

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Science et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf USTO-MB

Faculté d'Architecture et de Génie Civil

Département de Génie Civil



POLYCOPIÉ

Cours de Mécanique des Solides Déformables

DESTINÉ AUX

Étudiants master en génie civil (Géotechnique M1)

ELABORÉ PAR

BAKOURA Ahmed

Docteur Es en Génie Civil (Structures et Matériaux)

Maitre de conférence Classe B

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019/2020



OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT

Ce cours a pour objet d'initier l'étudiant aux notions théoriques et expérimentales de
mécanique des solides déformables.

CONNAISSANCES PRÉALABLES RECOMMANDÉES

Mécanique rationnelle, Thermodynamique, Mécanique des milieux continus.

PROGRAMME D'ENSEIGNEMENT

INTRODUCTION GÉNÉRALE3

Chapitre I :
MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION
ET DE RUPTURE6

Chapitre II :
CLASSIFICATION RHÉOLOGIQUE ET CARACTÉRISATION
EXPÉRIMENTALE..... 18

Chapitre III :
ELASTICITÉ ET VISCOÉLASTICITÉ34

Chapitre IV :
PLASTICITÉ ET VISCOPLASTICITÉ63

CONCLUSION GÉNÉRALE.....68

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. Ed. Dunod.
2. D. François, A. Pineau, A. Zaoui. *Elasticité et plasticité*. Ed. Lavoisier.
3. J. Salençon. *Elastoplasticité*. Ed. Ecole polytechnique, France.
4. B. Halphen, J. Salençon. *Elasto-plasticité*. Ed. Presses des ponts, France.
5. V.A. Lubarda. *Elastoplasticity theory*. Ed. CRC Press.
6. R. Richards Jr. *Principles of solid mechanics*. Ed. CRC Press.
7. Robert J. Asaro, Vlado A. Lubarda. *Mechanics of solid and materials*. Ed. Cambridge University Press.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Après les cours de mécanique du point matériel, des SOLIDES RIGIDES (ou indéformables) vus dans les classes antérieures, ce cours a pour objectif de donner aux étudiants masters les bases de la mécanique des solides déformables pour des matériaux HOMOGENES et ISOTROPES.

Cet UE. S'adresse donc à vous, cher étudiants, qui possédez de bonnes connaissances de base en MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ou en MECANIQUE RATIONNELLE.

Sur le titre d'abord. Il s'agit de MÉCANIQUE c'est-à-dire de relations entre forces (ou contraintes), déplacements (ou déformations), température et temps. Il s'agit de MATÉRIAUX du génie mécanique et du génie civil : métaux et alliages, polymères, bétons, céramiques et leurs composites. MECANIQUE DES SOLIDES donc, pour modéliser leurs propriétés de résistance à la déformation et à la rupture et leur durabilité en service, les propriétés intrinsèques aux matériaux, définies sur l'élément de volume indépendamment de la géométrie des corps sont sollicités.

Sur le contenu :

- Le premier chapitre est consacré aux MÉCANISMES PHYSIQUES DE DEFORMATION ET DE RUPTURE des différents matériaux répondus en génie civil en insistant sur la description des propriétés qui justifient les hypothèses utilisées dans la modélisation mésoscopique (MMC). Ce dernier est une rapide introduction des phénomènes physiques.
- Le deuxième chapitre présente une CLASSIFICATION RHÉOLOGIQUE des comportements schématiques des solides fondée sur l'expérimentation.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude du comportement mécanique des matériaux a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu dans ce domaine sont :

- le tenseur des contraintes
- le tenseur des déformations

L'objectif du troisième et quatrième chapitre du polycopié est de donner un aperçu assez général du comportement mécanique des matériaux, et de sa modélisation. En effet, si l'élasticité linéaire représente actuellement le cadre de la majorité des calculs de mécanique des milieux continus réalisés dans l'industrie, d'autres types de comportement sont de plus en plus utilisés car ils s'approchent plus de la réalité, et permettent donc un dimensionnement plus strict des structures ou de certains procédés.

- Le troisième chapitre présente l'ÉLASTICITÉ, et la VISCO-ÉLASTICITÉ linéaire.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'ÉLASTO-PLASTICITÉ ; plasticité isotrope; plasticité à écrouissage isotrope. Et à l'ÉLASTO-VISCO-PLASTICITÉ.

L'ensemble constitue donc un polycopié concis de mécanique des solides déformables. Les concepts introduits dans ce document pourront être approfondis dans les différentes références bibliographiques pour mieux comprendre les liens entre les aspects microscopiques et macroscopiques du comportement, et pour une analyse détaillée des mécanismes physiques de déformation et de rupture.

CHAPITRE I

MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION ET DE
RUPTURE DES SOLIDES

INTRODUCTION	7
I.1 CLASSE DES MATÉRIAUX	7
I.2 MÉTAUX ET ALLIAGES	10
I.2.1 STRUCTURE	
I.2.2 MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION	
I.2.3 MÉCANISMES PHYSIQUE DE RUPTURE	
I.3 MATÉRIAUX GRANULAIRES	12
I.3.1 STRUCTURE DU BÉTON	
I.3.2 MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION ET DE RUPTURE	
I.4 POLYMÈRES ET ÉLASTOMÈRES	15
I.4.1 STRUCTURE	
I.4.2 MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION	
I.4.3 MÉCANISMES PHYSIQUES DE RUPTURE	
CONCLUSION	17

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Ce premier chapitre est destiné à donner les éléments de physique permettant de se procurer une idée schématique de la structure et des mécanismes de déformation et de rupture des principaux matériaux solides utilisés en constructions courantes.

I.1 CLASSE DES MATÉRIAUX

Malgré la grande différence de nature et de structure des matériaux tels que les métaux et alliages, les polymères et composites, les céramiques et béton, on observe une grande unité dans leurs comportements macroscopiques. Avec des ordres de grandeurs différents, les termes d'élasticité, de viscosité, de déformation plastique ou permanente, d'écroutissage, de rupture fragile, de rupture ductile s'appliquent à tous ces matériaux.

En effet, les matériaux de structure peuvent être classés en quatre grandes familles, selon la nature des liaisons entre les atomes, dont on peut résumer les propriétés principales comme suit :

- Les métaux (liaisons métalliques). Ce sont les matériaux les plus employés pour les applications structurales et pour l'essentiel des métaux ferreux (90% ferreux, les non-ferreux étant des alliages de Al, Cu, Ni et Ti). Ils sont capables de se déformer de manière permanente (ductiles) ce qui permet de réaliser des opérations de mise en forme par déformation plastique (emboutissage, forge, estampage...) ou d'assemblage par déformation plastique (rivetage, soudage...) et leur donne une excellente résistance à la rupture en service. Par ailleurs les matériaux métalliques sont denses, et bons conducteurs thermiques et électriques.

CHAPITRE I

	Couleur	Comportement des métaux vis-à-vis d'un aimant	Densité	Corrosion à l'air	Couleur après corrosion
Or	Jaune	Non	18 g/cm ³ Le plus dense	Non	
Cuivre	Rouge		8,9 g/cm ³		Oui
Fer	Gris	Oui	7,8 g/cm ³	Brune	
Aluminium		Non	2,7 g/cm ³ Le moins dense	Blanc	
Zinc			7,2 g/cm ³	Non	
Argent		10,5 g/cm ³	Oui	Noire	

Tab. I.1 *Tableau récapitulatif des différents métaux*

- Les céramiques (liaisons ioniques, solides inorganiques) Ce sont les matériaux les plus anciens et les plus couramment utilisés en génie civil (pierre, brique, verre...). On peut (ex. béton) généralement les mettre en œuvre à l'état pâteux. Ils ne deviennent fragiles qu'après la prise. Ces matériaux sont résistants à l'abrasion, mais pas aux chocs, moins denses que les métaux, isolants thermique et électrique, généralement poreux et fragiles.

PROPRIETES	ALUMINE 97,6% Al2O3	ALUMINE 99,5% Al2O3	NITRURE D'ALUMINIUM	ZIRCON ZrO2	CARBURE SILICIUM	NITRURE SILICIUM
Densité (g/cm3)	3,6	3,85	3,33	5,65	3,2	3,3
Porosité (% absorption eau)	0	0	0	0	0	0
Résistance à la flexion (Mpa)	295	310	300	545	400	700
Résistance à la compression (Mpa)	1750	2100	2000	1700	2200	2500
Module Young (Gpa)	320	370	310	205	410	300
Ténacité (Mpa.m ^{1/2})			3,35	6	4	7
Dureté	HR 45N 75	HR 45N 81		KV 0,3 1120	HV0,5 2600	HV0,5 1450
Conductivité therm. (W/mK)	26,8	29,3	180	2,5	125	25
coefficient dilatation thermique linéaire 25 à 1000°C (10 ⁻⁶ /°C)	9	9,4	5,6	10	5,2	4
Température maxi. d'utilisation (sans charge) (°C)	1650	1725	1200	1000	1800	1400

Tab. I.2 *Tableau récapitulatif des propriétés des céramiques*

CHAPITRE I

• Les polymères (liaisons covalentes + liaisons faibles, solides organiques). Ces matériaux sont récents si on se réfère aux matériaux de synthèse mais il existe également un grand nombre de polymères naturels (fibres végétales par exemple). Ce sont de larges macromolécules organiques, comme par exemple le polyéthylène $(C_2H_4)_n$ dont le nombre de monomères n varie entre 100 et 1000 et la masse molaire de $M = 100..103$ kg/mol. Les matières plastiques ont l'avantage de pouvoir être mises en forme par déformation plastique ou injection à l'état liquide. Elles peuvent être thermoplastiques (recyclables et ductiles, comme les métaux) ou thermodurcissables. Elles sont en général mauvais conducteurs thermique et électrique et très peu denses.

Monomère	Polymère	Applications
Ethylène $CH_2=CH_2$	Polyéthylène (PE) $\{CH_2-CH_2\}_n$	Emballage d'aliments, films plastiques flacons, bidons...
Propène $CH_2=CH$ CH_3	Polypropylène $\{CH_2-CH\}_n$ CH_3	Objets moulés résistants, récipients valises, pare-choc...
Chlorure de vinyle $CH_2=CH$ Cl	Polychlorure de vinyle (PVC) $\{CH_2-CH\}_n$ Cl	Tuyau, canalisations, bouteilles Volets...
Styrène $CH_2=CH$ C_6H_5	Polystyrène (PS) $\{CH_2-CH\}_n$ C_6H_5	Casiers de réfrigérateurs, mobilier transparent, jouets...
Cyanure de vinyle $CH_2=CH$ CN	Polyacrylonitrile (PAN) $\{CH_2-CH\}_n$ CN	Fibres synthétiques, vêtements,...

Tab. I.3 les polymères principaux et leurs utilisations.

• Les composites, ce sont des combinaisons hétérogènes de matériaux issus de ces trois familles, mais dont la structure est définie en fonction de l'application (béton armé, composite carbone-époxy, composite aluminium-SiC etc...)



Fig. I.1 constitution d'un matériau composite.

I.2 MÉTAUX ET ALLIAGES

I.2.1 Structure

Les métaux et alliages sont constitués d'atomes liés entre eux par des forces électromagnétiques. Ils ont une structure cristalline. Les métaux et alliages se présentent normalement à l'état polycristallin (sous forme d'agrégats de cristaux).

- Monocristaux : l'état cristallin est caractérisé par la régularité de l'empilement : un motif élémentaire ou maille, se répète périodiquement dans les trois directions pour constituer le cristal.

La plupart des mailles périodiques correspondent à l'un des trois systèmes suivants :

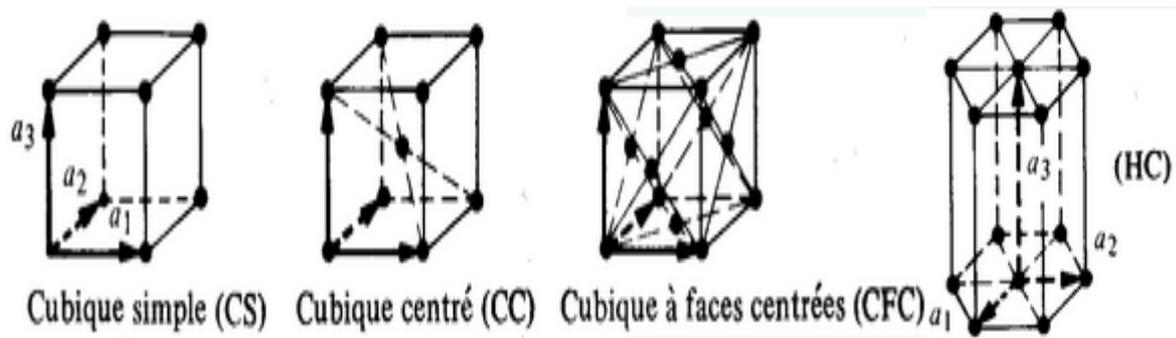


Fig. I.2 Cristal CS, CC, CFC, HC.

- Polycristaux : les métaux et alliages sont généralement obtenus à l'état liquide, la structure se formant par solidification lors du refroidissement. C'est l'invention de la microscopie électronique à transmission et à balayage qui a permis dans les années 1960-70 de comprendre les principaux mécanismes de déformation et de rupture de tel structures.

1.2.2 Mécanismes physiques de déformation

- Déformation élastique : les déformations élastiques proviennent des interactions atomiques. L'effet macroscopique constaté est le résultat des variations des espaces interatomiques nécessaire pour équilibrer les sollicitations extérieures. dans une déformation élastique pure, la configuration initiale des atomes est retrouvée après cessation de la sollicitation.

- Dilatation thermique : une augmentation de température dilate le réseau cristallin. Cela se traduit par une déformation ou dilatation thermique sans effort mécanique appliqué. un retour à la température initiale (de référence) annule cette dilatation thermique.

CHAPITRE I

• Déformation permanente : les déformations permanentes plastiques ou viscoplastiques se situent au niveau cristallin et se superposent aux déformations élastiques. Dans les matériaux métalliques, les deux mécanismes : maclage et glissement, constituent des déformations hétérogènes à l'échelle du cristal mais que l'on considérera comme homogène à l'échelle macroscopique.

1.2.3 Mécanismes physiques de rupture

Les déformations élastiques et permanentes qui se situent respectivement au niveau des atomes et des plans cristallin respectent la cohésion de la matière. La rupture, par essence, détruit cette cohésion par création de discontinuités surfaciques et volumiques au sein de la matière. Ces derniers se situent à l'échelle plus grande des cristaux : on parlera de microfissures ou de cavité (microns), méso-fissures (mm), et de macro-fissure à l'échelle des structures mécaniques (cm).

