.19. *Déterminer les extremums sur* $\mathbb{R}^2$ *des fonctions*

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$;
2. $f_2 : (x,y) \longmapsto x^3y^2(1-x-y)$;
3. $f_3 : (x,y) \longmapsto x^3 + 3xy^2 + 15x + 12y$;
4. $f_4 : (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Existent-ils des exrtrema globaux ?

Exercice 7.20. *Soit la fonction*

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y - 12x^2 - 3y^3.$$

1. *Trouver les points critiques de f.*
2. *trouver les exrema locaux de $f$et étudier leurs nature.*
3. *la fonction f possède t-elle un maximum ou un minimum global ?*

Exercice 7.21. *Déterminer et classer les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2-y^2)}.$$

Exercice 7.22. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui satisfont pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 3y^2 - y^3 + 2x \arctan x \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 6xy - 3xy^2 + \frac{2y}{1+y^2} \\ . \end{cases}$$

Exercice 7.23. *Déterminer les fonctions $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y - \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

Exercice 7.24. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = -x^2 + 2xy + e^{x+y}\cos(x^2)$.*
Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(0,0)$.

Exercice 7.25. *Si la fonction de coût conjointe pour produire des quantités x et y de deux biens est :*

$$C = 2x \ln(3 + 2y).$$

Calculer le coût marginal par rapport à x et le coût marginal par rapport à y.

Exercice 7.26. *Trouver la productivité marginale de x et la productivité marginale de y pour les fonctions de production suivantes :*

$$z = xy + 4x^3y^2 - 6x + 3.$$

Exercice 7.27. *Une entreprise fabrique deux types de machines x et y. La fonction de coût conjointe est :*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy.$$

Combien de machines de chaque type l'entreprise doit-elle fabriquer pour minimiser son coût s'il lui faut un total de 8 machines ?

Exercice 7.28. *Un consommateur dépense son revenu de 90\$ pour l'achat de deux biens x et y. Le prix de x et y est respectivement de 5\$ et de 10\$. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par :*

$$U = -x^2 - y^2 + xy.$$

Combien d'unités du bien x et du bien y doit-il consommer pour maximiser son utilité ?

Exercice 7.29. *Une firme produit des appareils dans deux usines différentes. Les coûts totaux de production pour les deux usines sont respectivement :*

$$CT_1 = 200 + 6q_1 + 0.03q_1^2$$
$$CT_2 = 150 + 10q_2 + 0.02q_2^2.$$

où q_1 et q_2 representent le nombre d'appareils produits dans chaque usine. La firme s'est engagée à livrer 100 *appareils à une entreprise. Les frais de transport par appareil sont de* 4\$ *pour les livraisons à partir de la première usine et de* 2\$ *pour les livraisons a partir de la seconde usine. Les frais de transport sont supportes par la firme productive. Calculer le nombre d'appareils que doit produire la firme dans chaque usine afin de minimiser le coût total de production y compris le coût de transport.*

Chapitre 2

Les intégrales doubles

1 Formule de Fubini sur un rectangle fermé

Nous allons supposer le plan usuel $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Theorem de Fubini

Théorème 1.1. *soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$. Alors*

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)dx \Big) dy.$$

Soient $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, les deux fonctions $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)dx \quad \text{et} \quad h(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

sont continues. De plus,

$$\int_c^d g(y)dy = \int_a^b h(x)dx.$$

Définition 1.1. Par définition, le nombre réel

$$\int_c^d g(y)dy = \int_a^b h(x)dx.$$

est appelé l'**intégrale double** de la fonction f sur le **rectangle fermé** $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ et est noté $I_{\mathcal{D}}(f)$.
Par convention, on écrira

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{D}}(f) &= \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \\ &= \int_a^b h(x)dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \\ &= \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy. \end{aligned}$$

Cas particulier : Soient $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, on a

$$\int_a^b \int_c^d g(x)h(y)dydx = \Big(\int_a^b g(x)dx\Big)\Big(\int_c^d h(y)dy\Big)$$

Exemple 1.1. Soit $\mathcal{D} = [0,2] \times [0,1]$. Calculons $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x^3 + 3x^2y + y^3)dxdy$. on a

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathcal{D}} (x^3 + 3x^2y + y^3)dxdy &= \int_0^2 dx \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3)dy \\ &= \int_0^2 (x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4})dx = [\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{4}]_{x=0}^2 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 1.2. Soit $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,\pi/2]$. Calculons $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{x\sin y}{1+x^2}dxdy$. on a

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathcal{D}} \frac{x\sin y}{1+x^2}dxdy &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \int_0^{\pi/2} \sin y dy \\ & [\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_{x=0}^1[-\cos y]_{y=0}^{\pi/2} = \ln 2/2. \end{aligned}$$

Exemple 1.3. Soit $\mathcal{D} = [0, \pi] \times [0, 1]$. Calculons $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x\sin(xy)dxdy$. on a

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}} x\sin(xy)dxdy &= \int_0^{\pi} dx \int_0^1 x\sin(xy)dy\\ &= \int_0^{\pi}(1-\cos x)dx = [x - \sin x]_{x=0}^{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Exemple 1.4. Soit $\mathcal{D} = [0, 1] \times [1, 2]$. Calculons $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$. on a

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}} \frac{y}{x^2+y^2}dxdy &= \int_1^2 dy \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx = \int_1^2 \arctan\left(\frac{1}{y}\right)dy\\ &= \int_1^2 [y\arctan\left(\frac{1}{y}\right)]_{y=1}^2 + \int_1^2 \frac{y}{x^2+y^2}dy\\ &= 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \pi/4 + [\frac{1}{2}\ln(1+y^2)]_{y=1}^2\\ &= 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \pi/4 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right).\end{aligned}$$

2 Formule de Fubini sur un domaine simple

Théorème 2.1. — *Soit $\mathcal{D}$ le domaine $\mathcal{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b; \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\Big\}$ oú $a < b$ et ϕ_1 etϕ_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $\phi_1 < \phi_2$ sur $]a, b[$. Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles, on définit*

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

— *Soit $\mathcal{D}$ le domaine $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leqslant y \leqslant d; \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ oú $c < d$ et ψ_1 etψ_2 sont deux fonctions continues sur $[c, d]$ telles que $\psi_1 < \psi_2$ sur $]c, d[$. Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles, on définit*

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\Big)dy.$$

Remarque. lorsqu'un domaine peut être décrit des deux façons précédentes, les deux intégrales sont égales.

