

$\emptyset$  $\sin$ 

$$x * y = y * x$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \geq 0, |x| < \varepsilon$$

 $A \cap B$  $\pi$ 

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

 $P \wedge Q$ 

$$P \Rightarrow Q$$

 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 

$$A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$$

 $\ker f$ 

$$f \circ g$$

# Cours d'Algèbre I et II avec Exercices

Dr Imene Medjadj

2018/2019



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف  
كلية الرياضيات و الاعلام الالي

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF  
Faculté des Mathématiques et Informatique

## Cours d'Algèbre I et II

### Avec Exercices Corrigés

Présenté par : Medjadj Imene.

-U.S.T.O. 2017-

Cours d'Algèbre I et II avec Exercices  
Corrigés

Imene Medjadj



## Table des matières

Chapitre 1. Introduction	5
Chapitre 2. Élément de logique et méthodes de raisonnement avec Exercices Corrigés	7
1. Règles de logique formelle	7
2. Méthodes de raisonnement	12
3. Exercices Corrigés	13
Chapitre 3. Théorie des ensembles avec Exercices Corrigés	19
1. Notion d'ensemble et propriétés	19
2. Applications et relations d'équivalences	22
3. Relations Binaires dans un ensemble	26
4. Exercices Corrigés	28
Chapitre 4. Structures Algébriques avec Exercices Corrigés	35
1. Lois De Composition Internes	35
2. Groupes	36
3. Anneaux	36
4. Corps	36
5. Exercices Corrigés	37
Chapitre 5. Notion de $\mathbb{K}$ – Espaces vectoriels( $\mathbb{K}$ étant un Corps Commutatif) avec Exercices Corrigés	43
1. Espace vectoriel et sous espace vectoriel	43
2. Somme de deux sous espaces vectoriels	45
3. Somme directe de deux sous espaces vectoriels	45
4. Familles génératrices, familles libres et bases	45
5. Notion d'Application Linéaire	48
6. Exercices Corrigés	51
Chapitre 6. Notion de Matrice Associée à une Application Linéaire et Calcul Algébrique sur les Matrices avec Exercices Corrigés	57
1. Espace vectoriel des matrices	57
2. Produit de deux matrices	59
3. Matrices carrées	60
4. Les Déterminants	61
5. Relations entre une application linéaire et sa matrice Associée	65
6. Matrices et Changements de Bases	68

7. Diagonalisation	70
8. Systèmes d'équations linéaires	73
9. Exercices Corrigés	77
Bibliographie	83

## CHAPITRE 1

### **Introduction**

Ce document cours d'Algèbre I et II avec exercices corrigés recouvre le programme d'Algèbre linéaire de la 1ère année universitaire.

Le lecteur trouvera une partie cours qui a été enseigné et à la fin de chaque chapitre une partie exercices corrigés dont la plupart ont été proposé dans le cadre de travaux dirigés ou ont fait l'objet de contrôle des connaissances.

Il est destiné principalement aux étudiants de la 1ère année L.M.D. ainsi que toute personne ayant besoin d'outils de bases d'Algèbre linéaire.

Nous espérons que ce polycopié réponde aux attentes des étudiants et qu'il les aidera à réussir.





## CHAPITRE 2

# Élément de logique et méthodes de raisonnement avec Exercices Corrigés

### 1. Règles de logique formelle

**DÉFINITION 1.1.** *une proposition est une expression mathématique à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai ou faux.*

**EXEMPLE 1.2.** (1)  $\ll \text{Tout nombre premier est pair} \gg$ , cette proposition est fausse.

(2)  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel, cette proposition est vraie

(3) 2 est inférieure à 4, cette proposition est vraie

**DÉFINITION 1.3.** *Toute proposition démontrée vraie est appelée théorème (par exemple le théorème de PYTHAGORE, Thalès...)*

**La négation**  $\ll (\text{non}P) \gg, \ll \bar{P} \gg$ :

**DÉFINITION 1.4.** *Soit  $P$  une proposition, la négation de  $P$  est une proposition désignant le contraire qu'on note  $(\text{non}P)$ , ou bien  $\bar{P}$ , on peut aussi trouver la notation  $\neg P$ . Voici sa table de vérité.*

$P$	$\bar{P}$
1	0
0	1

**EXEMPLE 1.5.** (1) Soit  $E \neq \emptyset$ ,  $P : (a \in E)$ , alors  $\bar{P} : (a \notin E)$ .

(2)  $P : \text{la fonction } f \text{ est positive}$ , alors  $\neg P : \text{la fonction } f \text{ n'est pas positive}$ .

(3)  $P : x + 2 = 0$ , alors  $(\text{non}P) : x + 2 \neq 0$ .

**1.1. Les connecteurs logiques.** Soit  $P, Q$  deux propositions

1) **La conjonction**  $\ll \text{et} \gg, \ll \wedge \gg$

**DÉFINITION 1.6.** *la conjonction est le connecteur logique  $\ll \text{et} \gg, \ll \wedge \gg$ , la proposition  $(P \text{ et } Q)$  ou  $(P \wedge Q)$  est la conjonction des deux propositions  $P, Q$ .*

–  $(P \wedge Q)$  est vraie si  $P$  et  $Q$  le sont toutes les deux.

–  $(P \wedge Q)$  est fausse dans les autres cas. On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**EXEMPLE 1.7.** (1) 2 est un nombre pair et 3 est un nombre premier, cette proposition est vraie

(2)  $3 \leq 2$  et  $4 \geq 2$ , cette proposition est fausse.

## 2) La disjonction « ou », « $\vee$ »

**DÉFINITION 1.8.** la disjonction est un connecteur logique « ou », «  $\vee$  », on note la disjonction entre  $P, Q$  par  $(P \text{ ou } Q), (P \vee Q)$ .  $P \vee Q$  est fausse si  $P$  et  $Q$  sont fausses toutes les deux, sinon  $(P \vee Q)$  est vraie.

On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

$P$	$Q$	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**EXEMPLE 1.9.** (1) 2 est un nombre pair ou 3 est un nombre premier. Vraie.

(2)  $3 \leq 2$  ou  $2 \geq 4$ . Fausse.

## 3) L'implication

**DÉFINITION 1.10.** L'implication de deux propositions  $P, Q$  est notée :  $P \Rightarrow Q$  on dit  $P$  implique  $Q$  ou bien si  $P$  alors  $Q$ .  $P \Rightarrow Q$  est fausse si  $P$  est vraie et  $Q$  est fausse, sinon  $(P \Rightarrow Q)$  est vraie dans les autres cas.

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

**EXEMPLE 1.11.** (1)  $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 3$ . Vraie

(2) Il pleut, alors je prends mon parapluie. Vraie c'est une conséquence.

(3) Omar a gagné au loto  $\Rightarrow$  Omar a joué au loto. Vraie c'est une conséquence.

## 4) La réciproque de l'implication

**DÉFINITION 1.12.** La réciproque d'une implication  $(P \Rightarrow Q)$  est une implication  $Q \Rightarrow P$ .

**EXEMPLE 1.13.** (1) La réciproque de  $: 0 \leq x \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 3$ , est  $: \sqrt{x} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 9$ .

(2) La réciproque de  $: (\text{Il pleut, alors je prends mon parapluie})$ , est  $: (\text{je prends mon parapluie, alors il pleut})$ .

(3) La réciproque de  $: (\text{Omar a gagné au loto} \Rightarrow \text{Omar a joué au loto})$ , est  $: (\text{Omar a joué au loto} \Rightarrow \text{Omar a gagné au loto})$ .

**5)La contraposée de l'implication** Soit  $P, Q$  deux propositions, la contraposée de  $(P \Rightarrow Q)$  est  $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ , on a

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

**REMARQUE 1.14.**  $(P \Rightarrow Q)$  et  $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$  ont la même table de vérité, i.e., la même valeur de vérité.

**EXEMPLE 1.15.** (1) La contraposée de  $: (\text{Il pleut, alors je prends mon parapluie})$ , est  $(\text{je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas})$ .

(2) La contraposée de  $: (\text{Omar a gagné au loto} \Rightarrow \text{Omar a joué au loto})$ , est  $: (\text{Omar n'a pas joué au loto} \Rightarrow \text{Omar n'a pas gagné au loto})$ .

## 6)La négation d'une implication

**THÉORÈME 1.16.** Soit  $P, Q$  deux propositions on a

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \iff (P \wedge \bar{Q}).$$

**EXEMPLE 1.17.** (1) La négation de  $: (\text{il pleut, alors je prends mon parapluie})$ , est  $: (\text{il pleut et je ne prends pas mon parapluie})$ .

(2) La négation de  $: (\text{Omar a gagné au loto} \Rightarrow \text{Omar a joué au loto})$ , est  $: (\text{Omar a gagné au loto et Omar n'a pas joué au loto})$ .

(3)  $(x \in [0, 1] \Rightarrow x \geq 0)$  sa négation  $: (x \in [0, 1] \wedge x < 0)$ .

## Conclusion

(1) La négation de  $(P \Rightarrow Q)$  est  $(P \wedge \bar{Q})$ .

(2) La contraposée de  $(P \Rightarrow Q)$  est  $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ .

(3) La réciproque de  $(P \Rightarrow Q)$  est  $(Q \Rightarrow P)$ .

**REMARQUE 1.18.**  $(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \vee Q)$ .

PREUVE. Il suffit de montrer que  $(P \Rightarrow Q)$  a la même valeur de vérité que  $(\overline{P} \vee Q)$ , on le voit bien dans la table de vérité suivante :

$P$	$Q$	$\overline{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \vee Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

## 7) L'équivalence

**DÉFINITION 1.19.** L'équivalence de deux propositions  $P, Q$  est notée  $P \Leftrightarrow Q$ , on peut aussi écrire  $(P \Rightarrow Q)$  et  $(Q \Rightarrow P)$ . On dit que  $P \Leftrightarrow Q$  si  $P$  et  $Q$  ont la même valeur de vérité, sinon  $(P \Leftrightarrow Q)$  est fausse.

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

**REMARQUE 1.20.** (1)  $P \Leftrightarrow Q$  c'est à dire  $P$  n'est pas équivalente à  $Q$  lorsque  $P \Rightarrow Q$  ou  $Q \Rightarrow P$ .

(2)  $P \Leftrightarrow Q$  peut être lue  $P$  si et seulement si  $Q$ .

**EXEMPLE 1.21.** (1)  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .

(2) Omar a gagné au loto  $\Leftrightarrow$  Omar a joué au loto.

**THÉORÈME 1.22.** Soit  $P, Q$  deux propositions on a :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

PREUVE.

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

**8) Propriétés des connecteurs logiques** Quelle que soit la valeur de vérité des propositions  $P, Q, R$  les propriétés suivantes sont toujours vraies.

(1)  $\overline{\overline{P}} \vee P$ .

(2)  $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$ .

(3)  $P \wedge P \Leftrightarrow P$ .

(4)  $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ . Commutativité de  $\wedge$

(5)  $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ . Commutativité de  $\vee$

- (6)  $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$ . Associativité de  $\wedge$   
 (7)  $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$ . Associativité de  $\vee$   
 (8)  $P \vee P \Leftrightarrow P$   
 (9)  $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ .  
 (10)  $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ .  
 (11)  $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ .  
 (12)  $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ .  
 (13)  $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$  Lois de Morgan  
 (14)  $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$  Lois de Morgan  
 (15)  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ .

PREUVE. (13)

$P$	$Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

(14)

$P$	$Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

## 1.2. Les quantificateurs.

- (1) Quantificateur universel  $\ll \forall \gg$

La relation pour tous  $x$  tel que  $P(x)$  est notée :  $\forall x, P(x)$  se lit quel que soit  $x$ ,  $P(x)$ .

- (2) Quantificateur existentiel  $\ll \exists \gg$

la relation il existe un  $x$  tel que  $P(x)$  est notée :  $\exists x, P(x)$ .

**REMARQUE 1.23.** Il existe un et un seul élément  $x$  de  $E$  c'est à dire un unique  $x$ ,  $P(x)$  est notée :  $\exists! x \in E, P(x)$

**EXEMPLE 1.24.** Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

- (1)  $P(x)$  : La fonction  $f$  est nulle pour tous  $x \in \mathbb{R}$  devient

$$P(x) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

- (2)  $P(x)$  : la fonction  $f$  s'annule en  $x_0$  devient

$$P(x) : \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0.$$

**REMARQUE 1.25.** Les relations  $\forall x, \exists y, P(x, y)$  et  $\exists y, \forall x, P(x, y)$  sont différentes, dans la première  $y$  dépend de  $x$  tandis que dans la seconde  $y$  ne dépend pas de  $x$ .

- EXEMPLE 1.26.** (1) *Tous les étudiants de la section 1 ont un groupe sanguin.*  
 $\forall$  étudiant  $\in$  section 1,  $\exists$  un groupe sanguin, étudiant a un groupe sanguin.  
**Vraie** (cela veut dire que chaque étudiant a un groupe sanguin).
- (2) *Il existe un groupe sanguin pour tous les étudiants de la section 1.*  $\exists$  un groupe sanguin  $O^-$ ,  $\forall$  l'étudiant de section 1, l'étudiant a  $O^-$ . **Fausse** (cela veut dire que tous les étudiants ont le même groupe sanguin ce qui est peut probable).
- (3) *La proposition  $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0)$  est vraie en effet  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$ .*
- (4)  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq y$  **c'est vraie** car  $\exists y = 0, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ .

### Règles de négations

Soit  $P(x)$  une proposition,

- (1) la négation de  $\forall x \in E, P(x)$  est :  $\exists x \in E, \overline{P}(x)$ .  
 (2) la négation de  $\exists x \in E, P(x)$  est :  $\forall x \in E, \overline{P}(x)$ .

- REMARQUE 1.27.** (1)  $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$  veut dire que  $x$  est constante (fixé), il est indépendant de  $y$  qui varie dans  $E$ .  
 (2)  $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y)$  veut dire  $y$  dépend  $x$ , par une certaine relation  $f$  telle que  $y = f(x)$ .  
 (3) On peut permuter entre deux quantificateurs de la même nature :

$$\forall x, \forall y, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, P(x, y).$$

$$\exists x, \exists y, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y).$$

- EXEMPLE 1.28.** (1) la négation de  $\forall \epsilon > 0, \exists q \in \mathbf{Q}^+$  tel que :  $0 < q < \epsilon$  est :  $\exists \epsilon > 0, \forall q \in \mathbf{Q}^+$  tel que :  $q \leq 0$  ou  $q \geq \epsilon$

## 2. Méthodes de raisonnement

Pour montrer que  $(P \Rightarrow Q)$  est vraie on peut utiliser ce qui suit :

### (1) Méthode de raisonnement direct

On suppose que  $P$  est vraie et on démontre que  $Q$  l'est aussi.

**EXEMPLE 2.1.** Montrons que pour  $n \in \mathbb{N}$  si  $n$  est pair  $\Rightarrow n^2$  est pair.

On suppose que  $n$  est pair, i.e.,  $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$  donc

$$n.n = 2(2k^2) \Rightarrow n^2 = 2k'$$

on pose  $k' = 2k^2 \in \mathbb{Z}$  ainsi  $\exists k' \in \mathbb{Z}, n^2 = 2k'$ ,  $n^2$  est pair, d'où le résultat.

### (2) Méthodes du raisonnement par la contraposée

Sachant que  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ , pour montrer que  $P \Rightarrow Q$  on utilise la contraposée, c'est à dire il suffit de montrer que  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$  de manière directe, on suppose que  $\overline{Q}$  est vraie et on montre que  $\overline{P}$  est vraie.

**EXEMPLE 2.2.** Montrons que  $n^2$  est impair  $\Rightarrow n$  est impair. Par contraposée il suffit de montrer que si  $n$  est pair  $\Rightarrow n^2$  est pair voir l'exemple précédent.

(3) **Raisonnement par l'absurde**

Pour montrer que  $R$  est une proposition vraie on suppose que  $\bar{R}$  est vrai et on tombe sur une contradiction (quelque chose d'absurde), quand  $R : P \Rightarrow Q$  est une implication par l'absurde on suppose que  $\bar{R} : R \wedge \bar{Q}$  est vraie et on tombe sur une contradiction.

**EXEMPLE 2.3.** (a) Montrer que  $\sqrt{2}$  est un irrationnel.

(b)  $n$  est pair  $\Rightarrow n^2$  est pair, par l'absurde : on suppose que  $n$  est pair et que  $n^2$  est impaire contradiction

(4) **Contre exemple**

Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner ce qu'on appelle un contre-exemple c'est à dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

**EXEMPLE 2.4.** ( $n$  est un nombre pair)  $\Rightarrow$  ( $n^2 + 1$  est pair), fausse car pour  $n = 2, 4 + 1 = 5$  n'est pas pair, c'est un contre-exemple.