• Rupture fragile : la rupture dite fragile ne met en jeu que des ruptures des liaisons interatomiques sans déformation plastiques globales appréciables. Ces ruptures interviennent lorsque l'énergie de déformation locale due aux sollicitations extérieures devient égale à l'énergie nécessaire à la décohésion atomique.

• Rupture ductile : la rupture ductile est le résultat de l'instabilité des très grandes déformations locales engendrées au voisinage des défauts cristallin. Selon la densité de ces défauts la déformation macroscopique globale peut être importante ou non.

Les défauts responsables de l'amorçage de la rupture ductile sont :

- Les particules d'éléments d'addition dans les alliages,
- Les inclusions,

CHAPITRE I

- Les empilements de dislocation.

Au voisinage de ces défauts, les sollicitations extérieures créent des concentrations de contraintes qui engendrent de grandes déformations plastiques. La particule ou défaut étranger étant en général moins ductile que la matrice créant ainsi l'amorçage d'une microfissure ou d'une cavité.

I.3 MATÉRIAUX GRANULAIRES – BÉTON

I.3.1 Structure

Dans la grande majorité des cas, la formulation consiste à rechercher la compacité maximum du squelette granulaire afin de minimiser non seulement le cout mais aussi les déformations liées à l'hydratation du ciment et la chaleur dégagée.

La structure d'un béton durci est la suivante :

- Des granulats de différentes dimensions.
- De la pâte de ciment liée aux granulats, le ciment durci étant poreux.
- De l'eau dans certain pores.
- Défauts de liaison constitués de microfissures.

I.3.2 Mécanismes physiques de déformation et de rupture

Il est difficile de séparer les phénomènes de déformation et de rupture car les micro-fissures et les cavités initiales qui existent avant toute sollicitation engendrent, en se développant par des mécanismes de rupture fragile, une forte dissymétrie entre les réponses en traction et en compression ainsi que des déformations permanentes.

CHAPITRE I

- Le phénomène de micro-fissuration : la déformation dans cette première phase est le résultat de mouvement quasi réversible d'atomes et peut être considérée comme élastique avec une viscosité faible.

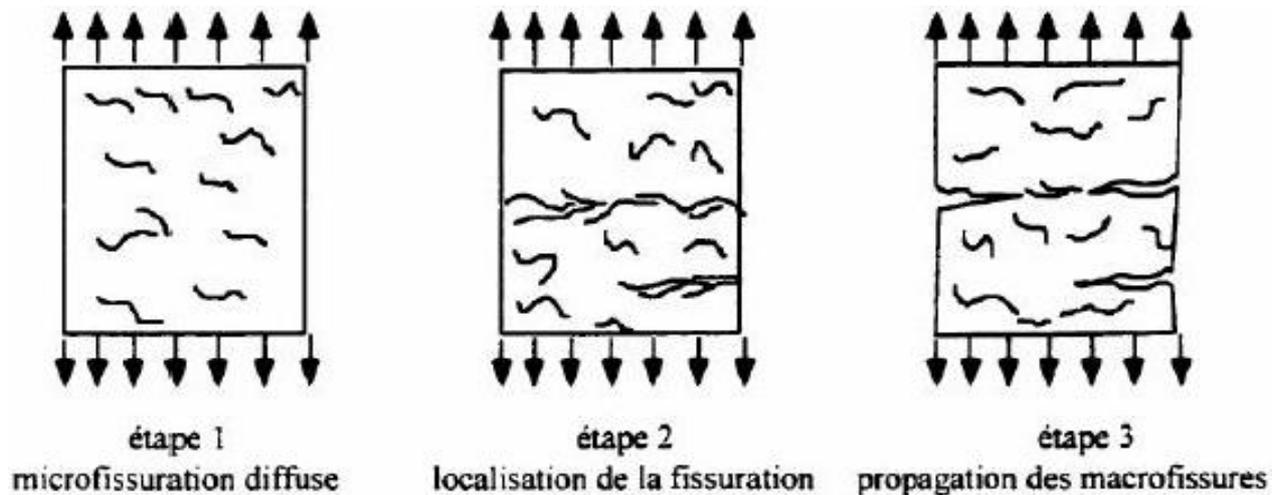


Fig. I.3 Evolution de la microfissure dans un béton sollicité en compression.

- Progression de la microfissure : au-delà de la sollicitation correspondant à la limite d'élasticité, les micro-fissures aux liaisons de la pâte et des grains les plus gros commencent à progresser engendrant au niveau macroscopique des déformations permanentes qui viennent se superposer aux déformations élastiques.

- la phase de rupture : pour des sollicitations encore plus importantes, les microfissures gagnent la pâte par décohéation. Des fissures mésoscopiques apparaissent, la rupture finale intervient lorsque les fissures se rejoignent pour former des surfaces de discontinuité traversant tout l'objet.

CHAPITRE I

I.4 POLYMÈRES ET ÉLASTOMÈRES

I.4.1 Structure

Les polymères sont constitués de molécules organiques arrangés en chaînes dites macromoléculaires. Ces chaînes sont la répétition d'un motif élémentaire ou monomère (fig.I.4), plus ou moins compliqué, dont les éléments de base sont le carbone C et l'oxygène O. Les liaisons entre ces éléments d'une même chaîne sont des liaisons fortes (covalentes : l'énergie à la rupture = 300 kJ/mole) telles que la liaison C-C. ces monomères présentent un caractère beaucoup moins régulier que dans les cristaux métalliques (fig.I.5).

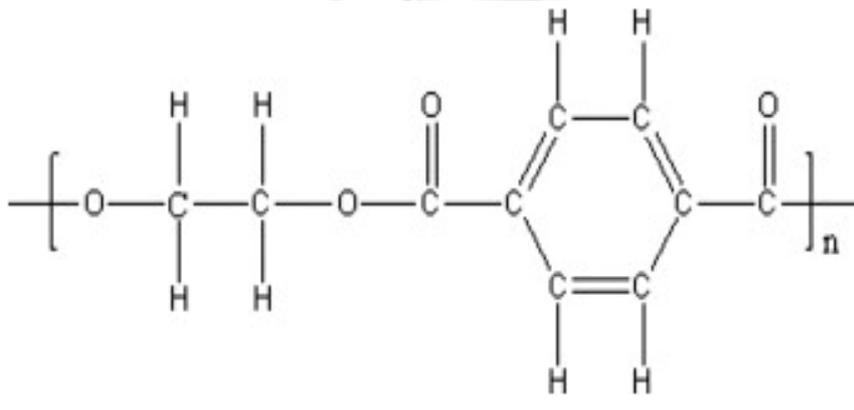


Fig. I.4 monomère de polyéthylène téréphthalate.

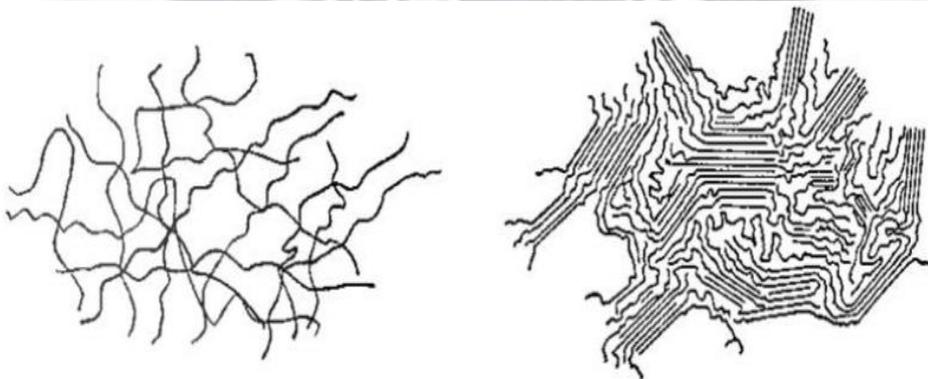


Fig. I.5 schémas d'arrangement amorphe et semicristallin.

CHAPITRE I

1.4.2 Mécanismes physiques de déformation

- Déformation visco-élastique : pour la plupart des polymères, tant que les sollicitations restent inférieures à une certaine valeur, les déformations sont élastiques mais elles mettent en jeu des phénomènes dissipatifs que l'on traduit globalement par une viscosité (relation macroscopique entre la vitesse de déformation et la contrainte). Elles sont le résultat de mouvement relatif de segments de chaînes dans lesquels les liaisons ne sont pratiquement pas détruites.

- Hystérésis : les aspects visqueux et hystérésis (par exemple en traction cyclique) sont plus ou moins prononcés selon le mode d'élaboration (polymérisation) et la température du polymère.

- Quasi-incompressibilité : les élastomères sont quasi-incompressibles (avec en petites déformations un coefficient de poisson proche de 0.5).

1.4.3 Mécanismes physiques de rupture

- D'une manière très schématique, on peut dire que l'amorçage de la rupture dans les polymères correspond à la disparition de liaisons moléculaires sous l'effet combiné des sollicitations extérieures et de l'activation thermique.

- Les zones d'amorçage sont essentiellement les zones de défaut, impuretés ou agglomérats de particules des élastomères. Le développement de la rupture peut s'opérer par un mécanisme de rupture fragile dans les polymères à l'état vitreux ou par un mécanisme de rupture ductile dans les polymères à l'état de transition caoutchoutique.

La connaissance de ces mécanismes physiques élémentaires est nécessaire pour la formulation des hypothèses sur lesquelles reposent les théories phénoménologiques macroscopiques de déformation et de rupture. Ainsi à titre d'exemple, les théories formulées à l'échelle de l'élément de volume représentative (REV) de la mécanique des milieux continus (MMC), doivent en effet intégrer des phénomènes qui se situent à des échelles plus petits : atomes, cristaux, hétérogénéités,...etc.

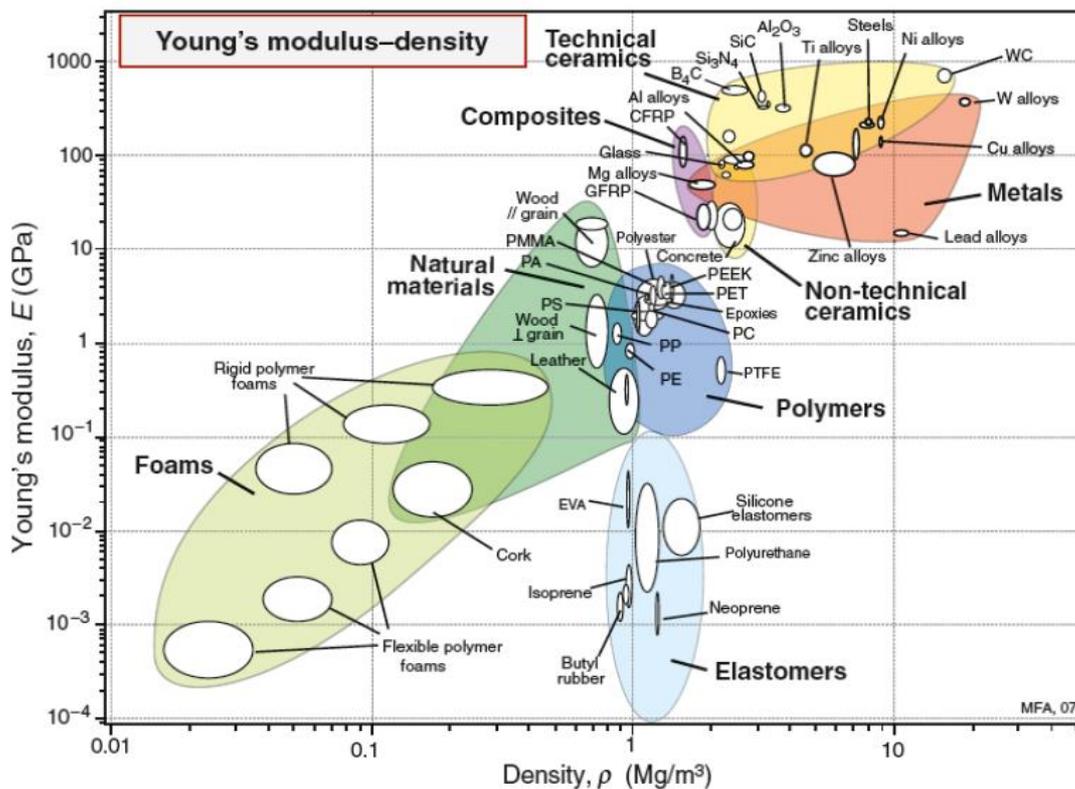


Fig. I.6 carte d'Ashby module d'Young-masse volumique

CHAPITRE II

**CLASSIFICATION RHEOLOGIQUE ET
CARACTERISATION EXPERIMENTAL**

INTRODUCTION	19
II.1 POSITION DU PROBLÈME	19
II.2 LA MÉTHODE PHÉNOMÉNOLOGIQUE GLOBALE POUR LA FORMULATION DES LOIS DE COMPORTEMENT	21
II.3 ESSAIS MÉCANIQUES HOMOGENES DE CARACTÉRISATION.....	23
II.3.1 ESSAIS UNIAXIAUX	23
II.3.1.1 ESSAI D'ÉCROUISSAGE	
II.3.1.2 ESSAI DE FLUAGE	
II.3.1.3 ESSAI DE RELAXATION	
II.3.2 ESSAIS MULTIAXIAUX	25
II.3.3 ESSAIS DE RUPTURE	26
II.4 SCHÉMATISATION DES COMPORTEMENTS RÉELS.....	26
II.4.1 SOLIDE RIGIDE – FLUIDE VISQUEUX.....	26
II.4.2 SOLIDES ÉLASTIQUES	28
II.4.3 SOLIDES PLASTIQUES	29
II.4.4 SOLIDES VISCO-PLASTIQUES	31
CONCLUSION	33

CHAPITRE II

INTRODUCTION

Ce deuxième chapitre est destiné à décrire la méthode phénoménologique (phénoméno.) qui repose sur l'observation des résultats expérimentaux à l'échelle macroscopique et tente de les reproduire par des modèles. Pour construire des modèles pertinents utilisables dans les calculs de conception ou de durées de vie en service, elle nécessite la réalisation et l'interprétation de nombreux essais sous conditions très variées de chargement rencontrés en pratique. On donne donc quelques éléments sur les types d'essais, pour observer les diverses caractéristiques du comportement des matériaux solides.

