

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف



Faculté de Génie mécanique

Département de Génie mécanique

Mécanique des fluides II

Destiné aux étudiants de 3^{ème} année de Licence énergétique (Semestre 5)

Sciences et Technologie (ST)

Préparé par : Dr BOUKHRIS Lahouari

Maitre de Conférences classe B

Année Universitaire 2018-2019

Avant-propos

Ce polycopié de cours de Mécanique des Fluides II répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la troisième année LMD, option énergétique (5^{ème} semestre) du domaine Sciences et Techniques des universités et écoles d'ingénieurs Algériennes.

Il constitue une suite à la mécanique des fluides 1, il est constitué de trois chapitres qui s'enchainent comme suit :

Dans le premier chapitre, on étudie la cinématique des fluides, la théorie de la couche limite en deuxième chapitre, le troisième et dernier chapitre est réservé à l'analyse dimensionnelle et similitude.

Tables des matières

Avant-propos.....	i
Tables des matières.....	ii
Chapitre 1.....	1
Cinématique des fluides.....	1
1.1 Définitions.....	1
1.1.1 Description d'Euler.....	1
1.1.3 Description de Lagrange.....	2
1.1.4 Lignes de courant.....	3
1.1.5 Tube de courant.....	3
1.1.6 Trajectoire.....	4
1.1.7 Lignes d'émission.....	4
1.1.9 Ecoulement permanent.....	5
1.1.9 Application.....	5
1.2 Equation de continuité.....	6
1.3 Débits.....	8
1.4 Circulation.....	9
1.5 Ecoulement irrotationnel ou à potentiel des vitesses.....	9
1.6 Ecoulements rotationnels : théorie tourbillonnaire.....	9
1.7 Fonction de courant.....	10
1.7.1 Définition.....	10
1.7.2 Propriétés de la fonction de courant.....	10
1.7.3 Débits entre deux lignes de courant.....	11
1.7.4 Equipotentiels et lignes de courant.....	13
1.8 Potentiel complexe des vitesses.....	14
1.9 Exemples d'écoulements plans.....	15
1.9.1 Ecoulement uniforme.....	15
1.9.2 Ecoulement plan autour d'une source ou d'un puits.....	16
1.9.3 Vortex ou tourbillon libre.....	18
1.9.4 Doublet et dipôle.....	20
1.9.5 Coins et points d'arrêt.....	22
Chapitre 2.....	28
Théorie de la couche limite.....	28
2.1 Notion de couche limite.....	28

2.2 Grandeurs caractéristiques de la couche limite.....	29
2.3 Etude dimensionnelle de la couche limite	30
2.4 Equation de <i>Blasius</i>	31
2.5 Couche limite turbulente	34
Chapitre 3	36
Analyse dimensionnelle et similitudes	36
3.1 Introduction.....	36
3.2 Théorème II de <i>Buckingham</i>	36
3.3 Coefficients sans dimension usuels.....	39
3.4 Application aux maquettes.....	40
Références bibliographiques	42

Chapitre 1

Cinématique des fluides

La cinématique des fluides est l'étude du mouvement des particules fluides indépendamment de ce qui provoque ou modifie l'écoulement.

On n'étudie pas les forces mises en jeu au sein de l'écoulement, mais on cherche à accéder à une description de l'écoulement en termes de trajectoires, vitesses, accélérations et évolutions spatio-temporelles.

Pour décrire un écoulement, on a deux possibilités :

- Description lagrangienne (Louis-Joseph Lagrange, 1736 – 1813)
- Description eulérienne (Léonard Euler, 1703 – 1783)

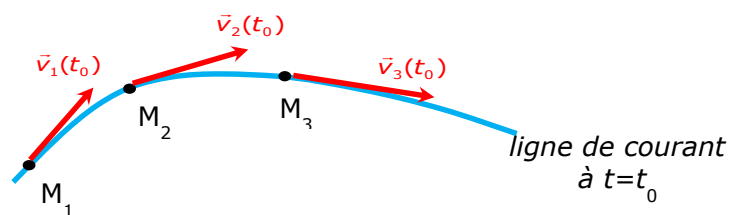
1.1 Définitions

1.1.1 Description d'Euler

La description eulérienne consiste à établir à chaque instant t donné, l'ensemble des vitesses associées à chacun des points de l'espace fluide.

A chaque point M est associée une vitesse $\vec{V}_M = (x, y, z, t)$ susceptible d'évoluer dans le temps.

L'écoulement est alors décrit par un ensemble de vecteurs appelé « champ de vecteurs vitesse ». C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée à chaque instant.