(5) **Raisonnement par récurrence**

Pour montrer que  $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n(x)$  est vraie on suit les étapes suivantes :

- (a) On montre que  $P(n_0)$  est vraie, (valeur initiale).
- (b) On suppose que  $P(n)$  est vraie à l'ordre  $n$
- (c) On montre que  $P(n + 1)$  est vraie à l'ordre  $n + 1$

Alors  $P$  est vrai pour tous  $n \geq n_0$ .

**EXEMPLE 2.5.** Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(a) Pour  $n = 1, P(1)$  est vraie  $1 = \frac{1(2)}{2}$ .

(b) On suppose que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  est vraie.

(c) On montre que  $1 + 2 + \dots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  est vraie,

$1 + 2 + \dots + n + 1 = 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$   
ainsi  $P$  est vraie à l'ordre  $n + 1$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$   
est vraie.

### 3. Exercices Corrigés

**EXERCICE** 1. Donner la négation des propositions suivantes :

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + y > 3$ .
- (2)  $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \epsilon$ .

(3)  $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 0 \vee x \in ]2, 4])$ .

(4) *Il existe  $M \in \mathbb{R}^+$ , pour tous  $n \in \mathbb{N}$  tel que :  $|U_n| \leq M$ .*

**SOLUTION.** (1)  $P : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + y > 3$ 

$$\Leftrightarrow \bar{P} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + y \leq 3.$$

(2)  $P : \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \epsilon$

$$\Leftrightarrow \bar{P} : \exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, |x| < \alpha \wedge |x^2| \geq \epsilon$$

(3)  $P : \forall x \in \mathbb{R}, ((x = 0) \vee (x \in ]2, 4])$

$$\Leftrightarrow \bar{P} : \exists x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \wedge (x \leq 2 \vee x > 4).$$

(4)  $P : \text{il existe } M \in \mathbb{R}^+, \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } |U_n| \leq M$

$$\Leftrightarrow \bar{P} : \text{pour tous } M \in \mathbb{R}^+, \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } |U_n| > M.$$

**REMARQUE 3.1.** (1)  $a < b$  veut dire  $(a < b) \wedge (a \neq b)$  sa négation est :  $(a > b) \vee (a = b)$  c'est à dire  $a \geq b$ .

(2)  $a < b < c$  veut dire  $(a < b) \wedge (b < c)$  sa négation est :  $(a \geq b) \vee (b \geq c)$ .

**EXERCICE** 2. Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions :(1) *Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?*(2) *Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?*(3) *Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?*(4) *Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ?***SOLUTION.** (1) *Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?**Soit  $\mathbb{P} = \{2k/k \in \mathbb{Z}\}$  l'ensemble des nombres pairs.*

$$\forall n, m \in \mathbb{P}, n \times m \in \mathbb{P}?$$

*Soient  $n, m \in \mathbb{P}$ , alors  $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1, \exists k_2 \in \mathbb{Z}/m = 2k_2$  d'où  $n \times m = 2(2k_1k_2) = 2k_3$ , ainsi  $\exists k_3 = 2k_1k_2 \in \mathbb{Z}/n \times m = 2k_3 \Rightarrow n \times m \in \mathbb{P}$  le produit est pair.*(2) *Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?**Soit  $I = \{2k + 1/k \in \mathbb{Z}\}$  l'ensemble des nombres impairs.  $\forall n, m \in I, n \times m \in I$  ?**Soient  $n, m \in I$ , alors  $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1 + 1, \exists k_2 \in \mathbb{Z}/m = 2k_2 + 1$  d'où  $n \times m = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 2k_3 + 1$ , ainsi  $\exists k_3 = 2k_1k_2 + k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}/n \times m = 2k_3 + 1 \Rightarrow n \times m \in I$  le produit est impair.*(3) *Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?*

$$\forall n \in \mathbb{P}, m \in I, n \times m \in \mathbb{P}?, n \times m \in I?$$

*Soient  $n \in \mathbb{P}, m \in I$ , alors  $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1, \exists k_2 \in \mathbb{Z}/m = 2k_2 + 1$  d'où  $n \times m = 2(2k_1k_2 + k_1) = 2k_3$ , ainsi  $\exists k_3 = 2k_1k_2 + k_1 \in \mathbb{Z}/n \times m = 2k_3 \Rightarrow n \times m \in I$  le produit est pair.*(4) *Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ?*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ est pair.}$$



Montrons que  $n$  pair  $\Rightarrow n^2$  est pair.

Soit  $n \in \mathbb{P}$ , alors  $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1$ , d'où  $n^2 = n.n = 2(2k_1^2)$ , ainsi  $\exists k_2 = 2k_1^2 \in \mathbb{Z}/n^2 = 2k_2$  il est pair.

Montrons que  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  est pair.

Par contraposée, on doit montrer que  $n$  est impair  $\Rightarrow n^2$  est impair, c'est vrai cas particulier de la question 2), ainsi la proposition  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  est pair est vérifiée, de plus  $n$  pair  $\Rightarrow n^2$  est pair  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, n$  pair  $\Leftrightarrow n^2$  est pair est vraie.

**EXERCICE** 3. Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses.

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ .
- (2)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ .
- (3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ .
- (4)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ .
- (5)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$ .
- (6)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ ou } 2x + y = 0)$ .
- (7)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$ .

**SOLUTION**. (1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , est vraie car  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ .

(2)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , est fausse car, sa négation  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$ , est vraie  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R}; 2x + y \leq 0$

(3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , est fausse car sa négation  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$  est vraie, en effet  $\exists x = 0, \exists y = 0; 0 \leq 0$ .

(4)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , vraie car  $\exists x = 0, \exists y = 1; 1 > 0$ .

(5)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$ , vraie  $\exists x = -1 \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 > y$ .

(6)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ ou } 2x + y = 0)$ , Vraie car  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R} : 2x - 2x = 0$  (même si  $2x + y \neq 0$ ) ou bien on peut dire que  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 : 2x - 2x + 1 = 1 > 0$  (même si  $2x + y \neq 0$ ).

(7)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$  est fausse car on ne peut jamais avoir  $(2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$  en même temps.

**EXERCICE** 4. Par l'absurde montrer que :

- (1)  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .
- (2)  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$  pair  $\Rightarrow n$  est pair.

**SOLUTION**. (1) Par l'absurde on suppose que  $\sqrt{2}$  est un rationnel i.e.,  $\exists a, b \in \mathbb{N}$ ,  
 $a \wedge b = 1, / \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$  alors 2 divise  $a$ ,  $a$  est pair  $\exists k \in \mathbb{N}/n = 2k$ , ainsi

$$2b^2 = 4k^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2,$$

on déduit que  $b$  est pair aussi or  $a, b$  sont premier entre eux contradiction, ce que nous avons supposé au départ est faux c'est à dire  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

- (2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  par l'absurde supposons que  $n^2$  est pair et  $n$  est impair, alors  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = 2k + 1$  d'où  $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ ,  $k' = (2k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}$ ,  $n^2$  est impair contradiction car  $n^2$  est pair. Ce que nous avons supposé au départ est faux c'est à dire  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  est pair est vraie.

**EXERCICE** 5. Par contraposée, montrer que

- (1) Si  $(n^2 - 1)$  n'est pas divisible par 8  $\Rightarrow n$  est pair.  
 (2)  $(\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$ .

**SOLUTION.** (1) Montrons que sa contraposée :  $(n$  est impair  $\Rightarrow (n^2 - 1)$  est divisible par 8) est vraie.

Soit  $n$  impair alors  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = 2k + 1$  et donc  $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$  il suffit de montrer que  $k(k + 1)$  est pair.

Montrons que  $k(k + 1)$  est pair on a deux cas :

Si  $k$  est pair alors  $k + 1$  est impair donc le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair voir exercice 2 question (3).

Si  $k$  est impair, alors  $k + 1$  est pair donc le produit est pair c'est le même raisonnement, (il faut savoir que le produit de deux nombre consécutifs est toujours pair).

Ainsi  $k(k + 1)$  est pair  $\exists k' \in \mathbb{Z} / k(k + 1) = 2k'$ , d'où  $n^2 - 1 = 4(2k') = 8k' \Rightarrow n^2 - 1$  est divisible par 8.

- (2) Montrons que sa contraposée :  $(x \neq 0 \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, |x| > \epsilon))$  est vraie.  
 Soit  $x \neq 0$ , il existe  $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$  tel que  $|x| > \frac{x}{2}$  car  $x \neq 0$  d'où le résultat.

**EXERCICE** 6. Montrer par récurrence que

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$   
 -  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1$  est un multiple de 9.

**SOLUTION.** - Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

(1) Pour  $n = 1$  on a :  $1^3 = \frac{1^2(2)^2}{4} = 1$ ,  $P(1)$  est vraie.

(2) On suppose que  $: 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  est vraie.

(3) On montre que  $: 1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$  est vraie. En utilisant  $p(n)$  on obtient :

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4} + (n + 1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = \frac{n^2(n + 1)^2 + 4(n + 1)^3}{4} + (n + 1)^3 = \frac{(n + 1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = \frac{(n + 1)^2(n^2 + 2)^2}{4}.$$

Ainsi  $P(n + 1)$  est vraie, alors  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

- Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1$  est un multiple de 9, c'est à dire  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{Z} / 4^n + 6n - 1 = 9k$ .

- (1) Pour  $n = 1$  on a :  $\exists k = 1 \in \mathbb{Z}$ ,  $4 + 6 - 1 = 9 = 9(1)$ ,  $P(1)$  est vraie.  
(2) On suppose que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists k \in \mathbb{Z} / 4^n + 6n - 1 = 9k$  est vraie.  
(3) On montre que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists k' \in \mathbb{Z} / 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'$ . est vraie.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 6n + 6 - 1 \\ &= (9 - 5)4^n + 6n + 5 \\ &= 9 \cdot 4^n - 5 \cdot 4^n - 5(6n) + 36n + 5 \\ &= -5(4^n + 6n - 1) + 9 \cdot 4^n + 36n, \text{ en utilisant } P_n \\ &= -5(9k) + 9 \cdot 4^n + 9 \cdot (4n) = 9(-5k + 4^n + 4n) \\ &\Rightarrow \exists k' = -5k + 4^n + 4n \in \mathbb{Z} / 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'. \end{aligned}$$



## CHAPITRE 3

# Théorie des ensembles avec Exercices Corrigés

### 1. Notion d'ensemble et propriétés

#### 1.1. Ensemble.

**DÉFINITION 1.1.** *Un ensemble est une collection d'objets mathématiques (éléments) rassemblés d'après une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer qu'un objet appartient ou pas à un ensemble.*

**EXEMPLE 1.2.** (1)  $E$  : l'ensemble des étudiants de l'université d'USTO.

(2) On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

(3) L'ensemble des nombre pairs se note :  $P = \{x \in \mathbb{N}/2 \text{ divise } x\}$ .

(4) L'ensemble vide est noté :  $\emptyset$  qui ne contient aucun élément.

**1.2. Inclusion.** On dit que l'ensemble  $A$  est inclus dans un ensemble  $B$  lorsque tous les éléments de  $A$  appartiennent à  $B$  et on note  $A \subset B$ ,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)).$$

La négation :

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x, (x \in A \wedge x \notin B)).$$

**EXEMPLE 1.3.** (1) On désigne  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombre réels on a :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ .

(2) On désigne  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des nombre entiers relatifs,  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des rationnels on a :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**1.3. Egalité de deux ensembles :** Soient  $A, B$  deux ensembles sachant  $A = B$ , cela veut dire que :

$$A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \text{ et } (B \subset A)).$$

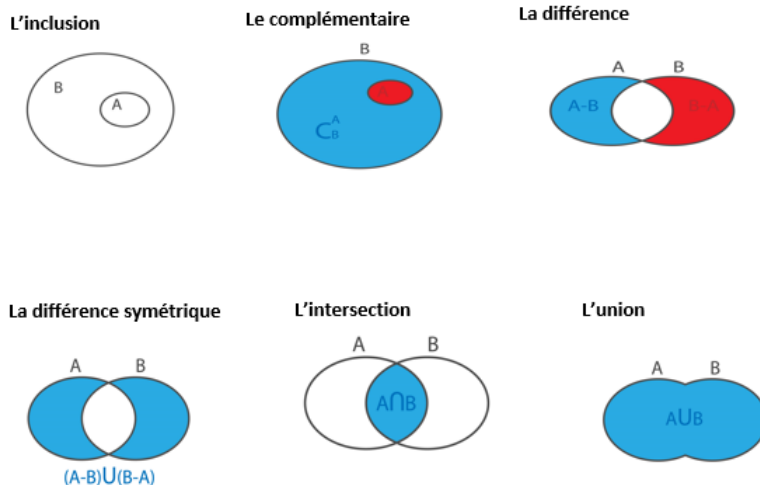
**1.4. Différence de deux ensembles.** La différence de deux ensembles  $A, B$  est un l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ , noté  $A - B$ .

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Si  $A \subset B$  alors  $B - A$  est aussi appelé le complémentaire de  $A$  dans  $B$ , il est noté  $C_B^A, A^c$ .

$$C_B^A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}.$$

#### 1.5. Opérations sur les ensembles.



1.5.1. *L'union.* La réunion ou l'union de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  ou  $B$ , on écrit  $A \cup B$ .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

La négation :

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B).$$

1.5.2. *L'intersection.* L'intersection de deux ensembles  $A, B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  et  $B$  on note  $A \cap B$ .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

La négation :

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B).$$

**REMARQUE 1.4.** (1) Si  $A, B$  n'ont pas d'éléments en commun, on dit qu'ils sont disjoints, alors  $A \cap B = \emptyset$ .

$$(2) B = C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

$$(3) A - B = A \cap B^c.$$

1.5.3. *La différence symétrique.* Soient  $E$  un ensemble non vide et  $A, B \subset E$ , la différence symétrique entre deux ensembles  $A, B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A - B$  ou  $B - A$  noté  $A \Delta B$ .

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow \{x/x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}.$$

**1.6. Propriétés des opérations sur les ensembles.**

1.6.1. *La commutativité.* Quels que soient  $A, B$  deux ensembles :

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

1.6.2. *L'associativité.* Quels que soient  $A, B, C$  deux ensembles :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

1.6.3. *la distributivité.* Quels que soient  $A, B, C$  deux ensembles :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

1.6.4. *L'idempotence.*

$$A \cup A = A, A \cap A = A.$$

1.6.5. *Lois de Morgan.*

$$a) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

$$b) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

PREUVE. Montrons que  $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$  et  $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$ ,

$(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$  :

Soit  $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$  ainsi  $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in (A^c \cap B^c)$ , d'où  $(A \cup B)^c \subset (A^c \cap B^c)$ .

$A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$  :

Soit  $x \in (A^c \cap B^c) \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cup B)$ , d'où  $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$ , ainsi  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ . On suit le même raisonnement pour la seconde relation.

**1.7. Produit Cartésien.** Soient  $A, B$  deux ensembles,  $a \in A, b \in B$  on note  $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$  l'ensemble  $A \times B$  est l'ensemble des couples  $(a, b)$  pris dans cet ordre il est appelé ensemble produit cartésien des ensemble  $A$  et  $B$ .

**REMARQUE 1.5.** Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles finis et si on désigne par :

$\text{Card}A$  : le nombre des éléments de  $A$ .

$\text{Card}B$  : le nombre des éléments de  $B$ . on aura :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B.$$

**EXEMPLE 1.6.** a) Soit  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$

(1)  $A \subset E, B \subset E$ .

$A$  n'est pas inclus dans  $B$  car  $1 \in A \wedge 1 \notin B$ .

$B$  n'est pas inclus dans  $A$  car  $8 \in B \wedge 8 \notin A$ .

(2)  $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ .

$$(3) A - B = \{1, 3, 5\}, B - A = \{8\}.$$

$$(4) A \Delta B = \{1, 3, 5, 8\}.$$

$$b) A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\},$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\},$$

$A \times B \neq B \times A$ , car  $(3, 2) \in B \times A$ , et  $(3, 2) \notin A \times B$ .

## 2. Applications et relations d'équivalences

### 2.1. Application.

**DÉFINITION 2.1.** On appelle application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$  une loi de correspondance ( ou une relation de correspondance ) permettant d'associer à tout  $x \in E$  un unique élément  $y \in F$  où  $E$  est l'ensemble de départ et  $F$  est l'ensemble d'arrivé.

L'élément  $y$  associé à  $x$  est l'image de  $x$  par  $f$ , on note  $x \mapsto y/y = f(x)$ .

