république Algérienne Démocratique et Populaire

Ministere de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran - Mohamed Boudiaf-

Faculté de Mathématiques et D'informatique

Département de mathématiques

Abdelkader Tami

Polycopié

Equations Différentielles Ordinaires

Cours et exercices d'applications

Année universitaire : 2016/2017

Table des matières

Préface

Ce polycopié est proposé aux étudiants des classes de mahématiques spéciales de la troisième année licence LMD (programme L3) des rappeles et des compléments de cours complets, ainsi que des exercices résolus la fin de chaque chapitre. Il pourra également intéresser les étudiants de deuxième année chimie, génie électrique et génie mécanique.
Je tiens à remercier toutes les presonnes qui m'ont aidé, Benabdallah Mehdi, Benaissa Fadila et Tlemcani Mounir pour la relecture de certains chapitres.
Je serais reconnaissant à tous les lecteurs qui me feront parvenir leurs remarques et suggestions afin que je puisse améliorer ce travail.

Introduction

Plusieurs phénomènes surtout en chimie, physique, mécanique, electricité,... sont modelisés par des équations différentielles
Par exemple :
1) L'équation du déplacement $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}x$, c'est une équation différentielle d'ordre 1.
2) En éléctricité, si on consider un circuit RLC, en fermant l'interrupteur au moment $t = 0$. Par les lois d'Ohm et Kirchhoff on trouve l'équation différentielle donnant la quantité du courant q à travers le condensateur C

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E.$$

Définition 0.0.1. *Une équation différentielle est une relation de la forme :*

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{0.1}$$

entre une variable x, une fonction y et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n.

Exemple 0.0.2.

1. $y' + y = 0$
2. $(y'')^2 - (y')^5 + 3y = 0$
3. $(y''')^2 + (y')^5 + 3y = x^2$

Définition 0.0.3. *On appelle ordre de l'équation différentielle (0.1) le degré de la dérivé le plus élevé, dans l'exemple précédent, on a*

1. *équation différentielle d'ordre 1*
2. *équation différentielle d'ordre 2*
3. *équation différentielle d'ordre 3*

Remarque 0.0.4. *Si la fonction inconnue est de deux (ou pluiseurs) variables $z = z(x, y)$ (respectivement $y = y(x, x_1, x_2, ..., x_n)$). D'où la relation entre x et y est les dérivées partielles $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx}$ est appelée equation aux dérivées partielles (EDP).*

Définition 0.0.5. *On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle (0.1) toute fonction $y = y(x)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, possédant des dérivées successives $y', y'', ..., y^n$ et vérifiant la relation (0.1).*

Exemple 0.0.6.

1. *Pour l'équation différentielle* $y''+y=0$ *(équation différentielle d'ordre 2) ; la fonction* $y_1 = \sin x$ *est une solution, puisque* $\sin x$ *est définie sur* $I = \mathbb{R}$ *et il existe* $y_1^{'} = \cos x$ *et* $y_1^{''} = -\sin x$ *et* $y_1^{''} + y_1 = 0$.
   De même $y_2 = \cos x$ *est aussi solution de l'équation donnée. De même* $y_3 = \sin x + \cos x$. *En générale* $y = a\sin x + b\cos x$ *est aussi solution où* a *et* b *sont deux constantes réelles. Cette dernière est appelée solution générale et les autres* $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ *sont des solutions particulières.*

2. *L'équation* $y' + y = 0$ *admet l'intégrale générale* $y = Ce^{-x}$, *les intégrales particulières* $y = e^{-x}$, $y = 2e^{-x}$,...

3. *L'équation* $(y')^2 - 4y = 0$ *admet l'intégrale générale* $y = (x+C)^2$, *les intégrales particulières sont* $y = x^2$, $y = (x+1)^2$ *et une solution singulière* $y = 0$.

Remarque 0.0.7.

1. *Résoudre (intégrer) une équation différentielle c'est de trouver toutes les solutions (intégrales) possibles.*

2. *La courbe représentative de la solution générale (respectivement particulière) est appelée courbe intégrale.*

Exemple 0.0.8 (Equation différentielle d'une famille de courbes à un paramètre)**.**
Une famille de courbes à un paramètre est définie par une équation :

$$f(x, y, \lambda) = 0. \tag{0.2}$$

Cette équation fait correspondre à chaque valeur de λ *une courbe* C_λ *de la famille. En dérivant (0.2), on obtient*

$$f_x^{'} + y'f_y^{'} = 0, \tag{0.3}$$

qui dépend en générale de λ *et par suite de* (C_λ). *En éliminant* λ *entre (0.2) et (0.3) on obtient une relation :*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{0.4}$$

c'est-à-dire une équation différentielle du premier ordre dite équation différentielle de la famille des courbes (C_λ) . *(0.2) est la solution générale de (0.4). Les courbes* (C_λ) *sont appelées courbes intégrales de (0.4).*
Les courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre (0.4) constituent une famille de courbes à un paramètre. Leur enveloppe (Γ) *si elle existe, est la courbe intégrale singulière de (0.4). Considérons par exemple les droites* Δ_λ *d'équation :*

$$y = \lambda x + \frac{\lambda^2}{2}, \tag{0.5}$$

en dérivant (0.5), on obtient :

$$y' = \lambda. \tag{0.6}$$

L'élimination de λ entre (0.5) et (0.6) donne

$$y = xy' + \frac{(y')^2}{2}, \tag{0.7}$$

(0.7) est l'équation différentielle de cette famille de droites. (0.5) est la solution générale de (0.7) qui admet l'intégrale singulière :

$$y = -\frac{x^2}{2} \quad (\Gamma). \tag{0.8}$$

Chapitre 1

Les équations différentielles d'ordre 1

Le but de ce premier chapitre est de faire quelques rappels du cours de première année sur les équations différentielles du premier ordre. On donner les techniques nécessaires pour la résolution de certaines équations relativement simples. Tout d'abord, on précise ce qu'on entend par "équations différentielles" et par solutions d'une équation donnée vérifiant certaines conditions initiales. En particulier, on étudiera les équations homogènes, de Bernoulli et de Ricatti.

Définition 1.0.1. *Une équation différentielle d'ordre 1 est toute relation de la forme*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

Remarque 1.0.2.

1. *Si on peut exprimer dans l'équation (1.1) y' en fonction de x et y, alors on obtient une équation différentielle appelée résoluble en y' de forme*

$$y' = f(x, y). \tag{1.2}$$

   Sinon dans le cas contraire l'équation (1.1) est dite non résoluble en y' (ou implicite).

2. *Il y en a plusieurs types d'équations différentielles d'ordre 1.*
   Les équations de la forme (1.2)

   (a) *Equations différentielles à variables séparables*
   (b) *Equations différentielles homogène*
   (c) *Equations différentielles linéaires*

   Les équations de la forme (1.1) : Equation de Bernoulli, Riccati, Lagrange, Clairaut,...

1.1 Type I : Equations différentielles à variables séparables

Définition 1.1.1. *On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme*

$$\phi(y)y' = \varphi(x), \tag{1.3}$$

où φ et ϕ sont des applications continues sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution : En remplaçant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ dans (1.3), on trouve

$$\phi(y)\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \quad \text{ou } \phi(y)dy = \varphi(x)dx, \tag{1.4}$$

on intégre (1.4) terme à terme pour obtenir ainsi la solution générale de l'équation (1.3) sous la forme

$$\int \phi(y)dy = \int \varphi(x)dx + C, \tag{1.5}$$

où C étant une constante arbitraire.

Exemple 1.1.2. *Intégrer l'équation suivante :*

$$x^3y' = e^{3y}. \tag{1.6}$$

On peut séparer les variables car $y' = \dfrac{dx}{dy}$ *; on obtient*

$$e^{-3y}dy = \frac{1}{x^3}dx$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{e^{-3y}}{3} = \frac{1}{2x^2} + C.$$

Donc

$$y = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{2x^2} + \tilde{C}\right|,$$

où $\tilde{C} \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1.3. *Intégrer l'équation suivante :*

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

On peut séparer les variables car $y' = \dfrac{dx}{dy}$ *; on obtient*

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2},$$

d'où

$$\overbrace{\arctan y = \arctan x + C}^{(G)}. \tag{1.7}$$

La solution de l'équation est donnée (implicitement) par la relation (G)*. Sinon, en prenant la tangente des deux membres de (1.7), on obtient une relation algébrique entre* x *et* y *:*

$$y = \frac{x + \tan C}{1 - x\tan C}. \tag{1.8}$$

1.2 Type II : Equations différentielles homogène

Définition 1.2.1. *On appelle équation homogène toute équation différentielle qui ne change pas lorsque l'on remplace x par λx et y par λy pour tout réel λ. Une équation homogène peut se mettre sous la forme $\phi(y', \frac{y}{x}) = 0$ et parfois sous la forme*

$$y' = f(\frac{y}{x}). \tag{1.9}$$

où f est une fonction homogène de degré zéro (c'est-à-dire $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$).

Rappel : f est dite homogène de degré m si $\forall (x, y) \in D_f$ on a $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Méthode de résolution : Nous nous bornerons aux équations homogènes que l'on peut mettre sous la forme (1.9). Dans ce cas, on pose $\frac{y}{x} = t$ ou $y = tx$ (t est donc une fonction de x). On en déduit

$$y' = t'x + t.$$

(1.9) devient :

$$t'x + t = f(t),$$

ou

$$t'x = f(t) - t, \quad \frac{dt}{dx}x = f(t) - t,$$

ou, en séparant les variables :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t},$$

et, en intégrant :

$$\ln|x| = \int \frac{dt}{f(t) - t} + \ln K,$$

$\ln K$ étant une constante arbitraire. D'où

$$x = CF(t),$$

avec

$$F(t) = exp(\int \frac{dt}{f(t) - t}) \text{ et } C = \pm K.$$

Par conséquent, la solution générale de (1.9) est :

$$y = CtF(t).$$

Exemple 1.2.2. *Intégrer l'équation :*

$$y' = \frac{x + y}{x - y} \tag{1.10}$$

On a bien une équation homogène. Posons $y = tx$, d'où $y' = t'x + t$. En substituant et simplifiant par x, il vient :

$$t'x + t = \frac{1 + t}{1 - t}, \quad ou \;\; t'x = \frac{1 + t^2}{1 - t}.$$

Séparons les variables :

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - t)dt}{1 + t^2} = \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{tdt}{1 + t^2}.$$

Intégrant terme à terme :

$$\ln|x| = \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \ln|C| \quad ou \;\; \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \arctan t + \ln|C|.$$

Mais, $t = \dfrac{y}{x}$*, d'où :*

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+(\frac{y}{x})^2) = \ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

Conclusion. La solution générale de (1.10) est donnée (implicitement) par :

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} + K,$$

où $K = \ln|C|$ *est une constante.*

Exemple 1.2.3. *Intégrer l'équation :*

$$(x^2-y^2)y' = 2xy \tag{1.11}$$

On a successivement, en posant $y = tx$*, d'où* $y' = t'x + t$ *:*

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \quad t'x + t = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t'x = \frac{t^3+t}{1-t^2};$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-t^2)dt}{t(1+t^2)} = \frac{dt}{t} - \frac{2tdt}{1+t^2}.$$

En intégrant terme à terme, il vient :

$$\ln|x| = \ln|t| - \ln(1+t^2) + \ln|C|,$$

ou :

$$x(t^2+1) = Ct;$$

en remplaçant t par $\dfrac{y}{x}$*, il vient finalement :*

$$x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

1.3 Type III : Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont les plus intéressantes car on les rencontre en physique (électricité, mécanique,...), ce sont des équations où y et y' sont du 1er degré.
Forme générale est :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{1.12}$$

où a, b et c sont des fonctions en x.

Remarque 1.3.1.

1. *Si $a(x) \neq 0$, alors (1.12) est dite normalisée. Dans ce cas (1.12) se ramène à l'équation :*
$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.13}$$
où $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ et $q(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}$.
2. *Si $c(x) = 0$; ou bien $q(x) = 0$, alors l'équation obtenue sera homogène (de type 1 et 2) appelée équation linéaire homogène*
$$a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ ou bien } y' + p(x)y = 0 \tag{1.14}$$

Méthode de résolution :
On peut utiliser la transformation de Laplace, aussi les séries entières,..., etc
On va appliquer la méthode classique de Lagrange : méthode de variation de la constante (MVC).
Pour intégrer (1.13), intégrons l'équation sans deuxième membre (1.14) en séparant les variables :
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$
d'où
$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$
et, en intégrant :
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|.$$
En posant
$$u(x) = \int p(x)dx,$$
on a la solution de (1.14) :
$$y = Ce^{-u(x)} \tag{1.15}$$
Cherchons une solution de (1.13) de la même que (1.15), mais en considérant C comme une fonction de x. En dérivant (1.15), il vient ;
$$y' = C'e^{-u(x)} - Ce^{-u(x)}u'.$$
Mais
$$u' = p(x), \quad y' = C'e^{-u(x)} - Ce^{-u(x)}p(x).$$
En portant dans (1.13), il vient :
$$C'e^{-u(x)} - Ce^{-u(x)}p(x) + Ce^{-u(x)}p(x) = q(x),$$
ou
$$C' = q(x)e^{u(x)} \tag{1.16}$$
(1.16) permet de calculer $C(x)$; en intégrant on obtient, en effet :
$$C = \int q(x)e^{u(x)} + C_1.$$
En remplaçant C par sa valeur dans (1.15), on obtient l'intégrale générale de (1.13) :
$$y = e^{-u(x)}(\int q(x)e^{u(x)}dx + C_1),$$
avec
$$u(x) = \int p(x)dx, \text{ et } C_1 \text{ est une constante réelle.}$$

Exemple 1.3.2. *Intégrer l'équation*

$$xy' - y = x^2. \tag{1.17}$$

Si $xy' - y = 0$*, on a :*

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

ou, en intégrant :

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \quad d'où \quad y = Cx$$

Cherchons une solution de (1.17) de la forme $y = C(x)x$*. On aura :*

$$y' = C'(x)x + C(x),$$

et, en portant dans (1.17) :

$$C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x^2 \quad ou \quad C'(x) = 1 \quad et \quad C(x) = x + C_1,$$

d'où la solution générale de (1.17) est

$$y = x(x + C_1),$$

où C_1 *est une constante réelle.*

Exemple 1.3.3. *Intégrons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$y' + \underbrace{2xy}_{p(x)} = \underbrace{2xe^{-x^2}}_{q(x)} \tag{1.18}$$

Si $y' + 2xy = 0$*, on a*

$$\frac{dy}{y} = -2xdx,$$

ou, en intégrant :

$$\ln|y| = -x^2 + C \quad d'où\ y = C_1e^{-x^2} \quad (C_1 = \pm e^C)$$

Cherchons une solution de (1.18) de la forme $y = C_1(x)e^{-x^2}$*. On aura :*

$$y' = C_1'(x)e^{-x^2} - 2xC_1(x)e^{-x^2},$$

*et, en portant dans (**??**) :*

$$C_1'(x)e^{-x^2} - 2xC_1(x)e^{-x^2} + 2xC_1(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \quad ou \quad C_1'(x) = 2x \quad et \quad C_1(x) = x^2 + C_2,$$

d'où la solution générale de (1.18) est

$$y = (x^2 + C_2)e^{-x^2},$$

où C_2 *est une constante réelle.*

1.3.1 Propriétés des équations linéaires.

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

1. Si y_1 est une solution de (1.19) :
$$y' + p(x)y = 0. \tag{1.19}$$
Cy_1 est aussi solution de (1.19).

2. Si Y est une solution particulière de (1.20) :
$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.20}$$
et y_1 est une solution de (1.19) alors
$$y = Cy_1 + Y,$$
est la solution générale de (1.20).
Pour intégrer (1.20), il suffit d'ajouter à l'intégrale générale de (1.19) une intégrale générale particulière de (1.20). Si, par exemple, on a l'équation :
$$y' \sin^2 x - y \tan x = \tan x; \tag{1.21}$$
$y_1 = \tan x$ est une solution de (1.22) :
$$y' \sin^2 x - y \tan x = 0, \tag{1.22}$$
et $Y = -1$ est solution particulière de (1.21). On a donc l'intégrale générale :
$$y = C_1 \tan x - 1.$$

Remarque 1.3.4. *Par fois l'équation non linéaire en y mais elle linéaire en $x = x(y)$*

Exemple 1.3.5. *On considère l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$ (voir l'exercice 1.12).*

1.4 Type IV : Equation de Jacob Bernoulli

Forme générale est :
$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{1.23}$$
où $m \in \mathbb{R}$, p et q sont des fonctions en x.
Si $m = 0$ ou $m = 1$, on se ramène à l'équation linéaire.
Méthode de résolution :
Elle se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en divisant par y^m et en posant : $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$, car
$$z' = (1-m)\frac{y'}{y^m}$$
et, en portant dans (1.23) puis en simplifiant :
$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x) \tag{1.24}$$
D'où la solution générale de (1.23) est
$$y = \frac{1}{\sqrt[(m-1)]{z}},$$
où z est la solution générale de (1.24).

Exemple 1.4.1. *Intégrer l'équation de Bernoulli suivante :*

$$y' \underbrace{-x}_{p(x)} y = \underbrace{x}_{q(x)} y^3 \tag{1.25}$$

Divisons par y^3*, on obtient* $\frac{y'}{y^3} - x\frac{1}{y^2} = -x$*, puis on fait un changement de variable* $z = \frac{1}{y^2}$*, cela donnerait*

$$z' = -2y^{-3}y'.$$

En remplaçant dans (1.25) on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 1,

$$z' + 2xz = 2x \tag{1.26}$$

La résolution de (1.26) donne

$$z = 1 + Ce^{-x^2},$$

où $C \in \mathbb{R}$.
La solution générale de (1.25) est donc

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{z}} \text{ où } y = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + Ce^{-x^2}}},$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.4.2. *Il existe d'équation de Bernoulli en* $x = x(y)$.

1.5 Type V : Equation différentielle aux différentielles totales (EDT)

Une équation différentielle de la forme

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1.27}$$

s'appelle équation aux différentielles totales si son premier membre représente une différentielle totale d'une certaine fonction $U(x, y)$, c'est-à-dire si

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Théorème 1.5.1. *Pour que l'équation (1.27) soit une équation aux différentielle totale, il faut et il suffit que dans un certain domaine D de variation des variables x et y soit satisfaite la condition suivante :*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.28}$$

L'intégrale générale de l'équation (1.27) est de la forme $U(x, y) = C$; où $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.5.2. *Résoudre l'équation*

$$(\sin(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy = 0. \tag{1.29}$$

Vérifions si cette équation est une équation aux différentielle totale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \end{cases}$$

si bien que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x},$$

c'est-à-dire que la condition (1.28) est satisfaite. Ainsi l'équation donnée est aux différentielles totales et

$$\begin{cases} M = \dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy), \\ N = \dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(xy), \end{cases}$$

donc,

$$U(x,y) = \int x^2\cos(xy)dy = x^2\int \cos(xy)dy = x\sin(xy) + \varphi(x),$$

où φ *est une fonction indéterminée pour le moment. La dérivée partielle* $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ *de la fonction* U *doit égale* $\sin(xy) + xy\cos(xy)$, *ce qui donne*

$$\sin(xy) + xy\cos(xy) + \varphi'(x) = \sin(xy) + xy\cos(xy),$$

d'où

$$\varphi'(x) = 0 \quad \textit{si bien que } \varphi(x) = C.$$

Ainsi

$$U(x,y) = x\sin(xy) + C.$$

La solution générale de (1.29) est donnée implicitement par la relation :

$$x\sin(xy) = C; \ \textit{ où } C \textit{ est une constante réelle.}$$

Exemple 1.5.3. *Résoudre l'équation différentielle*

$$\underbrace{(3x^2 + 6xy^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(6x^2y + 4y^3)}_{N(x,y)}dy = 0. \tag{1.30}$$

Ici,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \ \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

de sorte que la condition (1.28) est satisfaite et donc, l'équation considérée est une équation aux différentielles totales. Elle peut être facilement ramenée à la forme $dU = 0$ *par le groupement direct des ses termes. A cet effet, écrivons-la sous la forme*

$$6xy^2dx + 6x^2ydy + 3x^2dx + 4y^3dy = 0.$$

Il est évident que

$$6xy^2dx + 6x^2ydy = 3xy(2ydx + 2xdy) = 3d((xy)^2), \ 3x^2dx = d(x^3), \ 4y^3dy = d(y^4).$$

L'équation (1.30) peut donc se mettre sous la forme

$$3d((xy)^2) + d(x^3) + d(y^4) = 0,$$

ou

$$d(3(xy)^2 + x^3 + y^4) = 0.$$

Par suite la solution générale de (1.30) est donnée implicitement par la relation :

$$3(xy)^2 + x^3 + y^4 = C; \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

1.6 Type VI : Equation différentielle à facteur intégrant

Dans certains cas où l'équation (1.27) n'est pas aux différentielles totales, on arrive parfois à trouver une fonction $\mu(x, y)$ telle que le premier membre de l'équation (1.27) se transforme en une différentielle totale après la multiplication par cette fonction

$$dU = \mu M dx + \mu N dy.$$

Une telle fonction $\mu(x, y)$ s'appelle facteur intégrant. Par la définition même du facteur intégrant on a

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

ou

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = (\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})\mu,$$

d'où

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.31}$$

Pour déterminer le facteur intégrant nous avons obtenu une équation aux dérivées partielles. Signalons quelques cas particuliers où on parvient à trouver assez facilement la solution de l'équation (1.31), c'est-à-dire le facteur intégrant.

1. si $\mu = \mu(x)$, alors $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ et l'équation (1.31) devient

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x). \tag{1.32}$$

D'où

$$\ln \mu(x) = \int \varphi(x) dx.$$

Pour qu'il existe un facteur intégrant indépendant de y, il faut et il suffit que le second membre de l'équation (1.32) soit fonction de la seule variable x. Dans un tel cas $\ln \mu$ s'obtient par une quadrature.

Exemple 1.6.1. *Résoudre l'équation*

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0 \tag{1.33}$$

On a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -2y,$$

donc elle est de type 6. On calcule

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x} = \varphi(x),$$

alors

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x},\ \ln|\mu(x)| = -2\int \frac{dx}{x},\ \ln|\mu(x)| = \ln(x^{-2}),$$

et par conséquent le facteur intégrant est

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

D'où l'équation

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}dx - \frac{2y}{x}dy = 0,$$

est une équation aux différentielles totales. Son premier membre peut être mis sous la forme

$$\frac{dx}{x} - \frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0, \quad d'où\ d(\ln|x| - \frac{y^2}{x}) = 0,$$

et la solution générale de (1.33) est

$$x = Ce^{\frac{y^2}{x}} \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. De façon analogue si μ dépend de y uniquement ($\mu(x,y) = \mu(y)$), alors

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \psi(y),$$

et

$$\ln \mu(y) = \int \psi(y) dy.$$

Exemple 1.6.2. *Voir le cas 4 exercice 1.13.*

1.7 Type VII : Equations différentielles non résolues par rapport à la dérivée

1.7.1 Equations du premier ordre de degré n en y

Forme générale est :

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + ... + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0,$$

avec n le degré de l'équation et $a_k(x,y)$ sont des fonctions ($k = 1, ..., n$).
Méthode de résolution :
On pose $y' = p$ et on trouve une équation algébrique en p

$$p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n = 0$$

Exemple 1.7.1. *Résoudre l'équation*

$$y(y')^2 + (x-y)y' - x = 0 \tag{1.34}$$

Posons $y' = p$, où p est un paramètre ; il vient

$$yp^2 + (x-y)p - x = 0 \tag{1.35}$$

L'équation (1.35) admet deux racines

$$\begin{cases} p = -\dfrac{x}{y} \\ ou \\ p = 1 \end{cases}$$

1. *Si $p = y' = 1$ alors $y = x + C_1$*

2. *Si $p = y' = -\dfrac{x}{y}$ alors $\dfrac{1}{2}y^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_2$ ou $y^2 = -x^2 + C_3$ ($C_3 = 2C_2$).*

L'ensemble des solutions de l'équation (1.34) est

$$y = x + C_1, \quad y^2 = -x^2 + C_3,$$

où C_1 et C_3 sont des constantes réelles.

Remarque 1.7.2. *Parfois on arrive pas à exprimer $p(= y')$ explicitement. D'où on utilise les fonctions implicites. Illustrons ce procédé par l'exemple suivant :*

Exemple 1.7.3. *Résoudre l'équation*

$$y = 2(y')^2 + 3(y')^3 \tag{1.36}$$

Posons $y' = p$ et on remplace dans (1.36), il vient

$$y = 2p^2 + 3p^3 \tag{1.37}$$

En dérivant (1.37), on obtient

$$y' = p = 4p\frac{dp}{dx} + 9p^2\frac{dp}{dx} \quad ou\ (4+9p)\frac{dp}{dx} = 1 \text{ (équation différentielle à variables séparables).} \tag{1.38}$$

La résolution de cette équation donne

$$x = 4p + \frac{9}{4}p^2 - C \tag{1.39}$$

où K est une constante réelle.
La solution de (1.36) est donné (implicitement) par (1.37) et (1.39).

1.7.2 Equations de la forme $f(y, y') = 0$ et $f(x, y') = 0$.

Si les équations $f(y, y') = 0$ et $f(x, y') = 0$ sont facilement résolubles par rapport à y', leurs résolution donne des équations à variables séparables.
Considérons des cas où ces équations ne sont pas résolubles par rapport à y'.

A) L'équation de la forme $f(y, y') = 0$ est résoluble par rapport à y :

$$y = \varphi(y').$$

Posons $y' = p$, alors $y = \varphi(p)$. En différentiant cette équation et en remplaçant dy par pdx, on obtient

$$pdx = \varphi'(p)dp,$$

d'où

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}dp \quad \text{et} \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp + C.$$

On obtient la solution générale de l'équation donnée sous forme paramétrique

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp + C, \quad y = \varphi(p). \tag{1.40}$$

Exemple 1.7.4. *Résoudre l'équation*

$$y = (y')^2 \sin y'. \tag{1.41}$$

Posons $y' = p$, *d'où* $y = p^2 \sin p$. *On en déduit :*

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad dx = \frac{dy}{p}.$$

Mais

$$dy = (2p \sin p + p^2 \cos p)dp;$$

on a donc :

$$dx = (2 \sin p + \cos p)dp,$$

et

$$x = -2 \cos p + \sin p + C.$$

La solution générale sera

$$y = p^2 \sin p, \quad x = -2 \cos p + \sin p + C.$$

B) Si l'équation de la forme $f(y, y') = 0$ n'est pas résoluble (ou est difficilement résoluble) tant par rapport à y que par rapport à y', mais admet une expression de y et y' par certain paramètre t :

$$y = \varphi(t), \quad p = \phi(t) \quad (p = \frac{dy}{dx}),$$

donc on procède comme suit. On a $dy = pdx = \phi(t)dx$ d'une part. D'autre part on a $y' = \varphi'(t)dt$ de sorte que $\phi(t)dx = \varphi'(t)dt$ et $dx = \dfrac{\varphi'(t)}{\phi(t)}dt$; d'où

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\phi(t)}dt.$$

Ainsi, on obtient la solution générale de l'équation différentielle donnée sous forme paramétrique

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\phi(t)}dt, \quad y = \varphi(t).$$

Exemple 1.7.5. *Résoudre l'équation*

$$y^2 + (y')^2 = 1.$$

Posons $y = \sin t$, $y' = p = \cos t$,

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\cos t}{\cos t} dt = dt.$$

D'où

$$x = \int dt = t + C;$$

et la solution générale est

$$x = t + C, \qquad y = \sin t.$$

C) Equation de la forme $f(x, y') = 0$. Supposons que cette équation soit résoluble par rapport à x :

$$x = \varphi(y').$$

Posons $y' = p$, il vient $dx = \varphi'(p)dp$. Mais $dx = \dfrac{dy}{p}$ et, suite,

$$\frac{dy}{p} = \varphi'(p)dp,$$

si bien que

$$dy = p\varphi'(p)dp \quad \text{et} \quad y = \int p\varphi'(p)dp + C,$$

qui est la solution générale de l'équation sous forme paramétrique.

