République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. Mohamed Boudiaf.
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département des Mathématiques

Optimisation

Cours et exercices

Présenté par :

Dr RADJEF Epouse DOUAR Sonia

2019

Table des matières

Introduction Générale

Euler :"Rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum."

L'optimisation (ou programmation mathématique) apparaît comme l'une des branches des mathématiques les plus adaptées au développement d'outils pour l'ingénieur. L'optimisation c'est au moins trois choses :

- l'art de formuler des problèmes de décision grâce à des concepts et outils mathématiques précis ;
- une théorie mathématique ;
- une "cuisine" algorithmique. Une fois que le mathématicien a sû caractériser une solution, et d'abord se prononcer sur son existence voire son unicité, l'ingénieur voudrait pouvoir calculer cette solution.

En 1949, Dantzig a proposé le terme "programmation linéaire" pour l'étude des problèmes théoriques et algorithmiques liés à l'optimisation de fonctions linéaires sous des contraintes linéaires.

Kuhn et Tucker proposent, en 1951, le terme de "programmation non linéaire" pour l'étude des problèmes d'optimisation non linéaire avec ou sans contraintes.

La programmation dynamique est employée par R. Bellman en 1957 pour une méthode générale d'optimisation des systèmes dynamiques, c-à-d, évoluant au cours du temps.

La programmation en nombres entiers est suggérée par Gomory en 1958 pour les problèmes d'optimisation où les variables sont astreintes à ne prendre que des valeurs entières.

Cependant, malgré l'apparente diversité des thèmes abordés en les années 1945 et 1960, la prise de conscience progressive d'une affinité profonde, tant du point des structures que des méthodes, entre les différentes classes de problèmes amène rapidement à les intégrer au sein d'une nouvelle discipline plus vaste, la programmation mathématique, dont le terme apparaît officiellement en 1959 dans un symposium.

La programmation mathématique est aujourd'hui une branche particulièrement active des mathématiques appliquées et il y-a, à cela, de nombreuses raisons. La première est peut-être le nombre, la variété et l'importance de ses applications que ce soit dans les sciences de l'ingénieur ou dans d'autres domaines des mathématiques appliquées. Sans prétendre être exhaustif, on peut citer :

- En recherche opérationnelle : optimisation des systèmes technico-économiques, planifications, problèmes de transport, d'ordonnancement, de gestion des stocks, etc ...
- En analyse numérique : approximation, régression, résolution des systèmes linéaires et non linéaires, méthodes numériques liées à la mise en oeuvre des méthodes d'éléments finis, etc ...
- En automatique : identification des systèmes, commande optimale des systèmes, filtrage, ordonnancement d'atelier, commande de robots, etc ...
- En ingénierie : dimensionnement et optimisation des structures, conception optimale des systèmes techniques complexes tels que les systèmes informatiques, réseaux d'ordinateurs, réseaux de transport, de télécommunication, etc...
- En économie mathématique : résolution de grandes modèles macro-économiques, modèles d'entreprise, théorie de la décision et théorie des jeux.

Mais l'importance de la programmation mathématique vient aussi du fait qu'elle fournit un cadre conceptuel adéquat pour l'analyse et la résolution de nombreux problèmes des mathématiques appliquées.

Ce polycopié est destiné particulièrement aux étudiants de licence (L3) et de master en mathématiques.

Il regroupe les deux volets de l'optimisation, à savoir optimisation sans contraintes et optimisation avec contraintes. C'est un support de cours riche d'exercices et d'exemples numériques. Il est composé de 5 chapitres répartis en deux parties, l'une concerne l'optimisation sans contraintes et la seconde concerne l'optimisation avec contraintes. Dans le premier chapitre, on rappelle brièvement quelques notions mathématiques utiles pour la suite du cours. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés à l'optimisation sans contraintes ; dans le premier, on présentera les conditions d'optimalité, les conditions d'existence et d'unicité, dans le cas d'un problème non linéaire sans contraintes. Puis, on développera les algorithmes les plus utilisés pour résoudre ce type de problèmes. Quand aux quatrième et cinquième chapitres, ils sont consacrés à la théorie et aux algorithmes de résolution d'un problème non linéaire soumis

à des contraintes.
Chaque chapitre est clôturé par un ensemble d'exercices. Les divers exercices accompagnent le document afin d'assimiler les notions plus théoriques vues en cours. Les solutions de certains de ces exercices feront l'objet d'un prochain polycopié.

Première partie

Optimisation sans contraintes

Chapitre 1

Concepts et Considérations Théoriques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur l'algèbre linéaire et la programmation mathématique. On rappelle tout d'abord les propriétés essentielles des formes quadratiques, ainsi que la notion des ensembles et fonctions convexes.

1.2 Vecteurs et matrices

Définition 1.2.1. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Une matrice d'ordre $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau à deux dimensions, ayant m lignes et n colonnes, représenté sous la forme suivante :

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ et $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ représentent respectivement l'ensemble des indices des lignes et des colonnes de A. Pour des calculs pratiques, la matrice A se note aussi

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix},$$

où $a_j = A(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de dimension m ;
$A_i = A(i, J) = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ est un vecteur ligne de dimension n.
Chaque vecteur, noté $x = x(J) = (x_j, j \in J)$, sera ainsi considéré comme un vecteur-colonne tandis que le vecteur-ligne sera noté x^T. La matrice transposée de A sera notée

$$A^T = A^T(J, I) = (a_{ji}, j \in J, i \in I).$$

Notons qu'un vecteur-colonne de dimension n peut être considéré comme une matrice d'ordre $(n \times 1)$, tandis qu'un vecteur ligne de dimension n peut être considéré comme une matrice d'ordre $(1 \times n)$.
La matrice A est dite carrée si on a $m = n$; de plus, si $A = A^T$, la matrice est dite symétrique.
La matrice identité d'ordre n sera notée I_n.

1.2.1 Matrices et vecteurs partitionnés

On peut effectuer le produit d'une matrice A et d'un vecteur x, après les avoir partitionnés judicieusement. On dit alors qu'on a effectué le produit par blocs. En effet, si l'on a

$$A = [A_1 | A_2], x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix},$$

alors on peut écrire :

$$Ax = [A_1 | A_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2.$$

De même pour

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \end{bmatrix},$$

l'équation $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

On peut partitionner une matrice d'une manière arbitraire. Par exemple, si $A = A(I, J)$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$ et que J_B et J_N sont deux sous-ensembles quelconques de J, tels que

$$|J_B| = m, \quad J_B \cup J_N = J, \quad J_B \cap J_N = \emptyset,$$

alors on peut partitionner A de la façon suivante :

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = [A_B | A_N],$$

avec $A_B = A(I, J_B), \quad A_N = A(I, J_N)$.
Si $x = x(J) = \begin{bmatrix} \frac{x_B}{x_N} \end{bmatrix}, \quad x_B = x(J_B), \quad x_N = x(J_N)$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Ax = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j &= \sum_{j \in J_B} a_j x_j + \sum_{j \in J_N} a_j x_j \\ &= A(I, J_B)x(J_B) + A(I, J_N)x(J_N) \\ &= A_B x_B + A_N x_N. \end{aligned}$$

1.3 Discussion générale sur les solutions d'un système linéaire

Soient m et n deux nombres entiers. Un système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où les coefficients a_{ij} sont des réels. Les nombres $b_1, b_2, \cdots, b_m$ sont appelés les membres libres du système (1.1) ou les seconds membres. En posant

$$A = (a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n), \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Le système (1.1) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$Ax = b. \tag{1.2}$$

Tout vecteur x vérifiant les équations (1.1) s'appelle solution du système. Le système (1.1) est dit compatible s'il possède une ou plusieurs solutions. Dans le cas contraire, il est dit incompatible ou impossible. Lorsque le vecteur b est nul, le système (1.2) est dit homogène. Tout système homogène possède la solution triviale $x = 0$.

Définition 1.3.1. Le système linéaire (1.2) est dit de rang complet en lignes si $rang(A) = m, m \leq n$, et de rang complet en colonnes si $rang(A) = n, \quad m \geq n$.

Lemme 1.3.1. *Soit $m \leq n$ et $rang(A) = m$. Alors le système $Ax = b$ admet toujours des solutions, quelque soit le second membre b :*
a) une et une seule solution si $m = n$,
b) une infinité de solutions si $m < n$.

1.4 Propriétés des formes quadratiques

Définition 1.4.1. Une fonction $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, est dite forme quadratique de n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ si elle s'écrit sous la forme suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x \tag{1.3}$$

où $x^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un n-vecteur ligne et $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ est une matrice carrée d'ordre n.

Pour $i \neq j$, le coefficient du terme $x_i x_j$ s'écrit $a_{ij} + a_{ji}$. En vertu de cela, la matrice A peut être supposée symétrique. En effet, en définissant de nouveaux coefficients

$$d_{ij} = d_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

On obtient une nouvelle matrice D symétrique telle que

$$D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n), avec \quad d_{ij} = d_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Il est clair qu'après une redéfinition des coefficients, la valeur de la forme quadratique $F(x)$ reste inchangée pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(x) = x^T A x = x^T D x.$$

Pour cela, il est naturel de considérer que la matrice d'une forme quadratique est toujours symétrique.

1.4.1 Gradient d'une forme quadratique

Définition 1.4.2. Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continûment différentiable. Son gradient au point x est défini par :

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Soit F une forme quadratique et D sa matrice symétrique associée :

$$F(x) = x^T D x. \tag{1.5}$$

En écrivant la matrice D sous forme de vecteurs colonnes

$$D = (d_1, d_2, \cdots, d_n),$$

l'expression (1.5) peut se mettre sous la forme suivante :

$$F(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} d_1^T x \\ d_2^T x \\ \vdots \\ d_j^T x \\ \vdots \\ d_n^T x \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j d_j^T x.$$

La dérivée partielle de F par rapport à chaque variable x_j est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= x_1 d_{1j} + \cdots + x_{j-1} d_{(j-1)(j)} + d_j^T x + x_j d_{jj} + \cdots + x_n d_{nj} \\
&= x_1 d_{1j} + \cdots + x_{j-1} d_{(j-1)(j)} + x_j d_{jj} + \cdots + x_n d_{nj} + d_j^T x \\
&= 2 d_j^T x
\end{aligned}$$

Par conséquent, le gradient de $F(x)$ est :

$$\nabla F(x) = 2Dx. \tag{1.6}$$

Définition 1.4.3. Soit une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$, $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Le Hessien de la fonction F est défini par :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 F(x) &= \left(\nabla \tfrac{\partial F}{\partial x_1}(x), \nabla \tfrac{\partial F}{\partial x_2}(x), \cdots, \nabla \tfrac{\partial F}{\partial x_j}(x), \cdots, \nabla \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(x)\right) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_n}(x)
\end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Définition 1.4.4. Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La dérivée directionnelle de F dans la direction d au point x est :

$$\begin{aligned}
F^{'}(x; d) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x + td) - F(x)}{t} \\
&= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x + td)|_{t=0} d_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x + td)|_{t=0} d_n \\
&= (\nabla F(x))^T d.
\end{aligned}$$

1.4.2 Forme quadratique définie et semi-définie positive

Soit $F(x) = x^T D x$ une forme quadratique avec D symétrique.

Définition 1.4.5. F est dite définie positive si $x^T D x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. elle est dite semi-définie positive ou définie non négative si $x^T D x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.6. F est dite définie négative si $x^T Dx < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite semi-définie négative ou définie non positive si $x^T Dx \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.7. Une matrice symétrique D est dite matrice définie positive (respectivement non négative) et on note $D \succ 0$ (respectivement $D \succeq 0$) si elle est associée à une forme quadratique définie positive (respectivement non négative).

1.4.3 Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies

L'intérêt du critère du Sylvester est de caractériser une forme quadratique définie ou semi-définie. Pour cela, considérons la matrice symétrique suivante :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Le mineur de la matrice D, formé des lignes $i_1, i_2, \cdots, i_p$ et les colonnes $j_1, j_2, \cdots, j_p$, sera noté comme suit :

$$D \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{i_1 j_1} & d_{i_1 j_2} & \cdots & d_{i_1 j_p} \\ d_{i_2 j_1} & d_{i_2 j_2} & \cdots & d_{i_2 j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{i_p j_1} & d_{i_p j_2} & \cdots & d_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Ce mineur est dit principal si : $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_p = j_p$, c'est-à-dire s'il est formé des lignes et des colonnes portant les mêmes numéros.
Les mineurs suivants :

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \cdots, D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

sont appelés mineurs principaux sucessifs. Alors, le critère de Sylvester se formule comme suit :

Théorème 1.4.1 (Critère de sylvester)**.** *(i) Pour que la matrice D soit définie positive ($D \succ 0$), il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux successifs soient positifs :*

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \cdots, D_n > 0; \tag{1.8}$$

(ii) Pour que la matrice D soit semi-définie positive ($D \succeq 0$), il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux soient non négatifs :

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ i_1, i_2, \cdots, i_p \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n, \quad p = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.9}$$

Remarque 1.4.1. Pour qu'une matrice D soit définie négative ($D \prec 0$) ou non positive ($D \preceq 0$), les conditions (1.8) et (1.9) se reformulent ainsi :

(i) $D \prec 0 \Leftrightarrow (-1)^p D_p > 0, \quad p = 1, 2, \cdots, n.$

(ii) $D \preceq 0 \Leftrightarrow (-1)^p D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ i_1, i_2, \cdots, i_p \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n, \quad p = 1, 2, \cdots, n.$

Remarque 1.4.2. Le critère de Sylvester n'est valable que pour les matrices symétriques.

1.4.4 Propriétés des matrices définies et semi-définies positives

Les matrices symétriques définies ont des propriétés très intéressantes. En voici quelques unes :

Propriété 1.4.1. Soit la matrice D partitionnée de la manière suivante :

$$D = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad m & \quad\quad k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \end{array} , m + k = n.$$

Si $D > 0$ ($D \geq 0$), alors les sous-matrices principales D_{11} et D_{22} sont définies positives (non négatives). D'une manière générale, toute sous-matrice principale d'une matrice définie positive (non négative) est aussi définie positive (non négative).

Propriété 1.4.2. Un élément de la diagonale d'une matrice symétrique D définie non négative ne peut s'annuler que si les autres éléments de la même ligne et colonne s'annulent aussi.

Propriété 1.4.3. Soit D une matrice symétrique définie non-négative. Si $x \in \mathbb{R}^n$ est un point quelconque fixe tel que $x^T D x = 0$, alors on aura $Dx = 0$.

1.5 Éléments d'analyse convexe

Dans les problèmes d'optimisation, avec ou sans contraintes, une notion va jouer un rôle très important : celle de convexité. En effet, pour la plupart des algorithmes, la convergence vers un optimum global ne pourra être démontrée qu'avec des hypothèses de convexité.

1.5.1 Ensembles convexes

Définition 1.5.1. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1], \text{ on a } \lambda x + (1-\lambda) y \in S. \tag{1.10}$$

Cette définition peut s'interpréter en disant que S est convexe si et seulement si pour deux points quelconques x et y pris dans S, le segment $[x, y]$ tout entier est contenu dans S.

Définition 1.5.2. Soit $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ un ensemble de k points de $\mathbb{R}^n$.

- Un point $p \in \mathbb{R}^n$ peut être obtenu par :
  - Combinaison linéaire des points de S si

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, k}.$$

  - Combinaison affine des points de S si

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0.$$

  - Combinaison conique des points de S si

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i = \overline{1, k}.$$

– Combinaison convexe des points de S si

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \; i = \overline{1, k}.$$

- On définit l'enveloppe conique (respectivement convexe) des points de S comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pouvant être obtenus par combinaison conique (respectivement convexe) des points de S.
- L'espace affine (respectivement espace vectoriel) engendré par les points de S est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pouvant être obtenus par combinaison affine (respectivement linéaire) des points de S.
- Les points de S sont dits affinement indépendants (respectivement linéairement indépendants) si aucun des points de S ne peut être obtenu par une combinaison affine (respectivement linéaire) des autres points de S.

Propriété 1.5.1. Un ensemble S de points de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si toute combinaison convexe de points de S est encore un point de S.

Exemple 1.5.1. L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n, x = x_0 + \alpha d, \alpha \geq 0\}$ est convexe, où $d \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur non nul, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un point fixe.

En effet, pour tout $x_1, x_2 \in S$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$x_1 = x_0 + \alpha_1 d, \; x_2 = x_0 + \alpha_2 d,$$

où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 &= \lambda(x_0 + \alpha_1 d) + (1-\lambda)(x_0 + \alpha_2 d) \\ &= x_0 + [\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2]d. \end{aligned}$$

Comme $\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 \geq 0$, alors $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.

Théorème 1.5.1. *Soient S_1 et S_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$. Alors*

1. *$S_1 \cap S_2$ est convexe ;*
2. *$S_1 \pm S_2 = \{x_1 \pm x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ est convexe.*

Théorème 1.5.2. *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. Alors*

1. *l'intérieur de S, noté $IntS$, est un ensemble convexe ;*
2. *la clôture $\overline{S}$ de S est un ensemble convexe.*

1.5.2 Fonctions convexes

Définition 1.5.3. On dit qu'une fonction $f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur un ensemble convexe S, est convexe, si elle vérifie :

$$\forall x \in S, \forall y \in S, \forall \lambda \in [0,1]\,, \text{ on a : } \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Une fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.
Une fonction f est dite concave si $(-f)$ est convexe.

L'interprétation géométrique de cette définition est que le graphe d'une fonction convexe est toujours en dessous du segment reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

Exemple 1.5.2. Un des exemples basiques de fonctions convexes est la fonction indicatrice. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide ; la fonction indicatrice $I_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est définie par

$$I_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in S, \\ +\infty, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La fonction indicatrice I_S est convexe si et seulement si S est convexe.

Exemple 1.5.3. On définit la fonction distance :

$$d_S(x) = inf\{\|y - x\| \mid y \in S\},$$

où $S \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe non vide et $\|.\|$ est une norme quelconque dans $\mathbb{R}^n$. Alors d_S est une fonction convexe.

Une fonction convexe peut aussi être décrite par son épigraphe.

Définition 1.5.4. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et $f : S \to \mathbb{R}$. L'ensemble

$$\{(x, f(x)) : x \in S\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

décrivant la fonction f est appelé le graphe de la fonction f.

Définition 1.5.5. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide. Soit $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. L'épigraphe de f, noté *epif*, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$epif = \{(x, \alpha) | f(x) \leq \alpha, x \in S, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

L'hypographe de f, noté *hypf*, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$hypf = \{(x, \alpha) | f(x) \geq \alpha, x \in S, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Les théorèmes suivants indiquent la relation entre une fonction convexe et la convexité de $epif$.

Théorème 1.5.3. *Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide et $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Alors, f est convexe si et seulement si $epif$ est un ensemble convexe.*

Démonstration. Supposons que f est convexe. Soient $x_1, x_2 \in S$ et $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in epif$. D'après les définitions de la fonction convexe et de l'épiraphe, il s'ensuit

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$. Comme S est un ensemble convexe, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$. D'où

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2) \in epif,$$

ce qui implique que $epif$ est convexe.
Supposons, maintenant, que $epif$ est convexe, et soient $x_1, x_2 \in S$. On a $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in epif$. D'après la convexité de $epif$, on a

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)) \in epif, \text{ pour } \lambda \in [0,1].$$

Donc

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$. D'où f est convexe. □

Théorème 1.5.4.
1. *Soient f une fonction convexe sur un ensemble convexe $S \subset \mathbb{R}^n$ et un nombre réel $\alpha \geq 0$. Alors αf est aussi une fonction convexe sur S.*
2. *Soient f_1, f_2 deux fonctions convexes sur un ensemble convexe S. Alors $f_1 + f_2$ est aussi une fonction convexe sur S.*
3. *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_m$ des fonctions convexes sur un ensemble convexe S et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \geq 0$, des nombres réels. Alors $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$ est aussi une fonction convexe sur S.*

Dans le cas où $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a le résultat suivant :

Propriété 1.5.2. Si $f : S \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable sur S convexe, alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0, \forall x \in S$. Elle est strictement convexe si $f''(x) > 0, \forall x \in S$.

Théorème 1.5.5. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f est continûment différentiable, les conditions a) et b) ci-dessous sont équivalentes ;*
Si f est deux fois continûment différentiable, les conditions a), b) et c) ci-dessous sont équivalentes :

a) f est convexe ;
b) $\forall x, \forall y : \; f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y - x)$;
c) $\forall x$, le hessien $\nabla^2 f(x)$ est une matrice semi-définie positive ($y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$).

Corollaire 1.5.1. *Soit f une forme quadratique définie par*

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x.$$

Alors f est convexe si et seulement si $A \succeq 0$, et strictement convexe si et seulement si $A \succ 0$.

Cela provient du fait que $\nabla^2 f(x) = A$.

Définition 1.5.6. On dit qu'un problème de programmation mathématique est convexe s'il consiste à minimiser une fonction convexe (respectivement maximiser une fonction concave) sur un domaine convexe.

1.6 Semi-continuité inférieure

De façon générale, une fonction convexe peut être très compliquée sur le bord de son domaine. Par exemple, la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x^2 + y^2 < 1, \\ \phi(x,y) & \text{si} \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \text{avec} \qquad \phi(x,y) \geq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

est convexe. Cependant, son comportement sur le bord peut être arbitrairement complexe. Minimiser de telles fonctions est en général impossible. Cette remarque nous mène à nous restreindre à la classe de fonctions semi-continues inférieurement.

Définition 1.6.1. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné.

Définition 1.6.2 (Fonction semi-continue inférieurement)**.** Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite fermée ou semi-continue inférieurement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x, \liminf f(x_n) \geq f(x).$$

Proposition 1.6.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) f est semi-continue inférieurement.

ii) Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq \alpha\}$ est fermé.

iii) $epi(f)$ est un ensemble fermé.

Définition 1.6.3. La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si et seulement si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

1.7 Sur les polyèdres et les polytopes

On note par S l'ensemble suivant :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\},$$

où b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et A une matrice à m lignes et n colonnes, m et n étant des nombres finis.
On a

$$Ax \leq b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2, \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & \leq & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m. \end{array} \right.$$

Définition 1.7.1. L'ensemble S obtenu par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$ (chacun de ces demi-espaces correspondant à une des lignes du système matriciel $Ax \leq b$), constitue ce que l'on nomme un polyèdre.

Définition 1.7.2. Un polyèdre borné, i.e. un polyèdre pour lequel il existe un nombre B tel que chaque point du polyèdre a des coordonnées comprises entre $-B$ et B, est un polytope.

Théorème 1.7.1. *Un polyèdre est un ensemble convexe.*

Définition 1.7.3. Le polyèdre S est de dimension k, noté $\dim(S) = k$, si le nombre de points de S affinement indépendants est $(k+1)$. Le polyèdre S a pleine dimension si $\dim(S) = n$.

Définition 1.7.4. Un point x d'un polyèdre S est un point extrême de S si, dans toute expression de x comme combinaison convexe de deux points x_1 et x_2 de S, on a forcément $x_1 = x_2 = x$.

Définition 1.7.5. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$.

- Une inéquation $a^T x \leq a_0$ est une inéquation valide pour S si elle est vérifiée par chacun des points de S.
  Si $a^T x \leq a_0$ est une inéquation valide pour S, elle définit une face F de S, avec $F := \left\{x \in \mathbb{R}^n | x \in S, a^T x = a_0\right\}$.
- Une face F de S est une face propre de S si $F \neq \emptyset$ et $F \neq S$.
- Une face F d'un polyèdre S est une facette de S si $\dim(F) = \dim(S) - 1$.