**EXEMPLE 2.2.** Soit l'application suivante :

$$(1) f_1 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 4n + 2.$$

$$(2) f_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 5x + 3.$$

### 2.2. Image directe et image réciproque.

2.2.1. a) *L'image directe.* Soit  $f : E \mapsto F$  et  $A \subset E$ , on appelle image de  $A$  par  $f$  un sous ensemble de  $F$ , noté  $f(A)$  tel que

$$f(A) = \{f(x) \in F/x \in A\},$$

sachant que  $f(A) \subset F$ , et que  $A, f(A)$  sont des ensembles.

2.2.2. b) *L'image réciproque.* Soit  $f : E \mapsto F$  et  $B \subset F$ , on appelle l'image réciproque de  $B$  par  $f$ , la partie de  $E$  notée  $f^{-1}(B)$  telle que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\},$$

sachant que  $f^{-1}(B) \subset E$ , et que  $B, f^{-1}(B)$  sont des ensembles.

**EXEMPLE 2.3.** (1) Soit  $f$  l'application définie par :

$$f : [0, 3] \mapsto [0, 4]$$

$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

Trouver  $f([0, 1])$ ?

$$f([0, 1]) = \{f(x)/x \in [0, 1]\} = \{2x + 1/0 \leq x \leq 1\},$$

on a  $:0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2x + 1 \leq 3$ , alors  $f([0, 1]) = [1, 3] \subset [0, 4]$ .



(2) Soit  $f$  l'application définie par :

$$g : [0, 2] \mapsto [0, 4]$$

$$x \mapsto f(x) = (2x - 1)^2$$

Calculer  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $f^{-1}(]0, 1[)$ .

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0, 2] / f(x) \in \{0\}\} = \{x \in [0, 2] / f(x) = 0\} = \{x \in [0, 2] / (2x-1)^2 = 0\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$f^{-1}(]0, 1[) = \{x \in [0, 2] / f(x) \in ]0, 1[ \} = \{x \in [0, 2] / 0 < (2x - 1)^2 < 1\},$$

On a :  $(2x - 1)^2 > 0$  est vérifiée  $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ,  $x \in [0, 2]$ . D'autre part

$$(2x - 1)^2 < 1 \Rightarrow |2x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1,$$

et donc  $x \in ]0, 1[$ , en regroupant les deux inégalités, on obtient

$$f^{-1}(]0, 1[) = \left([0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 2]\right) \cap ]0, 1[ = ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1[.$$

2.2.3. 1) La surjection.

**DÉFINITION 2.4.** L'image  $f(E)$  de  $E$  par  $f$  est une partie de  $F$ . Si tout élément de  $F$  est l'image par  $f$  d'au moins un élément de  $E$ , on dit que  $f$  est une application surjective de  $E$  dans  $F$  on a :  $f(E) = F$ .

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow (\forall y \in F), (\exists x \in E) / f(x) = y.$$

**EXEMPLE 2.5.** Les applications suivantes sont-elles surjective ?

(1)  $f_1 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$

$$n \mapsto 4n + 2.$$

$f_1$  n'est pas surjective, en effet si on suppose qu'elle est surjective c'est à dire  $\forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / 4n + 1 = y \Rightarrow n = \frac{y-1}{4}$ , or  $n = \frac{y-1}{4} \notin \mathbb{N}$  contradiction  $f_1$  n'est pas surjective.

(2)  $f_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto 5x + 3.$$

$f_2$  est surjective car :  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / 5x + 3 = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{5} \in \mathbb{R}$ .

2.2.4. 2) L'injection.

**DÉFINITION 2.6.** Quand on a deux éléments distincts de  $E$  correspondent pas à deux images différentes de  $F$ ,  $f$  est dite application injective, on a alors :

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

ou

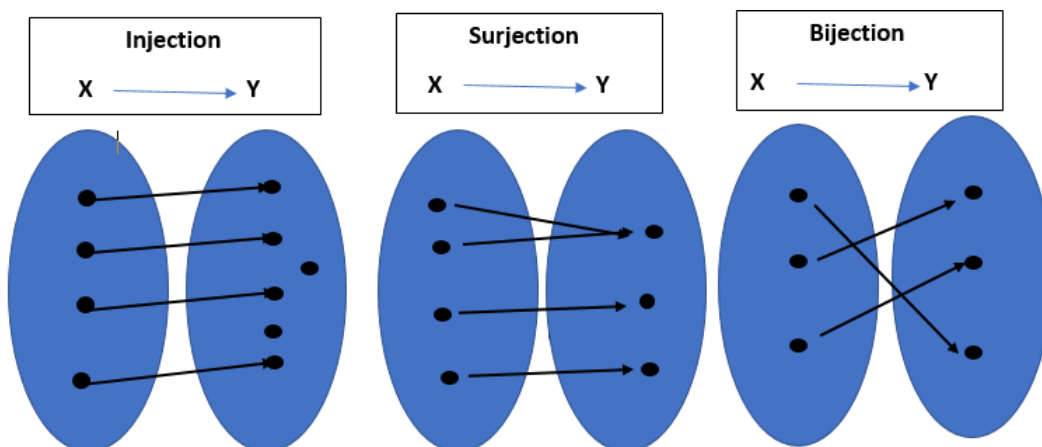
$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

**EXEMPLE 2.7.** Les applications suivantes sont-elles injective ?

(1)  $f_1 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$

$$n \mapsto 4n + 2.$$

$f_1$  est injective car :  $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4n_1 + 2 = 4n_2 + 2 \Rightarrow 4n_1 = 4n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$ .



- (2)  $f_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 5x + 3$ .  
 $f_2$  est injective car  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ .

2.2.5. 3) *La bijection.*  $f$  est une application bijective si elle injective et surjective, c'est à dire tout élément de  $F$  est l'image d'un unique élément de  $E$ ,  $f$  est bijective si et seulement si :

$$(\forall y \in F), (\exists! x \in E), (f(x) = y). \quad (\exists! \text{ signifie unique})$$

**EXEMPLE 2.8.** (1)  $f_1$  n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

(2)  $f_2$  est bijective.

**REMARQUE 2.9.** Lorsque une application  $f$  est bijective cela veut dire que l'application inverse  $f^{-1}$  existe.  $f^{-1}$  est aussi bijective de  $F$  sur  $E$  et  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**EXEMPLE 2.10.**  $f_2$  est bijective et sa bijection est définie par :

$$f_2^{-1} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \frac{y - 3}{5}.$$

2.2.6. 4) *La composition d'application.* Soient  $E, F, G$  des ensembles et deux applications  $f, g$  telles que

$$f : E \mapsto F, \quad g : F \mapsto G$$

$$x \mapsto f(x) = y, \quad y \mapsto g(y) = z$$

On définit l'application

$$g \circ f : E \mapsto G$$

$$x \mapsto g \circ f(x) = z.$$

**PROPOSITION 2.11.** (1) Si  $f$  et  $g$  sont injectives  $\Rightarrow g \circ f$  est injective.

(2) Si  $f$  et  $g$  sont surjectives  $\Rightarrow g \circ f$  est surjective.

PREUVE. (1) *Supposons que  $f$  et  $g$  sont injectives, montrons que  $g \circ f$  est injective :*

$\forall x_1, x_2 \in E, g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$  puisque  $g$  est injective on aura :

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

puisque  $f$  est injective ainsi :

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

$g \circ f$  est injective.

(2) *Supposons que  $f$  et  $g$  sont surjectives c'est à dire  $f(E) = F, g(F) = G$ , montrons que  $g \circ f$  est surjective :*

$$g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = G$$

d'après la surjectivité de  $f, g$  d'où le résultat.

**REMARQUE 2.12.** *Il s'ensuit que la composée de deux bijection et une bijection. En particulier, la composition de  $f : E \mapsto F$  et sa réciproque  $f^{-1} : F \mapsto E$  est l'application identité  $Id_E, f^{-1} \circ f = Id_E, f \circ f^{-1} = Id_F$ .*

2.2.7. c) *Propriétés des applications.* Soit  $f : E \mapsto F$  on a :

$$(1) A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

$$(2) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

$$(3) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

PREUVE. (1) *Soit  $y \in f(A)$  alors  $\exists x \in A/f(x) = y$ , or  $A \subset B \Rightarrow x \in B$  donc  $y = f(x) \in f(B)$  d'où  $f(A) \subset f(B)$ .*

(2) *Soit*

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B/f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A/f(x) = y \vee \exists x \in B/f(x) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B), \end{aligned}$$

ainsi  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

*Soit*

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B/f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in A/f(x) = y \wedge \exists x \in B/f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B), \end{aligned}$$

ainsi  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

**EXEMPLE 2.13.**  $f(x) = x^2$ ,  $A = [-1, 0]$ ,  $B = [0, 1]$ ,  $A \cap B = \{0\}$ ,  $f(A) = [0, 1]$ ,  $f(B) = [0, 1]$ ,

$$f(A) \cap f(B) = [0, 1], f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\} \neq [0, 1] = f(A) \cap f(B).$$

L'égalité :  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  est vérifiée lorsque  $f$  est injective.

**PROPOSITION 2.14.** Soit  $f : E \mapsto F$ ,  $g : F \mapsto G$  on a :

- (1)  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective.
- (2)  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
- (3)  $g \circ f$  est bijective, alors  $f$  est injective et  $g$  est surjective.

PREUVE. (1) Soit  $x_1, x_2 \in E$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$ , alors  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$  comme  $g \circ f$  est injective ainsi  $x_1 = x_2$  d'où  $f$  est injective.

- (2) On a  $f(E) \subset F \Rightarrow g \circ f(E) \subset g(F) \subset G$ , puisque  $g \circ f$  est surjective, alors  $g \circ f(E) = G$ , ainsi  $G \subset g(F)$  d'où  $G = g(F)$ ,  $g$  est surjective

### 3. Relations Binaires dans un ensemble

**DÉFINITION 3.1.** Soient  $x \in E, y \in F$  une relation  $\mathcal{R}$  entre  $x$  et  $y$  est une correspondance entre  $x$  et  $y$ . Le couple  $(x, y)$  vérifie la relation  $\mathcal{R}$ , on note  $x\mathcal{R}y$ , si  $E = F$  la relation est dite binaire.

- EXEMPLE 3.2.**
- (1)  $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$  divise  $y$ ,  $\mathcal{R}$  est une relation binaire.
  - (2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$ .
  - (3)  $A \subset E, B \subset F, A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ .

**3.1. Propriétés des relations binaires.** Soient  $\mathcal{R}$  une relation binaire dans l'ensemble  $E$  et  $x, y, z \in E$ , on dit que  $\mathcal{R}$  est une relation

- (1) **Réflexive** :  $(\forall x \in E), (x\mathcal{R}x)$ .
- (2) **Symétrique** :  $(\forall x \in E), (\forall y \in E), (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$ .
- (3) **Antisymétrique** :  $(\forall x \in E), (\forall y \in E), ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)) \Rightarrow (x = y)$ .
- (4) **Transitive** :  $(\forall x, y, z \in E), ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$ .

**DÉFINITION 3.3.** Une relation est dite relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

**DÉFINITION 3.4.** Une relation est dite relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- EXEMPLE 3.5.**
- (1)  $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$  est une relation d'équivalence.
  - (2)  $A \subset E, B \subset F, A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$  est une relation d'ordre, en effet :
    - (a)  $\forall A \subset E, A \subset A \Leftrightarrow \mathcal{R}$  est réflexive.
    - (b)  $\forall A, B \in E, ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Rightarrow A = B \Leftrightarrow \mathcal{R}$  est antisymétrique.
    - (c)  $\forall A, B, C \in E, ((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow A \subset C \Leftrightarrow \mathcal{R}$  est transitive.

(3)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$ , est une relation d'ordre.

**DÉFINITION 3.6.** une relation d'ordre dans un ensemble  $E$  est dite d'ordre total si deux éléments quelconques de  $E$  sont comparables,  $\forall x, y \in E$ , on a  $x\mathcal{R}y$  ou  $y\mathcal{R}x$ . Une relation d'ordre est dite d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total.

**EXEMPLE 3.7.** –  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$ , est une relation d'ordre total.

(1)  $\mathcal{R}$  est réflexive :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$ .

(2)  $\mathcal{R}$  est antisymétrique :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)) \Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x = y$ .

(3)  $\mathcal{R}$  est transitive :  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Leftrightarrow y \leq z \Rightarrow x \leq z \Leftrightarrow x\mathcal{R}z$ .

(4)  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre total car  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$  ou  $y \leq x$ .

– Soient  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2; (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$  est une relation d'ordre partiel, en effet :  $\exists(1, 2), (3, 0) \in \mathbb{R}^2$ , et  $(1, 2)$  n'est pas en relation avec  $(3, 0)$ , et  $(3, 0)$  n'est pas en relation avec  $(1, 2)$ .

**3.2. Classe d'équivalence.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence, on appelle classe d'équivalence d'un élément  $x \in E$  l'ensemble des éléments  $y \in E$  qui sont en relation  $\mathcal{R}$  avec  $x$  on note  $C_x$ , où

$$\bar{x} = C_x = \dot{x} = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}$$

**DÉFINITION 3.8.** L'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de  $E$  est appelée ensemble quotient de  $E$  par  $\mathcal{R}$ , il est noté  $E/\mathcal{R}$ ,

$$E/\mathcal{R} = \{\dot{x} / x \in E\}$$

**EXEMPLE 3.9.**  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$ ,  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence car :

(1)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x = x^2 - x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x \Leftrightarrow \mathcal{R}$  est réflexive.

(2)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \Leftrightarrow y^2 - y = x^2 - x \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$ ,  $\mathcal{R}$  est symétrique.

(3)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \wedge y^2 - y = z^2 - z \Leftrightarrow x^2 - x = z^2 - z \Leftrightarrow z\mathcal{R}x$ ,  $\mathcal{R}$  est transitive.

Cherchons les classes d'équivalence suivantes :  $C_0, \bar{1}, \dot{2}, C_{\frac{1}{2}}$ .

(1)  $C_0 = \{y \in E / 0\mathcal{R}y\}, 0\mathcal{R}y \Leftrightarrow y^2 - y = 0$ , ainsi  $C_0 = \{0, 1\}$ .

(2)  $\bar{1} = \{y \in E / 1\mathcal{R}y\}, y^2 - y = 1 - 1 = 0$ , ainsi  $\bar{1} = \{0, 1\}$ .

(3)  $\dot{2} = \{y \in E / 2\mathcal{R}y\}, y^2 - y = 2$ , ainsi  $\dot{2} = \{-1, 2\}$ .

(4)  $C_{\frac{1}{2}} = \{y \in E / \frac{1}{2}\mathcal{R}y\}, y^2 - y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ , ainsi  $C_{\frac{1}{2}} = \{\frac{1}{2}\}$ .

## 4. Exercices Corrigés

**EXERCICE** 7. On considère les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 5\}, B = \{\{1, 2\}, 5\}, C = \{\{1, 2, 5\}\}, D = \{\emptyset, 1, 2, 5\}, \\ E = \{5, 1, 2\}, F = \{\{1, 2\}, \{5\}\}, G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}, H = \{5, \{1\}, \{2\}\}.$$

- (1) Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles ?
- (2) Déterminer  $A \cap B, G \cup H, E - G$ .
- (3) Quel est le complémentaire de  $A$  dans  $D$ .

**SOLUTION**. (1) On remarque  $A = E, A \subset D, E \subset D, B \subset G, F \subset G$ .

- (2)  $A \cap B = \{5\}, G \cup H = \{5, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{5\}\}, E - G = \{1, 2\}$ .
- (3)  $C_D^A = \{\emptyset\}$ .

**EXERCICE** 8. Etant donné  $A, B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ ,

a) Montrer que :

- (1)  $(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c$ .
- (2)  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ .
- (3)  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ .

b) Simplifier :

- (1)  $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \overline{A})}$ .
- (2)  $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \overline{A})}$ .

**SOLUTION**. a) Montrons que :

- (1)  $(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c$ .  
 Soit  $x \in (A \cap B) \cup B^c \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in B^c$ ,  

$$x \in (A \cap B) \cup B^c \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B^c) \wedge x \in (B \cup B^c)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B^c) \cap E$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B^c.$$

Car  $E = B^c \cup B$  et  $A \cup B^c$  est un sous ensemble de  $E$ .

- (2)  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ . Soit  $x \in (A - B) - C$  on a :

$$x \in (A - B) - C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B^c \cap C^c)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \text{ Lois Morgan}$$

$$\Leftrightarrow x \in A - (B \cup C).$$

$$(3) A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cap C) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

b) *Simplifications*

$$(1) \overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \bar{A})}.$$

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \bar{A})} &= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\bar{C} \cap A) \\ &= (\bar{A} \cap A) \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= \emptyset \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

$$(2) \overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \bar{A})}.$$

$$\begin{aligned} \overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \bar{A})} &= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (\bar{C} \cup A) \\ &= (\bar{A} \cup A) \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) \\ &= E \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) \\ &= E. \end{aligned}$$

**EXERCICE** 9. Soient  $E = [0, 1]$ ,  $F = [-1, 1]$ , et  $G = [0, 2]$  trois intervalles de  $\mathbb{R}$ .  
Considérons l'application  $f$  de  $E$  dans  $G$  définie par :

$$f(x) = 2 - x,$$

et l'application  $g$  de  $F$  dans  $G$  définie par :

$$g(x) = x^2 + 1$$

(1) Déterminer  $f(\{1/2\})$ ,  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $g([-1, 1])$ ,  $g^{-1}[0, 2]$ .