On utilise alors la description d'Euler pour caractériser à chaque instant, et en chaque point de l'espace la vitesse et l'accélération des particules fluides.

$$\vec{V} = \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

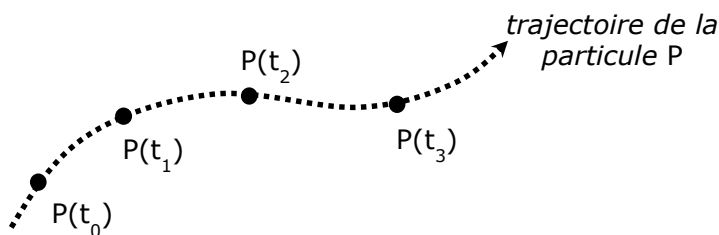
$$\vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ \gamma_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ \gamma_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

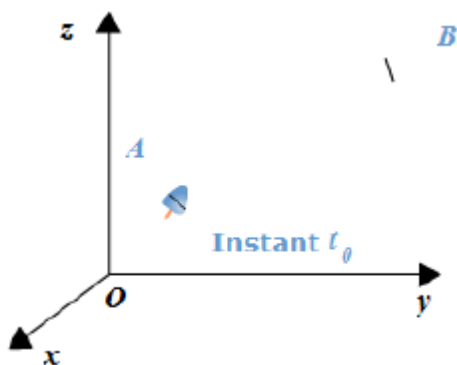
1.1.3 Description de Lagrange

La description lagrangienne consiste à suivre dans l'espace la position d'une particule en fonction du temps. On étudie les vecteurs position, vitesse et accélération, et éventuellement la trajectoire ou le chemin suivi par la particule dans son mouvement en fonction du temps.

Compte tenu du nombre de particules fluides, cette description n'est pas souvent envisageable.



Le mouvement de chaque particule est connu si on a les vecteurs position, vitesse et accélération :



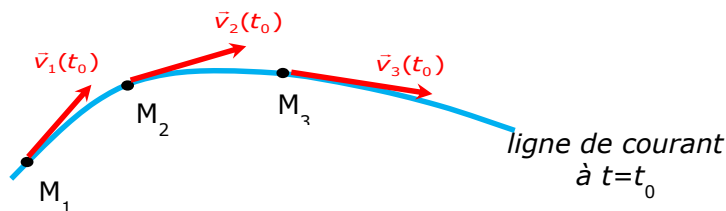
$$\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x = x(t_0, x_0, y_0, z_0, t) = x(t) \\ y = y(t_0, x_0, y_0, z_0, t) = y(t) \\ z = z(t_0, x_0, y_0, z_0, t) = z(t) \end{cases}$$

$$\vec{V} = \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

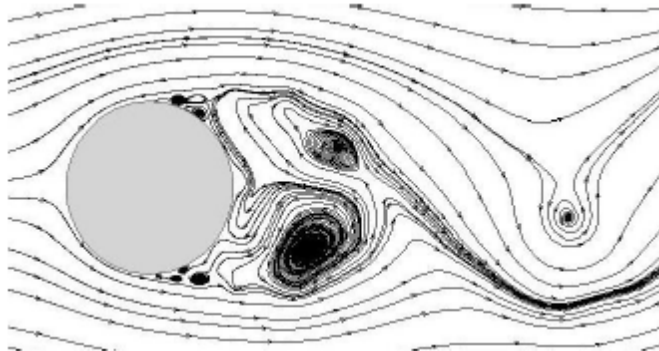
$$\vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \gamma_y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ \gamma_z = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

1.1.4 Lignes de courant

On appelle ligne de courant « **Streamline** », toute courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à chaque instant et localement, colinéaire au vecteur vitesse du champ d'écoulement. C'est une courbe qui dérive de la description eulérienne.



Les lignes de courant évoluent dans le temps au même titre que le champ des vecteurs vitesse. Pour tracer les lignes de courant, on prend une photo instantanée de l'écoulement, et on trace les tangentes aux vecteurs vitesse.



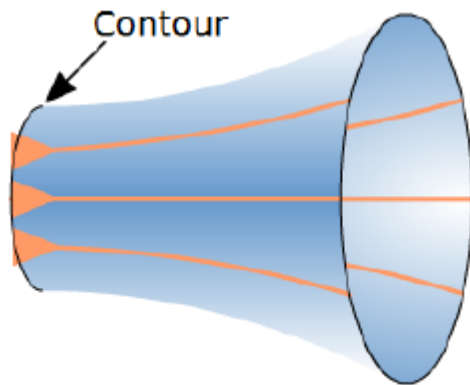
Un élément curviligne $\overrightarrow{dX} = (dx, dy, dz)$ de la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse, alors : $\overrightarrow{dX} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

Donc l'équation d'une ligne de courant en un instant t fixé est donnée par :

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v} = \frac{dw}{w}$$

1.1.5 Tube de courant

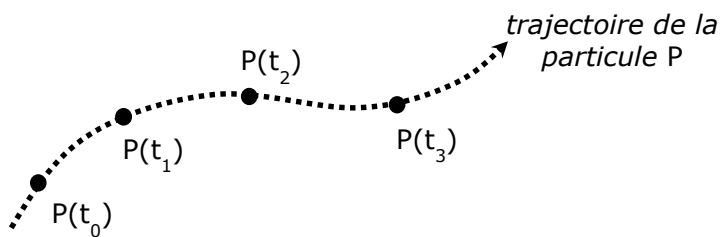
On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



Tube de courant relatif au contour

1.1.6 Trajectoire

On appelle trajectoire « *pathline* » d'une particule de fluide la courbe décrite au cours du temps par la particule. C'est donc le lieu géométrique des positions successives occupées par une particule dans le temps. Les trajectoires découlent de la description lagrangienne.