Théorème 1.7.2. *Un point x est un point extrême d'un polyèdre S si et seulement si x est une face de dimension 0 de S.*

Une autre manière d'énoncer le théorème 1.7.2 est :
Un point x^0 est un point extrême d'un polyèdre S si et seulement s'il existe un vecteur c tel que x^0 est l'unique solution optimale du problème suivant :

$$c^T x \longrightarrow \max, x \in S.$$

Théorème 1.7.3. *Un polyèdre a un nombre fini de faces.*

Définition 1.7.6. Un ensemble convexe C de points de $\mathbb{R}^n$ est un cône si $x \in C$ implique $(\lambda x) \in C$ pour tout $\lambda \geq 0$.
Un cône est pointé s'il possède un point extrême.

Définition 1.7.7. Le cône de récession du polyèdre S est le polyèdre $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq 0\}$.

Propriété 1.7.1. Si S est un polytope, alors S_0 ne contient que le point 0, i.e. $\text{rang}(A) = n$.

Définition 1.7.8. Si S n'est pas vide, alors $r \in S_0 \backslash \{0\}$ est un rayon de S. Un rayon r de S est un rayon extrême de S s'il n'existe pas deux rayons de S, r_1 et r_2, tels que $r_1 \neq \lambda r_2$ pour tout $\lambda \geq 0$, avec $r = \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2$.

Une autre manière de caractériser les rayons extrêmes d'un polyèdre est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.7.4. *Soit* $S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ *un polyèdre dans* $\mathbb{R}^n$*. Si* S *n'est pas vide, le vecteur* r *est un rayon extrême de* S *si et seulement si* $\{\lambda r | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$ *est une face de dimension 1 de* S_0*.*

Corollaire 1.7.1. *L'ensemble (polytope ou polyèdre) convexe :*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$$

a un nombre fini $\tau(S)$ *de points extrêmes et* $\tau(S) \leq \mathcal{C}_n^m$*.*

Corollaire 1.7.2. *Tout point d'un polytope* $S \subset \mathbb{R}^n$ *est combinaison convexe des points extrêmes de* S*.*

Corollaire 1.7.3. *Tout point d'un polyèdre* $S \subset \mathbb{R}^n$ *est combinaison convexe des points extrêmes de* S*, à laquelle s'ajoute éventuellement une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de rayons extrêmaux.*

1.8 Exercices

Exercice 1.8.1. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = AA^T$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

a) Montrer que $A^T A = 0$.

b) En déduire que $A = 0$.

Exercice 1.8.2. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A^T A$ est diagonalisable à valeurs propres positives.

Exercice 1.8.3.
- Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n et $S = A^T A$. Montrer que S est symétrique semi-définie positive.
- Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = A^T A$. A t-on l'unicité de A ?
- Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
- Montrer que $rang(A) = rang(S)$.

Exercice 1.8.4.
1. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Utiliser la définition de la convexité pour montrer que l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ est un ensemble convexe.

2. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est juste ou fausse :
   - L'ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit fermé quand tout point de S est un point frontière.
   - Si $S \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert alors S est convexe.

Exercice 1.8.5. Etudier la convexité des fonctions suivantes :

1. $f_1(X_1, X_2) = 10X_1 + 10X_2 + 100 - X_1^2 - 2X_1X_2 - X_2^2$
2. $f_2(X_1, X_2) = X_1^2 + 2X_1X_2 + 100X_1 + 100X_2$
3. $f_3(X_1, X_2) = X_1e^{X_1+X_2}, X_1, X_2 \geq 0.$
4. $f(X_1, X_2, X_3) = 3X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 - 2X_1X_3 + 2X_2X_3 - 6X_1 - 4X_2 - 2X_3$

Exercice 1.8.6. Etudier la nature des formes quadratiques suivantes :

1. $z = X_1^2 + X_2^2$;
2. $z = (X_1 + X_2)^2$;
3. $z = X_1^2 - X_2^2$.

Exercice 1.8.7. Calculer la jacobienne de la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) = (e^x + y^3, y, 3\cosh x + \sinh y)^T.$$

Exercice 1.8.8. Montrer que la fonction suivante est convexe :

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3.$$

Exercice 1.8.9. Calculer le gradient et le hessien de la fonction de Rosenbrock :

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Chapitre 2

Optimisation non linéaire sans contraintes

2.1 Formulation mathématique d'un problème d'optimisation

Il existe différents problèmes d'optimisation. Certaines caractéristiques permettent de les distinguer : comportent-ils des contraintes ? les fonctions objectifs sont-elles linéaires ? sont-elles quadratiques ? sont-elles convexes ? les domaines de définition des fonctions sont-ils continus ou discrets ? le problème contient-il une seule ou plusieurs fonctions objectifs ? Tous ces problèmes possèdent des structures différentes et ne peuvent être traités de la même façon.
Un problème d'optimisation continue se présente habituellement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} f(x) \longrightarrow \min, \\ x \in S. \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1.1. Le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est appelé vecteur des variables de décision du problème ; la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction objectif ; S est généralement défini par une collection de contraintes exprimées sous forme d'égalités et d'inégalités, du genre $S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$, où $g = (g_1, \cdots, g_m)^T$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.1.2. Un vecteur x^0 est dit solution optimale du problème (2.1) si pour tous les vecteurs $x \in S$, on a $f(x) \geq f(x^0)$.

Définition 2.1.3. Le problème d'optimisation (2.1) est dit programme linéaire si les fonctions $f, g_1, \dots, g_m$ sont linéaires, i.e., elles vérifient

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

$$g_i(\alpha x + \beta y) = \alpha g_i(x) + \beta g_i(y), i = \overline{1, m},$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Ici, on a

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\}.$$

Si l'une au moins de ces fonctions n'est pas linéaire, le problème est dit programme non-linéaire.

Définition 2.1.4. Le problème d'optimisation (2.1) est dit convexe si la fonction objectif f et les contraintes $g_1 \dots, g_m$ sont convexes, i.e., elles vérifient

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y),$$

$$g_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha g_i(x) + \beta g_i(y), \quad i = \overline{1, m},$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Conséquence 2.1.1. *Un programme linéaire est alors un programme d'optimisation convexe.*
On peut considérer l'optimisation convexe comme une généralisation de la programmation linéaire.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème de minimisation d'une fonction non linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, qu'on notera

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.1. On voudrait installer une antenne pour connecter 4 clients importants. Cette antenne doit se trouver au plus proche de chaque client, en donnant priorité aux meilleurs clients.
Pour chaque client, on connait :

- sa localisation : les coordonnées (x, y) ;
- le nombre d'heures de communication par mois.

Le problème consiste à trouver (x, y) tel que

$$\min 200\sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2} + 150\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}$$
$$+200\sqrt{x^2 + (y-10)^2} + 300\sqrt{(x-12)^2 + y^2}$$

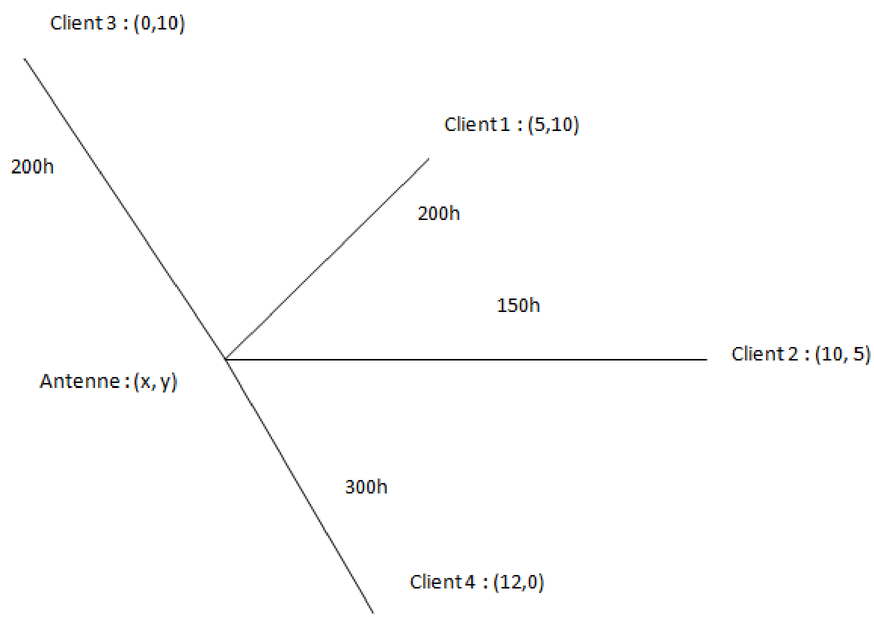


FIGURE 2.1 – Exemple

2.2 Minima locaux et globaux

Les minima locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^n$ sont définis de la manière suivante :

Définition 2.2.1. Un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est un *minimum local* de f sur $\mathbb{R}^n$ si

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad f(x^0) \leq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{avec} \quad \|x - x^0\| < \epsilon.$$

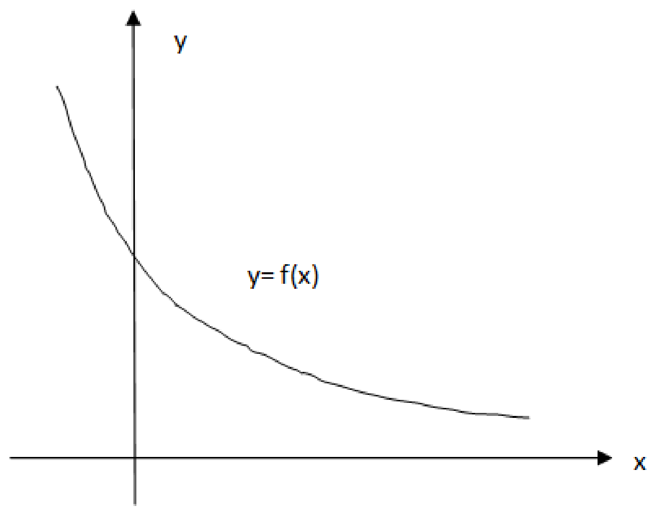
Définition 2.2.2. Un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est un *minimum global* de f sur $\mathbb{R}^n$ si

$$f(x^0) \leq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

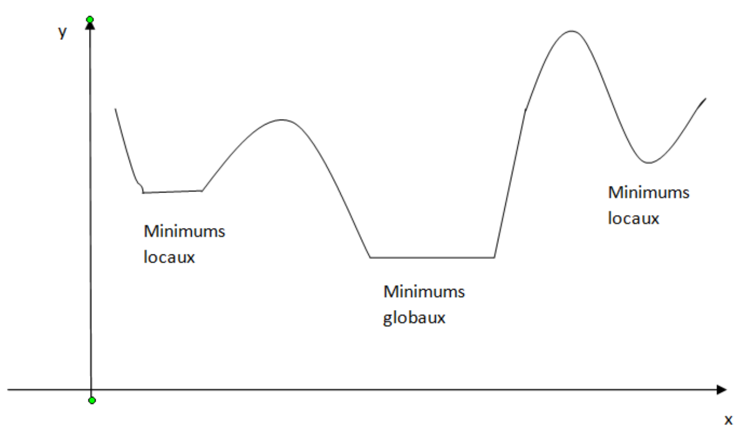
Remarque 2.2.1. Les maxima locaux et globaux sont définis de manière similaire. Notons que x^0 est un maximum local (respectivement global) de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}^n$ si x^0 est un minimum local (respectivement global) de la fonction $(-f)$ sur $\mathbb{R}^n$.

Il découle de cette observation que tout problème de maximisation peut être réduit immédiatement à un problème de minimisation (et inversement) en multipliant la fonction objectif par -1.

Remarque 2.2.2. Le problème (2.2) peut ne pas admettre de solutions optimales, comme dans la figure suivante :



Remarque 2.2.3. Le problème (2.2) peut aussi admettre une infinité de solutions optimales, comme dans la figure suivante :



Remarque 2.2.4. Dans le cas d'une fonction objectif convexe, il n'y a pas de distinction entre minimum local et global : tout minimum local est également global, comme l'établit le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un ensemble convexe S. Alors, tout minimum local est également un minimum global. Si f est strictement convexe, alors il existe au plus un minimum global de f.*

2.3 Théorèmes généraux d'existence

Théorème 2.3.1 (Weierstrass)**.** *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide. Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement sur S compact (fermé et borné), alors il existe $x^0 \in S$ tel que*

$$\min_{x \in S} f(x) = f(x^0).$$

Théorème 2.3.2. *Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Si f est coercive, i.e.,*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty,$$

alors le problème (2.2) admet une solution optimale $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

L'unicité résulte en général des propriétés de convexité de f.
Avant de prouver les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, considérons les résultats suivants sur les fonctions coercives.

Proposition 2.3.1. *Soit S un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement sur S alors $\forall c \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$S(c) = \{x \in S / f(x) \leq c\}$$

est fermé.

Démonstration. Soit $c \in \mathbb{R}$ et supposons que $S(c) \neq \emptyset$. Soit $\left\{x^k\right\} \subset S(c)$ une suite de $S(c)$ convergeant vers x.
Comme S est fermé, alors $x \in S$.
D'autre part, comme f est semi-continue inférieurement, alors de $f(x_k) \leq c$, on déduit

$$f(x) \leq \lim_{k \to +\infty} \inf f(x_k) \leq c.$$

D'où $x \in S(c)$ et $S(c)$ est fermé. $\square$

Proposition 2.3.2. *Soit S un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Si $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement et coercive, alors $\forall c \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$S(c) = \{x \in S / f(x) \leq c\}$$

est fermé et borné (compact).

Démonstration. L'ensemble $S(c)$ est fermé d'après la proposition 2.3.1. Démontrons que $S(c)$ est borné. Supposons le contraire : il existe alors une suite $\{x_k\} \subset S(c)$ de $S(c)$ telle que

$$\lim_{k \to \infty} \|x^k\| = +\infty.$$

Comme f est coercive, alors

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = +\infty.$$

Or

$$x^k \in S(c) \Rightarrow f(x^k) \leq c, \ \ \forall k.$$

D'où

$$+\infty = \lim_{k \to \infty} f(x^k) \leq c < +\infty.$$

Ce qui nous amène à une contradiction. □

Démonstration du théorème 2.3.1. On suppose que $S \neq \emptyset$. Soit $\{x_k\} \subset S$ une suite minimisante telle que

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf_{x \in S} f(x).$$

Comme S est borné, on peut extraire une sous-suite $\left\{x_k^{'}\right\}$ convergeant vers x^*.
Comme S est fermé, alors $x^* \in S$. Par ailleurs, f est semi-continue inférieurement, alors

$$f(x^*) \leq \lim_{k^{'} \to \infty} f(x_{k^{'}}) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf_{x \in S} f(x).$$

D'où

$$f(x^*) = \inf_{x \in S} f(x).$$

□

Démonstration du théorème 2.3.2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et considérons l'ensemble

$$S(c) = \{x \in S / f(x) \leq c\}.$$

f étant coercive et semi-continue inférieurement, alors d'après la proposition 2.3.2, l'ensemble $S(c)$ est compact.
D'après le théorème 2.3.1, il existe $x^* \in S(c)$ tel que

$$f(x^*) = \inf_{x \in S(c)} f(x) = \inf_{x \in S} f(x).$$

□

Corollaire 2.3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^n$ et coercive. Alors le problème*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

a une solution optimale x^*.

Démonstration. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque. En supposant que la fonction f est coercive, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq M \Rightarrow f(x) \geq f(x^0).$$

Le problème se ramène donc à un problème d'optimisation sur la boule compacte $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq M\}$ qui est non vide et le théorème 2.3.1 s'applique. □

Pour beaucoup de problèmes d'optimisation sans contraintes, les principales méthodes de résolution connues ne permettent pas la détermination d'un minimum global, on se contente d'optimums locaux.

2.4 Caractérisation des solutions optimales

2.4.1 Conditions nécessaires d'optimalité

Étant donné un vecteur x^0, nous souhaiterions être capables de déterminer si ce vecteur est un minimum local ou global de la fonction f. La propriété de différentiabilité de f fournit une première manière de caractériser une solution optimale.

Théorème 2.4.1 (Condition nécessaire du premier ordre)**.** *Si x^0 est un minimum local du problème (2.1) et supposons que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable (f est continue et ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues) sur un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{R}^n$ contenant x^0.*
Alors

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

Démonstration. Soit $d \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. On a

$$g(\alpha) = f(x^0 + \alpha d) \geq f(x^0),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}/(x^0 + \alpha d) \in S.$$

En utilisant l'hypothèse que f est différentiable, on obtient

$$0 \leq \lim_{\alpha \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x^0 + \alpha d) - f(x^0)}{\alpha} = \frac{dg(0)}{d\alpha} = \lim_{\alpha \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x^0 + \alpha d) - f(x^0)}{\alpha} \leq 0.$$

D'où

$$\frac{dg(0)}{d\alpha} = d^T \nabla f(x^0) = 0.$$

Comme d est choisi arbitrairement, alors

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

$\square$

Définition 2.4.1. Les points x^0 tels que $\nabla f(x^0) = 0$ sont appelés points critiques (ou stationnaires) de f.

Remarque 2.4.1. Si f est convexe, la condition nécessaire du premier ordre est également suffisante pour que x^0 soit un minimum global.

Théorème 2.4.2 (Condition nécessaire du second ordre)**.** *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable et $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Si x^0 est un minimum local (ou global) de f, alors $\nabla f(x^0) = 0$ et $\nabla^2 f(x^0)$ est semi-définie positive.*

Démonstration. Supposons que f est deux fois continûment différentiable et $d \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque.
Pour tout $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, le développement de Taylor d'ordre 2 s'écrit :

$$f(x^0 + \alpha d) - f(x^0) = \alpha[\nabla f(x^0)]^T d + \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^0) d + o(\alpha^2).$$

En utilisant la condition $\nabla f(x^0) = 0$ et le fait que x^0 est un minimum local, on déduit l'existence d'un $\epsilon > 0$ (suffisamment petit) tel que

$$\forall \alpha \in (0, \epsilon) : 0 \leq \frac{f(x^0 + \alpha d) - f(x^0)}{\alpha^2} = \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^0) d + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}.$$

Le passage à la limite quand $\alpha \to 0$ et l'utilisation de la relation

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} = 0$$

entrainent

$$d^T \nabla^2 f(x^0) d \geq 0$$

ce qui démontre que $\nabla^2 f(x^0)$ est une matrice semi-définie positive. □

2.4.2 Conditions sufffisantes d'optimalité

Les conditions données précédemment sont nécessaires, c'est-à-dire qu'elles doivent être satisfaites pour tout minimum local (ou global) ; cependant, tout vecteur vérifiant ces conditions n'est pas nécessairement un minimum.

Exemple 2.4.1. Soit la fonction

$$f(x) = -x^4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le point $x^0 = 0$ satisfait les conditions nécessaires du premier et du second ordre :

$$f^{'}(x^0) = -4x^3|_{x=0} = 0, \qquad f^{''}(x^0) = -12x^2|_{x=0} = 0 \geq 0.$$

Néanmoins, le point $x^0 = 0$ ne constitue pas un minimum de la fonction f. Il est au contraire un maximum global :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^4 \leq 0 = f(0).$$

Le théorème qui suit établit une condition suffisante pour qu'un vecteur soit un minimum local, si f est deux fois continûment différentiable.

Théorème 2.4.3 (Condition suffisante du second ordre)**.** *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable et $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Si $\nabla f(x^0) = 0$ et $\nabla^2 f(x^0)$ est définie positive, alors x^0 est un minimum local de f.*

Démonstration. Le développement de Taylor de la fonction f à l'ordre 2, au voisinage de x^0 s'écrit :

$$f(x^0 + l) - f(x^0) = \frac{1}{2} l^T \nabla^2 f(x^0) l + o(\| l \|^2).$$

Toute direction $l \in \mathbb{R}^n$, tendant vers 0, peut être écrite sous la forme

$$l = \theta d, \text{ où } \| d \| = 1 \text{ et } \theta > 0 \text{ (assez petit).}$$

On aura alors

$$f(x^0 + l) - f(x^0) = f(x^0 + \theta d) - f(x^0) = \theta^2 \left[\frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^0) d + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} \right].$$

Comme

$$d^T \nabla^2 f(x^0) d > 0$$

et

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0,$$

alors pour tout nombre positif $\theta > 0$ assez petit, on aura

$$f(x) = f(x^0 + \theta d) > f(x^0),$$

ce qui prouve que x^0 est un minimum local de f. □

2.5 Étude de quelques exemples

Exemple 2.5.1. Soit $f(x) = 1 - e^{-x^2}$.
On a à résoudre le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

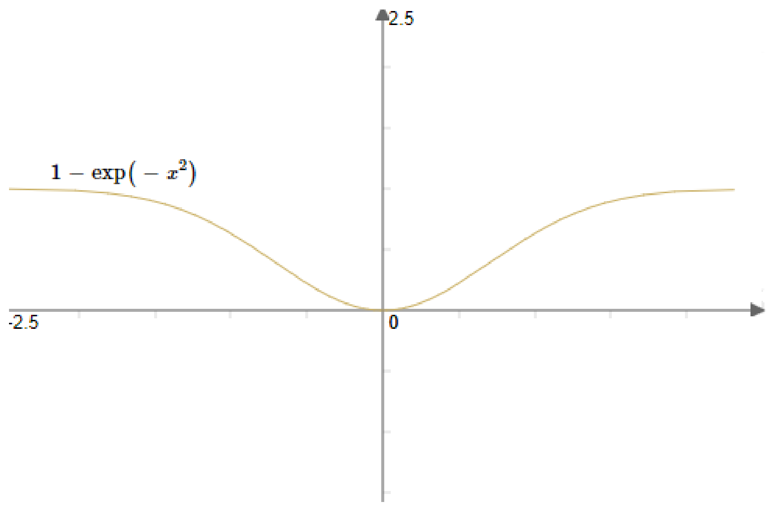
On a

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

et

$$f''(x)|_{x=0} = 2e^{-x^2} - 4x^2 e^{-x^2}|_{x=0} = 2 > 0.$$

Le point $x^0 = 0$ est un minimum local de f.
On peut remarquer que le point $x^0 = 0$ est un minimum global de f.



Exemple 2.5.2. Soit

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 \to \min$$

sur $\mathbb{R}^2$.
On a

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = 2x_2 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Les équations n'étant pas compatibles, il s'ensuit alors que le problème posé n'a pas de solution. Le maximum de f n'existe pas non plus, puisque la condition nécessaire du premier ordre est la même que pour le minimum.

Exemple 2.5.3. Soit

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 \to \min$$

sur $\mathbb{R}^2$.
Cherchons les points stationnaires

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = -2x_2 - 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{4}.$$

Calculons le hessien de f au point $x^0 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2.$$

Donc

$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = M,$$

où

$$M_1 = 2 > 0; \;\; M_2 = \det M = -8 < 0$$

Le hessien n'est pas semi-définie positif. Il s'ensuit alors que le point $x^0 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ne constitue pas un minimum de f.

$$f(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{8} > -1 = f(0, 1).$$

Exemple 2.5.4. Soit $f(x) = f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$ à minimiser sur $\mathbb{R}^2$.
On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} & = -2x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & = -2x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

D'autre part, au point $x^0 = (0, 0)$, on a

$$\nabla^2 f(x^0) < 0.$$

Le point $x^0 = (0, 0)$ ne constitue pas donc un minimum pour la fonction f.
La fonction f admet le point $x^0 = (0, 0)$ comme maximum.