(2) L'application  $f$  est-elle bijective ? justifier.

(3) L'application  $g$  est-elle bijective ? justifier.

**SOLUTION.** (1) (a)  $f(\{1/2\}) = \{f(x) \in [0, 2] / x = 1/2\}$ ,  
 $f(1/2) = 3/2 \in [0, 2]$ , alors :

$$f(\{1/2\}) = \{3/2\}.$$

(b)  $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [-1, 1] / f(x) = 0\}$ .

On a  $f(x) = 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [-1, 1]$ , alors :

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

(c)  $g([-1, 1]) = \{g(x) \in [0, 2] / x \in [-1, 1]\}$ , on a  $x \in [-1, 0] \cup ]0, 1]$ .

$$\begin{aligned} x \in [-1, 0] &\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in [1, 2] \subset [0, 2] \end{aligned}$$

d'où  $g([-1, 0]) = [1, 2]$

$$\begin{aligned} x \in ]0, 1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 < x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in ]1, 2] \subset [0, 2] \end{aligned}$$

d'où  $g(]0, 1]) = ]1, 2]$ ,  $g([-1, 1]) = [1, 2]$ .

(d)  $g^{-1}([0, 2]) = \{x \in [-1, 1] / g(x) \in [0, 2]\}$ , on a

$$\begin{aligned} g(x) \in [0, 2] &\Rightarrow 0 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow (-1 \leq x^2 < 0) \vee (0 \leq x^2 \leq 1) \end{aligned}$$

l'inégalité  $(-1 \leq x^2 < 0)$  n'a pas de solutions.

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Ainsi

$$g^{-1}([0, 2]) = \emptyset \cup [-1, 1] = [-1, 1].$$

- (2) Comme  $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$  c'est à dire l'élément  $0 \in [0, 2]$  n'admet pas d'antécédent par  $f$  dans  $[-1, 1]$  donc  $f$  n'est pas surjective et par suite n'est pas bijective.
- (3) L'application  $g$  est paire donc  $g(-1) = g(1)$  or  $-1 \neq 1$  donc  $g$  n'est pas injective d'où  $g$  ne peut être bijective, aussi on remarque que  $g([-1, 1]) = [1, 2] \neq [0, 2]$  donc  $g$  n'est pas surjective, alors n'est pas aussi bijective.

**EXERCICE** 10. On définit sur  $\mathbb{R}^2$  la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

- (1) Montrer que  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence.  
 (2) Trouver la classe d'équivalence du couple  $(0, 0)$ .

**SOLUTION**.  $\mathcal{R}$  est une classe d'équivalence si et seulement si elle est réflexive et symétrique et transitive.

- (1) a)  $\mathcal{R}$  est réflexive si et seulement si  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$

$$(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow x + y = x + y.$$



D'où  $\mathcal{R}$  est réflexive.

b)  $\mathcal{R}$  est symétrique si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Rightarrow (x', y')\mathcal{R}(x, y)$$

$$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{R}(x', y') &\Rightarrow x + y = x' + y' \\ &\Rightarrow x' + y' = x + y \\ &\Rightarrow (x', y')\mathcal{R}(x, y) \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{R}$  est symétrique.

c)  $\mathcal{R}$  est transitive si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \wedge (x', y')\mathcal{R}(x'', y'') \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$$

$$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \wedge (x', y')\mathcal{R}(x'', y'') &\Rightarrow \begin{cases} x + y = x' + y' \\ \wedge \\ x' + y' = x'' + y'' \end{cases} \\ &\Rightarrow x + y = x'' + y'' \\ &\Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x'', y'') \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{R}$  est transitive, Ainsi  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

(2) Trouvons la classe d'équivalence du couple  $(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} C((0, 0)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y)\mathcal{R}(0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\} \\ &= \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

**EXERCICE** 11. On définit sur  $\mathbb{R}^2$  la relation  $T$  par

$$(x, y)T(x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$$

(1) Vérifier que  $T$  est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

(2) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , représenter l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y)T(a, b)\}$ .

**SOLUTION**.  $T$  est une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive et anti-symétrique et transitive.

(1) a)  $\mathcal{R}$  est réflexive si et seulement si  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x, y)$

$$(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow |x - x| \leq y - y \Rightarrow 0 \leq 0.$$

D'où  $T$  est réflexive.

b)  $T$  est anti-symétrique si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, ((x, y)T(x', y')) \wedge ((x', y')T(x, y)) \Rightarrow (x, y) = (x', y')$$

$$\begin{aligned}
(x, y)T(x', y') \wedge (x', y')T(x, y) &\Rightarrow \begin{cases} |x - x'| \leq y' - y \\ \text{et} \\ |x' - x| \leq y - y' \end{cases} \\
&\Rightarrow 2|x - x'| \leq 0 \\
&\Rightarrow |x - x'| = 0 \\
&\Rightarrow x = x' \\
&\Rightarrow y' - y \geq 0 \wedge y - y' \geq 0 \\
&\Rightarrow y' - y \geq 0 \wedge y' - y \leq 0 \\
&\Rightarrow y' - y = 0 \Rightarrow y = y'.
\end{aligned}$$

D'où  $(x, y) = (x', y')$ , alors  $T$  est anti-symétrique.

c)  $T$  est transitive si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2, ((x, y)T(x', y') \wedge (x', y')T(x'', y'')) \Rightarrow (x, y)T(x'', y'')$$

$$\begin{aligned}
(x, y)T(x', y') \wedge (x', y')T(x'', y'') &\Rightarrow \begin{cases} |x - x'| \leq y' - y \\ \text{et} \\ |x' - x''| \leq y'' - y' \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} -y' + y \leq x - x' \leq y' - y \\ \text{et} \\ -y'' + y' \leq x' - x'' \leq y'' - y' \end{cases} \\
&\Rightarrow -y'' + y \leq x' - x'' \leq y'' - y \\
&\Rightarrow |x - x''| \leq y'' - y \\
&\Rightarrow (x, y)T(x'', y'')
\end{aligned}$$

D'où  $T$  est transitive, alors c'est un relation d'ordre.

L'ordre n'est pas total car  $\exists (x, y) = (2, 3)$  et  $(x', y') = (4, 3)$  tels que si on suppose que  $(x, y)T(x', y') \Rightarrow |2 - 4| \leq 0$  ce qui absurde.

De plus  $(x', y')T(x, y) \Rightarrow |4 - 2| \leq 0$  faux.

(2) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , déterminons l'ensemble  $\{x, y \in \mathbb{R}^2 / (x, y)T(a, b)\}$ .

$$\begin{aligned}
(x, y)T(a, b) &\Leftrightarrow |x - a| \leq b - y \\
&\Leftrightarrow (x - a)^2 - (y - b)^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(x - a) + (y - b)][(x - a) - (y - b)] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(x - a + y - b) \geq 0 \wedge (x - a) - (y - b) < 0] \\
&\vee [(x - a + y - b) < 0 \wedge (x - a) - (y - b) \geq 0].
\end{aligned}$$

on pose :

$D_{p_1}$  : le demi-plan fermé d'équations  $(x - y - a + b) \geq 0$ .

$D_{p_2}$  : le demi-plan ouvert d'équations  $(x + y - a - b) < 0$ .

$D_{p_3}$  : le demi-plan ouvert d'équations  $(x - y - a + b) < 0$ .

$D_{p_4}$  : le demi-plan fermé d'équations  $(x + y - a - b) \geq 0$ .

D'où

$$(a, b) = \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 / (x, y)T(a, b)\} = (D_{p_1} \cap D_{p_2}) \cup (D_{p_3} \cap D_{p_4})$$



## CHAPITRE 4

### Structures Algébriques avec Exercices Corrigés

#### 1. Lois De Composition Internes

**DÉFINITION 1.1.** Soit  $G$  un ensemble, on appelle loi interne sur  $G$  toute application de  $G \times G$  dans  $G$ , on note souvent une loi interne par  $\star$  ou  $\delta$ .

**EXEMPLE 1.2.** (1) L'addition est une loi interne sur  $\mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b.$$

(2) L'application

$$\star : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longmapsto \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b - 2ab$$

est une loi interne dans  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ , en effet :  $\forall a, b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ , montrons que  $a + b - 2ab \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  plus précisément il faut prouver que  $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$  car il est évident que  $a + b - 2ab \in \mathbb{R}$ , on va raisonner par l'absurde on suppose que  $a + b - 2ab = \frac{1}{2}$ , sachant que  $a \neq \frac{1}{2}$ , et  $b \neq \frac{1}{2}$  :

$$a + b - 2ab = \frac{1}{2} \Rightarrow a(1 - 2b) + (b - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2} - b)(2a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \vee b = \frac{1}{2}$$

contradiction, alors ce qu'on a supposé est faux c'est à dire  $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$ , d'où  $a \star b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ,  $\star$  est une loi interne.

**DÉFINITION 1.3.** Soit  $G$  un ensemble et  $\star$  une loi interne.

(1)  $\star$  est dite **commutative** si et seulement si :

$$\forall x, y \in G, x \star y = y \star x.$$

(2)  $\star$  est dite **associative** si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$$

(3)  $\star$  admet un **élément neutre** si et seulement si :

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x \star e = e \star x = x.$$

(4) Soit  $x \in G$  on dit qu'un élément  $x' \in G$  est **l'élément symétrique** ou **inverse** de  $x$  si et seulement si  $x \star x' = x' \star x = e$ , où  $e \in G$  est l'élément neutre.

## 2. Groupes

**DÉFINITION 2.1.** On appelle groupe un ensemble  $G$  muni d'une loi ou opération interne  $\star$  telle que :

- (1)  $\star$  admet un élément neutre.
- (2) Tout élément de  $G$  admet un élément symétrique dans  $G$ .
- (3)  $\star$  est associative.

Si de plus  $\star$  est commutatif, alors  $(G, \star)$  est un groupe commutatif ou abélien.

- EXEMPLE 2.2.**
- (1)  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe commutatif.
  - (2)  $(\mathbb{R}, \times)$  n'est pas un groupe car 0 n'admet pas d'élément symétrique.
  - (3)  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  est un groupe commutatif.

## 3. Anneaux

**DÉFINITION 3.1.** Soit  $A$  un ensemble muni de deux lois de composition internes  $\star, \delta$ , on dit que  $(A, \star, \delta)$  est un anneau si :

- (1)  $(A, \star)$  est un groupe commutatif.
- (2)  $\forall x, y, z \in A$ ,

$$x\delta(y \star z) = (x\delta y) \star (x\delta z) \text{ et } (x \star y)\delta z = (x\delta z) \star (y\delta z),$$

distributivité à gauche et à droite.

- (3)  $\delta$  est associative .

Si de plus  $\delta$  est commutative, on dit que  $(A, \star, \delta)$  est un anneau commutatif.

Si  $\delta$  admet un élément neutre, on dit que  $(A, \star, \delta)$  est un anneau unitaire.

- EXEMPLE 3.2.**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  est un anneau commutatif et unitaire.

## 4. Corps

**DÉFINITION 4.1.** Soit  $\mathbb{K}$  un ensemble munie de deux lois de composition internes  $\star, \delta$ , on dit que  $(\mathbb{K}, \star, \delta)$  est un corps si :

- (1)  $(\mathbb{K}, \star, \delta)$  est un anneau unitaire.
- (2)  $(\mathbb{K} - \{e\}, \delta)$  est un groupe , où  $e$  est l'élément neutre de  $\star$ .

Si de plus  $\delta$  est commutative, On dit que  $(\mathbb{K}, \star, \delta)$  est un corps commutatif.

- EXEMPLE 4.2.**  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un corps commutatif.

## 5. Exercices Corrigés

**EXERCICE** 12. Soit  $*$  une loi définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- (1) Vérifier que  $*$  est commutative, non associative et admet un élément neutre.  
 (2) Résoudre les équations suivantes :  $2 * y = 5, x * x = 1$ .

**SOLUTION.** (1)  $*$  est commutative si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} / x * y = y * x.$$

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y * x.$$

Car le produit et la somme sont commutatives.

- (2)  $*$  est non associative, on suppose que c'est associative c'est à dire :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= [xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)] * z \\ &= (xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1))z + (z^2 - 1)[xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)]^2 - 1 \\ &= xyz + (x^2 - 1)(y^2 - 1)z + (z^2 - 1)x^2y^2 + 2(z^2 - 1)(x^2 - 1)(y^2 - 1)(xy) \\ &\quad + (z^2 - 1)(x^2 - 1)^2(y^2 - 1)^2 - (z^2 - 1)...(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * [yz + (y^2 - 1)(z^2 - 1)] \\ &= x(yz + (y^2 - 1)(z^2 - 1)) + (x^2 - 1)[yz + (y^2 - 1)(z^2 - 1)]^2 - 1 \\ &= xyz + x(y^2 - 1)(z^2 - 1) + (x^2 - 1)y^2z^2 + 2(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1)(yz) \\ &\quad + (x^2 - 1)(y^2 - 1)^2(z^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)...(2) \end{aligned}$$

contradiction (1)  $\neq$  (2) d'où  $*$  n'est pas associative

- (3)  $*$  admet un élément neutre si et seulement si

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} / x * e = e * x = x.$$

On prend juste une seule équation car la loi est commutative.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x * e = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, xe + (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e - 1)(x + (x^2 - 1)(e + 1)) = 0$$

Alors on a

$$\begin{cases} e - 1 = 0 \\ \vee \\ \forall x \in \mathbb{R}, x + (e + 1)x^2 - (e + 1) = 0 \end{cases}$$

On sait qu'un polynôme est nul  $\forall x$  si tous ses coefficients sont tous nuls, et comme le coefficient de  $x$  est  $1 \neq 0$  on déduit que le polynôme ne peut s'annuler, d'où  $e = 1$  est vraie.  $e = 1$  est l'élément neutre.

- (4)  $2 * y = 5 \Rightarrow 2y + 3(y^2 - 1) = 5 \Rightarrow y = 4/3 \vee y = -2$ .

$$(5) \quad x * x = 1 \Rightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1.$$

**EXERCICE** 13. On définit sur  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  loi interne  $*$  comme suit :

$$\forall (x, y), (x', y') \in G, (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

Montrons que  $(G, *)$  est un groupe non commutatif.

**SOLUTION**.  $(G, *)$  est un groupe si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un élément neutre} \\ \text{Tout élément de } E \text{ admet un inverse dans } E \end{array} \right.$$

(1)  $*$  est associative si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in G, [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')]?$$

$$\begin{aligned} [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', xy' + y) * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \dots (1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] &= (x, y) * (x'x'', x'y'' + y'') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \dots (2). \end{aligned}$$

(1) = (2) d'où le résultat.

(2)  $(e, e') \in G$  est un élément neutre de  $G$  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in G, (x, y) * (e, e') = (e, e') * (x, y) = (x, y)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (x, y) * (e, e') = (x, y) \\ (e, e') * (x, y) = (x, y) \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (xe, xe' + y) = (x, y) \\ (ex, ey + e') = (x, y) \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xe = x \\ xe' + y = y \\ ex = x \\ ey + e' = y \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e = 1 \in \mathbb{R}^*, \quad x \neq 0 \\ e' = 0 \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

ainsi  $(e, e') = (1, 0) \in G$  est l'élément neutre.



$$(3) \forall (x, y) \in G, \exists (x', y') \in G / (x, y) * (x', y') = (x', y') * (x, y) = (e, e') = (1, 0).$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y) * (x', y') = (1, 0) \\ (x', y') * (x, y) = (1, 0) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (xx', xy' + y) = (1, 0) \\ (x'x, x'y + y') = (1, 0) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \\ x'x = 1 \\ x'y + y' = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x' = 1/x \in \mathbb{R}^*, & x \neq 0 \\ y' = -y/x \in \mathbb{R}, & x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi le symétrique de  $(x, y) \in G$  est  $(x', y') = (1/x, -y/x) \in G$ , alors  $(G, *)$  est un groupe.

(4)  $*$  est non commutatif si et seulement si

$$\exists (x, y) = (2, 0) \in G, \exists (x', y') = (1, 1) \in G / (x, y) * (x', y') \neq (x', y') * (x, y).$$

$$\begin{cases} (2, 0) * (1, 1) = (2, 2) \quad \dots(1) \\ (1, 1) * (2, 0) = (2, 1) \quad \dots(2) \end{cases}$$

on remarque que (1)  $\neq$  (2), alors  $(G, *)$  est un groupe non commutatif.