Exemple 2.1. Calculons l'intégrale double $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} x\cos(x+y)dxdy$, $\mathcal{R}$ région triangulaire de sommets $(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)$.
On intègre par tranche. On peut le faire de deux façons

$$\int\int_{\mathcal{R}} x\cos(x+y)dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_0^x x\cos(x+y)dy\Big)dx$$

ou

$$\int\int_{\mathcal{R}} x\cos(x+y)dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_y^\pi x\cos(x+y)dx\Big)dy$$

Si on prend la première expression on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \Big(\int_0^x x\cos(x+y)dy\Big)dx &= \int_0^\pi [x\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\pi}dx \\
&= \int_0^\pi (x\sin(2x) - x\sin(x))dx \\
&= [x\cos(2x)/2]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(2x)/2dx - [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)dx \\
&= \frac{-\pi}{2} + 0 - \pi + 0 \\
&= -\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Avec la deuxième cela donne

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \Big(\int_y^\pi x\cos(x+y)dx\Big)dy &= \int_0^\pi \Big([x\sin(x+y)]_{x=y}^{x=\pi} - \int_0^\pi \sin(x+y)dx\Big)dy \\
&= \int_0^\pi (\pi\sin(\pi+y) - y\sin(2y))dy - \int_0^\pi [-x\cos(x+y)]_y^\pi dy \\
&= [-\pi\cos(\pi+y)]_0^\pi + [y\cos(2y)/2]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(2y)/2dy \\
&- \int_0^\pi [\cos(2y) - \cos(\pi+y)]dy \\
&- 2\pi + \pi/2 + 0 + 0 + 0 \\
&= -3\pi/2
\end{aligned}$$

Exemple 2.2. Calculons l'intégrale double $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} (x+2y)dxdy$, $\mathcal{R}$ région triangulaire de sommets $(1,0),(0,1),(0,-1)$.
Les droites (AB) et (AC) ont pour équations respectives

$$y = 1-x \text{ et } y = -1+x.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de $x-1$ à $1-x$. Donc

$$I_y(x) = \int_{x-1}^{1-x} (x+2y)dy = [xy+y^2]_{y=x-1}^{y=1-x} = x(1-x)+(x-1)^2-(x(x-1)+(x-1)^2) = 2x(1-x).$$

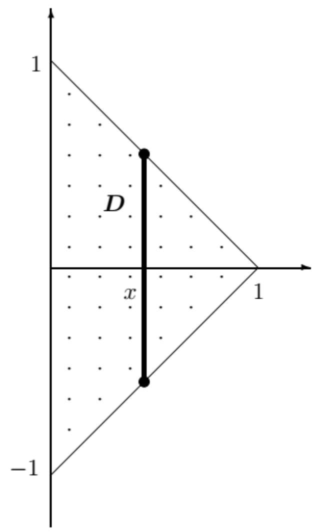


FIGURE 2.1 – Le domaine de l'intégration

On a alors

$$I = \int_0^1 I_y(x)dx = \int_0^1 0(2x - 2x^2)dx = [x^2 - \frac{2x^3}{3}]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exemple 2.3. Calculons l'intégrale double $\int\int_{\mathcal{D}}(x^2y)dxdy$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points du plan limité par les courbes d'équations

$$y = \frac{1}{x} \text{ et } y = -4x + 5.$$

Cherchons les points d'intersection des deux courbes. On doit avoir $\frac{1}{x}$ ce qui équivaut à $4x^2 - 5x + 1 = 0$,
et a pour solutions 1 et 1/4. Lorsque x est fixé entre ces deux valeurs, on intègre en y

$$\begin{aligned} I_y(x) &= \int_{1/x}^{-4x+5} x^2ydy = [\frac{1}{2}x^2y^2]_{1/x}^{-4x+5} \\ &= \frac{1}{2}[x^2(-4x+5)^2 - 1] \\ &= \frac{1}{2}(16x^4 - 40x^3 + 25x^2 - 1). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/4}^1 I_y(x)dx = \int_{1/4}^1 \frac{1}{2}(16x^4 - 40x^3 + 25x^2 - 1)dx \\ &= 1/2[16/5x^5 - 10x^4 + 25/3x^3 - x]_{1/4}^1 = \frac{441}{1280} \end{aligned}$$

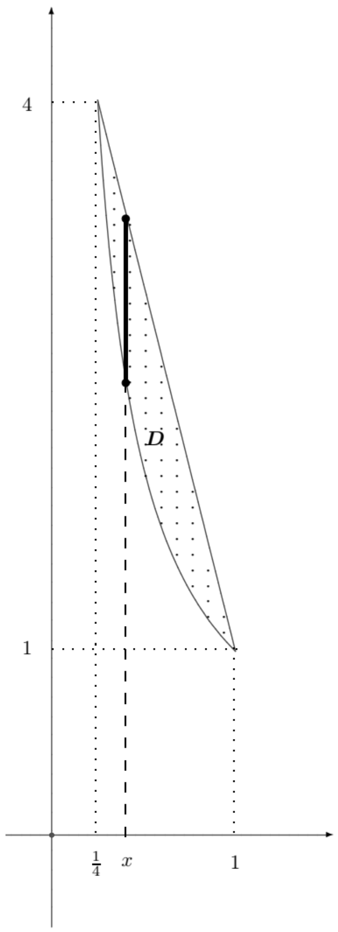


FIGURE 2.2 – Le domaine de l'intégration

Exemple 2.4. Calculons $I = \int\int_{\mathcal{D}} x \cos y dx dy$, où $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant \sin y, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\right\}$.

Lorsque y est compris entre 0 et $\pi/2$, le nombre x varie de 0 à $\sin y$. Donc

$$I_x(y) = \int_0^{\sin y} x \cos y dx = [\frac{x^2}{2} \cos y]_{x=0}^{x=\sin y} = \frac{1}{2} \cos y \sin^2 y.$$

On a alors

$$I = \int_0^{\pi/2} I_x(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos y \sin^2 y dy = \frac{1}{6} [\sin^3 y]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}$$

Propriétés 2.1. Soient $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ et $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors,

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int\int_{\mathcal{D}} (\alpha f + \beta g)(x, y) dx dy = \alpha \int\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy + \beta \int\int_{\mathcal{D}} g(x, y) dx dy.$$

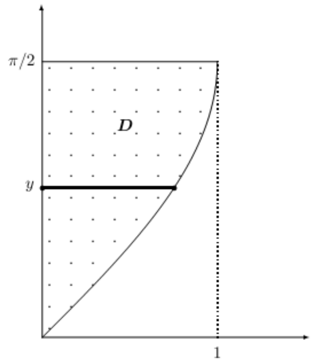


FIGURE 2.3 – Le domaine de l'intégration

2. Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ tel que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$, alors

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{\mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy.$$

3.
$$\left|\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy\right| \leqslant \int\int_{\mathcal{D}} |f(x,y)|\, dxdy.$$

4. Si $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ sont deux domaines non vides. Alors,

$$\int\int_{\mathcal{D}_1} |f(x,y)|\, dxdy \leqslant \int\int_{\mathcal{D}_2} |f(x,y)|\, dxdy.$$

5. Si $f \geqslant 0$:
   - $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \geqslant 0$
   - $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$

   Si $f \geqslant g$:
   - $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \geqslant \int\int_{\mathcal{D}} g(x,y)dxdy.$
   - $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}} g(x,y)dxdy \Longleftrightarrow f = g.$

Aire

Corollaire. *Si $\mathcal{D}$ est une région bornée du plan, bordée par une courbe* *fermée continue, alors on a*

$$Aire(\mathcal{D}) = \int\int_{\mathcal{D}} 1 dx dy.$$

Exemple 2.5. 1. Calculons l'aire du domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