II. 1 POSITION DU PROBLÈME

Les équations générales de la physique (conservation de la masse, principe fondamental de la mécanique, principes de la thermodynamique ...) ne suffisent pas pour déterminer les champs de contraintes ou de déformation dans une structure. Le constat est le suivant:

Inconnues :

Tenseur des contraintes σ	6 inconnues
Tenseur des déformations ε	6 inconnues
Champ de déplacement \vec{U}	3 inconnues

Equations :

Relations déformations-déplacement	$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{Grad } \vec{U}} + \overline{\text{Grad } \vec{U}^T} \right)$	6 équations
Equations d'équilibre	$\begin{cases} \text{équations de moment} & \sigma = \sigma^T \\ \text{équations de résultante} & \text{div } \sigma + \vec{f} - \rho \vec{\gamma} = 0 \end{cases}$	3 équations

CHAPITRE II

Un déficit du nombre d'équations vis-à-vis du nombre d'inconnus apparaît. Il est donc nécessaire d'employer des relations expérimentales pour compléter la modélisation. On obtient ainsi les *équations de comportement*. Ces dernières relient les contraintes aux déformations et permettent d'avoir suffisamment d'équations pour solutionner le problème.

A ce niveau on peut faire deux remarques:

Remarque N°1 : Les équations précédentes étant des équations différentielles, il est nécessaire de bien préciser les conditions aux limites pour pouvoir définir les constantes d'intégrations. Suivant la nature du problème posé, il peut être parfois indispensable de se donner aussi des conditions initiales (comportement fonction du temps, étude dynamique ...).

Remarque N°2 : Les 6 équations de comptabilité ne sont pas des équations supplémentaires. Elles ne sont utilisées que pour vérifier l'intégrabilité du champ des déformations.

$$\text{Cas 3D : } \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0$$

$$\text{Cas 2D : } \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

Pour procéder à l'identification du comportement d'un matériau, on ne peut que tester des éprouvettes. Il faut donc noter que les informations dont on dispose concernent une structure particulière (l'éprouvette) et que les mesures sont globales (effort, couple, déplacement d'ensemble ...). En définitive la loi de comportement élaborée n'est vérifiée que globalement (macroscopiquement).

CHAPITRE II

II.2 LA MÉTHODE PHÉNOMÉNOLOGIQUE GLOBALE

La méthode phénoménologique (phénoméno.) globale est l'étude des relations de cause à effet qui existent entre les variables physiquement accessibles au sein d'un volume de matière. Elle n'est pas la seule méthode utilisable pour caractériser le comportement du matériau. Pour mémoire on peut citer l'approche microscopique qui consiste à modéliser les mécanismes à partir d'une étude des liaisons atomiques. On effectue alors une intégration et une moyennisation des variables microscopiques pour avoir le comportement macroscopique. De même on peut faire référence à la méthode thermodynamique qui utilise des variables internes (potentiels thermodynamiques ...) associées à un milieu continu homogénéisé.

Les variables physiquement accessibles de l'élément de volume sont celles que l'on peut déduire simplement des quatre grandeurs mesurables classiques :

- les déformations et leurs vitesses. C'est en fait souvent des déplacements que l'on mesure et il convient de traiter l'information pour aboutir à des déformations.
- les contraintes. On peut aussi constater que souvent l'information directe est une valeur d'effort. Le passage à une contrainte n'est pas toujours immédiat. On peut d'ailleurs à ce niveau s'interroger sur la nature de la contrainte (Cauchy? Piolat-Kirchoff ?).
- la température. Ce paramètre n'est pas forcément distribué de façon homogène.
- le temps. Cette variable peut aussi prendre des formes diverses et variées (nombre de cycles ...).

CHAPITRE II

Il faut aussi remarquer que les notions de déformation et de contrainte font apparaître l'aspect tensoriel. En général on accédera à une mesure qui n'est qu'une partie d'un tout. Dans la réalité, il faut établir des relations entre tenseurs.

La méthode phénoménologique globale peut aussi dans de nombreuses situations être nourrie par des informations d'observation du comportement des matériaux faites à d'autres échelles. Que ce soit pour les matériaux cristallins comme les métaux, les élastomères ou encore les milieux granulaires. Tous par nature hétérogène, les méthodes multiéchelles développées au cours des trente dernières années permettent de faire remonter dans une certaine mesure des informations des échelles inférieures et de les intégrer au niveau macroscopique de l'élément de volume.

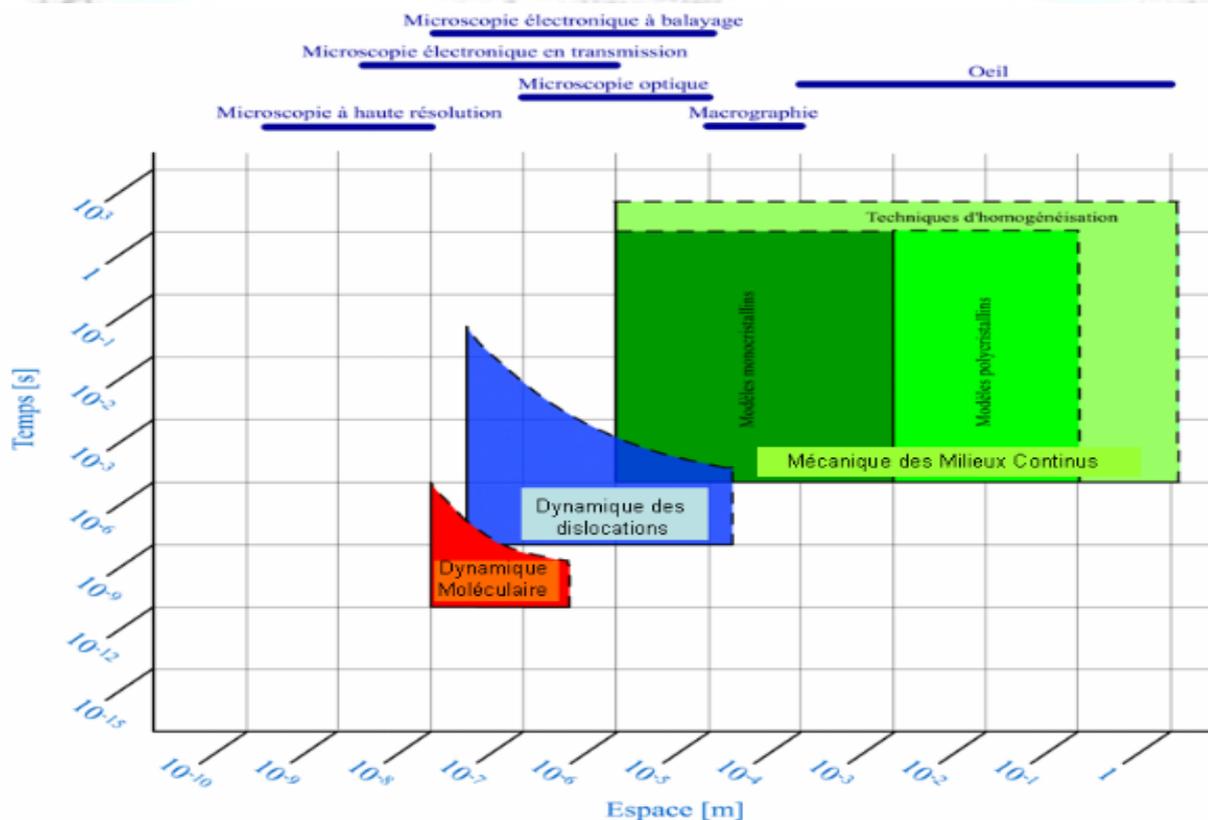


Fig. II.1 représentation schématique des possibilités de simuler et d'observer le comportement plastique d'un volume de matière de taille donnée pendant un temps.

CHAPITRE II

II.3 LES ESSAIS MÉCANIQUES HOMOGÈNES DE CARACTÉRISATION

Les essais mécaniques (enrichis de sollicitations thermiques ou de nature physique différente) dans un environnement donné conduisent aux informations de base nécessaires à la modélisation du comportement mécanique des matériaux solides.

Les grandeurs mécaniques telles que les contraintes et déformations doivent pouvoir être déterminées correctement et précisément afin d'exhiber les liens qui les relient et qui constituent la loi de comportement du matériau considéré. Pour cette raison, les essais «homogènes» dans lesquels les états de contraintes et de déformations sont uniformes ont été et demeurent les principaux essais de caractérisation expérimentale du comportement des matériaux solides.

Dans nombreux essais homogènes de caractérisation sont disponibles et destinés chacun à la détermination des propriétés particulière du comportement : écrouissage, viscosité, endommagement

Dans ce cas, l'éprouvette est soumise à une sollicitation qui engendre un état de contrainte et de déformation uniformes dans tout le volume utile ce qui permet de l'assimiler à un élément de volume.

II.3.1 *Les essais mécaniques uniaxiaux :*

Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en traction-compression simples à température constante. L'éprouvette est soumise à une sollicitation axiale. La forme de l'éprouvette est calculée de telle sorte que l'on obtienne un état de contrainte ou de déformation uniformes dans le volume utile. Il existe plusieurs façons de piloter l'essai.

CHAPITRE II

II.3.1.1 Essais d'érouissage en traction ou compression uniaxiale :

Dans l'essai d'érouissage en traction ou compression simples, la vitesse de déformation est constante. C'est l'essai le plus couramment utilisé.

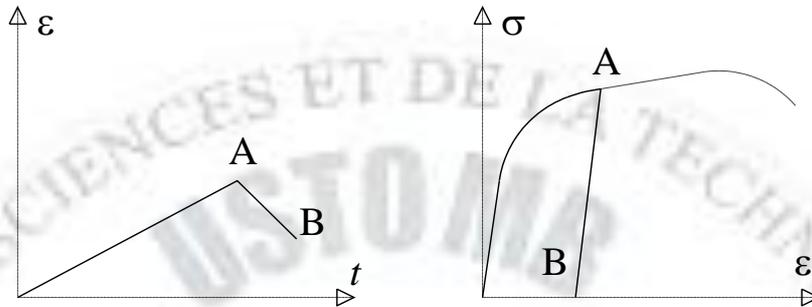


Fig.II.2 *l'essai d'érouissage*

II.3.1.2 Essais de fluage en traction ou compression uniaxiale :

Dans l'essai de fluage en traction ou compression simples, on étudie le comportement de l'éprouvette lorsque la contrainte appliquée est maintenue constante. L'évolution de la déformation permet de caractériser le durcissement et la viscosité du matériau.

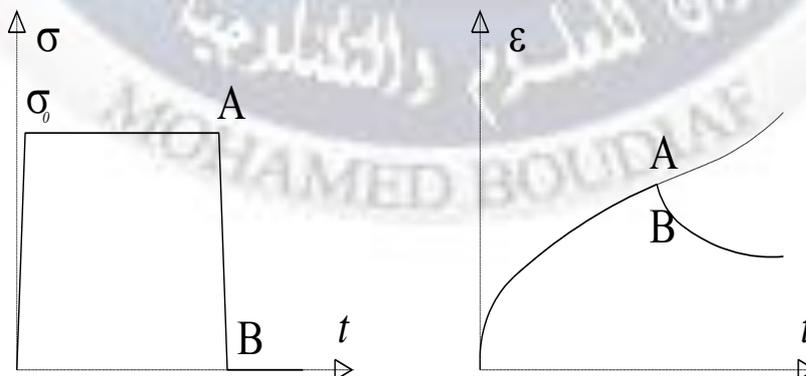


Fig.II.3 *l'essai de fluage puis de recouvrance*

CHAPITRE II

II.3.1.3 Essai de relaxation en traction ou compression uniaxiale :

Dans l'essai de relaxation en traction ou compression uniaxiale, on étudie l'évolution des contraintes en imposant une déformation constante. Cet essai est souvent réalisé à une température parfaitement contrôlée ($\pm 1^\circ$). Pour une contrainte donnée, on enregistre la vitesse de déformation et le temps à rupture.

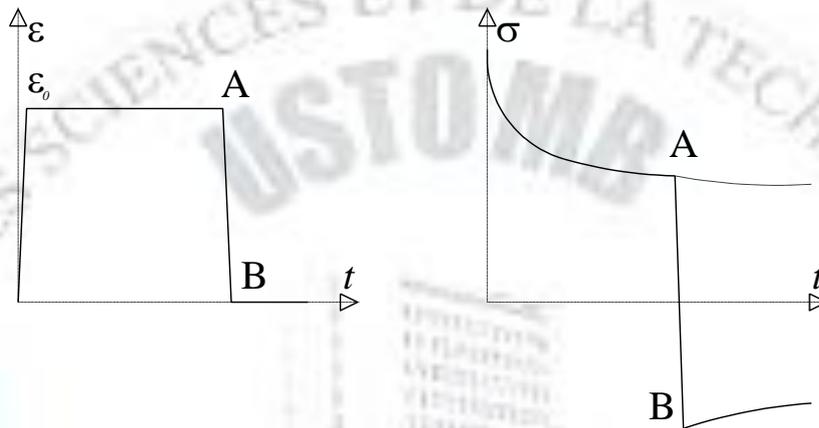


Fig. II.4 *l'essai de relaxation*

II.3.2 Les essais mécaniques multiaxiaux :

Enfin, du fait que la loi de comportement d'un matériau ne peut se borner à une simple relation entre une seule contrainte, une seule déformation et le temps, il devient de plus en plus nécessaire de réaliser des essais multidimensionnels ou multiaxiaux. On trouvera parmi ces essais multiaxiaux les plus utilisés :

- des essais de traction-cisaillement,
- traction ou compression bi ou triaxiale. Pour les matériaux anisotropes, l'essai de traction-cisaillement par traction-torsion représente un grand intérêt. Hélas ces essais sont relativement onéreux.

CHAPITRE II

L'avantage certain de ces derniers essais est qu'ils nous permettent de mieux connaître la relation entre les états tensoriels de contrainte et de déformation (ou de vitesse de déformation).

II.3.3 essais de rupture :

Les essais de rupture sont en fait les essais précédents poussés jusqu'à la ruine totale de l'éprouvette. Ils peuvent être combinés avec des sollicitations cycliques. En mesurant les conditions correspondant à la rupture :

- Contrainte et déformation à la rupture
- Temps ou nombre de cycles à rupture
- Energie dissipée à rupture
- Evolution des déformations permanentes jusqu'à rupture.