**EXERCICE** 14. On définit sur  $\mathbb{Z}^2$  les deux lois  $\oplus, \odot$  comme suit :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) \odot (x', y') = (xx', xy' + yx').$$

Montrer que  $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$  est anneau commutatif.

**SOLUTION**.  $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$  est anneau commutatif si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{Z}^2, \oplus) \text{ est un groupe abélien} \\ \odot \text{ est associative et distributive par rapport à loi } \oplus. \\ \odot \text{ est une loi commutatif} \end{array} \right.$$

(1)  $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$  est un groupe abélien :

**a:**  $\oplus$  est commutative :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,$$

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = (x', y') \oplus (x, y).$$

**b:**  $\oplus$  est associative :

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2,$$

$$[(x, y) \oplus (x', y')] \oplus (x'', y'') = (x + x', y + y') \oplus (x'', y'') = (x + x' + x'', y + y' + y'') \dots(1)$$

$$(x, y) \oplus [(x', y') \oplus (x'', y'')] = (x, y) \oplus (x' + x'', y' + y'') = (x + x' + x'', y + y' + y'') \dots(2)$$

(1) = (2) d'où le résultat.

**c:** Il existe  $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$(e_1, e_2) \oplus (x, y) = (x, y) \oplus (e_1, e_2) = (x, y)$$

Puisque  $\oplus$  est commutative on traite une seule équation :

$$(x, y) \oplus (e_1, e_2) = (x, y) \implies (x + e_1, y + e_2) = (x, y)$$

Alors  $\begin{cases} x + e_1 = x \\ y + e_2 = y \end{cases} \implies \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$   $e = (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$  est l'élément neutre de  $\oplus$ .

**d:** Chaque élément de  $\mathbb{Z}^2$  possède un élément symétrique dans  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \exists (x', y') \in \mathbb{Z}^2$  :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (0, 0), (x', y') \oplus (x, y) = (0, 0),$$

il suffit de prendre  $x' = -x, y' = -y$  ainsi  $(-x, -y) \in \mathbb{Z}^2$  est l'élément symétrique de  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

Sachant **a, b, c, d**  $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$  est un groupe commutatif.

(2)  $- \odot$  est associative :  $\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$[(x, y) \odot (x', y')] \odot (x'', y'') = (xx', xy' + yx') \odot (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy'x'' + yx'x'') \dots (1)$$

$$(x, y) \odot [(x', y') \odot (x'', y'')] = (x, y) \odot (x'x'', x'y'' + y'x'') = (xx'x'', xx'y'' + xx'y'' + yx'x'') \dots (2)$$

(1) = (2) d'où le résultat.

$- \odot$  distributive par rapport à  $\oplus$  :  $\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x'', y'')] = [(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x'', y'')],$$

$$[(x, y) \oplus (x', y')] \odot (x'', y'') = [(x, y) \odot (x'', y'')] \oplus [(x', y') \odot (x'', y'')].$$

Montrons que :

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x'', y'')] = [(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x'', y'')],$$

On a :

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x'', y'')] = (x, y) \odot [x' + x'', y' + y'']$$

Ainsi

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x'', y'')] = (xx' + xx'', xy' + xy'' + yx' + yx'') \dots (3)$$

$$[(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x'', y'')] = (xx', xy' + yx') \oplus (xx'', xy'' + yx'').$$

De plus

$$[(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x'', y'')] = (xx' + xx'', xy' + yx' + xy'' + yx'') \dots (4)$$

d'où (3) = (4).

Montrons que :

$$[(x, y) \oplus (x', y')] \odot (x'', y'') = [(x, y) \odot (x'', y'')] \oplus [(x', y') \odot (x'', y'')].$$

On a :

$$[(x, y) \oplus (x', y')] \odot (x'', y'') = (x+x', y+y') \odot (x'', y'') = (xx'' + x'x, xy'' + x'y'' + yx'' + y'x'') \dots (5)$$

$$[(x, y) \odot (x'', y'')] \oplus [(x', y') \odot (x'', y'')] = (xx'', xy'' + yx'') \oplus (x'x'', x'y'' + y'x''),$$

$$[(x, y) \odot (x'', y'')] \oplus [(x', y') \odot (x'', y'')] = (xx'' + x'x'', xy'' + yx'' + x'y'' + y'x'') \dots (6)$$

d'où (5) = (6).

(3)  $\odot$  est commutatif :  $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x, y) \odot (x', y') = (xx', xy' + yx') \dots (7)$$

$$(x', y') \odot (x, y) = (x'x, x'y + y'x) = (xx', xy' + yx') \dots (8) = (7)$$

d'où le résultat.



## CHAPITRE 5

### Notion de $\mathbb{K}$ –Espaces vectoriels ( $\mathbb{K}$ étant un Corps Commutatif) avec Exercices Corrigés

#### 1. Espace vectoriel et sous espace vectoriel

Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif (généralement c'est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et soit  $E$  un ensemble non vide muni d'une opération interne notée  $(+)$  :

$$(+): E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

et d'une opération externe notée  $(\cdot)$  :

$$(\cdot): \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

**DÉFINITION 1.1.** *Un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  ou un  $\mathbb{K}$ –espace vectoriel est un triplet  $(E, +, \cdot)$  tel que :*

- (1)  $(E, +)$  est un groupe commutatif.
- (2)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- (3)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- (4)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x)$
- (5)  $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et ceux de  $\mathbb{K}$  des scalaires.

**PROPOSITION 1.2.** *Si  $E$  est  $\mathbb{K}$ –espace vectoriel, alors on a les propriétés suivantes :*

- (1)  $\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
- (2)  $\forall x \in E, -1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x$
- (3)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
- (4)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$
- (5)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, x \cdot \lambda = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E \vee \lambda = 0_{\mathbb{K}}$

**EXEMPLE 1.3.** (1)  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ –espace vectoriel,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{C}$ –e.v.

(2) Si on considère  $\mathbb{R}^2$  muni des deux opérations suivantes

$$(+): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\cdot): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((x, y), (x', y')) \rightarrow (x + x', y + y'), \quad (\lambda, (x, y)) \rightarrow (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

on peut facilement montrer que  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v.

**DÉFINITION 1.4.** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et soit  $F$  un sous ensemble non vide de  $E$ , on dit que  $F$  est sous espace vectoriel si  $(F, +, \cdot)$  est aussi un  $\mathbb{K}$ - espace vectoriel.

**REMARQUE 1.5.** Lorsque  $(F, +, \cdot)$  est  $\mathbb{K}$ - sous espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$ , alors  $0_E \in F$ .

Si  $0_E \notin F$  alors  $(F, +, \cdot)$  ne peut pas être un  $\mathbb{K}$ - sous espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$ .

**THÉORÈME 1.6.** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et  $F \subset E, F$  non vide on a les équivalences suivantes :

(1)  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

(2)  $F$  est stable par l'addition et par la multiplication c'est à dire :

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + y \in F, \lambda \cdot x \in F.$$

(3)  $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$ , d'où :

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \end{cases}$$

(4)  $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$ , d'où :

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \end{cases}$$

**EXEMPLE 1.7.** (1)  $\{0_E\}, E$  sont des sous espace vectoriel de  $E$ .

(2)  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$  est un sous espace vectoriel car ;

$$- 0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset.$$

$$- \forall (x, y), (x', y') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ montrons que } \lambda(x, y) + \mu(x', y') \in F ; \text{ c'est à dire } (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \in F$$

$$\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

$$\text{car } (x, y) \in F \Rightarrow x + y = 0, \text{ et } (x', y') \in F \Rightarrow x' + y' = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lambda(x, y) + \mu(x', y') \in F, F \text{ est sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.$$

(3)  $F = \{(x + y + z, x - y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}^3$ , en effet,

$$- 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F \text{ car } (0, 0, 0) = (0 + 0 + 0, 0 - 0, 0) \Rightarrow F \neq \emptyset.$$

$$- \forall X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ montrons que } \lambda X + \mu Y \in F ; \text{ on a :}$$

$$X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x + y + z, x - y, z),$$

$$Y \in F \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / Y = (x' + y' + z', x' - y', z'),$$

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y, \lambda z) + (\mu x' + \mu y' + \mu z', \mu x' - \mu y', \mu z')$$

$$\lambda X + \mu Y = ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), \lambda z + \mu z)$$

d'où  $\exists x'' = \lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}, \exists y'' = \lambda y + \mu y' \in \mathbb{R}, \exists z'' = \lambda z + \mu z' \in \mathbb{R}$ ,  
ainsi

$$\lambda X + \mu Y = (x'' + y'' + z'', x'' - y'', z'') \in F.$$

**THÉORÈME 1.8.** *L'intersection d'une famille non vide de s.e.v est un sous espace vectoriel.*

**REMARQUE 1.9.** *La réunion de deux s.e.v n'est pas forcément un s.e.v.*

**EXEMPLE 1.10.**  $E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \cup E_2$  n'est un s.e.v car  $U_1 = (1, 0), U_2 = (0, 1) \in E_2$  et  $U_1 + U_2 = (1, 1) \notin E_1 \cup E_2$ , car  $(1, 1) \notin E_1 \wedge (1, 1) \notin E_2$ .

## 2. Somme de deux sous espaces vectoriels

Soit  $E_1, E_2$  deux sous espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$ , on appelle somme de deux espaces vectoriels,  $E_1$  et  $E_2$  et on note  $E_1 + E_2$  l'ensemble suivant :

$$E_1 + E_2 = \{U \in E / \exists U_1 \in E_1, \exists U_2 \in E_2 / U = U_1 + U_2\}.$$

**PROPOSITION 2.1.** *La somme de deux s.e.v de  $E_1$  et  $E_2$  (d'un même  $\mathbb{K}$ -e.v) est un s.e.v de  $E$  contenant  $E_1 \cup E_2$ , i.e.,  $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$ .*

## 3. Somme directe de deux sous espaces vectoriels

On dira que la somme  $E_1 + E_2$  est directe si  $\forall U = U_1 + U_2$ , il existe un unique vecteur  $U_1 \in E_1$ , un unique vecteur  $U_2 \in E_2$ ,  $U = U_1 + U_2$ , on note  $E_1 \oplus E_2$ .

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $E_1, E_2$  deux s.e.v d'un même  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$  la somme  $E_1 + E_2$  est directe si  $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ .*

**3.1. Sous espace supplémentaires.** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux s.e.v d'un même  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$ , on dit que  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires si  $E_1 \oplus E_2 = E$

**EXEMPLE 3.2.**  $E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$ ,  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires.

## 4. Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  par  $E$ .

**DÉFINITIONS 4.1.** *Soit  $E$  un e.v et  $e_1, e_2, \dots, e_n$  des éléments de  $E$ ,*

- (1) *On dit que  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  sont libres ou linéairement indépendants, si  $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  :*

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0, \text{ solution unique.}$$

*Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.*

- (2) *On dit que  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est une famille génératrice de  $E$ , ou que  $E$  est engendré par  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  si  $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  /*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

(3) Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est une famille libre et génératrice de  $E$ , alors  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est appelée une base de  $E$ .

**REMARQUE 4.2.** Dans un espace vectoriel  $E$ , tout vecteur non nul est libre.

**THÉORÈME 4.3.** Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  et  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  sont deux bases de l'espace vectoriel  $E$ , alors  $n = m$ . En d'autres termes, si un espace vectoriel admet une base alors toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre ne dépend pas de la base mais il dépend seulement de l'espace  $E$ . D'où la définition suivante.

**DÉFINITION 4.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de base  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , alors  $\dim(E) = \text{Card}(B)$ .

où  $\dim(E)$  : est la dimension de  $E$  et  $\text{Card}(B)$  : est le cardinal de  $B$ .

**REMARQUE 4.5.** donc chercher une base pour un espace vectoriel c'est trouver une famille de vecteurs dans  $E$ , qui forment une famille libre et génératrice de  $E$ , le nombre d'éléments de cette famille représente  $\dim E$ .

**EXEMPLE 4.6.** (1) Cherchons une base de  $\mathbb{R}^3$ , il faut trouver une famille de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  qui engendrent  $\mathbb{R}^3$  et qui soit libre :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

En posant,  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$  on voit bien que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est une famille génératrice, et aussi libre en effet ; si  $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$  :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$  est appelée base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Montrons que les  $f_1 = (1, -1), f_2 = (1, 1)$  il forment une base de  $\mathbb{R}^2$ , montrons que

(a)  $\{f_1, f_2\}$  est génératrice  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1)$$

ainsi

$$\lambda_2 = \frac{x + y}{2}, \lambda_1 = \frac{x - y}{2},$$

donc  $\{f_1, f_2\}$  est génératrice.

(b)  $\{f_1, f_2\}$  est libre  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1) = (0, 0) \Rightarrow 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

**THÉORÈME 4.7.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  :

(1) Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est base de  $E \Leftrightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est génératrice  $\Leftrightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est libre.

(2) Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  sont  $p$  vecteurs dans  $E$ , avec  $p > n$ , alors  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  ne peut être libre, de plus si  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  est génératrice, alors il existe  $n$  vecteurs parmi  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  forment une base  $E$ .



- (3) Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  sont  $p$  vecteurs dans  $E$ , avec  $p < n$ , alors  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  ne peut être génératrice de plus si  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  est libre, alors il existe  $(n - p)$  vecteurs parmi  $\{e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n\}$  dans  $E$  tels que  $\{e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$  est une base pour  $E$ .
- (4) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $\dim F \leq n$ , et de plus  $\dim F = n \Leftrightarrow E = F$ .

**EXEMPLE 4.8.** (1) Dans l'exemple précédent  $f_1 = (1, -1)$ ,  $f_2 = (2, 1)$  pour montrer que  $\{f_1, f_2\}$  forme une base de  $\mathbb{R}^2$ , il suffit de montrer que  $\{f_1, f_2\}$  est soit libre ou génératrice. (cette propriété est vraie dans le cas des espaces vectoriels de dimensions finies).

- (2) Pour montrer que  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice car  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ,  $\{f_1, f_2\}$  est libre car :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ (solution unique)}$$

donc  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- (3) Cherchons une base pour  $F = \{(x + y, x - z, -y - z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ , comme  $F \subset \mathbb{R}^3$  alors  $\dim F \leq 3$ , donc la base de  $F$  ne possède pas plus de trois vecteurs.

$$(x + y, x - z, y - z) = x(1, 1, 0) + y(1, 0, -1) + z(0, -1, -1)$$

ainsi  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0, -1)$ ,  $v_3 = (0, 1, -1)$  forment une famille génératrice pour  $F$ , si cette famille est libre, alors elle formera une base pour  $F$ .  
 $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) + \lambda_3(0, -1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

Donc  $\{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, -1, -1)\}$  n'est pas libre, mais d'après le théorème précédent, on peut extraire de cette famille une base de  $F$ , pour le faire on doit chercher deux vecteurs de famille qui sont libres, si on les trouve alors ils forment une base pour  $F$ , si on ne trouve pas on prend un vecteur non nul et ce vecteur sera une base pour  $F$ . Prenons par exemple  $\{v_1, v_2\}$

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

ainsi  $\{v_1, v_2\}$  est une base pour  $F$  et  $\dim F = 2$

## 5. Notion d'Application Linéaire

### 5.1. Généralités.

**DÉFINITION 5.1.** (1) Soit  $(E, +, \cdot)$  et  $(F, +, \cdot)$  deux  $\mathbb{K}$ - espaces vectoriels et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x),$$

où d'une manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

- (2) Si de plus  $f$  est bijective, on dit alors que  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .
- (3) Une application linéaire de  $(E, +, \cdot)$  dans  $(E, +, \cdot)$  est dite un endomorphisme.
- (4) Un isomorphisme de  $(E, +, \cdot)$  dans  $(E, +, \cdot)$  est aussi appelé un automorphisme de  $E$  dans  $E$ .