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Démontrer que si f est convexe, alors tout minimum local est global.

b) Supposons que f est une forme quadratique. Démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit strictement convexe.

c) Déterminer les valeurs de a, b et c telles que la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + 2axy + by^2 + cz^2,$$

soit convexe sur $\mathbb{R}^3$.

d) Déterminer, si possible, les valeurs de a et b telles que

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

admette :

1. un point maximum local au point $x = -1$ et un point minimum local au point $x = +1$.
2. un point maximum local au point $x = +1$ et un point minimum local au point $x = 0$.

Exercice 2.6.2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = x \exp(-x^2/2), \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xy \exp((-x^2 - y^2)/2), \text{ pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer les extrema de φ sur $\mathbb{R}$ et préciser leurs natures.
2. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$ et préciser leurs natures.

Exercice 2.6.3. Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, et a et b du domaine de définition de f avec $a < b$.

(a) Montrer que

$$f(x) \leq \frac{b-x}{a-x} f(a) + \frac{x-a}{x-b} f(b), \forall x \in [a,b].$$

(b) Montrer que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}, \forall x \in]a,b[.$$

(c) Supposons que f est différentiable. Utiliser le résultat de (b) (ou la définition de f convexe) pour démontrer que

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

(d) Supposons que f est deux fois différentiable. Utiliser le résultat de (c) pour montrer que $f''(a) \geq 0$ et $f''(b) \geq 0$

Exercice 2.6.4. – Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy + 2x + 1, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

admet un unique point de minimum global sur $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.
– Minimiser la fonction suivante sur son domaine de définition :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i}.$$

Exercice 2.6.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 \left(1 + x_2^2\right).$$

a) f admet-elle des points critiques ? des extrêma locaux ? justifier.
b) Soit $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = f(\cos t, \sin t)$$

1. Montrer que $g'(t) = -6 \sin t \cos(2t)$
2. Trouver les points critiques de g.
3. Etudier la variation de g.
4. Déduire les extrêma de g.

Exercice 2.6.6. Considérons la fonction suivante :

$$h(\theta) = \frac{4\theta - 7}{\theta^2 + \theta - 2}$$

– Identifier tous les points stationnaires de h ;
– Parmi ceux-ci, identifier tous les minima locaux de h ;
– Identifier des points où la fonction n'est pas bornée.

Exercice 2.6.7. Considérons la fonction suivante :

$$h(\theta) = 1 - 12\theta + 7.5\theta^2 - \theta^3.$$

– Identifier tous les points stationnaires de h ;
– Parmi ceux-ci, identifier tous les minima locaux de h.

Exercice 2.6.8. a) Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et possède un minimum, alors celui-ci est unique.

b) L'affirmation suivante, spécifier si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et x^* tel que $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est semi définie positive. Alors x^* est un minimum local de f.

Exercice 2.6.9. – Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}.$$

On fixe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème suivant :

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}} \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i) \right].$$

– Déterminer les extrema, s'ils existent, de la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 2axy \ (a \geq 0).$$

Exercice 2.6.10. Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

Montrer que 0 est le seul point critique de f, que f y atteint un minimum local strict, mais pas global.

Chapitre 3

Les méthodes numériques pour l'optimisation sans contraintes

3.1 Introduction

Comme la stationnarité de f est une condition nécessaire d'optimalité, pratiquement toutes les méthodes de minimisation sans contrantes dans $\mathbb{R}^n$ consistent à rechercher un point x^* stationnaire ($\nabla f(x^*) = 0$).
Ce problème est équivalent à la résolution d'un système d'équations non linéaires :

$$g_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \;\; i = 1, \cdots, n.$$

On peut chercher à résoudre directement ce système, ce qui conduit à la méthode de Newton. Cependant, il faut se rappeler que cette méthode présente quelques inconvénients :

i) la divergence de la méthode, si le point de départ est trop éloigné de x^*,

ii) elle exige que la fonction f soit deux fois continûment différentiable et exige le calcul des dérivées secondes.

C'est pourquoi, les méthodes les plus couramment utilisées sont basées sur un principe général assez simple, mais dont l'analyse des conditions de convergence sont complexes : on les appelle méthodes de descente. Il s'agit de procédures itératives de construction d'une suite de points $\{x_k\}$ telle que la fonction f décroît d'une itération à une autre, i.e.,

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \;\; k = 0, 1, \cdots .$$

Le processus itératif général de construction de la suite $\{x_k\}$ a la forme suivante :

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k d_k, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{3.1}$$

où d_k est une direction d'amélioration ou de descente et θ_k le pas le long de cette direction.
Le problème restant posé et qui différencie les différentes méthodes numériques est le choix du pas θ_k et de la direction d_k à chaque itération.

3.2 La méthode du gradient

3.2.1 Interprétation physique du gradient

Pour une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le gradient $\nabla f(x^0)$ de f au point x^0 se définit comme suit :

$$f(x^0 + \triangle x) - f(x^0) = (\nabla f(x^0))^T \triangle x + o(\|\triangle x\|), \tag{3.2}$$

où

$$\lim_{\|\triangle x\| \to 0} \frac{o(\|\triangle x\|)}{\|\triangle x\|} = 0.$$

Une autre interprétation du gradient peut se faire de la manière suivante : soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. De x^0, on choisit une direction de déplacement $d \in \mathbb{R}^n$, $\|d\| = 1$, et on pose :

$$x(\theta) = x^0 + \theta d, \quad \theta \geq 0.$$

Le point $x(\theta)$ est le point atteint après un déplacement le long de la direction d avec un pas θ. Estimons la variation de la valeur de la fonction f en passant du point x^0 au point $x^0 + \theta d$. La relation (3.2) prend la forme suivante :

$$f(x^0 + \theta d) - f(x^0) = \theta \left[(\nabla f(x^0))^T d + \frac{o(\theta)}{\theta} \right].$$

Pour des valeurs de $\theta \geq 0$ voisines de zéro, le signe de l'expression $f(x^0 + \theta d) - f(x^0)$ dépendra du signe de $(\nabla f(x^0))^T d$.
Pour avoir la relation $f(x^0 + \theta d) < f(x^0)$, ie., une diminution de la valeur de $f(x)$ lors du passage du point x^0 au point $x^0 + \theta d$, on devrait choisir $\theta \geq 0$ assez petit et la direction $d \in \mathbb{R}^n$ de façon à avoir $(\nabla f(x^0))^T d < 0$.

Définition 3.2.1. La direction $d \in \mathbb{R}^n$ est appelée direction de descente, si

$$(\nabla f(x^0))^T d < 0 \tag{3.3}$$

Le processus itératif (3.1) de construction de la suite $\{x_k\}$ prend la forme

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k d_k, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{3.4}$$

avec, si $\nabla f(x^k) \neq 0$, la direction d_k est choisie de façon que

$$\left[\nabla f(x^k)\right]^T d_k < 0, \tag{3.5}$$

et le pas θ_k est positif. Si $\nabla f(x^k) = 0$, alors le processus itératif est arrêté et $x^{k+1} = x^k$ (ce qui est équivalent à choisir $d_k = 0$).
En vertu de la relation (3.5) de d_k et du gradient $\nabla f(x^k)$, on appelle les algorithmes de ce type "méthodes du gradient". Certains auteurs réservent le terme "méthode du gradient" pour le cas particulier où $d_k = -\nabla f(x^k)$.
Il existe une large variété de possibilités pour choisir la direction d_k et le pas θ_k dans les méthodes du gradient.

3.2.2 Sélection des directions de descente

Plusieurs méthodes du gradient s'écrivent sous la forme :

$$x^{k+1} = x^k - \theta_k D_k \nabla f(x^k), \tag{3.6}$$

où D_k est une matrice symétrique définie positive. Dans ce cas, la direction d_k s'écrit

$$d_k = -D_k \nabla f(x^k)$$

et la condition de descente

$$\left[\nabla f(x^k)\right]^T d_k < 0$$

peut s'écrire

$$-\left[\nabla f(x^k)\right]^T D_k \nabla f(x^k) < 0$$

et qui est vérifiée puisque $D_k > 0$.
On donne quelques exemples de choix de la matrice D_k.

Méthode de la descente la plus rapide (méthode de la plus forte pente, steepest descent)

On pose $D_k = I, \;\; k = 0, 1, 2, \cdots$ où I est la matrice identité $n \times n$.
Dans ce cas, le processus itératif (3.6) prend la forme

$$x^{k+1} = x^k - \theta_k \nabla f(x^k), \;\; k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.7}$$

Nous allons justifier ci-après l'appelation de méthode de la plus forte pente. En partant du point x^k et en se mouvant le long de la direction d, la fonction $f(x)$ va varier avec une vitesse donnée par la dérivée directionnelle de f au point x^k dans la direction d, soit :

$$f'(x^k; d) = \lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x^k + \theta d) - f(x^k)}{\theta} = \left[\nabla f(x^k)\right]^T d.$$

Pour des directions d telles que $\|d\| = 1$, la vitesse de variation de la fonction f sera maximale pour

$$d_k = \frac{\nabla f(x^k)}{\|\nabla f(x^k)\|} \tag{3.8}$$

En effet, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left[\nabla f(x^k)\right]^T d \leq \|\nabla f(x^k)\| \|d\| = \|\nabla f(x^k)\|$$

et pour d_k vérifiant (3.8), on a

$$\left[\nabla f(x^k)\right]^T d_k = \frac{\left[\nabla f(x^k)\right]^T \left[\nabla f(x^k)\right]}{\|\nabla f(x^k)\|}.$$

Ainsi, le gradient $\nabla f(x^k)$ constitue la meilleure direction de croissance à partir du point x^k. La direction opposée à celle du gradient $(-\nabla f(x^k)\,)$ est la meilleure direction de descente à partir de x^k.
L'inconvénient de la méthode de descente rapide est sa lente convergence.

3.2.3 Sélection du pas

Il existe un certain nombre de règles de choix du pas θ_k dans la méthode du gradient. Nous allons présenter les plus couramment utilisées.

a) Règle du minimum

Elle consiste à choisir, à l'itération k, le pas θ_k minimisant la fonction f dans la direction d_k, c-à-d

$$f(x^k + \theta_k d_k) = \min_{\theta \geq 0} f(x^k + \theta d_k). \tag{3.9}$$

b) Règle du minimum réduit

C'est une version de la règle du minimum qui est la plus utilisée. On fixe un scalaire $s > 0$ et θ_k est défini par

$$f(x^k + \theta_k d_k) = \min_{\theta \in [0,s]} f(x^k + \theta d_k). \tag{3.10}$$

Remarque 3.2.1. La résolution des problèmes d'optimisation (3.9) et (3.10) se fait par des méthodes d'optimisation unidimentionnelle.

c) Règle du pas constant

Ici, on fixe pour toutes les itérations

$$\theta_k = s, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{3.11}$$

La règle du pas constant est la plus simple. Toutefois, si le pas est grand, il y-a risque de divergence et quand le pas est trop petit, la vitesse de convergence serait très lente. Ainsi la règle du pas constant n'est utile que pour les problèmes où la valeur appropriée du pas est connue ou peut être facilement calculée.

Exemple 3.2.1. On considère la fonctionnelle quadratique suivante :

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

On applique la méthode du gradient à pas optimal, en partant du point initial

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix},$$

pour trouver le minimum de f.

– On calcule le gradient de f :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 16x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 10x_2 \end{pmatrix}.$$

– On calcule la valeur du gradient au point $x^{(0)}$:

$$\nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

– On calcule le point $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha^{(0)} \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \alpha^{(0)} \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 200\alpha^{(0)} \\ 10 - 140\alpha^{(0)} \end{pmatrix}.$$

– On cherche la valeur optimale de $\alpha^{(0)}$. Pour ce, on calcule $f(x^{(1)})$ puis on détermine $\alpha^{(0)}$ permettant de minimiser $f(x^{(1)})$. On a

$$\begin{aligned} f(x^{(1)}) &= 8(10 - 200\alpha^{(0)})^2 + 4(10 - 200\alpha^{(0)})(10 - 140\alpha^{(0)}) + 5(10 - 140\alpha^{(0)})^2 \\ &= -59600 + 1060000\alpha^{(0)} \\ &= \varphi(\alpha^{(0)}). \end{aligned}$$

On calcule $\alpha^{(0)}$ tel que $\varphi'(\alpha^{(0)}) = 0$, d'où $\alpha^{(0)} = 0.056$.

– On trouve ainsi

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.20 \\ 2.16 \end{pmatrix}.$$

– On cherche de la même façon tous les points $x^{(k)}$ jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.

Exemple 3.2.2. Utiliser la méthode de la plus forte pente puis de la plus forte pente accélérée (p=2) pour trouver le minimum de la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ comme suit :

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_1^3 + \frac{1}{6}x_2^2 - 3x_1 - x_1x_2.$$

On a

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 6x_1^2 - 3 - x_2 \\ \frac{1}{3}x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On trouve la direction de la plus forte pente

$$-\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On minimise donc

$$g_0(\lambda) = f(x^0 - \lambda \nabla f(x^0)) = 81\lambda^4 - 54\lambda^3 - 6\lambda.$$

On trouve

$$\lambda_0 \approx 0.582.$$

Notre premier pas nous conduit donc au point

$$x^1 = x^0 - \lambda_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1.746 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On réitère pour obtenir les valeurs suivantes :

i	x^i	$-\nabla f(x^i)$	$g_i(\lambda)$	λ_i	x^i
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$81\lambda^4 - 54\lambda^3 - 6\lambda$	0.582	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1.746 \end{pmatrix}$	$0.508\lambda^2 - 3.049\lambda - 6.590$	3	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 5.238 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1.746 \\ 5.238 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.238 \\ 0 \end{pmatrix}$	$752\lambda^4 + 716\lambda^3 + 214\lambda^2 - 27\lambda - 11$	0.05	$\begin{pmatrix} 2.01 \\ 5.238 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2.01 \\ 5.238 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.264 \end{pmatrix}$	$0.012\lambda^2 - 0.07\lambda - 11.904$	3	$\begin{pmatrix} 2.01 \\ 6.03 \end{pmatrix}$

Pour la plus forte pente accélérée, après avoir fait 2 pas de la plus forte pente standard, nous devons faire un pas accéléré, en utilisant la direction $x^2 - x^0$. On minimise donc la fonction

$$g_2(\lambda) = f(x^0 + \lambda(x^2 - x^0)) = 9.29\lambda^4 - 10.65\lambda^3 - 4.57\lambda^2 - 5.238\lambda.$$

On trouve

$$\lambda_2 = 1.172$$

et on atteint le point

$$x^3 = x^0 + \lambda_2(x^2 - x^0) = \begin{pmatrix} 2.05 \\ 6.137 \end{pmatrix},$$

qui est prés du minimum global.

3.3 La méthode de Newton

La méthode de Newton est obtenue en posant dans (3.6)

$$D_k = \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1}, \ \ k = 0, 1, \cdots \tag{3.12}$$

ce qui donne

$$x^{k+1} = x^k - \theta_k \left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1} \nabla f(x^k), \ \ k = 0, 1, \cdots$$

en supposant que $\nabla^2 f(x^k)$ est une matrice définie positive. Dans le cas où $\nabla^2 f(x^k)$ n'est pas définie positive, une certaine modification est nécessaire. L'idée de la méthode de Newton peut s'expliquer de deux manières :

– Lors de la minimisation d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$, le problème consistait à chercher un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

La méthode numérique de Newton appliquée à l'équation

$$g(x^*) = \nabla f(x^*) = 0$$

construit les approximations successives de la manière suivante :

$$x^{k+1} = x^k - \left[\frac{\partial g(x^k)}{\partial x}\right]^{-1} g(x^k), \ \ k = 0, 1, \cdots \tag{3.13}$$

où

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \frac{\partial g(x^k)}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{\partial g(x^k)}{\partial x} = \nabla^2 f(x^k) = H(x^k),$$

la formule itérative (3.13) s'écrit alors

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k), \ \ k = 0, 1, \cdots \tag{3.14}$$

Le point x^{k+1} peut être interprété comme la racine de l'approximation linéaire de la fonction

$$g(x) = \nabla f(x)$$

au voisinage de x^k. On a

$$g(x) \simeq g(x^k) + \frac{\partial g(x^k)}{\partial x}(x - x^k) = 0,$$

d'où

$$x - x^k = -\left[\frac{\partial g(x^k)}{\partial x}\right]^{-1} g(x^k)$$

et

$$x = x^{k+1} = x^k - \left[\frac{\partial g(x^k)}{\partial x}\right]^{-1} g(x^k)$$

ou

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k).$$

– Une autre interprétation de la méthode de Newton est la suivante : elle consiste à minimiser l'approximation quadratique $q(x)$ de $f(x)$ au voisinage de x^k.

$$f(x) \simeq q(x) = f(x^k) + \left[\nabla f(x^k)\right]^T (x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k).$$

Si le hessien $H(x^k) = \nabla^2 f(x^k)$ est définie positif, le point x^{k+1} de la méthode de Newton est alors pris comme étant le minimum de la fonction $q(x)$:

$$0 = \nabla q(x^{k+1}) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0.$$

D'où la formule itérative

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k).$$

Cette formule itérative est une itération de la méthode de Newton. Elle correspond à l'itération plus générale

$$x^{k+1} = x^k - \theta_k D_k \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, \cdots \tag{3.15}$$

où $\theta_k = 1$, $D_k = \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1}$, ou encore

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k d_k$$

avec $\theta_k = 1$, $d_k = -\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k)$.

Remarque 3.3.1. Lorsque le hessien $\nabla^2 f(x^k)$ n'est pas défini positif, la direction de déplacement d_k dans la méthode de Newton peut ne pas être une direction de descente. En effet, l'expression

$$\left[\nabla f(x^k)\right]^T d_k = -\left[\nabla f(x^k)\right]^T \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k) = -d_k^T \nabla^2 f(x^k) d_k$$

peut être éventuellement positive et dans ce cas, la direction d_k ne serait plus une direction de descente.

Exemple 3.3.1. On cherche à obtenir le zéro de la fonction

$$F : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 3 \\ x^2 + y^2 - z - 1 \\ x + y + z - 3 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Newton s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{est donné} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - (\nabla F(x^{(k)}))^{-1} F(x^{(k)}). \end{cases}$$

Dans notre cas, on a

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Premier cas : On choisit $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Itération 1 : On a

$$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Itération 2 : On a

$$F(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla F(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Itération 3 : On a

$$F(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla F(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 2 \\ 5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$F(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} \\ \frac{1}{32} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième cas : On choisit $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Itération 1 : On a

$$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On tombe ainsi sur l'un des cas pathologiques de la méthode de Newton, lorsque la matrice ∇F est singulière.

3.4 La méthode du gradient conjugué

Dans cette méthode, on utilise un modèle quadratique de f, nous allons donc d'abord présenter l'algorithme appliqué à une fonction fortement convexe quadratique.

3.4.1 Cas linéaire

Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - bx$, avec A symétrique définie positive.
On sait alors qu'il existe un minimum unique sur $\mathbb{R}^n$ donné par $x^* = A^{-1}b$.
Dans la suite, on note $r(x) = Ax - b = \nabla f(x)$ le résidu.

Définition 3.4.1. Les vecteurs non nuls $\{d_1, \cdots, d_p\}$ sont dits conjugués par rapport à la matrice A si

$$\text{pour tout } i \neq j \in \{1, \cdots, p\} : d_i^T A d_j = 0.$$

Lemme 3.4.1. *Un ensemble de vecteurs conjugués par rapport à A est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.*

Posons $\phi(\rho) = f(x + \rho d)$, alors

$$\phi'(\rho) = \rho d^T Ad + Axd - bd$$

et

$$f(x + \rho d) = \frac{1}{2}(x + \rho d)^T A(x + \rho d) - b(x + \rho d).$$

D'où

$$\phi'(\rho) = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{r(x)d}{d^T Ad}, \ \ (d \neq 0). \tag{3.16}$$

Théorème 3.4.1. *Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ et $\{d_0, \cdots, d_{m-1}\}$ un ensemble de vecteurs conjugués par rapport à A. On considère la suite définie par*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d_k, \qquad \text{où} \qquad \rho_k = -\frac{r(x^{(k)})d_k}{d_k^T Ad_k}.$$

Alors $r(x^{(k)})d_i = 0$ pour $i = 0, \cdots, k-1$ et $x^{(k)}$ minimise f et la suite $(x^{(k)})$ converge en au plus n itérations.

Pour pouvoir utiliser la méthode itérative du théorème précédent, il faut construire un ensemble de vecteurs conjugués par rapport à A. Or, afin de réduire le nombre d'opérations, on se propose de déduire $d^{(k)}$ à partir de $d^{(k-1)}$ uniquement.
Dans l'algorithme du gradient conjugué linéaire, on prend

$$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) + \beta_k d^{(k-1)}$$

avec β_k tel que $d^{(k)^T} A d^{(k-1)} = 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} d^{(k)^T} A d^{(k-1)} &= (-\nabla f(x^{(k)}) + \beta_k d^{(k-1)})^T A d^{(k-1)} \\ &= -r(x^{(k)^T}) A d^{(k-1)} + \beta_k d^{(k-1)^T} A d^{(k-1)} \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_k = \frac{r(x^{(k)^T}) A d^{(k-1)}}{d^{(k-1)^T} A d^{(k-1)}}. \tag{3.17}$$

Comme $d^{(k)} \nabla f(x^{(k)}) = -\|r(x^{(k)})\|_2^2$, on déduit bien une direction de descente.

Remarque 3.4.1. On rappelle que s'il existe un vecteur d tel que $d^T \nabla f(x^*) < 0$, alors d est une direction de descente de f en x^*.

Algorithme : Gradient conjugué linéaire

1. Initialisation Choisir $x^{(0)}$ et poser $k = 0$, $r^{(0)} = Ax^{(0)} - b$, $d^{(0)} = -r^{(0)}$.

2. Itération k Tant que $\|r(x^{(k)})\| > \epsilon$, faire

$$\begin{aligned} &\rho_k = \tfrac{r^{(k)^T} r^{(k)}}{d^{(k)^T} A d^{(k)}} \\ &x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)} \\ &r^{(k+1)} = r^{(k)} + \rho_k A d^{(k)} \\ &\beta_{k+1} = \tfrac{r^{(k+1)^T} r^{(k+1)}}{r^{(k)^T} r^{(k)}} \\ &d^{(k+1)} = -r^{(k+1)} + \beta_{k+1} d^{(k)} \\ &k = k+1 \end{aligned}$$

Fin tant que

Notons que les formules pour $r^{(k)}$ et β_{k+1} ont changé, ceci est possible grâce au théorème suivant qui affirme en particulier que les $d^{(k)}$ sont conjugués.