Exemple 1.7.6. *Résoudre l'équation*

$$a\frac{dy}{dx} + b(\frac{dy}{dx})^2 = x.$$

Posons $\dfrac{dy}{dx} = p$, alors

$$x = ap + bp^2, \qquad dx = adp + 2bdp,$$

$$dy = pdx = apdp + 2bp^2 dp, \quad y = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2}{3}bp^3 + C.$$

Finalement,

$$x = ap + bp^2, \quad y = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2}{3}bp^3 + C.$$

1.8 Type VIII : Equation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre de Lagrange

Définition 1.8.1. *On appelle équation de Lagrange toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1.42}$$

où φ et ψ sont des applications continûment dérivable sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution :

On pose $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$. L'équation (1.42) devient

$$y = x(p)\varphi(p) + \psi(p), \tag{1.43}$$

On la dérive par rapport à p :

$$\frac{dy}{dp} = x'(p)\varphi(p) + x(p)\varphi'(p) + \psi'(p),$$

or

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dp} = px'(p).$$

Donc

$$px'(p) = x'(p)\varphi(p) + x(p)\varphi'(p) + \psi'(p) \quad \text{ou} \quad (p - \varphi(p))x'(p) - x(p)\varphi'(p) = \psi'(p), \tag{1.44}$$

on ramène l'équation (1.43) à une équation linéaire de premier ordre en prenant pour la variable p et pour la fonction x. En recherchant la solution de (1.44) $x = r(p, C)$, on obtient la solution générale de l'équation (1.42) sous forme paramétrique :

$$x = r(p, C), \quad y = r(p, C)\varphi(p) + \phi(p) \;\; (p \text{ est un paramètre}).$$

Exemple 1.8.2. *Résoudre l'équation*

$$xy' + y + (y')^2 = 0. \tag{1.45}$$

On pose $y' = p$. L'équation (1.45) devient

$$y = -px(p) - p^2.$$

D'où

$$-x(p) - px'(p) - 2p = \frac{dy}{dp} = px'(p) \quad \text{et} \;\; 2px'(p) + x(p) = -2p.$$

Nous avons obtenu une équation du premier ordre, linéaire en x, en la résolvant, on a

$$x = \frac{C}{\sqrt{|p|}} - \frac{2}{3}p \;\text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

En portant la valeur trouvé de x dans l'expression de y, on obtient en définitive

$$x = \frac{C}{\sqrt{|p|}} - \frac{2}{3}p, \quad y = -p\frac{C}{\sqrt{|p|}} - \frac{1}{3}p^2 \;\text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

1.9 Type IX : Equation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre de Clairaut

Définition 1.9.1. *On appelle équation de Clairaut toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :*

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{1.46}$$

où φ est une application continûment dérivable sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution : La méthode de sa résolution est la même que celle utilisée pour l'équation de Lagrange. La solution générale de l'équation de Clairaut est de la forme

$$y = Cx + \varphi(C). \tag{1.47}$$

Exemple 1.9.2. *Résoudre l'équation*

$$y = xy' + \frac{y'}{y'+1}, \tag{1.48}$$

sur $]-\infty; 0[$.
On pose $y' = p$. *L'équation (1.48) devient*

$$y = xp + \frac{p}{P+1}.$$

D'où

$$y' = xp' + p + \frac{p'(p+1) - pp'}{(P+1)^2} = p.$$

Donc

$$p'(x + \frac{1}{(t+1)^2}) = 0.$$

1. *Si* $p' = 0$, *alors* $p = C$ *avec* $C \in \mathbb{R}$.
   D'où
   $$y = Cx + \frac{C}{C+1} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$
2. $x + \frac{1}{(t+1)^2} = 0$, *alors* $p = \frac{1}{\sqrt{-x}} - 1$.
   D'où
   $$y = xp + \frac{p}{p+1} = -\sqrt{-x} - x + \frac{\frac{1}{\sqrt{-x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{-x}}} = -2\sqrt{-x} - x + 1.$$

1.10 Type X : Equation différentielle de Riccati

Définition 1.10.1. *On appelle équation de Riccati toute équation qui peut se mettre sous la forme :*

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0, \tag{1.49}$$

où $a(x)$, $b(x)$ *et* $c(x)$ *sont des fonctions continues sur des intervalles à préciser. Si les coefficients* a, b *et* c *dans l'équation de Riccati sont constants, l'équation admet la séparation des variables et on obtient tout de suite son intégrale générale*

$$C_1 - x = \int \frac{dy}{ay^2 + by + c}.$$

Remarque 1.10.2.

1. *Si l'on connaît une solution particulière quelconque* $y_1(x)$ *de l'équation (1.49), sa solution générale peut être obtenue par des quadratures.*
   En effet, posons
   $$y = y_1(x) + z(x), \tag{1.50}$$

où $z(x)$ est une nouvelle fonction inconnue. En portant (1.50) dans (1.49), on trouve

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + a(x)(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + b(x)(y_1 + z) + c(x) = 0,$$

d'où compte tenu du fait que $y_1(x)$ est solution de (1.49), on obtient

$$\frac{dz}{dx} + a(x)(2y_1 z + z^2) + b(x)z = 0,$$

ou

$$\frac{dz}{dx} + a(x)z^2 + [2a(x)y_1 + b(x)]z = 0 \tag{1.51}$$

L'équation (1.51) est un cas particulière de l'équation de Bernoulli.

Exemple 1.10.3. *Résoudre l'équation de Riccati*

$$y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x, \tag{1.52}$$

connaissant l'une des ses solution particulière $y_1 = e^x$.
Posons $y = e^x + z(x)$ et portant dans l'équation (1.52), il vient

$$\frac{dz}{dx} = z^2,$$

d'où

$$-\frac{1}{z} = x - C, \quad ou\ z = \frac{1}{C - x}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation (1.52) est

$$y = e^x + \frac{1}{C - x}.$$

Remarque 1.10.4. *Au lieu de la substitution (1.50) il s'avère parfois plus pratique d'effectuer la substitution*

$$y = y_1(x) + \frac{1}{z(x)},$$

qui ramène tout de suite l'équation de Riccati (1.49) à l'équation linéaire

$$z'(x) - (2a(x)y_1(x) + b(x))z(x) = a(x).$$

Exemple 1.10.5. *Résoudre l'équation de Riccati suivante :*

$$2x^2y' = (x - 1)(y^2 - x^2) + 2xy \quad sur\ ]0; +\infty[, \tag{1.53}$$

connaissant l'une de ses solutions particulières $y_1 = x$.
On peut mettre l'équation (1.53) sous la forme :

$$y' = \frac{x - 1}{2x^2}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{x - 1}{2}. \tag{1.54}$$

On pose $y = x + \frac{1}{z}$ où z est une fonction qui ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$.
On a $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ et portant dans l'équation (1.54), il vient

$$z' + z = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$$

d'où
$$z = Ce^{-x} - \frac{1}{2x}$$
Ainsi la solution générale de l'équation (1.54) est
$$y = x + \frac{1}{Ce^{-x} - \frac{1}{2x}} = \frac{2Cx^2e^{-x} + x}{2Cxe^{-x} - 1}.$$

2. *Si l'on connaît deux solutions particulières de l'équation (1.49), son intégrale générale s'obtient par une seule quadrature.*
Soient données deux solutions particulières $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de de l'équation (1.49). En utilisant le fait qu'on on l'identité
$$\frac{dy_1}{dx} = -a(x)y_1^2 - b(x)y_1 - c(x),$$
représentons l'équation (1.49) sous la forme
$$\frac{1}{y-y_1}\frac{d(y-y_1)}{dx} = -a(x)(y+y_1) - b(x),$$
ou encore
$$\frac{d}{dx}[\ln(y-y_1)] = -a(x)(y+y_1) - b(x). \qquad (1.55)$$
En opérant d'une manière analogue, on trouve pour la deuxième solution particulière $y_2(x)$
$$\frac{d}{dx}[\ln(y-y_2)] = -a(x)(y+y_2) - b(x). \qquad (1.56)$$
En soustrayant l'égalité (1.56) de l'égalité (1.55), on obtient
$$\frac{d}{dx}[\ln\frac{y-y_1}{y-y_2}] = a(x)(y_2-y_1),$$
d'où
$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = Ce^{\int a(x)(y_2(x)-y_1(x))dx}. \qquad (1.57)$$

Exemple 1.10.6. *L'équation*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{m^2}{x^4} - y^2, \quad m = const, \qquad (1.58)$$
a des solutions particulières
$$y_1 = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2}, \quad y_2 = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2};$$
En utilisant la formule (1.57), on obtient l'intégrale générale de l'équation (1.58)
$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = Ce^{\int \frac{-2m}{x^2}dx}, \quad d'où \;\; \frac{x^2y - x - m}{x^2y - x + m} = Ce^{\frac{2m}{x}}.$$

1.11 Exercices du chapitre

Exercice 1.12. *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

1. $ydx - xdy = 0$
2. $d\rho + \rho \tan\theta d\theta = 0$
3. $(t - s)dt + tds = 0$
4. $y' - 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$
5. $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$
6. $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$
7. $y' \sin^2 x - y \tan x = \tan x$

Solutions.

1. On peut séparer les variables, on obtient

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}. \tag{1.59}$$

En intégrant (1.59), on obtient

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \text{ ou } |y| = e^K |x|$$

Solution générale de de l'équation donnée est donc :

$$y = Cx;\ C = \pm e^K$$

2. L'équation donnée est une équation différentielle à variables séparables.
On a donc :

$$d\rho + \rho \tan\theta d\theta = 0 \ \text{ ou } \ \frac{d\rho}{\rho} = -\tan\theta d\theta. \tag{1.60}$$

En intégrant (1.60), on obtient

$$|\rho| = e^K \frac{1}{|\sin\theta|}$$

Solution générale de l'équation donnée est donc :

$$\rho(\theta) = \frac{C}{\sin\theta};\ C = \pm e^K$$

3. On a bien une équation homogène, car

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{t}{t-s} = \frac{\frac{t}{s}}{1 - \frac{t}{s}}. \tag{1.61}$$

Posons $\lambda = \dfrac{t}{s}$ ou $t = \lambda s$. Alors $t' = \lambda' s + \lambda$. En portant les expression de t et t' dans l'équation (1.61), on obtient :

$$\frac{d\lambda}{ds} s^2(\lambda - 1) = -\lambda^2 s \tag{1.62}$$

(1.62) est une équation différentielle à variables séparables. Intégrons, il vient

$$\lambda\, s = \pm e^{-\frac{1}{\lambda}+K}$$

D'où la solution générale de l'équation donnée est $t = \pm e^{-\frac{s}{t}+K} = Ce^{-\frac{s}{t}};\ C = \pm e^K$.

4. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Si

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0, \tag{1.63}$$

alors $\ln|y(x)| = 2\ln|x| + K$, ce qui conduit à la solution générale de (1.63) :

$$y = Cx^2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution de l'équation initiale de la forme $y(x) = C(x)x^2$. On aura :

$$y'(x) = C'(x)x^2 + 2C(x)x,$$

et, en portant dans l'équation initiale

$$C'(x) = \frac{x+1}{x^3}$$

On en déduit :

$$C(x) = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + K$$

La solution générale de l'équation initiale est donc définie par :

$$y(x) = -x - \frac{1}{2} + Kx^2 \text{ avec } K \in \mathbb{R} \tag{1.64}$$

Remarque 1.12.1. $y_p = -x - \dfrac{1}{2}$ *est une solution particulière de (4)*

5. L'équation donnée est équation différentielle linéaire si x est considéré comme une fonction de y :

$$y' = \frac{dy}{dx}\frac{1}{x\cos y + \sin 2y} \text{ ou } \frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y, \tag{1.65}$$

on obtient ainsi une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. La résolution de l'équation (1.65) se fait en deux étapes.

Résolution de l'équation homogène associée

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = 0 \tag{1.66}$$

soit $\frac{dx}{x} = \cos y dy \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \cos y dy \Rightarrow \ln|x(y)| = \sin y + K$, ce qui conduit à la solution générale de (1.66) :

$$x = Ce^y \text{ avec } C \in \mathbb{R} \tag{1.67}$$

Résolution de (1.65) par la méthode de variation de la constante MVC
Cherchons la solution générale de l'équation (1.65) sous forme $x(y) = C(y)e^{\sin y}$, où $C(y)$ est une fonction inconnue de y.
On calcule $x'(y) = C'(y)e^{\sin y} + \cos y C(y)e^{\sin y}$, on reporte dans (1.65) et on obtient :

$$C'(y) = \frac{\sin 2y}{e^{\sin y}} \text{ ou } C(y) = \int \frac{\sin 2y}{e^{-\sin y}} dy = 2\int \sin y \cos y e^{-\sin y} dy$$

Par intégration par partie, on en déduit :

$$C(y) = 2(-\sin y e^{-\sin y} - e^{-\sin y}) + K$$

La solution générale de (1.65) est donc définie par :

$$x(y) = -(\sin y + 1) + Ke^{\sin y} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

6. Rappelons la forme générale de l'équation différentielle linaire du premier ordre ordre :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{1.68}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions données de x, continues dans le domaine où il s'agit d'intégrer l'équation (1.68). On sait résoudre (1.68) par la méthode de variation de la constante mais l'équation (1.68) peut aussi être intégrée comme suit. Posons

$$y = u(x)v(x); \tag{1.69}$$

où $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions inconnues de x dont l'une, par exemple $v(x)$, peut être choisie arbitrairement. En portant (1.69) dans (1.68), on obtient, toutes les réductions effectuées,

$$v(x)u'(x) + (p(x)v(x) + v'(x))u(x) = q(x) \tag{1.70}$$

En déterminant $v(x)$ de la condition $p(x)v(x)+v'(x) = 0$, on trouve ensuite de (1.70) la fonction $u(x)$ et, par suite, la solution $y = uv$ de l'équation (1.68). Pour $v(x)$ on peut prendre toute solution particulière de l'équation $p(x)v(x) + v'(x) = 0$, $v \not\equiv 0$.
Application. Cherchons la solution générale de l'équation donnée sous forme

$$y = u(x)v(x); \tag{1.71}$$

on a $y' = u'v + uv'$. En portant les expressions de y et y' dans l'équation donnée, on aura

$$x(x-1)(u'v + uv') + uv = x^2(2x-1) \tag{1.72}$$

ou

$$x(x-1)u'v + [x(x-1)v' + v]u = x^2(2x-1) \tag{1.73}$$

La fonction $v = v(x)$ se détermine de la condition $x(x-1)v' + v = 0$. En prenant l'une quelconque des solutions particulières de la dernière équation, par exemple $v = \frac{x}{x-1}$, et en la portant dans (1.73), on obtient l'équation $u' = x^2 - x + C$. Par suite, la solution générale de l'équation l'équation donnée sera

$$y = u(x)v(x) = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1} = \frac{Cx}{x-1} + x^2$$

7. Si $y' \sin^2 x - y \tan x = 0$:
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{dx}{\tan x \cos^2 x},$$
et
$$\ln y = \ln |\tan x| + \ln C,$$
d'où
$$y = C \tan x. \tag{1.74}$$
En dérivant (1.74) (C fonction de x) :
$$y = C' \tan x + \frac{C}{\cos^2 x}.$$
En portant dans l'équation initiale, on a :
$$C' \tan \sin^2 x + C \tan^2 x - C \tan^2 x = \tan x,$$
d'où
$$C' = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{et} \quad C = -\cot x + C_1,$$
et, par suite, l'intégrale générale de l'équation initiale :
$$y = -1 + C_1 \tan x.$$
On vérifie directement que $y = -1$ est une solution particulière de l'équation donnée.

Exercice 1.13. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $xy' + y = y^2 \ln x$
2. $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$
3. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$
4. $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$
5. $4(y')^2 - 9x = 0$
6. $2\frac{dy}{dx} + 3(\frac{dy}{dx})^2 = x$
7. $y = xy' + \frac{3}{2y'}$
8. $y = x(y')^2 - \frac{1}{y'}$
9. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$, $(y_1 = -\frac{1}{x})$

Solutions.

1. L'équation différentielle $xy' + y = y^2 \ln x$ est de Bernoulli ($\alpha = 2$). Divisons les deux membres de l'équation par y^2 ;

$$x\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{y^2} = \ln x.$$

Effectuons le changement de variable

$$z = \frac{1}{y},\ z' = -\frac{y'}{y^2},$$

d'où

$$\frac{y'}{y^2} = -z$$

Après la substitution la dernière équation se transforme en une équation linaire

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

dont la solution générale est

$$z = 1 + Cx + \ln x.$$

On en déduit l'intégrale générale de l'équation donnée

$$y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}.$$

2. On a $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$ ou $(x^3 + e^y)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$, alors

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}x = \frac{e^y}{3x^2},$$

cette dernière équation est de Bernoulli ($\alpha = -2$). Divisons les deux membres de l'équation par x^{-2} ;

$$\frac{dx}{dy}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{e^y}{3}.$$

Effectuons le changement de variable

$$z = x^3,\ z' = 3x^2x',$$

Après la substitution la dernière équation se transforme en une équation linaire

$$\frac{z'}{3} - \frac{z}{3} = \frac{e^y}{3} \text{ ou } z' - z = e^y,$$

dont la solution générale est

$$z = ye^y + Ce^y.$$

On en déduit l'intégrale générale de l'équation donnée

$$x = \sqrt[3]{ye^y + Ce^y}$$

ou

$$x^3e^{-y} = y + C$$

3. L'équation $\underbrace{(3x^2-2x-y)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(2y-x+3y^2)}_{N(x,y)}dy=0$ est une équation aux différentielles totales car :

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Ainsi l'équation donnée est aux différentielles totales et

$$M=\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2-2x-y,\qquad N=\frac{\partial U}{\partial y}=2y-x+3y^2,$$

donc

$$U(x,y)=\int(3x^2-2x-y)dx+\varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction indéterminée pour le moment.
En intégrant, on obtient

$$U(x,y)=x^3-x^2-xy+\varphi(y),$$

La dérivée partielle $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ de la fonction trouvée $U(x,y)$ doit être égale à $2y-x+3y^2$, ce qui donne

$$-x+\varphi'(y)=2y-x+3y^2,$$

d'où $\varphi'(y)=2y+3y^2$ si bien que $\varphi(y)=y^2+y^3+C$. Ainsi

$$U(x,y)=x^3-x^2-xy+y^2+y^3+C.$$

La solution générale de l'équation différentielle donnée est

$$x^3-x^2-xy+y^2+y^3=C.$$

4. L'équation $\underbrace{2xy\ln y}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})}_{N(x,y)}dy=0$ n'est pas aux différentielles totales car

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x(\ln y+1)\neq 2x=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Cherchons donc un facteur intégrant μ.
On a

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{2x-2x(\ln y+1)}{2xy\ln y}=-\frac{1}{y},$$

et donc

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{1}{y},\quad \mu=\frac{1}{y}.$$

L'équation

$$\frac{2x\ln y}{y}dx+\frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy=0,$$

est une équation aux différentielles totales. Elle peut être mise sous la forme

$$d(x^2\ln y)+d(\frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}})=0,$$

d'où

$$x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}}=C.$$

5. L'équation

$$4(y')^2-9x=0, \tag{1.75}$$

est une équation différentielle du premier ordre non résolues par rapport à la dérivée. Posons $y'=p$, où p est un paramètre ; il vient

$$4p^2-9x=0 \quad \text{ou } p=\pm\frac{3}{2}\sqrt{|x|}, \tag{1.76}$$

d'où

$$y'=\pm\frac{3}{2}\sqrt{|x|}. \tag{1.77}$$

En intégrant (1.77) on obtient la solution générale de (1.75)

$$y=\pm(|x|)^{\frac{3}{2}}+C$$

6. $y^{\frac{2}{3}}+(y')^{\frac{2}{3}}=1$. Posons $y=\cos^3 t$, $y'=p=\sin^3 t$; il vient

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{-3\cos^3 t\sin t dt}{\sin^3 t}=-3\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt.$$

D'où

$$x=\int(3-\frac{3}{\sin^2 t})dt=3t+3\cot t+C;$$

et la solution générale de l'équation donnée est

$$x=3t+3\cot t+C, \qquad y=\cos^3 t.$$

7. $2\frac{dy}{dx}+3(\frac{dy}{dx})^2=x$. L'équation donnée est de la forme $a\frac{dy}{dx}+b(\frac{dy}{dx})^2=x$, avec $a=2$ et $b=3$. Posons $\frac{dy}{dx}=p$, alors

$$x=2p+3p^2, \qquad dx=2dp+6pdp$$
$$dy=pdx=2pdp+6p^2dp, \qquad y=p^2+2p^3+C.$$

Finalement,

$$x=2p+3p^2, \qquad y=p^2+2p^3+C \text{ est la solution générale de l'équation donnée.}$$

8. $y = xy' + \dfrac{3}{2y'}$. L'équation donnée est de Clairaut.
Posons $y' = p$, il vient
$$y = xp + \frac{3}{2p}.$$
En différentiant cette dernière équation et en remplaçant dy par pdx on trouve
$$pdx = pdx + xdp - \frac{3}{2p^2}dp,$$
d'où
$$dp(x - \frac{3}{2p^2}) = 0.$$
En annulant le premier facteur, on obtient $dp = 0$, d'où $p = C$ et la solution générale de l'équation initiale est $y = Cx + \dfrac{3}{2C}$ qui est une famille de droites à un paramètre. En annulant le second facteur, on aura $x = \frac{3}{2p^2}$. En éliminant p entre cette équation et l'équation $y = xp + \frac{3}{2p}$, on obtient $y^2 = 6x$ qui est aussi une solution de notre équation. Au point de vue géométrique, la courbe $y^2 = 6x$ est l'enveloppe de la famille de droites fournies par la solution générale.

9. $y = x(y')^2 - \dfrac{1}{y'}$. L'équation donnée est de Lagrange.
Posons $y' = p$, alors il vient $y = x(p)^2 - \dfrac{1}{p}$. En différentiant, on trouve
$$pdx = 2pdp + p^2dx + \frac{dp}{p^2},$$
d'où
$$\frac{dx}{dp} = \frac{2p^3}{p^3 - p^4}x + \frac{1}{p^3 - p^4} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dp} - \frac{2p^3}{p^3 - p^4}x = \frac{1}{p^3 - p^4} \tag{1.78}$$
L'équation (1.78) est une équation différentielle linéaire en x du premier ordre avec second membre ; en la résolvant, on a
$$x = \frac{2Cp^2 + 2p - 1}{2p^2(1 - p)^2}$$
En portant la valeur trouvée de x dans l'expression de y, on obtient en définitive
$$x = \frac{2Cp^2 + 2p - 1}{2p^2(1 - p)^2}, \qquad y = \frac{2Cp^2 + 2p - 1}{2(1 - p)^2} - \frac{1}{p}.$$

10.
$$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1 \quad (y_1 = -\frac{1}{x}). \tag{1.79}$$
L'équation donnée est de Riccati.
Posons $y = -\dfrac{1}{x} + z(x)$ et portant dans (1.79).
Il vient
$$z' + \frac{1}{x}z = z^2. \tag{1.80}$$
L'équation (1.80) est de Bernoulli ($\alpha = 2$), en la résolvant, on a
$$z = \frac{1}{(C - \ln x)x}$$

Ainsi la solution générale de l'équation (1.79) est

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(C - \ln x)x}$$

Exercice 1.14. *Former les équations différentielles de courbes suivante :*

1. $y = a(1 - e^{-\frac{x}{a}})$
2. $y = e^x(ax + b)$
3. $y = \alpha \cos(x + \beta)$

Solutions. 1. $y = a(1 - e^{-\frac{x}{a}})$. Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à x, il vient

$$y' = e^{-\frac{x}{a}}$$

De l'expression pour y' on trouve $a = -\dfrac{x}{\ln y'}$ et, en portant cette expression de a dans l'équation de la famille de courbes, on trouve

$$y = -\frac{x}{\ln y'}(1 - y'), \text{ ou } y \ln y' + x(1 - y') = 0.$$

2. On a

$$y = e^x(ax + b). \tag{1.81}$$

Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à x, il vient

$$y' = axe^x + be^x = (ax + b)e^x,$$

et la dérivée seconde sera

$$y'' = (2a + b + ax)e^x.$$

On a $y'' - y' = y' - y = ae^x$, d'où

$$y'' - y' = y' - y \text{ ou } y'' - 2y' + y = 0.$$

3. $y = \alpha \cos(x + \beta)$. Dérivons deux fois les deux membres de cette équation par rapport à x, il vient

$$y'' = -\alpha \cos(x + \beta) = -y,$$

c'est à dire

$$y'' + y = 0.$$

Chapitre 2

Les équations différentielles d'ordre 2 et d'ordre supérieur

Dans ce chapitre, on va étudier la résolution des équations différentielles d'ordre 2 et d'ordre supérieur. On donne ainsi les méthodes pour résoudre

1. Les équations différentielles linéaires à coefficients constants du second ordre (respectivement d'ordre n).
2. Les équations différentielles non linéaires
3. Equation d'Euler
4. Equations différentielles linéaires à coefficients non constants

Définition 2.0.1. *Soit E un espace vectoriel normé.*
Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle x, une fonction inconnue $x \to y(x)$ et ses dérivées y', y'',...,$y^{(n)}$ au point x définie par

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

où F est une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$ appelé domaine, n'est pas indépendante de sa dernière variable $y^{(n)}$. On prendra x dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).
La solution y en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.0.2. *Une équation différentielle d'ordre n est mise sous forme résolue quand on peut exprimer la dérivée la plus forte en fonction de x et des dérivées précédentes*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{2.1}$$

Remarque 2.0.3. *L'équation (2.1) est appelée équation différentielle normale d'ordre n.*

Exemple 2.0.4. $x+\sqrt{y''' + (y')^2} = y$ *équation différentielle d'ordre 3, on peut écrire* $x+\sqrt{y''' + (y')^2} - y = 0$

Définition 2.0.5 (Le problème de Cauchy). *Le problème qui consiste à trouver une solution $y = \varphi(x)$ de l'équation (2.1) satisfaisant aux conditions initiales*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0,\ ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{2.2}$$

s'appelle problème de Cauchy pour l'équation (2.1).

Théorème 2.0.6 (Théorème de Picard). *Si, dans l'équation (2.1) la fonction f*

a) est continue en tous arguments x, y, y', y'',..., $y^{(n-1)}$ dans un certain domaine $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de leur variation ;

b) possède dans le domaine D des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, ..., $\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}$ par rapport aux arguments x, y, y', y'',..., $y^{(n-1)}$,

alors il existe un intervalle $-h < x < x_0 + h$ dans lequel il existe une solution unique $y = \varphi(x)$ de l'équation (2.1) qui satisfait aux conditions (2.2), ou les valeurs $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$,..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$

Pour une équation du second ordre $y'' = f(x, y, y')$ les conditions initiales sont de la forme

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',$$

où x_0, y_0, y_0' sont des nombres donnés. Dans ce cas, le théorème ci-dessus d'existence et d'unicité signifie géométriquement que par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan xOy il ne passe qu'une seule courbe dont la pente de la tangente en M_0 a la valeur y_0'.

Exemple 2.0.7. *Pour le problème*

$$\begin{cases} y'' = \sin y' + e^{-x^2 y} \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases} \tag{2.3}$$

La fonction $f(x, y, y') = \sin y' + e^{-x^2 y}$ est continue sur $\mathbb{R}^3 \ni (x_0, y_0, z_0)$ donc a) est vérifié.
b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}$ (borné dans $\mathbb{R}$), $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$ (borné dans $\mathbb{R}$).
Conclusion. $\forall (x_0, y_0, y_0')$ le problème (2.3) admet une seule solution.

Définition 2.0.8. *On appelle solution générale d'une équation différentielle d'ordre n (2.1) l'ensemble de toutes ses solutions définies par la formule $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ contenant n constantes arbitraires C_1, C_2,..., C_n telles que si les conditions (2.2) sont données, il existe des valeurs $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$,..., $\tilde{C}_n$ telles que $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n)$ seront solutions de l'équation (2.1) satisfaisant à ces conditions initiales.*

Définition 2.0.9. *Toute solution obtenue à partir de la solution générale pour des valeurs concrètes des constantes arbitraires C_1, C_2,..., C_n s'appelle solution particulière de l'équation différentielle (2.1).*

Définition 2.0.10. *Une équation de la forme $\phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ qui définit de façon implicite la solution générale de l'équation différentielle s'appelle intégrale générale de cette équation. En donnant aux constantes C_1, C_2,..., C_n des valeurs numériques concrètes admissibles, on obtient une intégrale particulière ou l'intégrale différentielle. Le graphique de la solution particulière ou d'intégrale particulière s'appelle courbe intégrale de l'équation différentielle donnée.*

Exemple 2.0.11. *La fonction $y = C_1 x + C_2$ est la solution générale de l'équation $y'' = 0$, où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires à valeurs complexes.*
En effet, en intégrant successivement l'équation donnée, on trouve

$$\begin{aligned} y' &= C_1, \\ y &= C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Remarque 2.0.12. *Il y en a plusieurs types d'équations différentielles d'ordre n, on commence par les équations qui admettent un abaissement d'ordre.*

2.1 Les équations différentielles d'ordre n qui admettent un abaissement d'ordre

2.1.1 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x)$

Après l'avoir intégrer successivement n fois on obtient la solution générale

$$y = \underbrace{\int\int\int ... \int}_{nfois} f(x) \underbrace{dx...dx}_{nfois} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_{n-1}x + C_n,$$

à chaque intégration l'ordre de l'équation devient inférieur à n.