La trajectoire peut être visualisée par l'injection d'une goutte de colorant dont on suit le mouvement.

Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

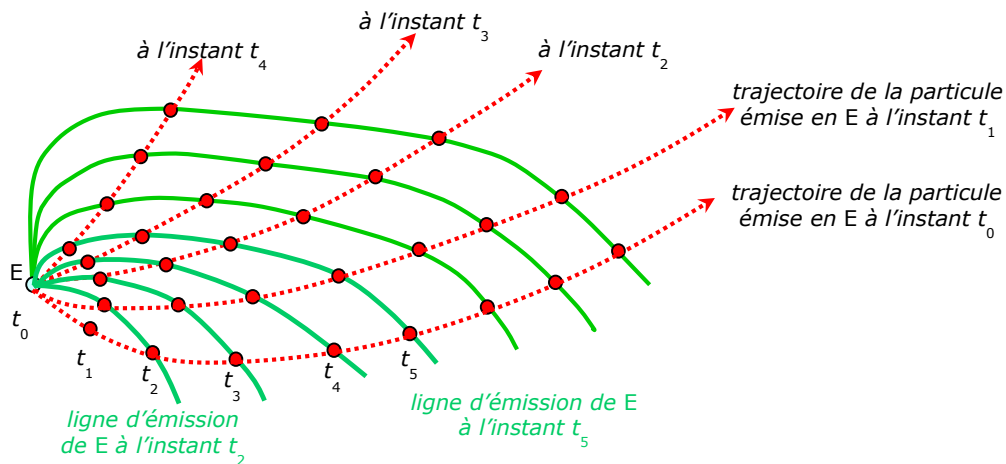
Dans ces équations, le temps est une variable !

Il ne faut pas confondre ligne de courant et trajectoire. Ce sont deux notions fondamentalement différentes.

Pour des écoulements permanents, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

1.1.7 Lignes d'émission

On appelle ligne d'émission « *streakline* » l'ensemble de toutes les particules ayant coïncidées en un instant antérieur avec un point fixé E .



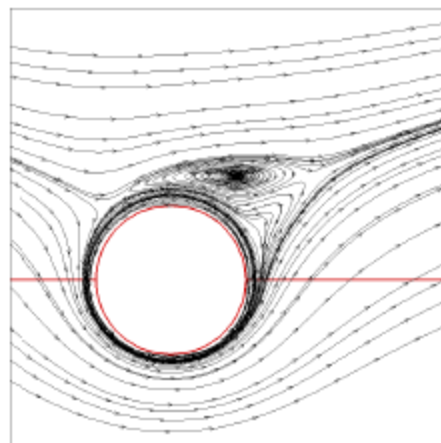
Pour visualiser les lignes d'émission, on peut injecter du colorant de manière continue au point E. Les courbes colorées correspondent aux lignes d'émission.

1.1.9 Écoulement permanent

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsque le champ de vecteurs vitesse est statique : il ne varie pas dans le temps. Plus rien ne dépend explicitement du temps.

Dans ce cas :

- Les lignes de courant sont fixes dans l'espace ;
- Les trajectoires coïncident avec les lignes de courant ;
- Les lignes d'émission coïncident également avec les lignes de courant.



1.1.9 Application

Soit le champ de vitesse de composantes :

$$u = u_0 + at$$

$$v = v_0$$

$$w = 0$$

L'écoulement est-il permanent ?

Justifier qu'il s'agit d'un écoulement plan.

Donner les équations des lignes de courants.

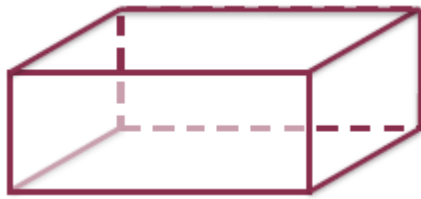
Donner les équations des trajectoires.

1.2 Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse :

La variation de masse pendant un temps dt d'un élément de volume fluide $d\Omega = dx \, dy \, dz$ doit être égale à la somme des masse de fluide entrant, diminuée de celle de fluide sortant.

On considère alors un élément de volume liquide $d\Omega$



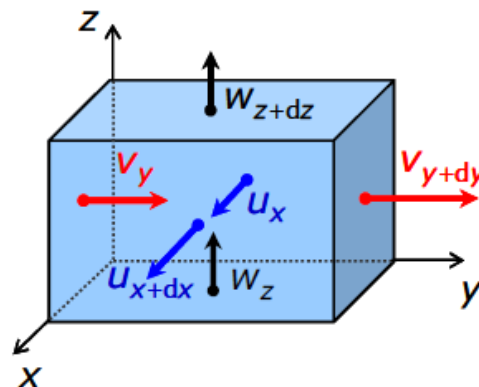
$$d\Omega = dx \, dy \, dz$$

Sa masse peut s'exprimer comme : $m = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ pendant le temps dt , la variation de cette masse s'écrit :

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

Cette variation doit être égale à :