Théorème 3.4.2. *Soit $x^{(k)} \neq x^*$, obtenu après la $k^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme du gradient conjugué linéaire avec $r^{(k)}$ et β_{k+1} définis par les équations (3.16) et (3.17) respectivement. Alors, on a*

(i) $r^{(k)}r^{(i)} = 0,$ *pour* $\quad i = 0, \cdots, k-1$ *;*
(ii) $Vect\{r^{(0)}, \cdots, r^{(k)}\} = Vect\{r^{(0)}, Ar^{(0)} \cdots, A^k r^{(k)}\}$ *;*
(iii) $Vect\{d^{(0)}, \cdots, d^{(k)}\} = Vect\{d^{(0)}, Ad^{(0)} \cdots, A^k d^{(k)}\}$ *;*
(iv) $d^{(k)^T}Ad^{(i)} = 0$ *pour* $\quad i = 0, \cdots, k-1$ *;*

Commentaires. • On a

$$\rho_k = -\frac{r^{(k)^T}d^{(k)}}{d^{(k)^T}Ad^{(k)}}, \tag{3.18}$$

et dans l'algorithme, on a

$$\rho_k = \frac{r^{(k)^T}r^{(k)}}{d^{(k)^T}Ad^{(k)}} \tag{3.19}$$

Montrons l'équivalence de (3.18) et (3.19). On a $d^{(k)} = -r^{(k)} + \beta_k d^{(k-1)}$, donc (3.18) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_k &= -\frac{r^{(k)^T}}{d^{(k)^T}Ad^{(k)}}\left(-r^{(k)} + \beta_k d^{(k-1)}\right) \\ &= \frac{r^{(k)^T}r^{(k)}}{d^{(k)^T}Ad^{(k)}} - \beta_k \frac{r^{(k)^T}d^{(k-1)}}{d^{(k)^T}Ad^{(k)}} \\ &= \frac{r^{(k)^T}r^{(k)}}{d^{(k)^T}Ad^{(k)}} \end{aligned}$$

car $r^{(k)^T}d^{(k-1)} = 0$.

• On a $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}$ et $r^{(k)} = Ax^{(k)} - b$ d'où

$$\begin{aligned} r^{(k+1)} - r^{(k)} &= (Ax^{(k+1)} - b) - (Ax^{(k)} - b) \\ &= (Ax^{(k+1)} - x^{(k)}) \\ &= \rho_k Ad^{(k)} \end{aligned}$$

d'où

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} + \rho_k Ad^{(k)}.$$

• Montrons que

$$\beta_k = \frac{r^{(k)^T}Ad^{(k-1)}}{d^{(k-1)^T}Ad^{(k-1)}}$$

et

$$\beta_k = \frac{r^{(k)^T}r^{(k)}}{r^{(k-1)^T}r^{(k-1)}}$$

sont équivalentes.
On a

$$r^{(k)} - r^{(k-1)} = \rho_{k-1}Ad^{(k-1)}$$

donc

$$r^{(k)^T} A d^{(k-1)} = r^{(k)^T} \frac{r^{(k)} - r^{(k-1)}}{\rho_{k-1}}$$

d'où

$$\beta_k = r^{(k)^T} \frac{r^{(k)} - r^{(k-1)}}{\rho_{k-1} d^{(k-1)^T} A d^{(k-1)}}$$

or

$$\rho_k = \frac{r^{(k)^T} r^{(k)}}{d^{(k)^T} A d^{(k)}} \Rightarrow \rho_{k-1} d^{(k-1)^T} A d^{(k-1)} = r^{(k-1)^T} r^{(k-1)}$$

d'où

$$\beta_k = r^{(k)^T} \frac{r^{(k)} - r^{(k-1)}}{r^{(k-1)^T} r^{(k-1)}} = \frac{r^{(k)^T} r^{(k)}}{r^{(k-1)^T} r^{(k-1)}}$$

car

$$r^{(k)^T} r^{(k-1)} = 0,\ r^{(k)} = d^{(k)} - \beta_{k-1} d^{(k-1)}$$

et $r^{(k)}$ est orthogonal à toutes les directions $d^{(0)}, d^{(1)}, \cdots, d^{(k)}$.

□

Remarque 3.4.2.

1. Dans la démonstration du théorème, il est essentiel de choisir $d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$. C'est à partir de $d^{(0)}$ que l'on construit des gradients orthogonaux et des directions conjuguées.
2. L'algorithme du gradient conjugué linéaire est surtout utile pour résoudre des grands systèmes creux.
3. La convergence peut être assez rapide, si A admet seulement p valeurs propres distinctes, la convergence a lieu en au plus p itérations.

3.4.2 Cas non linéaire

Pour pouvoir appliquer l'algorithme du gradient conjugué linéaire au cas d'une fonction f quelconque, il faut :

- remplacer $r(x^{(k)})$ par $\nabla f(x^{(k)})$;
- déterminer ρ_k par une minimisation unidimentionnelle.

Algorithme du Gradient conjugué non linéaire (Fletcher-Reeves)

1. Initialisation Choisir $x^{(0)}$, poser $k = 0$ et calculer $f^{(0)} = f(x^{(0)})$ et $\nabla f^{(0)} = \nabla f(x^{(0)})$, $d^{(0)} = -\nabla f^{(0)}$.

2. Itération k Tant que $\|\nabla f^{(k)}\| > \epsilon$, faire
   – Déterminer ρ_k
   – Calculer $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}$
   – Calculer $\nabla f^{(k+1)} = \nabla f(x^{(k+1)})$
   – Calculer $\beta_{k+1} = \frac{{\nabla f^{(k+1)}}^T \nabla f^{(k+1)}}{{\nabla f^{(k)}}^T \nabla f^{(k)}}$
   – Calculer $d^{(k+1)} = -\nabla f^{(k+1)} + \beta_{k+1} d^{(k)}$
   – Poser $k = k + 1$.

   Fin tant que

3.5 La méthode de relaxation

La dernière méthode que nous présentons permet de ramener un problème de minimisation dans $\mathbb{R}^n$ à la résolution successive de n problèmes de minimisation dans $\mathbb{R}$, à chaque itération.
On cherche à minimiser $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On pose $X = (x_1, \cdots, x_n)$.
Le principe de la méthode est le suivant : étant donné un itéré X^k de coordonnées $(x_1^k, \cdots, x_n^k)$, on fixe toutes les composantes sauf la première et on minimise sur la première :

$$\min f(x, x_2^k, \cdots, x_n^k), x \in \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi la première coordonnée de l'itéré suivant X^{k+1} que l'on note x_1^k ; on peut, pour effectuer cette minimisation dans $\mathbb{R}$, utiliser par exemple la méthode de Newton dans $\mathbb{R}$. On recommence ensuite en fixant la première coordonnée à x_1^{k+1} et les $n-2$ dernières comme précédemment. On minimise sur la deuxième et ainsi de suite.
L'algorithme obtenu est :

Algorithme de relaxation

1. Initialisation Poser $k = 0$ et choisir $X^0 \in \mathbb{R}^n$.

2. Itération k Pour i variant de 1 à n, on calcule la solution x_i^{k+1} de

$$\min f(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \cdots, x_i^{k+1}, x, x_{i+1}^{k+1}, \cdots, x_n^{k+1}),\ x \in \mathbb{R}.$$

3. Critère d'arrêt – Si $\|x_{k+1} - x_k\| < \epsilon$, stop.
   – Sinon, poser $k = k + 1$ et aller à 2.

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. Considérons un problème de minimisation d'une fonction donnée sous la forme suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} f_i(x)^2;$$

où f_i est deux fois différentiable.

a) Calculer le gradient et le Hessien de f en un point x.

b) Donner l'algorithme de Newton ou autre appliqué pour cette fonction f.

c) Donner l'algorithme en prenant

$$f_i(x) = \frac{1}{2}x^T A_i x + b_i^T x + 1.$$

Exercice 3.6.2. Soit le problème d'optimisation sans contraintes suivant où la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\min f(x, y) = 3x^2 + 3y^2.$$

Pour chacun de ces algorithmes, appliquer deux itérations de la méthode en prenant comme point de départ $(x^0, y^0) = (1, 1)$.

- La méthode du gradient à pas variable ;
- La méthode de Newton ;
- La méthode des gradients conjugués.

Exercice 3.6.3. Dans cet exercice, on étudie une méthode de minimisation sans contraintes d'une fonction quadratique de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + x^T b + c.$$

Définition 3.6.1. On dit que les vecteurs $d_i, i = 0, \ldots, n-1$ sont conjugués par rapport à une matrice symétrique définie positive A si :

$$\forall i, j \in \{i = 0, \ldots, n-1\}, i \neq j \Rightarrow d_i^T A d_j = 0.$$

• On note $\{d_i, i = 0, \ldots, n-1\}$ une famille quelconque de vecteurs conjugués par rapport à une matrice symétrique définie positive A de $\mathbb{R}^{n\times n}$. On se donne par ailleurs un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.

Soit un vecteur initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire.
A l'étape $(k+1)$, supposant construits les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_k$, ce qui sous-entend que les vecteurs $(Ax_l + b), l = 0, \dots, k-1$ sont tous différents de zéro, deux cas peuvent se présenter :

- ou bien $Ax_k + b = 0$ et l'algorithme est terminé,
- ou bien $Ax_k + b \neq 0$, auquel cas, on définit le nombre

$$\rho_k = \frac{d_k^T.(Ax_k + b)}{d_k^T A d_k},$$

puis le vecteur

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k.d_k.$$

1. Justifier le choix de ρ_k.
2. En supposant que $Ax_k + b \neq 0, \forall k = 1, \dots, n-1$, exprimer x_l, pour $l = 1, \dots, n$ en fonction de $x_0, (\rho_i, i = 0, \dots, n-1)$ et $(d_i, i = 0, \dots, n-1)$.
3. Montrer que $d_k^T A x_k = d_k^T A x_0, \forall k = 0, \dots, n-1$.
4. – Calculer $d_k^T(Ax_n + b)$.
   – Déduire que x_n est la solution du système $Ax = -b$.
   – Que peut-on dire sur la convergence de la méthode.
5. Appliquer l'algorithme du gradient conjugué pour résoudre le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = 10x_1 + 10x_2 + 100 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Exercice 3.6.4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1\left(1 + x_2^2\right).$$

a) f admet-elle des points critiques ? des extrêma locaux ? justifier.
b) Soit $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = f(\cos t, \sin t)$$

1. Montrer que $g'(t) = -6 \sin t \cos(2t)$
2. Trouver les points critiques de g.
3. Etudier la variation de g.

4. Déduire les extrêma de g.

Exercice 3.6.5. Pour chacune des affirmations suivantes, spécifier si elles sont vraies ou fausses. Justifier la réponse.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable et soit x_k tel que $\nabla^2 f(x_k)$ est définie positive. Alors la direction de Newton d_N est une direction de descente pour f en x_k.
2. Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que
$$q(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + g^T x + c,$$
avec $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique définie positive, $g \in \mathbb{R}^n$ et $c \in\in \mathbb{R}$.
On suppose $d_1, \ldots, d_n$ $Q-$conjuguées. Si $Q = \alpha I$ avec $\alpha > 0$, alors $d_1, \ldots, d_n$ sont orthogonales.
3. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et x^* tel que $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est semi définie positive. Alors x^* est un minimum local de f.

Exercice 3.6.6. Soit le problème d'optimisation sans contraintes suivant :
$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = 3x^2 + 3y^2.$$

1. Appliquer deux itérations de la méthode du gradient à pas fixe en prenant comme point de départ $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
2. Appliquer deux itérations de la méthode du gradient à pas optimal en prenant comme point de départ $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Exercice 3.6.7. Appliquer un algorithme pour résoudre le problème d'optimisation sans contraintes suivant :
$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = 10x_1 + 10x_2 + 100 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Exercice 3.6.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la fonction definie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par $J(x) = e^{\|Ax\|^2}$, où $\|.\|$ designe la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que J admet un minimum.
2. On suppose que la matrice A est inversible, montrer que ce minimum est unique.
3. Ecrire l'algorithme du gradient à pas optimal pour la recherche de ce minimum.
4. A quelle condition suffisante cet algorithme converge-t-il ?

Deuxième partie

Optimisation avec contraintes

Chapitre 4

Optimisation non linéaire avec contraintes

4.1 Introduction

Un problème de minimisation d'une fonction non-linéaire f sous contraintes $x \in S \subset \mathbb{R}^n$, où S est défini par une collection de m inégalités et r égalités, se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ h_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, r}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Les fonctions $g_i, i = 1, \cdots, m$ et $h_j, j = 1, \cdots, r$ sont des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$.

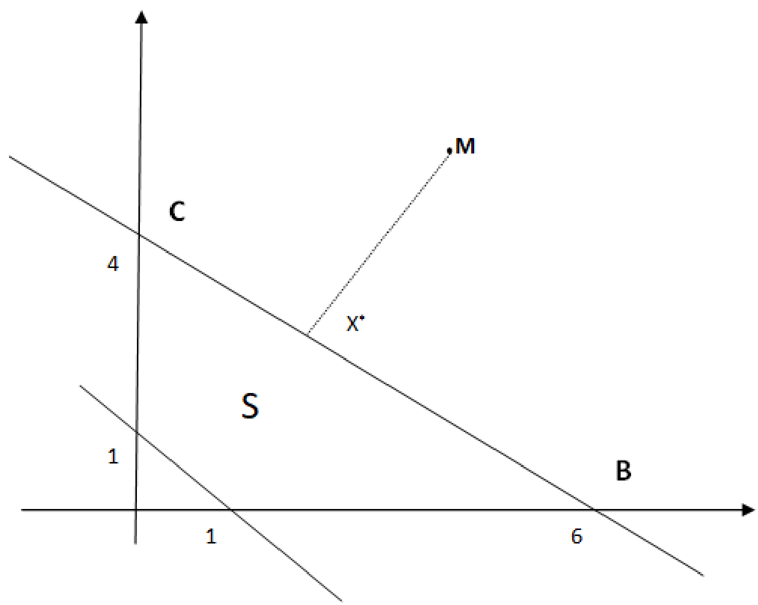
Remarque 4.1.1. Si les fonctions $f, g_i, i = 1, \cdots, m$ et $h_j, j = 1, \cdots, r$ sont linéaires, alors le problème (4.1) est appelé *problème de programmation linéaire.*

Remarque 4.1.2. Dans un problème de programmation linéaire, l'optimum est toujours atteint en un point extrême du polyhèdre S.
En programmation non linéaire (ou optimimisation non linéaire), même si le domaine admissible S est un polyhèdre, le minimum peut être atteint en un point quelconque de S (en un point extrême, point frontière ou encore point intérieur).

Exemple 4.1.1. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

L'ensemble S est un polytope et il est représenté sur la figure suivante :



L'équation $f(x) = \alpha = constante > 0$ représente un cercle de centre $M(4, 6)$ et de rayon $R = \sqrt{\alpha}$.
En faisant diminuer (ou augmenter) le nombre α, la valeur de $f(x)$ diminue (ou augmente). Il s'ensuit alors que le point x^*, qui est l'intersection des droites perpendiculaires BC et Mx^*, réalise le minimum de la fonction f sur l'ensemble S. De plus, le point x^* se trouve sur l'arête du polyèdre S.
Ici, on trouve

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} & \frac{36}{13} \end{pmatrix}, \quad f(x^*) = \frac{196}{13}.$$

Exemple 4.1.2. Considérons la fonction :

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2,$$

et cherchons son minimum sur le même polyèdre précédent S. Cette fois-ci, le minimum sera atteint au point intérieur

$$x^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x^*) = 0.$$

Exemple 4.1.3. Soit la fonction

$$f(x) = (x_1 - 8)^2 + x_2^2,$$

et cherchons son minimum sur le même polyèdre précédent S. Cette fois-ci, le minimum sera atteint au point extrême

$$x^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x^*) = 4.$$

Les minima locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^n$ sont définis de la manière suivante :

Définition 4.1.1. Un vecteur $x^0 \in S$ est un *minimum local* de f sur S si

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad f(x^0) \leq f(x), \; \forall x \in S, \quad \text{avec} \quad \|x - x^0\| < \epsilon.$$

Définition 4.1.2. Un vecteur $x^0 \in S$ est un *minimum global* de f sur S si

$$f(x^0) \leq f(x), \; \forall x \in S.$$

4.2 Théorèmes généraux d'existence

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in S \subset \mathbb{R}^n} f(x). \tag{4.2}$$

Nous allons donner deux résultats très généraux d'existence d'une solution optimale au problème (4.2).

Théorème 4.2.1. *(Existence) Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ (S non vide) et $f : S \to \mathbb{R}$ semi continue inférieurement.*

- *Si S est un ensemble non vide fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une solution optimale $x^0 \in S$, qui vérifie donc*

$$f(x^0) \leq f(x), \forall x \in S.$$

– *Si S est un ensemble non vide fermé de $\mathbb{R}^n$ et si f est coercive alors il existe une solution $x^0 \in S$ qui vérifie*

$$f(x^0) \leq f(x), \forall x \in S.$$

Démonstration. – Si $S \neq\neq \emptyset$ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$, comme f est continue, elle atteint ses bornes sur S, d'où l'existence de x^0.

– Si f est croissante à l'infini, alors il existe $R > 0$ tel que si $\|x\| > R$ alors $f(x) > f(0)$; donc

$$\min_S f = \min_{S\cap B_R} f,$$

où B_R désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon R. L'ensemble $S \cap B_R$ est compact, car c'est l'intersection d'un fermé et d'un compact. Donc, par ce qui précède, il existe $x^0 \in S$ tel que

$$f(x^0) = \min_{S\cap B_R} f = \min_{B_R} f.$$

$\square$

Théorème 4.2.2. *(Unicité) Soit $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose que f est strictement convexe et que S est convexe. Alors il existe au plus un élément x^0 de S tel que $f(x^0) = \min\limits_S f$.*

Démonstration. Supposons que x^0 et x^* soient deux solutions du problème (4.2), avec $x^0 \neq x^*$. Alors,

$$\min_S f \leq f(\frac{1}{2}x^0 + \frac{1}{2}x^*) < \frac{1}{2}f(x^0) + \frac{1}{2}f(x^*) = \min_S f.$$

On aboutit donc à une contradiction. $\square$

Théorème 4.2.3. *(Existence et Unicité) Soit $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est strictement convexe et que S est non vide et convexe fermé sur $\mathbb{R}^n$.*
Si S est borné ou f est croissante à l'infini, c'est-à-dire que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, alors il existe un unique élément x^0 de S solution du problème de minimisation (4.2), i-e, tel que $f(x^0) = \min_S f$.

4.3 Conditions d'optimalité

Afin d'analyser ou de résoudre de manière efficace un problème d'optimisation, il est fondamental de pouvoir disposer de conditions d'optimalité. En effet, celles-ci nous servent non seulement à vérifier la validité des solutions obtenues, mais souvent l'étude de ces conditions aboutit au développement des algorithmes de résolution eux-mêmes.
Des conditions équivalentes peuvent être obtenues de diverses manières, en procédant à des analyses suivant différentes "lignes directrices". L'approche considérée ici pour l'obtention de ces conditions est basée sur les notions de descente et de direction admissible.

4.3.1 Conditions nécessaires d'optimalité dans le cas des contraintes quelconques

Soit f une fonction non linéaire définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et considérons le problème de minimisatin suivant :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ x \in S. \end{cases} \tag{4.3}$$

Définition 4.3.1. – Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit solution réalisable ou plan du problème (4.3), si x appartient à l'ensemble des contraintes S.

– Un plan x^* est appelé solution optimale du problème (4.3), si

$$f(x^*) = \min_{x \in S} f(x).$$

On dit aussi que x^* constitue un point de minimum relatif global.

– Un vecteur $x^0 \in S$ est appelé point de minimum relatif local de la fontion f, si pour un certain $\epsilon > 0$, il satisfait les relations :

$$f(x^0) = \min_{x \in \mathcal{B}(x^0, \epsilon)} f(x),$$

$$\mathcal{B}(x^0, \epsilon) = \left\{ x \in S, \|x - x^0\| \leq \epsilon \right\}.$$

Définition 4.3.2 (Direction admissible)**.** Soient un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ et $x^0 \in S$. Une direction admissible de S en x^0 est un vecteur d tel que

$$d \neq 0 \text{ et } x^0 + \alpha d \in S, \ \forall \alpha \in [0, \overline{\alpha}] \text{ pour un certain } \overline{\alpha} > 0.$$

En vertu de cette définition, on peut remarquer que tous les vecteurs d de $\mathbb{R}^n$ sont des directions admissibles, si le point x est un point intérieur de S. Le problème se posera donc pour les points de la frontière de S. Pour cette raison, au lieu d'avoir $\nabla f(x^0) = 0$ comme dans le cas sans contraintes, ici la condition nécessaire tiendra compte aussi de la nature de l'ensemble S.
La condition telle que nous venons de l'énoncer ne présente malheureusement que peu d'intérêt en vue d'un usage en pratique, car si l'ensemble des directions de descente de f en x^0, disons $A = \{d | (\nabla f(x^0))^T d < 0\}$, peut être exprimé en fonction du gradient de la fonction objectif, ce n'est pas nécessairement le cas de l'ensemble de toutes les directions admissibles de S en x^0, $A = \{d \,|\, d \neq 0$ et $x^0 + \alpha d \in S, \forall \alpha \in [0, \alpha_{max}]$ pour un certain $\alpha_{max} > 0\}$. Il serait avantageux de trouver un moyen de la convertir en une condition plus pratiquement utilisable mettant en jeu des équations ou des inéquations.

Théorème 4.3.1 (Condition nécessaire d'optimalité)**.** *Soit f une fonction non linéaire, définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Si x^0 est un minimum local (ou global) du problème (4.3), alors pour toute direction admissible d en x^0, on a*

$$\nabla^T f(x^0) d \geq 0. \tag{4.4}$$

Démonstration. Soit d une direction admissible en x^0. Il existe alors $\overline{\alpha} > 0$ tel que $x^0 + \alpha d \in S$ pour tout $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$.
Considérons la fonction $\varphi(\alpha) = f(x^0 + \alpha d)$.
Comme x^0 est un minimum local, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$f(x^0) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{B}(x^0, \epsilon) \cap S.$$

Considérons

$$S_{\overline{\alpha}} = \left\{x^0 + \alpha d, \alpha \in [0, \overline{\alpha}]\right\}.$$

$\forall x \in S_{\overline{\alpha}} \cap \mathcal{B}(x^0, \epsilon) \cap S$, on aura

$$f(x^0) \leq f(x).$$

Soit

$$[0, \widetilde{\alpha}] = \left\{\alpha \in [0, \overline{\alpha}] \,/ x^0 + \alpha d \in S_{\overline{\alpha}} \cap \mathcal{B}(x^0, \epsilon) \cap S\right\},$$

et

$$\varphi(\alpha) \geq \varphi(0), \forall \alpha \in [0, \widetilde{\alpha}].$$

D'où $\alpha^0 = 0$ est un minimum local de $\varphi(\alpha)$ sur $[0, \widetilde{\alpha}]$.
On a

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \alpha\varphi_+^{'}(0) + o(\alpha)$$

où

$$\varphi_+^{'}(0) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha}.$$

Si $\varphi_+^{'}(0)$ était négative, alors pour un nombre α assez petit, on aurait eu

$$\varphi(\alpha) < \varphi(0).$$

Ce qui contredirait le fait que φ possède un minimum local en $\alpha = 0$. On a donc bien $\varphi_+^{'}(0) \geq 0$.
Par conséquent, comme

$$\varphi^{'}(\alpha) = [\nabla f(x^0 + \alpha d)]^T d,$$

on obtient

$$\varphi_+^{'}(0) = [\nabla f(x^0)]^T d \geq 0.$$

La relation (4.4) est alors démontrée. □

4.3.2 Conditions d'optimalité pour le cas de contraintes linéaires de type égalités

a- Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ le problème de programmation non linéaire :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g(x) = Ax - b = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

où $b \in \mathbb{R}^m$, A une matrice d'ordre $m \times n$, formée des vecteurs colonnes et des vecteurs lignes suivants :

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix},$$

où $g_i(x) = A_i^T x - b_i, 1 \leq i \leq m$.
Pour que l'ensemble des solutions réalisables

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n, A_i^T x - b_i = 0, 1 \leq i \leq m\right\}$$

ne soit pas vide ou ne soit pas réduit à un point isolé, on considérera que

$$rang A = m < n.$$

Proposition 4.3.1. *Soit x une solution réalisable du problème (4.5).*
Un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est alors une direction admissible en x si et seulement si

$$Ad = 0. \tag{4.6}$$

De plus, pour un tel vecteur, on a

$$x(\alpha) = x + \alpha d \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

En effet,

$$g(x(\alpha)) = Ax(\alpha) - b = Ax + \alpha Ad - b = 0, \forall(\alpha \neq 0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Ad = 0.$$

Remarque 4.3.1. Pour $\alpha = 0$, $x(\alpha)$ se réduit à x qui vérifie $g(x) = 0$.