Exemple 2.1.1. *Résoudre l'équation* $y''' = 3x^2 + \cos x$.
Par intégration on trouve

$$\begin{aligned} y'' &= x^3 + \sin x + C_1 \\ y' &= \frac{x^4}{4} - \cos x + C_1 x + C_2 \\ y &= \frac{x^5}{20} - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \end{aligned}$$

On remarque que l'équation était d'ordre 3*, après la première intégration, on obtient une équation d'ordre* 2*, après la deuxième une équation d'ordre* 1.

2.1.2 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n-1)})$

L'ordre d'une telle équation peut être réduit de k unités par la substitution $y^{(k)}(x) = p(x)$. Alors l'équation (2.1) prend la forme

$$f(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0.$$

De cette dernière équation on définit, si c'est possible, $p = f(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ et ensuite on trouve y de l'équation $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ en intégrant k fois.

Exemple 2.1.2. *Résoudre l'équation* $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$.
Posons $y^{(4)} = p$*, on obtient*

$$\frac{dp}{dx} - p = 0, \quad d'où \;\; p = C_1 e^x, \quad y^{(4)} = C_1 e^x.$$

En intégrant successivement, on trouve

$$\begin{aligned} y''' &= C_1 e^x + C_2 \\ y'' &= C_1 e^x + C_2 x + C_3 \\ y' &= C_1 e^x + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \\ y &= C_1 e^x + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5 \end{aligned}$$

2.1.3 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)})$

La substitution $y' = p$ permet d'abaisser l'ordre de l'équation d'une unité c'est à dire qu'elle devient d'ordre $n-1$. Dans ce cas p est considéré comme une nouvelle fonction inconnue de y. Toutes les dérivées y', y'',...,$y^{(n)}$ s'expriment par des dérivées de la nouvelle fonction p par rapport à y

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = p, \\
y'' &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \\
y''' &= \frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dy}) = \frac{d}{dy}(p\frac{dp}{dy})\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + (\frac{dp}{dy})^2, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Exemple 2.1.3. *Résoudre l'équation*

$$y^{''} + (y')^2 = 2e^{-y} \tag{2.4}$$

En posant $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, *on obtient une équation de Bernoulli*

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}.$$

En effectuant la substitution $p^2 = z$, *on la ramène à une équation linéaire*

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y},$$

dont la solution générale est $z = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$. *En remplaçant* z *par* $p^2 = (y')^2$, *on obtient*

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^y + C_1e^{-2y}}.$$

Séparons les variables et intégrons, il vient

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1}, \quad d'où \quad e^y + \tilde{C}_1 = (x + C_2)^2,$$

où $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}$. *C'est l'intégrale de l'équation (2.4).*

2.2 Les équations différentielles linéaires d'ordre n

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n, toute équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

avec $a_n, ..., a_1, b$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

2.2.1 Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n, appelée aussi sans second membre, toute équation qui s'écrit :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{2.5}$$

2.2.1.1 Indépendance linéaire

Définition 2.2.1. *Soit donné un système fini de n fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ définies sur l'intervalle I (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier). Les fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ sont dites linéairement dépendantes sur l'intervalle I s'il existe des constantes α_1, α_2,...,α_n non toutes nulles et telles que pour toutes les valeurs x prises dans cet intervalle on ait l'identité*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Si cette identité n'est vérifiée que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, les fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ sont dite linéairement indépendantes sur l'intervalle I.

Exemple 2.2.2. *Le système de fonctions e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x}, où k_1, k_2, k_3 sont deux a deux distincts, est linéairement indépendantes sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.*
Raisonnons par l'absurde en supposant que le système donné soit linéairement dépendant sur cette intervalle. Alors

$$\alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 e^{k_2x} + \alpha_3 e^{k_3x} = 0, \tag{2.6}$$

sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et l'un au moins des nombres α_1, α_2, α_3 est différent de zéro, par exemple $\alpha_3 \neq 0$. En divisant les deux membres de l'identité (2.6) par e^{k_1x}, on aura

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2-k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3-k_1)x} = 0.$$

Dérivons l'identité, il vient

$$\alpha_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \alpha_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_1)x} = 0. \tag{2.7}$$

Divisons les deux memebres de l'identité (2.7) par $e^{(k_2-k_1)x}$:

$$\alpha_2(k_2 - k_1) + \alpha_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_2)x} = 0. \tag{2.8}$$

Dérivons (2.8), il vient

$$\alpha_3(k_3 - k_2)(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_2)x} = 0,$$

ce qui est impossible car $\alpha_3 \neq 0$ et $k_3 \neq k_1$, $k_3 \neq k_2$ par hypothèse et $e^{(k_3-k_2)x} \neq 0$.
Notre supposition sur la dépendance linéaire du système donné a abouti à une contradiction, ce qui signifie que ce système de fonctions est linéairement indépendant sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, c'est-à-dire que l'identité (2.6) ne sera vérifiée que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Définition 2.2.3. *Soient n fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ possédant des dérivées d'ordre $(n-1)$. Le déterminant*

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \cdots & y_n^{'} \\ y_1^{''} & y_2^{''} & \cdots & y_n^{''} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

s'appelle wronskien de ces fonctions. En générale, le wronskien est une fonction de x définie dans un certain intervalle.

Exemple 2.2.4. *Le wronskien des fonctions $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = e^{k_2x}$, $y_3(x) = e^{k_3x}$ est*

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & k_3^2e^{k_3x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2).$$

Théorème 2.2.5. *Soient $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ n solutions de l'équation (2.5) sur un intervalle I. Alors l'ensemble des solutions est linéairement indépendantes sur I si et seulement si $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$.*

Définition 2.2.6. *Tout ensemble $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ de n solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.5) sur un intervalle I est appelé* ***Ensemble fondamental*** *des solutions sur I.*

Théorème 2.2.7. *Soient $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ n solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.5) sur I. Alors la solution générale de l'équation (2.5) sur I est donnée par*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x),$$

où c_1, c_2,...,c_n sont des constantes.

2.2.1.2 Equations linéaires homogène à coefficients constants

Considérons l'équation différentielle

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0, \tag{2.9}$$

où a_0, a_1,...,a_n sont des constantes

Pour résoudre (2.9) on procède comme suit : On cherche la solutions sous la forme : $y = e^{\lambda x}$, où λ une constante à déterminer.
Donc

$$\begin{aligned} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{aligned} \tag{2.10}$$

En remplaçons $y = e^{\lambda x}$ et (2.10) dans (2.9) obtient

$$a_0\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_{n-1}(\lambda e^{\lambda x}) + a_ne^{\lambda x} = e^{\lambda x}(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

Comme $e^{\lambda x} \neq 0$, alors

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2.11}$$

(2.11) est appelé équation caractéristique associée à (2.9).
On peut résoudre (2.11) seulement si $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des constantes réelles, en tenant compte du fait que :

a) A chaque racine réelle simple λ_0 correspond une seule solution particulière $y_p = e^{\lambda_0 x}$

b) A chaque couple de racines complexe conjugué $\lambda_0 = a+ib$ correspond deux solution particulières $e^{ax}\cos(bx)$, $e^{ax}\sin(bx)$

c) A chaque racine réelle multiple (d'abord de multiplicité s) : $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}, ..., x^{s-1}e^{\lambda x}$

d) A chaque couple de racines complexe conjugué de multiplicité s :

$$e^{ax}\cos(bx), xe^{ax}\cos(bx), ..., x^{s-1}e^{ax}\cos(bx)$$
$$e^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\sin(bx), ..., x^{s-1}e^{ax}\sin(bx)$$

Si $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_n(x)$ sont n intégrales particulières linéairement indépendantes de l'équation (2.9) :

$$C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n,$$

est la solution générale de (2.9).

Exemple 2.2.8. *Résoudre l'équation suivante :*

$$y^{'''} + 2y^{''} + y' = 0 \tag{2.12}$$

Ecrivons l'équation caractéristique

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Les racines sont réelles et l'une d'elles à savoir $\lambda_1 = -1$ est double de sorte que la solution générale de l'équation (2.12) est de la forme

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}.$$

Exemple 2.2.9. *Résoudre l'équation suivante :*

$$y''' + y'' + y' + y = 0 \tag{2.13}$$

L'équation caractéristique associée à (2.13) est

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad ou \ (\lambda+1)(\lambda^2+1) = 0, \tag{2.14}$$

dont les racines sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. D'où la solution générale de (2.13) est

$$y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Exemple 2.2.10. *intégrer l'équation*

$$y^{(4)} + 4y = 0. \tag{2.15}$$

L'équation caractéristique est $\lambda^4 + 4 = 0$, ou

$$(\lambda^2 + 2\lambda + \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + \lambda) = 0, \tag{2.16}$$

dont les racines sont $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = -1-i$, $\lambda_3 = 1+i$, $\lambda_4 = 1-i$.
On a donc l'intégrale générale de (2.15)

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^x(C_3\cos x + C_4\sin x).$$

2.2.2 Equation linéaire non homogène à coefficients constants

Soit donnée une équation différentielle

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x), \tag{2.17}$$

à coefficients réels constants a_0, a_1,...,a_n.
Pour résoudre (2.17), il y en a plusieurs méthodes (méthode de la variation de la constance (MVC), méthode des coefficients indéterminés, méthode de séries entière,...).

2.2.2.1 Méthode des coefficients indéterminées

Théorème 2.2.11. *La solution générale de l'équation non homogène (2.17) est égale à la somme de la solution de l'équation homogène associée et l'une quelconque des solutions particulières de l'équation non homogène.*

La recherche de la solution générale de l'équation homogène associée s'obtient en appliquant les règles exposées plus haut au sous-section 2.2.1.2. Ainsi, le problème d'intégration de l'équation (2.17) se ramène à la recherche de la solution particulière $y_{p.n}$ de l'équation non homogène. Dans le cas général, l'intégration de l'équation (2.17) peut être réalisée par la méthode de variation des constantes arbitraires (voir plus loin sous-section 2.4.1). Pour les seconds membres de forme, la solution particulière peut être obtenue plus simplement par la méthode des coefficients indéterminés. La forme générale du second membre $f(x)$ de l'équation (2.17) pour laquelle on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés est la suivante

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],$$

où $P_l(x)$ et $Q_m(x)$ sont des polynômes de degrés l et m respectivement. Dans ce cas, la solution particulière $y_{p.n}$ de l'équation (2.17) est cherchée sous la forme

$$y_{p.n} = x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x],$$

où $k = max(m, l)$, $\tilde{P}_k(x)$ et $\tilde{Q}_k(x)$ sont des polynômes en x de degré k de la forme générale à coefficients indéterminés, alors que s est la multiplicité de la racine $\lambda = \alpha + i\beta$ de l'équation caractéristique (si $\lambda = \alpha \pm i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $s = 0$).

Exemple 2.2.12. *Résoudre l'équation suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x \tag{2.18}$$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, elle admet deux racines simples $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, alors les solutions de l'équation homogène sont

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Puisque le nombre zéro n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière $y_{p.n}$ de l'équation (2.18) doit être cherché sous la forme (voir le tableau 2.1, cas I(1))

$$y_{p.n} = ax^2 + bx + c,$$

ou a, b c sont des coefficients, pour le moment inconnus, qu'on doit déterminer. En introduisant l'expression de $y_{p.n}$ dans l'équation (2.18), on obtient

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x$$

d'où

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -6a + 2b = -3 \\ 2a - 3b + 2c = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = 0, \\ c = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

de sort que qu'une solution particulière soit

$$y_{p.n} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

et la solution générale de l'équation (2.18)

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 2.2.13. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$x^{''} - 5x' - 14x = (3t^2 + 2t - 1)e^t. \tag{2.19}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0,$$

a deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = -2$ *et* $\lambda_2 = 7$.
Sa solution générale est donc définie par :

$$x_0(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{7t} \text{ avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Recherche d'une solution particulière.
Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors il existe une solution particulière sous la forme (voir le tableau 2.1, cas II(1))

$$x_p(t) = (at^2 + bt + c)e^t.$$

On a alors :

$$x_p^{'}(t) = (at^2 + (2a+b)t + b + c)e^t \text{ et } x_p^{''}(t) = (at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b + c)e^t.$$

On a donc après simplification :

$$\forall t \; -18at^2 - (18b + 6a)t + (2a - 3b - 18c) = 3t^2 + 2t - 1,$$

d'où

$$\begin{cases} -18a = 3 \\ -6a - 18b = 2 \\ 2a - 3b - 18c = -1 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{6} \\ b = -\dfrac{1}{18} \\ c = \dfrac{5}{108} \end{cases}$$

On obtient une solution particulière :

$$x_p(t) = (-\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{18}t + \frac{5}{108})e^t$$

La solution générale de (2.20) est donc définie par :

$$x(t) = K_1e^{-2t} + K_2e^{7t} + (-\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{18}t + \frac{5}{108})e^t \text{ avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Théorème 2.2.14 (principe de superposition)**.** *Si $y_k(x)$ est solution de l'équation*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f_k(x), \quad k = 1, 2, ..., m,$$

alors la fonction $y(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ est solution de l'équation

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = \sum_{k=1}^{m} f_k(x).$$

Exemple 2.2.15. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 \cosh x = x^2(e^x + e^{-x}) \tag{2.20}$$

L'équation (2.20) est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 2. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ admet une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, la solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h = e^{-x}(C_1 + C_2x) \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour trouver une solution particulière y_p de l'équation (2.20) cherchons des solutions de deux équation

$$y'' - 2y' + y = x^2e^x, \tag{2.21}$$

$$y'' - 2y' + y = x^2e^{-x}. \tag{2.22}$$

L'équation (2.21) a une solution particulière y_{p_1} de la forme $y_{p_1} = e^x(ax^2+bx+c)$ (voir le tableau 2.1, cas II(1)) alors

$$y' = [ax^2 + (2a + b)x + (b + c)]e^x$$
$$y'' = [ax^2 + (4ax + b) + (2a + 2b + c)]e^x$$

En introduisant l'expression de y, y' et y'' dans (2.21) et par identification on trouve $a = \dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{3}{8}$, si bien que

$$y_{p_1} = e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}).$$

Nº	Second membre de l'équation différentielle	Racine de l'équation caractéristique	Formes de la solution particulière
I	$P_m(x)$	1. Le membre 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique	$\tilde{P}_m(x)$
		2. Le membre 0 est racine de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^s\tilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)e^{\alpha x}$	1. Le membre α n'est pas racine de l'équation caractéristique	$\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		2. Le membre α est racine de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^s\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	1. Les membres $\pm i\beta$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique	$\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
		2. Les membres $\pm i\beta$ sont racines de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^s(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
III	$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$	1. Les membres $\alpha \pm i\beta$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique	$e^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
		2. Les membres $\alpha\pm i\beta$ sont racines de multiplicité s de l'équation caractéristique	$x^se^{\alpha x}(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$

TABLE 2.1 – Les formes des solutions particulières pour les différentes formes des seconds membres

Cherchons une solution particulière de l'équation (2.22) sous la forme $y_{p_2} = e^x(ax^4 + bx^3 + cx^2)$ *(voir le tableau 2.1, cas II(2)). Par identification* $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$, $c = 0$, *donc*

$$y_{p_2} = e^{-x}(\frac{1}{12}x^4)$$

En vertu du principe de superposition, la solution particulière y_p *de l'équation donnée sera égale à la somme des solutions* y_{p_1} *et* y_{p_2} *des équations (2.21) et (2.22) :*

$$y_p = e^{-x}(\frac{1}{12}x^4) + e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}).$$

La solution générale de l'équation (2.20)

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + e^{-x}(\frac{1}{12}x^4) + e^x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}),$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes réelles arbitraires.*

2.3 Equation d'Eleur

2.3.1 Equation d'Eleur homogène

Une équation d'Euler est une équation différentielle linéaire de la forme

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \qquad (a_0 \neq 0), \tag{2.23}$$

où tous les a_i sont des constantes réelles, y une fonction de x $y^{(n)}$ dérivée d'ordre n.

2.3.1.1 Méthode de Résolution

1. Première Méthode

   On peut se ramener à une équation à coefficients constants en effectuant le changement de variable $x = e^t$. Pour illustrer cela, considérons l'équation d'ordre 2 :

$$a_0x^2y^{''} + a_1xy^{'} + a_2y = 0.$$

   On se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$, pour pouvoir diviser par x^2

$$a_0y^{''} + a_1\frac{y^{'}}{x} + a_2\frac{y}{x^2} = 0.$$

   Le changement de variable $x = e^t$ donne :

$$\begin{aligned} y(e^t) &= y_t \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y_t^{'}e^{-t} \\ y'' &= \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt}\frac{dt}{dx} = -e^{-2t}y_t^{'} + e^{-2t}y_t^{''}. \end{aligned}$$

   L'équation à résoudre est donc :

$$a_0y_t^{''} + (a_1 - a_0)y_t^{'} + a_2y_t = 0.$$

Remarque 2.3.1. *les équations de la forme*

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0,$$

s'appelle elles aussi équation d'Euler et se ramènent à des équations linéaires homogène à à coefficients constants au moyen du changement de variable $ax+b=e^t$

2. Deuxième Méthode
   Pour simplifier les calcules on peut se ramener l'équation (2.23) à la forme

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y = x^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et il faut dès lors trouver les valeurs de k vérifiant

$$x^2(k(k-1)x^{k-2}) + ax(kx^{k-1}) + b(x^k) = 0.$$

La recherche des solutions k de l'équation du second degré

$$k^2 + (a-1)k + b = 0,$$

amènent classiquement à trois cas :

- Deux racines réelles distinctes k_1 et k_2 ;
- Une racine double k ;
- Deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.

Le cas 1 donne une solution de la forme

$$y = c_1x^{k_1} + c_2x^{k_2}$$

Le cas 2 donne

$$y = c_1x^k\ln(x) + c_2x^k$$

Le cas 3 donne une solution de la forme

$$y = c_1x^\alpha\cos(\beta\ln(x)) + c_2x^\alpha\sin(\beta\ln(x))$$

avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.3.2. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0 \tag{2.24}$$

1er méthode. Effectuons le changement de variable $x = e^t$, il vient

$$\begin{aligned}
&y(e^t) = y_t\\
&y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y_t^{'}e^{-t}\\
&y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt}\frac{dt}{dx} = -e^{-2t}y_t^{'} + e^{-2t}y_t^{''}
\end{aligned}$$

et l'équation prend la forme

$$y_t^{''} - 5y_t^{'} + 4y_t = 0 \tag{2.25}$$

(2.25) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène, Son équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

a deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = 4$. *Donc on a* $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}$ *et par conséquent la solution générale de (2.24) est*

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^4$$

2^e méthode : on cherche la solution générale $y = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Donc* $y' = kx^{k-1}$; $y'' = k(k_1)x^{k-2}$. *En remplaçons* y, $y^{'}$ *et* $y^{''}$ *dans (2.24) on trouve*

$$k(k-1)x^{k-2}x^2 - 4x^k x^{k-1} + 4x^k = x^k(k(k-1) - 4k + 4) = 0 \quad ou\ k(k-1) - 4k + 4 = 0 \ (car\ x^k \neq 0).$$

Or

$$k(k-1) - 4k + 4 = k^2 - 5k + 4 = (k-1)(k-4) = 0.$$

Les racines de cette équation sont $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. *A ces racines correspond le système fondamental de solutions* $y_1 = x$, $y_2 = x^4$ *et la solution générale sera comme dans la premier procédé*

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^4,$$

où C_1, C_2 *sont des constants réelles.*

2.3.2 Equation d'Eleur non homogène

Les équations d'Euler non homogène sont de la forme

$$\sum_{n}^{k=0} a_k x^k y^{(k)} = x^\alpha P_m(\ln x), \tag{2.26}$$

où $P_m(u)$ est un polynôme de degré m peuvent être également résolues par la méthode des coefficients indéterminés par analogie avec la résolution d'une équation différentielle linéaire non homogène à coefficients constants et avec second membre de la forme $e^{\alpha x} P_m(x)$.

Exemple 2.3.3. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = -12x^5. \tag{2.27}$$

D'après l'exemple 2.3.2 la solution générale de l'équation homogène associée à (2.27) est

$$y_h = C_1 x + C_2 x^4.$$

Une solution particulière sera cherché sous la forme $y_p = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, *on a*

$$y_p' = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \ y'' = ax^3 + bx^2 + cx^2 + d$$

Portant dans l'équation donnée, on obtient après identification

$$a = -3, \ b = c = d = e = f = 0.$$

La solution générale de l'équation (2.27) sera

$$y = C_1 x + C_2 x^4 - 3x^5.$$

2.4 Les équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients variables

Dans le cas où l'on connaît une solution particulière $y_1(x)$ de l'équation

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0, \tag{2.28}$$

son ordre peut être abaissé d'une unité (l'équation restant linéaire) en posant $y = y_1 z$, où z est une nouvelle fonction inconnue et en effectuant ensuite le changement $z' = u$ (on peut effectuer directement le changement $u = (\frac{y}{y_1})')$.
Si l'on connaît k solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.28), l'ordre de cette équation peut être abaissé de k unités.
La solution générale de l'équation

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x), \tag{2.29}$$

est la somme d'une solution particulière quelconque et la solution générale de l'équation homogène (2.28).

Exemple 2.4.1. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \quad \textit{sur l'intervalle }]0, +\infty[, \tag{2.30}$$

sachant que $y_1 = x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
Puisque $y_1 = x^2$ est une solution de l'équation homogène associée, on effectue le changement de fonction $y = x^2z$ avec z fonction inconnue en x. Donc

$$\begin{aligned} y &= x^2 z, \\ y' &= 2xz + x^2 z', \\ y'' &= 2z + 4xz' + x^2 z'', \end{aligned}$$

et en reportant dans l'équation (2.30) après simplification, on obtient

$$x^4z'' + x^3z' = x^2,$$

et en divisant les deux membres par x^3, il vient

$$xz'' + z' = \frac{1}{x}.$$

La solution générale de la dernière équation est

$$z = \frac{1}{2}\ln^2 x + C_1x + C_2 \quad \textit{si } x \in]0, +\infty[.$$

D'où, la solution générale de (2.30) est :

$$y = \frac{x^2}{2}\ln^2 x + C_1x^3 + C_2x^2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

2.4.1 La méthode de variation des constantes (méthode de Lagrange)

Si l'on connait le système fondamental de solutions de l'équation homogène associée (2.28), la solution générale de l'équation non homogène (2.29) peut s'obtenir aussi par la méthode de variation des constantes (méthode de Lagrange).
La solution générale de l'équation (2.28) est de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

où C_1 C_2,..., C_n sont des constantes arbitraires.
On cherchera la solution de l'équation (2.29) sous la forme

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n, \tag{2.31}$$

où $C_1(x)$ $C_2(x)$,..., $C_n(x)$ sont des fonctions inconnues pour l'instant. Pour les déterminer on obtient le système

$$\begin{cases} C_1^{'} y_1 + C_2^{'} y_2 + ... + C_n^{'} y_n = 0 \\ C_1^{'} y_1^{'} + C_2^{'} y_2^{'} + ... + C_n^{'} y_n^{'} = 0 \\ .... \\ C_1^{'} y_1^{(n-1)} + C_2^{'} y_2^{(n-1)} + ... + C_n^{'} y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \tag{2.32}$$

En résolvant ce système par rapport à $C_i'(x)$, $i = 1, 2, ..., n$, on obtient

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

d'où

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \tilde{C}_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

où $\tilde{C}_i$ sont des constantes arbitraires. En introduisant les valeur trouvées de $C_i(x)$ dans (2.31), on obtient la solution générale de (2.29).
En particulière, pour une équation du second ordre

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \tag{2.33}$$

Le système (2.32) est de la forme

$$\begin{cases} C_1^{'} y_1 + C_2^{'} y_2 = 0, \\ C_1^{'} y_1^{'} + C_2^{'} y_2^{'} = f(x). \end{cases} \tag{2.34}$$

En résolvant (2.34) par rapport à C_1' et C_2', on obtient

$$C_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}, \quad C_1' = \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]},$$

d'où on trouve

$$C_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]} + \tilde{C}_1, \quad C_1 = \int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]} + \tilde{C}_2,$$

où $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont des constantes d'intégration.

Remarque 2.4.2. *Pour l'équation $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, où $a_0(x) \neq 1$, le système (2.34) s'écrira*

$$\begin{cases} C_1^{'}y_1 + C_2^{'}y_2 = 0, \\ C_1^{'}y_1^{'} + C_2^{'}y_2^{'} = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Exemple 2.4.3. *Intégrant*

$$y'' + y' = \tan x \tag{2.35}$$

La solution de l'équation homogène associée est de la forme

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

et donc, son système fondamental de solution sera

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x.$$

Cherchons la solution générale de l'équation donnée en appliquant la méthode de variation des constantes arbitraires :

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

où $C_1(x)$, $C_2(x)$ sont des fonctions de x pour l'instant inconnues qu'on doit déterminer. Composons à cet effet le système suivant :

$$\begin{cases} C_1^{'} \cos x + C_2^{'} \sin x = 0 \\ -C_1^{'} \sin x + C_2^{'} \cos x = \tan x, \end{cases}$$

On en tire $C_1^{'} = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \dfrac{1}{\cos x}$, $C_2^{'} = sinx$. En intégrant, on obtient

$$C_1(x) = \sin x - \frac{1}{2} \ln \left|1 - \sin^2 x\right| + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\cos x + \tilde{C}_2.$$

En introduisant ces valeurs de $C_1(x)$ et $C_2(x)$ dans l'expression de y on trouve la solution générale de l'équation (2.35)

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x - \frac{\cos x}{2} \ln \left|1 - \sin^2 x\right|.$$

2.4.2 Intégration des équations différentielles linéaire d'ordre n à l'aide des séries entière

Cette méthode est commode pour les équations différentielles linéaire d'ordre $(n = 2)$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.36}$$

Supposons que les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ puissent être représentés sous forme de séries suivant les puissances entières positives de x si bien que l'équation (2.36) peut s'écrire sous la forme

$$y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)y' + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...)y = 0. \tag{2.37}$$

Cherchons la solution de cette équation aussi sous la forme d'une série entière

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{2.38}$$

En introduisant cette expression de y et de ces dérivées dans (2.37), on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \tag{2.39}$$

En multipliant les séries entières, en regroupant les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de x au premier membre de (2.39), on obtient une série d'équations

$$\begin{aligned}
&2.1c_2 + a_0c_1 + b_0c_O = 0,\\
&3.2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0,\\
&4.3c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Chacune des équations suivantes (2.40) comporte un coefficient de plus que l'équation précédente. Les coefficients c_0 et c_1 restent arbitraires et jouent le rôle de constantes arbitraires. La première des équations (2.40) donne c_2, la deuxième c_3, la troisième c_4 et ainsi de suite. En général, à partir de la $(k+1)$-ième équations on peut déterminer c_{k+2}, connaissant c_0, c_1,...,c_{k+1}.
En pratique il est commode de procéder comme suit : d'après le schéma décrit plus haut on cherche deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$, en choisissant pour $y_1(x)$, $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ et pour $y_2(x)$, $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$, ce qui est équivalent aux conditions initiales suivantes :

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Toute solution de l'équation (2.36) sera une combinaison linéaire des solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$.
Si les conditions initiales sont de la forme $y(0) = A$, $y'(0) = B$, il est évident que

$$y = Ay_1(x) + By_2(x).$$

On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.4.4. *Si les séries*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \textit{et} \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

convergent pour $|x| < R$, alors la série entière (2.38) construite par le procédé indiqué plus haut sera aussi convergente pour toutes les valeurs de x et constituera une solution de l'équation (2.36).

En particulier, si $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes en x, la série (2.38) sera convergente pour toute valeur de x.

Exemple 2.4.5. *Résoudre sous la forme d'une série entière l'équation suivante :*

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \tag{2.41}$$

Cherchons la solution $y(x)$ sous la forme de la série

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k,$$

alors

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

Remplaçons ces expression dans l'équation (2.41), on trouve :

$$4x \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0.$$

En identifiant les coefficients de x à zéro, on obtient :

$$4k(k+1)a_{k+1} + 2(k+1)a_{k+1} - a_k = 0 \quad \textit{ou } a_{k+1} = \frac{a_k}{(2k+1)(2k+2)} \ \textit{(Forme de récurrence).}$$

D'où

$$a_1 = \frac{a_0}{1.2} = \frac{1}{2\,!},\ a_2 = \frac{a_1}{3.4} = \frac{1}{4\,!}, ...,\ a_k = \frac{1}{(2k)\,!},\ ....$$

Par conséquent

$$y(x) = 1 + \frac{x}{2\,!} + \frac{x^2}{4\,!} + ... + \frac{x^k}{(2k)\,!} + ...$$

Si on pose $x = t^2$, alors $y(t^2) = 1 + \frac{t^2}{2\,!} + \frac{t^4}{4\,!} + ... + \frac{t^2 k}{(2k)\,!} + ... = \cosh t.$
Donc, la solution est

$$y(x) = \cosh\sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}.$$

2.5 Exercices du chapitre

Exercice 2.6. *Intégrer les équations différentielles suivantes (Abaissement de l'ordre)*

1. $y''' = \sin x + \cos x$
2. $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$
3. $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$
4. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$
5. $yy'' = 1 + (y')^2$

Solutions.