II.4 SCHÉMATISATION DES COMPORTEMENTS RÉELS

L'allure qualitative de la réponse des matériaux aux essais caractéristiques du paragraphe II.3 permet de les classer à l'aide des qualificatifs (schématisation qualitative) fluide ou solide tout d'abord puis pour un solide : rigide, élastique, visqueux, plastique et parfaitement plastique. A chaque type correspond une théorie mathématique (schématisation quantitative) qui est développée dans les chapitres suivants.

II.4.1 Solide rigide – fluide visqueux :

Ils ne sont cités que pour mémoire puisqu'ils sortent du cadre de la mécanique des solides déformables. Dans la pratique, la distinction entre solide et fluide est subjective.

CHAPITRE II

- Un solide rigide est indéformable.
- Un solide déformable admet un état d'équilibre sous sollicitation.
- Un fluide subit un écoulement pour toute sollicitation aussi faible soit elle (limite d'élasticité faible).

Un corps est appelé «fluide visqueux» si ses réponses aux essais caractéristiques ont les allures de la figure II.5 Ce corps est aussi qualifié de solide élasto-visco-plastique (chap. IV).

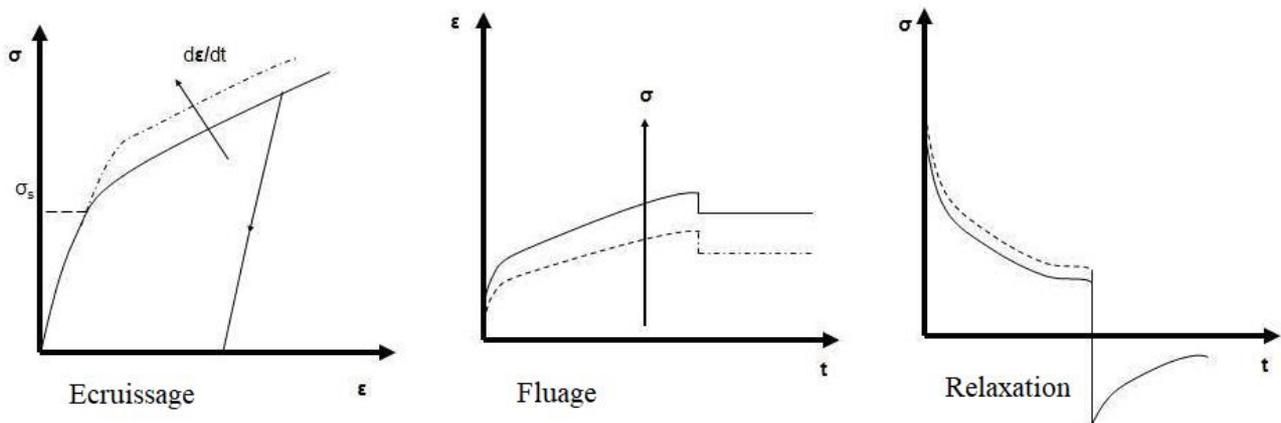


Fig. II.5 fluide visqueux (solide élasto-visco-plastique)

- Il y'a écoulement pour toute valeur de contrainte : $\varepsilon = f(\sigma)$
- La loi de comportement de type Maxwell et sa généralisation par Norton

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} + \frac{\sigma^*}{\eta} \quad \text{Ou} \quad \varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} + \left(\frac{\sigma^*}{K_N} \right)^N$$

Traduisent le comportement aux petites déformations d'un fluide visqueux (E est le module d'élasticité, η la viscosité, K_N et N les paramètres de Norton (chap. IV)).

CHAPITRE II

- Applications : polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion, béton frais en négligeant son vieillissement, de nombreux métaux aux températures proches de la température de fusion.

II.4.2 Solides élastiques :

La déformation est essentiellement réversible. L'état de contrainte et de déformation ne dépend pas du trajet de chargement suivi (Chap. III).

- Solide élastique parfait : les réponses qualitatives aux trois essais caractéristiques sont les suivantes :

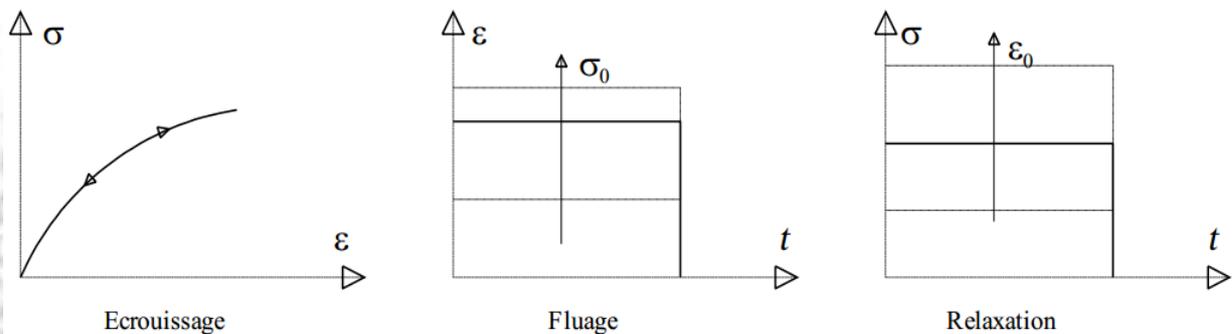


Fig. II.6 Solide parfaitement élastique

- La réversibilité est instantanée. La relation contrainte-déformation est la loi biunivoque : $\sigma = f(\epsilon)$
- Le modèle d'élasticité linéaire est la loi de Hooke $\sigma = E \epsilon$
- Application : les métaux, les bétons, les roches pour les sollicitations inférieures à la limite d'élasticité.
- Solide visco-élastique : les réponses qualitatives aux trois essais caractéristiques sont les suivantes :

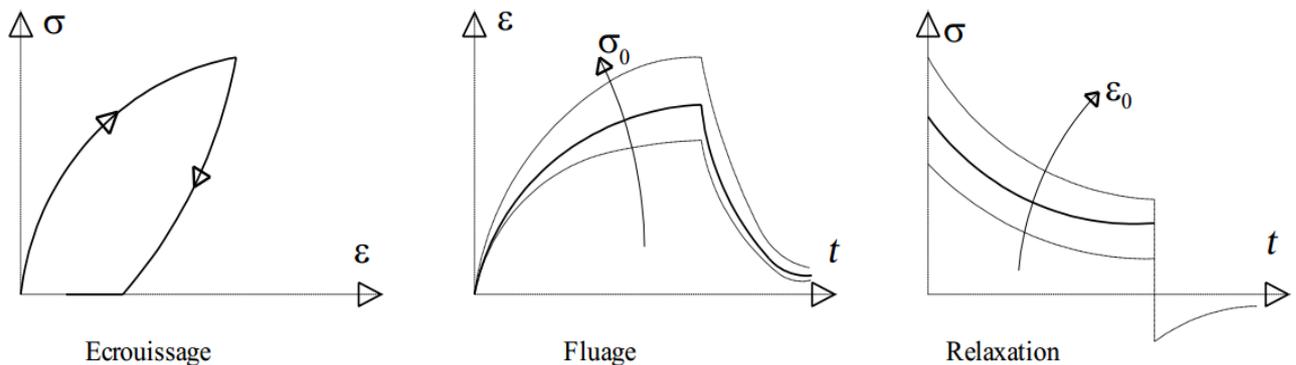


Fig. II.7 *Solide visco-élastique*

- La réversibilité de la déformation est « retardée » et n'intervient qu'après un

temps infini

$$\sigma = f(\varepsilon, \varepsilon^*)$$

- Un modèle simple est le modèle de Kelvin-Voigt, η étant la viscosité

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$$

- Le solide viscoélastique présente souvent du vieillissement.
- Application : les polymères organiques, le caoutchouc, le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

II.4.3 Solides plastiques :

On appelle ainsi des solides qui, après cessation des sollicitations, présentent des déformations permanentes instantanément stables et qui sont en équilibre sous sollicitation. Leur comportement ne dépend pas explicitement du temps. Par définition, la déformation plastique ε_p est celle qui correspond à la configuration relâchée : $\varepsilon_p = \varepsilon(\sigma=0)$ (Chap. IV).

CHAPITRE II

- Solide rigide parfaitement plastique : comme le montre la figure II.8, la déformation est nulle ou négligeable en deçà d'un seuil de contrainte et arbitraire pour cette valeur, quelle que soit la vitesse de déformation dans l'essai d'écroutissage ou le temps dans les essais de fluage et de relaxation.

$$|\sigma| < \sigma_s \longrightarrow \varepsilon = 0$$

$$\sigma = \sigma_s \longrightarrow \varepsilon = \varepsilon_p \text{ arbitraire}$$

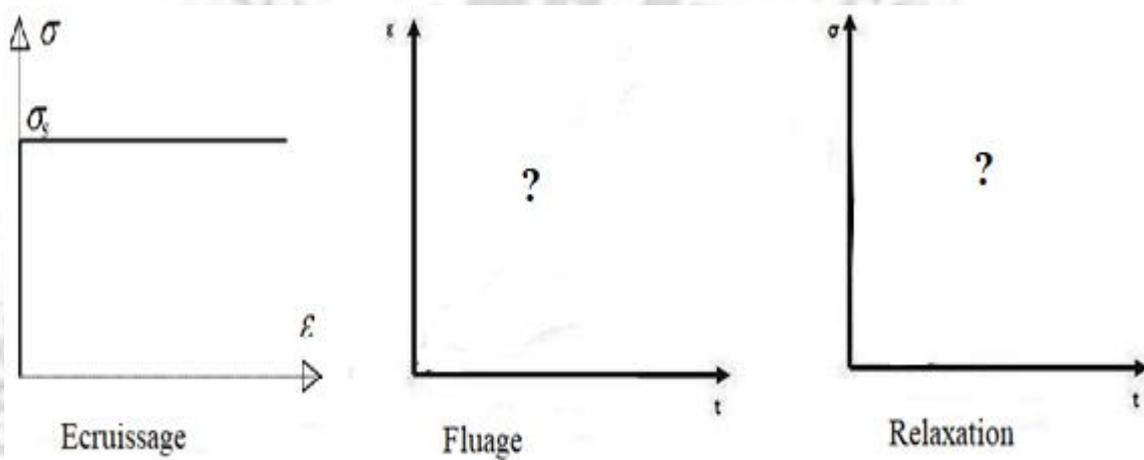


Fig. II.8 Solide rigide parfaitement plastique

- Application : mécanique des sols, analyse de la mise en forme de métaux.

- Solide élastique parfaitement plastique : comme le montre la figure II.9, la déformation est élastique en deca du seuil, et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur de contrainte (modèle de Saint Venant) :

$$|\sigma| < \sigma_s \longrightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \sigma_s \longrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p \text{ arbitraire}$$

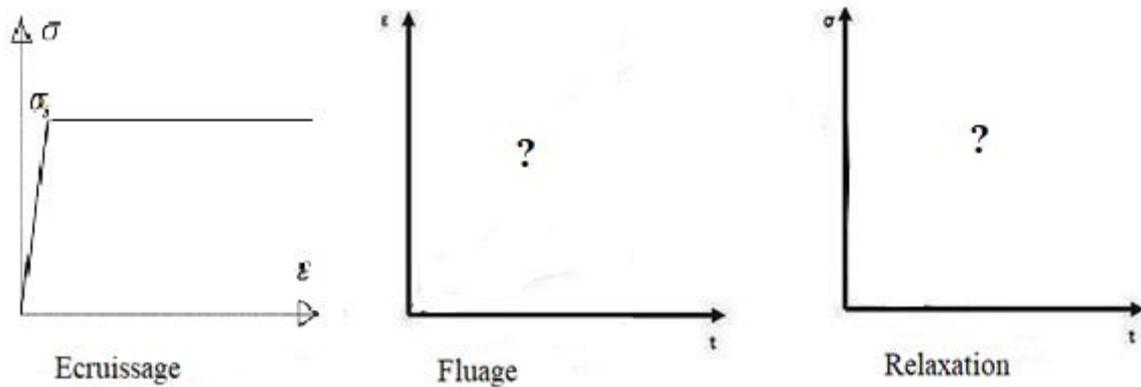


Fig. II.9 *Solide élastique parfaitement plastique*

- Applications : aciers à faible teneur en carbone et aux températures inférieures au quart de la température absolue de fusion.

II.4.3 Solides visco-plastiques :

Les solides appelés visco-plastiques sont ceux qui présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations (comme les solides plastiques) mais qui subissent un écoulement de fluage, fonction du temps, sous sollicitation. (Chap. IV)

- Solide rigide parfaitement visco-plastique : comme le montre la figure II.10, la vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte comme pour les fluides visqueux. $\dot{\varepsilon} = f(\sigma)$
- Le modèle de Norton est $\dot{\varepsilon} = K_N \sigma^{1/N}$

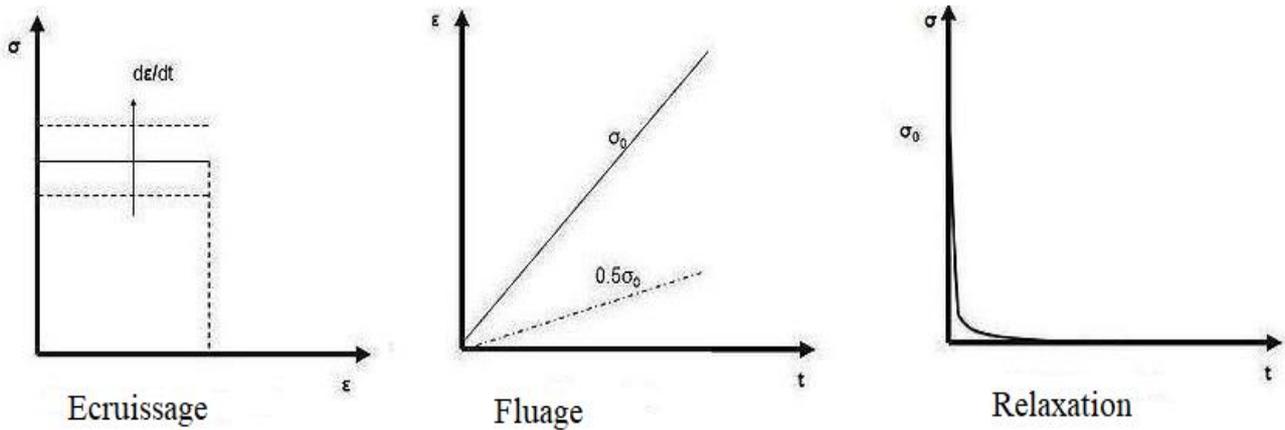


Fig. II.10 *Solide rigide parfaitement visco-plastique*

- **Application** : métaux et alliages aux températures supérieures au quart de leur température absolue de fusion.