Si donc x^0 est un point minimum pour le problème (4.5), alors la fonction $\varphi(\alpha) = f(x^0 + \alpha d)$ pour $Ad = 0$ admet aussi un minimum au point $\alpha = 0$. On en déduit que

$$\frac{d\varphi(0)}{d\alpha} = \varphi^T(0) = \nabla f^T(x^0) d = 0. \tag{4.7}$$

L'égalité (4.7) montre que le vecteur d est orthogonal au gradient de f au point minimum x^0. Il est aussi orthogonal à chacun des vecteurs-lignes de la matrice A :

$$Ad = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix} d = 0 \Rightarrow A_i^T d = 0,\ 1 \leq i \leq m.$$

Ceci n'est possible que s'il existe un vecteur $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla f(x^0) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i = -A^T \lambda^0. \tag{4.8}$$

En effet, dans le cas contraire, pour tout vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$, on aura

$$\nabla f(x^0) \neq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i.$$

Donc le vecteur $\nabla f(x^0)$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs-lignes de la matrice A.
Il existe alors un vecteur $d^0 \neq 0$ tel que

$$A_i^T d^0 = 0,\ 1 \leq i \leq m,\ \nabla f^T(x^0) d^0 \neq 0.$$

Ce qui contredit le critère d'optimalité (4.7).
Pour le problème (4.5), introduisons la fonction $L(x, \lambda)$, appelée fonction de Lagrange.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{4.9}$$

où

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}.$$

En termes de fonction de Lagrange, l'égalité (4.8) exprime donc simplement la condition de stationnarité du point x^0.

$$\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0.$$

En effet, on a

$$\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \nabla g_i(x^0) = \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i = 0. \tag{4.10}$$

D'autre part, la condition $g(x^0) = 0$ réalisée pour une solution optimale est équivalente à la condition de stationnarité du vecteur λ^0 de la fonction de Lagrange :

$$\nabla_\lambda L(x^0, \lambda^0) = \begin{pmatrix} g_1(x^0) \\ \vdots \\ g_m(x^0) \end{pmatrix} = g(x^0) = 0. \tag{4.11}$$

Si l'on note

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \lambda) \\ \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

alors la règle des multiplicateurs de Lagrange s'établit ainsi :

Théorème 4.3.2 (Multiplicateurs de Lagrange)**.** *Si x^0 est un point de minimum relatif local (ou global) pour le problème (4.5), alors il existe un vecteur unique $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$, appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange, tel que*

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0 \Leftrightarrow \nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0 \;\; et \;\; \nabla_\lambda L(x^0, \lambda^0) = 0. \tag{4.12}$$

Donc si x^0 est un point de minimum relatif du problème (4.5), alors le couple (x^0, λ^0) est un point stationnaire de la fonction de Lagrange (4.9).

Remarque 4.3.2. Le point x^0 n'est pas nécessairement un point de minimum de la fonction de lagrange $L(x, \lambda)$ pour $\lambda = \lambda^0$.

Soit x^0 un point de minimum relatif du problème (4.5). Il lui correspond donc un vecteur $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \cdots, \lambda_m^0)$ vérifiant la relation (4.10). Les nombres λ_i^0, $1 \leq i \leq m$, sont dits alors *multiplicateurs de Lagrange* et ils sont uniques si et seulement si $rangA = m$, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 4.3.3. *Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ^0 est unique si et seulement si $rangA = m$.*

Démonstration. Soit $rangA = m$ et supposons que pour le point de minimum x^0, il correspond deux vecteurs λ^0 et λ^* tels que :

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* A_i = 0, \;\; \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i = 0.$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i^* - \lambda_i^0) A_i = 0.$$

Comme $rangA = m$, alors les vecteurs $A_i, 1 \leq i \leq m$ sont linéairement indépendants. Donc, $\lambda_i^* = \lambda_i^0, 1 \leq i \leq m$, d'où

$$\lambda^* = \lambda^0.$$

Inversement, soit λ^0 un vecteur unique correspondant au point de minimum x^0 et considérons la combinaison linéaire nulle suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i = 0.$$

De la relation (4.10), on en déduit :

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i = \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i^0 - \alpha_i) A_i = 0.$$

Donc si $\lambda_i^0 - \alpha_i = \lambda_i^*$, on aura

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* A_i = 0.$$

Le vecteur λ^* vérifie aussi, comme λ^0, la relation (4.10). En vertu de l'unicité du vecteur des multiplicateurs de Lagrange, on conclut que les vecteurs $\alpha_i, 1 \leq i \leq m$, sont nuls et que les vecteurs $A_i, 1 \leq i \leq m$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, $rang A = m$. □

Exemple 4.3.1. Résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 \to \min, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

On définit la fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + \lambda_1(x_1 - x_2 + x_3 - 1) + \lambda_2(2x_1 + x_2 + 5x_3).$$

La condition nécessaire d'optimalité est donnée comme suit :

$$4x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad (4.13)$$

$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (4.14)$$

$$10x_3 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \quad (4.15)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1, \quad (4.16)$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \quad (4.17)$$

En faisant la somme des équations (4.56), (4.57) et (4.58) et en tenant compte de (4.60), on obtient

$$\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -8\lambda_2.$$

On aura alors

$$x_1 = \frac{3}{2}\lambda_2, x_2 = \frac{-9}{2}\lambda_2, x_3 = \frac{3}{10}\lambda_2.$$

En utilisant (4.59), on déduit la valeur de $\lambda_2 = \frac{10}{63}$. D'où

$$\lambda_1 = -\frac{80}{63}, x_1 = \frac{5}{21}, x_2 = \frac{-5}{7}, x_3 = \frac{1}{21}, f(x) = \frac{40}{63}.$$

On trouve donc un seul vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qui réalise le minimum de f sur l'ensemble des contraintes. En effet, la condition nécessaire de Lagrange est aussi suffisante puisque la fonction considérée ici est strictement convexe. Par conséquent,

$$x^* = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 5 & -15 & 1 \end{pmatrix}, f(x^*) = \frac{40}{63}.$$

b- Condition nécessaire d'optimalité du second ordre

Considérons le problème (4.5) et supposons de plus que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors la condition nécessaire suivante de second ordre.

Théorème 4.3.4. *Si x^0 est un point de minimum relatif du problème (4.5) et λ^0 le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondant, alors la forme quadratique*

$$\nabla_x^2 L(x^0, \lambda^0) \ \ (ou \ \ \nabla^2 f(x^0))$$

est semi-définie positive sur l'ensemble des points de la variété

$$Ay = 0. \tag{4.18}$$

Démonstration. Soit y un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (4.18). On sait déjà que le vecteur

$$x(\alpha) = x^0 + \alpha y$$

est solution réalisable du problème (4.5) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Posons

$$\varphi(\alpha) = f(x(\alpha)) = f(x^0 + \alpha y).$$

Puisque le point x^0 réalise un minimum relatif pour la fonction f, alors la fonction $\varphi(\alpha)$ admet aussi un minimum en $\alpha = 0$. D'où

$$\varphi^{'}(0) = \frac{d\varphi}{d\alpha} \mid_{\alpha=0},\ \varphi^{''}(0) = \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} \mid_{\alpha=0} \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\alpha} \mid_{\alpha=0} &= \nabla f^T(x(\alpha))\frac{dx(\alpha)}{d\alpha} \mid_{\alpha=0} \\ &= y^T \nabla f(x(\alpha)) \mid_{\alpha=0} \\ &= y^T \nabla f(x^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} \mid_{\alpha=0} &= y^T \nabla^2 f(x(\alpha))\frac{dx(\alpha)}{d\alpha} \\ &= y^T \nabla^2 f(x(\alpha))y. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$y^T \nabla^2 f(x^0)y \geq 0 \tag{4.19}$$

D'autre part, on a

$$L(x, \lambda^0) = f(x) + \lambda^{0^T} g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (A_i^T x - b_i).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \lambda^0) &= \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i \\ \nabla_x^2 L(x, \lambda^0) &= \nabla^2 f(x). \end{aligned}$$

En vertu de la dernière égalité et de la relation (4.19), on obtient finalement

$$y^T \nabla_x^2 L(x^0, \lambda^0)y \geq 0.$$

□

c- Condition suffisante d'optimalité du second ordre

Théorème 4.3.5. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et (x^0, λ^0) un couple de vecteurs vérifiant la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre pour le problème (4.5), i.e.,*

$$\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0.$$

Pour que x^0 soit un point de minimum relatif local du problème (4.5), il est alors suffisant que la forme quadratique

$$y^T \nabla_x^2 L(x^0, \lambda^0) y$$

soit définie positive sur l'ensemble des points y de la variété $Ay = 0$.

Démonstration. Soit y un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Ay = 0$. Donc $x(\alpha) = x^0 + \alpha y$ est solution réalisable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit

$$\varphi(\alpha) = f(x(\alpha)) = f(x^0 + \alpha y), \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(\alpha) &= \left[\nabla f(x^0 + \alpha y)\right]^T \frac{dx(\alpha)}{d\alpha} = \nabla f(x^0 + \alpha y) y \Rightarrow \varphi^{'}(0) = \nabla f(x^0) y. \\ \varphi^{''}(\alpha) &= y^T \nabla^2 f(x^0 + \alpha y) y \Rightarrow \varphi^{''}(0) = y^T \nabla^2 f(x^0) y. \end{aligned}$$

En outre, de la condition nécessaire du premier ordre (4.8), on déduit que

$$\nabla f(x^0) = -A^T \lambda^0.$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(0) &= -A^T \lambda^0 y = 0, \\ \varphi^{''}(0) &= y^T \nabla^2 f(x^0) y > 0. \end{aligned}$$

La fonction φ admet donc un minimum local en $\alpha = 0$.
Soit maintenant un vecteur $\overline{x}$, solution réalisable du problème (4.5) telle que

$$\|\overline{x} - x^0\| = \epsilon > 0.$$

Il existe donc un vecteur y tel que

$$\| y \| = 1, Ay = 0, \overline{x} = x^0 + \epsilon y.$$

Il s'ensuit alors que

$$f(\overline{x}) = f(x^0 + \epsilon y) = \varphi(\epsilon) > \varphi(0) = f(x^0).$$

Le point x^0 constitue donc bien un point de minimum pour le problème (4.5). $\square$

d- Cas d'une fonction convexe

Considérons le problème

$$\begin{array}{l} f(x) \to \min, \\ x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = Ax - b = 0\} \end{array} \tag{4.20}$$

où f est une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et A une matrice d'ordre $m \times n$, avec $rangA = m < n$.
Soit $x^0 \in S$ et λ^0 un $m-$vecteur tels que le couple (x^0, λ^0) vérifie la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, ie,

$$\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = \nabla f(x^0) + A^T \lambda^0 = 0. \tag{4.21}$$

Cette dernière relation est aussi suffisante pour l'optimalité du vecteur x^0 dans le problème (4.20).
Puisque S est aussi convexe, on peut écrire

$$f(x) - f(x^0) \geq (\nabla f(x^0))^T (x - x^0), \ \forall x \in S.$$

De l'égalité (4.21), on déduit que

$$f(x) - f(x^0) \geq -\lambda^{0^T} A(x - x^0), \ \forall x \in S.$$

Comme $A(x - x^0) = 0$, on déduit

$$f(x) \geq f(x^0).$$

Ce qui prouve que x^0 réalise un minimum pour la fonction objectif du problème (4.20).

Exemple 4.3.2. A titre d'illustration, calculons le minimum x^0 pour une fonction quadratique convexe :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T D x + c^T x,$$

où D est une matrice symétrique définie positive et $x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = Ax - b = 0\}$.
La condition (4.21) donne alors

$$Dx^0 + c = -A^T \lambda^0 \Rightarrow x^0 = -D^{-1}(A^T \lambda^0 + c).$$

D'autre part, on a

$$Ax^0 = b \Rightarrow -AD^{-1}A^T\lambda^0 - AD^{-1}c = b.$$

D'où

$$\lambda^0 = -\left[AD^{-1}A^T\right]^{-1}(AD^{-1}c + b).$$

Par conséquent,

$$x^0 = D^{-1}A^T\left[AD^{-1}A^T\right]^{-1}(AD^{-1}c + b) - D^{-1}c.$$

Exemple 4.3.3. Résolvons le problème suivant :

$$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

On a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant les résultats de l'exemple précédent, on trouve

$$x^0 = D^{-1}A^T\left[AD^{-1}A^T\right]^{-1}(AD^{-1}c + b) - D^{-1}c = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \ f(x^0) = \frac{7}{99}.$$

4.3.3 Conditions d'optimalité pour le cas de contraintes linéaires de type inégalités

Avant d'aborder le problème, voyons un lemme, appelé lemme de Farkas, qui joue un rôle très important en optimisation mathématique.

Lemme 4.3.1 (Lemme de Farkas)**.** *Soient* $(m+1)$ *vecteurs de* $\mathbb{R}^n, c, A_i, i = \overline{1, m}, m < n$. *Si pour chaque vecteur* x *vérifiant* $A_i^T x \leq 0, 1 \leq i \leq m$, *on a* $c^T x \leq 0$, *alors il existe des coefficients* $\lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$, *tels que*

$$c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que les vecteurs $A_i, 1 \leq i \leq m$, sont linéairement indépendants. Montrons alors que le vecteur c appartient au sous-espace engendré par les vecteurs $A_i, 1 \leq i \leq m$, ie

$$c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i. \tag{4.22}$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait alors un vecteur $\overline{x}$ orthogonal à tous les vecteurs $A_i, 1 \leq i \leq m$ et tel que

$$A_i^T \overline{x} = 0, 1 \leq i \leq m, c^T \overline{x} = \alpha > 0. \tag{4.23}$$

Soit x^0 un certain vecteur satisfaisant aux conditions du théorème :

$$A_i^T x^0 \leq 0, 1 \leq i \leq m, c^T x^0 = \beta \leq 0. \tag{4.24}$$

Considérons ensuite le vecteur $x = \overline{x} + \theta x^0$ où

$$\begin{cases} 0 < \theta < \frac{\alpha}{|\beta|} & \text{si} \quad \beta \neq 0, \\ 0 < \theta & \text{si} \quad \beta = 0. \end{cases}$$

En vertu des relations (4.23) et (4.24), on aura alors

$$\begin{array}{rcl} A_i^T x & = & A_i^T \overline{x} + \theta A_i^T x^0 \leq 0, \;\; 1 \leq i \leq m, \\ c^T x & = & c^T \overline{x} + \theta c^T x^0 = \alpha + \theta \beta > 0. \end{array}$$

Cette dernière relation contredit l'hypothèse du lemme, l'égalité (4.22) est donc vraie.
Supposons maintenant que dans la relation (4.22), les coefficients λ_i ne sont pas tous positifs ou nuls, par exemple $\lambda_k < 0$. Il existe alors un vecteur $\overline{x}$ tel que

$$A_i^T \overline{x} = 0, i \neq k, 1 \leq i \leq m, A_k^T \overline{x} = \alpha_k < 0.$$

Soit aussi un certain vecteur x^0, satisfaisant aux inégalités

$$A_i^T x^0 = \beta_i < 0, \;\; 1 \leq i \leq m.$$

On construit le vecteur

$$x = \overline{x} + \theta x^0, \;\; 0 < \theta < \frac{\alpha_k \lambda_k}{|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i|}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} A_i^T x &= A_i^T \overline{x} + \theta A_i^T x^0 = \theta \beta_i < 0, \;\; 1 \leq i \leq m, \;\; i \neq k; \\ A_k^T x &= A_k^T \overline{x} + \theta A_k^T x^0 = \alpha_k + \theta \beta_k < 0; \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} c^T x &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i^T x = \lambda_k A_k^T x + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \lambda_i A_i^T x \\ &= \lambda_k(\alpha_k + \theta \beta_k) + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \theta \lambda_i \beta_i \\ &= \lambda_k \alpha_k + \theta \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i . \end{aligned}$$

Cette dernière relation contredit l'hypothèse du théorème pour un nombre θ positif assez petit. Notre supposition sur un certain $\lambda_k < 0$ est donc fausse. Le lemme de Farkas est ainsi démontré. □

Remarque 4.3.3. Ici, la démonstration est faite pour m vecteurs linéairement indépendants, où $m < n$. Ce lemme reste vrai, même pour $m \geq n$. Il suffit alors de prendre les λ_i égaux à zéro pour les vecteurs linéairement dépendants.

a- Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Soit f une fonction non linéaire définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons le problème de minimisation de la fonction f sur l'ensemble S défini par les inégalités linéaires suivantes :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = Ax - b \leq 0\},$$

où

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T x - b_1 \\ \vdots \\ A_m^T x - b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

On notera ici que le nombre m peut être plus grand que n.
Le problème de minimisation d'une fonction f avec des contraintes linéaires de type inégalités se résume ainsi :

$$f(x) \rightarrow \min, \tag{4.25}$$

$$g_i(x) \leq 0, i \in I = \{1, \cdots, m\}. \tag{4.26}$$

Définition 4.3.3. Tout vecteur x vérifiant les inégalités (4.26) est appelé *solution admissible ou plan* du problème (4.25)-(4.26).

Définition 4.3.4. La contrainte $g_i(x) \leq 0$ sera dite *active* au point x, si $g_i(x) = 0$ et *passive* si $g_i(x) < 0$.
On notera l'ensemble des indices actifs au point x par

$$I_a = I_a(x) = \{i \in I : g_i(x) = 0\}.$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 4.3.2. *Dans les contraintes (4.26), un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ est une direction admissible au point $x \in S$ si et seulement si*

$$A_i^T y \leq 0, i \in I_a(x).$$

Démonstration. Soit y une direction admissible au point x. Il existe alors un nombre $\overline{\alpha} > 0$ assez petit tel que

$$x(\alpha) = x + \alpha y \in S, \ \ \forall \alpha \in]0, \overline{\alpha}].$$

On aura donc

$$Ax - b + \alpha Ay \leq 0.$$

Puisque

$$\begin{gathered} A_i^T x - b_i + \alpha A_i^T y \leq 0, \ \ i \in I, \\ A_i^T x - b_i = 0, \ \ \forall i \in I_a(x), \end{gathered}$$

alors, en vertu de $\alpha > 0$, on obtient

$$A_i^T y \leq 0, \ \ \forall i \in I_a(x).$$

Inversement, soit y un vecteur tel que

$$A_i^T y \leq 0, \ \ \forall i \in I_a(x).$$

Soit le vecteur $x(\alpha) = x + \alpha y$, où x est une solution admissible du problème (4.25)-(4.26). On peut alors écrire

$$\begin{aligned} g_i(x(\alpha)) &= A_i^T x - b_i + \alpha A_i^T y = \alpha A_i^T y \leq 0, \ \ \forall i \in I_a(x), \forall \alpha \geq 0; \\ g_i(x(\alpha)) &= A_i^T x - b_i + \alpha A_i^T y = g_i(x) + \alpha A_i^T y, \ \ \forall i \in I \setminus I_a(x). \end{aligned}$$

Comme $g_i(x) < 0,\ \forall i \in I \setminus I_a(x)$, on peut alors trouver un nombre $\overline{\alpha} > 0$ assez petit tel que

$$g_i(x(\alpha)) = g_i(x) + \alpha A_i^T y \leq 0,\ \ \forall i \in I \setminus I_a(x),\ \forall \alpha \in [0, \overline{\alpha}].$$

Donc

$$g_i(x(\alpha)) \leq 0,\ \ \forall i \in I,\ \forall \alpha \in [0, \overline{\alpha}].$$

Ce qui revient à dire que

$$x(\alpha) = x + \alpha y \in S.$$

Le vecteur y considéré est, par conséquent, une direction admissible au point x. □

Théorème 4.3.6 (Théorème de Karush-Kuhn-Tucker)**.** *Soit x^0 un point de minimum du problème (4.25)-(4.26). Il existe alors un $m-$vecteur $\lambda^0 \geq 0$ tel que :*

i) pour la fonction de Lagrange $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$, la condition de stationnarité est satisfaite :

$$\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0.$$

ii) la condition de complémentarité est remplie :

$$\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i \in I.$$

Démonstration. Le vecteur x^0 étant un minimum, alors pour toute direction admissible y en x^0, on aura

$$\nabla^T f(x^0) y \geq 0,$$

et ce, en vertu du théorème (4.3.1).
En utilisant le lemme (4.3.2), on peut écrire

$$A_i^T y \leq 0,\ \ \forall i \in I_a(x^0) \Rightarrow -\nabla^T f(x^0) y \leq 0.$$

En vertu du lemme de Farkas, il existe alors des coefficients $\lambda_i^0 \geq 0$, $i \in I_a(x^0)$, tels que

$$-\nabla^T f(x^0) = \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 A_i.$$

Posons $\lambda_i^0 = 0$ pour $i \in I \backslash I_a(x^0)$. On obtient alors

$$-\nabla^T f(x^0) = \sum_{i \in I} \lambda_i^0 A_i \Leftrightarrow \nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0,\ \ \lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i \in I.$$

Le théorème de de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) est ainsi démontré.

□

b- Condition nécessaire d'optimalité du second ordre

Théorème 4.3.7. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Si x^0 un point de minimum du problème (4.25)-(4.26), alors la forme quadratique*

$$y^T \nabla^2 f(x^0) y$$

est définie non négative sur l'ensemble de la variété :

$$A_i^T y = 0, i \in I_a(x^0), \tag{4.27}$$

où $I_a(x^0)$ est l'ensemble des indices actifs en x^0.

Démonstration. Supposons qu'il existe un vecteur y vérifiant (4.27) tel que

$$y^T \nabla^2 f(x^0) y < 0.$$

Considérons le vecteur $x(\alpha) = x^0 + \alpha y$. Pour $\alpha > 0$ assez petit, le vecteur $x(\alpha)$ est une solution réalisable du problème (4.25)-(4.26). On peut alors écrire

$$f(x(\alpha)) - f(x^0) = \alpha \nabla^T f(x^0) y + \frac{1}{2} \alpha^2 y^T \nabla^2 f(x^0) y + o(\alpha^2).$$

En vertu du théorème de Karush-Kuhn-Tucker (4.3.6), on a

$$\nabla f(x^0) = - \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 A_i^T, \ \ \lambda_i^0 \geq 0, \ \ i \in I_a(x^0).$$

D'où

$$(\nabla f(x^0))^T y = - \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 A_i^T y = 0.$$

Donc

$$f(x(\alpha)) - f(x^0) = \alpha^2 \left(\frac{1}{2} y^T \nabla^2 f(x^0) y + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \right) < 0,$$

si α est un nombre positif assez petit.
Cette dernière inégalité contredit le fait que x^0 soit un minimum local de f. Par conséquent, la matrice $\nabla^2 f(x^0)$ est définie non négative sur l'ensemble (4.27).