**EXEMPLE 5.2.** (1) L'application

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x - y$$

est une application linéaire, car :  $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f_1(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) &= f_1(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = \lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y') \\ \Rightarrow f_1(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) &= \lambda(x - y) + \mu(x' - y') = \lambda f_1(x, y) + \mu f_1(x', y'). \end{aligned}$$

(2) L'application

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (-x + y, x - 5z, y)$$

est une application linéaire, car :  $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f_2(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= f_2(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ \Leftrightarrow f_2(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= (-\lambda x - \mu x' + \lambda y + \mu y', \mu x' + \mu x' - 5\lambda y - 5\mu y', \lambda y + \mu y') \\ \Leftrightarrow f_2(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= (-\lambda x + \lambda y, \lambda x - 5\lambda z, \lambda y) + (-\mu x' + \mu y', \mu x' - 5\mu z', \mu y') \\ \Leftrightarrow f_2(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= \lambda(-x + y, x - 5z, y) + \mu(-x' + y', x' - 5z', y') = \lambda f_2(x, y, z) + \mu f_2(x', y', z'). \end{aligned}$$

(3) L'application

$$f_3 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -3x$$

est isomorphisme, en effet,  $f_3$  est linéaire car :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f_3(\lambda x + \mu y) = -3\lambda x - 3\mu y = \lambda f_3(x) + \mu f_3(y),$$

**REMARQUE 5.3.** On peut montrer facilement la somme de deux applications linéaires est une application linéaire, aussi le produit d'une application linéaire par un scalaire et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

**PROPOSITION 5.4.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

$$1.) f(O_E) = O_F, \quad 2.) \forall x \in E, f(-x) = -f(x).$$

PREUVE. On a,

$$1.) f(O_E) = f(O_E + O_E) = f(O_E) + f(O_E) \Rightarrow f(O_E) = O_F.$$

$$2.) f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(O_E) = O_F \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

**DÉFINITION 5.5.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

(1) On appelle image de  $f$  et on note  $Im f$  l'ensemble défini comme suit

$$Im f = \{y \in F / \exists x \in E : f(x) = y\} = \{f(x) / x \in E\}.$$

(2) On appelle noyau de  $f$  et on note  $\ker f$  l'ensemble défini comme suit :

$$\ker f = \{x \in E / f(x) = O_F\},$$

On note parfois  $\ker f$ , par  $f^{-1}(\{0\})$ .

**PROPOSITION 5.6.** Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors si  $\dim Im f = n < +\infty$ , alors  $n$  est appelé rang de  $f$  et on note  $rg(f)$ .

$Im f$  et  $\ker f$  sont des sous espaces vectoriels de  $E$ .

**EXEMPLE 5.7.** (1) Déterminons le noyau de l'application  $f_1$ ,

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -2y\}$$

ainsi

$$\ker f = \{(-2y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1) / y \in \mathbb{R}\}$$

donc le  $\ker f$  est un sous espace vectoriel engendré par  $u = (-2, 1)$  donc il est de dimension 1, et sa base est  $\{u\}$ .

(2) Cherchons l'image de

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (-x + y, x - z, y)$$

$$Im f_2 = \{f(x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(-x + y, x - z, y) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$Im f_2 = \{x(-1, 1, 0) + y(1, 0, 1) + z(0, -1, 0) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

donc  $Im f_2$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\}$  il est facile de montrer que cette famille est libre et donc il forment une base de  $\mathbb{R}^3$  donc  $\dim Im f_2 = 3, rg(f_2) = 3, Im f = \mathbb{R}^3$ .

**PROPOSITION 5.8.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  on a les équivalences suivantes :

(1)  $f$  est **surjective**  $\Leftrightarrow Im f = F$ .

(2)  $f$  est **injective**  $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$ .

**EXEMPLE 5.9.** Dans l'exemple  $\text{Im} f_2 = \mathbb{R}^3$  donc  $f_2$  est surjective, montrons que  $f_2$  est injective

$$\ker f_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f_2(x, y, z) = (0, 0, 0)\},$$

$$\Rightarrow \ker f_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (-x + y, x - z, y) = (0, 0, 0)\} \Rightarrow x = y = z = 0$$

donc  $\ker f_2 = \{(0, 0, 0)\}$ , ainsi  $f_2$  est bijective.

## 5.2. Application Linéaire sur des espace de dimension finies.

**PROPOSITION 5.10.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espace vectoriels et  $f, g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ , alors  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$ .

PREUVE. L'implication ( $\Leftarrow$ ) est évidente.

Pour ( $\Rightarrow$ ) on a  $E$  est engendré par  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , donc  $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ , comme  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n),$$

$$g(x) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + \dots + \lambda_n g(e_n),$$

donc si on suppose que  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, f(e_k) = g(e_k)$  donc on déduit que  $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ .

**REMARQUE 5.11.** Pour que deux applications linéaires  $f$  et  $g$  de  $E$  dans  $F$  soient égales il suffit qu'elles coïncident sur la base du  $\mathbb{K}$ - espace vectoriel  $E$ .

**EXEMPLE 5.12.** Soit  $g$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$g(1, 0) = (2, 1), g(0, 1) = (-1, -1)$$

alors déterminons la valeur de  $g$  en tous points de  $\mathbb{R}^2$ , en effet on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$g(x, y) = g(x(1, 0) + y(0, 1)) = xg(1, 0) + yg(0, 1) = x(2, 1) + y(-1, -1) = (2x - y, x - y)$$

ainsi  $g(x, y) = (2x - y, x - y)$ .

**THÉORÈME 5.13.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  avec dimension de  $E$  est finie, on a :

$$\boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim \text{Im}(f)}$$

**EXEMPLE 5.14.** On a montré que  $\dim \ker f_1 = 1$  avec  $f_1$  définie

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + 2y$$

comme  $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker f_1 = 2 - 1 = 1$ .

**PROPOSITION 5.15.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  avec  $\dim E = \dim F = n$ . On a alors les équivalences suivantes :

$f$  est isomorphisme  $\Leftrightarrow f$  est surjective  $\Leftrightarrow f$  est injective

$$\Leftrightarrow \dim \text{Im}(f) = \dim F \Leftrightarrow \text{Im} f = F \Leftrightarrow \dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\},$$

de cette proposition, on déduit que si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  avec  $\dim E$  finie alors nécessairement  $\dim E = \dim F$  en d'autres termes si  $\dim E \neq \dim F$  alors  $f$  ne peut être un isomorphisme.

**EXEMPLE 5.16.** (1) L'application  $f_1$  n'est pas un isomorphisme car  $\dim \mathbb{R}^2 \neq \dim \mathbb{R}$ .

(2) Soit  $g(x, y) = (2x - y, x - y)$ ,  $g$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  on a,  $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}^2$  est un isomorphisme car  $\dim \ker g = 0$  en effet :

$$\ker g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (2x - y, x - y) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\},$$

c'est même un automorphisme.

## 6. Exercices Corrigés

**EXERCICE** 15. On considère dans  $\mathbb{R}^3$ , le sous ensemble  $F$  défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

(1) Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Donner une base de  $F$ , quelle est sa dimension ?

(3)  $F$  est-il égale à  $\mathbb{R}^3$  ?

**SOLUTION.** (1) :

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall X, Y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda X + \mu Y \in F \end{cases}$$

$$- 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset, \text{ car } 2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0.$$

$$- \forall X = (x, y, z), Y = (x', y', z') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ montrons que :}$$

$$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F,$$

$$\text{c'est à dire } (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \in F$$

$$2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(2x + y - z) + \mu(2x' + y' - z') = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

car :

$$(x, y, z) \in F \Rightarrow 2x + y - z = 0,$$

$$\text{et } (x', y', z') \in F \Rightarrow 2x' + y' - z' = 0.$$

Ainsi  $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F$ ,  $F$  est sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Base de  $F$  : soit  $X \in F \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + y$ ,  
 $X = (x, y, z) = (x, y, 2x + y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1)$ , ainsi

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\} = \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

D'où  $F$  est engendré par  $\{v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (0, 1, 1)\}$ , montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

d'où le résultat. Alors la dimension de  $F$  est égale à 2, car  $\{v_1, v_2\}$  est une base (libre et génératrice) de  $\mathbb{R}^3$ .

(3)  $F \neq \mathbb{R}^3$  car  $\dim F = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ .

**EXERCICE** 16. On considère dans  $\mathbb{R}^3$ , le sous ensemble  $F$  défini par :

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

(1) Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Donner une base de  $F$ , quelle est sa dimension ?

(3)  $F$  est-il égale à  $\mathbb{R}^3$  ?

**SOLUTION**. (1)  $(0, 0, 0) \in F$  car  $(0, 0, 0) = (0 - 0, 2 \cdot 0 + 0 + 4 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0) \Rightarrow F \neq \emptyset$ .

$\forall X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  montrons que  $\lambda X + \mu Y \in F$ ; on a :

$$X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z),$$

$$Y \in F \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / Y = (x' - y', 2x' + y' + 4z', 3y' + 2z'),$$

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 4(\lambda z + \mu z), 3(\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z))$$

$$\lambda X + \mu Y = ((\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 4(\lambda z + \mu z), 3(\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z))$$

d'où  $\exists x'' = \lambda x + \mu x', \exists y'' = \lambda y + \mu y', \exists z'' = \lambda z + \mu z'$ , ainsi

$$\lambda X + \mu Y = (x'' - y'', 2x'' + y'' + 4z'', 3y'' + 2z'') \in F.$$

(2) Base de  $F$  : soit  $X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)$ ,  
 $X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) = x(1, 2, 0) + y(-1, 1, 3) + z(0, 4, 2)$ , ainsi

$$F = \{x(1, 2, 0) + y(-1, 1, 3) + z(0, 4, 2) / x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

D'où  $F$  est engendré par  $\{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (-1, 1, 3), v_3 = (0, 4, 2)\}$ , montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(-1, 1, 3) + \lambda_3(0, 4, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3, 3\lambda_2 + 2\lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2, \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3, \end{cases} \Rightarrow 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

d'où le résultat. Alors la dimension de  $F$  est égale à 3, car  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une base (libre et génératrice) de  $\mathbb{R}^3$ .

(3)  $F = \mathbb{R}^3$  car  $\dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ .

**EXERCICE** 17. On considère dans  $\mathbb{R}^4$ , le sous ensemble  $F$  défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + z = 0) \wedge (y + t = 0)\}$$

(1) Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

(2) Donner une base de  $F$ , déduire sa dimension.

**SOLUTION.** (1)  $(0, 0, 0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$ , car  $(0 + 0 = 0) \wedge (0 + 0 = 0)$ .

$\forall X = (x, y, z, t), Y = (x', y', z', t') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  montrons que :

$$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in F,$$

c'est à dire  $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in F$

$$\begin{cases} X \in F \Rightarrow (x + z = 0) \wedge (y + t = 0) \\ Y \in F \Rightarrow (x' + z' = 0) \wedge (y' + t' = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda(x + z) = 0 \wedge \mu(x' + z') = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0 \\ \wedge \\ \lambda(y + t) = 0 \wedge \mu(y' + t') = 0 \Rightarrow \lambda y + \mu y' + \lambda t + \mu t' = 0 \end{cases}$$

ainsi  $\lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0 \wedge \lambda y + \mu y' + \lambda t + \mu t' = 0$  c'est dire  $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in F$  d'où le résultat.

(2) Base de  $F$  : soit  $X \in F \Leftrightarrow x = -z \wedge y = -t$ ,

$$X = (x, y, z, t) = (x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1), \text{ ainsi}$$

$$F = \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

D'où  $F$  est engendré par  $\{v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (0, 1, 0, -1)\}$ , montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 0, -1, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2) = (0, 0, 0, 0)$$

d'où le résultat. Alors la dimension de  $F$  est égale à 2, car  $\{v_1, v_2\}$  est une base (libre et génératrice) de  $\mathbb{R}^4$ .

**REMARQUE 6.1.** C'est un exemple de l'intersection de deux s.e.v est un s.e.v on pouvait l'écrire sous cette forme  $F = F_1 \cap F_2$  où

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + z = 0)\},$$

$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (y + t = 0)\}.$$

est montrer que  $F_1, F_2$  sont des s.e.v de  $\mathbb{R}^4$ .

**EXERCICE** 18. (1) Montrer que la famille  $\{(1, 2), (-1, 1)\}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

(2) quelle sont les famille libre parmi les familles suivantes :  $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ ,  $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$ .

(3) Montrer que la famille  $\{(1, 2), (-1, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , et que la famille  $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**SOLUTION.** (1) La famille  $\{(1, 2), (-1, 1)\}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si

$$\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / X = \lambda(1, 2) + \mu(-1, 1).$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , cherchons  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tel que :

$$(x, y) = \lambda(1, 2) + \mu(-1, 1) = (\lambda - \mu, 2\lambda + \mu)$$

ainsi

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu, & \dots(1) \\ y = 2\lambda + \mu, & \dots(2) \end{cases} \quad (1) + (2) \Rightarrow \lambda = \frac{x+y}{3} \text{ et } \mu = \frac{-2x+y}{3}$$

d'où cette famille est génératrice.

(2) quelle sont les famille libre parmi les familles suivantes :  $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ ,  $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$ .

i)  $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$  est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$F_1$  est libre.

ii)  $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$  est n'est pas libre car

$$\exists \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1 \in \mathbb{R}, \lambda_1(0, 1, 1, 0) + \lambda_2(1, 1, 1, 0) + \lambda_3(2, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

(3) La famille  $\{(1, 2), (-1, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , car quand le nombre de vecteurs = 2 = dim  $\mathbb{R}^2$  il suffit de montrer qu'elle est soit génératrice ou bien libre pour qu'elle puisse être une base or d'après la question (1) elle est génératrice d'où le résultat.

La famille  $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , car le cardinale de  $F_1$  est égale à 3 = dim  $\mathbb{R}^3$  est  $F_1$  étant libre, alors c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**EXERCICE** 19. Soit l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$

(1) Montrer que  $f$  est linéaire.

(2) Déterminer  $\ker f$ , et  $\text{Im} f$  et donner leurs dimensions,  $f$  est-elle bijectives ?

(3) Déterminer  $f \circ f$ .

**SOLUTION.** (1)  $f$  est linéaire si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2; f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y').$$



$$\begin{aligned}
f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\
&= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y') \\
&= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) + (\beta x' + \beta y', \beta x' - \beta y') \\
&= \alpha(x + y, x - y) + \beta(x' + y', x' - y') \\
&= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y')
\end{aligned}$$

d'où  $f$  est linéaire.

(2) Déterminons  $\ker f$ , et  $\text{Im} f$  et donner leurs dimensions,  $f$  est-elle bijectives ?

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0 \wedge x - y = 0\} \\
&= \{(0, 0)\}
\end{aligned}$$

ainsi  $\dim \ker f = 0$ .

$$\begin{aligned}
\text{Im} f &= \{(x + y, x - y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{x(1, 1) + y(1, -1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.
\end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Im} f$  est engendré par deux vecteur qui sont libre, alors  $\dim \text{Im} f = 2$ .  
Sachant que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée  $f$  est bijective si elle est soit injective ou bien surjective or  $f$  est injective car  $\ker f = \{(0, 0)\}$  et aussi surjective car  $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Im} f = 2$  c'est à dire  $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$ .

(3) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\begin{aligned}
f \circ f(x, y) &= f(f(x, y)) = f(x + y, x - y) \\
&= ((x + y) + (x - y), (x + y) - (x - y)) \\
&= (2x, 2y) = 2(x, y) = 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}$$

**EXERCICE** 20. Soit l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y).$$

(1) Monter que  $f$  est linéaire.

(2) Déterminer  $\ker f$ , et  $\text{Im} f$  et donner leurs dimensions,  $f$  est-elle bijectives ?

**SOLUTION**. (1)  $f$  est linéaire si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2; f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y').$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\
&= (2\alpha x + 2\beta x' - 4\alpha y - 4\beta y', \alpha x + \beta x' - 2\alpha y - 2\beta y') \\
&= (2\alpha x - 4\alpha y, \alpha x - 2\alpha y) + (2\beta x' - 4\beta y', \beta x' - 2\beta y') \\
&= \alpha(2x - 4y, x - 2y) + \beta(2x' - 4y', x' - 2y') \\
&= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y')
\end{aligned}$$

d'où  $f$  est linéaire.

(2) Déterminons  $\ker f$ , et  $\text{Im} f$  et donner leurs dimensions,  $f$  est-elle bijectives ?

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 4y = 0 \wedge x - 2y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\} \\ &= \{(2y, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1) / y \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

ainsi  $\ker f$  est engendré par le vecteur  $(2, 1) \neq 0$ , ainsi  $\dim \ker f = 1$ ,  $f$ , alors n'est pas injective.

$$\begin{aligned}\text{Im} f &= \{(2x - 4y, x - 2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(2, 1) + y(-4, -2) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Im} f$  est engendré par deux vecteur qui ne sont pas libre car  $(-4, -2) = -2(2, 1)$  alors  $\dim \text{Im} f = 1$  on peut aussi utiliser le fait que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée  $f$ , alors  $\dim \ker f + \dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^2$ ,  $\Rightarrow \dim \text{Im} f = 2 - 1 = 1$ .

(3)  $f$  n'est pas bijective car il n'est ni injective ni surjective.

## CHAPITRE 6

### Notion de Matrice Associée à une Application Linéaire et Calcul Algébrique sur les Matrices avec Exercices Corrigés

Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif.