1. En intégrant successivement l'équation donnée, on obtient

$$\begin{aligned}
y'' &= -\cos x + \sin x + C_1, \\
y' &= -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2, \\
y &= \cos x - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3
\end{aligned}$$

2. Intégrant cette équation successivement trois fois, il vient

$$\begin{aligned}
y'' &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1, \\
y' &= -\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x + C_1 x + C_2, \\
y &= -\frac{x}{2} \ln^2 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3
\end{aligned}$$

3. Posons $y'' = p$. Après cela l'équation prend la forme

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}.$$

En séparant les variables et intégrant, on obtient

$$p = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}$$

Remplaçons p par y'', il vient

$$y'' = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}$$

En intégrant successivement, on aura

$$y' = \frac{e^{x+C_1} + e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2 \quad \text{et} \quad y = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2 x + C_3.$$

où

$$y = \sinh(x + C_1) + C_2 x + C_3$$

4. L'équation ne contient pas de variable indépendante de x. En posant $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, on obtient une équation de Bernoulli ($\alpha = 2$)

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}.$$

En effectuant la substitution $z = p^2$, on la ramène à une équation linéaire

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y},$$

dont la solution générale est $z = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$. En remplaçant z par $p = (y')^2$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}.$$

Séparons les variables et intégrons, il vient

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1} \quad \text{ou} \quad (x + C_2)^2 = e^{y} + \frac{C_1}{4}$$

5. L'équation ne contient pas de variable indépendante de x. En posant $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, on obtient

$$yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \quad \text{ou} \quad \frac{pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Séparons les variables et intégrons, il vient

$$1 + p^2 = C_1 y^2 \quad \text{ou} \quad p^2 = C_1 y^2 - 1$$

En remplaçant p par $y' = \dfrac{dy}{dx}$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y^2 - 1} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\int dx.$$

Donc la solution générale de l'équation donnée est

$$y = \pm C_1 \cosh(\frac{x + C_2}{C_1}).$$

Exercice 2.7. *Résoudre les équations différentielles linaires suivantes :*

a) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$

b) $y''' + 2y'' + y' = 0$

c) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$

d) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y^{(2)} + y^{(1)} - 2y = 0$

e) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

f) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$

g) $y'' + y' = 4x^2e^x$

h) $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$

i) $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$

j) $y'' + y = \sin 2x$

k) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

l) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$

m)$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2(\frac{x}{2})$

Solutions.

a) L'équation

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0, \tag{2.42}$$

est une équation différentielle linéaire du 3ème ordre homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée à (2.42) est $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$ ayant comme racines

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Comme les racines sont réelles et simples, alors la solution générale de (2.42) est

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$$

b) L'équation

$$y''' + 2y'' + y' = 0, \tag{2.43}$$

est une équation différentielle linéaire du 3ème ordre homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée à (2.43) est $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$ ayant comme racines

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ racine simple} \\ \lambda_2 = -1 \text{ racine double} \end{cases}$$

D'où, la solution générale de (2.43) est

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3$$

c) L'équation

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0, \tag{2.44}$$

est une équation différentielle linéaire du 3ème ordre homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée à (2.44) est $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ ayant comme racines

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ racine simple} \\ \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i \text{ racines complexes conjuguées} \end{cases}$$

D'où, la solution générale de (2.44) est

$$y = C_1 + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin x$$

d) L'équation

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y^{(2)} + y^{(1)} - 2y = 0, \tag{2.45}$$

est une équation différentielle linéaire du 5ème ordre homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée à (2.45) est $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ayant comme racines

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ racine simple} \\ \lambda_{2,3} = \pm i \text{ racines complexes conjuguées de multiplicité 2} \end{cases}$$

D'où, la solution générale de (2.45) est

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$$

e) L'équation

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x, \tag{2.46}$$

est une équation différentielle linéaire du 3ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène

$$y''' - y'' + y' - y = 0, \tag{2.47}$$

est $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ ayant comme racines

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ racine simple} \\ \lambda_{2,3} = \pm i \text{ racines complexes conjuguées} \end{cases}$$

D'où, la solution générale de (2.47) est

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

Les λ_i $(i = 1, 2, 3)$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont des constants à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.46), on obtient

$$-2ax^2 + (2a - b)x + (b - 2a - c) = x^2 + x$$

D'où on tire le système

$$\begin{cases} -a = 1, \\ 2a - b = 1, \\ b - 2a - c = 0, \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = -3, \\ c = -1, \end{cases}$$

et par suite

$$y_p = -x^2 - 3x - 1$$

La solution générale de l'équation (2.46) est

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1.$$

f) L'équation
$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x, \tag{2.48}$$
est une équation différentielle linéaire du 3ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène
$$y''' - y'' = 0, \tag{2.49}$$
est $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ ayant comme racines
$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \text{ racine double} \\ \lambda_3 = 1 \text{ racine simple} \end{cases}$$
D'où, la solution générale de (2.49) est
$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$
La racine $\lambda_{1,2} = 0$ est racine de l'équation caractéristique d'ordre 2, donc on cherche une solution particulière sous la forme
$$y_p = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2,$$
où a, b et c sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.48), on obtient
$$-12ax^2 + (24a - 6b)x + (6b - 2c) = 12x^2 + 6x$$
D'où on tire le système
$$\begin{cases} -12a = 12, \\ 24a - 6b = 6, \\ 6b - 2c = 0, \end{cases}$$
dont la solution est
$$\begin{cases} a = -1, \\ b = -5, \\ c = -15, \end{cases}$$
et par suite
$$y_p = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$$
La solution générale de l'équation (2.48) est
$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

g) L'équation
$$y'' + y' = 4x^2 e^x, \tag{2.50}$$
est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène
$$y'' + y' = 0, \tag{2.51}$$
est $\lambda^2 + \lambda = 0$ ayant comme racines
$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ racine simple} \\ \lambda_2 = -1 \text{ racine simple} \end{cases}$$

D'où, la solution générale de (2.51) est

$$y = C_1 + C_2 e^{-x}$$

Les racine $\lambda_{1,2}$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^x,$$

où a, b et c sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.50) et en simplifiant les deux membres par e^x, on obtient

$$2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c = 4x^2$$

D'où on tire le système

$$\begin{cases} 2a = 4, \\ 6a + 2b = 0, \\ 2a + 3b + 2c = 0, \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = -6, \\ c = 7, \end{cases}$$

et par suite

$$y_p = 2x^2 - 6x + 7.$$

La solution générale de l'équation (2.50) est

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + 2x^2 - 6x + 7.$$

h) L'équation

$$y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}, \tag{2.52}$$

est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène

$$y'' + 10y' + 25y = 0, \tag{2.53}$$

est $\lambda^2 + 10\lambda + 2 = (\lambda + 5)^2 = 0$ ayant comme racines

$$\lambda_{1,2} = -5 \text{ racine double}$$

D'où, la solution générale de (2.53) est

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-5x}$$

Le nombre -5 est racine d'ordre de multiplicité 2 de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = ax^2 e^{-5x},$$

où a est une constante à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.52) et en simplifiant les deux membres par e^{-5x}, on obtient

$$a = 2$$

et par suite

$$y_p = 2x^2 e^{-5x}$$

La solution générale de l'équation (2.52) est

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}.$$

i) L'équation
$$y'' + 3y' + 2y = x\sin x, \tag{2.54}$$
est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène
$$y'' + 3y' + 2y = 0, \tag{2.55}$$
est $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ayant comme racines
$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \text{ racine simple} \\ \lambda_2 = -1 \text{ racine simple} \end{cases}$$
D'où, la solution générale de (2.55) est
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$
Le nombre $\pm i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme
$$y_p = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x,$$
où a, b, c et d sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.54), on obtient
$$[(a+3b)x + 3a + c + 2b + 3d]\cos x + [(-3a+b)x - 2a - 3c + 3b + d]\sin x = x\sin x$$
On en déduit un système d'équations linéaires en a, b, c, d :
$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 3a + c + 2b + 3d = 0 \\ -3a + b = 1 \\ -2a - 3c + 3b + d = 0 \end{cases}$$
La résolution de ce système donne
$$\begin{cases} a = -\dfrac{3}{10} \\ b = \dfrac{17}{50} \\ c = \dfrac{1}{10} \\ d = \dfrac{3}{25}, \end{cases}$$
et la solution particulière y_p s'écrira sous la forme
$$y_p = (-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50})\cos x + (\frac{1}{10}x + \frac{3}{25})\sin x.$$
La solution générale de l'équation (2.54) est
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50})\cos x + (\frac{1}{10}x + \frac{3}{25})\sin x.$$

j) L'équation
$$y'' + y = \sin 2x, \tag{2.56}$$
est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène
$$y'' + y = 0, \tag{2.57}$$
est $\lambda^2 + 4 = 0$ ayant comme racines
$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \text{ racines complexes conjuguées}$$
D'où, la solution générale de (2.57) est
$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$
Comme $\lambda_{1,2}$ sont des racines de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme
$$y_p = x(a \cos 2x + b \sin 2x),$$
où a et b sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.56), et en identifiant on trouve
$$a = -\frac{1}{4},\ b = 0,$$
donc la solution particulière y_p s'écrira sous la forme
$$y_p = -\frac{x}{4} \cos 2x.$$
La solution générale de l'équation (2.56) est
$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$$

k) L'équation
$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x, \tag{2.58}$$
est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène
$$y'' - 6y' + 9y = 0, \tag{2.59}$$
est $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ ayant comme racines
$$\lambda_{1,2} = 3 \text{ racine double}$$
D'où, la solution générale de (2.59) est
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$
Les nombres $1 \pm i$ ne sont pas des racines de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme
$$y_p = (a \cos 2x + b \sin 2x)e^x,$$

où a et b sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.58), et en identifiant on trouve

$$a = 4, \; b = 3$$

donc la solution particulière y_p s'écrira sous la forme

$$y_p = (4\cos 2x + 3\sin 2x)e^x.$$

La solution générale de l'équation (2.58) est

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + (4\cos 2x + 3\sin 2x)e^x$$

l) L'équation

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x \tag{2.60}$$

est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \tag{2.61}$$

est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ayant comme racines

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \text{ racines complexes conjuguées}$$

D'où, la solution générale de (2.61) est

$$y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x}$$

Le nombre $-1+2i$ etant une racine simple de l'équation caractéristique, une solution particulière devra sous la forme

$$y_p = x(a\cos 2x + b\sin 2x)e^{-x},$$

où a et b sont des constantes à déterminer. En introduisant l'expression de y_p dans l'équation (2.60), et en identifiant on trouve

$$a = 0, \; b = \frac{1}{4}$$

donc la solution particulière y_p s'écrira sous la forme

$$y_p = \frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x.$$

La solution générale de l'équation (2.60) est

$$y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x} + \frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x$$

m) L'équation

$$y'' - 2y' + 2y = e^x\sin^2(\frac{x}{2}) \tag{2.62}$$

est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre homogène à coefficients constants avec second membre.
En utilisant les identités trigonométriques connues, ramenons le second membre de l'équation

(2.62) à la forme $f(x) = e^x \sin^2(\frac{x}{2}) = e^x(\frac{1-\cos x}{2}) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^x \cos x = f_1(x) + f_2(x)$
L'équation initiale (2.62) s'écrira

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^x \cos x \tag{2.63}$$

L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + 2y = 0$: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ admet des racines complexes $\lambda = 1 \mp i$
La solution de l'équation homogène est donc $y_h = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.
Pour chercher une solution particulière de l'équation (2.63), utilisons le principe de superposition. A cet effet, cherchons des solutions particulières des deux équations

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^x \tag{2.64}$$

$$y'' - 2y' + 2y = -\frac{1}{2}e^x \cos x \tag{2.65}$$

En se servant de la méthode des coefficients indéterminés, on trouve des solutions particulières y_{p_1}, y_{p_2} des équations (2.64) et (2.65) respectivement :

$$y_{p_1} = \frac{1}{2}e^x \tag{2.66}$$

$$y_{p_2} = x(-\frac{1}{4}\sin x)e^x = -\frac{x}{4}\sin x e^x \tag{2.67}$$

D'après le principe de superposition, une solution particulière de l'équation (2.63) sera

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{x}{4}\sin x e^x \tag{2.68}$$

Conclusion : la solution générale est

$$(C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\sin x)e^x, \tag{2.69}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles arbitraires

Exercice 2.8. *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

1. $x^2y'' + 2xy - 6y = 0$
2. $x^3y''' + 3xy^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
3. $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$
4. $xy'' + 2y' + xy = 0$ *sachant que* $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ *est sa solution particulière*
5. $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = \dfrac{1}{x}$
6. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$
7. $y'' + xy + y = 0$ *(par la méthode des séries entières)*

Solutions.

1. L'équation donnée est une équation d'Euler.
Premier procédé : Effectuons le changement de variable $x = e^t$, il vient

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt},\\
y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-t}}{e^t} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}),
\end{aligned}
$$

et l'équation prend la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

L'équation caractéristique ayant comme racines $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. La solution générale de la dernière équation sera

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}.$$

Mais puisque $x = e^t$, on a

$$y = C_1x^{-3} + C_2x^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2.$$

Deuxième procédé : Cherchons la solution de l'équation donnée sous la forme $y = x^k$, où k est un nombre inconnu. On trouve

$$
\begin{aligned}
y' &= kx^{k-1}\\
y'' &= k(k-1)x^{k-2}.
\end{aligned}
$$

En portant dans l'équation on obtient

$$x^2k(k-1)x^{k-2} + 2x^kx^{k-1} - 6x^k = 0,$$

où

$$x^k[k(k-1) + 2k - 6] = 0.$$

Mais puisque $x^k \not\equiv 0$, on a $k(k-1) + 2k - 6 = k^2 + k - 6 = 0$. Les racines de cette équation sont $k_1 = -3$, $k_2 = 2$. A ces racines correspond le système fondamental de solutions $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^2$ et la solution générale sera comme dans le premier procédé

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2.$$

2. L'équation différentielle donnée est d'Euler. Posons $x = e^t$, on obtient

$$\begin{cases} y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}; \\ y'' = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}); \\ y''' = e^{-3t}(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}) \end{cases}$$

Si on remplace y, y' et y''' dans l'équation donnée, on obtient : $\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ dont l'équation caractéristique $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ admet une racine évidente $\lambda = 1$. D'où par division par $\lambda - 1$ on trouve $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$. Alors $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. Par conséquent, $\lambda = 1$ est une racine double ($s = 2$) et $\lambda = -2$ est simple .
Conclusion : la solution générale est

$$y = C_1e^{-2t} + (C_2 + C_3t)e^t = C_1x^{-2} + (C_2 + C_3 \ln x)x,$$

où C_1, C_2 et C_3 des constantes réelles .
Deuxième méthode : Cherchons la solution sous la forme $y = x^k$ $(k \in \mathbb{R})$. On trouve

$$\begin{cases} y' = kx^{k-1}; \\ y'' = k(k-1)x^{k-2}; \\ y''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3} \end{cases}$$

En portant dans l'équation donnée on obtient $k(k-1)(k-2)+3k(k-1)-2k+2 = (k-1)(k^2 + k-2) = 0$. Les racines de cette équation sont $k = 1$ (racine double) $k = -2$ (racine simple). A ces racines correspond le système fondamental des solutions $y_1 = x^{-2}$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x \ln x$ et la solution générale sera comme dans le premier procédé

$$y = C_1x^{-2} + (C_2 + C_3 \ln x)x.$$

3. L'équation caractéristique $k(k-1) - k - 2 = 0$ possède les racines $k_1 = 1 - i$, $k_2 = 1 + i$. La solution générale de l'équation homogène associée sera donc

$$y_h = x(C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)).$$

Une solution particulière sera cherchée sous la forme

$$y_p = x(A \ln x + B);$$

on a

$$y_p' = A \ln x + B + A,$$
$$y_p'' = \frac{A}{x}.$$

Portant dans l'équation donnée, on obtient

$$Ax - x(A\ln x + A + B) + 2x(A\ln x + B) = x\ln x,$$

c'est à dire

$$Ax\ln x + Bx = x\ln x,$$

d'où $A = 1$, $B = 0$. Ainsi $y_p = x\ln x$.
La solution générale sera

$$y = x(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)) + x\ln x.$$

4. Posons $y = \dfrac{\sin x}{x}z$ où z est une nouvelle fonction inconnue de x ; alors

$$y' = y_1'z + y_1z', \quad y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''.$$

Portant dans l'équation donnée, il vient

$$(xy_1'' + 2y_1'' + xy_1)z + xy_1z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0.$$

Mais puisque $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ est une solution particulière de l'équation donnée, on a

$$xy_1'' + 2y_1' + xy_1 = 0$$

et

$$xy_1''z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0. \tag{2.70}$$

Mais $y_1' = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}$ et donc $xy_1' + y_1 = \cos x$ et l'équation (2.70) devient

$$z''\sin x + 2z'\cos x = 0. \tag{2.71}$$

Ecrivons (2.71) sous la forme

$$\frac{z''}{z'} + 2\frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

On obtient

$$(\ln|z'| + 2\ln|\sin x|)' = 0,$$

d'où

$$\ln|z'| + 2\ln|\sin x| = \ln\tilde{C}_1 \quad \text{ou} \quad z'\sin^2 x = \tilde{C}_1.$$

L'intégration de cette équation donne

$$z = -\tilde{C}_1\cot x + C_2$$

et par suite la solution générale de l'équation donnée sera

$$y = -\tilde{C}_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x},$$

ou encore

$$y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x} \ (C_1 = -\tilde{C}_1).$$

5. La solution générale de l'équation homogène associée est de la forme (voir 4)

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x},$$

et donc, son système fondamental de solutions sera

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{x}.$$

Cherchons la solution générale de l'équation donnée en appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires :

$$y = C_1(x) \frac{\sin x}{x} + C_2(x) \frac{\cos x}{x},$$

où $C_1(x)$, $C_2(x)$ sont des fonctions de x pour l'instant inconnues qu'on doit déterminer. Composons à cet effet le système suivant :

$$\begin{cases} C_1'(x) \dfrac{\sin x}{x} + C_2'(x) \dfrac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x)(\dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}) + C_2'(x)(\dfrac{-x \sin x - \cos x}{x} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

On en tire $C_1'(x) = \cos x$, $C_2'(x) = -\sin x$. En intégrant, on obtient

$$C_1(x) = \sin x + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \cos x + \tilde{C}_2$$

En introduisant ces valeurs de $C_1(x)$ et $C_2(x)$ dans l'expression de y on trouve la solution générale de l'équation donnée

$$y = \tilde{C}_1 \frac{\sin x}{x} + \tilde{C}_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}.$$

6. L'équation homogène associée sera $y'' + y = 0$. Son équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ possède des racines imaginaires pures $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ et la solution de l'équation homogène est de la forme

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

La solution générale de l'équation initiale sera cherchée sous la forme

$$y_h = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x. \tag{2.72}$$

où $C_1(x)$, $C_2(x)$ sont des fonctions inconnues de x. Pour les rechercher, composons le système suivant :

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Résolvons ce système par rapport à $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$, il vient $C_1'(x) = -\tan x$, $C_2'(x) = 1$. Intégrons, il vient

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = x + \tilde{C}_2$$

En introduisant les expression de $C_1(x)$ et $C_2(x)$ dans (2.72) on obtient la solution générale de l'équation initiale

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

7. Cherchons $y_1(x)$ sous forme d'une série

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k,$$

alors

$$y_1'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}, \ y_1''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

En introduisant $y_1(x)$, $y_1'(x)$ et $y_1''(x)$ dans l'équation donnée, on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0. \tag{2.73}$$

En regroupant dans (2.73) les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de x, on obtient des relations permettant de déterminer $c_0, c_1, ..., c_n, ...$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ((k+2)(k+1) c_{k+2} + (k+1) c_k) x^k = 0.$$

Posons, pour fixer les idées, $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$. Alors on trouve tout de suite que

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0. \tag{2.74}$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} 2c_2 + c_0 = 0, \ \text{d'où, compte tenu de (2.74)} \ c_2 = -\dfrac{1}{2}, \\ 3.2c_3 - 2c_1 = 0, \ \text{d'où, compte tenu de (2.74)} \ c_3 = 0, \\ 4.3c_4 + 3c_2 = 0, \ \text{d'où,} \ c_4 = \dfrac{1}{2.4}, \\ 5.4c_5 + 4c_3 = 0, \ \text{d'où,} \ c_5 = 0, \\ \text{.......................................} \end{cases}$$

Par conséquent

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2.4} x^4 + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2.4...2n} + ... \tag{2.75}$$

De façon analogue, en prenant

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \tag{2.76}$$

et les conditions $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, on obtient

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \tag{2.77}$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} x^5 + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1.3.5...(2n+1)} + ... \tag{2.78}$$

La solution générale de l'équation donnée sera de la forme

$$y = A y_1(x) + B y_2(x),$$

où $y_1(x)$, $y_2(x)$ sont définies par les formules (2.75) et (2.78) respectivement, alors que A et B sont des constantes arbitraires telles que $y(0) = A$, $y'(0) = B$.

Chapitre 3

Equations différentielles. Résultats fondamentaux

Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes généraux d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires. Il s'agit du chapitre central de la théorie, de ce fait nécessairement assez abstrait.

3.1 Définitions. Solutions maximales et globales.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$f \ : \ U \to \mathbb{R}^n$$

une application continue. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = f(x, y), \quad (x, y) \in U, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

3.1.1 Solutions maximales

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 3.1.1. *Soient $y \ : \ I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \ : \ \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, des solutions de (3.1). On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}_{|I} = y$.*

Définition 3.1.2. *On dit qu'une solution $y \ : \ I \to \mathbb{R}^n$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} \ : \ \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ avec $\tilde{I} \underset{\neq}{\supset} I$.*

Théorème 3.1.3. *Toutes solutions y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

3.1.2 Solutions globales

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times \Omega$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.4. *Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.*

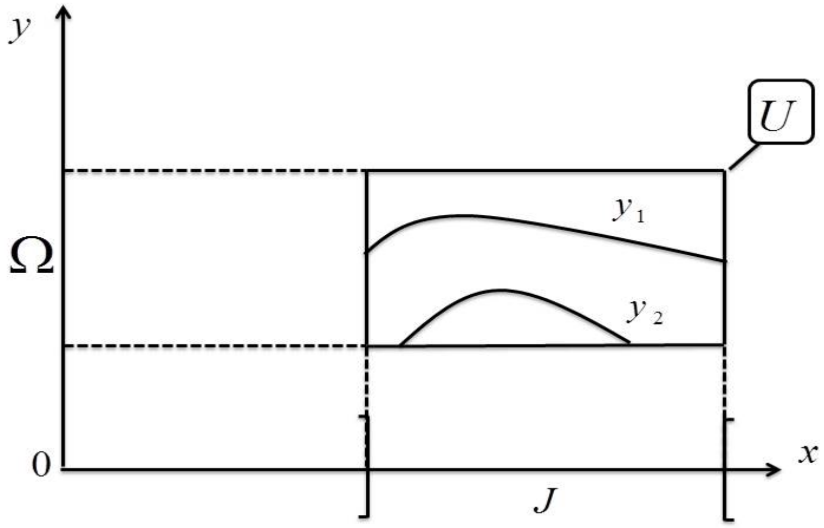

FIGURE 3.1 –

Remarque 3.1.5. *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Sur le figure 3.1 par exemple, $y_1(x)$ est globale tandis $y_2(x)$ est maximale mais non globale.

Exemple 3.1.6. *Considérons l'équation différentielle*

$$y' = y^2 \tag{3.2}$$

définie sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Cherchons les solutions $x \to y(x)$ de (3.2).

- *On a d'une part la solution $y(x) = 0$.*
- *Si y ne s'annule pas, (3.2) s'écrit $\dfrac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration*

$$-\frac{1}{y(x)} = x + C, \quad y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et sur $]-C, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(x) = 0$ est la seule solution globale de (3.2).

Exemple 3.1.7. *Le problème*

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admet une solution maximale $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$ qui n'est pas globale. Il n'y a pas de solution globales

Exemple 3.1.8. *Le problème*

$$\begin{cases} y' = -xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *admet une solution globale* $y(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 3.1.9. *Le problème*

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

définie sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$ *admet plusieurs solutions maximales :* $y(x) \equiv 0$,

$$y_a(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, a] \\ \tan^2(x-a) & x \in [a, a+\dfrac{\pi}{2}[\end{cases}$$

3.2 Régularité des solutions

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.

Théorème 3.2.1. *Si* $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est de classe* C^k, *toute solution de (3.1) est de classe* C^{k+1}.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k.

- $k = 0$: f continue.
  Par hypothèse $y : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable, donc continue. Par conséquent $y'(x) = f(x, y(x))$ est continue, donc y de classe C^1.
- Si le résultat est vrai à l'ordre $k-1$, alors y est au moins de classe C^k. Comme f est de classe C^k,il s'ensuit que y' est de classe C^k comme composée de fonctions de classe C^k, donc y est de classe C^{k+1}.

□

3.2.1 Calcul des dérivées successives d'une solution y

On suppose pour simplifier $n = 1$. En dérivant la relation $y'(x) = f(x, y(x))$ il vient

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x), \\ y'' &= f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y) = f^{[1]}(x, y), \end{aligned}$$

avec $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$. Notons de manière générale l'expression de la dérivée k-ième $y^{(k)}$ en fonction de x, y sous la forme

$$y^{(k)} = f^{[k-1]};$$

d'après ce qui précède $f^{[0]} = f$, $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$. En dérivant une nouvelle fois, on trouve

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y)y' \\ &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y)f(x, y). \end{aligned}$$

On obtient donc les relations de récurrence

$$y^{(k+1)} = f^{[k]}(x, y)ff^{[k]} \qquad = (f^{[k-1]})'_x + (f^{[k-1]})'_y f, \quad \text{avec } f^{[0]} = f.$$

3.3 Problème de Cauchy, théorème de Cauchy-Lispschitz

En mécanique, lorsqu'on détermine un mouvement, on dispose non seulement d'une équation différentielle mais encore de conditions initiales. On obtient alors, en générale, une et une seule solution du problème posé.
Rappelons maintenant la définition des équations différentielles d'ordre n.

Définition 3.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace de Banach. Soit une application $f : U \subset \mathbb{R} \times E^n \to \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$). On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre n*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3.3}$$

toute application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), n fois dérivable et vérifiant

(i) pour tout $x \in I$, $(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \in U$;

(ii) pour tout $x \in I$, $f(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) = \varphi^{(n)}(x)$.

Dans la suite de cette partie, nous utiliserons les notations de cette définition.

Définition 3.3.2 (Problème de Cauchy)**.** *On se donne une équation différentielle*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3.4}$$

et $(x_0, y_0, ..., y_{n-1}) \in U$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$). On appelle problème de Cauchy de (3.4) en $(x_0, y_0, ..., y_{n-1})$ la recherche d'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) solution de (3.4) et vérifiant $x_0 \in I$, $\varphi(x_0) = y_0$,...,$\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.
On dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy (3.4) en $(x_0, y_0, ..., y_{n-1})$ s'il existe au moins une solution à ce problème de Cauchy et si pour toutes solutions $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $\phi : J \to \mathbb{R}$ à ce problème, les fonctions φ et ϕ coïncident sur $I \cap J$.

Remarque 3.3.3.

1. *Lorsque la fonction f vérifiant certaines hypothèses, on peut assurer l'unicité au problème de Cauchy.*

2. *Toute équation différentielle d'ordre n peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1. Avec les notations de la définition....., si on définit les applications*

$$\begin{aligned} &\psi : I \to \mathbb{R}^n \quad x \mapsto (\varphi(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \\ &G : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (x, y) = (x, y_0, ..., y_{n-1}, f(x, y)), \end{aligned}$$

   il est équivalent de dire que φ est solution de (3.3) ou que ψ est solution de $\psi' = G(x, \psi)$. On peut donc se limiter à étudier les équations différentielles du premier ordre.

Définition 3.3.4. *On dit qu'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne en la seconde variable si pour tout si pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (x_0, y_0) et $k = k(x_0, y_0) > 0$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n,\ (x, y_1) \in V,\ (x, y_2) \in V, \quad \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

Remarque 3.3.5. *Si $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont continues sur U, alors f est localement lipschitz en y sur U.*

Exemple 3.3.6.