□

c- Condition suffisante d'optimalité du second ordre

Théorème 4.3.8. *Soit x^0 un point admissible du problème (4.25)-(4.26) vérifiant les conditions nécessaires de Karush-Kuhn-Tucker. Si la matrice $\nabla^2 f(x^0)$ est définie positive sur l'ensemble (4.27), alors x^0 est un point de minimum du problème (4.25)-(4.26).*

d- Cas de fonction convexe

Considérons le problème suivant :

$$f(x) \to \min, x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = Ax - b \leq 0\} \tag{4.28}$$

où f est une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit (x^0, λ^0) un couple de vecteurs vérifiant le théorème de Karush-Kuhn-Tucker (4.3.6) :

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^0, \lambda^0) &= 0 \Leftrightarrow \nabla f(x^0) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i^T, \ \lambda_i^0 \geq 0, \ \ 1 \leq i \leq m; \\ \lambda_i^0 g_i(x^0) &= 0, \ \ 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Alors le vecteur x^0 constitue un point minimum global du problème (4.28).
En effet, on peut écrire, du fait que f est convexe et S convexe,

$$f(x) - f(x^0) \geq \nabla^T f(x^0)(x - x^0), \ \ \forall x \in S.$$

D'où

$$f(x) - f(x^0) \geq -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i^T (x - x^0), \ \ \forall x \in S.$$

Puisque $\lambda_i^0 = 0$, pour $i \in I \backslash I_a(x^0)$, alors on aura

$$f(x) - f(x^0) \geq -\sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 (A_i^T x - A_i^T x^0),$$

d'où

$$f(x) - f(x^0) \geq -\sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 (A_i^T x - b_i) \ \ \forall x \in S.$$

Par conséquent, x^0 est un point de minimum global du problème (4.28).
Pour une fonction convexe, les conditions de KKT sont donc à la fois nécessaires et suffisantes pour l'optimalité du plan x^0.

4.3.4 Conditions d'optimalité pour le cas de contraintes égalités non linéaires

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \end{cases} \tag{4.29}$$

où f est une fonction non linéaire définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)),$$

avec $g_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq m$, sont de classes $\mathcal{C}^1$.
Considérons la fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x). \tag{4.30}$$

a- Conditions nécessaires de premier ordre

Théorème 4.3.9 (Règle des multiplicateurs de Lagrange)**.** *Soit x^0 une solution optimale du problème (4.29) et supposons que les vecteurs*

$$\nabla g_1(x^0), \nabla g_2(x^0), \cdots, \nabla g_m(x^0) \tag{4.31}$$

sont linéairement indépendants.
Alors il existe un vecteur multiplicateur de Lagrange (unique) λ^0 tel que la paire (x^0, λ^0) vérifie les relations appelées conditions de stationnarité de la fonction de Lagrange *:*

$$\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0, \nabla_\lambda L(x^0, \lambda^0) = 0. \tag{4.32}$$

Définition 4.3.5. Un point x^* est appelé point stationnaire du problème (4.29), s'il existe un vecteur λ^* tel que la paire (x^*, λ^*) est un point stationnaire de la fonction de Lagrange (4.30) :

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0. \tag{4.33}$$

La recherche des points stationnaires du problème (4.29) se ramène à la résolution du système (4.33) de $(m + n)$ équations avec $(m + n)$ inconnus (x, λ).
Ainsi, d'après la règle des multiplicateurs de Lagrange, la résolution du problème (4.29) (si la solution existe) se ramène à la recherche de la valeur minimale de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble des points stationnaires.

Remarque 4.3.4. Contrairement aux fonctions convexes, les solutions optimales ne sont pas, en général, des points stationnaires de la fonction de Lagrange avec $\lambda = \lambda^*$.

Exemple 4.3.4. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_2^3 \to \min, \\ g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 = 0. \end{cases}$$

La solution optimale étant $x^0 = (0, 0)$.
On a $\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = -2x_1|_{(0,0)} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 1$. Le vecteur $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur linéairement indépendant.
On définit la fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = x_2^3 + \lambda(x_2 - x_1^2).$$

Les conditions de stationnarité sont ainsi données :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x,\lambda) &= -2\lambda x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x,\lambda) &= 3\lambda x_2^2 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,\lambda) &= x_2 - x_1^2 = 0, \end{aligned}$$

Ainsi à la solution optimale $x^0 = (0, 0)$ correspond un multiplicateur de Lagrange $\lambda^0 = 0$.
On a alors $L(x, \lambda^0) = L(x, 0) = x_2^3$; le point $x^0 = (0, 0)$ est un point d'inflexion de la fonction de Lagrange $L(x, 0) = x_2^3$.

Exemple 4.3.5. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_2 \to \min, \\ g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 = 0. \end{cases}$$

La solution optimale étant $x^0 = (0, 0)$.
On a $\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = -2x_1|_{(0,0)} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 1$. Le vecteur $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur linéairement indépendant.
On définit la fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = x_2 + \lambda(x_2 - x_1^2).$$

Les conditions de stationnarité sont ainsi données :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1}(x,\lambda) &= -2\lambda x_1 = 0,\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x,\lambda) &= 1+\lambda = 0,\end{aligned}$$

Ce qui donne $\lambda = -1$.
On a alors $L(x,\lambda^0) = L(x,-1) = x_1^2$ qui atteint son minimum en $x^0 = (0,0)$.

Exemple 4.3.6. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) = -x_2^2 \to \min,\\ g(x_1,x_2) = x_2 = 0.\end{cases}$$

La solution optimale étant $x^0 = (0,0)$.
On définit la fonction de Lagrange :

$$L(x,\lambda) = -x_2^2 + \lambda x_2.$$

On trouve $\lambda = 0$. $L(x,0) = -x_2^2$, cette fonction n'atteint pas le minimum mais le maximum au point $x^0 = (0,0)$.

b- Condition nécessaire du second ordre

Considérons le problème (4.29), où on suppose que $f(x)$ et $g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ et la solution optimale x^0 est telle que les vecteurs (4.31) sont linéairement indépendants, c-à-d, la solution optimale x^0 est régulière.

Théorème 4.3.10. *Si x^0 est une solution optimale locale régulière du problème (4.29), λ^0 le vecteur multiplicateur de Lagrange correspondant, alors la forme quadratique suivante est définie non négative :*

$$l^T \nabla_x^2 L(x^0,\lambda^0) l \geq 0 \tag{4.34}$$

sur l'hyperplan

$$l^T \nabla g_i(x^0) = 0, \quad i = 1,\cdots,m. \tag{4.35}$$

c- Condition suffisante d'optimalité locale

Considérons le problème (4.29), où on suppose que $f(x)$ et $g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 4.3.11. *Pour qu'un point stationnaire x^0 soit une solution optimale locale du problème (4.29), il est suffisant qu'avec le vecteur multiplicateur de Lagrange correspondant λ^0, la forme quadratique suivante soit définie positive :*

$$l^T \nabla_x^2 L(x^0, \lambda^0) l > 0 \tag{4.36}$$

sur l'hyperplan

$$l^T \nabla g_i(x^0) = 0, \quad i = 1, \cdots, m \tag{4.37}$$

avec $l \neq 0$.

Exemple 4.3.7. Trouver les paramètres d'une citerne tels que pour une surface extérieure donnée S_0, la citerne aurait un volume maximal.
La surface extérieure de la citerne est égale à :

$$S_0 = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2.$$

Le volume de la citerne est :

$$V = \pi x_2^2 x_1.$$

Soient les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, x_2) & = & -\pi x_2^2 x_1 \\ g(x_1, x_2) & = & 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0. \end{array}$$

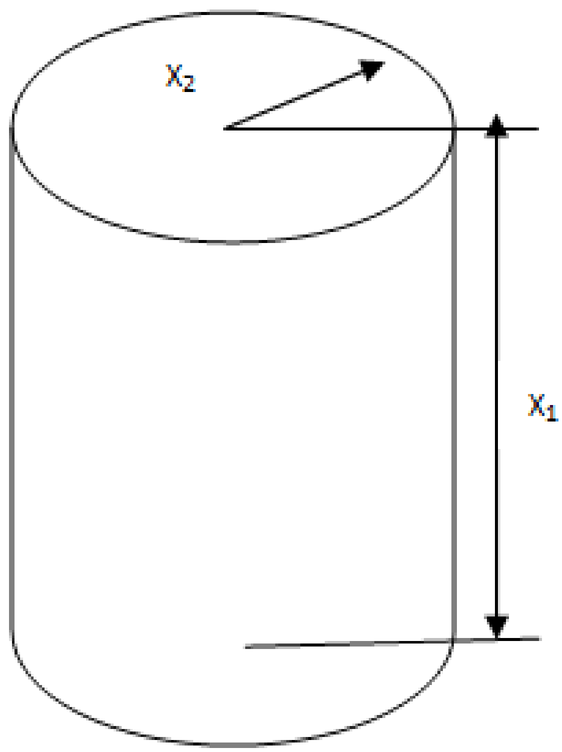
Le problème posé est transformé ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2) \to \min, \\ g(x_1, x_2) = 0. \end{array} \right. \tag{4.38}$$

Le problème obtenu n'est pas équivalent au problème initial, puisqu'on n'a pas pris en considération les contraintes supplémentaires

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{4.39}$$

Mais nous allons résoudre le problème sous forme (4.38) en excluant, si nécessaire, les solutions ne vérifiant pas les contraintes (4.39). Si le problème



(4.38) admet une solution alors le problème posé aurait sa solution parmi les solutions optimales locales du problème (4.38).
On définit la fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = -\pi x_2^2 x_1 + \lambda(2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0).$$

Les points stationnaires vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) &= -\pi x_2^2 + 2\pi\lambda x_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) &= -2\pi x_2 x_1 + 4\pi\lambda x_2 + 2\pi\lambda x_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) &= 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0 = 0
\end{aligned}$$

D'où

$$x_1 = 4\lambda, x_2 = 2\lambda, \lambda = \pm\sqrt{\frac{S_0}{24\pi}}.$$

Choisissons $\lambda^0 = \sqrt{\frac{S_0}{24\pi}}$.
Calculons la matrice

$$\nabla_x^2 L(x,\lambda^0) = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi x_2 + 2\pi\lambda^0 \\ -2\pi x_2 + 2\pi\lambda^0 & -2\pi x_1 + 4\pi\lambda^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi\lambda^0 \\ -2\pi\lambda^0 & -4\pi\lambda^0 \end{pmatrix}$$

L'équation de l'hyperplan (4.37) est

$$(\frac{\partial g}{\partial x_1})y_1 + (\frac{\partial g}{\partial x_2})y_2 = 4\pi\lambda^0 y_1 + 16\pi\lambda^0 y_2 = 0. \tag{4.40}$$

De (4.40), on obtient $y_1 = -4y_2$.
La forme quadratique avec la matrice $\nabla_x^2 L(x,\lambda)$ a la forme

$$y^T\nabla_x^2 L(x,\lambda^0)y = -4\pi\lambda^0 y_1 y_2 - 4\pi\lambda^0 y_2^2$$

et sur l'hyperplan (4.40), elle devient

$$y^T\nabla_x^2 L(x,\lambda^0)y = 12\pi\lambda^0 y_2^2 > 0,$$

pour tout $y = (y_1, y_2)$ avec $y_2 \neq 0$.
Ainsi les conditions du théorème (4.3.11) sont vérifiées pour :

$$x_1^0 = 2\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}, \quad x_2^0 = \sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}.$$

Le cylindre avec ces paramètres aurait le plus grand volume.

4.3.5 Conditions d'optimalité pour le cas de contraintes inégalités non linéaires

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g(x) \leq 0, \\ x \in D \end{cases} \tag{4.41}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $I = \{1, 2, \cdots, m\}, D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide.

Définition 4.3.6. – Tout vecteur $x \in D$ vérifiant les contraintes $g(x) \leq 0$ du problème (4.41) est appelé *solution admissible* ou *plan* du problème (4.41).
- La contrainte $g_i(x) \leq 0$ est dite *active* au point x si $g_i(x) = 0$. Elle est dite *passive* si $g_i(x) < 0$.
- On notera l'ensemble des indices actifs au point x par

$$I_a(x) = \{i \in I, g_i(x) = 0\}.$$

a- Conditions nécessaires d'optimalité de premier ordre

Théorème 4.3.12. *Supposons que f et g_i, $i \in I_a(x^0)$ sont différentiables au point x^0, et les fonctions g_i, $i \notin I_a(x^0)$ sont continues en x^0.*
Si x^0 est une solution optimale locale du problème (4.41), alors il n'existe pas de vecteur $l \in \mathbb{R}^n$ vérifiant le système suivant :

$$l^T \nabla f(x^0) \quad < \quad 0 \tag{4.42}$$
$$l^T \nabla g_i(x^0) \quad < \quad 0, i \in I_a(x^0) \tag{4.43}$$

Démonstration. Soit x^0 un plan optimal du problème (4.41), $l \in \mathbb{R}^n$ un vecteur vérifiant (4.43).
Comme $x^0 \in D$ et D est ouvert, alors il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$x^0 + \lambda l \in D, \ \ \forall \lambda \in [0, \delta_1]. \tag{4.44}$$

Comme $g_i(x^0) < 0$ et les fonctions $g_i(.)$ sont continues en x^0 pour $i \notin I_a(x^0)$, alors il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$g_i(x^0 + \lambda l) < 0, \ \ \forall \lambda \in [0, \delta_2], \ \ \forall i \notin I_a(x^0). \tag{4.45}$$

Enfin, comme

$$l^T \nabla g_i(x^0) < 0, i \in I_a(x^0),$$

alors d'après le théorème 4.3.1, il existe $\delta_3 > 0$, tel que

$$g_i(x^0 + \lambda l) < g_i(x^0) = 0, \ \ \forall \lambda \in [0, \delta_3], \ \ \forall i \in I_a(x^0). \tag{4.46}$$

De (4.44), (4.45) et (4.46), on déduit que

$$x^0 + \lambda l \in S, \ \ \forall \lambda \in [0, \delta],$$

où $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Donc l est une direction admissible en x^0.
D'après le théorème 4.3.1, on a

$$(\nabla f(x^0))^T l \geq 0,$$

et donc le système (4.42)-(4.43) n'admet pas de solution $l \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Définition 4.3.7. Un vecteur l est dit *direction admissible* au point $\widetilde{x}$ par rapport à la contrainte inégalité $g_i(x) \leq 0$ (direction intérieure), si

$$l^T \nabla g_i(\widetilde{x}) < 0, \ \text{ si } g_i(\widetilde{x}) = 0,$$

et l un vecteur quelconque si $g_i(\widetilde{x}) < 0$.

Définition 4.3.8. Un vecteur l est appelé *direction admissible* au point $\widetilde{x}$ par rapport aux contraintes du problème (4.41), si il est une direction admissible par rapport à chacune des contraintes $g_i(x) \leq 0, \ 1 \leq i \leq m$ au point $\widetilde{x}$.
Ainsi, les directions admissibles par rapport aux contraintes du problème (4.41) au plan $\widetilde{x}$ sont décrites par les équations (4.43) si on change x^0 par $\widetilde{x}$.

Du théorème 4.3.12, on déduit la proposition suivante :

Proposition 4.3.2. *Si x^0 est un optimum local du problème (4.41), alors au point x^0, il n'existe pas de directions admissibles du problème (4.41).*

Théorème 4.3.13. *Soit x^0 un point de minimum relatif local du problème (4.41) tel que les vecteurs*

$$\nabla g_i(x^0), \ \ i \in I_a(x^0) \tag{4.47}$$

sont linéairement indépendants.
Il existe alors un unique vecteur multiplicateur de Lagrange λ^0 vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\lambda^0 \geq 0. \\
&\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0. \\
&(\lambda^0)^T g(x^0) = 0.
\end{aligned}$$

Définition 4.3.9. On dira qu'un plan x^0 est *régulier* si les vecteurs

$$\nabla g_i(x^0), \ \ i \in I_a(x^0)$$

sont linéairement indépendants.

b- Condition nécessaire d'optimalité du second ordre

Considérons de nouveau le problème (4.41) mais en supposant que f, g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
D'après le théorème 4.3.13, à toute solution optimale x^0 régulière du problème (4.41), il correspond un unique vecteur de Lagrange λ^0.

Définition 4.3.10. – Une contrainte $g_i(x) \leq 0$ active au point x^0 est dite *forte* si $\lambda_i^0 > 0$.
L'ensemble des indices des contraintes fortes au point x^0 sera noté :

$$I_a^+(x^0) = \left\{i : g_i(x^0) = 0, \;\; \lambda_i^0 > 0\right\}.$$

– Une contrainte $g_i(x) \leq 0$ active au point x^0 est dite *faible* si $\lambda_i^0 = 0$.
L'ensemble des indices des contraintes faibles au point x^0 sera noté :

$$I_a^0(x^0) = \left\{i : g_i(x^0) = 0, \;\; \lambda_i^0 = 0\right\}.$$

Théorème 4.3.14. *Soient x^0 un plan optimal régulier du problème (4.41) et λ^0 le vecteur de Lagrange correspondant.*
Alors, la forme quadratique est définie non négative :

$$l^T \nabla_x^2 L(x^0, \lambda^0) l \geq 0,$$

sur l'ensemble des vecteurs l vérifiant le système suivant :

$$\begin{aligned} & l^T \nabla g_i(x^0) = 0, \quad i \in I_a^+(x^0), \\ & l^T \nabla g_i(x^0) \leq 0, \quad i \in I_a^0(x^0). \end{aligned} \tag{4.48}$$

c- Condition suffisante d'optimalité locale

Supposons que dans le problème (4.41), les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition 4.3.11. Un plan x^0 du problème est dit *pseudo-stationnaire*, s'il existe un $m-$vecteur λ^0 tel que

$$\nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0, \;\; \lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, \;\; \lambda_i^0 \geq 0, \;\; 1 \leq i \leq m.$$

Théorème 4.3.15. *Pour qu'un plan pseudo-stationnaire x^0 soit localement optimal dans le problème (4.41), il suffit que l'inégalité*

$$l^T \nabla_x^2 L(x^0, \lambda^0) l > 0, \tag{4.49}$$

soit vérifiée pour tout vecteur $l \neq 0$ vérifiant le système :

$$\begin{aligned} l^T \nabla g_i(x^0) &= 0, \quad i \in I_a^+(x^0), \\ l^T \nabla g_i(x^0) &\leq 0, \quad i \in I_a^0(x^0). \end{aligned} \tag{4.50}$$

4.3.6 Optimisation des fonctions non linéaires sous des contraintes générales non linéaires

Considérons le problème de minimisation d'une fonction non linéaire sous des contraintes non linéaires :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g_i(x) \leq 0, \; i \in I = \{1, 2, \cdots, m\}, \\ h_j(x) = 0, \; j = \overline{1, r}, \end{cases} \tag{4.51}$$

où les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$ et $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1, r}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

a- Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Théorème 4.3.16. *Si x^0 est un point de minimum local du problème (4.51) et les vecteurs*

$$\begin{cases} \nabla g_i(x^0), \; i \in I_a(x^0) = \{i \in I : g_i(x^0) = 0\}, \\ \nabla h_j(x^0), \; j = \overline{1, r}, \end{cases} \tag{4.52}$$

sont linéairement indépendants, alors il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla h_j(x^0) = 0, \\ \lambda_i g_i(x^0) = 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{4.53}$$

b- Condition suffisante d'optimalité

Théorème 4.3.17. *Supposons que dans le problème (4.51), les fonctions f, g_i, h_j sont de classe $\mathcal{C}^2$.*
Supposons que pour une solution admissible x^0, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^r \mu_j \nabla h_j(x^0) = 0, \\ \lambda_i g_i(x^0) = 0,\ i = \overline{1,m}, \end{cases}$$

et pour tout $d \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} d^T \nabla g_i(x^0) = 0,\ \lambda_i > 0, g_i(x^0) = 0, \\ \\ d^T \nabla g_i(x^0) \leq 0,\ i = \overline{1,m},\ \lambda_i = 0, g_i(x^0) = 0, \\ \\ d^T \nabla h_j(x^0) = 0,\ j = \overline{1,r}, \end{cases}$$

on a

$$d^T \nabla_x^2 L(x^0, \lambda, \mu) d > 0,$$

alors x^0 est un point de minimum local.