- a) La somme des masses de fluide qui entre et sort par les six (06) faces de l'élément de volume $d\Omega$;
 - b) la somme des masses de fluide spontanément détruites (puits) ou créées (sources) à l'intérieur de $d\Omega$.
- a) la somme des masses de fluide qui entre et sort par les six (06) faces de l'élément de volume $d\Omega$.**



$$\vec{V} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_z$$

Suivant l'axe x par exemple, le fluide entre avec la vitesse u_x et sort avec la vitesse u_{x+dx} . Par conséquent, la masse du fluide entrant pendant le temps dt est : $(\rho u \, dy \, dz \, dt)_x$ et la masse du fluide sortant est : $(\rho u \, dy \, dz \, dt)_{x+dx}$

Le bilan sur l'axe des x donne alors :

$$[(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}] dy dz dt$$

Un développement au premier ordre permet d'écrire :

$$(\rho u)_{x+dx} = (\rho u)_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx$$

Le bilan restant suivant l'axe des x est alors :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} d\Omega \cdot dt$$

Par analogie, suivant l'axe des y :

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \cdot dx \cdot dz \cdot dt = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} d\Omega \cdot dt$$

Suivant l'axe z :

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy \cdot dt = -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} d\Omega \cdot dt$$

Au total, à travers les six (06) faces on a :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] d\Omega \cdot dt = -\text{div}(\rho \vec{C}) d\Omega \cdot dt$$

b) la somme des masses de fluide spontanément détruites (puits) ou créées (sources) à l'intérieur de $d\Omega$

on appelle q_v le débit volumique de fluide créé ($q_v > 0$: source) ou détruit ($q_v < 0$: puits) par unité de volume. Alors :

$\rho q_v dV dt$ = à la masse de fluide créée ou détruite pendant le temps dt et dans le volume dV .

En généralisant, sachant qu'on peut avoir plusieurs sources ou puits, le bilan de la variation de la masse due aux sources et puits s'écrit :

$$\sum_i \rho q_{vi} d\Omega dt$$

Le bilan global s'écrit alors :

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega dt = -\text{div}(\rho \vec{V}) dV dt + \sum_i \rho q_{vi} d\Omega dt$$

D'où l'égalité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{V}) + \sum_i \rho q_{vi}$$

Qui est l'équation de continuité exprimant la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire (Lagrange) ou encore dans un élément fixe (Euler).

Cas particuliers :

- Ecoulement permanent ou stationnaire : il n'y a pas de variation explicite avec le temps :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \sum_i \rho q_{vi}$$

- Écoulement conservatif : pas de puits ni de sources :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

- Écoulement permanent et conservatif :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

- Fluide incompressible :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \sum_i q_{vi}$$

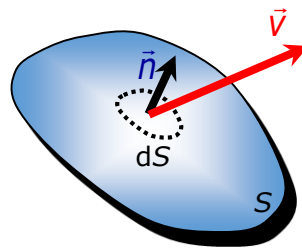
- Écoulement conservatif, permanent et iso-volume :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

1.3 Débits

Le débit volumique de fluide à travers une surface S est donné par :

$$q_v = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

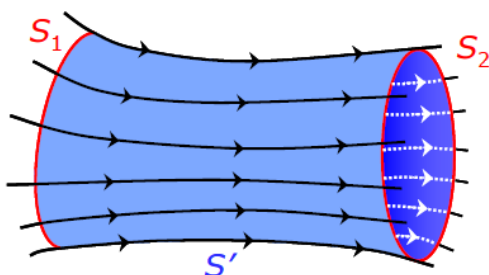


Le débit massique de fluide est donné par :

$$q_m = \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Dans le cas particulier d'un écoulement permanent conservatif à travers un tube de courant, le débit massique est conservé : $q_{m1} = q_{m2}$

Si en plus, le fluide est incompressible : $q_{v1} = q_{v2}$



1.4 Circulation

La circulation du vecteur vitesse suivant une courbe est donnée par :

$$\Gamma = \int_{(c)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{(c)} (udx + vdy + wdz)$$

Pour une courbe fermée :

$$\Gamma = \oint_{(c)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{RotV} \cdot d\vec{S} = 2 \iint_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$$

Où S est une surface quelconque s'appuyant sur le contour (c)

1.5 Ecoulement irrotationnel ou à potentiel des vitesses

Un écoulement est dit irrotationnel si $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{Rot}(\vec{V}) = \vec{0}$

Dans ce cas, le vecteur vitesse dérive d'un potentiel scalaire : $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\varphi$

L'écoulement est alors dit potentiel des vitesses ou plus simplement, écoulement potentiel.

La circulation du vecteur vitesse est indépendante du chemin suivi :

$$\Gamma = \int_{(c)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{(c)} \overrightarrow{grad}\varphi \cdot d\vec{l} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Si le mouvement est incompressible, conservatif et irrotationnel, alors :

$$\left. \begin{array}{l} div(\vec{V}) = 0 \\ \vec{V} = \overrightarrow{grad}\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow div(\overrightarrow{grad}\varphi) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$$

Où : $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

L'étude d'écoulements irrotationnels conservatifs et incompressibles se ramène alors à l'étude de fonctions harmoniques, respectant certaines conditions initiales et aux limites.