1. *La fonction $f(y) = y^2$ est localement lipschitz sur $\mathbb{R}$; elle n'est pas lipschitz.*

2. *La fonction $f(y) = \sqrt{|y|}$ n'est pas localement lipschitz sur $\mathbb{R}$. En fait il faudrait trouver un voisinage de 0 et une constante $k > 0$ tels que $\sqrt{|y|} \leq k\,|y|$ pour y assez petit, ce qui est absurde.*

Proposition 3.3.7. *Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe est bornée. Alors f est k-lipschitzienne par rapport à $y \in U$.*

Démonstration. Utilisons le théorème des accroissement finis de $f(x, y) = \varphi(y)$ sur $]y_1, y_2[$. Donc il existe $\bar{y} \in]y_1, y_2[$ tel que $\varphi(y_1) - \varphi(y_2) = \varphi'(\bar{y})(y_1 - y_2)$, alors

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})\right| |y_1 - y_2| .$$

Mais il existe un k telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq k,$$

d'où

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2| .$$

□

Remarque 3.3.8. *La réciproque généralement, est fausse par exemple $f(x, y) = |y|$ est 1-lipschitzienne par rapport à y sur $\mathbb{R}^2$ mais elle n'admet pas une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ au point $(0, 0)$.*

Théorème 3.3.9 (CAUCHY-LIPSCHITZ)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe un intervalle I voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solution de $y' = f(x, y)$ telle que $\varphi(x_0) = y_0$. De plus, il y a unicité pour le problème de Cauchy de cette équation différentielle en (x_0, y_0).*

Démonstration. Existence. Nous aurons besoin de la notion de cylindre de sécurité. Un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ est fixé. Pour tout $r > 0$, on pose $B_r = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - y_0\| \leq r\}$ et pour tout $\alpha > 0$, $I_\alpha =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Soit V un voisinage compact de (x_0, y_0) dans Ω sur lequel f est k-lipschitzienne en seconde variable (la compacité de V est une commodité pour que f soit bornée sur V, mais même en dimension infinie, comme f est continue en (x_0, y_0), on peut choisir V telle que f soit bornée sur V). Notons M un majorant de f sur V. On peut choisir $r > 0$ et $\alpha > 0$, désormais fixés, tels que $I_\alpha \times B_r \subset V$ et $\alpha M < r$ (on dit que $I_\alpha \times B_r$ est un cylindre de sécurité pour f en (x_0, y_0)).
La fonction f est continue, toute solution est donc de classe C^1. Ainsi, une application $\varphi : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ est solution si et seulement si pour tout $x \in I$, $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ et $\varphi(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du$.
Notons Γ l'ensemble des fonctions continues $\phi : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ telles que $\phi(I_\alpha) \subset B_r$. Pour tout $\phi \in \Gamma$, l'application

$$\tilde{\phi} : I_\alpha \to \mathbb{R}^n \; x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du \tag{3.5}$$

vérifie

$$\left\|\tilde{\phi} - y_0\right\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du\right| \leq \alpha M < r,$$

donc $\tilde{\phi} \in \Gamma$. On est donc autorisé (et c'est là l'utilité du cylindre de sécurité) à définir la suite de fonctions (ϕ_n) par

$$\phi_0 \,:\, I_\alpha \to \mathbb{R}^n \; x \mapsto y_0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1} = \tilde{\phi}_n.$$

Montrons que pour tout $t \in I_\alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\| \leq rk^n \dfrac{|x-x_0|}{n!}$. Pour $n = 0$, c'est immédiat d'après (3.5). Pour passer du rang $n-1$ au rang n, il suffit d'écrire, pour $x \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned}\|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\| &\leq \left|\int_{x_0}^{x} \|f(u,\phi_n(u)) - f(u,\phi_{n-1}(u))\|\, du\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} k\,\|\phi_n(u) - \phi_{n-1}(u)\|\, du\right| \\ &\leq r\frac{k^n}{(n-1)!}\left|\int_{x_0}^{x} |u-x_0|^{n-1}\, du\right| = r\frac{k^n}{n!}\,|x-x_0|^n.\end{aligned}$$

La série de fonctions $\sum(\phi_{n+1} - \phi_n)$ converge donc normalement sur I_α, par conséquent la suite de fonction (ϕ_n) converge uniformément sur I_α. Notons ϕ la fonction limite. On a $\phi \in \Gamma$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in I_\alpha, \quad \phi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u,\phi_n(u))du,$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit $\phi(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(u,\phi(u))du$, c'est-à-dire que ϕ est solution au problème de Cauchy en (x_0, y_0) sur l'intervalle I_α.

Unicité. Soient $\varphi \,:\, I \to \mathbb{R}^n$ et $\phi \,:\, J \to \mathbb{R}^n$ deux solutions au problème de Cauchy en (x_0, y_0). En notant, pour tout $x \in I \cap J$, $M_x = \sup\limits_{u \in [x_0,x]} \|\phi(u) - \varphi(u)\|$, une récurrence sur n donne

$$\forall x \in I \cap J,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|\varphi(x) - \phi_(x)\right\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \|f(u,\varphi(u)) - f(u,\phi(u))\|\, du\right| \leq \frac{k^n}{n!}\,|x-x_0|^n\, M_x.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $\varphi(x) = \phi(x)$ pour tout $x \in I \cap J$. □

Remarque 3.3.10.

1. *L'existence au problème de Cauchy reste vraie si f est seulement supposée continue (théorème de Péano), mais il n'y a plus forcément l'unicité (voir l'exercice 3.11).*

2. *L'unicité au problème de Cauchy est riche de conséquences (voir les exercices de cette partie).*

3. *Si f est de classe C^1, f est localement lipschitzienne en la seconde variable. C'est souvent ce que l'on rencontre dans la pratique, et théorème de Cauchy-Lipschitz et alors applicable.*

4. *Pour les équations différentielles d'ordre n (en les ramenant à celles d'ordre 1 par la technique décrite plus haut), le théorème de Cauchy-Lipschitz s'exprime ainsi : si $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ est une équation différentielle d'ordre n et si f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable $y = (y_0,...,y_{n-1})$, alors il y a unicité au problème de Cauchy.*

Terminons par le corollaire suivant portant sur les solutions maximales.

Corollaire 3.3.11. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe une unique solution maximale φ de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ prenant la valeur y_0 en x_0 ; cette solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

Une outil central dans tous les problèmes d'équations différentielles est le lemme de Gronwall qui permet de déduire des bornes sur les solutions à partir d'intégrales qu'elles vérifient.

Théorème 3.3.12 (Lemme de Grönwall)**.** *Soient φ, ϕ et y trois fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \phi(s)y(s)ds. \tag{3.6}$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\phi(s)\exp(\int_s^t \phi(u)du)ds.$$

Démonstration. Posons $F(t) = \displaystyle\int_a^t \phi(s)y(s)ds$. En multipliant les deux membres de (3.6) par $\phi(t)$, on obtient $F'(t) - \phi(t)F(t) \leq \varphi(t)\phi(t)$, ce s'écrit aussi

$$G'(t) \leq \varphi(t)\phi(t)\exp(-\int_a^t \phi(s)ds) \quad \text{avec} \quad G(t) = F(t)\exp(-\int_a^t \phi(s)ds).$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\phi(s)\exp(-\int_s^t \phi(u)du)ds.$$

Or, d'après (3.6), $y(t) \leq \varphi(t) + G(t)\exp(\displaystyle\int_a^t \phi(s)ds)$, d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci-dessus. □

Corollaire 3.3.13. *Soient ϕ et $y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et vérifiant*

$$\exists c \geq 0,\ \forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq c + \int_a^t \phi(s)y(s)ds.$$

Alors

$$y(t) \leq c\ \exp(\int_a^t \phi(s))ds.$$

Démonstration. Il s'agit du lemme de Grönwall dans le cas particulière où φ est la fonction constante égale à c, on a donc pour tout $t \in [a,b]$

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\,\phi(s)\exp(\int_s^t \phi(u)du)ds = c - c\left[\exp(\int_s^t \phi(u)du\right]_{s=a}^{s=t} = c\ \exp(\int_a^t \phi(s)ds).$$

□

Citons enfin une application intéressante du lemme de Grönwall, utile dans les majorations d'erreurs sur les solutions d'équations différentielles.

Corollaire 3.3.14. *Soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\exists c > 0,\ \exists \beta \geq 0,\ \forall t \in [a,b], \quad \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha\|y(t)\|.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \quad \|y(t)\| \leq \|y(a)\| e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)} - 1).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(a)\| + \|y(t) - y(a)\| \leq \|y(a)\| + \int_a^t \|y'(s)\|\,ds \leq \|y(a)\| + \beta(t-a) + \alpha\int_a^t \|y(s)\|\,ds,$$

puis on applique le lemme de Grönwall et on conclut en intégrant par parties. □

3.3.1 Théorèmes sur les solutions globales

Théorème 3.3.15. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $k : I \to \mathbb{R}^+$ continue telle que pour tout $x \in I$ l'application $y \to f(x, y)$ est lipschitz de rapport $k(x)$. Alors tout solution maximale du problème $y' = f(x, y)$ est globale.*

Exemple 3.3.16. *Toute solution maximale de*

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

est globale.
En effet,

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ est continue*
2. *La fonction $y \to f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ est lipschitzienne de rapport $k(x) = |x|$ (continue sur $\mathbb{R}$), car Pour tout $y, z \in \mathbb{R}$ on a*

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq |x| \frac{|y^2 - z^2|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + z^2}} \leq |x| \frac{(|y| + |z|)\,|y - z|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + z^2}} \leq |x|\,|y - z|\,.$$

   Puisque $\dfrac{|y - z|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + z^2}} \leq 1.$
   D'où d'après le théorème 3.3.15 toute solution maximale de (3.7) est globale.

Théorème 3.3.17. *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que*

$$\|f(x, y)\| \leq \alpha(x) + \beta(x)\,\|y\|\,,$$

pour α, β positives et continues. Alors les solutions du problème

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

sont globales.

Théorème 3.3.18. *Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et bornée. Alors toute solution de*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale.

Remarque 3.3.19.

1. *La solution unique du problème de Cauchy (3.4) peut être construit par la méthode approximation successives suivante :*

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_1(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt + y_0 \\ y_2(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt + y_0 \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt + y_0 \end{aligned}$$

2. *La méthode approximation successives se base sur la proposition suivante :*

Proposition 3.3.20. *Si f est continue sur un voisinage du point (x_0, y_0). Alors, le problème de Cauchy (3.4) est équivalent au problème $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.*

Démonstration.

- Si $y' = f(x, y)$, alors par intégration on a $\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_O}^{x} f(t, y(t))dt$. Donc $y - y_0 = \int_{x_O}^{x} f(t, y(t))dt$ et par conséquent $y = y_0 + \int_{x_O}^{x} f(t, y(t))dt$.
- Inversement, si $y = y_0 + \int_{x_O}^{x} f(t, y(t))dt$, alors en dérivant on trouve $y' = f(x, y)$. De plus pour $x = x_0$ on a $y(x_0) = y_0$.

□

Théorème 3.3.21 (Théorème de Picard). *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si :

1. *f est continue dans le rectangle $\overline{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\right\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$*
2. *f est lipschitzienne par rapport à y dans $\overline{D}$.*

Alors il existe une solution du problème de Cauchy définie sur l'intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$, où $h = \min(a, \dfrac{b}{M})$ avec $M = \sup_{(x,y)\in\overline{D}} |f(x, y)|$ et cette solution est la limite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence.

$$\begin{aligned}
&y_0(x) = y_0 \\
&y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt + y_0 \\
&y_2(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt + y_0 \\
&\vdots \\
&y_n(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt + y_0
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.22. *Résoudre le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution. Appliquons le théorème de Picard (ou théorème approximation successives). Il claire que la fonction $f(x, y) = y$

a) *continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, donc sur tout voisinage $V_{(0,1)}$ du point $(0, 1)$.*

b) la dérivé partielle par rapport à y existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$.

Donc le P.C admet une solution unique $y(x)$ sur $\mathbb{R}$, par la méthode d'approximation successives on a

$$\begin{aligned}
&y_0(x) = 1\\
&y_1(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} f(t,1)dt = 1 + x\\
&y_2(x) = 1 + \int_{0}^{x} f(t,1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}\\
&\vdots\\
&y_n(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$.

Remarque 3.3.23. *La réciproque du théorème de Picard en générale n'est pas vrais.*

Exemple 3.3.24. *Le P.C suivant :*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

il admet une solution générale $y(x) = \dfrac{(x+c)^3}{8}$ *malgré que la dérivé partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^{-\frac{1}{3}}$ *n'est pas définie (n'existe pas) sur l'axe des x ($y = 0$).*

3.4 Exercices du chapitre

Exercice 3.5. *Donner les solutions maximales du problème de Cauchy suivant :*

1.

$$\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solutions.

1. $f(y) = y^3$ est localement lipschitz. Par conséquent il existe une seule solution maximale. $y(x) \equiv 0$ est la solution.

2. Il existe une seule solution, qui est $y(x) = \sqrt{2x+1}$ (la fonction $f(y) = \dfrac{1}{y}$ est localement lipschitz).

Exercice 3.6. *Montrer que toute solution maximale de*

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{x^2+y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

est globale.

Solutions.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \to f = x\sqrt{x^2+y^2}$ est lipschitz de rapport $k(x) = |x|$ (continue sur $\mathbb{R}$). En effet,

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq |x| \frac{|y^2 - z^2|}{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2}} \leq |x| \frac{|y| + |z|}{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2}} |y - z| \leq |x| \, |y - z| \, .$$

D'où, d'après le théorème 3.3.15 toute solution maximale du problème (3.8) est globale.

Exercice 3.7. *On considère le système $y' = f(x,y)$ où $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitz (de constante L) par rapport à la variable y et continue par rapport à la variable (x,y). Soient y_1 la solution correspondante à la condition initiale $y(x_0) = \tilde{y}_1$ et y_2 la solution correspondante à la condition initiale $y(x_0) = \tilde{y}_2$. Montrer que*

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \, e^{L|x-x_0|}.$$

Solution.
On a

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{x_0}^{x} y_1'(s)ds + y_1(x_0) \\ y_2(x) &= \int_{x_0}^{x} y_2'(s)ds + y_2(x_0). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Comme y_1 et y_2 sont solutions du système $y' = f(x,y)$, alors

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f(x, y_1) \\ y_2'(x) &= f(x, y_2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

En reportant (3.10) dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{x_0}^{x} f(s, y_1)ds + y_1(x_0) \\ y_2(x) &= \int_{x_0}^{x} f(s, y_2)ds + y_2(x_0). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(s,y_1) - f(s,y_2))ds + (y_1(x_0) - y_2(x_0)) \right| \\ &\leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |f(s,y_1) - f(s,y_2)| \, ds \\ &\leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| + \int_{x_0}^{x} L \, |y_1(s) - y_2(s)| \, ds \;\; (f \text{ est lipschitz de rapport } L). \end{aligned}$$

Si on pose $\alpha(x) = |y_1(x_0) - y_2(x_0)|$ et $\beta(x) = L$, en déduire, grâce au lemme de Grönwall (voir le corollaire 3.3.13)

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| \, e^{\int_{x_0}^{x} L ds} = |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \, e^{L|x-x_0|}$$

Nous vérifions aisément que α et β vérifiant les hypothèses du corollaire 3.3.13.

Exercice 3.8. *Montrer que la solution du système*

$$\begin{cases} y' = x^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

existe pour $x \in [0, 0.5]$ et que dans cette intervalle $|y| \leq 1$.

Solutions.
Soit R le rectangle $\{(x,y) \ : \ x \in [0, 0.5], \ y \in [-1, 1]\}$. On a $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |x^2 + e^{-y^2}| = \dfrac{5}{4}$. Alors d'après le théorème **??** la solution du système (3.12) $y(x)$ existe pour $0 \leq x \leq \min\left\{0.5, \dfrac{1}{\frac{5}{4}}\right\} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.9. *Montrer que la solution du système*

$$\begin{cases} y' = x^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

existe pour $x \in [0, 0.5]$.

Solutions.
Soit $R = [0, a] \times [-b, b]$. On a $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |x^2 + e^{-y^2}| = b^2 + 1$. Le théorème d'existence (théorème **??**) nous dit qu'il existe une solution dans l'intervalle $[0, \alpha]$ pour $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{b^2+1}\right\}$. Le plus grand α possible est $\dfrac{1}{2}$. Alors $y(x)$ existe pour $x \in [0, 0.5]$.

Exercice 3.10. *Vérifier le théorème d'existence et d'unicité pour les problèmes de Cauchy suivants :*

1. $$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y' = xy + e^{-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Solutions. 1. Soit le problème du Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2} \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

La solution générale de (3.13) est

$$y = \sqrt[3]{3x - 3} \tag{3.14}$$

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité ne sont pas vérifies.
En effet, aux points $(x_0, 0)$ de l'axe Ox les conditions $a)$ et $b)$ ne sont pas satisfaites (la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$ et sa dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont discontinues sur l'axe Ox et ne sont pas bornées pour

$y \to 0$.
2. Soit le problème du Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = xy + e^{-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Ici $f(x,y) = xy + e^{-y}$.
On a

a) f est évident continue sur $\mathbb{R}^2$

b) La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion. le problème du Cauchy (3.15) admet une solution unique.

Exercice 3.11. *Montrer que pour l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$y' = \begin{cases} 0 & si\, y < 0 \\ \sqrt{y} & si\, y \geq 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

il n'y a pas unicité au problème de Cauchy.

Solution. Faisons une première remarque : cette équation différentielle ne faisant pas intervenir la variable x, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution, il en de même pour toutes les fonctions $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ t \mapsto f(x-c)$ $(c \in \mathbb{R})$.
La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ pour $x \leq 0$, et $\varphi(x) = \frac{x^2}{4}$ pour $x \geq 0$, est solution comme on le vérifie facilement. Notre remarque précédente montre que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq c \\ \dfrac{(x-c)^2}{4} & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

est solutions. Mais pour $c > 0$, ces fonctions coïncident sur $\mathbb{R}^-$, et pourtant elles ne sont pas identiques. Il n'y a donc pas unicité au problème de Cauchy (le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas car il n'y a pas de caractère lipschitzien).

Exercice 3.12. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et φ, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_0) < \phi(x_0)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) < \phi(x)$.*

Solution. Raisonnons par l'absurde. S'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_1) \geq \phi(x_1)$, alors comme φ et ϕ sont continues (elle sont même de classe C^1), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \phi(u)$. Mais alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car f est de classe C^1) il y a unicité au problème de Cauchy au point u, donc $\varphi = \phi$. Ceci est absurde car $\varphi(x_0) \neq \phi(x_0)$, d'où le résultat.

Exercice 3.13. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T,.) = f(x,.). \tag{3.17}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$. Montrer que la suite $(\varphi(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone ou est constante. Dans ce dernier cas, montrer que φ est une solution T-périodique.

Solution. Comme φ est solution, la relation (3.17) montrer que la fonction $\varphi_T : x \mapsto \varphi(x+T)$ est aussi une solution. Trois cas se présentent.

(i) Si $\varphi(0) < \varphi(T) = \varphi_T(0)$, alors d'après l'exercice précédent, on a $\varphi(x) < \varphi_T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en conclut $\varphi(kT) < \varphi_T(kT) = \varphi((k+1)T)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$, autrement dit, la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}})$ est strictement croissante.

(ii) Si $\varphi(0) > \varphi_T(0)$, on montrerait en procédant de la même manière que la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}})$ est strictement décroissante.

(iii) Si $\varphi(0) = \varphi(T) = \varphi_T(0)$, alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui donne l'unicité au problème de Cauchy), $\varphi = \varphi_T$, c'est-à-dire que φ est T-périodique, et en particulier, la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}})$ est constante.

Exercice 3.14. *Après avoir vérifié les condition d'application du théorème d'existence et d'unicité de Picard construire les approximations successives $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ de la solution des problèmes de Cauchy suivants :*

1.
$$\begin{cases} y' = x - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \textit{avec } |x| \leq A \textit{ et } |y| \leq B \tag{3.18}$$

2.
$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \textit{avec } |x| \leq A \textit{ et } |y| \leq B \tag{3.19}$$

Solutions.

1. Dans le problème (3.18) la fonction $f(x,y) = x - y^2$ est un polynôme, donc elle est continue sur le domaine $|x| \leq A$ et $|y| \leq B$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |-2y| = 2\,|y| < 2B+1$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est bornée sur $|x| \leq A$ et $|y| \leq B$ et par conséquent f est lipschitzienne. Les deux conditions du théorème de Piccard sont vérifies, alors le problème de Cauchy (3.18) admet une solution unique.
Les approximations successives :
On a
$$\begin{cases} y_0(x) = 0 \\ y_1(x) = y_O + \displaystyle\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \\ y_2(x) = y_0 + \displaystyle\int_0^x (t - \frac{t^4}{4}) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} \\ y_3(x) = y_0 + \displaystyle\int_0^x (t - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{10} - \frac{t^{10}}{400}) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400} \end{cases}$$

2. Dans le problème (3.19) la fonction fonction $f(x,y) = x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc, f est continue sur le domaine $D = [-a,a] \times [0,2]$ qui contient le point $(0,1)$, $\forall a > 0$. De plus, $\forall (x,y_1); (x,y_2) \in D$. On a :
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2|,$$
d'où f est 1-lipschitzienne par rapport à y sur D. Par conséquent, les deux conditions du théorème d'existence et d'unicité sont satisfaites sur le rectangle D .

Conclusion, le problème de Cauchy admet une solution unique $y = \varphi(x)$, $\forall x \in [-a, a]$ qui est construite par la méthode d'approximation successives de Picard suivante : $y = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$; où

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y(0) = 1; \\ \varphi_1(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}; \\ \varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (t+1+t+\frac{t^2}{2})dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+\varphi_2(t))dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}; \\ \varphi_4(x) = 1 + \int_0^x (1+\varphi_3(t))dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4\times 3} + \frac{x^5}{5!}; \\ \varphi_5(x) = 1 + \int_0^x (1+\varphi_4(t))dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4\times 3} + \frac{x^5}{5\times 4\times 3} + \frac{x^6}{6!} \\ \text{Ainsi, par récurrence :} \\ \varphi_n(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4\times 3} + \frac{x^5}{5\times 4\times 3} + ... + 2\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ \text{ou bien} \\ \varphi_n(x) = 1 + x + 2[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}] + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = -1 - x + 2[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}] + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

Par conséquent, la solution du problème de Cauchy est

$$y = \lim_{n\to+\infty} [-1 - x + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}] = -1 - x + 2e^x.$$

Chapitre 4

Systèmes d'équations différentielles

L'objet de ce chapitre est de présenter des méthodes de résolution des systèmes différentiels.

Définition 4.0.1. *Un système d'équations différentielles par rapport aux inconnues $y_1, y_2, ..., y_n$ admet la forme générale suivante :*

$$f_k(x, y_1, y_1^{'}, ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2^{'}, ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n^{'}, ..., y_n^{(k_n)}) = 0, \quad k = 1, 2, .., n, \tag{4.1}$$

Lorsqu'il est résolu par rapport à aux dérivées d'ordre le plus élevé $y_1^{(k_1)}$, $y_2^{(k_2)}$,...,$y_n^{(k_n)}$ le système obtenu s'appelle système canonique. Il est de la forme

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(x, y_1, y_1^{'}, ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2^{'}, ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, y_n^{'}, ..., y_n^{(k_n-1)}) \\ y_2^{(k_2)} = f_2(x, y_1, y_1^{'}, ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2^{'}, ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, y_n^{'}, ..., y_n^{(k_n-1)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(k_n)} = f_n(x, y_1, y_1^{'}, ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2^{'}, ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, y_n^{'}, ..., y_n^{(k_n-1)}) \end{cases} \tag{4.2}$$

Définition 4.0.2. *On appelle ordre du système (4.1) le nombre p égal à*

$$p = k_1 + k_2 + ... + k_n$$

Exemple 4.0.3. *Ramener à la forme canonique le système d'équations*

$$\begin{cases} y_2 y_1^{'} - \sin(y_1^{''} - y_1) = 0 \\ \cosh(y_2^{'}) - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

Le système considéré est du troisième ordre car $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ et donc $p = 3$. En résolvant la première équation par rapport à $y_1^{''}$ et la deuxième par rapport à $y_2^{'}$, on obtient le système canonique

$$\begin{cases} y_1^{''} = \arcsin(y_1^{'} y_2) + y_1 \\ y_2^{'} = \arg\cosh(y_1 + y_2) \end{cases}$$

Définition 4.0.4. *Un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre*

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, ..., x_n), \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{4.3}$$

où t est une variable indépendante et x_1, x_2,..., x_n sont des fonctions inconnues de t, s'appelle système normal.
Le nombre n s'appelle ordre du système normal (4.3). On dit que deux systèmes d'équation différentielle sont équivalents s'ils possèdent les mêmes solutions.

Remarque 4.0.5. *Tout système canonique (4.2) peut être ramené a un système normal (4.3) équivalent et du même ordre.*

Exemple 4.0.6. *Le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 3ty = 0 \\ t\dfrac{dy}{dt} - x = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

se ramène à un système normal par un changement de variable.
En effet, on pose $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x'(t) = x_2$ *et* $y = x_3$
Donc le système (4.4) devient

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 = f_1(t, x_1, x_2, x_3), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3tx_3 = f_2(t, x_1, x_2, x_3), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{x_1}{t} = f_3(t, x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Définition 4.0.7. *On appelle solution du système (4.3) dans l'intervalle* $]a, b[$ *l'ensemble des* n *fonctions quelconques*

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t), ...,\ x_n = \varphi_n(t),$$

définies et continûment dérivables dans l'intervalle $]a, b[$ *qui transforment les équations du système (4.3) en identités valables pour toutes les valeurs de* $t \in]a, b[$.

Exemple 4.0.8. *Les fonctions* $x_1 = \varphi_1(t) = \dfrac{1}{t^2}$ *;* $x_2 = \varphi_2(t) = t \ln t$ *définies sur* $]0, +\infty[$ *sont solution du système normal suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2 + t}{t} \end{cases} \tag{4.5}$$

En effet, φ_1,$\varphi_2 \in C^1(]0, +\infty[)$ *d'une part. D'autre part on a* $\dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{2}{t^3}$, $\dfrac{dx_2}{dt} = \ln t + 1$. *En remplaçant ces expressions dans les équations du système* (4.5) *on obtient les identités*

$$\frac{2}{t^3} = \frac{2}{t^3}, \quad \ln t + 1 = \ln t + 1, \quad t \in]0, +\infty[.$$

4.1 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour le système (4.3) consiste à trouver des solutions

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), ...,\ x_n = x_n(t),$$

de ce système qui satisfont aux conditions initiales

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0, ...,\ x_n(t_0) = x_n^0, \tag{4.6}$$

où t_0, x_1^0, x_2^0,..., x_n^0 sont des nombres donnés. Un tel problème est posé généralement pour discuter la question de l'unicité des solutions d'un système différentiel.

Théorème 4.1.1 (Théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy)**.** *Soit donné le système normal d'équations différentielles (4.3) et soient des fonctions* $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$*,* $i = 1, 2, ..., n$*, définies dans un certain domaine* D *de dimension* $n + 1$ *dans lequel varient les variables* t*,* x_1*,...,* x_n*. S'il existe un voisinage* Ω *du point* $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *dans lequel les fonctions* $f_1, f_2, ..., f_n$

a) sont continues,

b) possèdent des dérivées partielles bornées par rapport aux variables x_1*,* x_2*,...,*x_n*,*

alors il existe un intervalle $t_0 - h < t < t_0 + h$ *de variation de* t *dans lequel le système normal (4.3) a une solution et une seule qui satisfait aux conditions initiales (4.6).*

Lorsqu'on ne fixe pas des conditions initiales le système différentiel peut avoir plusieurs solutions définies à des constantes d'intégration près. L'ensemble des n fonctions dérivables

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, ..., C_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.7}$$

de la variable indépendante t et de n constantes arbitraires C_1, C_2,..., C_n s'appelle solution générale du système normal (4.3) si :

1. pour toutes valeurs admissibles des C_1, C_2,..., C_n le système de fonctions (4.7) transforme les équation (4.3) en identités ;
2. dans le domaine où sont satisfaites les conditions du théorème de Cauchy, la fonction (4.7) résout le problème de Cauchy.

Pour résoudre un système d'équations différentielles ils existent plusieurs méthodes selon la nature des systèmes en questions.

4.2 Méthode d'élimination successives

Un cas particulier d'un système canonique d'équations différentielles est une seule équation d'ordre n résolue par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$$

Par introduction de nouvelles fonctions

$$x_1 = x'(t),\ x_2 = x''(t), ..., x_{n-1} = x^{(n-1)}(t),$$

cette équation se remplace par un système normal de $n - 1$ équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1} \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n = f(t, x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \end{cases} \tag{4.8}$$

(4.8) est un système normal d'ordre $n-1$.
On peut également affirmer la réciproque, à savoir que dans le cas général le système normal de n équation du premier ordre

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases}$$

est équivalent à une seule équation d'ordre n. C'est la base de l'une des méthodes d'intégration des systèmes d'équations différentielles appelée méthode des élimination successives.
Illustrons cette méthode sur l'exemple de deux équations suivant

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + f(t), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(t), \end{aligned} \tag{4.9}$$

où a, b, c, d sont des coefficients constants et $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions données ; $x(t)$ et $y(t)$ sont les fonctions recherchées. De la première équation du système (4.9) on trouve

$$y = \frac{1}{b}(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)). \tag{4.10}$$

En introduisant dans la deuxième équation du système le second membre (4.10) au lieu de y et la dérivée du second membre de (4.10) au lieu de $\dfrac{dy}{dt}$, on obtient une équation du second ordre par rapport à l'inconnue $x(t)$,

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0,$$

où A, B, C sont des constantes et dont la solution générale s'écrit $x = x(t, C_1, C_2)$. En introduisant ensuite les expressions obtenues pour x et $\dfrac{dx}{dt}$ dans (4.10), on trouve y.