- Solide élastique parfaitement visco-plastique : l'élasticité n'est plus considérée comme négligeable mais la vitesse de déformation plastique ne dépend toujours que de la contrainte. Il n'y a pas d'influence de l'écrouissage.

$$|\sigma| < \sigma_s \longrightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \sigma_s \longrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p \text{ et } \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma)$$

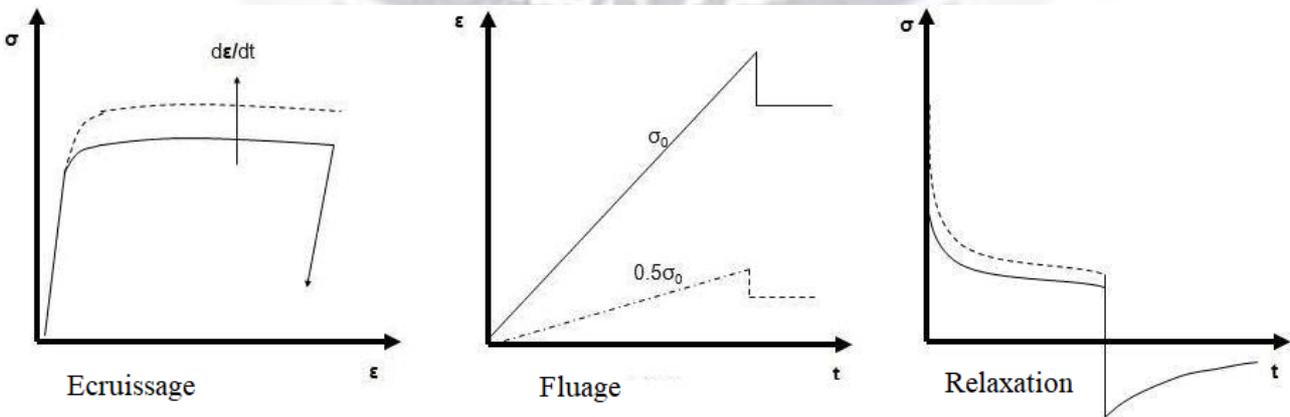


Fig. II.11 *Solide élastique parfaitement visco-plastique*

CHAPITRE II

CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre c'était de donner un aperçu assez général du comportement mécanique des matériaux. En effet, si l'élasticité linéaire représente actuellement le cadre de la majorité des calculs de mécanique des milieux continus (MMC) réalisés dans l'industrie, d'autres types de comportement sont de plus en plus utilisés car ils s'approchent plus de la réalité, et permettent donc un dimensionnement plus strict des structures ou de certains procédés.



CHAPITRE III

ÉLASTICITÉ ET VISCOÉLASTICITÉ

(SOLIDES ISOTROPES ET HOMOGENES)

INTRODUCTION	34
III.1 ELASTICITÉ LINÉAIRE EN HPP	35
III.1.1 ASPECTS PHÉNOMÉNOLOGIQUES	35
III.1.2 LOI DE HOOKE GÉNÉRALISÉE	36
III.1.2.1 LOI DE HOOKE D'ÉLASTICITÉ 3D	
III.1.2.2 LOI DE HOOKE D'ÉLASTICITÉ PLANE 2D	
III.1.3 ENERGIE DE DÉFORMATION ÉLASTIQUE.....	41
III.1.3.1 ENERGIE PAR UNITÉ DE VOLUME	
III.1.4 THERMOÉLASTICITÉ LINÉAIRE	43
III.2 VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRE EN HPP	45
III.2.1 ASPECTS PHÉNOMÉNOLOGIQUES.....	45
III.2.2 MODÈLES RHÉOLOGIQUES ANALOGIQUES DE BASE....	46
III.2.2.1 COMPORTEMENT ÉLASTIQUE	
III.2.2.2 COMPORTEMENT VISQUEUX	
III.2.3 MODÈLES D'ASSOCIATION RHÉOLOGIQUE VISCO-ÉLAS.	49
III.2.3.1 MODÈLE VISCO-ÉLASTIQUE DE VOIGT	
III.2.3.2 MODÈLE VISCO-ÉLASTIQUE DE MAXWELL	
CONCLUSION	52

CHAPITRE III

INTRODUCTION

Le principal objectif des essais mécaniques est la mise en place d'une loi destinée à être utilisée pour la prévision du comportement du matériau. Cette loi de comportement pourra par exemple être appliquée lors de la mise en forme d'une pièce, pour calculer les efforts nécessaires (choix des outillages et de la presse), pour évaluer l'aptitude du matériau à cette mise en forme (remplissage des formes), Pour ce type d'application, il n'est parfois pas nécessaire de faire appel à des lois compliquées. On se contente alors de relations simples, qui servent simplement à d'écrire le comportement du matériau dans un cas particulier.

III.1 ELASTICITÉ LINÉAIRE EN HHP

Tous a été dit, ou presque, sur le comportement élastique linéaire des matériaux R. Hooke (1776), T. Young (1807), A. L. Cauchy (1822), Kirchhoff (1852), Timoshenko (1934). Dans ce chapitre on se bornera donc à des rappels, en insistant sur l'élasticité linéaire. Le terme élasticité est employé ici au sens de réversibilité des déformations comme indiqué dans chapitre II et n'exclut pas la dissipation thermique. La thermo-élasticité introduit plusieurs coefficients supplémentaires dans la loi de comportement, dont le coefficient de dilatation, et permet de traiter les problèmes liés aux variations de température comme les problèmes de contraintes d'origine thermique.

III.1.1 Aspects phénoménologiques

Tous les solides, à une température pas trop proche de la température de fusion et pour une vitesse de sollicitation pas trop élevée, exhibent un comportement

CHAPITRE III

contrainte-déformation réversible, linéaire dans un premier temps, éventuellement non linéaire ensuite. Comme on l'a vu au chapitre I, il s'agit de mouvement réversibles d'atomes, de molécules ou de cellules, qui correspondent à des déformations qui n'excédant pas 0,2 à 0,5 10^{-2} pour les matériaux métalliques, les bétons, les céramique, ce qui justifie l'hypothèse des petites déformations pour ces matériaux.

La limite du domaine d'élasticité dépend de la température et des sollicitations mécaniques antérieures, dues aux procédés d'élaboration ou au service des pièces mécanique. La température, favorisant les mouvements irréversibles, diminue la taille de ce domaine jusqu'à la rendre nulle à la fusion. Les sollicitations mécaniques, au contraire, par le phénomène d'écrouissage peuvent l'augmenter considérablement.

L'élasticité linéaire s'applique aux déformations élastiques infinitésimales et linéaires (relation linéaire entre contraintes et déformations). l'hypothèse d'isotropie élastique est très bien vérifiée pour les matériaux métalliques (poly-cristallins) et les céramiques, elle est un peu moins pour le béton.

III.1.2 loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke qui est proposé d'exprimé chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est donc aujourd'hui souvent écrite sou la forme

$$\sigma = R \varepsilon$$

Où R est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou d'élasticité, ce dernier fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De

CHAPITRE III

même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\varepsilon = S \sigma$$

Où S est un tenseur des compliances élastiques du matériau.

III.1.2.1 loi de Hooke d'élasticité 3D

Les relations entre contraintes et déformations rappelées dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire sous forme matricielle. Les déformations et les contraintes sont écrites sous forme de vecteurs colonnes à 6 composantes. La matrice permettant le passage des contraintes aux déformations s'appelle la matrice des compliances (souplesse).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Cette forme est employée classiquement. Cependant, l'écriture suivante de la loi de Hooke avec le facteur devant les déformations de cisaillement et les contraintes de cisaillement permet de donner une expression particulièrement simple à l'énergie de déformation élastique (paragraphe suivant).

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{xz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2} \sigma_{xz} \\ \sqrt{2} \sigma_{yz} \\ \sqrt{2} \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}$$

CHAPITRE III

La matrice des compliances (souplesse) S a toutes les propriétés d'un tenseur symétrique du 4^{ème} ordre. Souvent, il peut s'avérer utile d'utiliser plutôt la notation indicielle d'Einstein pour définir la loi de comportement :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i = j = k = l = 1, 2, 3)$$

Dans cette notation S est un tenseur symétrique du 4^{ème} ordre. L'inverse du tenseur S est le tenseur R , appelé tenseur de rigidité.

$$\sigma_{ij} = R_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i = j = k = l = 1, 2, 3)$$

La relation entre contraintes et déformations s'écrit de façon explicite sous la forme suivante pour un matériau isotrope et homogène :

$$\sigma_{ij} = 2G \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right\} (i = j = 1, 2, 3), \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = 2G \left\{ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \\ \sigma_{22} = 2G \left\{ \varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \\ \sigma_{33} = 2G \left\{ \varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \\ \sigma_{13} = 2G \{ \varepsilon_{ij} \} \\ \sigma_{23} = 2G \{ \varepsilon_{ij} \} \\ \sigma_{12} = 2G \{ \varepsilon_{ij} \} \end{array} \right\},$$

III.1.2.2 loi de Hooke d'élasticité plane 2D

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèle à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts.

- Etat plan de contrainte

Il est certain que les trois composantes non nulles σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} ne dépendent pratiquement pas de z , c'est-à-dire qu'elles restent constantes sur toute l'épaisseur du disque. Le tenseur des contraintes n'a que 3 composantes non nulle.

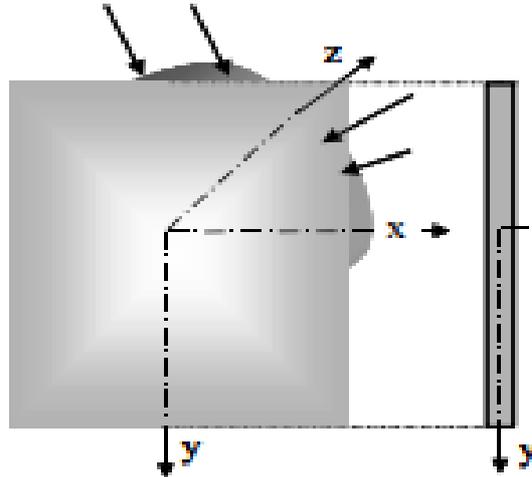


Figure IV.1 Exemple de structure en contrainte plane

La loi de Hooke d'un matériau élastique isotrope homogène montre que la déformation ε_{zz} est non nulle.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}}{E} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \end{bmatrix}$$

En inversant les expressions de et dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

CHAPITRE III

- Etat plan de déformation

Considérant un tunnel ou un puits de mine (figure) de très grande étendue selon la direction z . si les sections perpendiculaires à l'axe z sont toutes identiques, deux sections distantes de dz se déforment de façon identique.

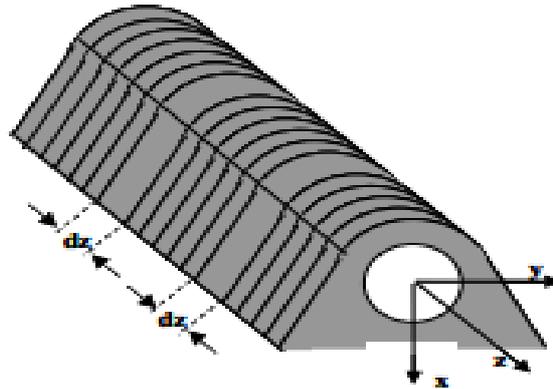


Figure IV.2 Exemple de structure en déformation plane

$$\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La composante non nulle du tenseur des contraintes s'obtient par la loi de Hooke, dans un matériau isotrope et homogène élastique vaut :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}] \end{cases}$$

Remarque

Pour passer de contraintes planes en déformations planes

$$E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1-\nu)}$$

Pour passer de déformations planes en contraintes planes

$$E \rightarrow \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}, \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1+\nu)}$$

Les deux expressions précédentes laissent inchangée l'expression du module de cisaillement ou de Coulomb G en fonction de E et ν

$$G = \frac{E}{(1+\nu)}$$

III.1.3 énergie de déformation élastique

Nous avons jusqu'à présent utilisé la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, ainsi que leur relation linéaire via la loi de Hooke. Nous pouvons maintenant utiliser l'autre caractéristique de la déformation élastique, qui est sa réversibilité.

L'énergie de déformation par unité de volume est finalement la forme quadratique définie positive suivante :

$$W = \frac{1}{2} R \varepsilon^2$$

CHAPITRE III

L'expression de l'énergie en fonction des contraintes et des déformations est de très grande importance en mécanique des matériaux. C'est l'énergie qui permet de définir la partie irréversible et la partie réversible d'une déformation. Pour les matériaux élasto-plastiques une extension du concept d'énergie, appelé potentiel des contraintes permet de définir la relation entre vitesse de déformation et contraintes. Dans le paragraphe qui suit, nous calculons l'énergie stockée dans un matériau élastique isotrope homogène.

III.1.3.1 l'énergie par unité de volume

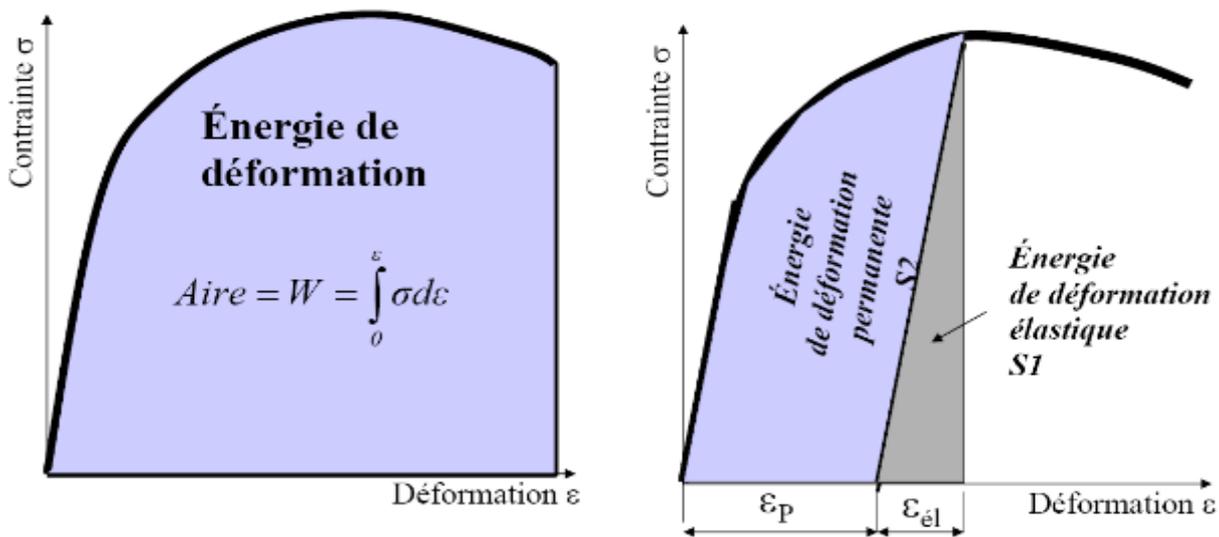


Figure IV.3 Exemple de structure en déformation plane

L'énergie par unité de volume s'exprime comme le travail des contraintes sur les déformations

$$W_{vol} = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Les contraintes sont linéairement proportionnelles aux déformations. Cette proportionnalité permet d'écrire :

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

CHAPITRE III

La loi de Hooke permet d'exprimer l'énergie par unité de volume en fonction des déformations seules ou des contraintes seules :

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} R_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

L'énergie élastique peut être décomposée en une partie correspondant à l'accroissement de volume du solide et une partie correspondant aux distorsions angulaires à volume constant.