D'abord on dessine le domaine $\mathcal{D}$: la courbe $y = x^3 + 1$ n'est rien d'autre que $y = x^3$ translaté vers le haut de 1, et la courbe $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ est une parabole orientée vers le haut et centrée au point $x + 1 = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire au point $(-1, 0)$. Les deux courbes se rencontrent aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$. On a donc

$$\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1\Big\}.$$

Donc

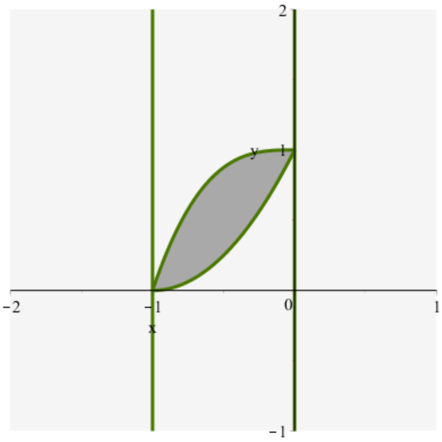


FIGURE 2.4 – Le domaine de l'intégration

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} dx\ dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy = \int_{-1}^{0} [\ y\ ]_{x^2+2x+1}^{x^3+1}\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1\right)\ dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

2. Calculons l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - 2y)\ dx\ dy$, où $\mathcal{D}$ est le domaine précédent.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - 2y)\ dx\ dy &= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y)\ dy = \int_{-1}^{0} \left[\ x^2y - y^2\ \right]_{x^2+2x+1}^{x^3+1}\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(x^2(x^3+1) - (x^3+1)^2 - x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)^2\Big)\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} \big(- x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x\big)\ dx = \Big[- \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2\ \Big]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - 2 + 2 = \frac{13}{42}
\end{aligned}$$

Volume

Corollaire. *Si $f, g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $f < g$, le volume V de*

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathcal{D} | f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\Big\}$$

est donné par

$$V = \int\int_{\mathcal{D}} \Big(g(x, y) - f(x, y)\Big) dxdy.$$

3 Changement de variables

Soit f (x ,y) une fonction continue sur le domaine $\mathcal{D}$ fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $x = \phi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$; alors :

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int\int_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| dudv.$$

Le déterminant $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\phi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) \end{vmatrix}$ est appelé **jacobien**.

Cas des coordonnées polaires : Soit $\Psi : (\theta, r) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on obtient la formule

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Exemple 3.1. Volume de la boule en coordonnées polaires. Pour $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$, calculons

$$\mathrm{Vol}(B) = 2\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\ dy, \qquad \text{où} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$$

avec le changement de variables en coordonnées polaires, $(x,y) = h(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Puisque $x^2+y^2 = r^2$, on a :

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}$$
$$\mathcal{D} = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta), (r,\theta) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[\ \Big|\ r \leqslant 1\right\} = [0,1]\times[0,2\pi[.$$

et donc, en sachant que $dx\ dy = r\,dr\ d\theta$ et en utilisant Fubini pour separer les variables, on a

$$\mathrm{Vol}(B) = 2\iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1-r^2}\ r\,dr\ d\theta = 2\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\ r\,dr\ \int_0^{2\pi} d\theta.$$

L'intégrale en θ est simple : $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = \left[\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi$. Pour l'autre, si on pose $t = 1-r^2$ on a

$$r = 0 \implies t = 1 \quad \text{et} \quad r = 1 \implies t = 0,$$
$$\sqrt{1-r^2} = \sqrt{t} = t^{1/2},$$
$$dt = -2r\,dr \implies r\,dr = -\frac{1}{2}\,dt,$$

et on obtient enfin

$$\mathrm{Vol}(B) = -\frac{2}{2}\,2\pi\int_1^0 t^{1/2}\ dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\ dt = 2\pi\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\ t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2\pi\,\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Exemple 3.2. Calculons $I = \int\int_{\mathcal{D}} \cos(x^2+y^2-4x+4)dxdy$, où $\mathcal{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < (x-2)^2+y^2 < 4, y > 0\Big\}$.

Puisque $x^2+y^2-4x+4 = (x-2)^2+y^2 = 4$, donc
$\mathcal{D} = \Big\{(2+r\cos\theta, r\sin\theta), 0 < r < 2, 0 < \theta < \pi\Big\}$, on a

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}} \cos(x^2+y^2-4x+4)dxdy &= \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 r\cos r^2 dr \\ &= \frac{\pi}{2}[\sin r^2]_1^2 = \frac{\pi}{2}(\sin 4 - \sin 1).\end{aligned}$$

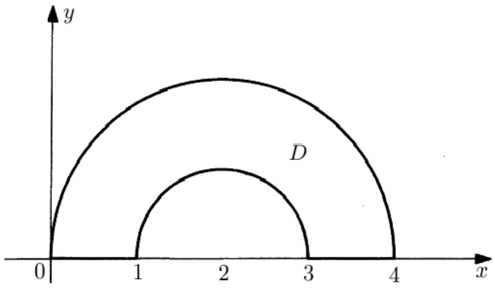


FIGURE 2.5 – Le domaine de l'intégration

Exemple 3.3. Calculons $I = \int\int_{\mathcal{D}} \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy$, où $\mathcal{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < 4, y > 1\Big\}$.
Puisque $\mathcal{D} = \Big\{(r\cos\theta, r\sin\theta), \frac{1}{\sin\theta} < r < 2, \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}\Big\}$, on a

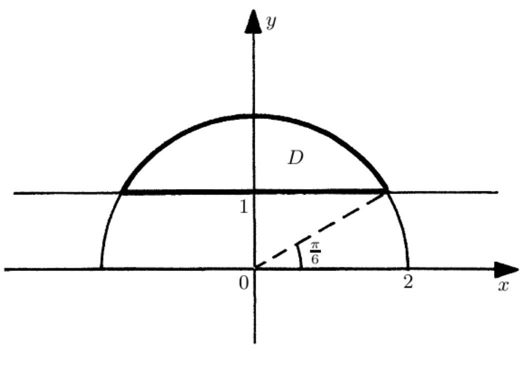


FIGURE 2.6 – Le domaine de l'intégration

$$\int\int_{\mathcal{D}}\frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2}r\sin^2\theta dr=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\Big(2\sin^2\theta-\frac{1}{2}\Big)d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\Big(\frac{1}{2}-\cos 2\theta-\Big)d\theta=\frac{1}{2}[\theta-\sin 2\theta]_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 3.4. Calculons $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\frac{x}{(x^2+y^2)^2}dxdy$, où $\mathcal{D}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<36, x>3\Big\}$.