Exemple 4.2.1. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases} \tag{4.11}$$

De la première équation du système (4.11) on trouve $y = -\dfrac{1}{9}\dfrac{dx}{dt}$*, alors*

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{9}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4.12}$$

En introduisant (4.12) dans la deuxième équation du système (4.11), on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0. \tag{4.13}$$

La solution générale de l'équation (4.13) est

$$x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t. \tag{4.14}$$

En calculant la dérivée de (4.14) par rapport à t, on trouve

$$y = -\frac{1}{9}\frac{dx}{dt} = \frac{C_1}{3}\sin 3t - \frac{C_2}{3}\cos 3t.$$

La solution générale du système (4.11) est

$$\begin{cases} x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t, \\ y = \dfrac{C_1}{3}\sin 3t - \dfrac{C_2}{3}\cos 3t. \end{cases}$$

Exemple 4.2.2. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} + y = \cos t. \end{cases} \tag{4.15}$$

De la première et la deuxième équation du système (4.15), on tire

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 4\dfrac{dx}{dt} + 3x - \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + \cos t \end{cases} \tag{4.16}$$

si bien que

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - \cos t, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{dy}{dt} - \sin t \end{cases}$$

D'où

$$4\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - \cos t = -\frac{dy}{dt} - \sin t \tag{4.17}$$

En introduisant la première équation de (4.16) dans (4.17), on trouve

$$-4\frac{dx}{dt} - 3x = 4\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - \cos t \quad \textit{ou} \quad 4\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 3x = \cos t \tag{4.18}$$

(4.18) est une équation différentielle d'ordre 2 avec second membre, dont la solution générale

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{50}\cos t + \frac{1}{50}\sin t. \tag{4.19}$$

En portant (4.19) dans la première équation du système (4.16), on trouve

$$y = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{50}\cos t - \frac{43}{50}\sin t.$$

La solution générale du système (4.15) est

$$y = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{50}\cos t - \frac{43}{50}\sin t, \quad x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{50}\cos t + \frac{1}{50}\sin t.$$

4.3 Systèmes différentiels linéaires

4.3.1 Notation

- $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est isomorphe à $L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$, l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$. On le munit de la norme euclidienne : si $A = (a_i j) \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

$$\|A\| = (\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

- A^t désigne la matrice transposée de A.
- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (qui peut être ouvert, fermé, semi-fermé, borné ou non).
- $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions continûment dérivables de I dans $\mathbb{R}^n$.
- Pour tout $V = [v_1, v_2, ..., v_n]^t \in C(I, \mathbb{R}^n)$, on note

$$\int_a^b V(s)ds = \left[\int_a^b v_1(s)ds, ..., \int_a^b v_n(s)ds\right]^t$$

4.3.2 Existence et unicité

Définition 4.3.1. *Soit $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $B(t) \in \mathbb{C}^n$ pour tout I. On dit que le système différentiel*

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t),\ \ t \in I \tag{4.20}$$

est linéaire non homogène. Si $B(t) = 0 \in \mathbb{C}^n$ pour tout $t \in I$, on dit que le système est linéaire homogène

Dans ce paragraphe, on considère le problème de Cauchy correspondant

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t),\ \ t \in I \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases} \tag{4.21}$$

où $t_0 \in I$.

Théorème 4.3.2. *Si $A \in C(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ et $B \in C(I, \mathbb{C}^n)$, alors pour tout $y_0 \in \mathbb{C}^n$ le système (4.21) admet une unique solution définie sur I.*

L'ensemble S des solutions du système homogène $y'(t) = A(t)y(t)$ est de dimension n.

Remarque 4.3.3. *L'hypothèse $A = (a_{ij}) \in C(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ est équivalente à la continuité sur I de chacune des fonctions $t \longmapsto a_{ij}(t)$.*

Si $(y_1, ..., y_n)$ est une base de l'ensemble des solutions de (4.20), on dit qu'elle est un **système fondamental de solutions (4.20)**. En pratique, cela signifie que toute autre solution s'écrit comme combinaison linéaire de ces solutions particulières. On dit que la **solution générale de (4.20)** est $y = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n$ où les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, ..., n)$ sont des constantes arbitraires.

4.3.3 Méthode de variation des constantes

Supposons que l'on connaisse une base de solutions $(y_1, ..., y_n)$ du problème $y'(t) = A(t)y(t)$ et résolvons le système non homogène (4.20) pour $B \in C(I, \mathbb{R})$. On cherche les solutions de (4.20) sous la forme

$$y = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n$$

où, cette fois, les α_i $(i = 1, ..., n)$ ne sont plus des nombres réels mais des fonctions :

$$\alpha_i \in C^1(I, \mathbb{R}) \ (i = 1, ..., n).$$

En écrivant sous forme condensée $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, on a

$$y' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i' y_i + \alpha_i y_i')$$

Comme par hypothèse, pour $i = 1, ..., n$, y_i vérifie $y_i' = Ay_i$, on en déduit

$$y' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i' y_i + \alpha_i A y_i)$$
$$y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' y_i + Ay.$$

Par conséquent, pour que y soit solution de (4.20) il faut et il suffit que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' y_i = B \tag{4.22}$$

Notons

$$M(t) = [y_1(t), ..., y_n(t)], \ t \in I \tag{4.23}$$

la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $y_1(t), ..., y_n(t)$ et

$$\alpha(t) = [y_1(t), ..., y_n(t)]^t, \ t \in I$$

Le système (4.22) s'écrit avec ces notations

$$M(t)\alpha'(t) = B(t), \ t \in I$$

et on déduit que

$$\alpha'(t) = M^{-1}(t)B(t), \ t \in I$$

et pour $t_0 \in I$ fixé,

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} M^{-1}(s)B(s)ds + C,$$

où $C \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur constant quelconque. Cela détermine la solution cherchée.

On a alors

$$y = M(t)C + M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(s)B(s)ds$$

On remarquera que, dans cette formule, $M(t)C$ est la solution générale du système homogène et $M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(s)B(s)ds$ est une solution particulière du système non homogène.
Cette méthode de recherche des solutions du problème non homogène connaissant un système fondamental de solutions du système s'appelle **méthode de variation des constantes.**

Remarque 4.3.4. *Notons* $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$ *les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $M(t) = [y_1(t), ..., y_n(t)]$, $t \in I$ *où*

$$\begin{cases} y_i'(t) = A(t)y_i, \ t \in I \\ y_i(t_0) = e_i \end{cases}$$

Alors M *est l'unique solution matricielle du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t), \ t \in I \\ M(t_0) = Id \end{cases}$$

où Id *est l'identité de* $\mathbb{R}^n$. *La solution de (4.21) s'écrit alors*

$$y = M(t)y_0 + \int_{t_0}^{t} M(t)M^{-1}(s)B(s)ds.$$

La matrice $R(t, s) = M(t)M^{-1}(s)$ *s'appelle matrice résolvante de (4.21).*

Exemple 4.3.5. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x + 2y = e^t \\ \dfrac{dy}{dt} + x - 6y = t \end{cases} \tag{4.24}$$

Le système (4.24) s'écrit sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}; \ B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \\ t \end{pmatrix}; \ A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

1^er étape : Résoudre le système homogène

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 6y \end{cases} \tag{4.25}$$

En dérivant la première équation du système (4.25) par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = 5\frac{dx}{dt} + 2x - 12(\frac{\frac{dx}{dt} - 5x}{-2}).$$

Soit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 11\frac{dx}{dt} + 28x = 0.$$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}. \tag{4.26}$$

En reportant (4.26) dans la première équation du système (4.25), on obtient alors :

$$y(t) = \frac{C_1}{2} e^{4t} - C_2 e^{7t}.$$

La solution générale du système homogène (4.25) est

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}, \\ y(t) = \dfrac{C_1}{2} e^{4t} - C_2 e^{7t}. \end{cases} \tag{4.27}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.
2e étape : Cherchons la solution la solution générale du système (4.24) sous la forme

$$\begin{cases} x(t) = C_1(t) e^{4t} + C_2(t) e^{7t}, \\ y(t) = \dfrac{C_1(t)}{2} e^{4t} - C_2(t) e^{7t}. \end{cases} \tag{4.28}$$

D'après la méthode de variation des constantes les $C_i'(t)$ $(i = 1, 2)$ vérifier le système

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{4t} + C_2'(t) e^{7t} = e^t, \\ \dfrac{C_1'(t)}{2} e^{4t} - C_2'(t) e^{7t} = t, \end{cases}$$

d'où pour t_0 fixé

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} M^{-1}(s) B(s) ds$$

avec

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{7t} \\ \\ \frac{1}{2} e^{4t} & -e^{7t} \end{pmatrix}$$

Intégrons, il vient

$$\begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{2}{9}e^{-3t} - \dfrac{t}{6}e^{-4t} - \dfrac{1}{24}e^{-4t} + K_1, \\ C_2(t) = -\dfrac{1}{18}e^{-6t} + \dfrac{2t}{21}e^{-7t} + \dfrac{2}{147}e^{-7t} + K_2, \end{cases} \tag{4.29}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes arbitraires. Introduisant (4.29) dans (4.28), on obtient la solution générale du système (4.24)

$$\begin{cases} x(t) = K_1 e^{4t} + K_2 e^{7t} - \dfrac{5}{18}e^{t} - \dfrac{t}{14} - \dfrac{11}{392}, \\ y(t) = \dfrac{K_1}{2}e^{4t} - K_2 e^{7t} - \dfrac{1}{18}e^{t} - \dfrac{5t}{28} - \dfrac{27}{784}. \end{cases}$$

4.4 Les système linéaires à coefficients constants

On considère le système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une matrice à coefficients constants et
$B\ : I \subset \mathbb{K} \to \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

4.4.1 Etude du le système homogène

Soit le système

$$X'(t) = AX, \tag{4.30}$$

ou

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{(matrice d'ordre } n\text{) et } X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

4.4.1.1 Les méthodes de résolution

1. Soit A diagonalisable. Cela veut dire que A admet n vecteurs propres V_i linéairement indépendants, associés à n valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{K}$, non nécessairement distinctes ; cela est aussi équivalent à dire que $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de A et D est une matrice diagonale ayant la diagonale les valeurs propres de A. Alors, les n fonctions $t \to e^{\lambda_i t}V_i$ sont, pour chaque t, linéairement indépendantes. Cela implique que la solution générale du système (4.30) est de la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} V_i, \tag{4.31}$$

où $C_i \in \mathbb{K}$.
En effet, on a
$$X' = AX = PDP^{-1}X \quad \text{ou} \quad P^{-1}X' = DP^{-1}X$$
Posons $Y = P^{-1}X$, puisque P est constante, alors $Y' = P^{-1}X'$. En reportant dans le système (**??**) on trouve
$$Y' = DY.$$
En notant $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$, on obtient
$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad y_i' = \lambda_i y_i$$
D'où
$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \ \exists C_i \in \mathbb{K}, \ \forall t \in I \ : \ y_i = C_i e^{\lambda_i t}.$$
En revenant à $X(t)$, et en notant $V_1, V_2, ..., V_n$ les colonnes de P :
$$X = PY = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} V_i$$

Théorème 4.4.1. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. La solution générale du système (4.30) : $X' = AX$ (inconnue $X \ : \ I \to \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$) est définie par :*
$$\forall t \in I, \ X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} V_i,$$
où
$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, & \text{sont les valeurs propres de } A, \\ V_1, V_2, ..., V_n, & \text{sont les vecteurs propres de } A, \\ C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{K} & \text{quelconque.} \end{cases}$$

Exemple 4.4.2. *Trouver toutes les solutions du système homogène $X' = AX$ pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *2.* $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Les valeurs propres de A sont simples 1, 3, -2. A est donc diagonalisable. Les vecteurs propres sont*

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivement. D'après le théorème 4.4.1 la solution générale du système donné est donc

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^t + C_2e^{3t} - C_3e^{-2t}, \\ y(t) = 4C_1e^t + 2C_2e^{3t} + C_3e^{-2t}, \\ z(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} + C_3e^{-2t}, \end{cases}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires.

2. *Les valeurs propres de A sont 5 (racine double), -10 (racine simple). Pour savoir si A est diagonalisable, il faut calculer les vecteur propres. On trouve respectivement les trois vecteurs linéairement indépendants suivants*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc A est diagonalisable. La solution générale est :

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{5t} - 2C_3e^{-10t}, \\ y(t) = C_2e^{5t}, \\ z(t) = 2C_1e^{5t} + 2C_2e^{5t} + C_3e^{-10t}, \end{cases}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires.

Remarque 4.4.3.

a) *Le calcul de P^{-1} est inutile pour la résolution du système (**??**).*

b) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et diagonalisable dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$), on obtiendrait, par le théorème 4.4.1, les solutions du système (**??**) à valeur complexes et on en déduira celles qui sont à valeurs réelles.*

Exemple 4.4.4. *Résoudre le système $X' = AX$, où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont 1, 2, i, $-i$. On compte quatre valeurs propres complexes distinctes, alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les vecteurs propres sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

respectivement. D'après le théorème 4.4.1 la solution générale du système donné est donc

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1e^t + C_3e^{it} + C_4e^{-it}, \\ x_2(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}, \\ x_3(t) = C_2e^{2t}, \\ x_4(t) = iC_3e^{it} - iC_4e^{-it}. \end{cases}$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes à valeurs complexes.
Les solutions à valeurs réelles sont obtenues en prenant C_1, C_2 réels et C_3, C_4 complexes conjugués.

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1e^t + \tilde{C}_3\cos t + \tilde{C}_4\sin t, \\ x_2(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}, \\ x_3(t) = C_2e^{2t}, \\ x_4(t) = -\tilde{C}_3\sin t + \tilde{C}_4\cos t. \end{cases}$$

où C_1, C_2, $\tilde{C}_3$, $\tilde{C}_4$ sont des constantes à valeurs réelles.
Noter qu'on peut aussi obtenir les solutions réelles en choisissant toutes les constantes réelles et en prenant simplement les parties réelles des x_i.

2. Cas où A est trigonalisable.
   Pour résoudre le système (4.30) dans ce cas là, on procède comme suit :

   (i). Trigonaliser A dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire déterminer T une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbb{C}$ d'ordre n et P matrice d'ordre n inversible telle que $A = PTP^{-1}$

   (ii). Ecrire le système (4.30) sous la forme équivalente

$$Y' = TY \quad \text{où } Y = P^{-1}X \tag{4.32}$$

   En effet, on a

$$X' = AX = (PTP^{-1})X = PT(P^{-1}X). \tag{4.33}$$

   Posons $Y = P^{-1}X$, cela implique $X = PY$. En dérivant cette dernière expression, on obtient :

$$X' = PY'. \tag{4.34}$$

   En reportant (4.34) dans (4.33), on trouve

$$PY' = PTY \quad \text{ou} \quad Y' = TY. \tag{4.35}$$

   (iii). Résoudre le système (4.32) par rapport à Y.

   (iv). En utilisant que $X = PY$, en déduire la solution de (4.30).

Exemple 4.4.5. *Résoudre le système $X' = AX$, où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont -1 (racine double), -2 racine simple. Le système $AX = -X$ ne nous donne qu'un seul vecteur propre :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour chercher un autre vecteur il suffit de résoudre $(A+I)V_2 = V_1$, *ce qui nous donne*

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$AX = -2X$ *nous donne*

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $A = PTP^{-1}$, *où*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Revenons maintenant à la résolution de notre système.
Soit

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

D'après (4.35), on a

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \\ y_2' \\ \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \\ 0 & -1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \\ \\ y_3 \end{pmatrix}$$

D'où on tire le système

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_2, \\ y_3' = -2y_3, \end{cases} \tag{4.36}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} y_1 = (C_2 t + C_1)e^{-t}, \\ y_2 = C_2 e^{-t}, \\ y_3 = C_3 e^{-2t}. \end{cases} \tag{4.37}$$

En tenir compte de (4.37) et que $X = PY$, en déduire la solution du système initiale

$$\begin{cases} x_1 = (C_2 t + C_1 + C_2)e^{-t} - C_3 e^{-2t}, \\ x_2 = -(C_2 t + C_1)e^{-t} + C_3 e^{-2t}, \\ x_3 = (C_2 t + C_1)e^{-t}. \end{cases}$$

L'intégration des systèmes linéaires peut s'obtenir par divers procédés examinés plus haut, par exemple la méthode des éliminations successives, etc.
Pour intégrer des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants on applique aussi la méthode d'Euler.

4.4.2 La méthode d'Euler

On va illustrer la méthode d'Euler pour $n = 3$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \tag{4.38}$$

Cherchons la solution du système (4.38) sous forme d'exponentielles comme suit :

$$x = \lambda e^{rt},\ y = \mu e^{rt},\ z = \nu e^{rt},\ \lambda,\ \mu,\ \nu \text{ et } r \text{ sont des constantes} \tag{4.39}$$

En introduisant (4.39) dans (4.38) et en simplifiant par e^{rt} on obtient un système d'équations permettant de déterminer λ, μ et ν :

$$\begin{cases} (a_{12} - r)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0 \\ a_{21}\lambda + (a_{22} - r)\mu + a_{23}\nu = 0 \\ a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} - r)\nu = 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

Le système (4.40) admet une solution non triviale unique si le déterminant suivant est nul

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} (a_{12}-r) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-r) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-r) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.41}$$

$\Delta(r) = 0$ est dit l'équation caractéristique du système (4.38). C'est une équation du troisième degré en r et nous avons trois situations suivantes :

A) Supposons que les racines r_1, r_2 et r_3 de l'équation caractéristique soient réelles et distinctes. Substituant dans (4.41) r par r_1 et en résolvant le système (4.41), on obtient des nombres λ_1 μ_1 et ν_1. Puis, en posant dans (4.41) $r = r_2$, on obtient des nombres λ_2 μ_2 et ν_2 et, enfin, pour $r = r_3$, on obtient λ_3 μ_3, ν_3. Conformément à ces trois collections de nombres λ μ et ν, on obtient trois solutions particulières

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 e^{r_1 t},\ y_1 = \mu_1 e^{r_1 t}\ z_1 = \nu_1 e^{r_1 t}, \\ x_2 &= \lambda_2 e^{r_2 t},\ y_2 = \mu_2 e^{r_2 t}\ z_2 = \nu_2 e^{r_2 t}, \\ x_3 &= \lambda_3 e^{r_3 t},\ y_3 = \mu_3 e^{r_3 t}\ z_3 = \nu_3 e^{r_3 t}, \end{aligned}$$

La solution générale du système (4.38) est de la forme

$$\begin{aligned} x &= C_1\lambda_1 e^{r_1 t} + C_2\lambda_2 e^{r_2 t} + C_3\lambda_3 e^{r_3 t}, \\ y &= C_1\mu_1 e^{r_1 t} + C_2\mu_2 e^{r_2 t} + C_3\mu_3 e^{r_3 t}, \\ z &= C_1\nu_1 e^{r_1 t} + C_2\nu_2 e^{r_2 t} + C_3\nu_3 e^{r_3 t}. \end{aligned}$$

Exemple 4.4.6. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 2y - 3z. \end{cases} \tag{4.42}$$

L'équation caractéristique associée à (4.42) est

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} -r & 2 & -1 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 2 & 2 & -(3+r) \end{vmatrix} = (r-1)(r+1)(r+2) = 0 \tag{4.43}$$

(4.43) est une équation algébrique d'ordre 3 elle admet trois racines simples $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ et $r_3 = -2$.
Pour $r_1 = 2$, on a la solution :

$$x_1 = e^t,\ y_1 = e^t,\ z_1 = e^t.$$

Pour $r_2 = -2$, on trouve

$$x_2 = e^{-2t},\ y_2 = e^{-2t},\ z_2 = 4e^{-2t}.$$

Pour $r_3 = -1$:

$$x_3 = e^{-t},\ y_3 = 0,\ z_3 = e^{-t}.$$

Conclusion : La solution générale de (4.42) est :

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t} + C_3e^{-t}, \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t}, \\ z(t) = C_1e^t + 4C_2e^{-2t} + C_3e^{-t}. \end{cases}$$

B) Considérons maintenant le cas avec deux équations où les racines de l'équation caractéristique sont complexes.

Exemple 4.4.7. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases} \tag{4.44}$$

Écrivons le système pour détermination de λ et μ :

$$\begin{cases} (-7 - r)\lambda + \mu = 0, \\ -2\lambda - (r + 5)\mu = 0. \end{cases} \tag{4.45}$$

L'équation caractéristique

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} (-7 - r) & 1 \\ -2 & (-5 - r) \end{vmatrix} = r^2 + 12r + 37 = 0$$

a pour racines $r_1 = -6 + i$ et $r_2 = -6 - i$. En portant $r_1 = -6 + i$ dans (4.45), on obtient pour déterminer λ_1 et μ_1 deux équations :

$$(-1 - i)\lambda + \mu = 0, \quad -2\lambda + (1 - i)\mu = 0$$

dont l'une est une conséquence de l'autre (du fait que le déterminant du système (4.45) est nul). Prenons $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 1 + i$, alors une première solution particulière s'écrira sous la forme

$$x_1 = e^{(-6+i)t}, \quad y_1 = (1+i)e^{(-6+i)t}. \tag{4.46}$$

De façon analogue, en introduisant dans (4.45) la racine $r_2 = -6 - i$, *on touve une deuxième solution particulière*

$$x_2 = \bar{x_1} = e^{(-6-i)t}, \quad y_2 = \bar{y_1} = (1-i)e^{(-6-i)t}. \tag{4.47}$$

Passons au nouveau système fondamental de solutions réelles, il vient

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \qquad \tilde{x}_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2i}, \\ \tilde{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \qquad \tilde{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i}. \end{cases} \tag{4.48}$$

En appliquant la formule d'Euler connue $e^{\pm i\alpha t} = \cos\alpha t \pm i \sin \alpha t$, *on déduit de (4.46), (4.47) et (4.48)*

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \cos t \, e^{-6t}, \quad \tilde{x}_2 = -\sin t \, e^{-6t}, \\ \tilde{y}_1 = (\cos t - \sin t)e^{-6t}, \quad \tilde{y}_2 = (\cos t + \sin t)e^{-6t} \end{cases}$$

La solution générale du système (4.44) sera

$$\begin{cases} x(t) = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = C_1 \cos t \, e^{-6t} - C_2 \sin t \, e^{-6t} \\ y(t) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1(\cos t - \sin t) \, e^{-6t} + C_2(\cos t + \sin t) \, e^{-6t} \end{cases}$$

Remarque 4.4.8. *Ayant trouver une première solution particulière (4.46, on aurait pu écrire tout de suite la solution générale du système (4.44) en utilisant les formules :*

$$\begin{cases} x(t) = C_1 Re \, x_1 + C_2 Im \, x_1 \\ y(t) = C_1 Re \, y_1 + C_2 Im \, y_1 \end{cases}$$

donc si on revient a l'exemple 4.4.7 la solution générale de (4.44) est

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t \, e^{-6t} + C_2 \sin t \, e^{-6t} \\ y(t) = C_1(\cos t - \sin t) \, e^{-6t} + C_2(\cos t + \sin t) \, e^{-6t} \end{cases}$$

C) Cas des racines multiples

Exemple 4.4.9. *Résoudre le système d'équations*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases} \tag{4.49}$$

L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1-r & 0 \\ -1 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 = 0,$$

a une racine double $r_1 = r_2 = 1$. On cherche une solution de la forme

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t)e^t, \quad y = (\lambda_2 + \mu_2 t)e^t \tag{4.50}$$

En introduisant (4.50) dans la deuxième équation du système (4.49), on obtient

$$(\lambda_2 + \mu_2 t) + \mu_2 = -(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t) \tag{4.51}$$

En identifiant les coefficients des mêmes puissances de t dans (4.51), on trouve

$$\begin{aligned} &\lambda_2 + \mu_2 = -\lambda_1 + \lambda_2, \\ &\mu_2 = -\mu_1 + \mu_2, \end{aligned}$$

d'où

$$\mu_2 = -\lambda_1, \quad \mu_1 = 0.$$

En désignant respectivement par C_1 et C_2 les constantes d'intégration, on obtient la solution générale sous la forme

$$x = -C_2 e^t, \quad y = (C_1 + C_2 t)e^t.$$

3. Dans le cas général où A est quelconque on travaille avec l'exponentielle de A définie par la série :
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

4.4.3 La méthode de l'exponentielle d'une matrice

On muni $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\|.\|$ telle que

$$\forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \, .$$

On montre par récurrence

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k \, .$$

Proposition 4.4.10. *La série matricielle*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Sa limite (ou somme) est appelée l'exponentielle de A et elle est notée e^A.

Démonstration. Soit X une partie bornée de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall A \in X \ : \ \|A\| \leq M.$$

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in X$

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \frac{1}{k!} \left\|A^k\right\| \leq \frac{M^k}{k!},$$

comme la série numérique $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$ converge, alors $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur X. □

Définition 4.4.11. *On appelle exponentielle, et on note exp. L'application de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *définie par :*

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + A + \frac{A^2}{2!} + ...$$

Remarque 4.4.12.

1. $exp(0_{\mathbb{M}_n(\mathbb{K})}) = I_n$
2. *Si* $n = 1$ *et si on confond une matrice* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *avec son unique élément, alors on retombe sur la définition de l'exponentielle réelle ou complexe, on peut donc noter* e^A *au lieu de* $exp(A)$*.*

Proposition 4.4.13.

1. *Si* $AB = BA$ *alors*

$$e^{A+B} = e^A e^B \tag{4.52}$$

2. *Pour toute matrice* A *on a*

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} \tag{4.53}$$

Démonstration.

1. On a

$$e^A = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!},\quad e^B = \sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}.$$

D'où

$$e^A e^B = \sum_{n\geq 0} D_n,\quad \text{avec } D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{(n-k)}}{(n-k)!}.$$

Or

$$\begin{aligned} D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{(n-k)}}{(n-k)!} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = \frac{1}{n!}(A+B)^n, \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n\geq 0} D_n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(A+B)^n = e^{A+B}.$$

2. Il suffit d'appliquer (4.52) pour $B = -A$ et $e^0 = I_n$.

□

Proposition 4.4.14. *Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et P est une matrice inversible d'ordre n, alors*

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P$$

Démonstration.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)...(P^{-1}AP)}_{k \text{ fois}}$$

et puisque le terme $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)...(P^{-1}AP)$ se réduit à $(P^{-1}A^kP)$, alors en remarquant que l'application $A \to P^{-1}AP$ est linéaire continue sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k\right)P$$

d'où en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P$$

□

Proposition 4.4.15. *Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle sur $\mathbb{R}$.*
L'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon I &\longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur I et $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = A\varphi(t) = \varphi(t)A$

Démonstration. Notons pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_k \colon I &\longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto \frac{t^k}{k!}A^k \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.4.10 la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge localement uniformément sur I, de plus pour chaque $k \in \mathbb{N}$, f_k est de classe C^1 sur I et $\forall t \in I$

$$\begin{cases} f_k'(t) = \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k = Af_{k-1}(t) = f_{k-1}(t)A \text{ si } k \geq 1 \\ f_0'(t) = 0. \end{cases}$$

D'après la proposition 4.4.10 la série $\sum_{k\geq 0} f_k'$ converge localement uniformément sur I, alors $\sum_{k\geq 0} f_k$ est de classe C^1 sur I et

$$(\sum_{k\geq 0} f_k)' = \sum_{k\geq 0} f_k'.$$

D'où $\varphi \in C^1(I)$ et $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = A\varphi(t) = \varphi(t)A$ □

Comment calculer e^A ?

(a) Si A est diagonale, avec a_{ii} sur la diagonale, e^A est la matrice diagonale ayant $e^{a_{ii}}$ sur la diagonale.

(b) Si $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale, alors $e^A = Pe^D P^{-1}$.

(c) Supposons que $A = \lambda I + N$, où N est une matrice triangulaire supérieur, dont la diagonale est composée par des 0. D'où $N^p = 0$ pour tout $p \geq n$. Alors $e^A = e^\lambda \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$.

(d) Supposons que A soit une matrice diagonale par blocs, de blocs carrés A_1, A_2,... (de la forme précédente).

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

Alors e^A est une matrice diagonale par blocs, ayant pour blocs e^{A_1}, e^{A_2},...

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{A_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{A_k} \end{pmatrix}$$

(e) Supposons que A soit semblable à une matrice B (de la forme précédente) : $A = PBP^{-1}$. Alors $e^A = Pe^B P^{-1}$. Toute matrice A peut s'écrire sous cette forme, grâce à la réduction de Jordan.