1.6 Ecoulements rotationnels : théorie tourbillonnaire

Un écoulement est dit rotationnel si $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{Rot}(\vec{V}) \neq \vec{0}$

Pour une courbe fermée, on appelle intensité du tourbillon la valeur de la circulation du vecteur vitesse :

$$I = \Gamma = \oint_{(c)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{RotV} \cdot d\vec{S} = 2 \iint_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$$

On appelle ligne tourbillon, une ligne tangente en chaque point au vecteur tourbillon, et filet tourbillon, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur une courbe fermée infiniment petite.

1.7 Fonction de courant

1.7.1 Définition

On considère un écoulement conservatif d'un fluide incompressible, l'équation de continuité s'écrit : $\text{div} \vec{V} = 0$

Or on sait que $\text{div}(\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{A})) = 0$ est toujours vraie. On peut alors définir un vecteur \vec{A} tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{A})$

\vec{A} correspond à un potentiel vecteur.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{A}) = \begin{cases} u = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ v = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ w = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$$

Si l'on considère un écoulement dans le plan (xOy) et donc invariant par translation suivant z, alors : $w = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\text{D'où} \begin{cases} u = \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \end{cases}$$

Donc, dans le plan (xOy), la vitesse est en tout point définie au moyen de la seule grandeur scalaire $A_z(x, y)$

On peut alors poser : $A_z(x, y) = \Psi(x, y)$ fonction de courant

$$\text{Et :} \begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \text{ constitue ce qu'on appellera le champ de vitesses}$$

$$\text{En coordonnées cylindriques, si } w = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial z} = 0, \text{ alors on a :} \begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \text{ où } \Psi = \Psi(r, \theta)$$

1.7.2 Propriétés de la fonction de courant

L'équation de continuité pour les écoulements plans et conservatifs d'un fluide incompressible permet d'établir que :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Par conséquent, $d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy$ est une différentielle totale exacte. En plus $\int_A^B d\Psi$ ne dépend pas du chemin suivi mais : $\int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A = \Psi(x_B, y_B) - \Psi(x_A, y_A)$

Pour $\Psi(x, y) = C^{te} \Leftrightarrow y(x)$ courbe le long de laquelle $d\Psi = 0$ c'est-à-dire $d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = 0$

Alors : $-v dx + u dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ équation d'une ligne de courant

La fonction de courant est donc constante le long d'une ligne de courant. A chaque ligne de courant est associée une constante différente.

A noter que la fonction de courant est une fonction harmonique dans le cas d'écoulement irrotationnel :

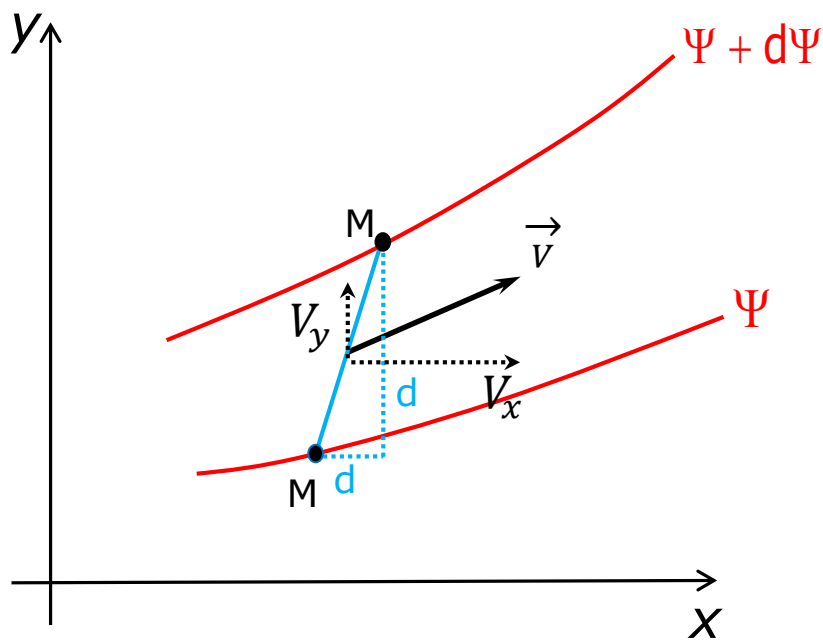
$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-v) + \frac{\partial}{\partial y}(u) = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = 0$$

1.7.3 Débits entre deux lignes de courant

On considère dans un écoulement plan, deux lignes de courant infiniment voisines, caractérisées par des fonctions de courant constantes infiniment proches :