Puisque $\mathcal{D}=\Big\{(r\cos\theta, r\sin\theta), \frac{3}{\cos\theta}<r<6, \frac{-\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}\Big\}$, on a

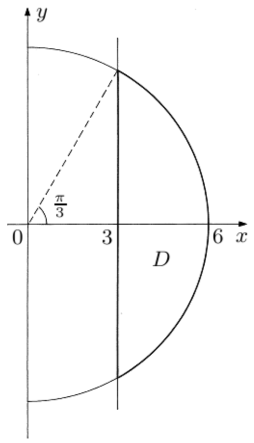


FIGURE 2.7 – Le domaine de l'intégration

$$\int\int_{\mathcal{D}}\frac{x}{(x^2+y^2)^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{3}{\cos\theta}}^{6}\frac{\cos\theta}{r^2}dr$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(-\frac{\cos\theta}{6}+\frac{\cos^2\theta}{3}\Big)d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\cos\theta+1+\cos 2\theta)$$
$$=\frac{1}{3}[-\sin\theta+\theta+\frac{\sin\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi}{9}.$$

Exemple 3.5. Calculons $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, où $\mathcal{D}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1, x+y>1\Big\}$.

$$\int\int_{\mathcal{D}}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}\frac{dr}{r^3}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=-\frac{1}{4}[\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{1}{2}.$$

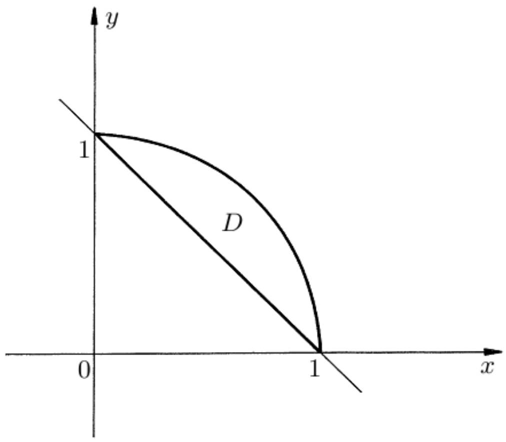


FIGURE 2.8 – Le domaine de l'intégration

4 Exercices corrigés

Exercice 4.1. *Calculer l'intégrale double suivante* $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$, *avec*

1. $f(x,y) = x$ *et* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geqslant 0,\ x - y + 1 \geqslant 0,\ x + 2y - 4 \leqslant 0\}$.
2. $f(x,y) = x + y$ *et* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1;\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.
3. $f(x,y) = \cos(xy)$ *et* $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant xy \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.
4. $f(x,y) = xy$ *et* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy + x + y \leqslant 1.\}$
5. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$ *et* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x < 3,\ y > 2, x + y < 5\}$.

Solution 4.1. 1. *si* $(x,y) \in \mathcal{D}$ *on a* $y \geqslant 0$ *et* $y - 1 \leqslant x \leqslant 4 - 2y$ *D'autre part, pour que cette inégalité ait un sens, on doit avoir* $y - 1 \leqslant 4 - 2y \implies y \leqslant 5/3$, *et donc on a l'inégalité* $0 \leqslant y \leqslant 5/3$ *On obtient donc :*

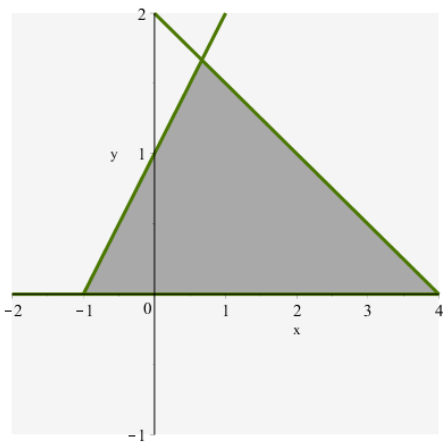


FIGURE 2.9 – Le domaine de l'intégration

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_0^{5/3}\int_{y-1}^{4-2y} xdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{5/3}\left((4-2y)^2-(y-1)^2\right)dy \\ &= \frac{275}{54}.\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_0^{1}\int_{x^2}^{x}(x+y)dydx \\ &= \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x}dx \\ &= \int_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx \\ &= \frac{3}{20}.\end{aligned}$$

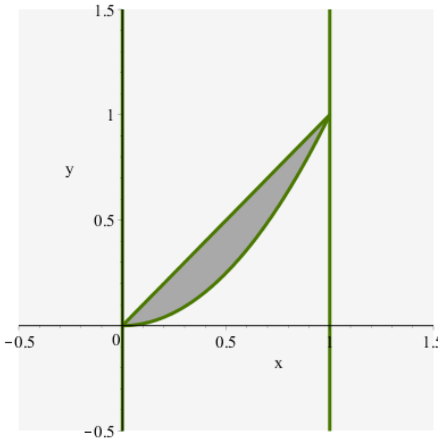


FIGURE 2.10 – Le domaine de l'intégration

3. On déduit de la définition de $\mathcal{D}$ l'inégalité $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2x}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_1^{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2x}}\cos(xy)dydx \\ &= \int_1^2\left[\frac{1}{x}\sin(xy)\right]_0^{\frac{\pi}{2x}}dx \\ &= \int_1^2\frac{1}{x}dx \\ &= \ln(2).\end{aligned}$$

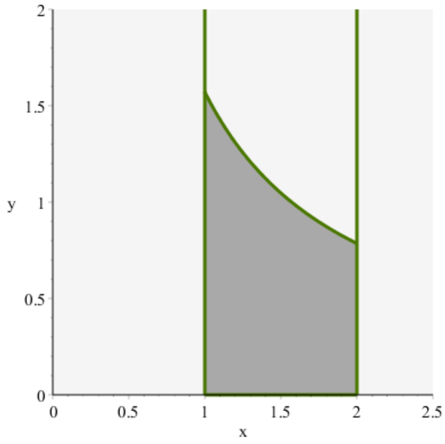


FIGURE 2.11 – Le domaine de l'intégration

4. Le domaine s'écrit $x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ y(1+x) \leqslant 1-x \implies y \leqslant \frac{1-x}{1+x}$*. Puisqu'il est nécessaire que* $1-x \geqslant 0$ *on a forcément* $x \leqslant 1$ *On en déduit :*

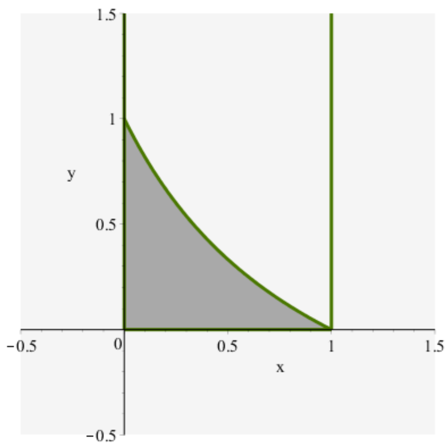


FIGURE 2.12 – Le domaine de l'intégration

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xydydx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx \end{aligned}$$

On décompose la fraction en éléments simples :$\frac{x(1-x)^2}{(1+x)^2} = x - 4 + \frac{8}{1+x} - \frac{4}{(1+x)^2}$.