Exemple 4.3.8. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = -x_1^2 \frac{\sqrt{3}}{36} - \frac{x_2^2}{16} \to \min, \\ g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - l = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} \tag{4.54}$$

avec $l > 0$.
Posons

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2) = g(x_1, x_2); \\ &g_2(x_1, x_2) = -x_1; \\ &g_3(x_1, x_2) = -x_2; \\ &x = (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Le problème (4.54) devient :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g_1(x) = 0, \\ g_2(x) \leq 0, \\ g_3(x) \leq 0. \end{cases} \tag{4.55}$$

L'ensemble des plans du problème (4.55) est un ensemble compact et la fonction objectif est continue. Donc le problème (4.55) admet une solution optimale.
Calculons les vecteurs :

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux.
Considérons les contraintes du problème (4.55). On remarque aisément que deux contraintes seulement peuvent être simultanément actives :

$$\begin{array}{l} \text{Soit} \quad g_1(x) = 0, \;\; g_2(x) = 0. \\ \text{Soit} \quad g_1(x) = 0, \;\; g_3(x) = 0. \end{array}$$

Ainsi, chaque plan du problème (4.55) est régulier.
Construisons la fonction de Lagrange :

$$L(x, \lambda) = -x_1^2 \frac{\sqrt{3}}{36} - \frac{x_2^2}{16} + \lambda_1(x_1 + x_2 - l) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2.$$

La règle des multiplicateurs de Lagrange conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) = -x_1 \frac{\sqrt{3}}{18} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) = -x_2 \frac{1}{8} + \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x, \lambda) = x_1 + x_2 - l = 0, \tag{4.58}$$

$$-\lambda_2 x_1 = -\lambda_3 x_2 = 0, \tag{4.59}$$

$$\lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \tag{4.60}$$

De (4.59), on déduit

$$\lambda_2 x_1 = 0, \tag{4.61}$$

$$\lambda_3 x_2 = 0, \tag{4.62}$$

De (4.56) et (4.57), on a

$$\lambda_2 = -x_1 \tfrac{\sqrt{3}}{18} + \lambda_1, \tag{4.63}$$

$$\lambda_3 = -x_2 \tfrac{1}{8} + \lambda_1, \tag{4.64}$$

De (4.63) et (4.61), on déduit

$$(-x_1\frac{\sqrt{3}}{18}+\lambda_1)x_1=0. \tag{4.65}$$

De (4.58), on a

$$x_2=l-x_1. \tag{4.66}$$

De (4.64) et (4.66), on déduit

$$\lambda_3=-\frac{l}{8}+\frac{x_1}{8}+\lambda_1. \tag{4.67}$$

Les équations (4.62), (4.67) et (4.66) nous donnent

$$(-\frac{l}{8}+\frac{x_1}{8}+\lambda_1)(l-x_1)=0. \tag{4.68}$$

Ainsi, on a obtenu les deux équations (4.65) et (4.68) :

$$\begin{array}{c}(-x_1\frac{\sqrt{3}}{18}+\lambda_1)x_1=0,\\(-\frac{l}{8}+\frac{x_1}{8}+\lambda_1)(l-x_1)=0,\end{array}$$

qui donnent trois plans pseudo-stationnaires :

1. $x_1^*=0, x_2^*=l, \lambda_1^*=\frac{l}{8}, \lambda_2^*=\frac{l}{8}, \lambda_3^*=0.$
2. $x_1^*=l, x_2^*=0, \lambda_1^*=l\frac{\sqrt{3}}{18}, \lambda_2^*=0, \lambda_3^*=l\frac{\sqrt{3}}{18}.$
3. $x_1^*=\frac{9l}{9+4\sqrt{3}}, x_2^*=\frac{4l\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}, \lambda_1^*=\frac{l\sqrt{3}}{18+8\sqrt{3}}, \lambda_2^*=\lambda_3^*=0.$

La forme quadratique correspondante a la forme suivante

$$y^T\nabla_x^2L(x,\lambda)y=y^T\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{8} & 0\\ 0 & \frac{-1}{8}\end{pmatrix}y=-y_1^2\frac{\sqrt{3}}{8}-y_2^2\frac{1}{8}. \tag{4.69}$$

Considérons la relation (4.60) pour tout point pseudo-stationnaire :

Le premier plan : La troisième contrainte est passive.

$$\left\{\begin{array}{l} y^T\frac{\partial g_1}{\partial x}(x^*)=\begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=y_1+y_2=0\\ y^T\frac{\partial g_2}{\partial x}(x^*)=\begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-y_1=0\end{array}\right.$$

Ce qui nous donne

$$y_1=y_2=0.$$

Le deuxième plan : La deuxième contrainte est passive.

$$\begin{cases} y^T \frac{\partial g_1}{\partial x}(x^*) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 + y_2 = 0 \\ y^T \frac{\partial g_3}{\partial x}(x^*) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -y_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$y_1 = y_2 = 0.$$

Le troisième plan : La deuxième et la troisième contrainte sont passives.

$$y^T \frac{\partial g_1}{\partial x}(x^*) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 + y_2 = 0$$

D'où

$$y_1 = -y_2.$$

Au troisième plan pseudo-stationnaire, la forme quadratique (4.69) est définie négative. Donc d'après le théorème 4.3.15, ce plan ne peut être la solution du problème. La solution serait parmi les deux premiers plans.
Les deux premiers plans vérifient le théorème 4.3.14 mais ne vérifient pas le théorème 4.3.15.

La solution du problème sera trouvée en comparant les valeurs de la fonction f.
Au premier plan, $f(x^*) = -\frac{l^2}{16}$, au second plan $f(x^*) = -\frac{\sqrt{3}}{36}l^2$.
Donc le plan optimal est

$$\begin{pmatrix} x_1^* = 0, & x_2^* = l \end{pmatrix}.$$

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1. Considérons le problème de recherche du point de la parabole $y = \frac{1}{5}(x-1)^2$ le plus proche du point $(x, y) = (1, 2)$, dans le sens de norme Euclidienne.

1. Modéliser ce problème en un programme de minimisation avec contraintes ;
2. Trouver tous les points de Karush-Kuhn-Tucker (KKT),
3. Déterminer les points correspondant aux solutions optimales.

Exercice 4.4.2. Résoudre graphiquement le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\ f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2, \\ x_2 - x_1^3 - 1 \leq 0,\ \ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Peut-on résoudre ce problème par la règle des multiplicateurs de Lagrange ? Justifier. votre réponse.

Exercice 4.4.3. Considérer le problème de minimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min\ (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{8})^2, \\ 1 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ 1 - x_1 + x_2 \geq 0, \\ 1 + x_1 - x_2 \geq 0, \\ 1 + x_1 + x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement ce problème ;
2. Trouver le point de Karush-Kuhn-Tucker associé à ce problème ;
3. Dire si ce point de KKT correspond à une solution locale ou globale du problème, justifier.

Exercice 4.4.4. Considérer le problème de minimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min\ f(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_1 + x_3^2 - x_4 x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 + x_3^2 = 0. \end{cases}$$

1. Peut-on résoudre ce problème par la méthode d'élimination ?
2. Si oui, donner les étapes de l'algorithme. Sinon proposer un autre algorithme en donnant ses étapes.

Exercice 4.4.5. Considérons le problème de recherche du point de la parabole $y = \frac{1}{5}(x-1)^2$ le plus proche du point $(x, y) = (1, 2)$, dans le sens de norme Euclidienne.

1. Modéliser ce problème en un programme de minimisation avec contraintes ;
2. Trouver tous les points de Karush-Kuhn-Tucker (KKT),
3. Déterminer les points correspondant aux solutions optimales.

Exercice 4.4.6. Soit la fonction

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2.$$

1) Quel est le point minimum global ?

2) Résoudre graphiquement le problème (P) suivant :

$$f(x) \quad \longrightarrow \text{ min}$$

sous les contraintes

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

3) Formuler le système d'optimalité de KKT pour (P).

4) Calculer alors les valeurs des paramètres correspondant à la solution optimale de (P) trouvée précédemment.

Exercice 4.4.7. On considère le programme quadratique convexe suivant :

$$\begin{cases} F(x) = 6x_1 + 4x_2 - 13 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \text{max}, \\ \text{Sous} \quad x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

– Résoudre le problème graphiquement.
– Donner les conditions d'optimalité Karush-Kuhn-Tucker pour ce problème.
– Trouver le point de Karush-Kuhn-Tucker puis déduire le point optimum.

Exercice 4.4.8. On considère le programme quadratique convexe suivant :

$$\begin{cases} F(x) = (1/2)x^T Dx + c^T x \rightarrow \text{min}, \\ \text{Sous} \quad Ax \geq b, \\ \tilde{A}x = \tilde{b}, \end{cases}$$

où D est symétrique et semi-définie positive, $c \in \mathbb{R}^n$.

1. Donner les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) correspondantes au problème.
2. Donner la condition sous laquelle le point de KKT est unique.
3. Donner le problème dual de ce problème.
4. Donner le théorème fort de la dualité appliqué à ce problème.

Exercice 4.4.9. Dans cet exercice, on étudie une méthode de minimisation sans contraintes d'une fonction quadratique de la forme : $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$.

Définition 4.4.1. On dit que les vecteurs $d_i, i = 0, \dots, n-1$ sont conjugués par rapport à une matrice symétrique définie positive A si :$\forall i, j \in \{i = 0, \dots, n-1\}, i \neq j \Rightarrow d_i^T A d_j = 0$.

• On note $\{d_i, i = 0, \dots, n-1\}$ une famille quelconque de vecteurs conjugués par rapport à une matrice symétrique définie positive A de $\mathbb{R}^{n\times n}$. On se donne par ailleurs un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.
Soit un vecteur initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire.
A l'étape $(k+1)$, supposant construits les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_k$, ce qui sous-entend que les vecteurs $(Ax_l - b), l = 0, \dots, k-1$ sont tous différents de zéro, deux cas peuvent se présenter :

– ou bien $Ax_k - b = 0$ et l'algorithme est terminé,
– ou bien $Ax_k - b \neq 0$, auquel cas, on définit le nombre $\rho_k = \frac{d_k^T.(Ax_k - b)}{d_k^T A d_k}$, puis le vecteur $x_{k+1} = x_k - \rho_k.d_k$.

1. Justifier le choix de ρ_k.
2. En supposant que $Ax_k - b \neq 0, \forall k = 1, \dots, n-1$, exprimer x_l, pour $l = 1, \dots, n$ en fonction de $x_0, (\rho_i, i = 0, \dots, n-1)$ et $(d_i, i = 0, \dots, n-1)$.
3. Montrer que $d_k^T A x_k = d_k^T A x_0, \forall k = 0, \dots, n-1$.
4. – Calculer $d_k^T(Ax_n - b)$.
   – Déduire que x_n est la solution du système $Ax = b$.
   – Que peut-on dire sur la convergence de la méthode.
5. Appliquer cet algorithme pour résoudre le problème d'optimisation suivant :
$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{8})^2.$$
6. Que devient la solution optimale si la fonction objectif est soumise aux contraintes suivantes :
$$\begin{cases} 1 - x_1 - x_2 \geq 0, & 1 - x_1 + x_2 \geq 0, \\ 1 + x_1 - x_2 \geq 0, & 1 + x_1 + x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 4.4.10. Soit la fonction $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2$.

1) Quel est le point minimum global ?

2) Résoudre graphiquement le problème (P) suivant :
$$\begin{cases} f(x) \quad \longrightarrow \ \min, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3) Formuler le système d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker pour (P).

4) Calculer alors les valeurs des paramètres correspondant à la solution optimale de (P) trouvée précédemment.

Exercice 4.4.11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy.$$

On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \ et \ x + y \geq 1\}.$$

- Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
- En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où f atteint son minimum sur D.

Exercice 4.4.12. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et définie positive, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $d \in \mathbb{R}^n$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - d^T x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et l'ensemble des contraintes C

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0\}.$$

- Montrer que $C \neq \emptyset$ et qu'on peut écrire C comme un ensemble donné par $2m$ inégalités larges (à préciser).
- Montrer l'existence et l'unicité d'un point de minimum de f sur C ; dans la suite nous notons par x^* ce point de minimum.
- Montrer qu'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que le système suivant soit satisfait :

$$\begin{cases} Ax^* - d + B^T \lambda^* = 0 \\ \qquad Bx^* = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.4.13. Trouver le maximum de la fonction $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ contrainte au disque d'inéquation

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

Exercice 4.4.14. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 \\ (1 - x_1)^3 - x_2 \geq 0, \\ x_2 + 0.25x_1^2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

La solution optimale est $x^* = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.
Les conditions de KKT sont-elles satisfaites ?

Exercice 4.4.15.

1. Analyser le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 = 2. \end{cases} \tag{4.70}$$

   Trouver le point de KKT.

2. Analyser le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

   Comparer avec (4.70).

3. Le problème à analyser est :

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

   Résoudre ce problème.

Exercice 4.4.16. Maximiser la fonction numérique $f(x, y)$, sous la contrainte $g(x, y) = 0$, lorsque :
1/ $f(x, y) = xy, g(x, y) = x + 4y – 16$.
2/ $f(x, y) = x^2y, g(x, y) = 2x^2 + y^2 – 3$.

Exercice 4.4.17. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

Exercice 4.4.18. (Problème de Kepler)
Inscrire dans l'ellipsoïde

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

le parallélépipède de volume maximal dont les arêtes sont parallèles aux axes.

Exercice 4.4.19. (Problème de Tartaglia) Décomposer le nombre 8 en deux parties positives p_1, p_2 de sorte que le produit de leur produit par leur différence soit maximale.

Chapitre 5

Les méthodes numériques pour l'optimisation avec contraintes

5.1 Méthode par élimination

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ Ax - b = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A$ est une matrice $m \times n$ de rang plein, $b \in \mathbb{R}^m$.
On suppose, sans perte de généralité, que les m premières colonnes de A sont linéairement indépendantes.
On pose $A = \begin{pmatrix} B & R \end{pmatrix}$ avec B est une $m \times n$-matrice inversible, R est une $m \times (n-m)$-matrice, $x = \begin{pmatrix} x_B & x_R \end{pmatrix}^T$, avec $x_B \in \mathbb{R}^m$ et $x_R \in \mathbb{R}^{n-m}$.
Le problème (5.1) devient alors

$$\begin{cases} \min f(x_B, x_R), \\ Bx_B + Rx_R = b. \end{cases} \tag{5.2}$$

Pour satisfaire les contraintes de (5.2), il faut que

$$x_B = B^{-1}(b - Rx_R).$$

Le problème (5.2) devient alors le problème d'optimisation sans contraintes :

$$\begin{cases} \min F(B^{-1}(b - Rx_R), x_R), \\ x_R \in \mathbb{R}^{n-m}. \end{cases} \tag{5.3}$$

On a si (x_B^*, x_R^*) est solution optimale de (5.1), x_R^* est solution optimale de (5.3).

Exemple 5.1.1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \sin(x_1+x_2) + x_3^2 + \frac{1}{3}(x_4 + x_5^4 + \frac{x_6}{2}) \to \min, \\ 8x_1 - 6x_2 + x_3 + 9x_4 + 4x_5 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 + 6x_5 + 4x_6 = -4. \end{cases}$$

On réorganise la matrice A tel que

$$x^T = \begin{pmatrix} x_3 & x_6 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T.$$

$$A = \begin{pmatrix} B & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est diagonale,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1}(b - Rx_R) = \begin{pmatrix} 6 - 8x_1 + 6x_2 - 9x_4 - 4x_5 \\ -1 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \end{pmatrix}$$

En remplaçant x_3 et x_6 dans la fonction objectif, on obtient le problème sans contraintes suivant :

$$\begin{array}{l} \sin(x_1+x_2) + (6 - 8x_1 + 6x_2 - 9x_4 - 4x_5)^2 + \frac{1}{3} \\ \left[x_4 + x_5^4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4 + \frac{3}{4}x_5\right)\right] \to \min, \\ (x_1, x_2, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^4. \end{array}$$

Remarque 5.1.1. On peut choisir autrement B et R mais il faut veiller à choisir B et R de telle sorte à faciliter les calculs et B inversible.

Exemple 5.1.2. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2), x_3, x_4) \to \min, \\ x_1 + x_3^2 - x_4 x_3 = 0, \\ -x_2 + x_4 + x_3^2 = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Les contraintes sont non linéaires.

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3^2 + x_4 x_3 \\ x_2 &= x_4 + x_3^2. \end{aligned}$$

On définit

$$h(x_4, x_3) = f(-x_3^2 + x_4 x_3, x_4 + x_3^2, x_3, x_4).$$

Le problème (5.4) devient un problème sans contraintes comme suit :

$$\begin{aligned} &\min f(-x_3^2 + x_4 x_3, x_4 + x_3^2, x_3, x_4). \\ &x_4, x_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 5.1.2. Le danger de cette méthode d'élimination est illustré dans l'exemple suivant appelé problème de Fletcher.

Exemple 5.1.3. Considérons le problème suivant :

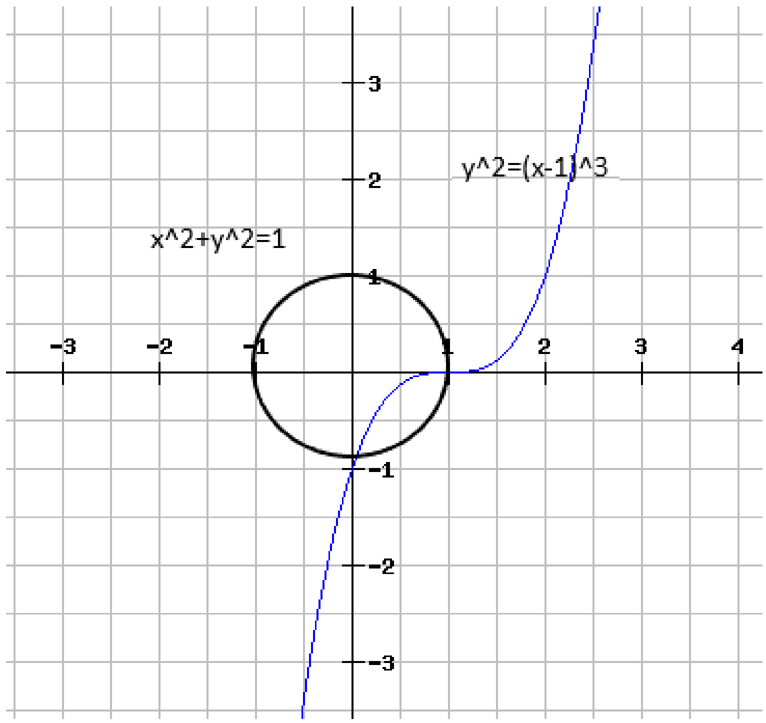
$$\begin{cases} \min x^2 + y^2 \\ (x-1)^3 = y^2 \end{cases}$$

Le graphe montre que la solution optimale est $(1, 0)$.
On va essayer de résoudre le problème par élimination. On otient

$$h(x) = x^2 + (x-1)^3.$$

On voit bien que $h(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$. On peut déduire que le problème n'admet pas de solution.
Le problème, par cette approche, est qu'on ignore que $(x-1)^3 = y^2$ impose que $x \geq 1$. Cette contrainte doit tenue en considération.

Remarque 5.1.3. Cet exemple montre la limite de la méthode dans le cas de contraintes non linéaires. En général, pour utiliser cette méthode, on doit linéariser d'abord les contraintes non linéaires.



5.2 Méthodes de pénalisation

5.2.1 Principe de la méthode

Le principe est de remplacer la fonction objectif originale du problème par une fonction de pénalité. La fonction de pénalité est composée de :

- la fonction objectif originale du problème d'optimisation avec contraintes, et
- un terme supplémentaire pour chaque contrainte.
  Ce terme est positif si le point courant x viole les contraintes et nul dans le cas contraire.

Donc on remplace le problème avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ x \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.5}$$

par un problème sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} f(x) + \frac{1}{\mu}\alpha(x) \to \min, \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.6}$$

où $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de pénalisation des contraintes et $\mu > 0$.
Le but est de trouver des fonctions α telles que les problèmes (5.5) et (5.6) soient équivalents.
Nous supposons que α vérifie les propriétés suivantes :

1. La fonction α est continue sur $\mathbb{R}^n$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(x) \geq 0$.
3. $\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}$.

Nous donnons quelques exemples de pénalisation pour différentes contraintes :

1. Pour une contrainte $x \geq 0$, on a la fonction $\alpha(x) = \|x^-\|^2$
2. Pour une contrainte $h(x) = 0$, on a la fonction $\alpha(x) = \|h(x)\|^2$
3. Pour une contrainte $g(x) \geq 0$, on a la fonction $\alpha(x) = \|g(x)^-\|^2$

où $\| - \|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et $x^- = \max(-x, 0)$.

5.2.2 La méthode de pénalisation dans le cas de contraintes égalités

Dans le cas de problème d'optimisation avec contraintes de type égalité, la fonction pénalité utilisée est la fonction quadratique.
Le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m. \end{cases} \tag{5.7}$$

La fonction quadratique de pénalisation $q(x, \mu)$ pour (5.7) est :

$$q(x, \mu) = f(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) \tag{5.8}$$

où $\mu > 0$ est le paramètre de pénalisation.
En tendant μ vers zéro, nous pénalisons les violations des contraintes.
Le principe est donc : on considère une séquence de valeurs de $\{\mu_k\}$ avec $\mu_k \to 0, k \to +\infty$ et on calcule le minimum x_k de $q(x, \mu_k)$ pour chaque k.

Exemple 5.2.1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 2. \end{cases}$$

La fonction de pénalisation quadratique associée est :

$$q(x,\mu) = x_1 + x_2 + \frac{1}{2\mu}(x_1^2 + x_2^2 - 2)^2.$$

Pour $\mu = 1$, on trouve le minimum de q est $(-1.1; -1.1)$;

Pour $\mu = 0.1$, on trouve le minimum de q est $(-1; -1)$;

La solution du problème est donc $(-1; -1)$.

5.2.3 La méthode de pénalisation dans le cas de contraintes mixtes

Considérons le problème d'optimisation avec contraintes mixtes suivant :

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m, \\ h_j(x) \geq 0, 1 \leq j \leq l. \end{cases} \tag{5.9}$$

On définit la fonction q de pénalisation comme suit :

$$q(x,\mu) = f(x) + \frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) + \frac{1}{2\mu}\sum_{j=1}^{l}(h_j^-(x))^2, \tag{5.10}$$

où $y^- = \max(-y, 0)$.

5.2.4 Algorithme de la méthode de pénalisation quadratique

Soient $\mu_0 > 0, \epsilon_0 > 0$, et le point initial x_0^s donnés.

Tant que $\|\nabla q(x,\mu_k)\| > \epsilon_k$ faire

- Trouver le minimum approximatif de $q(.,\mu_k)$, en partant de x_k^s ; soit le minimum x_k ;
- Choisir le nouveau paramètre de pénalisation $\mu_{k+1} \in [0, \mu_k]$.

– Choisir le nouveau point x_{k+1}^s
Fin Tant que

Théorème 5.2.1. *Supposons que chaque solution x_k est un minimum global exact de $q(x, \mu_k)$ dans l'algorithme précédent et que $\mu_k \to 0$. Alors, chaque point x^* limite de la séquence $\{x_k\}$ est une solution du problème (5.7).*

Démonstration. Soit $\overline{x}$ une solution globale du problème (5.7), alors

$$f(\overline{x}) \leq f(x), \ \ \forall x : g_i(x) = 0, \ \ 1 \leq i \leq m.$$

Puisque x_k minimise $q(., \mu_k)$ pour chaque k, alors on a

$$q(x_k, \mu_k) \leq q(\overline{x}, \mu_k),$$

d'où

$$f(x_k) + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x_k) \leq f(\overline{x}) + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(\overline{x}) = f(\overline{x}) \tag{5.11}$$

alors

$$\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x_k) \leq 2\mu_k(f(\overline{x}) - f(x_k)). \tag{5.12}$$

Supposons que x^* est un point limite de $\{x_k\}$, donc il existe une sous-séquence $\mathcal{K}$ telle que

$$\lim_{k \in \mathcal{K}, k \to +\infty} x_k = x^*.$$

En passant aux limites dans (5.12), $k \to +\infty, k \in \mathcal{K}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x^*) = \lim_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x_k) \leq \lim_{k \in \mathcal{K}} 2\mu_k(f(\overline{x}) - f(x_k)) = 0;$$

d'où, $g_i(x^*) = 0, \ \ 1 \leq i \leq m$. x^* est alors réalisable.
D'un autre côté, ayant $k \to \infty, k \in \mathcal{K}$ dans l'équation (5.11), μ_k non négative et $g_i^2(x_k), \ \ 1 \leq i \leq m$ non négatives, on a

$$f(x^*) \leq f(x^*) + \lim_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x_k) \leq f(\overline{x}).$$

Ayant x^* réalisable et $f(x^*) \leq f(\overline{x})$, alors on conclut que x^* est un minimum global. □

Théorème 5.2.2. *Si les ϵ_k de l'algorithme précédent vérifient*

$$\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$$

et les paramètres de pénalisation vérifient $\mu_k \to 0$, alors tous les points limites x^* de la séquence $\{x_k\}$ pour lesquelles les gradients $\nabla g_i(x^*)$ sont linéairement indépendants, on a x^* est un point de Karush-Kuhn-Tucker du problème (5.7). Pour ces points, on a une infinité de sous-séquence $\mathcal{K}$ tel que

$$\begin{aligned} &\lim_{k\in\mathcal{K}} x_k = x^*, \\ &\lim_{k\in\mathcal{K}} -g_i(x_k)/\mu_k = \lambda_i^*, 1 \leq i \leq m, \end{aligned} \tag{5.13}$$

où λ^* est le vecteur multiplicateur qui satisfait les conditions de KKT.