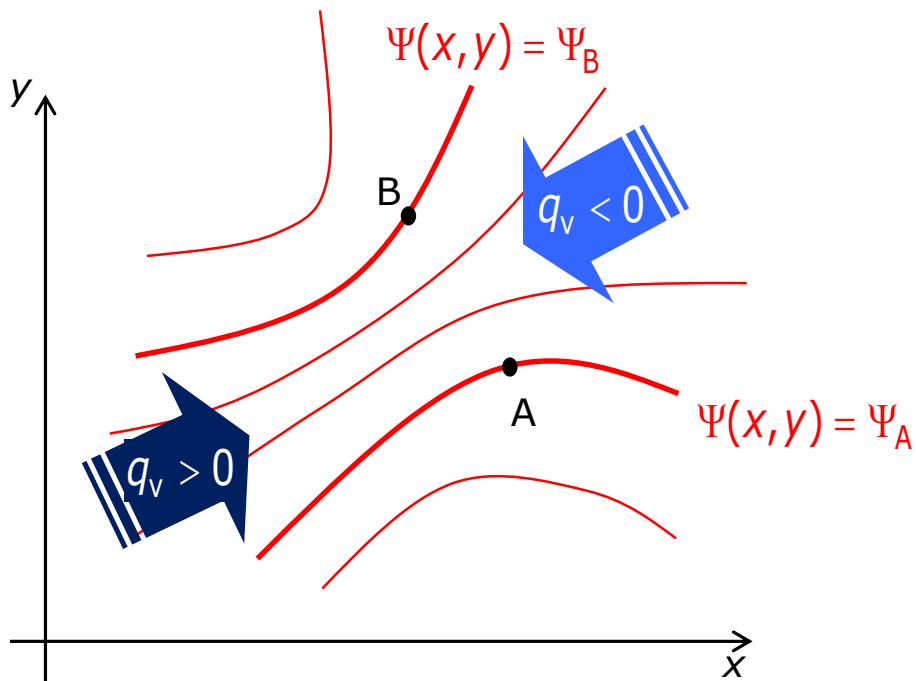
Le débit volumique entre deux point M et M' est :

$$dq_v = u dy - v dx = \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx = d\Psi \text{ (par unité de profondeur)}$$



Par conséquent, entre 2 lignes de courant quelconques, de constantes Ψ_A et Ψ_B , le débit volumique est donné par :

$$q_v = \int_A^B dq_v = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A$$



1.7.4 Equipotentielles et lignes de courant

Ligne équipotentielle :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow u dx + v dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$$

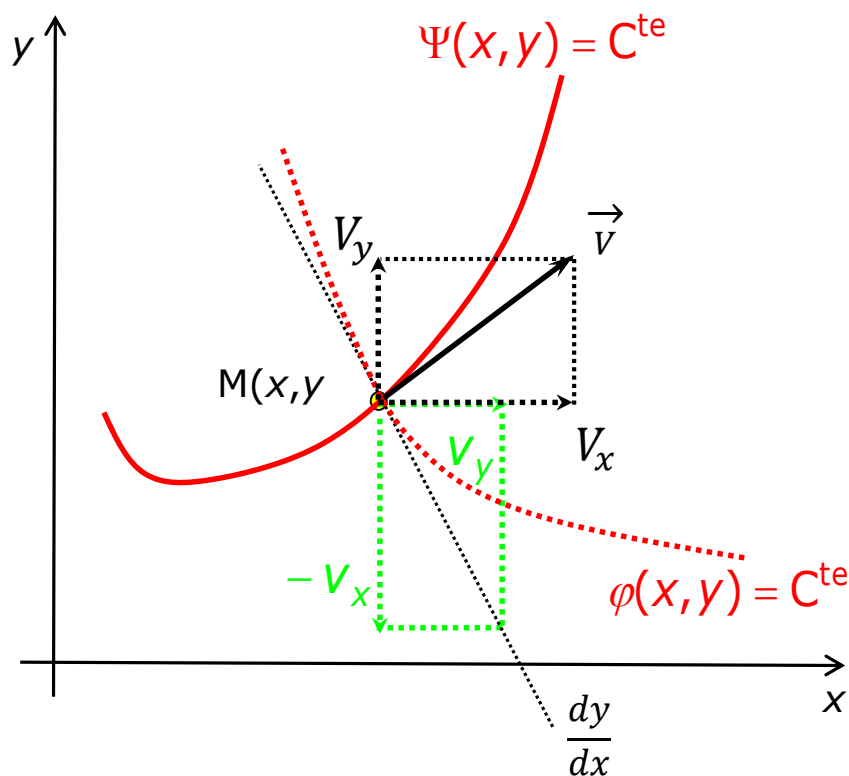
Ligne de courant :

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow -v dx + u dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Les équipotentielles sont donc partout orthogonales aux lignes de courant.