On trouve :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 4x + 8\ln(1+x) + \frac{4}{1+x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 4 + 8\ln(2) + 2 - 4\right) \\ &= 4\ln(2) - \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

5. *on a*

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_1^3 \int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3} \\ &= \int_1^3 -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{(x+2)^2}\right) \\ &= \frac{2}{75}.\end{aligned}$$

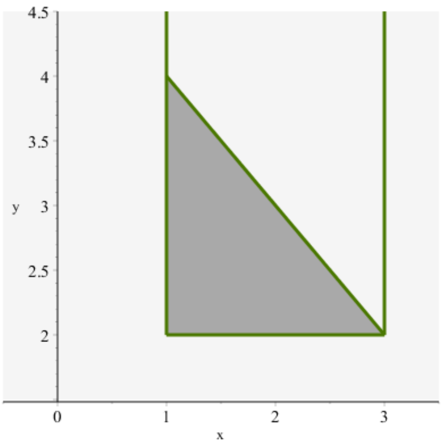


FIGURE 2.13 – Le domaine de l'intégration

Exercice 4.2. *Intégrations successives*
Soit $\mathcal{D}$ *le domaine* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$. *Calculer* $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$ *dans les cas*

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = xy(x+y)$.

Solution 4.2. *On commence par écrire le domaine d'une meilleure façon. On a en effet :*

$$(x,y) \in \mathcal{D} \iff x \in [0,1] \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1-x.$$

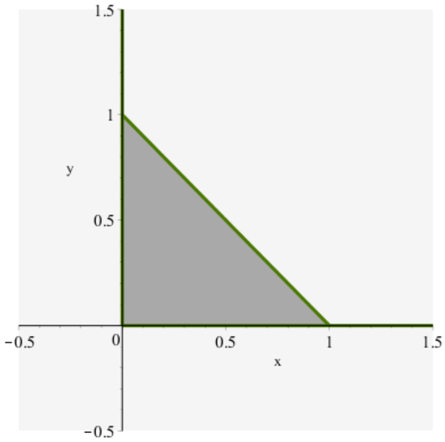


FIGURE 2.14 – Le domaine de l'intégration

1. *Dans ce cas :*

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)dydx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{4x^3}{3} + 2x^2 - x + \frac{1}{3}\right) dx \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2. *On a alors :*

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 y + xy^2)dydx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{x(1-x)^3}{3}\right) dx \\
&= \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.3. *Soit D le domaine :*$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant 4 - x^3\right\}$. *Calculer l'aire de D. si* $-1 \leqslant x \leqslant 1$*, on a* $x^2 \leqslant 4 - x^3$

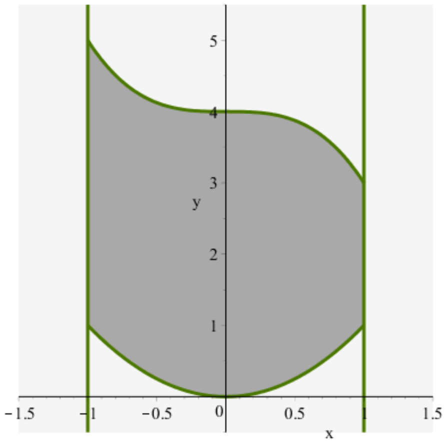


FIGURE 2.15 – Le domaine de l'intégration

Solution 4.3.

$$\begin{aligned}
\textit{aire}\ (\mathcal{D}) &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{4-x^3} dydx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(4-x^3-x^2\right)dx \\
&= \left[4x-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.4. *On pose :* $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ x^2+y^2\geqslant 1\}$. *calculer* $\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

Solution 4.4.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\frac{xy}{(1+x^2)+y^2}dydx \\
&= \int_0^1\left[\frac{x}{2}\ln\left(1+x^2+y^2\right)\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{1}dx \\
&= \int_0^1\frac{x}{2}\ln(2+x^2)dx-\int_0^1\frac{x}{2}\ln(2)dx \\
&= \frac{1}{4}\left[(2+x^2)\ln(2+x^2)-(2+x^2)\right]_0^1-\frac{1}{4}\ln 2 \\
&= \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

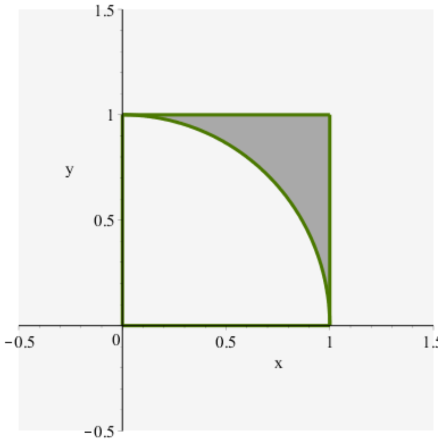


FIGURE 2.16 – Le domaine de l'intégration

Exercice 4.5. *Calculer* $I = \iint_{\mathcal{D}} xy\,dxdy.$
où $\mathcal{D}$ *est l'intersection des disques de centre* $(0,1)$ *et* $(1,0)$ *et de rayon* 1.

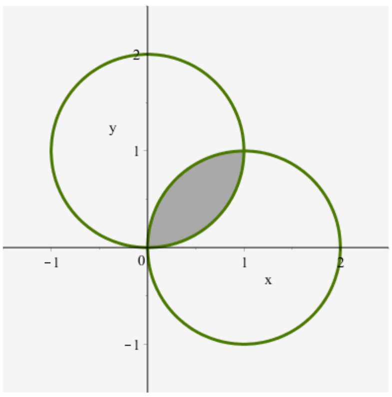


FIGURE 2.17 – Le domaine de l'intégration

Solution 4.5. *Le domaine* $\mathcal{D}$ *est symétrique par rapport à la première bissectrice.*
Sur $\mathcal{D}$*, on a* $f(y,x) = f(x,y)$*. On a donc*

$$I = \iint_{\mathcal{D}} xy\,dxdy = I = \iint_{\mathcal{D}_\infty} xy\,dxdy$$

où $\mathcal{D}_\infty$ *est la partie du domaine* $\mathcal{D}$ *située sous la première bissectrice.*
L'équation du cercle de centre (0,1) est $x^2 + (y?1)^2 = 1$ *ou encore* $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
La partie inférieure du cercle a donc pour équation $x = \sqrt{2y - y^2}$.
Lorsque y *est fixé entre* 0 *et* 1*, le nombre* x *varie de* y *à* $\sqrt{2y - y^2}$ *et donc*

$$(I_x)_1(y) = \int_y^{\sqrt{2y-y^2} xy\,dx} = \left[y\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=\sqrt{2y-y^2}} = y^2 - y^3.$$

Puis

$$I = 2\int_0^1 (I_x)1(y)dy = 2\int_0^1 (y^2 - y^3)dy = 2\Big[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\Big]_0^1 = 2\Big[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big] = \frac{1}{16}.$$

Exercice 4.6. *Coordonnées polaires : Calculer l'intégrale double* $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ *où* $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Solution 4.6. *On passe en coordonnées polaires en posant* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$ *Remarquons que :* $(x,y) \in \Delta \iff 0 \leqslant r \leqslant 1$ *et* $\theta \in [0, \pi/2]$. *D'autre*