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\text{dev } \sigma_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}) (\text{dev } \varepsilon_{ij} + \varepsilon_m \delta_{ij})$$
$$\text{dev } \sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = 2G \text{ dev } \varepsilon_{ij}$$
$$\sigma_m = 3K \varepsilon_m, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\text{module de compressibilité cubique})$$

III.1.4 Thermo-élasticité linéaire

Les matériaux sont souvent soumis à des chargements thermiques qui ont pour effet de dilater les structures. Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à la variation de température ΔT , par le coefficient de dilatation thermique α :

$$\varepsilon^{th} = \alpha \Delta T I$$

Lorsque la structure n'est pas liée mécaniquement à l'extérieur, alors ce champ de déformation thermique ne générera pas de contraintes s'il vérifie les équations de compatibilité. On montre qu'une telle condition impose un champ de températures linéaire dans la structure. Dans le cas contraire, ou si la structure est liée mécaniquement à l'extérieur (on parle alors de dilatation contrariée), alors des contraintes seront générées dans le solide.

CHAPITRE III

Par exemple, lorsque l'on chauffe de façon homogène une barre de métal, celle-ci se dilate sans qu'il y ait création de contraintes à l'intérieur. Par contre, si on impose à celle-ci de garder la même longueur, alors une contrainte de compression sera créée dans la barre pour respecter cette condition. Une autre façon de créer des contraintes dans la barre est de la chauffer de façon non homogène. Par exemple, lors d'un chauffage par induction à haute fréquence, le diamètre extérieur de la barre est plus dilaté que le centre. La partie extérieure de la barre sera donc mise en compression par la partie intérieure.

D'une façon plus générale, lors d'une sollicitation dite "thermomécanique", les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations mécaniques, elles même reliées aux contraintes par la loi de comportement du matériau. Dans le cas élastique linéaire isotrope, on obtient une relation entre les déformations et les contraintes sous la forme :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma + \left(\alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \right) I$$

L'inversion de cette relation nous fournit la loi de comportement dite « thermo élastique » du matériau :

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\varepsilon) I \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T I$$

CHAPITRE III

III.2 VISCO-ÉLASTICITÉ LINÉAIRE EN HPP

Dès la fin du 17^{ème} siècle, Newton a défini la viscosité comme le coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la vitesse de déformation. Au 18^{ème} siècle, les physiciens dont J. C. Maxwell, L. Boltzmann et Lord Kelvin ont mené des recherches théoriques et expérimentales sur le fluage et la relaxation de matériaux variés (verre, métaux et polymères à différentes températures). Leurs travaux ont conduit à la modélisation rhéologique des matériaux. En ce qui concerne la modélisation, la vitesse de déformation a un rôle fondamental et intervient comme une variable indépendante. Les modèles de Kelvin-Voigt et Maxwell sont décrits ici dans le cadre de la visco-élasticité linéaire.

III.2.1 Aspects phénoménologiques

Nous avons vu au chapitre II la distinction (subjective parfois) entre solides et fluides et la classification rhéologique des solides.

Les polymères, les composites à matrices organique, le bitume et, dans moindre mesure, le béton et le bois, présentent des phénomènes dissipatifs associés à l'élasticité que l'on peut traduire globalement par une viscosité (paramètre reliant contrainte et vitesse de déformation). Les caractéristiques essentielles du caractère visco-élastique d'un corps solide sont la dépendance de sa réponse à la vitesse de sollicitation et l'existence d'un retour (à contrainte nulle et aux temps long) à l'état initial non déformé du matériau ou de la structure : on parle alors de « réversibilité » de la déformation. Cette dernière caractéristique se traduit par l'absence de la déformation permanente.

CHAPITRE III

Enfin, la viscosité engendre du fluage sous contrainte imposée constante et une relaxation sous déformation imposée constante.

Il va de soi que les effets du comportement différé des matériaux sont d'autant mieux maîtrisés que l'on dispose d'une modélisation de ce comportement suffisamment pertinente. Dans le cadre unidimensionnel pour la sollicitation et la réponse, on se limitera ici à des modélisations adaptées aux applications en calcul des structures dans la pratique courante et qui se placent dans **l'hypothèse des petites perturbations** « HPP » et dans le cadre **isotherme**.

III.2.2 Modèles rhéologiques analogiques de base

L'approche unidimensionnelle du comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant s'appuie fréquemment sur l'utilisation de modèles rhéologiques constitués d'éléments simples élastiques (ressorts) et visqueux (amortisseurs) ; les modèles ainsi composés permettent de mettre en évidence et/ou de reproduire, au moins qualitativement, des comportements physiques unidimensionnels observés.

Le comportement viscoélastique linéaire est représenté en général par la construction d'un modèle constitué d'un assemblage de ressorts et d'amortisseurs. Il s'agit donc d'un modèle symbolique et analogue. Le matériau viscoélastique sera représenté par une association de ressorts et d'amortisseurs en série et en parallèle plus ou moins complexe. **L'équation rhéologique du matériau** est obtenue en utilisant les équations rhéologiques des constituants élémentaires (ressort et amortisseur) et en respectant aussi les lois d'association en série et en parallèle des différents éléments.

CHAPITRE III

III.2.2.1 Le comportement élastique

C'est le plus simple des comportements. Il est complètement réversible, c'est à dire que si les actions extérieures engendrant la déformation sont supprimées le solide retrouve sa forme initiale. Il n'y a donc pas de déformation résiduelle. Ce comportement est instantané et on le qualifie de linéaire si la mesure de la déformation est proportionnelle à la mesure des actions. La grande majorité des solides se comportent de façon élastique, au moins jusqu'à un certain niveau de contrainte. D'un point de vue physique, ce sont les forces de cohésion entre les particules matérielles (forces électriques) qui sont à l'origine du comportement élastique.

Modèle 1D : le modèle analogique est celui du ressort de raideur E



La relation contrainte-déformation s'écrit simplement : $\sigma = E \varepsilon$

Généralisation 3D : en élasticité linéaire, homogène et isotrope, la relation $\sigma - \varepsilon$ se généralise en 3D sous la forme suivante (Loi de HOOKE)

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon) I$$

Où μ et λ sont des constantes matérielles (coefficient de Lami). On peut aussi inverser cette relation en introduisant deux autre constantes, le module de Young et le coefficient de Poisson.

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) I$$

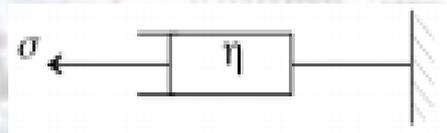
CHAPITRE III

Pour un matériau donné, ces diverses constantes élastiques peuvent être identifiées à partir d'expériences élémentaires (essai uniaxiale, essai de cisaillement,...).

III.2.2.2 Le comportement visqueux

On aborde maintenant les comportements pour lesquels la vitesse du chargement intervient. Intuitivement, il est clair qu'un corps réagira différemment selon la vitesse à laquelle on le déforme : sa résistance sera, par exemple, d'autant plus grande que la vitesse de déformation sera importante. On parle alors de viscosité pour désigner cette propriété du type frottement interne. La viscosité des solides est à rapprocher de celle des fluides, mais les lois de comportement sont plus complexes dans le cas des corps solides. On se limitera ici à décrire de manière élémentaire la notion de solide visqueux linéaire.

Modèle 1D : Le modèle analogique correspondant à un élément visqueux linéaire est celui de l'amortisseur de viscosité



Pour pouvoir le déformer à un taux de déformation constant il faut lui appliquer une contrainte

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$

Plus la viscosité sera grande, plus il sera difficile de le déformer. Une viscosité infinie correspondra à un matériau indéformable. L'unité de la viscosité dans le S.I est le Pa s.

CHAPITRE III

Généralisation 3D : Si l'on suppose que les forces de viscosité sont dues aux distorsions et non aux variations de volume (hypothèse de Stokes) ou si l'on considère que le milieu est incompressible, la relation constitutive s'écrit alors

$$dev \sigma = 2\eta dev \varepsilon^*$$

III.2.3 Modèles d'association rhéologiques visco-élastique

Les résultats d'essais ne présentent un intérêt que si l'on peut modéliser le comportement du matériau. Cette modélisation, nécessaire pour le calcul prévisionnel, peut être multiple. On peut ainsi définir un modèle mathématique sous forme d'équations, mais on peut aussi envisager la recherche d'une modélisation analogique. Cette dernière est souvent utilisée à des fins didacticiels.

Les règles de calcul sont les suivantes :

- Dans une association en parallèle, la contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contraintes imposées à chaque branche et la déformation subie par l'ensemble est égale aux déformations subies par chacune des branches, ces dernières déformations étant toutes identiques.

$$\begin{cases} \sigma = \sum_i \sigma_i \\ \varepsilon = \varepsilon_i \end{cases}$$

- Dans une association en série, la contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément et la déformation subie par l'ensemble est la somme des déformations subies par chaque élément.

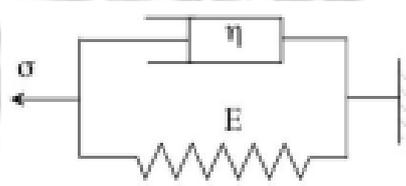
$$\begin{cases} \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \\ \sigma = \sigma_i \end{cases}$$

CHAPITRE III

III.2.3.1 Modèle visco-élastique de Voigt

Modèle 1D :

Le solide de Voigt correspond à un modèle rhéologique simple représentant un ressort de module d'élasticité E_0 et un amortisseur de coefficient de viscosité η en parallèle. On a ainsi la partition de la contrainte (une pour chaque branche du modèle rhéologique) :



Soit σ_e et les déformations, et les contraintes, respectivement dans le ressort et dans l'amortisseur. On a :

$$\begin{cases} \sigma_e = E \varepsilon_e \\ \sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v = \eta \frac{d \varepsilon_v}{d t} \end{cases}$$

Les applications sont les polymères, le caoutchouc et le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

D'après les lois d'association en parallèle, la déformation et la contrainte totales s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \\ \sigma = \sigma_e + \sigma_v \\ \sigma = E \varepsilon_e + \eta \dot{\varepsilon}_v \end{cases}$$

Généralisation 3D

Relation constitutive qui se généralise en **3D** par :

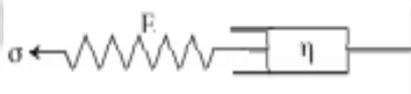
$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)I + 2\eta \text{dev} \dot{\varepsilon}$$

CHAPITRE III

III.2.3.2 Modèle visco-élastique de Maxwell

Modèle 1D :

Le corps de Maxwell traduit le comportement d'un fluide sans possibilité d'équilibre à sollicitation constante (contrainte ou déformation) non nulles. Il correspond à un modèle rhéologique représentant un ressort et un amortisseur en série. On a ainsi la partition de la déformation en une déformation élastique et anélastique.



$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \\ \sigma = \sigma_r = \sigma_a \\ \sigma = E \varepsilon_e \\ \sigma = \eta \dot{\varepsilon}_v \end{cases}$$

On a donc :

$$\sigma^* = E \varepsilon_e^* = E \left(\varepsilon^* - \varepsilon_v^* \right)$$

Et il s'ensuit que la relation de comportement peut s'écrire pour le modèle de Maxwell

$$\sigma^* = E \varepsilon^* - \frac{E}{\eta} \sigma$$

Pour une viscosité infinie on retrouve le modèle élastique.

Généralisation 3D :

En suivant la même procédure que pour le modèle 1D et en ayant à l'esprit que la

déformation visqueuse est purement déviatorique (dev.) $\Rightarrow \left(tr \left(\varepsilon_v^* \right) = 0 \right)$

$$\sigma^* = 2\mu \varepsilon_e^* + \lambda \operatorname{tr} \left(\varepsilon_e^* \right) I = 2\mu \left(\varepsilon^* - \varepsilon_v^* \right) + \lambda \operatorname{tr} \left(\varepsilon^* \right) I$$

D'où l'équation constitutive

$$\sigma^* = 2\mu \varepsilon^* + \lambda \operatorname{tr} \left(\varepsilon^* \right) I - \frac{\mu}{\eta} \operatorname{dev} (\sigma)$$

Loi de HOOKE

Que l'on peut aussi inverser pour avoir la vitesse de déformation.

$$\varepsilon^* = \frac{1+\nu}{E} \sigma^* - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \left(\sigma^* \right) I - \frac{1}{2\eta} \operatorname{dev} (\sigma)$$

Loi de HOOKE

Conclusion

La prise en compte des effets dus au comportement différé des matériaux fait partie de la pratique courante en calcul des structures. C'est le cas notamment pour les ouvrages en béton pour lesquels les différents règlements internationaux énoncent des formules permettant de définir le comportement uniaxial de ce matériau et de calculer la réponse de l'ouvrage au cours du temps, en tenant compte notamment de son mode de construction et de son histoire de chargement. La prise en considération de ce type de comportement est également nécessaire pour les ouvrages géotechniques tels que les galeries ou les cavités de stockage.