Nous sommes en mesure maintenant de résoudre le système $X'(t) = AX(t)$ par la méthode de l'exponentielle d'une matrice.

Théorème 4.4.16. *La solution générale du système $X'(t) = AX(t)$ s'écrit $e^{tA}V$, pour $V \in \mathbb{K}^n$.*

Démonstration. $X(t) = e^{tA}V$ est une solution grâce aux propriétés de l'exponentielle d'une matrice. □

Exemple 4.4.17. *Résoudre le système $X'(t) = AX(t)$ pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Les valeurs propres de A sont 2, -1. A est donc diagonalisable. Les vecteurs propres sont*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivement. Par conséquent

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a

$$X(t) = e^{t(PDP^{-1})}V = Pe^{tD}P^{-1}V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

où $(k_1,\, k_2) \in \mathbb{R}^2$.
La solution générale du système donné est

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{k_1 - k_2}{3} e^{2t} + \dfrac{2k_1 + k_2}{3} e^t = C_1 e^{2t} + C_2 e^t, \\ x_2(t) = -2(\dfrac{k_1 - k_2}{3}) e^{2t} + \dfrac{2k_1 + k_2}{3} e^t = -2C_1 e^{2t} + C_2 e^t, \end{cases}$$

avec $C_1 = \dfrac{k_1 - k_2}{3}$ *et* $C_2 = \dfrac{2k_1 + k_2}{3}$.

2. *A n'est pas diagonalisable. On va calculer l'exponentielle de la matrice A.* $A = 2I + N$, *où*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrice nilpotente } (N^3 = 0,\ N^4 = 0, ...).$$

Les matrices I_3 *et* N *commutent, on en déduit*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{tA} = e^{2tI_3} e^{tN}.$$

Calcul de e^{tN}. *On a*

$$e^{tN} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$e^{tA} = e^{2t} e^{tN} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3t + \frac{t^2}{2}) e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Alors la solution générale du système donné est :

$$X(t) = e^{tA}V = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3t+\frac{t^2}{2})e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1e^{2t} + k_2te^{2t} + k_3(3t+\frac{t^2}{2})e^{2t} \\ k_2te^{2t} - k_3te^{2t} \\ k_3e^{2t} \end{pmatrix},$$

où $(k_1,\ k_2,\ k_3) \in \mathbb{R}^3$.

3. *A n'est pas diagonalisable. On va calculer l'exponentielle de la matrice A. A est triangulaire supérieure par blocs. Le premier bloc est*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N,\ \text{où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{matrice nilpotente } (N^2 = 0,\ N^3 = 0, ...).$$

Par conséquent $e^{tC} = e^t[I_2 + tN]$ *et donc*

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Alors la solution générale du système donné est :

$$X(t) = e^{tA}V = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2t)e^t \\ k_2e^t \\ k_3e^{2t} \end{pmatrix},$$

où $(k_1,\ k_2,\ k_3) \in \mathbb{R}^3$.

4.4.3.1 Matrice fondamentale de solution

Définition 4.4.18. *Une matrice fondamentale de solutions est une matrice M dont les colonnes sont n solutions linéairement indépendantes de $X'(t) = AX(t)$.*

Théorème 4.4.19.

1. *$M(t) = e^{tA}$ est une matrice fondamentale de solutions, c'est-à-dire que ses colonnes sont n solutions linéairement indépendantes de $X'(t) = AX(t)$.*

2. *Toute matrice fondamentale M satisfait $M(t) = e^{tA}M(0)$*

Remarque 4.4.20. *Si $M(t)$ est une matrice fondamentale de solutions du système $X'(t) = AX(t)$, alors la solution générale est donnée par $X(t) = M(t)V$ ($V \in \mathbb{K}^n$).*

4.4.4 Étude du système non homogène de la forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$

On connait déjà la structure des solutions de ce système : toute solution est de la forme $X = X_h + X_p$, où X_p est solution particulière et X_h est la solution générale du système homogène. Nous citons ici deux méthodes pour trouver une solution particulière X_p :

1. **La convolution** : Si on connait e^{tA}, on cherche une solution de la forme $e^{tA}W(t)$. On trouve que $\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds$ est une solution particulière.

2. **La variation des constantes** : En générale, si $M(t)$ est une matrice fondamentale de solutions, où X_1, X_2,...,X_n sont ses n colonnes on peut chercher une solution de la forme $C_1(t)X_1(t) + ... + C_n(t)X_n(t)$. On trouve que

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ \vdots \\ C_n'(t) \end{pmatrix} = M(t)^{-1}B(t).$$

Théorème 4.4.21. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B : I \to \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue. Une solution du système $X'(t) = AX(t) + B(t)$ sur I est, pour $t_0 \in I$ fixé quelconque :*
$t \mapsto e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds$.

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} X\colon I &\longrightarrow \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur I d'après la proposition 4.4.15 et pour tout $t \in I$

$$X'(t) = Ae^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds + e^{tA}e^{-tA}B(t) = Ae^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds + I_nB(t) = AX(t) + B(t).$$

□

Théorème 4.4.22. $X(t) = M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(s)B(s)ds$ *est une solution du système* $X'(t) = AX(t) + B(t)$, *où* M *une matrice fondamentale de solutions.*

Proposition 4.4.23. *Considérons le système*

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \tag{4.54}$$

1. *Si* $B(t) = e^{\mu t}\beta$, *où* μ *n'est pas une valeurs propres de* A. *Alors* $X(t) = -e^{\mu t}(A - \mu I_n)^{-1}\beta$ *est une solution de (4.54).*

2. *Si* $B(t)$ *est un polynôme de degré* r *et* A *une matrice inversible. Alors le système (4.54) admet comme solution un polynôme de degré* r.

3. *Si* $B(t) = e^{\mu t}P(t)$, *où* μ *n'est pas une valeurs propres de* A *et* P *un polynôme de degré* r. *Alors le système (4.54) admet une solution sous la forme* $e^{\mu t}Q(t)$ *où* Q *est un polynôme de degré* r.

Remarque 4.4.24.

(a) *Si* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible et* $B \in \mathbb{K}^n$, *il suffit de poser* $C = A^{-1}B$ *et* $Z(t) = X(t) + C$. *Le système (4.54) est alors équivalent à* $Z' = AZ$.

(b) *Principe de superposition des solutions :*
Supposons que $B = B_1 + B_2 + ... + B_n$ *où* $B_i : I \to E$, $i = 1, ..., n$ *sont continues.*
Si pour chaque $i = \{1, ..., n\}$, *on connait une solution* X_i *du système* $X' = AX + B_i$, *alors* $\sum_{i=1}^{n} X_i$ *est une solution du système (4.54). Cette méthode est spécifique des systèmes linéaires seulement.*

Exemple 4.4.25. *Résoudre le système* $X'(t) = AX(t) + B(t)$ *pour*

1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} te^t - t \\ te^t - 2t + 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. *Les valeurs propres de A sont 2, 1, -1. A est donc diagonalisable. Les vecteurs propres sont*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivement. Par conséquent

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$X' = AX + B = (PDP^{-1})X + B \quad \text{ou } P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}B. \tag{4.55}$$

Si on note $Y = P^{-1}X$, alors $Y' = P^{-1}X'$. Le système (4.55) devient

$$Y' = DY + B. \tag{4.56}$$

D'où on obtient le système

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - t, \\ y_2' = y_2 + te^t, \\ y_3' = 2y_3 + t - 1, \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} y_1 = -t + 1 + C_1 e^{-t}, \\ y_2 = (\frac{t^2}{2} + C_2)e^t, \\ y_3 = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_3 e^{2t}, \end{cases}$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.
Comme $X = PY$, *on déduit :*

$$\begin{cases} x_1 = -t + 1 + \frac{t^2}{2}e^t + C_1e^{-t} + C_2e^t, \\ x_2 = t - \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}e^t + C_2e^t - 2C_3e^{2t}, \\ x_3 = -\frac{3t}{2} + \frac{5}{4} + C_1e^{-t} + C_3e^{2t}. \end{cases}$$

2. *Les valeurs propres de* A *sont 3, -1 ; les vecteurs propres sont respectivement*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système homogène $X' = AX$ *est donc*

$$X(t) = C_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$ *est une matrice fondamentale de solutions* $(\det M(t) = -4e^{2t} \neq 0 \ \forall t)$.

Si on cherche une solution particulière de la forme

$$X(t) = C_1(t)e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = M^{-1}(t)B(t), \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} C_1'(t) = \dfrac{1}{2}e^{-2t}, \\ C_2'(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t} \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{1}{4}e^{-2t} + \tilde{C}_1, \\ C_2(t) = \dfrac{1}{4}e^{2t} + \tilde{C}_2. \end{cases}$$

La solution générale du système donné est

$$\begin{cases} x_1(t) = \tilde{C}_1 e^{3t} + \tilde{C}_2 e^{-t}, \\ x_2(t) = 2\tilde{C}_1 e^{3t} - 2\tilde{C}_2 e^{-t} - e^t. \end{cases}$$

3. *D'après l'exemple 4.4.17 la solution générale du système homogène est*

$$X_h(t) = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2 t)e^t \\ \\ k_2 e^t \\ \\ k_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière est

$$X_p(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) ds = \begin{pmatrix} t + 2 + te^t - 2e^t \\ \\ -t - 1 + e^t \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la solution générale du système donné est

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \begin{cases} x_1(t) = (k_1 + k_2 t)e^t + t + 2 + te^t - 2e^t, \\ x_2(t) = k_2 e^t - t - 1 + e^t, \\ x_3(t) = k_3 e^{2t} \end{cases}$$

où $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$.

4.5 Les systèmes linéaires à coefficients variables

Soit le système différentiel linéaire suivant

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{4.57}$$

avec $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: $A(t)$ application linéaire de E dans E (E espace vectoriel normé).
La solution générale de (4.57) est la somme d'une solution du système homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ et une solution particulière

4.5.1 Etude de $X'(t) = A(t)X(t)$

Considérons le système suivant

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{4.58}$$

Posons $S_0 = \{\text{solutions de } \ X'(t) = A(t)X(t)\}$. Alors S_0 est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Il y'a plusieurs méthodes pour résoudre le système (4.58).

4.5.1.1 Exhiber une famille libre de n éléments de S_0

Si on connait une famille libre $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n éléments de S_0, on peut conclure que

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} C_i x_i, \ C_i \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, ..., n \right\}$$

Remarque 4.5.1. *On vérifie qu'une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre en montrant que $\forall t \in I, \ \det W(t) \neq 0$ ($\det W(t)$ est le wronskien de $(x_1, x_2, ..., x_n)$).*

Exemple 4.5.2. *Résoudre le système différentiel*

$$\begin{cases} (t^4+1)x'(t) = 2t^3x + 2ty, \\ (t^4+1)y'(t) = -2tx + 2t^3y. \end{cases} \tag{4.59}$$

Posons

$$Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, le système (4.59) est équivalent au système suivant

$$(t^4+1)Y'(t) = (A_0 t + A_1 t^3)Y(t) \tag{4.60}$$

Supposons qu'il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que le système (4.60) admet sur $]-r, +r[$ une solution $\widetilde{Y}$ développable en série entière en 0 de rayon de convergence $R \geq r$

$$\widetilde{Y}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k t^k,$$

où $(C_k)_{k\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}^2$. Comme $\widetilde{Y} \in C^\infty(]-r, r[)$ alors

$$\widetilde{Y}'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} kC_k t^{k-1},$$

On remplace $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Y}'$ dans (4.60) on trouve

$$(t^4+1)\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)C_{k+1}t^k = (A_0 t + A_1 t^3)\sum_{k=0}^{+\infty} C_k t^k$$

Alors pour tout $t \in]-r, +r[$ on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)C_{k+1}t^{k+4} + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)C_{k+1}t^k = A_0\sum_{k=0}^{+\infty} C_k t^{k+1} + A_1\sum_{k=0}^{+\infty} C_k t^{k+3}$$

ou bien

$$\sum_{k=4}^{+\infty}(k-3)C_{k-3}t^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)C_{k+1}t^k = A_0\sum_{k=1}^{+\infty} C^{k-1} t^k + A_1\sum_{k=3}^{+\infty} C_{k-3} t^k$$

Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière en 0 ;

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{+\infty}[(k-3)C_{k-3} + (k+1)C_{k+1}]t^k + C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + 4C_4 t^3 \\ &= \sum_{k=4}^{+\infty}[A_0 C_{k-1} + A_1 C_{k-3}]t^k + A_0 C_0 t + A_1 C_1 t^2 + A_0 C_1 t^2 + (A_0 C_2 + A_1 C_0)t^3\end{aligned}$$

$$\begin{cases}(k-3)C_{k-3} + (k+1)C_{k+1} & = A_0 C_{k-1} + A_1 C_{k-3} \quad \forall k \geq 4 \\ 4C_4 = A_0 C_2 + A_1 C_0 \\ 3C_3 = A_0 C_1 \\ 2C_2 = A_0 C_0 \\ C_1 = 0\end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases}C_2 = \dfrac{A_0}{2} C_0 \\ C_1 = 0 \\ \forall k \geq 3 \ C_k = 0\end{cases}$$

Ce qui donne

$$\widetilde{Y}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k t^k = C_0 + \frac{A_0}{2} C_0 t^2$$

On peut donc affirmer que $C_0 + \dfrac{A_0}{2} C_0 t^2$ est solution de (4.60) sur $\mathbb{R}$.

Considérons alors $\widetilde{Y}_1$, $\widetilde{Y}_2$ *les sommes de la série entière obtenues en prenant*

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}, \ C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\widetilde{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

Comme le wronskien $W(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2) = t^4 + 1 \neq 0$ *alors* $\left\{\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2\right\}$ *est libre et par conséquent la solution du système (4.60) est donnée par*

$$\begin{cases} x(t) = \lambda + \mu t^2 \\ y(t) = \mu - \lambda t^2 \end{cases}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

4.5.1.2 Utiliser la méthode générale de résolution de $X'(t) = A(t)X(t)$

1. Exhiber un indice $p \in \{1, ..., n-1\}$, $(x_1, x_2, ..., x_p)$ famille libre de p solution de (4.58) et $(e_{p+1}, ..., e_n)$ $(n-p)$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ indépendants de t tels que :

$$\forall t \in I, \ (x_1(t), x_2(t), ..., x_p(t), e_{p+1}, ..., e_n) \quad \text{soit une base de } \mathbb{K}^n.$$

2. Chercher ensuite une solution de (4.58) sur I de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{p} C_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} C_i e_i \ (C_i \ : I \to \mathbb{K}, \ i = 1, ..., n \text{ application dérivable à trouver})$$

telle que $(x_1, x_2, ..., x_p, X)$ soit libre.

3. Si c'est possible, réitérer le procédé précédent avec la famille libre de $(p+1)$ solutions de (4.58) sur I qui est $(x_1, x_2, ..., x_p, X)$ poursuivre jusqu'à l'obtention d'une base de solutions de (4.58) sur I. C'est le principe de la base incomplète.

Remarque 4.5.3. *Cette méthode est particulièrement efficace dans le cas* $n = 2$ *et* $p = 1$.

Exemple 4.5.4. *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x'(t) = (1+t^2)x - y, \\ y'(t) = -(t-1)^2 x + y. \end{cases} \tag{4.61}$$

Notons que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$ *est solution de (4.61) sur* $\mathbb{R}$.

On a $\det(X_1, e_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \\ 1+t^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. *Donc* (X_1, e_1) *forme une base de* $\mathbb{R}^2$. *Alors le système (4.61) admet une solution de la forme*

$$X_2 = C_1(t)X_1 + C_2(t)e_2 = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \\ (1+t^2)C_1(t) + C_2(t) \end{pmatrix}, \tag{4.62}$$

où C_1 *et* C_2 *sont des inconnues à déterminer.*
En remplaçant (4.62) dans (4.61), on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} C_1'(t) = -C_2(t), \\ (1+t^2)C_1'(t) + C_2'(t) = C_2(t), \quad \textit{ou } C_2'(t) - (1+t^2)C_2(t) = 0, \end{cases}$$

dont la solution est

$$C_2(t) = \tilde{C}_2 e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}} \ \textit{ et } C_1(t) = -\tilde{C}_2 \int_0^t e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{s}{\sqrt{2}}} ds.$$

où $\tilde{C}_2$ *une constante réelle.*

Pour simplifier on peut prendre $\tilde{C}_2 = 1$, *ainsi* $x_2 = \begin{pmatrix} \int_0^t e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{s}{\sqrt{2}}} ds \\ \\ e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$ *est une solution de (4.61) sur* $\mathbb{R}$ *et elle forme une famille libre avec* x_1.
Finalement, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$S = \left\{ C_1 x_1 + C_2 x_2, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4.5.2 Etude de $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$

4.5.2.1 Utiliser la méthode de variation des constantes

La résolution du système (4.57) se fait en trois étapes :

1. Résoudre le système homogène (sans second membre) $X'(t) = A(t)X(t)$.

2. Chercher une solution de (4.57) sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$. En injectant X dans (4.57), on obtient un système d'équations en $C_1'(t)$, $C_2'(t)$,...,$C_n'(t)$.

3. Résoudre ce système et conclure en intégrant les $C_i'(t)$.

Exemple 4.5.5. *On considère le système*

$$\begin{cases}(1+t^2)x' - tx - y = 2t^2 - 1\\(1+t^2)y' + x - ty = 3t.\end{cases}$$

1. *Montrer que* $\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont deux solutions linéairement indépendantes du système homogène*
$$\begin{cases}(1+t^2)x' - tx - y = 0\\(1+t^2)y' + x - ty = 0.\end{cases}$$

2. *Chercher une solution particulière non homogène.*

3. *En déduire la solution générale.*

Solution.

1. *Ces deux solutions sont linéairement indépendantes : Il suffit de calculer le wronskien. En effet,*
$$\det(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. *On peut chercher une solution particulière de la forme*
$$X(t) = C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2.$$
On doit avoir que
$$C_1'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} + C_2'(t)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 - 1 \\ 3t \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne le système suivant

$$\begin{cases} C_1'(t) = -1 \\ C_2'(t) = 2. \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} C_1(t) = -t + \tilde{C}_1, \\ C_2(t) = 2t + \tilde{C}_2. \end{cases}$$

3. *La solution générale est donnée par la somme des solutions trouvées précédemment*

$$X(t) = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} t \\ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 \\ \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

4.6 Exercices du chapitre

Exercice 4.7. *Intégrer les systèmes suivants par la méthode des éliminations successives :*

1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases} \tag{4.63}$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t \end{cases} \tag{4.64}$$

3.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt} = z, \\ \dfrac{d^2z}{dt} = y \end{cases} \tag{4.65}$$

Solutions.

1. On trouve en dérivant par rapport à t la premier équation

$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}. \tag{4.66}$$

On obtient en substituant dans cette dernière les expressions $\dfrac{dy}{dt}$ et $\dfrac{dz}{dt}$ tirées des équations (4.63) :

$$\frac{d^2x}{dt} = x + y + x + z = 2x + y + z = 2x + \frac{dx}{dt}$$

ou

$$x''(t) - x'(t) = 2x(t). \tag{4.67}$$

La solution générale de l'équation (4.67) est

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \tag{4.68}$$

D'où

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \quad \text{et} \quad y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z \tag{4.69}$$

Substituant les expressions ci-dessus de x et y dans la troisième équation du système proposé. On obtient une équation permettant de déterminer z :

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}$$

La solution générale de cette dernière est

$$z(t) = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t} \tag{4.70}$$

Mais on a alors en vertu de (4.69) :

$$y(t) = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t} \tag{4.71}$$

Les équations (4.68), (4.70), (4.71) donnent la solution générale du système (4.63).

2. De la première équation du système (4.64), on tire

$$y = \frac{dx}{dt} - t,$$

si bien que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - 1.$$

En introduisant ces expressions de y et $\dfrac{dy}{dt}$ dans la deuxième équation, on obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 1 - t. \tag{4.72}$$

L'équation (4.72) est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre avec second membre, dont la solution est

$$x = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + t - 1.$$

On trouve que

$$y = \frac{dx}{dt} - t = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + 1 - t.$$

La solution générale du système (4.64) est

$$x = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + t - 1, \quad y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + 1 - t.$$

3. Dérivons deux fois par rapport à x les deux membres de la première équation :

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Or, $\dfrac{d^2z}{dx^2} = y$, donc on obtient l'équation du quatrième ordre

$$\frac{d^4y}{dx^4} = y.$$

On obtient par intégration la solution générale de cette équation

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Tirons $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ de cette équation et reportons-la dans la première équation du système (4.65) ; on détermine z :

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x.$$

Exercice 4.8. *Résoudre les systèmes d'équations différentielles homogènes suivants par la méthode d'Euler :*

1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - y. \end{cases} \tag{4.73}$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases} \tag{4.74}$$

3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases} \tag{4.75}$$

4.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z. \end{cases} \tag{4.76}$$

Solutions.

1. Ecrivons le système d'équations

$$\begin{cases} (4-r)\lambda + \mu = 0, \\ 6\lambda + (1+r)\mu = 0. \end{cases} \tag{4.77}$$

L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 \\ 6 & -1-r \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant :

$$r^2 - 3r - 10 = 0,$$

dont les racines sont $r_1 = -2$, $r_2 = 5$.

a) $r_1 = -2$; le système (4.77) se réduit à :

$$6\lambda_1 + \mu_1 = 0,$$

d'où une solution particulière de (4.77) : $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = -6$ et une solution particulière de (4.73)

$$x_1 = e^{-2t}, \qquad y_1 = -6e^{-2t}$$

b) $r_2 = 5$; on trouve, de même :

$$x_2 = e^{5t}, \qquad y_2 = -e^{5t},$$

d'où la solution générale du système (4.73) :

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1e^{-2t} + C_2e^{5t}, \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 = -6C_1e^{-2t} + C_2e^{5t}. \end{cases}$$

2. Ecrivons le système d'équations

$$\begin{cases} (4-r)\lambda - 5\mu = 0, \\ \lambda - r\mu = 0. \end{cases} \tag{4.78}$$

L'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 4-r & -5 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 5 = 0,$$

a pour racines $r_1 = 2+i$, $r_2 = 2-i$. En portant $r_1 = 2+i$ dans (4.78), on obtient pour déterminer λ_1 et μ_1 deux équations :

$$\begin{cases} (2-i)\lambda_1 - 5\mu_1 = 0, \\ \lambda_1 - (2+i)\mu_1 = 0, \end{cases}$$

dont l'une est une conséquence de l'autre.
Prenons $\lambda_1 = (2+i)$, $\mu_1 = 1$, alors une première solution particulière s'écrira sous forme

$$\begin{cases} x_1 = (2+i)e^{(2+it)}, \\ y_1 = e^{(2+i)t}. \end{cases}$$

De façon analogue, en introduisant dans (4.78) la racine $r_1 = 2-i$ on trouve une deuxième solution particulière

$$\begin{cases} x_2 = (2-i)e^{(2+it)}, \\ y_2 = e^{(2-i)t}. \end{cases}$$

Alors la solution générale du système (4.74) est

$$\begin{cases} x = C_1 Re\, x_1 + C_2 Im\, x_1 = C_1 e^{2t}(2\cos t - \sin t) + C_2 e^{2t}(2\sin t + \cos t), \\ y = C_1 Re\, y_1 + C_2 Im\, y_1 = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t. \end{cases}$$

3. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & -4-r \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } r^2 - 6r + 9 = 0,$$

elle a une racine double $r_1 = r_2 = 3$.
On cherchera une solution de la forme

$$\begin{cases} x = (\lambda_1 + \mu_1 t)e^{3t}, \\ y = (\lambda_2 + \mu_2 t)e^{3t}. \end{cases} \tag{4.79}$$

En introduisant (4.79) dans la première équation du système (4.75), on obtient

$$3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1 = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t). \tag{4.80}$$

En identifiant les coefficients de même puissances de t aux premier et second membres de (4.80), on trouve

$$3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$
$$3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2,$$

d'où

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1, \quad \mu_2 = \mu_1. \tag{4.81}$$

Les quantités λ_1 et μ_1 restent arbitraires. En les désignant respectivement par C_1 et C_2, on obtient la solution générale

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}. \end{cases}$$

4. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -r & 8 & 0 \\ 0 & -r & -2 \\ 2 & 8 & -2-r \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } (r+2)(r^2+16) = 0. \tag{4.82}$$

Les racines de l'équation (4.82) sont : $r_1 = -2$, $r_2 = 4i$, $r_3 = -4i$.
A la racine réelle $r_1 = -2$ correspond une solution particulière

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 e^{-2t}, \\ y_1 = \mu_1 e^{-2t}, \\ z_1 = \nu_1 e^{-2t}. \end{cases} \tag{4.83}$$

En introduisant (4.83) dans le système (4.76) et en simplifiant par e^{-2t}, il vient

$$\begin{aligned} &-2\lambda_1 = 8\mu_1, \\ &-2\mu_1 = -2\nu_1, \\ &-2\nu_1 = 2\lambda_1 + 8\mu_1 - 2\nu_1, \end{aligned}$$

d'où $\lambda_1 = -4\mu_1$, $\nu_1 = \mu_1$. Posons par exemple $\mu_1 = 1$ alors $\lambda_1 = -4$, $\nu_1 = 1$ et la solution particulière (4.83) devient

$$\begin{cases} x_1 = -4e^{-2t}, \\ y_1 = e^{-2t}, \\ z_1 = e^{-2t}. \end{cases} \tag{4.84}$$

De façon analogue, on trouve pour la racine $r_2 = 4i$ (respectivement $r_3 = -4i$) la deuxième solution particulière (respectivement la troisième)

$$\begin{cases} x_2 = 2e^{4it}, \\ y_2 = ie^{4it}, \\ z_2 = 2e^{4it}, \end{cases} \tag{4.85}$$

et

$$\begin{cases} x_3 = 2e^{-4it}, \\ y_3 = -ie^{-4it}, \\ z_3 = 2e^{-4it}. \end{cases} \tag{4.86}$$

Alors la solution générale du système (4.76) est

$$\begin{cases} x = -4C_1e^{-2t} + 2C_2e^{4it} + 2C_3e^{-4it}, \\ y = C_1e^{-2t} + iC_2e^{4it} - iC_3e^{-4it}, \\ z = C_1e^{-2t} + 2C_2e^{-4it} + 2C_2e^{-4it}. \end{cases} \tag{4.87}$$

Exercice 4.9. *Résoudre par la méthode de Lagrange les systèmes suivants :*

1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases} \tag{4.88}$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases} \tag{4.89}$$

Solutions.

1. Résolvons d'abord le système homogène associé

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = 0. \end{cases} \tag{4.90}$$

De la deuxième équation du système (4.90) on tire

$$x = y - \frac{dy}{dt}, \text{ et donc } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Introduisons ces expressions de x et $\dfrac{dx}{dt}$ dans la première équation du système (4.90), il vient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0;$$

et la solution générale de cette équation est

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}.$$

Comme $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, on a

$$x = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t}.$$

La solution générale du système homogène (4.90) est

$$\begin{cases} x = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}. \end{cases} \tag{4.91}$$

Cherchons pour le système non homogène (4.88) une solution de la forme

$$\begin{cases} x = -C_1(t)e^{2t} + 4C_2(t)e^{-3t}, \\ y = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t}. \end{cases} \tag{4.92}$$

En portant (4.92) dans (4.88) et en réduisant tous les termes semblables, on obtient

$$\begin{cases} -C_1'(t)e^{2t} + 4C_2'(t)e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t)e^{2t} + C_2'(t)e^{-3t} = \dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$$

d'où
$$C_1'(t) = \frac{(6t^2 - 4t - 1)e^{-2t}}{5}, \quad C_2'(t) = \frac{(3t^2 + 8t + 2)e^{3t}}{10}$$
Intégrons, il vient
$$\begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{1}{5}(t + 3t^2)e^{-2t} + \tilde{C}_1, \\ C_2(t) = \dfrac{1}{10}(2t + t^2)e^{3t} + \tilde{C}_2, \end{cases} \tag{4.93}$$
où $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont des constantes arbitraires. Introduisant (4.93) dans (4.92), on obtient la solution générale du système (4.88)
$$\begin{cases} x = -\tilde{C}_1 e^{2t} + 4\tilde{C}_2 e^{-3t} + t + t^2, \\ y = \tilde{C}_1 e^{2t} + \tilde{C}_2 e^{-3t} - \dfrac{1}{2}t^2. \end{cases} \tag{4.94}$$

2. Résolvons d'abord le système homogène associé
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0. \end{cases} \tag{4.95}$$
De la deuxième équation du système (4.95) on tire
$$x = -\frac{dy}{dt}, \text{ et donc } \frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2}.$$
Introduisons l'expression de $\dfrac{dx}{dt}$ dans la premier équation du système (4.95), il vient
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0;$$
et la solution générale de cette équation est
$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$
Comme $x = -\dfrac{dy}{dt}$, on a
$$x = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$
La solution générale du système homogène (4.95) est
$$\begin{cases} x = C_1 \sin t - C_2 \cos t, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \end{cases} \tag{4.96}$$
Cherchons pour le système non homogène (4.89) une solution de la forme
$$\begin{cases} x = C_1(t) \sin t - C_2(t) \cos t, \\ y = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t. \end{cases} \tag{4.97}$$
En portant (4.97) dans (4.89) et en réduisant tous les termes semblables, on obtient
$$\begin{cases} C_1'(t) \sin t - C_2'(t) \cos t = 0, \\ C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

d'où

$$C_1'(t) = 1, \quad C_2'(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Intégrons, il vient

$$\begin{cases} C_1(t) = t + \tilde{C}_1, \\ C_2(t) = -\ln|\cos t| + \tilde{C}_2, \end{cases} \tag{4.98}$$

où $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont des constantes arbitraires. Introduisant (4.98) dans (4.97), on obtient la solution générale du système (4.89)

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1 \sin t - \tilde{C}_2 \cos t + t \sin t + \ln|\cos t| \cos t, \\ y = \tilde{C}_1 \cos t + \tilde{C}_2 \sin t + t \cos t - \ln|\cos t| \sin t. \end{cases} \tag{4.99}$$

Exercice 4.10. *Trouver la solution générale du système $X'(t) = AX(t)$, pour*

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solutions.