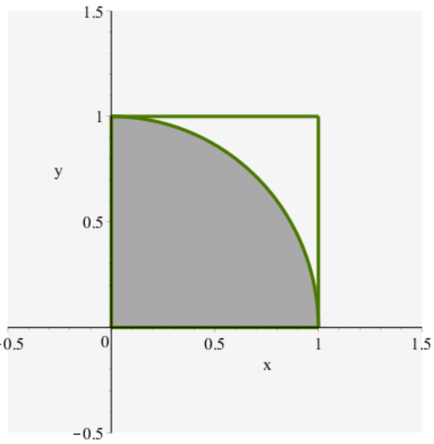


FIGURE 2.18 – Le domaine de l'intégration

part, $1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2$ *La formule de changement de variables en coordonnées polaires donne*

$$I = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{r}{1+r^2} d\theta dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2r}{1+r^2}dr = \frac{\pi}{4}\left[\ln\left(1+r^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi\ln 2}{4}.$$

Exercice 4.7. *soit* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$

1. *Montrer que* $\mathcal{D}$ *est un disque.*
2. *Calculer* $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Solution 4.7.

1. *on a* $x^2+y^2-2x = (x-1)^2+y^2-1$ *et donc* $x^2+y^2-2x \leqslant 0 \iff (x-1)^2+y^2 \leqslant 1$. $\mathcal{D}$ *est le disque de centre* $(1,0)$ *et de rayon 1.*
2. *On passe en coordonnées polaires, avec* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$ *L'équation du disque donne :* $r^2 - 2r\cos\theta \leqslant 0 \implies 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta$, *tandis que* θ *varie dans* $[-\pi/2, \pi/2]$ *(impératif pour que* $\cos\theta$ *soit positif). La formule de changement*

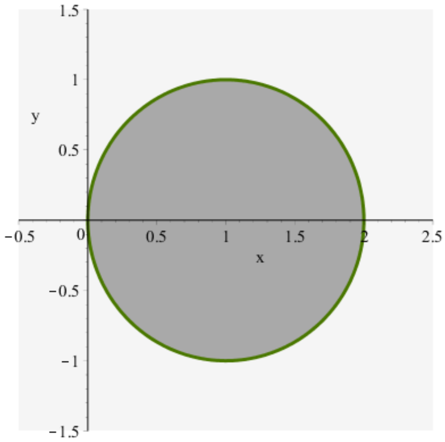


FIGURE 2.19 – Le domaine de l'intégration

de variables donne donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\int_{r=0}^{r=2\cos\theta} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta. \end{aligned}$$

Il reste à linéariser $\cos 3\theta$*, ce que l'on fait en utilisant les nombres complexes :*$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$*. On achève le calcul sans difficultés pour trouver :*$I = \frac{32}{9}$.

Exercice 4.8. *Calculer* $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$

1. $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ *et* $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

2. $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2y\}$ *et* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solution 4.8. *1. Avec un domaine de cette forme, il n'y a pas d'hésitations à avoir, il faut passer en coordonnées polaires. On pose* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$ *On a donc* $1\leqslant r\leqslant 2$ *et* $\theta\in[0,\pi/2]$*. La formule de*

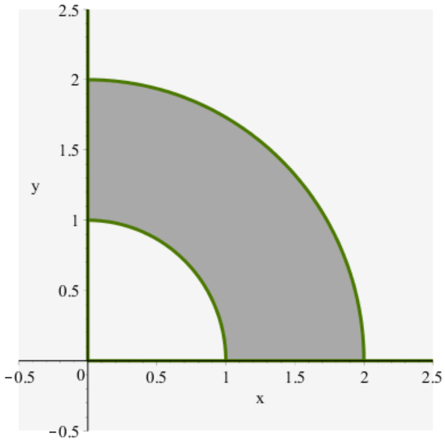


FIGURE 2.20 – Le domaine de l'intégration

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_1^2\int_0^{\pi/2}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\times rd\theta dr\\
&= \int_1^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r\sin(2\theta)d\theta dr\\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 r\left[-\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2}dr\\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 2rdr\\
&= \frac{1}{4}\left[r^2\right]_1^2\\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

2. *On passe en coordonnées polaires. Posant* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$*, les conditions sur* $\mathcal{D}$ *donnent respectivement :*

   $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ *et* $1 \leqslant r^2 \leqslant 2r\sin\theta$*. La condition* $r^2 \geqslant 1$ *est équivalente à* $r \geqslant 1$*. et on peut donc réécrire la condition précédente en :*
   $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ *et* $1 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta$*. Mais ceci entraîne nécessairement, pour que cela ait un sens, que* $\sin\theta \geqslant 1/2 \implies \theta \geqslant \frac{\pi}{6}$*. On a finalement :*

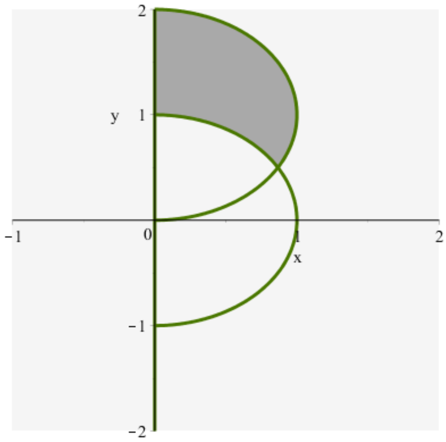


FIGURE 2.21 – Le domaine de l'intégration

$$
\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy &= \int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{1}^{2\sin\theta} r^2 dr d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{3}(8\sin^3\theta - 1)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 6\sin\theta - 2\sin(3\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\left[-6\cos\theta + \frac{2}{3}\cos(3\theta)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= -\frac{\pi}{9} + \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Exercice 4.9. *Soit $\mathcal{D}$ le domaine définie pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :*

$$
\begin{cases}
x^2 - x + y^2 \leqslant 0, \\
x^2 + y^2 - y \geqslant 0, \\
y \geqslant 0
\end{cases}
$$

— *Tracer le domaine $\mathcal{D}$.*
— *Calculer l'intégrale :*

$$\int\int_{\mathcal{D}} (x+y)^2 dxdy.$$

Solution 4.9. — *On trace le domaine $\mathcal{D}$: On a $x^2 - x + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, est une équation du Cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et rayon $\frac{1}{2}$.*
et $x^2 - y + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, est une équation du Cercle de centre $(0, \frac{1}{2})$ et rayon $\frac{1}{2}$.