Démonstration. Soit $q(x_k, \mu_k) = f(x_k) + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i=1}^m g_i^2(x_k)$, d'où

$$\nabla_x q(x_k, \mu_k) = \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \frac{g_i(x_k)}{\mu_k} \nabla g_i(x_k). \tag{5.14}$$

En appliquant le critère d'arrêt de l'algorithme, on obtient :

$$\|\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \frac{g_i(x_k)}{\mu_k} \nabla g_i(x_k)\| \leq \epsilon_k \tag{5.15}$$

d'où

$$\|\sum_{i=1}^m g_i(x_k)\nabla g_i(x_k)\| \leq \mu_k(\epsilon_k + \|\nabla f(x_k)\|) \tag{5.16}$$

Quand $k \to \infty$ pour $k \in \mathcal{K}$, on a

$$\epsilon_k + \|\nabla f(x_k)\| \to \|\nabla f(x^*)\|$$

d'où, comme $\mu_k \to 0$, on a

$$\mu_k(\epsilon_k + \|\nabla f(x_k)\|) \to 0.$$

On obtient alors

$$\sum_{i=1}^m g_i(x^*)\nabla g_i(x^*) = 0. \tag{5.17}$$

Par hypothèse, on a $\nabla g_i(x^*),\ 1 \leq i \leq m$ linéairement indépendants et $g_i(x^*) = 0,\ 1 \leq i \leq m$, d'où x^* est réalisable. On va maintenant démontrer la condition de KKT et montrer que la limite (5.13) du théorème 5.2.2 se produit.
On dénote la matrice des gradients des contraintes par $A(x)$,

$$A(x) = (\nabla g_i(x))_{1 \leq i \leq m} \tag{5.18}$$

et

$$\lambda_k = -\frac{g(x_k)}{\mu_k},$$

on a alors comme dans (5.15) :

$$A(x_k)^T \lambda_k = (\nabla g_i(x)) \left(\frac{-g_i(x_k)}{\mu_k} \right)_{1 \leq i \leq m} = \nabla f(x_k) - \nabla_x q(x_k, \mu) \tag{5.19}$$

$$\|\nabla_x q(x_k, \mu)\| \leq \epsilon_k.$$

Si on multiplie l'équation (5.19) par $A(x_k)$, on a

$$\lambda_k = \left(A(x_k) A^T(x_k) \right)^{-1} A(x_k) \left(\nabla f(x_k) - \nabla_x q(x_k, \mu) \right).$$

D'où

$$\lim_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k = \lambda^* = \left(A(x^*) A^T(x^*) \right)^{-1} A(x^*) \nabla f(x^*).$$

Conformément à l'équation (5.15), on a

$$\nabla f(x^*) - A^T(x^*) \lambda^* = 0,$$

d'où λ^* satisfait les conditions de KKT. Donc x^* est un point de KKT. □

5.2.5 Quelques exemples corrigés

Exemple 5.2.2. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min x, \\ x^2 \geq 0, \\ x + 1 \geq 0, \end{cases}$$

pour lequel $x^* = -1$ est la solution. Ecrire la fonction de pénalisation $P(x, \mu)$ associée à ce problème et trouver les minimums locaux.

Montrer que pour chaque séquence $\{\mu_k\}_k$ telle que $\mu_k \to 0$, il existe une séquence de minimums locaux $x(\mu_k)$ qui convergent vers -1.

Solution :
On définit la fonction de pénalisation $P(x,\mu)$ comme suit :

$$P(x,\mu) = x + \frac{1}{2\mu}((x^2)^-)^2 + \frac{1}{2\mu}((x+1)^-)^2$$

avec

$$\begin{array}{l} (x^2)^- = \max(0, -x^2) = 0, \forall x, \\ (x+1)^- = \max(0, -1-x) \end{array}$$

- Si $x \geq -1$, alors $(x+1)^- = 0$. On a alors $P(x,\mu) = x$.
- Si $x < -1$, alors $(x+1)^- = -x-1$. On a alors $P(x,\mu) = x + \frac{1}{2\mu}(x+1)^2$.

Dans les deux cas, on trouve que $\min P(x,\mu)$ est atteint pour $x \to -1$.

Exemple 5.2.3. Vérifier que les conditions de KKT du problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ l \leq x \leq u, \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

sont équivalentes à la condition :

$$P_{[l,u]}\nabla f(x) = 0,$$

où $P_{[l,u]}$ est l'opérateur de projection sur $[l,u]$.
Solution :
Rappelons qu'on définit $P_{[l,u]g}$, la projection du vecteur $g \in \mathbb{R}^n$ sur $[l,u]$, comme suit :

$$(P_{[l,u]})g_i = \begin{cases} \min(0, g_i) & \text{si} & x_i = l_i, \\ g_i & \text{si} & x_i \in (l_i, u_i), \\ \max(0, g_i) & \text{si} & x_i = u_i. \end{cases}$$

5.3 Méthode du gradient projeté

Dans le cas d'optimisation sans contraintes, l'algorithme du gradient s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{un point initial donné}, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho^{(k)} d^{(k)},\ d^{(k)} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \rho^{(k)} \in \mathbb{R}^{+*}, \end{cases}$$

où $\rho^{(k)}$ et $d^{(k)}$ sont choisis de telle sorte que :

$$f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}).$$

Dans le cas avec contraintes, on ne peut pas être sûr que $x^{(k)}$ reste sur l'ensemble des contraintes $\mathcal{C}$. Il est donc nécessaire de se ramener sur $\mathcal{C}$, et ceci grâce à une projection sur $\mathcal{C}$, l'opérateur associé étant noté $\Pi_{\mathcal{C}}$ où $\mathcal{C}$ est convexe fermé et non vide :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: \ & \mathbb{R}^n \to \mathcal{C} \\ & x \to \Pi_{\mathcal{C}}(x). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'algorithme du gradient projeté, qui est identique à celui du gradient à la projection près :

Initialisation :
$k = 0$, choix de $x^{(0)}$ et $\epsilon > 0$.
Itération k :
Tant que le critère d'arrêt est non satisfait :

$$\begin{aligned} &\widehat{x}^{(k+1)} = x^{(k)} - \rho^{(k)} \nabla f(x^{(k)}) \\ &x^{(k+1)} = \Pi_{\mathcal{C}} \widehat{x}^{(k+1)} \\ &k = k+1 \end{aligned}$$

Fin tant que

Théorème 5.3.1 (Convergence)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est elliptique de dérivée lipschitzienne. Alors, si on choisit le pas $\rho^{(k)}$ dans un intervalle $[\beta_1, \beta_2]$ tel que $0 < \beta_1 < \beta_2 < \frac{2\alpha}{M^2}$ (où α et M sont respectivement les constantes d'elliplicité*

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x-y) \geq \alpha \|x-y\|^2)$$

et d'inégalité lipschitzienne

$$(\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x-y\|).$$

La suite $(x^{(k)})_k$ définie par la méthode du gradient projeté converge vers la solution du problème.

Exemple 5.3.1. – Pour des contraintes de type $x \geq 0$, l'opérateur de projection est

$$\Pi_{\mathcal{C}}(x) = \max(x_i, 0)_{i=1,\cdots,m}.$$

– Pour des contraintes de type $a \leq x \leq b$, l'opérateur de projection est

$$\Pi_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} b, & \text{si} \quad x > b, \\ x, & \text{si} \quad a \leq x \leq b, \\ a, & \text{si} \quad x < a. \end{cases}$$

5.4 Méthode Lagrange-Newton pour des contraintes égalité

5.4.1 Cas d'un problème quadratique avec des contraintes affines égalités

Considérons un problème quadratique avec contraintes affines de type égalité :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} x^T Q x - c^T x, \\ Ax = b \end{cases}$$

où Q est une matrice carrée de $\mathbb{R}$ d'ordre $n \times n$, c un vecteur de $\mathbb{R}^n$, A une matrice de $\mathbb{R}$ d'ordre $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.
Les conditions de KKT de premier ordre nous donnent

$$\begin{cases} \nabla_x (\frac{1}{2} x^T Q x - c^T x + \lambda^T (Ax - b)) = 0, \\ Ax = b, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes $Ax = b$.
Par conséquent, le couple optimal (x^*, λ^*) est la solution du système :

$$\begin{cases} Qx^* - c + A^T \lambda^* = 0, \\ Ax^* = b. \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}.$$

Si la matrice $\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, le système admet une solution que l'on peut calculer par une des méthodes de résolution des systèmes linéaires.

5.4.2 Cas d'un problème non quadratique

Considérons un problème non quadratique suivant :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont de classe $\mathcal{C}^2$.
Les conditions de premier ordre de KKT s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = 0, \\ g(x) = 0, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ est le lagrangien du problème. On résoud ce système d'équations non linéaires par la méthode de Newton. C'est l'algorithme de Lagrange-Newton énoncé comme suit :

- Initialisation : $k = 1$, Choix de $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
- Itération k
  - Tant que le critère d'arrêt est non satisfait, faire
    Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{x,x} L(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) & \nabla_x g(x^{(k)})^T \\ \nabla_x g(x^{(k)}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(x^{(k)}, \lambda^{(k)})^T \\ g(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

    où $\nabla^2_{x,x} L(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$ est le hessien de L par rapport à x.
    Poser

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$$
$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + y^{(k)}$$
$$k = k + 1.$$

  - Fin tant que

5.5 Méthode de Newton projetée

5.5.1 Cas de contraintes de type $x \geq 0$

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

où f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Si $H^{(k)}$ désigne la matrice hessienne de f en $x^{(k)}$, une itération de la méthode de Newton est de la forme suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [H^{(k)}]^{-1}(\nabla f(x^{(k)}).$$

On peut affiner en introduisant un pas $\alpha^{(k)} > 0$, ce qui donne :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)}[H^{(k)}]^{-1}(\nabla f(x^{(k)}).$$

Si on projete sur l'ensemble des contraintes, on obtient :

$$\left[x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)}[H^{(k)}]^{-1}(\nabla f(x^{(k)})\right]^{+}$$

où $x^{+} = \max(x_i, 0)_{1 \leq i \leq n}$.
On a le théorème de convergence suivant :

Théorème 5.5.1. *On suppose que f est convexe et est de classe $\mathcal{C}^2$ et que le problème (5.20) a une solution unique x^* vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) > 0, \forall i \in I_a(x^*)$, ($I_a(x^*)$ est l'ensemble des indices actifs). On suppose de plus que l'on peut trouver m_1 et m_2 deux réels strictement positifs tels que :*

$$m_1\|z\|^2 \leq z^T \nabla^2 f(x) z \leq m_2 \|z\|^2,$$

dans chacun des cas suivants :
- *pour tout $z \in \left\{x / f(x) \leq f(x^{(0)})\right\}$, d'une part ;*
- *x dans une boule centrée en x^* et $z \neq 0$ tel que $z_i = 0$ pour $i \in I_a(x^*)$, d'autre part.*

Alors la suite $x^{(k)}$ engendrée par l'algorithme converge vers x^* et le taux de convergence est superlinéaire. On peut alors généraliser l'algorithme précédent au problème à contraintes bornées.

5.5.2 Cas de contraintes de bornes

Dans ce cas, le problème se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right. \tag{5.21}$$

Nous appliquons les itérés de la méthode de Newton projetée comme dans le cas du problème (5.20), en utilisant la projection suivante :

$$\left[x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)}[H^{(k)}]^{-1}(\nabla f(x^{(k)})\right]^{\mathrm{Proj}}$$

où pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $z^{\text{Proj}} = \Pi_C(z)$ désigne le vecteur :

$$[z]_i^{\text{Proj}} = \begin{cases} b_i & \text{si} \quad b_i \leq z_i, \\ z_i & \text{si} \quad a_i \leq z_i \leq b_i, \\ a_i & \text{si} \quad z_i \leq a_i. \end{cases}$$

5.6 Méthode d'Uzawa

L'idée générale de la méthode est de considérer le Lagrangien L au lieu de la fonction f. Ce choix est motivé par, au moins, deux raisons :

- La fonction de Lagrange L englobe la fonction f et les cotraintes g et h ; donc L représente bien le problème ;
- Ensuite, nous avons vu qu'une condition nécessaire du premier ordre pour que x^* soit un minimum de f sous les contraintes est que x^* (associé aux multiplicateurs de Lagrange) soit un point critique de L.

Notre problème à considérer est :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ h_j(x) = 0 \quad 1 \leq j \leq l, \\ g_i(x) \leq 0 \quad 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Le Lagrangien du problème est :

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Définition 5.6.1. On appelle point-selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$ tout triplet $(x^*, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$ vérifiant l'équation suivante :

$$L(x^*, \mu, \lambda) \leq L(x^*, \mu^*, \lambda^*) \leq L(x, \mu^*, \lambda^*), \ \forall (x, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 5.6.1. *Supposons que f, h et g soient des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et que le triplet $(x^*, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$ soit un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$. Alors, ce triplet vérifie les conditions de KKT.*

Théorème 5.6.2. *Supposons que f, h et g soient des fonctions convexes et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, le triplet $(x^*, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$ est un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$ si et seulement s'il vérifie les conditions de KKT.*

L'algorithme d'Uzawa se base sur ces théorèmes. Il consiste à chercher un triplet $(x^*, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$ vérifiant les conditions de KKT de la façon suivante :

1. Pour (μ^*, λ^*) fixé dans $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$, nous allons chercher le minimum sur $\mathbb{R}^n$ de la fonction définie ainsi :
$$x \to L(x, \mu^*, \lambda^*).$$
2. Pour x^* fixé sur $\mathbb{R}^n$, on cherche le maximum sur $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$ de la fonction définie ainsi :
$$(\mu, \lambda) \to L(x^*, \mu, \lambda).$$

En faisant ces deux calculs simultanément, on obtient l'algorithme d'Uzawa suivant :

Initialisation – Poser $k = 0$;
– Choisir $\mu^{(0)} \in \mathbb{R}^l$ et $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^{+m}$

Itération k : Tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait, faire

a) Calculer $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ solution du problème :
$$\begin{cases} \min L(x, \mu^{(k)}, \lambda^{(k)}) \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

b) Calculer $\mu^{(k+1)}$ et $\lambda^{(k+1)}$ comme suit :
$$\begin{cases} \mu_j^{(k+1)} = \mu_j^{(k)} + \rho h_j(x^{(k)}), & 1 \leq j \leq l, \\ \lambda_i^{(k+1)} = \max(0, \lambda_i^{(k)} + \rho g_i(x^{(k)})), & 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

où $\rho > 0$ est un réel fixé.

Théorème 5.6.3 (Convergence). *On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et elliptique, que h est affine, g est convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et que g et h sont lipschitziennes. On suppose de plus que la fonction de Lagrange L possède un point-selle (x^*, μ^*, λ^*) sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{+m}$. Alors, il existe ρ_1, ρ_2 avec $0 < \rho_1 < \rho_2$ tels que $\forall \rho \in [\rho_1, \rho_2]$ la suite $(x^{(k)})_{k>0}$ générée par l'algorithme converge vers x^*.*

5.7 Exercices

Exercice 5.7.1. Expliquer si les problèmes suivants admettent des solutions optimales :

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 = 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq 1. \end{cases} \tag{5.22}$$

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases} \tag{5.23}$$

$$\begin{cases} \min x_1 x_2, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases} \tag{5.24}$$

Exercice 5.7.2. Montrer que dans le problème de Fletcher, si on élimine x en termes de y, alors la bonne solution du problème est obtenue en résolvant le problème sans contraintes.

Exercice 5.7.3. Considérons le problème de recherche du point de la parabole $y = \frac{1}{5}(x-1)^2$ le plus proche du point $(x, y) = (1, 2)$, dans le sens de norme Euclidienne.

1. Modéliser ce problème en un programme de minimisation avec contraintes ;
2. Trouver tous les points de Karush-Kuhn-Tucker (KKT),
3. Déterminer les points correspondant aux solutions optimales.

Exercice 5.7.4. Le problème de recherche de la plus courte distance entre un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'hyperplan d'équation $\{x \backslash Ax = b\}$ où les lignes de la matrice A sont linéairement indépendantes et b, un vecteur colonne de taille n. Ce problème peut s'écrire comme un problème de programmation quadratique :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}(x - x_0)^T (x - x_0), \\ Ax = b. \end{cases}$$

– Montrer que le multiplicateur de Lagrange, à l'optimum est :

$$\lambda^* = (AA^T)^{-1}(Ax_0 - b).$$

– Montrer que la solution optimale est :

$$x^* = x_0 + A^T(AA^T)^{-1}(b - Ax_0).$$

– Montrer que, dans le cas où A est un vecteur ligne, la plus petite distance entre x_0 et l'hyperplan vaut :

$$d = \frac{\|b - Ax_0\|}{\|A\|}.$$

Exercice 5.7.5. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{1+x^2}, \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Ecrire la fonction de pénalisation $P(x, \mu)$ associée à ce problème, puis montrer que $P(x, \mu)$ est non bornée pour toute valeur positive de μ.

Exercice 5.7.6. On considère la fonctionnelle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2+3xy+2y^2$. On appelle Q le quadrant défini par : $Q = \left\{x \leq -\frac{1}{2}, y \leq -\frac{1}{2}\right\}$.

– Donner les étapes de l'algorithme du gradient projeté appliquées au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x, y), \\ (x, y) \in Q. \end{cases}$$

– Donner les étapes de l'algorithme de Newton projeté appliquées à ce problème.
– Donner les étapes de l'algorithme Uzawa appliquées à ce problème.

Exercice 5.7.7. En utilisant la méthode d'élimination, résoudre les problèmes suivants :
– $\min f(x, y) = xy$, sous $x - y = 1$,
– $\min f(x, y) = x^2 + y^2$, sous $x + y = 2$,
– $\min f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 1)^2$, sous $2x - y = 1$.

Exercice 5.7.8. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{1+x^2}, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Ecrire la fonction de pénalisation $Q(x, \mu)$ associée à ce problème, puis montrer que $Q(x, \mu)$ est non bornée pour toute valeur positive de μ.

Exercice 5.7.9. Considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min x, \\ x^2 \geq 0, \\ x + 1 \geq 0, \end{cases}$$

pour lequel $x^* = -1$ est la solution.
Ecrire la fonction de pénalisation $Q(x, \mu)$ associée à ce problème et trouver les minimums locaux. Montrer que pour chaque séquence $\{\mu_k\}_k$ telle que $\mu_k \to 0$, il existe une séquence de minimums locaux $x(\mu_k)$ qui converge vers 0.

Exercice 5.7.10. Vérifier que les conditions de KKT du problème suivant :

$$\begin{cases} \min \ f(x), \\ l \geq x \leq u, \end{cases}$$

sont équivalentes à la condition :

$$P_{[l,u]}.\nabla f(x) = 0,$$

où $P_{[l,u]}$ est l'opérateur de projetion sur $[l, u]$. Indication : L'opérateur de projection du vecteur $g \in \mathbb{R}^n$ sur $[l, u]$ est défini ainsi :

$$(P_{[l,u]}g)_i = \begin{cases} \min(0, g_i), & \text{si} & x_i = l_i, \\ g_i, & \text{si} & x_i \in [l_i, u_i], \\ \max(0, g_i), & \text{si} & x_i = u_i, \end{cases}$$

Exercice 5.7.11. Soit (P) le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \ f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - x, \\ g_1(x, y) = x + y \leq 0, \\ g_2(x, y) = 1 - x \leq 0, \end{cases}$$

1. Montrer que le point $(1, -1)$ est régulier et qu'il vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
2. Pour $k \geq 1$ entier et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction :

$$f_k(x, y) = f(x, y) + k[(g_1^-(x, y))^2 + (g_2^-(x, y))^2]$$

où $g_1^-(x, y) = \max(0, x + y)$ et $g_2^-(x, y) = \max(0, 1 - x)$.
Soit le problème (P_k) défini : $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_k(x, y)$.
a) En supposant que $x + y > 0$ et $1 - x > 0$, donner (x_k, y_k) la solution optimale de (P_k) en fonction de k. Vérifier que pour tout $k \geq 1$, on a $x_k + y_k > 0$ et $1 - x_k > 0$, puis calculer la limite de la suite (x_k, y_k) lorsque k tend vers l'infini.

b) Montrer que $(g_1^-(x,y))^2$ et $(g_2^-)^2$ sont convexes. En déduire que $f_k(x,y)$ est strictement convexe et que la solution (x_k,y_k) trouvée en a) est l'unique solution de (P_k). En déduire une solution optimale de (P).
– Calculer les limites des suites $2kg_1(x_k,y_k)$ et $2kg_2(x_k,y_k)$. Quelles valeurs retrouve-t-on ?

Indication : Faire attention au calcul de $\nabla(g_1^-(x,y))^2$ et de $\nabla(g_2^-(x,y))^2$

Exercice 5.7.12. On considère le problème suivant où $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \min f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \end{cases}$$

– Exprimer le problème graphiquement.
– Donner les conditions de Karush-Kuhn-Tucker et les résoudre.
– Sont-elles suffisantes pour l'optimalité ? Justifier votre réponse.
– En déduire la solution du problème.
– Résoudre le problème par la méthode de pénalisation en prenant $\mu_k = 1/2k$.
– Retrouver le multiplicateur de Lagrange des conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Exercice 5.7.13. On considère le problème suivant où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \min\ f(x,y) = y, \\ x^2 + y^2 \leq 1, \end{cases}$$

1. Montrer que le point $(0,1)$ est régulier et qu'il vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
2. Pour $k \geq 1$ entier et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction :

$$f_k(x,y) = f(x,y) + k(g^-(x,y))^2$$

où $g^-(x,y) = \max(0, x^2+y^2-1)$.
Soit le problème (P_k) défini : $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_k(x,y)$.
a) Donner (x_k,y_k) la solution optimale de (P_k) en fonction de k. Vérifier que pour tout $k \geq 1$, on a $x_k^2 + y_k^2 > 1$, puis calculer la limite de la suite (x_k,y_k) lorsque k tend vers l'infini.
b) Montrer que $(g^-(x,y))^2$ est convexe. En déduire que $f_k(x,y)$ est strictement convexe et que la solution (x_k,y_k) trouvée en a) est l'unique solution de (P_k). En déduire une solution optimale de (P).
– Calculer la limite de la suite $2kg(x_k,y_k)$. Quelle valeur retrouve-t-on ?

Bibliographie

[1] S. Achmanov. *Programmation linéaire*. Edition Mir, Moscou, 1984.

[2] H. Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*. Dunod Paris, 2001.

[3] Leonard D. Berkovotz. *Convexity and optimization in Rn*. JOHN WILEY and SONS, INC., 2002.

[4] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod Paris, 1998.

[5] G.B. Dantzig. *Applications et prolongements de la programmation linéaire*. Dunod, Paris, 1966.

[6] F. Margot. *Composition de polytopes combinatoires : une approche par projection*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995.

[7] M. Minoux. *Programmation mathématique :Théorie et algorithmes, Tome 1, 2*. Collection technique et scientifique des télécommunications, 1983.

[8] S. Radjef. *Cours Optimisation sans contraintes, L3 Mathématiques*. Université USTO MB, 2006.

[9] S. Radjef. *Cours Optimisation avec contraintes, L3 Mathématiques*. Université USTO MB, 2009.

[10] S. Radjef. *Cours Optimisation convexe, Master 1 Mathématiques*. Université USTO MB, 2010.

[11] R.T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton University Press, 1970.

[12] D. De Werra and al. *Recherche opérationnelle pour ingénieur I*. Press Polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2003.