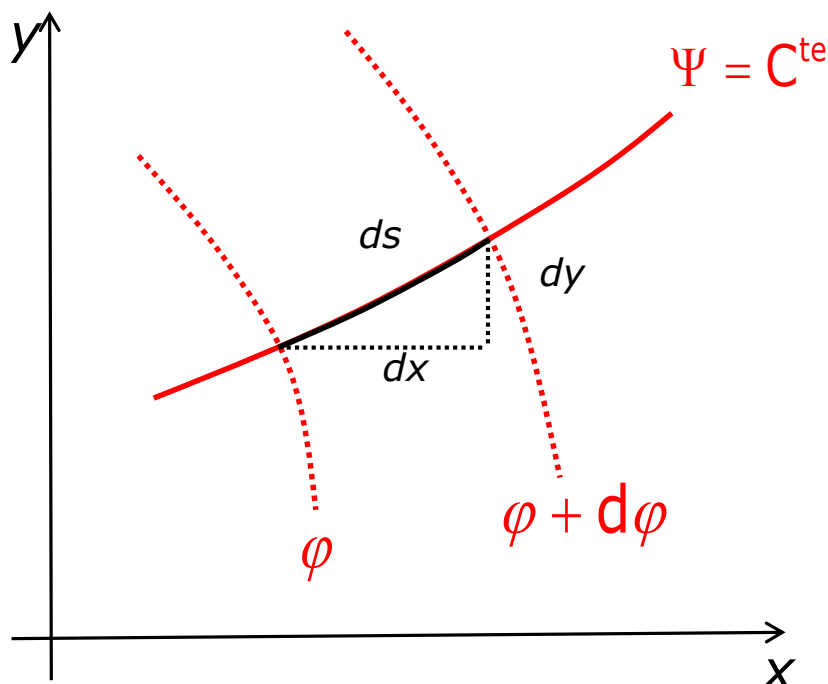
Longueur d'un élément d'arc le long d'une ligne de courant le long d'une ligne de courant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \Rightarrow \begin{cases} dy = \frac{v}{u} dx \\ dx = \frac{u}{v} dy \end{cases}$$



$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = u dx + v dy = \left(u + \frac{v^2}{u}\right) dx = \left(\frac{u^2}{v} + v\right) dy$$

Alors :



$$d\varphi = \frac{u^2 + v^2}{u} dx = \frac{u^2 + v^2}{v} dy$$

On a donc : $dx = \frac{u}{u^2 + v^2} d\varphi$ et $dy = \frac{v}{u^2 + v^2} d\varphi$

$$\text{Alors } ds_{\Psi=C^te} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} d\varphi^2} = \frac{d\varphi}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{d\varphi}{V}$$

La distance entre deux équipotentielle est inversement proportionnelle à la vitesse locale de l'écoulement.

De la même manière, on peut montrer que la longueur d'un élément d'arc le long d'une équipotentielle entre deux lignes de courants est donné par

$$ds_{\varphi=C^te} = \frac{d\psi}{V}$$

1.8 Potentiel complexe des vitesses

Un écoulement plan, conservatif et irrotationnel, peut être décrit au moyen d'une fonction de courant $\psi(x,y)$ et d'un potentiel des vitesses $\varphi(x,y)$. Par conséquent, l'écoulement peut aussi être décrit au moyen de la fonction analytique complexe : $f(z) = \varphi(x, y) + i \Psi(x, y)$ où $z = x + i y$ Cette fonction est appelée « **potentiel complexe des vitesses** ».

On définit alors une fonction complexe appelée potentiel complexe des vitesses par :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i \Psi(x, y) \text{ où } z = x + i y = r e^{i\theta}$$

A noter que :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{ les conditions de cauchy sont vérifiées, } f(z) \text{ est donc une fonction analytique.}$$

1.9 Exemples d'écoulements plans

1.9.1 Ecoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z) = Uz \text{ où } U \text{ est une constante réelle}$$

On a alors : $\varphi(x, y) + i \Psi(x, y) = U(x + i y) = Ux + i Uy$

$$\text{Par identification, on obtient : } \begin{cases} \varphi(x, y) = Ux \\ \Psi(x, y) = Uy \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(x, y) = Uy = C^{te} \Rightarrow y = C^{te} \forall x$ ce sont des droites horizontales.

Les équipotentielles sont telles que : $\varphi(x, y) = Ux = C^{te} \Rightarrow x = C^{te} \forall y$ ce sont des droites verticales.

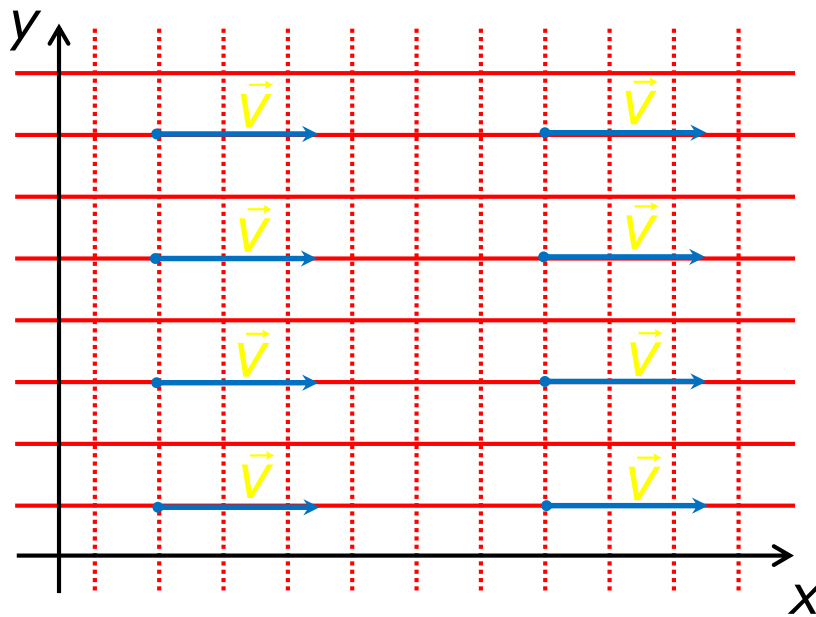
$$\text{Détermination du champ de vitesses : } \vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \\ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