On a :

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ ou \\ x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les points d'intersection des deux cercles sont $(0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

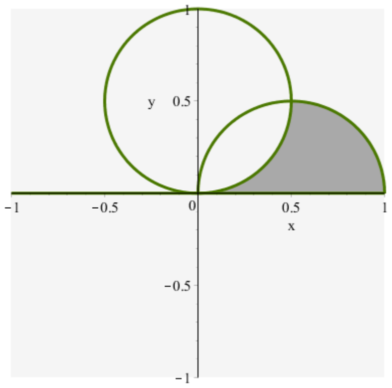


FIGURE 2.22 – Le domaine de l'intégration

— *On calcule l'intégrale : En utilisant les coordonnées polaires : on pose* $x = \theta r\cos\theta, y = r\sin\theta$, *Tels que* $r > 0, \theta \in [0, 2\pi[$.
Comme les points d'intersection appartiens à la droite $y = x$, *alors* $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$.
Et comme $y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x$, *donc* $\sin\theta \leqslant r \leqslant \cos\theta$. *Par suite*

$$\int\int_{\mathcal{D}} (x+y)^2 dxdy = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} (r\cos\theta + r\sin\theta)^2 r dr d\theta.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} (r\cos\theta + r\sin\theta)^2 r dr &= \int_0^{\pi/4} \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} (2r^3 \sin\theta\cos\theta + r^3) dr \\ &= (2\sin\theta\cos\theta + 1) \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\sin\theta}^{\cos\theta} = \frac{1}{4}(\sin 2\theta + 1)\left(\cos^4\theta - \sin^4\theta\right) \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2\theta + 1)\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2\theta)\cos 2\theta. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int\int_{\mathcal{D}} (x+y)^2 dxdy = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4}(\cos 2\theta + \sin 2\theta \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(\sin 2\theta)^2 + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{16}.$$

Exercice 4.10. *1. Dessiner le domaine défini par ;*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leqslant x, x + y \geqslant 2, x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

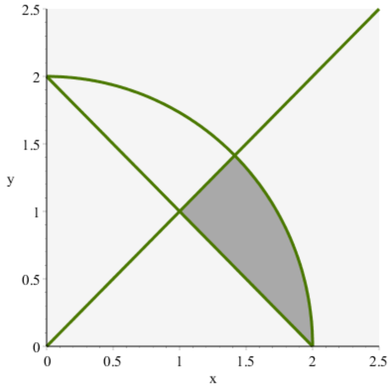


FIGURE 2.23 – Le domaine de l'intégration

2. *Calculer l'intégrale :*

$$J = \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Solution 4.10. *En utilisant les coordonnées polaires : on pose* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, *Tels que* $r > 0, \theta \in [0, 2\pi[$.
On a :

$$\begin{cases} y \leqslant x, \\ x+y \geqslant 2, \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \frac{2}{\sin\theta+\cos\theta} \leqslant r \leqslant 2. \end{cases}$$

Donc $\mathcal{D}$ *se transforme en* $\Delta = \{(r,\theta) \in]0,\infty[\times[0,2\pi[| 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\ \frac{2}{\sin\theta+\cos\theta} \leqslant r \leqslant 2\}$.
On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^{2} \frac{dr}{r^3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\frac{-1}{2r^2}]^2_{r=\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}(1+2\sin\theta\cos\theta))d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{4}[-\frac{1}{2}\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 4.11. 1. *Dessiner le domaine défini par ;*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2 \leqslant y \leqslant x, 1 \leqslant (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}.$$

2. *Calculer l'intégrale :*

$$J = \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(x-2)^2+(y-2)^2}.$$

Solution 4.11. *On pose* $t = x-2,\ s = y-2$, *le domaine* Ω *s'écrit sous la forme*

$$\Omega = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant s \leqslant t, 1 \leqslant t^2+s^2 \leqslant 4\}.$$

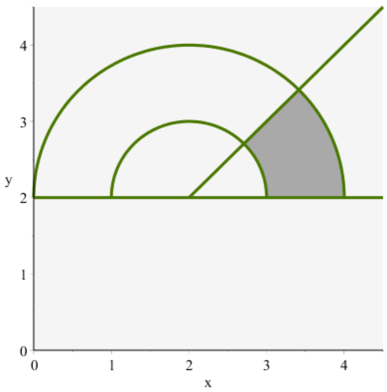


FIGURE 2.24 – Le domaine de l'intégration

avec le changement de variables en coordonnées polaires, $(t,s)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$. *Puisque* $t^2+s^2=r^2$ *et* $0\leqslant s\leqslant t \Leftrightarrow 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, *le domaine se transforme comme suit*

$$\Delta=\{(r,\theta)\in]]0,\infty[\times[0,2\pi[|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}, 1\leqslant r\leqslant 2\}=[1,2]\times[0,\frac{\pi}{4}].$$

On a

$$J=\iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{4}]}\frac{rdrd\theta}{r^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\frac{1}{r}dr=\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

Exercice 4.12. *Soit l'intégrale* $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

1. *Montrer que pour tout réel* x *de l'intervalle* $]-1,+\infty[$, *on a :* $\ln(1+x)=\displaystyle\int_0^1\frac{xdy}{1+xy}$.
2. *En déduire que* $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$ *où* $\mathcal{D}$ *est le pavé* $[0,1]^2$.
3. *En intervertissant les rôles de* x *et* y, *montrer que* $2I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\frac{(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$. *En déduire que* $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

Solution 4.12.
1. *La première partie est un simple calcul d'intégrale de la forme u'(y)/u(y). Pour la seconde, on a* $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^1\frac{x}{1+xy}dy\right)dx$, *ce qui donne le résultat.*
2. $\mathcal{D}$ *est invariant par symétrie par rapport à la première bissectrice. Par conséquent, pour toute fonction continue sur D, on a :* $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}f(x,y)dxdy=\int\int_{\mathcal{D}}f(y,x)dxdy$.

Il en résulte que $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}dxdy$. *On a donc, en sommant les deux expressions donnant* I :

$$\begin{aligned} 2I &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2}\right)\frac{1}{1+xy}dxdy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy. \end{aligned}$$

3. *Il suffit maintenant de calculer cette dernière intégrale double. Or, on a :*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} &= \left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\right)\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right) \\ &= \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1 \times [\arctan y]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8}\ln(2). \end{aligned}$$

Le même résultat est valide pour la partie en y (par symétrie), et on a bien $I = \frac{\pi}{8}\ln(2)$

Exercice 4.13. *On se propose dans cet exercice de calculer* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$

1. *Justifier la convergence de cette intégrale. 2)Soit* $a > 0$. *On note* K_a *le carré de centre O de côté 2a et* C_a *le disque de centre O et de rayon a. On définit une fonction f sur* $\mathbb{R}^2$*par* $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

2. *Justifier que* $\displaystyle\int_{C_a} f(x,y)dxdy \leqslant \int_{K_a} f(x,y)dxdy \leqslant \int_{C_{a\sqrt{2}}} f(x,y)dxdy$.
   En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\int_{C_a} f(x,y)dxdy$.
   4) Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Solution 4.13. 1. *Puisque* $e^{-t^2} = o(1/t^2)$ *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$. *et puisque la fonction* $t \mapsto e^{-t^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *est bien convergente.*

2. *Puisqu'on a les inclusions* $C_a \subset K_a \subset C_{a\sqrt{2}}$ *et que la fonction f est positive, il est clair que :*

$$\int_{C_a} f(x,y)dxd \leqslant \int_{K_a} f(x,y)dxdy \leqslant \int_{C_{a\sqrt{2}}} f(x,y)dxdy.$$