CHAPITRE IV

PLASTICITÉ ET VISCOPLASTICITÉ

(SOLIDES ISOTROPES ET HOMOGENES)

INTRODUCTION.....	54
IV.1 PLASTICITÉ LINÉAIRE EN HPP.....	54
IV.1.1 ASPECTS PHÉNOMÉNOLOGIQUES	54
IV.1.2 MODÈLES RHÉOLOGIQUES	55
IV.1.3 LOIS DE COMPORTEMENT PLASTIQUE	56
IV.1.3.1 COMPORTEMENT RIGIDE-PARFAITEMENT PLASTIQUE	
IV.1.3.2 COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE	
- L'ELASTO-PLASTICITÉ PARFAITE	
- L'ELASTO-PLASTICITE ÉCROUISSABLE	
IV.1.4 CRITÈRES DE PLASTICITÉ	62
IV.1.4.1 CRITÈRE DE VON MISES	
IV.1.4.2 CRITÈRE DE TRESCA	
IV.2 VISCO-PLASTICITÉ LINÉAIRE EN HPP.....	63
IV.2.1 DÉCOMPOSITION DE LA DÉFORMATION TOTALE	63
IV.2.2 LOIS DE COMPORTEMENT VISCO-PLASTIQUE	64
IV.2.2.1 COMPORTEMENT RIGIDE-PARFAITEMENT VISCO-PLA.	
IV.2.2.2 COMPORTEMENT ÉLASTO-VISCO-PLASTIQUE	
- L'ELASTO-VISCO-PLASTICITÉ PARFAITE	
- L'ELASTO-VISCO-PLASTICITÉ ÉCROUISSABLE	
CONCLUSION.....	67

CHAPITRE IV

INTRODUCTION

Tous les matériaux possèdent une limite d'élasticité, qui correspond à un chargement critique à partir duquel le comportement du matériau n'est plus réversible. Il peut y avoir rupture brutale (cas du verre), rupture progressive (cas du béton), mais dans la plupart des cas il y a plastification du matériau. Ceci signifie que sa forme est changée de façon irréversible, contrairement au Domain élastique où le solide reprend sa forme initiale lorsque l'on relâche les efforts.

IV.1 PLASTICITÉ LINÉAIRE EN HPP

La plasticité est la théorie mathématique décrivant les déformations irréversible indépendantes du temps (le comportement du corps est toujours le même, qu'on le déforme rapidement ou lentement) et dont le chapitre I donne quelques éléments sur leur nature physique et principalement le mouvement de dislocation. La théorie de la plasticité est utilisée pour le calcul des déformations permanentes (ou pour les limiter) dans les structures, pour les calculs prévisionnels de ruine plastique des structures, pour les calculs de stabilité (des remblais de terre par exemple)...etc.

IV.1.1 Aspects phénoménologiques

Lorsqu'un matériau est sollicité jusqu'à la rupture, les essais montrent que la contrainte de rupture et le mode de ruine dépend de la nature du matériau. Ainsi la rupture peut intervenir **brutalement** quasi sans déformation préalable pour les matériaux qualifiés aujourd'hui de **fragiles**, tandis qu'elle n'intervient qu'après une étape de grande déformation permanente pour les matériaux qualifiés aujourd'hui de **ductiles**. Nous savons maintenant que les matériaux fragiles rompent brutalement au-delà d'une certaine tension, tandis que les matériaux ductiles s'écoulent

CHAPITRE IV

plastiquement avant de rompre sous cisaillement. Si la rupture est toujours l'étape ultime de la ruine des structures, elle est précédée d'une étape de **plastification** pour les matériaux ductiles.

IV.1.2 Modèles rhéologiques

Lorsque la contrainte dans un matériau est augmentée au-delà d'une certaine valeur, dite **limite élastique** ("yield point" en anglais) la déformation se poursuit selon un processus physique différent correspondant au domaine "plastique".

D'un point de vue macroscopique le domaine plastique n'est plus **réversible**, l'annulation de la contrainte ne provoque qu'un retrait partiel du matériau, équivalent uniquement à la partie élastique de la déformation. Par contre la partie de déformation plastique reste en l'état. Pour décrire macroscopiquement la déformation plastique il faut connaître **deux caractéristiques de base**:

1. La contrainte à partir de laquelle la déformation plastique débute: limite élastique ("yield strength" en anglais).
2. la façon dont la contrainte doit évoluer pour poursuivre la déformation: modèle d'écrouissage ("strain hardning" en anglais). De manière imagée il s'agit de la forme de la courbe dans la zone plastique.
3. Cette partie distingue les phénomènes mécaniques impliqués dans la plasticité classique où le temps et les vitesses de déformation ne jouent qu'un rôle secondaire de ceux pour lesquels le temps et/ou les vitesses de déformation

CHAPITRE IV

jouent un rôle important comme les phénomènes de fluage, de fatigue ou de plasticité dynamique.

IV.1.3 Lois de Comportement plastique

La formulation du comportement élasto-plastique repose sur une hypothèse de partition de la déformation totale en une déformation élastique et une déformation plastique. Dans un cadre tridimensionnel général, elles sont reliées par la relation suivante :

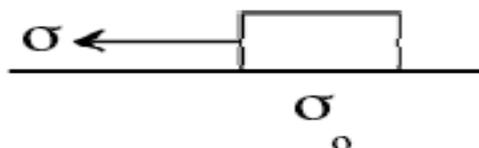
$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^p$$

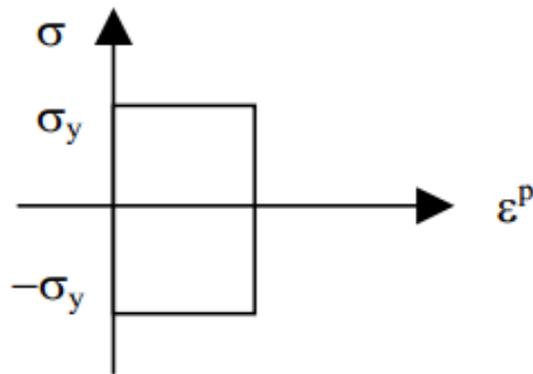
Où ε est le tenseur de déformation totale, ε^{el} le tenseur de déformation élastique et ε^p le tenseur de déformation plastique.

IV.1.3.1 Comportement rigide-parfaitement plastique

Modèle 1D :

Le modèle analogique est celui du patin à frottement sec. Pour pouvoir déplacer le patin il faut vaincre la force de frottement (σ_0) existante entre le patin et le plan de glissement. Une fois atteint ce seuil, le patin peut glisser. Si l'on supprime la force de traction alors que le patin glissait, il s'arrête sans bien sûr revenir à sa position initiale ; il y a donc irréversibilité.





a. Rigide–parfaitement plastique linéaire

$$\text{On a donc } \begin{cases} |\sigma| < \sigma_0 & \Rightarrow \dot{\varepsilon} = 0 \\ |\sigma| \geq \sigma_0 & \Rightarrow \dot{\varepsilon} \neq 0 \end{cases}$$

Le seuil peut aussi évoluer en fonction du glissement. On appelle *écrouissage* cette propriété. Un écrouissage négatif correspond à une chute de la contrainte durant le glissement. On qualifie les matériaux ayant ce type de comportement d'*adoucissants* et on parle d'adoucissement (*softening* en anglais). Le cas contraire (écrouissage positif) correspond aux matériaux dits *durcissants* et on parle de durcissement

(*hardening* en anglais). L'inéquation : $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0 \leq 0$

Est vérifiée à tout instant par l'état de contrainte, se nomme le *critère de plasticité*.

Généralisation 3D :

On utilise de la même façon une quantité scalaire dépendante de l'état de contrainte. Cette quantité devant être invariante par changement de référence, elle doit dépendre uniquement des contraintes principales, ou, ce qui revient au même, des invariants de

$$f(\sigma) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq 0$$

IV.1.3.2 Comportement élasto-plastique

- L'élasto-plasticité parfaite

Le modèle du patin précédent représente ce que l'on appelle un comportement rigide-plastique : il n'y a pas de déformation (corps rigide) tant que le seuil de plasticité n'est pas atteint ; une fois ce seuil atteint toute la déformation engendrée est irréversible.

Le comportement est élastique mais une déformation irréversible se développe si le seuil est atteint. L'érouissage ou durcissement est nul. Le plus simple des modèles analogues du comportement élasto-plastique est celui du patin et du ressort mis en série : (Fig. IV.1)

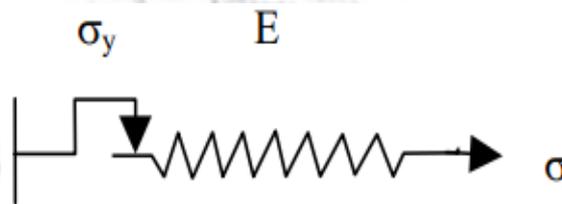
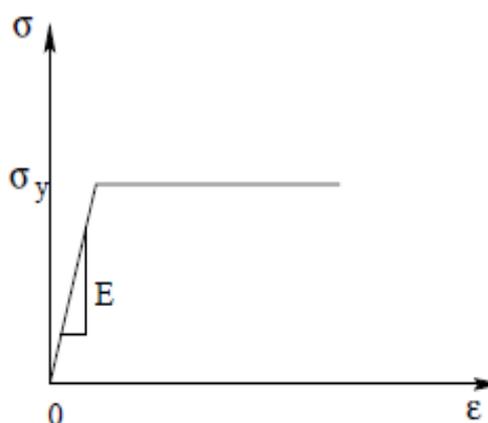


Fig. IV.1 Associations en série de patin et ressort (Saint-Venant)

Un comportement plus réaliste pour un solide est le comportement élasto-parfaitement plastique :



b. Élastique-parfaitement plastique linéaire

CHAPITRE IV

En tirant progressivement sur le ressort la contrainte augmente (le ressort se tend) et finit par atteindre le seuil. Le patin peut alors glisser de manière irréversible.

La déformation totale est la somme de la déformation du ressort (déformation élastique) et du patin (déformation plastique) ; quant à la contrainte elle reste proportionnelle à la déformation du ressort :

$$\text{Cas 1D : } \left\{ \begin{array}{l} |\sigma| - \sigma_0 \leq 0 \\ \sigma = E \varepsilon_e \\ \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \text{ et } \varepsilon_p^* = 0 \text{ si } (|\sigma| - \sigma_0 < 0) \text{ ou si } (|\sigma| - \sigma_0 = 0 \text{ et } \sigma \times \text{sign}(\sigma) < 0) \end{array} \right.$$

$$\text{Cas 3D : } \left\{ \begin{array}{l} f(\sigma) \leq 0 \\ \sigma = 2\mu \varepsilon_e + \lambda \text{tr}(\varepsilon_e) I \\ \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \text{ et } \varepsilon_p^* = 0 \text{ si } (f(\sigma) < 0) \text{ ou si } (f(\sigma) = 0 \text{ et } \dot{f}(\sigma) < 0) \end{array} \right.$$

- Le modèle est sans écrouissage, puisque le niveau de contrainte ne varie plus au sortir du domaine d'élasticité. Il n'y a pas d'énergie stockée au cours de la déformation, et la dissipation en chaleur est égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

- L'élasto-plasticité écrouissable

L'association en parallèle de la figure b correspond au comportement illustré en figure IV.2. Dans ce cas, l'écrouissage est linéaire. Il est dit cinématique, car dépendant de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élasto-plastique si l'on rajoute un ressort en série. La forme de la courbe dans le plan $\sigma - \varepsilon_p$ est due au fait que, lors de

CHAPITRE IV

l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut $X = H \varepsilon_p$. Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit $|\sigma - H \varepsilon_p|$, est égale à σ_y ($= \sigma_0$). Pour une déformation donnée, cette contrainte X est une contrainte interne qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

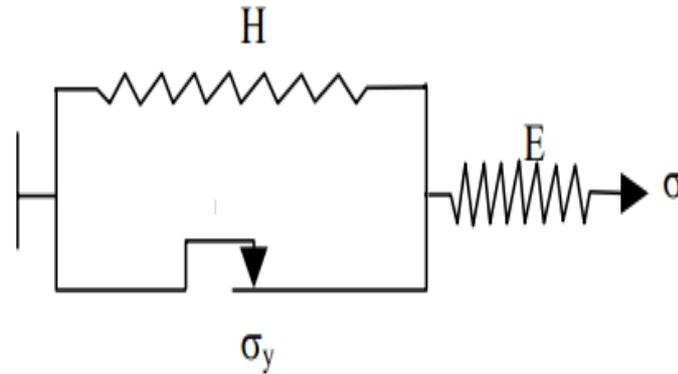
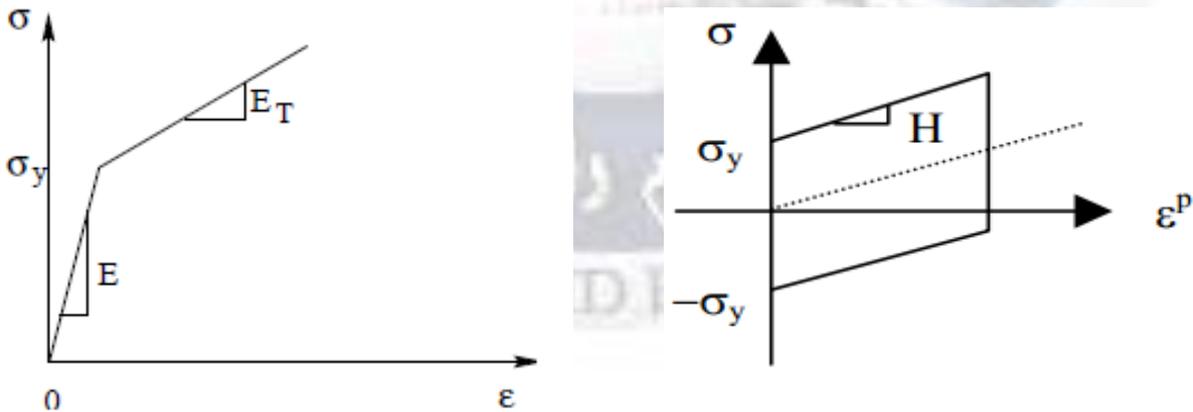


Fig. IV.2 Associations en parallèle de patin et ressort (Prager)

Un comportement plus réaliste pour un solide est le comportement élasto-plastique écrouissant : avec $E_T = d\sigma/d\varepsilon$ est module élasto-plastique. $E_T=0$ dans le cas d'un solide élasto-plastique parfait, $E_T= \text{Constant}$ dans le cas d'un solide élasto-plastique écrouissable.



c. Élastique–plastique écrouissable linéaire

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne. Elle s'écrit :

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois $f(\sigma, X) = 0$ et $f^*(\sigma, X) = 0$. Ceci conduit à la condition suivante :

$$\text{Cas 1D et 3D : } \begin{cases} \frac{\partial f(\sigma, X)^*}{\partial \sigma} \sigma + \frac{\partial f(\sigma, X)^*}{\partial X} X = 0 \\ \text{Signe}(\sigma - X)^* \sigma + \text{Signe}(\sigma - X)^* X = 0 \\ \sigma = X \text{ et finalement } \varepsilon_p^* = \sigma^* / H \end{cases}$$

Dans ce cas, la contrainte évolue au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée avec l'expression de la vitesse de déformation plastique, le cas où $H = 0$ redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique :

$$\varepsilon_p^* = \frac{E}{E + H} \varepsilon^*$$

Remarque

Sans rentrer plus en avant dans la théorie de la plasticité, signalons seulement que le problème ainsi posé n'est pas complet. Il y manque en effet une relation permettant de déterminer la déformation plastique en fonction de l'état de contrainte. Cela se fait par la donnée d'une fonction scalaire appelée potentiel plastique dont les dérivées par rapport aux contraintes donne la loi d'évolution du taux de déformation plastique.