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels de dimension finies  $n$  et  $m$ ,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , soit  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ ,  $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  une base de  $F$ , les vecteurs  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$  sont de vecteurs dans  $F$  comme  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  est une base de  $F$ , alors  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$  s'écrivent donc comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base  $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ . On a pour tout  $j = 1, \dots, n$ .

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \dots + a_{mj}e'_m.$$

$$\left( \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \begin{array}{l} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e'_m \end{array}$$

Le tableau suivant :

$$\left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right]$$

est appelé matrice associée à  $f$  relativement aux bases  $B$  et  $B'$ . On note la matrice  $(a_{ij})$  où  $i$  désigne l'indice de ligne et  $j$  l'indice de colonne.

On introduit maintenant la notion de matrice et les opérations algébriques des matrices.

#### 1. Espace vectoriel des matrices

**DÉFINITION 1.1.** *On appelle une matrice dans  $\mathbb{K}$  de type  $(n, p)$  un tableau rectangulaire  $A$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes.*

$$A = \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array} \right)$$

On note  $a_{ij}$  l'élément qui se trouve à la ligne numéro  $i$  et la colonne  $j$  et on note la matrice  $A$  par  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ . L'ensemble des matrices de type  $(n, p)$  est noté  $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ .

(1) Pour  $n = 1$ , on dit que  $A$  est une matrice ligne,  $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p})$ .

(2) Pour  $p = 1$  on dit que  $A$  est une matrice colonne,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1p} \end{pmatrix}$ .

(3) Pour  $n = p$ , on dit que  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  et on note  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**EXEMPLE 1.2.** (1)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A_1$  est une matrice de type  $(4, 3)$ .

(2)  $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2$  est une matrice de type  $(2, 4)$ .

(3)  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3$  est une matrice carrée d'ordre 2.

**DÉFINITION 1.3.** Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  deux matrices de types  $(n, p)$ ,

(1) On dit que  $A = B$  si  $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p; a_{ij} = b_{ij}$ .

(2) La transposée de la matrice  $A$  est une matrice notée  $A^t$  définie par

$$A^t = (a_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n},$$

autrement dit  $A^t$  c'est la matrice de type  $(p, n)$  obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a :  $(A^t)^t = A$ .

**EXEMPLE 1.4.** (1)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

(2)  $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(3)  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ .

**THÉORÈME 1.5.** En munissant l'ensemble  $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$  par les opérations suivantes :

$$(+): \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}.$$

et

$$(\cdot): \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$

$$\left( \lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Alors  $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  est  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \times p$ , sachant que l'élé-

ment neutre de l'addition est la matrice nulle  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

## 2. Produit de deux matrices

**DÉFINITION 2.1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{(p,m)}(\mathbb{K})$ , on définit le produit de la matrice  $A$  par  $B$  comme étant une matrice  $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ , avec  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$ .

**REMARQUE 2.2.** (1) L'élément  $c_{ij}$  de la matrice  $C$  se calcule en additionnant le produit des éléments de la ligne  $i$  de la matrice  $A$  par les éléments de la colonne  $j$  de la matrice  $B$ .

(2) Le produit de deux matrices ne peut se faire que si le nombre de colonnes de la matrice  $A$  correspond au nombre de lignes de la matrice  $B$ .

**EXEMPLE 2.3.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A$  est de type  $(2, 3)$  et  $B$  de type  $(3, 4)$  ainsi  $C$  sera de type  $(2, 4)$ .

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1.1 + 1.2 + 0.1 & 1.2 + 1.0 + 0.1 & 1.0 + 1.1 + 0.0 & 1.1 + 1.1 + 0.0 \\ 2.1 + 2.2 + 0.1 & 2.2 + 2.0 + 0.1 & 2.0 + 2.1 + 0.0 & 2.1 + 2.1 + 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**REMARQUE 2.4.** Le produit de deux matrices n'est pas commutatif voici un exemple :

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 3. Matrices carrées

**DÉFINITION 3.1.** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ ,

- (1) La suite des éléments  $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$  est appelée la diagonale principale de  $A$ .
- (2) La trace de  $A$  est le nombre  $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ .
- (3)  $A$  est dite matrice diagonale si  $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$  c'est à dire que les éléments de  $A$  sont tous nuls sauf la diagonale principale.
- (4)  $A$  est dite matrice triangulaire supérieure (resp inférieure) si  $a_{ij} = 0, \forall i > j$ , (resp  $i < j$ ), c'est à dire les éléments qui sont au dessous (resp au dessus) de la diagonale sont nuls).
- (5)  $A$  est dite symétrique si  $A = A^t$ .

**EXEMPLE 3.2.** (1)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_1$  est une matrice diagonale.

(2)  $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $A_2$  est une matrice triangulaire inférieure.

(3)  $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3$  est une matrice triangulaire supérieure.

(4)  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $A_4$  est une matrice symétrique.

**PROPOSITION 3.3.** Le produit des matrices est une opération interne dans  $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$  et il admet un élément neutre la matrice nommée matrice identité notée  $I_n$  définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**DÉFINITION 3.4.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$  on dit que  $A$  est inversible s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$  telle que  $A.B = B.A = I_n$ .

**EXEMPLE 3.5.** Montrons que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est inversible et ceci en cherchant la matrice  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  telle que

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B \cdot A \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a - b \\ c & 2c - d \end{pmatrix} \\ &B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 4. Les Déterminants

**DÉFINITION 4.1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  une matrice dans  $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$ , on appelle déterminant de  $A$  le nombre réel donné par :  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . On le note  $\det(A)$  ou  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ,

**EXEMPLE 4.2.** Calculons le  $\det(A)$ ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 0 \cdot (2) = -1.$$

**DÉFINITION 4.3.** De même, on définit le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**EXEMPLE 4.4.**

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (-1) \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow |A| = -1 + 0 - 12 = -13 \end{aligned}$$

**PROPOSITION 4.5.** Pour calculer le déterminant d'une matrice  $A$  on peut développer  $A$  suivant n'importe quelle ligne ou colonne.

Suivant cette proposition il vaut mieux choisir la ligne ou colonne contenant le plus de zéros.

**EXEMPLE 4.6.** On reprend la même matrice de l'exemple précédent mais calculer suivant la troisième ligne on aura :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 0 - 13 + 0 = -13$$

on calcule juste un déterminant au lieu de trois.

**DÉFINITION 4.7.** De même, on définit le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

**DÉFINITION 4.8.** Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ , le déterminant suivant la  $j$ -ème colonne est :

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}, j = 1, \dots, n.$$

Le déterminant suivant la  $i$ -ème ligne est :

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}, i = 1, \dots, n.$$

Où  $A_{ij}$  représente ce que nous appelons le déterminant mineur du terme  $a_{ij}$ , le déterminant d'ordre  $n - 1$  obtenu de  $\det(A)$  en supprimant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne.

**PROPOSITION 4.9.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on a :

- (1)  $\det(A) = \det(A^t)$ .
- (2)  $\det(A) = 0$  si deux lignes de  $A$  sont égales (ou deux colonnes).
- (3)  $\det(A) = 0$  si deux lignes de  $A$  sont proportionnelles (ou deux colonnes le sont).
- (4)  $\det(A) = 0$  si une ligne est combinaison linéaire de deux autres lignes de  $A$  (même chose pour les colonnes).



(5)  $\det(A)$  ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes (même chose pour les colonnes).

(6) Si  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ .

**EXEMPLE 4.10.** (1)  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$ , car la ligne 1 est égale à la ligne 3,  $L_1 = L_3$ .

(2)  $|B| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -15 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , car  $L_1 = 3 * L_4$ .

(3)  $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , car  $C_1 = C_2$ .

**DÉFINITION 4.11.** Soit  $V_1, V_2, \dots, V_n$ ,  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  on appelle déterminant des vecteurs  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  et on le note  $\det(V_1, V_2, \dots, V_n)$  le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs  $V_1, V_2, \dots, V_n$ .

**EXEMPLE 4.12.** Soit  $V_1 = (1, 1, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$ , alors

$$\det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

**PROPOSITION 4.13.** Soit  $V_1, V_2, \dots, V_n$ ,  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  on  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$

**EXEMPLE 4.14.** Soit  $V_1 = (1, 2, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$ , forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , car  $\det(V_1, V_2, V_3) = -1 \neq 0$ .

#### 4.1. Le rang d'une matrice.

**DÉFINITION 4.15.** Soit  $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ , on appelle rang de  $A$  et on note  $rgA$  l'ordre de la plus grande matrice carrée  $B$  prise (extraite) dans  $A$  telle que  $\det B \neq 0$ .

**EXEMPLE 4.16.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 2 \neq 0$ ,  $rgA = 2$ .

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 0 \neq 0$ ,  $rgA = 1$ .

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $rgA < 4 (rgA \leq 3)$  la plus grande matrice carrée contenue

dans  $A$  est d'ordre 3, dans cet exemple on a : 4 possibilités :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det C_1 = \det C_2 = 0$  et  $\det C_3 = \det C_4 = 0$  donc le  $\text{rg} A < 3$  et on a :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2.$$

**THÉORÈME 4.17.** le rang d'une matrice est égale au nombre maximale de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

**DÉFINITION 4.18.** Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle cofacteur d'indice  $i$  et  $j$  de  $A$  le scalaire

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Avec  $A_{ij}$  est la matrice déduite de  $A$  par suppression de la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

La matrice  $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice  $C^t$  est appelée la comatrice de  $A$ .

**EXEMPLE 4.19.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ . Calculons

les cofacteurs de  $A$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \det(A_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \det(A_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \det(A_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \det(A_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \det(A_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et la comatrice et

$$C^t = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**THÉORÈME 4.20.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas la matrice inverse de  $A$  est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t.$$

Où  $C^t$  est la comatrice de  $A$ .

**EXEMPLE 4.21.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = 2 \neq 0$  donc elle est inversible, de plus

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que  $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$ .

## 5. Relations entre une application linéaire et sa matrice Associée

**DÉFINITION 5.1.** La matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  est appelée la matrice de  $f$  suivant les bases  $B$  et  $B'$  et elle est parfois notée  $\mathcal{M}_{(B, B')}(f)$ . Si  $E = F$  et  $B = B'$ , on dit que  $A$  est la matrice de  $f$  suivant la base  $B$  et on la note  $\mathcal{M}_{(B)}(f)$ .

**EXEMPLE 5.2.** (1)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y + z, x - y)$$

$\mathbb{R}^3$  sa base canonique  $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$  et  $\mathbb{R}^2$  sa base canonique  $B' = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$ ,

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = v_1 + v_2$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1) = v_1 - v_2.$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 0) = v_1$$

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$$

(2)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$$

$B = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (-1, 1)\}$  et  $B' = \{v_1 = (0, 2), v_2 = (-2, 1)\}$ , On doit chercher les  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ?

$$f(e_1) = f(1, 2) = (3, -1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

$$f(e_2) = f(-1, 1) = (0, -2) = \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2,$$

$$(3, -1) = \lambda_1(0, 2) + \lambda_2(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(0, -2) = \lambda_3(0, 2) + \lambda_4(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$M_{(B, B')}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ \frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$$

**PROPOSITION 5.3.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels de dimensions finies  $n$  et  $m$ ,  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $B' = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  une base de  $F$ , alors la donnée d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{(n, m)}(\mathbb{K})$  donne une unique application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  la matrice suivant les bases,  $B$  et  $B'$  est  $A$

**EXEMPLE 5.4.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A$  est la matrice de  $f$  suivant la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(e_1, e_2)$ ,

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \Rightarrow f(1, 0) = (1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2),$$

$$f(e_2) = -e_1 \Rightarrow f(0, 1) = -(1, 0) = (-1, 0),$$

$$f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = xf(1, 0) + yf(0, 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x, y) = x(1, 2) + y(-1, 0) = (x - y, 2x).$$

**REMARQUE 5.5.** Si  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$  sont munis de leurs bases canoniques alors l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  associée à une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  est donnée par

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**EXEMPLE 5.6.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y, 2x).$$

**THÉORÈME 5.7.** Soit  $E, F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels munis respectivement par les bases  $B, B', B'', f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ , deux applications linéaires, alors

$$M_{(B, B'')} (g \circ f) = M_{(B', B'')} (g) M_{(B, B')} (f)$$

**REMARQUE 5.8.**

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y + 2z, x - y), (x, y) \rightarrow (x - y, 2x + y)$$

où  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  sont munis de leurs bases canoniques alors

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow g \circ f(x, y, z)$$

avec  $M(g \circ f) = M(g)M(f),$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$g \circ f(x, y, z) = M(g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2y + 2z, 3x + y + 4z).$$

**THÉORÈME 5.9.** Soit  $f; E \rightarrow F, B$  est une base de  $E$  et  $B'$  est une base de  $F$ , on a alors :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \det M_{(B, B')} (f) \neq 0$$

et on a dans ce cas  $M_{(B, B')} (f^{-1}) = (M_{(B, B')} (f))^{-1}.$

**EXEMPLE 5.10.**

$$f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x - y, x + y)$$

Montrons que  $f$  est bijective et calculer son inverse  $M_b(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$ ,  $\det(A) = 2 \neq 0 \Leftrightarrow f$  est bijective.

$$(M_B(f))^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C_A^t$$

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C_A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M_{(B,B')}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M_B(f^{-1}),$$

$$f^{-1}(x, y) = M_{(f^{-1})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left( \frac{x}{2} + \frac{y}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right).$$

**PROPOSITION 5.11.** Si  $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$  associée à une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  la matrice suivant les bases,  $B$  de  $E$  et  $B'$  de  $F$ , alors

$$rg(A) = rg(f), rg(A) = rg(A^t).$$

**6. Matrices et Changements de Bases**

**DÉFINITION 6.1.** Soit  $E$  un e.v et soit  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  deux bases pour  $E$ , la matrice de passage de la base  $B'$  à la base  $B$  est par définition la matrice  $M_{(B,B')}(Id_E)$  où  $Id_E$  est l'application identité

$$Id_E : E \rightarrow E$$

$$x \rightarrow x.$$

Les vecteurs de base de  $B$  peuvent s'exprimer dans  $B'$  selon les relations

$$(S) : \begin{cases} e_1 = a_{11}e'_1 + a_{12}e'_2 + \dots + a_{1n}e'_n \\ e_2 = a_{21}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{2n}e'_n \\ e_3 = a_{31}e'_1 + a_{32}e'_2 + \dots + a_{3n}e'_n \\ \dots \\ e_n = a_{n1}e'_1 + a_{n2}e'_2 + \dots + a_{nn}e'_n \end{cases}$$

On appelle matrice de passage de  $B'$  à  $B$  la matrice carrée  $P$  définie par

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**EXEMPLE 6.2.**  $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ,  $e'_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e'_2 = (1, 1, 0)$ ,  $e'_3 = (1, 0, 0)$  et  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$Id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}_B^3 \rightarrow \mathbb{R}_{B'}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z), M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

$$\begin{aligned} Id(e_1) = (1, 0, 0) &= \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = -0.5, \lambda_3 = 0.5 \end{aligned}$$

$$Id(e_2) = (0, 1, 0) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 \Rightarrow \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = -0.5,$$

$$Id(e_3) = (0, 0, 1) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 \Rightarrow \lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.5,$$

$$\text{donc } M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**PROPOSITION 6.3.** La matrice de passage d'une base  $B$  à une base  $B'$  est la matrice inverse de la matrice de passage de  $B'$  vers  $B$  :

$$M_{(B', B)}(Id_{\mathbb{R}^3}) = (M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$$

**REMARQUE 6.4.** Soit  $E$  un e.v et soit  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  deux bases pour  $E$ . Les vecteurs de base de  $B'$  peuvent s'exprimer dans  $B$  selon les relations

$$(S) : \begin{cases} e'_1 = b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \dots + b_{1n}e_n \\ e'_2 = b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \dots + b_{2n}e_n \\ e'_3 = b_{31}e_1 + b_{32}e_2 + \dots + b_{3n}e_n \\ \dots \\ e'_n = b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \dots + b_{nn}e_n \end{cases}$$

On appelle matrice de passage de  $B$  à  $B'$  la matrice carrée  $P^{-1}$  définie par

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

**EXEMPLE 6.5.**

$$M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_{(B', B)}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$ .