3. Le passage en coordonnées polaires donne

$$\int_{C_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi(1-e^{-a^2}).$$

4. or, $\displaystyle\int_{K_a} f(x,y)dxdy = \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2.$

On en déduit que $\pi(1-e^{-a^2}) \leqslant \left(\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \leqslant \pi(1-e^{-2a^2}).$

Il suffit de faire tendre a vers $+\infty$ pour prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$

5 Exercices proposés

Exercice 5.1. *Calculer les intégrales suivantes.*

1. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} e^{-x-y}dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 4.\}$
2. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \cos(x+y)dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.\}$
3. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} xe^{-x}dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}.\}$
4. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x\sin(y)dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant x.\}$
5. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x^2ydxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1.\}$
6. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x+y)^3}$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ x+y \leqslant 3.\}$
7. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \ln(1+x^2+y)dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y \leqslant 1.\}$

Exercice 5.2. *Pour chacune des intégrales suivantes, représenter graphiquement le domaine d'intégration puis calculer l'intégrale en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires.*

1. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x^2+2xy+3)dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqslant 1.\}$
2. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqslant 1.\}$
3. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x^2-y^2)dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant 0, y \leqslant 0 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant 1.\}$
4. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x^3y+y^3)dxdy$, *oú* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant -y, y \leqslant 0 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant 4.\}$

5. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}(x^2+y^2)dxdy$, *oú* $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2-2y\leqslant 0.\}$
6. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}(x^2+y^2)dxdy$, *oú* $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2-x<0,\ x^2+y^2-y>0.\}$

Exercice 5.3. *Calculer* $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}(x^3y+y^3)dxdy$, *oú* $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.\}$

Exercice 5.4. *Calculer* $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}(x+y)^2e^{x^2-y^2}dxdy$, *oú* $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1.\}$
(Indication : utiliser le changement de variables $u=x+yetv=xy$*).*

Exercice 5.5. *Calculer* $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}x^2y^2(1-x^3y-y^3)^{\frac{1}{3}}dxdy$, *oú* $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^3y+y^3\leqslant 1.\}$
(Indication : utiliser le changement de variables $X=x^{\frac{1}{3}}$ *et* $Y=y^{\frac{1}{3}}$ *, puis un passage en coordonnées polaires).*

Exercice 5.6. *Calculer* $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\sqrt{xy}dxdy$, *oú* $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x^2+y^2)^2\leqslant xy.\}$

Exercice 5.7. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\Big)dx$ *et* $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\Big)dy$
Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 5.8. *Soit* $\mathcal{D}=[0,1]^2$*. Calculer* $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$.

Exercice 5.9. *Montrer l'existence de* $I=\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}$
— *Montrer que* $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}\frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dxdy$ *oú* $\mathcal{D}=[0,\frac{\pi}{2}]^2$.
— *En déduire la valeur de* I.

Exercice 5.10. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{A}}(x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$, *oú* $\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x,y\geqslant 0,\ x+y\geqslant 1.\}$
2. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{B}}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$, *oú* $\mathcal{B}=\{(x,y)\in[0,1]^2,\ x^2+y^2\geqslant 1.\}$
3. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{1+y\cos x}dxdy$, *oú* $\mathcal{C}=\{(x,y)\in[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{1}{2}].\}$

Exercice 5.11. *On note* $\mathcal{D}$ *le domaine délimité par les droites* $x=0; y=x+2ety=x$.

1. *Calculer (directement)* $I=\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}}(x-y)dxdy$.

2. *Calculer* I *au moyen du changement de variable* $u = x + y$ *et* $v = x - y$.

Exercice 5.12. *Soit* $\mathcal{D}$ *le disque de centre* $(0;1)$ *et de rayon* 1 *du plan. Calculer* $I = \int\int_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dxdy$.

Exercice 5.13. *Soit* $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 - 2y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 - 1 \leqslant 1.\}$ *Calculer* $\int\int_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$.

Exercice 5.14. *Calculer à l'aide d'un changement de variables approprié :*

1. $\int\int_{\mathcal{A}} \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy$, *oú* $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0.\}$
2. $\int\int_{\mathcal{C}} \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy$, *avec* $\mathcal{C}$ *le carré de sommets* $(1;0)$, $(2;1)$, $(1;2)$ *et* $(0;1)$.

Exercice 5.15. 1. *Calculer* $I = \int\int_{0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1} \frac{dxdy}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$.

2. *Démontrer la convergence des intégrales :*

$$J = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{(2\cos 2\theta)},\ K = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{(2\cos 2\theta)},\ L = \int_{t=0}^{1} \frac{\ln t}{1 - t^2} dt.$$

3. *Démontrer que* $I = J$ *(passer en coordonnées polaires dans* I*).*
4. *Calculer* $J + K$ *et* $J - k$ *en fonction de* L.
5. *En déduire les valeurs de* K *et* L.

Bibliographie

[1] J-M. Arnaudiés, H. Fraysse , *Cours de mathématiques -2 Analyse* , BORDAS, Paris, **1988**.

[2] G. Baudrand, *Mathématiques :résumés du cours ECE* 1^{re} *et* 2^{e} *années*,Dunod, Paris, **2008**.

[3] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Bochet , *exercices d'analyse* 2^{e}, Librairie armand colin, **1982**.

[4] C. Deschamps, A. Warusfel, *Mathématiques Tout-en-un* 1^{re} *année Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, **2003**.

[5] J. Douchet , *Analyse Recueil d'exercices et aide-mémoire* , Presses polytechniques et universitaires romandes, 91944 Les Ulis Cedex A, **2008**.

[6] Y. Dodge, *Mathematiques de base pour economistes* , Springer-Verlag France, Paris, **2007**.

[7] D. Fredon M. M-Bertrand, F. Bertrand, *Mathématiques Analyse en 30 fiches*, Dunod, Paris, **2009**.

[8] C. Gautier A. Warusfel, B. Caminade, G. de Monicault, S. Nicolas, *Mathématiques tout-en-un - ECS 2e année Pépas Commercieles* , Dunod, Paris, **2008**.

[9] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Problèmes d'Analyse I*, EDP Sciences, 91944 Les Ulis Cedex A, **2008**.

[10] E. Laamari, P. Chataux, G. Egueter , *Tous les Exercices d'Analyse MP*, Dunod, Paris, **2008**.

[11] F. Liret, *Maths En Pratique* , Dunod, Paris, **2006**.

[12] H. Matzinger, *Aide-mémoire d'analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne **2000**.

[13] J-M. Monier, *Les Méthodes et Exercices DE Mathématiques PCSI-PTSI*, Dunod, Paris, **2008**.

[14] S. Rossignol, *Mathématiques en Economie-Gestion*, Dunod, Paris, **2015**.

[15] G. A. Sedogbo, *Analyse DEUG Sciences* 2^{e} *année*, Éditions Bulin , 75278 Paris Codex 06, **2000**.