1. Les valeurs propres de A sont -1, 3. A est donc diagonalisable. Les vecteurs propres sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$X(t) = Pe^{tD}P^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$X(t)=\begin{pmatrix}\frac{e^{3t}+e^{-t}}{2}C_1-\frac{e^{3t}-e^{-t}}{4}C_2\\ \\ (-e^{3t}+e^{-t})C_1+\frac{e^{3t}+e^{-t}}{2}C_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}(\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{4})+e^{-t}(\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{4})\\ \\ -e^{3t}(C_1-\frac{C_2}{2})+e^{-t}(C_1+\frac{C_2}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1e^{3t}+k_2e^{-t}\\ \\ -\frac{k_1}{2}e^{3t}+2k_2e^{-t}\end{pmatrix},$$

où $k_1=(\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{4})$, $k_2=(\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{4})\in\mathbb{R}$.

2. Les valeurs propres de A sont -1, $1+i$, $1-i$. A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Les vecteurs propres sont

$$V_1=\begin{pmatrix}1\\ \\ 0\\ \\ 0\end{pmatrix},\quad V_2=\begin{pmatrix}0\\ \\ i\\ \\ 1\end{pmatrix}\quad V_3=\begin{pmatrix}0\\ \\ -i\\ \\ 1\end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$X(t)=Pe^{tD}P^{-1}C=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \\ 0&i&-i\\ \\ 0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\ \\ 0&e^{(1+i)t}&0\\ \\ 0&0&e^{(1-i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \\ 0&-\frac{i}{2}&\frac{1}{2}\\ \\ 0&\frac{i}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ \\ C_2\\ \\ C_3\end{pmatrix}.$$

D'où

$$X(t)=\begin{pmatrix}C_1e^t\\ \\ C_2e^t\cos t-C_3e^t\sin t\\ \\ C_2e^t\sin t+C_3e^t\cos t\end{pmatrix}.$$

Exercice 4.11. *Par la méthode de la matrice résolvante résoudre le système non homogène suivant :*

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y+1,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y-1.\end{cases}\tag{4.100}$$

Solution. L'écriture matricielle du système (4.100) est :

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \tag{4.101}$$

ou

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système homogène

$$X'(t) = AX(t) \tag{4.102}$$

Les valeurs propres de A sont -1 et -2. Les vecteurs propres sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La famille $\{V_1, V_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^2$, donc A est diagonalisable, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$ ou

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion.

$$e^{tA} = e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

.
La solution générale du système homogène (4.102) est

$$X(t) = \begin{pmatrix} Cx(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

ou bien

$$\begin{cases} x_h(t) = 2(C_1 + C_2)e^{-t} - (C_1 + 2C_2)e^{-2t} = 2k_1 e^{-t} - k_2 e^{-2t} \\ y_h(t) = -(C_1 + C_2)e^{-t} + (C_1 + 2C_2)e^{-2t} = -k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}, \end{cases}$$

où, $k_1 = (C_1 + C_2) \in \mathbb{R}$ et $k_2 = (C_1 + 2C_2) \in \mathbb{R}$.

2. La solution générale du système non homogène est $X(t) = e^{tA}C + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds$
Alors

$$X_g(t) = X_h(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{-(t-s)} - e^{-2(t-s)} 2e^{-(t-s)} - 2e^{-2(t-s)} \\ \\ -e^{-(t-s)} + e^{-2(t-s)} - e^{-(t-s)} + 2e^{-2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 2k_1 e^{-t} - k_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \\ -k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Exercice 4.12. *On considère le système*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -tx + y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = (1 - t^2)x + ty + t. \end{cases} \tag{4.103}$$

1. *Montrer que* $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ t \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} t \\ \\ 1 + t^2 \end{pmatrix}$ *sont deux solutions linéairement indépendantes du système homogène*

$$\begin{cases} (1 + t^2)x' - tx - y = 0 \\ (1 + t^2)y' + x - ty = 0. \end{cases} \tag{4.104}$$

2. *Chercher une solution particulière du système non homogène.*

3. En déduire la solution générale.

Solution.

1. On vérifie que x_1 et x_2 sont solutions du système homogène (4.104) de plus ces deux solutions sont linéairement indépendantes : Il suffit de calculer le wronskien.
   En effet,

$$\det(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Alors les solutions du système (4.104) sont de la forme

$$X(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

   où C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

2. On peut chercher une solution particulière de la forme

$$X(t) = C_1(t) x_1 + C_2(t) x_2.$$

   On doit avoir que

$$C_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix},$$

   ce qui nous donne le système suivant

$$\begin{cases} C_1'(t) = 1 \\ C_2'(t) = 0. \end{cases}$$

   dont la solution est

$$\begin{cases} C_1(t) = t + \tilde{C}_1, \\ C_2(t) = 1 + \tilde{C}_2. \end{cases}$$

   Alors une solution particulière est de la forme $x_P(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t^2+1 \end{pmatrix}$

3. La solution générale est donnée par la somme des solutions trouvées précédemment

$$X(t) = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} t \\ \\ 1+t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ \\ 2t^2+1 \end{pmatrix},$$

où $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.13. *Résoudre le système suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2t^2}y + 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2t}y + t^2, \end{cases} \tag{4.105}$$

sachant que $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ t \end{pmatrix}$ *est solution du système (4.106)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2t^2}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2t}y, \end{cases} \tag{4.106}$$

Solution.
Cherchons un deuxième vecteur V_2 tel que $\{x_1, V_2\}$ forme une base de (S_0) ((S_0) est l'ensemble de solutions du système (4.106).

Posons $V_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $W(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Alors la deuxième solution du système (4.106) est de la forme

$$x_2(t) = \alpha(t)x_1(t) + \beta(t)e_2 = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \\ \alpha(t)t + \beta(t) \end{pmatrix}.$$

En reportant dans (4.106) on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \dfrac{1}{2t^2}\beta(t), \\ \beta'(t) = 0, \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases}\alpha(t) = -\dfrac{1}{2t^2}C + K,\\ \beta(t) = C,\end{cases}$$

D'où

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \\ \alpha(t)t + \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t^2}C + K \\ \\ (-\frac{1}{2t^2}C + K)t + C \end{pmatrix}.$$

On peut prendre $C = 2$ et $K = 0$. Alors

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\{x_1, x_2\}$ une base de (S_0) car

$$W(t) = \det(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ \\ t & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Revenons maintenant à la résolution du système (4.105). Par la méthode de la variation des constantes on cherche une solution du système (4.105) sous la forme

$$X(t) = C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2 \tag{4.107}$$

En reportant (4.107) dans (4.105), on obtient le système

$$\begin{cases} C_1'(t) = \dfrac{3}{2}t,\\ C_2'(t) = -t^2,\end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} C_1(t) = \dfrac{3}{4}t^2 + \tilde{C}_1,\\ C_2(t) = -\dfrac{t^3}{3} + \tilde{C}_2.\end{cases}$$

La solution générale du système (4.105) est

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{12}t^2 + \tilde{C}_1 - \frac{\tilde{C}_2}{t}, \\ \\ \frac{5}{12}t^3 + \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2. \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

Introduction aux notions de Stabilité

La théorie de la stabilité traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations des conditions initiales.
Plus généralement, un système est stable si des petits changements dans l'hypothèse conduisent à des petites variations dans la solution. Il faut spécifier la métrique utilisée pour mesurer les perturbations afin de juger qu'un système est stable.
La stabilité peu se déterminer en calculant les valeurs propres de la matrice A. Car c'est cette matrice que représente le système et contient l'information de l'équation caractéristique. De fait les valeurs propres d'une matrice sont les racines de l'équation caractéristique.

5.1 Stabilité au sens de Liapounov. Notions fondamentales et définitions

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t) \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.1}$$

Définition 5.1.1. *Une solution $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ du système (5.1) satisfaisant aux conditions initiales $\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0$ est dite stable au sens de Liapounov pour $t \to +\infty$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour toute solution $x_i(t)$ $i = 1, 2, ..., n$ solution du système (5.1) dont les valeurs initiales satisfont aux conditions*

$$\left| x_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.2}$$

l'on ait les inégalités

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \epsilon \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.3}$$

La solution $\varphi_i(t)$ est dite instable si, pour un $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut, les inégalités (5.3) ne sont pas vérifiées pour au moins une solution $x_i(t)$ $i = 1, 2, ..., n$.
Si, sous la condition (5.2), en plus des inégalités (5.3) est aussi vérifiée la condition

$$\lim_{t \to \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.4}$$

la solution $\varphi_i(t)$ $i = 1, 2, ..., n$, est dite asymptotiquement stable.
L'étude de la stabilité de la solution $\varphi_i(t)$ $i = 1, 2, ..., n$ du système (5.1) peut être ramenée à celle de la solution nulle (triviale) $x_i \equiv 0$ $i = 1, 2, ..., n$, d'un certain système, analogue au système (5.1) :

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, ..., x_n, t), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.5}$$

où $F_i(0,0,...,O,t) \equiv 0$, $i = 1,2,...,n$. On dit que le point x_i, $i = 1,2,...,n$, est le point repos du système (5.5).

Définition 5.1.2. *Le point de repos $x_i \equiv 0$ $i = 1,2,...,n$ est stable au sens de Liapounouv si $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que toute solutions $x_i(t)$ $i = 1,2,...,n$, dont les valeurs initiales $x_i^0 = x_i(t_0)$, $i = 1,2,...,n$ satisfont à la condition*

$$\left|x_i^0\right| < \delta, \; i = 1,2,...,n, \tag{5.6}$$

vérifie les inégalités

$$|x_i(t)| < \epsilon, \; i = 1,2,...,n, \text{ pour tous les } t \geq t_0. \tag{5.7}$$

En particulier pour $n = 2$
Soit le système différentielle d'ordre 2

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) \end{cases} \tag{5.8}$$

La solution $x = \varphi_1(t)$ et $y = \varphi_2(t)$ du système (5.8) satisfais aux conditions initiales $\varphi_1(t_0) = a$ et $\varphi_2(t_0) = b$ est dite stable au sens de Liapounov pour $t \to +\infty$ si

$$\forall\epsilon > 0, \; \exists\delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que pour tout solution du (5.8) : } x = x(t); \; y = y(t) \; :$$
$$|x(t_0) - a| < \delta; \; |y(t_0) - b| < \delta \text{ alors } |x(t) - \varphi_1(t)| < \epsilon \text{ et } |y(t) - \varphi_2(t)| < \epsilon \; \forall t \geq t_0$$

Remarque 5.1.3.

1. *Si la solution $x = \varphi_1(t)$ et $y = \varphi_2(t)$ n'est pas stable on dit instable*
2. *Si cette solution est stable vérifiant $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t) - \varphi_1(t)| = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} |y(t) - \varphi_2(t)| = 0$, alors cette solution est dite asymptotiquement stable (au sens de Liapounov)*
3. *L'étude de la stabilité de la solution peut être ramené à la solution triviale (nulle) $(x = y = 0)$ d'un notre système analogue.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) \end{cases} \text{ tel que } f_1(t,0,0) = f_1(t,0,0) = 0 \; \forall t > 0 \tag{5.9}$$

*Dans ce cas le point $(0,0)$ est appelé point de repos du (5.9). D'où la définition **??** devient*

Définition 5.1.4. *Le point de repos $(x = y = 0)$ est stable (au sens de Liapounov pour $t \to +\infty$) si*

$$\forall\epsilon > 0, \; \exists\delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que pour tout solution du (5.9) : } x = x(t); \; y = y(t) \; :$$
$$|x(t_0)| < \delta; \; |y(t_0)| < \delta \text{ alors } |x(t)| < \epsilon \text{ et } |y(t)| < \epsilon \; \forall t \geq t_0$$

De plus, si $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)| = 0$, alors le point de repos est dite asymptotiquement stable (au sens de Liapounov).

Exemple 5.1.5. *Etudier la stabilité de la solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{dt} = 2 + t, \tag{5.10}$$

qui satisfait à la condition

$$x(0) = 1 \tag{5.11}$$

Solution. La solution de (5.10) est

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$

On utilisant la condition (5.11) on obtient

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 1$$

On utilisons la définition de la stabilité au sens de Liapounov pour $t \to +\infty$:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon) > 0,\ |x(t_0) - 1| < \delta \ alors\ \forall t > 0\ |\frac{1}{2}t^2 + 2t + x_0 - \frac{1}{2}t^2 - 2t - 1| = |x_0 - 1| < \epsilon$$

Donc il suffit de prendre $\delta = \epsilon$ pour avoir la stabilité de $\varphi(t)$.
Il reste à vérifie l'instabilité asymptotique

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 1| \neq 0$$

Donc la stabilité n'est pas asymptotique.

Exemple 5.1.6. *Etudier la stabilité de la solution du système suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = -9y \\ y'(t) = x \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

Solution.

1. *D'après l'exemple 4.2.1 de chapitre 4 la solution générale du système (5.12) est*

$$\begin{cases} x = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \\ y = \dfrac{C_1}{3} \sin 3x - \dfrac{C_2}{3} \cos 3x. \end{cases}$$

   Pour $x(0) = y(0) = 0$ on trouve $C_1 = C_2 = 0$, on obtient ainsi la solution triviale ($x \equiv y \equiv 0$), donc $(0, 0)$ est le point de repos.

2.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists ?\delta(\epsilon) > 0 \ tel\ que\ pour\ tout\ solution\ du\ (5.12) : x = x(t);\ y = y(t)\ :$$
$$|x_0 - 0| < \delta;\ |y_0 - 0| < \delta \ alors\ |x(t)| < \epsilon \ et\ |y(t)| < \epsilon\ \forall t \geq 0$$

   On a pour $t = 0$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = x_0, \\ y(0) = C_2 = -3y_0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos 3t - 3y_0 \sin 3t \\ y(t) = x_0 \sin 3t + y_0 \cos 3t \end{cases}$$

Donc

$\forall \epsilon > 0,\ \exists ?\delta(\epsilon) > 0$ *tel que pour tout solution du (5.12) :* $x = x(t);\ y = y(t)$:
$|x_0| < \delta;\ |y_0| < \delta$ *alors* $|x_0 \cos 3t - 3y_0 \sin t| < |x_0| + 3|y_0| < \epsilon$ *et*
$|x_0 \sin 3t + y_0 \cos 3t| < |x_0| + |y_0| < \epsilon\ \forall t \geq 0$

donc il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ *et la solution est stable, mais n'est pas asymptotique car* $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| \neq 0$ *et* $\lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)| \neq 0$

Remarque 5.1.7.

- *En générale, toutes les solutions d'un système linaire homogène (de n équations) à coefficients constants sont soit stables soit instables.*
- *Pour étudier le point de repos (on considère que le cas* $n = 2$*) il faut établir l'équation caractéristique*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.13}$$

et cherche ses racines λ_1 *et* λ_2*.*

1. *Les racines* λ_1*,* λ_2 *de l'équation caractéristique (5.13) sont réelles et distinctes :*
   a) $\lambda_1 < 0$*,* $\lambda_2 < 0$*. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable, figure 5.1) ;*
   b) $\lambda_1 > 0$*,* $\lambda_2 > 0$*. Le point de repos est instable (nœud instable, figure 5.2) ;*
   c) $\lambda_1 > 0$*,* $\lambda_2 < 0$*. Le point de repos est instable (col, figure 5.3) ;*
2. *Les racines de l'équation caractéristique (5.13) sont complexes* $\lambda_1 = p + iq$*,* $\lambda_2 = p - iq$ *:*
   a) $p < 0$*,* $q \neq 0$*. Le point de repos est asymptotiquement stable (foyer stable, figure 5.4) ;*
   b) $p > 0$*,* $q \neq 0$*. Le point de repos est instable (foyer instable, figure 5.5) ;*
   c) $p = 0$*,* $q \neq 0$*. Le point de repos est stable (centre, figure 5.6) ;*
3. *Les racines* $\lambda_1 = \lambda_2$ *sont multiples :*
   a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$*. Le point de repos est asymptotiquement stable (nœud stable, figure 5.7) ;*
   b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$*. Le point de repos est instable (nœud instable, figure 5.8).*

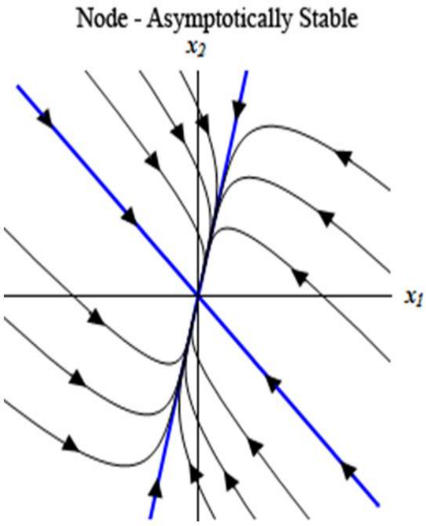

FIGURE 5.1 –

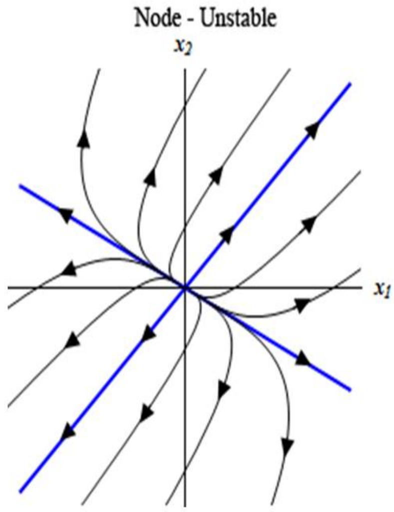

FIGURE 5.2 –

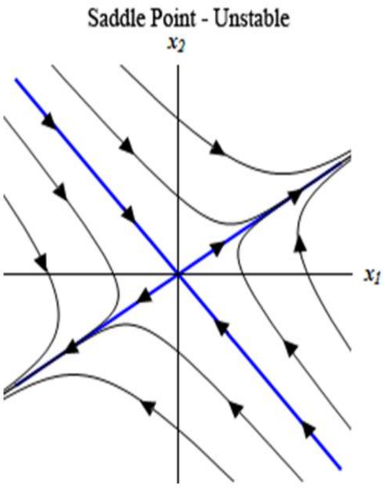

FIGURE 5.3 –

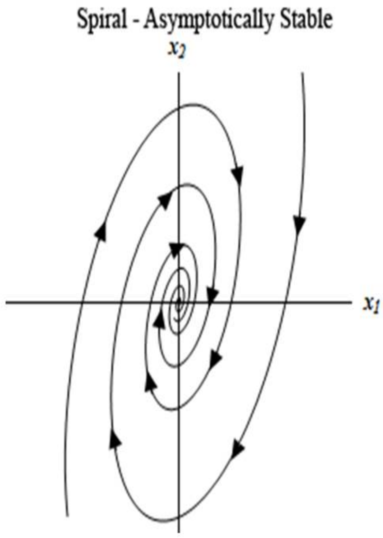

FIGURE 5.4 –

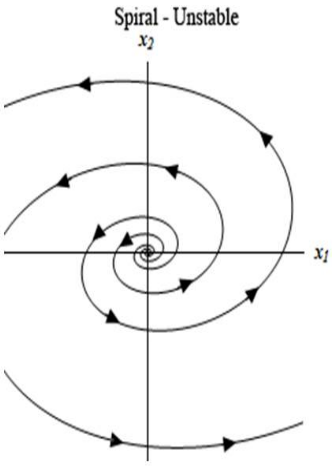

FIGURE 5.5 –

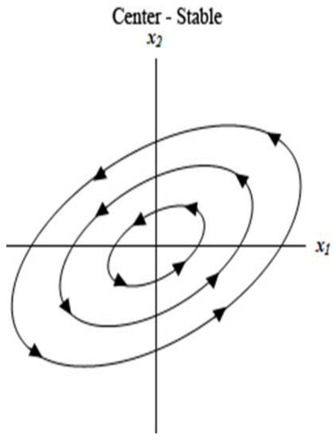

FIGURE 5.6 –

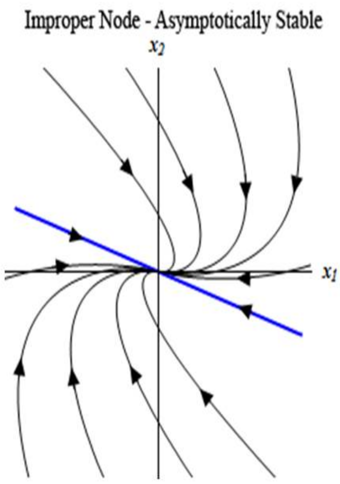

FIGURE 5.7 –

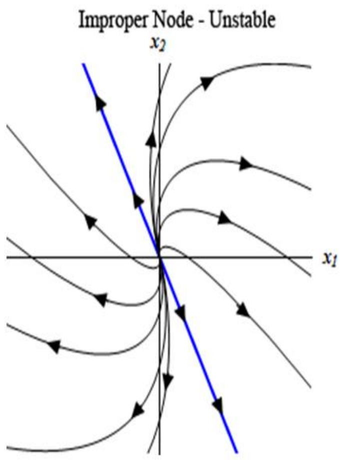

FIGURE 5.8 –

5.2 Exercices du chapitre

Exercice 5.3. *Etudier la stabilité au sens de Liapounov des systèmes suivants en utilisant la définition :*

1.
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + t^2 \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

2.
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Solution.

1. L'équation (5.14) est une équation linéaire non homogène. Sa solution générale est $x(t) = Ce^{-t} + t$. A la condition initiale $x(0) = 0$ satisfait une solution

$$\varphi(t) = t, \tag{5.16}$$

de l'équation (5.14). A la condition $x(0) = x_0$ satisfait une solution

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t. \tag{5.17}$$

Considérons la différence des solutions (5.16) et (5.17) de l'équation (5.14) et écrivons-la sous la forme

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ (par exemple $\delta = \epsilon$) tel que toute solution $x(t)$ de l'équation (5.14), dont les valeurs initiale satisfont à la condition $|x_0 - 0| < \delta$, vérifie l'inégalité

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|e^{-t} < \epsilon, \quad \text{pour tous les } t \geq 0.$$

Par suite, la solution $\varphi(t) = t$ est stable. De plus, puisque

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \to +\infty} |x_0 - 0|e^{-t} = 0.$$

La solution $\varphi(t) = t$ est asymptotiquement stable. Cette solution $\varphi(t)$ est non bornée pour $t \to +\infty$.

2. D'après l'exercice.4.11 (chapitre 3), la solution du système (5.15) est

$$\begin{cases} x(t) = 2k_1 e^{-t} - k_2 e^{-2t} \\ y(t) = -k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}, \end{cases} \tag{5.18}$$

où, $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$.
La solution trivial $x \equiv y \equiv 0$ du système (5.15) est stable au sens de Lyapunov, si $\forall \epsilon >$

$0, \exists\gamma(\epsilon) > 0$ tel que $\forall x(t),\ y(t)\ |x(t_0) = x_0| < \delta,\ |y(t_0) = y_0| < \delta$ alors $|x(t)| < \epsilon$ et $|y(t)| < \epsilon$ $\forall t \geq t_0$.
Si de plus, vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)| = 0$, alors la stabilité est asymptotique
D'après (5.18) pour $\forall t = t_0$, alors

$$\begin{cases} x_0 = 2k_1 - k_2 \\ y_0 = -k_1 + k_2 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} k_1 = x_0 + y_0 \\ k_2 = x_0 + 2y_0 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} x = 2(x_0 + y_0)e^{-t} - (x_0 + 2y_0)e^{-2t} \\ y = -(x_0 + y_0)e^{-t} + (x_0 + 2y_0)e^{-2t}, \end{cases}$$

et si $|x_0 - 0| < \delta,\ |y_0 - 0| < \delta$ alors,

$$|x(t) - 0| = |x(t)| \leq 2|x_0 + y_0| + |x_0 + 2y_0| \leq 3|x_0| + 4|y_0| < 7\delta$$

et

$$|y(t) - 0| = |y(t)| \leq |x_0 + y_0| + |x_0 + 2y_0| \leq 2|x_0| + 3|y_0| < 5\delta < \epsilon.$$

Donc, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\epsilon}{7}$ pour avoir la stabilité .
De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)| = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$. Donc, la stabilité est asymptotique .

Exercice 5.4. *Déterminer la nature des points de repos pour les systèmes suivants :*

1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases} \tag{5.19}$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases} \tag{5.20}$$

3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases} \tag{5.21}$$

4.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x. \end{cases} \tag{5.22}$$

5.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases} \tag{5.23}$$

6.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases} \tag{5.24}$$

7.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \tag{5.25}$$

Solutions.

1. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou } (\lambda+1)^2 = 0.$$

   Ses racines $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$. Le point de repos est asymptotiquement stable.

2. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou } \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

   Ses racines $\lambda_1 = 3+\sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 3-\sqrt{2} > 0$ sont réelles, distinctes et positives. Par suite, le point de repos est instable.

3. Les valeurs propres de la matrice sont $-1 \pm 2i$ avec partie réelle négative. Par conséquent le point de repos $(0,0)$ est stable.

4. Les valeurs propres de la matrice sont $\pm 2i$ avec partie réelle nulle. Par conséquent le point de repos $(0,0)$ est stable.

5. Les valeurs propres de la matrice sont $1 \pm i$ avec partie réelle positive. Par conséquent le point de repos $(0,0)$ est instable.

6. Les valeurs propres de la matrice sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. On a donc deux valeurs propres l'une nulle et l'autre négative. Par conséquent le point de repos $(0,0)$ est stable.

7. Les valeurs propres de la matrice sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 = -1$. On a donc deux valeurs propres nulles. Par conséquent le point de repos $(0,0)$ est instable.

Exemple 5.4.1. *Déterminer la nature des points de repos pour les systèmes suivants :*

1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2\alpha y - \beta^2 x \quad (\beta > 0). \end{cases} \tag{5.26}$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{d}{m}y, \quad \textit{pour } d, m, k > 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

Solution.

1. Ecrivons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou } \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \tag{5.28}$$

Considérons les cas suivants :

a) $\alpha = 0$. De (5.28) on obtient $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Le point de repos est stable.

b) $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Re\ \lambda_{1,2} < 0$. Le point de repos est un foyer stable.

c) $\alpha < 0$, $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Re\ \lambda_{1,2} > 0$. Le point de repos est un foyer instable.

d) $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$. Les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et négatives. Le point de repos est un nœud stable.

e) $\alpha < 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$. Les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et positives. Le point de repos est un nœud instable.

2. Les valeurs propres sont $\dfrac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4km}}{2m}$. Par conséquent

a) si $d^2 - 4km > 0$, alors on a deux valeurs propres négatives (car $d > \sqrt{d^2 - 4km}$) et donc stabilité asymptotique (nœud stable).

b) si $d^2 - 4km = 0$, alors on a une valeurs propre double négative et donc stabilité asymptotique (nœud stable).

c) si $d^2 - 4km < 0$, alors on a deux valeurs propres à partie réelle négatives et donc stabilité asymptotique (foyer stable).

Bibliographie

[1] J. Martin, Cours de mathématiques pour la préparation aux Brevets de Techniciens supérieurs et pour les écoles d'ingénieurs, Dunod, Paris, 1967.

[2] M. Karsnon, A. Kissélev, G. Makarenko, Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires, Edition Mir, Mocou, 1981.

[3] Xavier Gourdon , Les maths en tête - Analyse 2ème édition, Editions Ellipses Marketing S.A., 2008.

[4] Jean-Pierre Demailly, Analyse Numérique et Equations Différentielles, Collection Grenoble Sciences, 1996.

[5] Daniel Fredon, Myriam Maumy Bertrand, Frédéric BertrandAND,Mathématiques Analyse en 30 fiches, Dunod, Paris, 2009.