**THÉORÈME 6.6.** Soit  $f : E \rightarrow F$ ,  $B_1, B'_1$  deux bases pour  $E$ ,  $B_2, B'_2$  bases de  $F$ . Si  $P$  désigne la matrice de passage de  $B_1$  à  $B'_1$ , et  $Q$  désigne la matrice de passage de  $B_2$  à  $B'_2$ , alors

$$M_{(B'_1, B'_2)}(f) = Q^{-1}M_{(B_1, B_2)}(f)P.$$

**EXEMPLE 6.7.**

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y + z, x - y)$$

On munit  $\mathbb{R}^3$  de la base canonique  $B_3 = (e_1, e_2, e_3)$

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la base canonique  $B_2 = (v_1, v_2)$ ,

$$M_{(B_3, B_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On munit  $\mathbb{R}^3$  de la base canonique  $B'_3 = (e'_1, e'_2, e'_3)$ , avec  $e'_1 = (1, 0, 1)$ ,  $e'_2 = (1, 1, 0)$ ,  $e'_3 = (0, 1, 1)$

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la base canonique  $B'_2 = (v'_1, v'_2)$ , avec  $v'_1 = (-1, 1)$ ,  $v'_2 = (1, 1)$ ,

$$\mathbb{R}_{B_3}^3 \xrightarrow{P} \mathbb{R}_{B'_3}^3, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{B_2}^2 \xrightarrow{Q^{-1}} \mathbb{R}_{B'_2}^2$$

$$P = M_{(B'_3, B_3)}(Id_{\mathbb{R}^3}),$$

$$P = (M_{(B_3, B'_3)}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = M_{(B'_2, B_2)}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Q^{-1} = M_{(B_2, B'_2)}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ainsi :

$$M_{(B'_2, B'_3)}(f) = Q^{-1} M_{(B_1, B_2)} P$$

$$\Leftrightarrow M_{(B'_2, B'_3)}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M_{(B'_2, B'_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M_{(B'_2, B'_3)}(f) = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

**7. Diagonalisation**

**DÉFINITION 7.1.** Soit  $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  s'il existe un vecteur colonne  $v \neq 0$  tel que  $Av = \lambda v$ .

Le vecteur  $v$  est appelé vecteur propre associé à la valeur  $\lambda$ .

**EXEMPLE 7.2.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



on a :  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$  sont des valeurs propres de  $A$ , en effet :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = -2y \text{ alors}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, x \in \mathbb{R} \text{ alors}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où  $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  vecteur propre associé à  $\lambda_1 = 1$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vecteur propre associé à  $\lambda_2 = 2$ .

**PROPOSITION 7.3.** Soit  $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id_n) = 0$ .

$P_A(\lambda)$  est appelé le polynôme caractéristique de  $A$ .

**EXEMPLE 7.4.** (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id_2) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(1 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2. \end{aligned}$$

(2)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2 - \lambda)^2(1 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

**DÉFINITION 7.5.** Soit  $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ , l'ensemble  $E_\lambda$  défini par :

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n / Av = \lambda v\}$$

est appelé l'espace propre associé à la valeur propre alors  $E_\lambda$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

**EXEMPLE 7.6.**  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont 2 une solution double

et 1 simple.

(1) Pour  $\lambda = 2$ , on a

$$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 / Bv = 2v\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}\}$$

$$\begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - x = 0 \\ -x + z = 0 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = z \end{cases}$$

donc  $E_2 = \{(x, y, x) / x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$  s.e.v de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$  est une base de  $E_2$ , car les vecteurs sont libres.

(2) Pour  $\lambda = 1$ , on a

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / Bv = v\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}$$

$$\begin{cases} x + z = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

donc  $E_1 = \{(x, x, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 0) / y \in \mathbb{R}\}$  s.e.v de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(1, 1, 0)$  est une base de  $E_1$ .

**DÉFINITION 7.7.** On dit qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable s'il existe une matrice inversible  $P$  est une matrice diagonale  $D$  telle que ;  $A = PDP^{-1}$ . (où  $P$  est la matrice de passage.)

**THÉORÈME 7.8.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  les valeurs propres de  $A$  d'ordre de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_p$ , alors si

(1)  $\dim E_{\lambda_i} = m_i, i = 1, 2, \dots, p$ .  
ou

(2)  $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = n$

Alors la matrice  $A$  est diagonalisable et la matrice diagonale  $D$  associée à  $A$  est donnée par :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

chaque  $\lambda_i$  se répète  $m_i$  fois, la matrice  $P$  est formé des vecteurs propres.

**REMARQUE 7.9.** Si la matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  admet  $n$  valeurs propres distincts alors  $A$  est diagonalisable et la matrice diagonale  $D$  associée à  $A$  est :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**EXEMPLE 7.10.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  admet les valeurs propres  $\lambda_1 = 2$  double et  $\lambda_2 = 1$  simple la matrice diagonale  $D$  est donnée par ;  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et la matrice de passage est donnée par :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 8. Systèmes d'équations linéaires

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On appelle système de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnus à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , tout système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les  $(x_j)_{j=1,\dots,p}$  sont les inconnues, les  $(a_{ij}), b_j \in \mathbb{K}$ .

1) Forme matricielle du système :

Posons  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  Le système  $(S)$  devient ;

$$AX = B.$$

Si  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  telle que  $A$  soit la matrice associée à  $f$  suivant les bases canoniques et si on note par  $X = (x_1, \dots, x_p)$  et  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , le système  $(S)$  devient  $f(X) = B$ .

2) Solution du système :

**DÉFINITION 8.1.** On appelle solution du système  $(S)$  tout élément  $X = (x_1, \dots, x_p)$  vérifiant les  $n$  équations de  $(S)$  ceci revient à trouver un vecteur  $X$  tel que  $AX = B$  ou encore un élément  $X \in \mathbb{K}^p$  tel que  $f(X) = B$ .

**EXEMPLE 8.2.**

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Rang d'un système linéaire :

Le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ . Si  $r$  est le rang du système linéaire  $(S)$ , alors  $r \leq n$  et  $r \leq p$ .

### 8.1. Système de Cramer.

**DÉFINITION 8.3.** Le système  $(S)$  est dit de Cramer si  $n = p = r$  c'est à dire,  $(S)$  est un système de  $n$  équations à  $n$  inconnus et telle que

$$\det A \neq 0.$$

**THÉORÈME 8.4.** Tout Le système de Cramer admet une solution donnée par :  $X = A^{-1}B$ .

**EXEMPLE 8.5.**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\det A = 1 \neq 0, \text{rg} A = 2,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

**THÉORÈME 8.6.** Dans un système de Cramer, la solution est donnée par les formules :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1, \dots, n.$$

Où les  $A_i$  est la matrice réduite de  $A$ , en remplaçant la colonne  $i$  par le vecteur  $B$ .

**EXEMPLE 8.7.**

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 4 \neq 0, \operatorname{rg} A = n = p = 3$  ((S) est un système de cramer).

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 9/7.$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -5/7.$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = -1/7.$$

**3) Cas où  $n = p$  et  $r < n$  :**

Si on considère maintenant un système de  $n$  équations à  $n$  inconnus, mais  $\operatorname{rg} A < n$  c'est à dire

$$\det A = 0,$$

dans ce cas on extrait une matrice  $M$  de  $A$  sachant que c'est la plus grande matrice carrée inversible c'est à dire  $\det M \neq 0$  contenue dans  $A$  et d'ordre  $r$  c'est ce qu'on appelle une sous-matrice, les inconnus associés à  $M$  deviennent des inconnus principales et les  $(n-r)$  autres inconnus deviennent des paramètres où bien ce qu'on appelle valeurs arbitraires et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n) = b'_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n) = b'_r \end{cases}$$

ce dernier est un système de cramer, donc il admet une seule solution  $(x_1, \dots, x_r)$  qui dépend de  $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ . Si cette solution vérifie les  $(n-r)$  équations restantes, alors le système globale admet une infinité de solutions. Si par contre  $(x_1, \dots, x_r)$  ne vérifie pas une seule équation parmi les  $(n-r)$  équations restantes alors le système globale n'admet de solution.

**EXEMPLE 8.8.**

$$(S) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0$  ( $S$ ) n'est pas un système de Cramer comme  $|A'| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ . Alors  $rg A = 2$  et on considère  $x, y$  les inconnus et  $z$  paramètre, alors on obtient le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 3 - 2z \\ 2x + 2y = 2 - z \end{cases}$$

qui est un système de Cramer et admet une unique solution  $(x, y)$  dépendante de  $z$ .

$$x = 1/8 \begin{vmatrix} 3 - 2z & -1 \\ 2 - z & 2 \end{vmatrix} = 1 - (5/8)z$$

$$y = 1/8 \begin{vmatrix} 3 & 3 - 2z \\ 2 & 2 - z \end{vmatrix} = 1/8z$$

Reste à voir si  $(x, y)$  vérifie  $x - 3y + z = 1$  (équation restante) on a :  $1 - 5/8z - 3/8z + z = 1 \Rightarrow 1 = 1$  (vraie  $\forall t \in \mathbb{R}$ ) donc le système admet une infinité de solutions données par :

$$(1 - 5/8z, 1/8z, z)/z \in \mathbb{R}.$$

3) Cas où  $n \neq p$  :

Si le nombre d'équations n'est pas égale au nombre d'inconnus, alors on cherche d'abord le rang de  $A$  et on procède comme précédemment. Si  $M$  est une matrice contenue dans  $A$  et d'ordre  $r$  et  $\det M \neq 0$  alors on considère le système de  $r$  équations à  $r$  inconnus correspondant à  $M$  qui est un système de Cramer.

Si la solution vérifie les équations restantes alors le système global admet une infinité de solutions sinon il n'admet aucune solution.

**EXEMPLE 8.9.**

$$(S) : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

le rang de  $A \leq 2$  choisissons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = 8 \neq 0 \Rightarrow rg M = 2.$$

on prend le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11/8 \\ y = 1/8 \end{cases}$$

on a l'équation restante :

$$x - 5y = -5 \Rightarrow 11/8 - 5/8 = 6/8 = 3/2 \neq -5$$

alors le système n'admet pas de solutions.

## 9. Exercices Corrigés

**EXERCICE** 21. Soit la matrice  $A$  définie par :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$$

(1)  $A$  est-elle inversible ? si oui déterminer son inverse  $A^{-1}$ .

(2) Calculer  $A^2 - A - 2I_3 = 0$ , avec  $I_3$  est la matrice identité.

**SOLUTION**. Soit la matrice  $A$  définie par :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$$

(1)  $A$  est inversible si et seulement si  $\det A \neq 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{vmatrix} = c_2 = -c_1 + c_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -18 & -1 & 9 \\ -30 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

calculons suivant la colonne 2,

$$\det A = (-1)^{1+2}(1) \begin{vmatrix} -18 & 9 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

d'où le résultat.

$A^{-1}$  est donnée par :  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t$  où  $C^t$  est la comatrice de  $A$ .

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -19 & 9 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = 4, c_{21} = - \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = 6, c_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -19 & 9 \end{vmatrix} = -3,$$

$$c_{12} = - \begin{vmatrix} -18 & 9 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = -18, c_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = -20, c_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -18 & 9 \end{vmatrix} = 9,$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} -18 & -19 \\ -30 & -30 \end{vmatrix} = -30, c_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -30 & -30 \end{vmatrix} = -30, c_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -18 & -19 \end{vmatrix} = 13,$$

ainsi

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -18 & -30 \\ 6 & -20 & -30 \\ -3 & 9 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -18 & -20 & 9 \\ -30 & -30 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -18 & -20 & 9 \\ -30 & -30 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ -9 & -10 & 9/2 \\ -15 & -15 & 13/2 \end{pmatrix}.$$

(2) Calculons  $A^2 - A - 2I_3 = 0$ ,

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -18 & -17 & 9 \\ -30 & -30 & 16 \end{pmatrix}, A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

D'où le résultat, on peut remarquer que  $A(A - I_2) = 2I_2 \Rightarrow AB = I_2$ , avec  $B = 1/2(A - I_2) = A^{-1}$ .

**EXERCICE** 22. Soit  $A$  une matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = a.I_n + b.A$ .

(2) En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse.

**SOLUTION**.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouvons  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = a.I_n + b.A$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi  $a = 2, b = 1$ .

(2)

$$\det A = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

d'où  $A$  est inversible.

$$A^2 - A = 2I_3 \Rightarrow A(A - I_3) = 2I_3 \Rightarrow A(1/2(A - I_3)) = I_3$$

ainsi  $A^{-1} = 1/2(A - I_3)$

$$A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE** 23. Soit la matrice associée à l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  suivant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer l'application  $f$ .



- (2) Déterminer  $\ker f$  et  $\text{Im} f$  et leur dimension,  $f$  est-elle bijective ?
- (3) Soit  $S = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, -1, 0)\}$
- Montrer que  $S$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - Donner la matrice associée à  $f$  suivant la base  $S$ .

**SOLUTION.** (1) Déterminons l'application  $f$ .

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y + 5z, 3x + 2z, x + y + 4z).$$

$$(2) \ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$\ker f = \{(0, 0, 0)\}.$$

alors  $\dim \ker f = 0$ , ( $f$  est injective).

$$\text{Im} f = \{f(x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{Im} f = \{x(1, 3, 1) + y(-1, 0, 1) + z(5, 2, 4) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

la famille  $\{(1, 3, 1), (-1, 0, 1), (5, 2, 4)\}$  est libre car  $\det((1, 3, 1), (-1, 0, 1), (5, 2, 4)) = 23 \neq 0$ , alors  $\dim \text{Im} f = 3$ , ( $f$  est surjective), d'où  $f$  est bijective.

- (3) Soit  $S = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, -1, 0)\}$
- $S$  est une base de  $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ ,

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =_{C_3=C_1+C_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

b) On note  $A'$  la matrice associée à  $f$  suivant la base  $S$ .  $A' = P^{-1}AP$ , avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et faisons un changement de base } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -10 \\ 7/2 & 2 & -9/2 \\ 8 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE** 24. Soit la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- Montrer que  $A$  est diagonalisable.
- Déterminer  $P$ , calculer  $A^k$ .

**SOLUTION.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

déterminons les valeurs propres de  $A$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 - \lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda + 4)(\lambda - 2)$$

les valeurs propres sont 1, 2 et -4.

(2)  $A$  est diagonalisable car elle admet trois valeurs propres distinctes.

(3) Cherchons les vecteurs propres.

Pour  $\lambda = 1$  :

$$E_1 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Av = v\} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

$E_1 = \{x(1, 1, 1) / x \in \mathbb{R}, v_1 = (1, 1, 1)\}$  est vecteur propre associé à 1.

Pour  $\lambda = 2$  :

$$E_2 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Av = 2v\} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 2x \\ 3x - 2y = 2y \\ -2x + 2y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 4/3y \\ z = (-2/3)y \end{cases}$$

$E_2 = \{y(4/3, 1, -2/3) / x \in \mathbb{R}, v_2 = (4, 3, -2)\}$  est vecteur propre associé à 2.

Pour  $\lambda = -4$  :

$$E_{-4} = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Av = -4v\} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = -4x \\ 3x - 2y = -4y \\ -2x + 2y + z = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -(2/3)y \\ x = z \end{cases}$$

$E_{-4} = \{x(1, -2/3, 1) / x \in \mathbb{R}, v_3 = (2, -3, 2)\}$  est vecteur propre associé à -4.

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{-1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

où

$$P^{-1} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \det(P) = -30, C_p^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

vous pouvez calculer  $P^{-1}$  en utilisant le changement de base.

$$A^k = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} -5 \cdot 2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15 \cdot 2^k - 15(-4)^k & -12 + 15(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5 \cdot 2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 15(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

**EXERCICE** 25. Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

**SOLUTION**.

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 \neq 0$ ,  $\text{rg} A = n = p = 3$  ((S) est un système de cramer).

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1.$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2.$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 6.$$

**EXERCICE** 26. Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + y - 2z + 3t = 0 \\ -x + 2y - 4z + 6t = 2 \\ 2x - y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

**SOLUTION.**

$$(S) : \begin{cases} 3x + y - 2z + 3t = 0 \\ -x + 2y - 4z + 6t = 2 \\ 2x - y + 2z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le  $\text{rg}A \leq 3$ . On prend  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\det M = 7 \neq 0$ . On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = 2z - 3t \\ -x + 2y = 2 + 4z - 6t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/7 \\ y = 2z - 3t + 6/7 \end{cases}$$

si on remplace dans la troisième équation on aura :

$$2x - y + 2z - 3t = -4/7 - 2z + 3t - 6/7 + 2z - 3t = -10/7 \neq 0$$

donc le système n'admet aucune solution.

## Bibliographie

- [1] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, Problèmes Corrigés de mathématiques , DEUG MIAS/SM, Ediscience(Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.
- [2] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, les mathématiques en Licence, 1<sup>ère</sup>. Tome 1 : Cours+ exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience(Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.
- [3] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, les mathématiques en Licence, 1<sup>ère</sup>. Tome 2 : Cours+ exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience(Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.
- [4] R. Godement Cours d'algèbre. Hermann, 1966.
- [5] M. H. Mortad, Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair"(Alger-Algérie),2012
- [6] M. Queysanne, Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.