CHAPITRE IV

IV.1.4 Critères de plasticité

IV.1.4.1 Critère de Von Mises $f(\sigma) = J_2(\sigma) - k \leq 0$

Où $J_2(\sigma)$ est le second invariant du déviateur des contraintes qui s'écrit en fonction des contraintes principales

$$J_2(\sigma) = \sqrt{3/2} \sqrt{(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2}$$

Où p est la pression moyenne $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$

IV.1.4.1 Critère de Tresca $f(\sigma) = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| - R \leq 0$

Où classiquement on a ordonné les contraintes principales. Ce critère indique que le plus grand des cercles de Mohr ne peut avoir un rayon dépassant une valeur de R .

Remarque :

Ces deux critères sont indépendants de la pression moyenne (ils ne dépendent que du déviateur). Les matériaux obéissants à ce type de critères ne peuvent plastifier dans un état de contrainte hydrostatique et ceci quelle que soit la valeur de la pression à laquelle ils sont soumis. Ils sont pour cette raison peu adaptés aux roches et aux sols. Ils conviennent par contre très bien aux métaux.

CHAPITRE IV

IV.2 VISCO-PLASTICITÉ LINÉAIRE EN HPP

IV.2.1 Décomposition de la déformation totale

Le tenseur symétrique des déformations ε est décomposé en trois parties:

- Une partie élastique ε_e fonction de la variation du tenseur de contrainte σ entre l'état actuel et l'état initial. En élasticité linéaire

$$\varepsilon_e = S \sigma$$

- Une partie de dilatation thermique ε_{th} fonction de la température actuelle T et de la température à l'état de référence T_0 . Elle s'écrit à l'aide d'un tenseur α , qui dépend éventuellement de la température, et qui est sphérique dans le cas des matériaux isotropes :

$$\varepsilon_{th} = \alpha (T - T_0)$$

- Une partie non élastique ε_{ne} , elle-même décomposée en une partie plastique ε_p et une partie viscoplastique ε_{vp} , (régies par des lois d'écoulement en élasto-plasticité et en élasto-visco-plasticité).

D'où:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{th} + \varepsilon_p + \varepsilon_{vp}$$

Cette dernière décomposition de la partie non élastique des déformations exprime le fait que, durant une transformation du matériau, divers mécanismes peuvent rentrer

CHAPITRE IV

en jeu conduisant à une dissipation de l'énergie (irréversibilité) et que, dans l'échelle des temps considérée, la viscosité de certains mécanismes peut être négligée (plasticité instantanée ϵ_p) alors que pour les autres le temps réel doit intervenir dans les vitesses (déformations viscoplastiques ϵ_{vp}). On n'a pas cité dans cette énumération les déformations de changement de phase, qui s'ajoutent aux précédentes lorsque le matériau est instable.

IV.2.2 Lois de Comportement visco-plastique

Les solides dits viscoplastiques regroupent les corps qui présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations et qui sous l'action d'une sollicitation tendent à s'écouler en fonction du temps (fluage).

IV.2.2.1 Comportement rigide-parfaitement visco-plastique

Comme le montre la figure IV.3, la vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte comme pour les fluides visqueux. $\sigma(\epsilon_{vp}^*)$

Le modèle de Norton est
$$\sigma = K_N (\epsilon_{vp}^*)^{1/N} \Rightarrow \epsilon_{vp}^* = \left(\frac{|\sigma|}{K_N} \right)^N \text{signe}(\sigma)$$

(η la viscosité, K_N et N les paramètres de Norton)

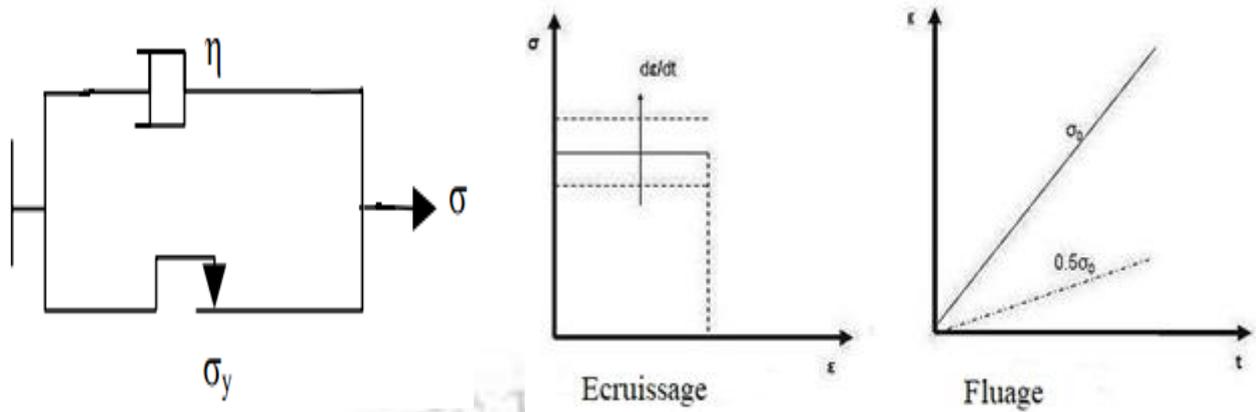


Fig. IV.3 *Modèle de Norton*

IV.2.2.2 Comportement élasto-visco-plastique

- L'élasto-visco-plasticité parfaite

Comme le montre la figure IV.4, l'élasticité n'est plus considérée comme négligeable mais la vitesse de déformation plastique ne dépend toujours que de la contrainte. Il n'y a pas d'influence de l'écroutissage.

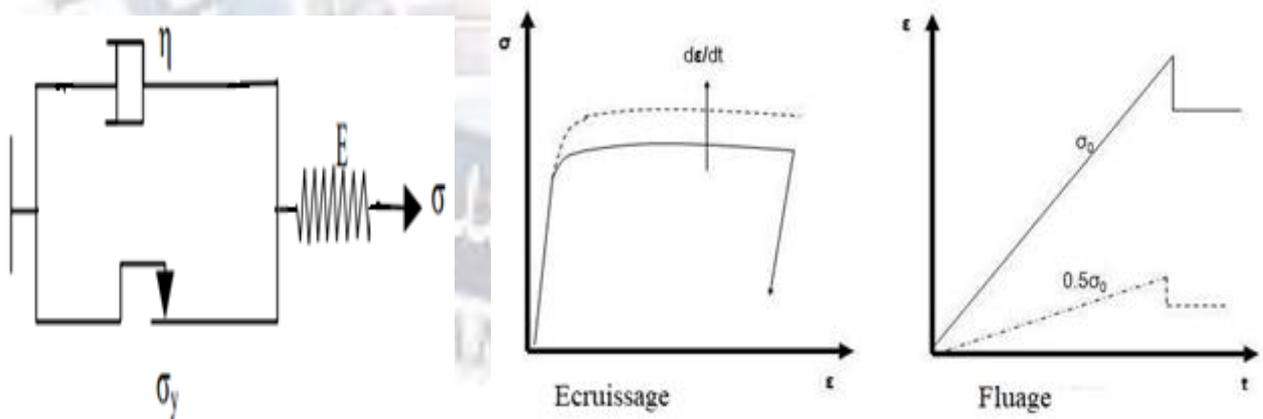


Fig. IV.4 *Modèle élasto-visco-plasticité parfaite*

$$|\sigma| < \sigma_s \longrightarrow \epsilon = \epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \sigma_s \longrightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_p \text{ et } \dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma)$$

CHAPITRE IV

- L'élasto-visco-plasticité écrouissable

La figure IV.5 montre que, en rajoutant un simple amortisseur, on passe d'un modèle plastique instantané à un modèle viscoplastique (modèle de Bingham généralisé). En relevant le ressort en série ($E \rightarrow \infty$), on obtient le modèle rigide viscoplastique. Le modèle n'aura pas d'écrouissage si on supprime le ressort en parallèle ($H=0$). La déformation élastique ϵ_e se lit aux bornes du ressort E, et la déformation viscoplastique ϵ_{vp} aux bornes de l'assemblage en parallèle. La détermination des équations de ce modèle s'effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

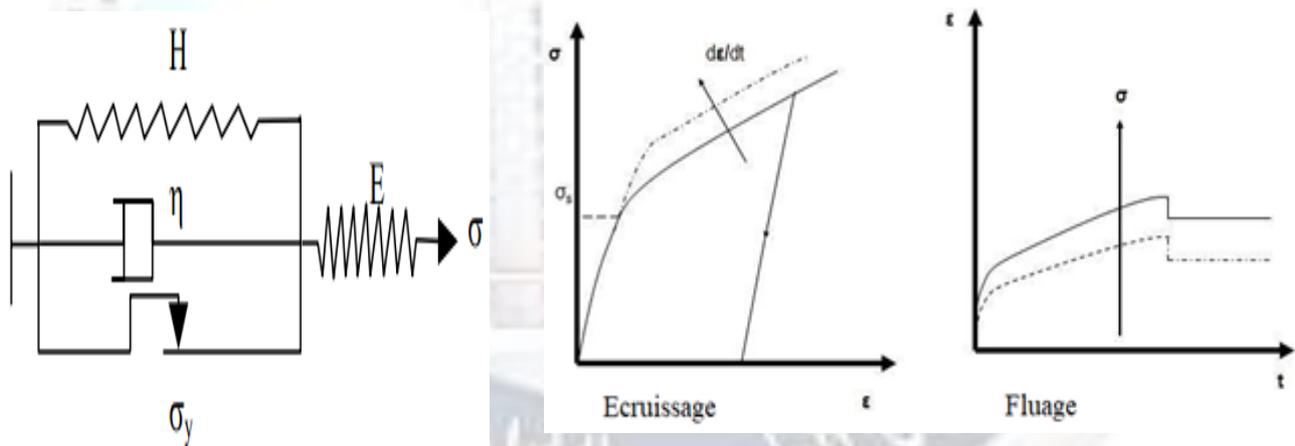


Fig. IV.5 *Modèle de Bingham*

$$X = H \epsilon_{vp}^* , \quad \sigma_v = \eta \dot{\epsilon}_{vp}^* , \quad \sigma_p \leq \sigma_y$$

Où X , σ_v et σ_p sont respectivement les contraintes dans le ressort H, dans l'amortisseur et dans le patin, et :

$$\sigma = X + \sigma_v + \sigma_p$$

CHAPITRE IV

Il y a donc comme pour le modèle plastique un domaine d'élasticité dont la frontière est atteinte lorsque $|\sigma_p| = \sigma_y$. On distingue alors trois régimes de fonctionnement, selon que la vitesse de déformation viscoplastique est nulle, positive et négative :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{vp}^* = 0 &\longrightarrow |\sigma_p| = |\sigma - H \varepsilon_{vp}| \leq \sigma_y \\ \varepsilon_{vp}^* > 0 &\longrightarrow |\sigma_p| = \sigma - H \varepsilon_{vp} - \eta \varepsilon_{vp}^* = \sigma_y \\ \varepsilon_{vp}^* < 0 &\longrightarrow |\sigma_p| = \sigma - H \varepsilon_{vp} - \eta \varepsilon_{vp}^* = -\sigma_y\end{aligned}$$

Le 1^{er} correspond à l'intérieur du domaine d'élasticité ($|\sigma_p| < \sigma_y$) ou à un état de décharge élastique ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $|\sigma_p^*| \leq 0$), les deux autres cas à de l'écoulement ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $|\sigma_p^*| = 0$).

CONCLUSION

En général, une augmentation de température sur un matériau engendre une agitation thermique des atomes et des phénomènes de diffusion; la vitesse de déformation augmente car le matériau se déforme plus facilement. Selon les valeurs de la contrainte exercée et de la température, le matériau adopte soit un comportement viscoélastique, soit un comportement viscoplastique, pouvant conduire à la rupture si la contrainte est maintenue trop longtemps. Pour les métaux et alliages, le fluage devient très important dès lors que la température est supérieure à la moitié de la température de fusion. Pour les polymères, il y a fluage, dès lors que la température augmente par rapport à la température ambiante habituelle. La déformation viscoplastique des polymères est irréversible.

CONCLUSION GENERALE

Dès la conception d'une structure, la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux mis en œuvre apparaît nécessaire. Dans la plupart des cas, l'ingénieur demande uniquement des valeurs de charges limites, au-delà desquelles se manifestent des phénomènes irréversibles (déformations plastiques, endommagement,...). En revanche, pour le calcul prévisionnel d'évolution de structures appelées à se déformer fortement, la compréhension des phénomènes reliant les différents paramètres mécaniques devient indispensable. Les études sur le comportement rhéologique sous grandes vitesses de sollicitations s'intègrent dans ce cadre.

La complexité des phénomènes mécaniques et matériaux, les durées très courtes des expériences (l'unité de temps est la microseconde) et la grande variété des matériaux concernés, rendent les approches expérimentales et théoriques délicates. L'optimisation des structures nécessite des simulations numériques de plus en plus précises. Ceci implique, entre autre, le développement de modèles rhéologiques de plus en plus réalistes et l'identification de paramètres intrinsèque au matériau.

Lors d'une sollicitation, un matériau peut réagir de différentes manières : par échauffement thermique, par déformation élastique, déformation plastique, par formation et croissance de microcavités ou de microfissure. On appelle modèle de comportement la relation qui relie la contrainte appliquée à la température, la déformation et la vitesse de déformation.