La vitesse est uniforme : $\vec{v} = U \vec{e}_x$

Lignes de courant : $\Psi(x, y) = Uy = C^{te} \Rightarrow y = C^{te} \forall x$ (droites horizontales)

Équipotentielles : $\varphi(x, y) = Ux = C^{te} \Rightarrow x = C^{te} \forall y$ (droites verticales)

Champ de vitesses : $\vec{v} = U \vec{e}_x$



1.9.2 Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

On considère l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe : $f(z) = C \ln z$ où $z = x + iy = r e^{i\theta}$ et C une constante réelle.

$$\Rightarrow f(z) = C \ln(r e^{i\theta}) = C(\ln r + i\theta)$$

On peut alors en déduire la fonction de courant et le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = C \ln r \\ \Psi(r, \theta) = C \theta \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(r, \theta) = C \theta = C^{te}$

$\Rightarrow \theta = C^{te} \forall r$ il s'agit alors de droites passant par l'origine.

Les équipotentiels sont telles que : $\varphi(r, \theta) = C \ln r = C^{te} \Rightarrow r = C^{te} \forall \theta$ ce sont des cercles centrés sur l'origine.

Détermination du champ de vitesses :

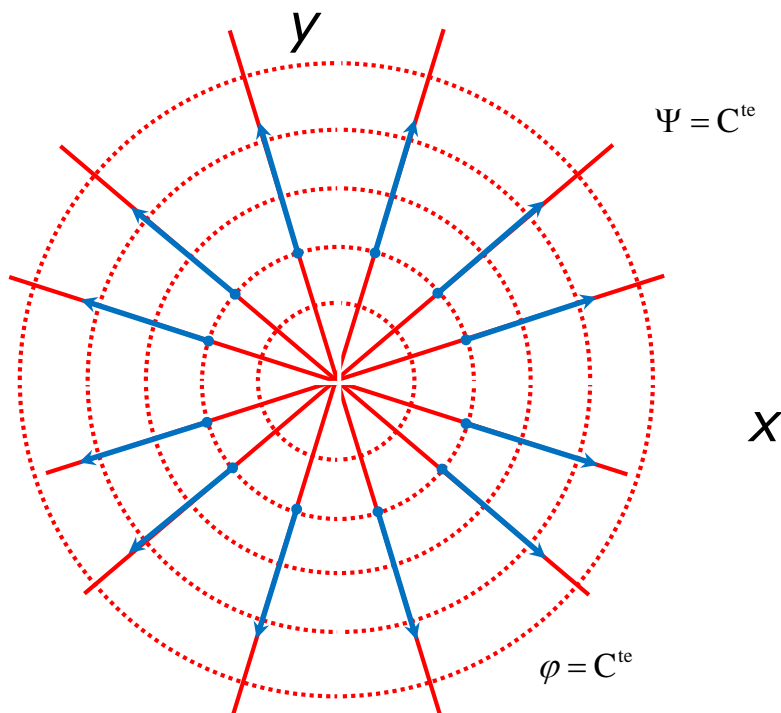
$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

Soit : $\vec{v} = \begin{cases} v_r = C/r \\ v_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_r$ il s'agit donc d'un écoulement radial centré sur l'origine,

où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Si $C > 0$, l'écoulement est divergent et correspond à l'effet d'une source à l'origine.

Si $C < 0$, l'écoulement est convergent et correspond à l'effet d'un puits à l'origine.



Écoulement généré par une source : $f(z) = C \ln z$

La signification physique de la constante C est en rapport avec le débit généré par la source ou le puits. Calculons le débit volumique de cet écoulement radial (source ou puits) à travers un cylindre d'axe Oz (perpendiculaire au plan de l'écoulement), de rayon r et de hauteur $\Delta z = 1$.

$$\oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{\ell} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot \Delta z d\ell$$

Il reste alors à intégrer sur un cercle de rayon r quelconque, centré sur l'origine.

$$q_v = \Delta z \oiint_{\ell} \vec{V} \cdot \vec{n} r d\theta = \Delta z r \int_0^{2\pi} \vec{V} \cdot \vec{n} d\theta \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{V} = C/r \vec{e}_r \\ \vec{n} = \vec{e}_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_v = \Delta z r \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} d\theta = \Delta z r \frac{C}{r} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi C \Delta z$$

$$\Rightarrow C = \frac{q_v}{2\pi}$$

Le potentiel complexe des vitesses d'un écoulement généré par une source ($q_v > 0$) ou un puits

($q_v < 0$) est donné par : $f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln z$

Remarque : dans le cas d'un écoulement centré en un point z_0 quelconque du plan :

$$f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

L'écoulement a lieu alors à travers la surface latérale du cylindre avec :

$$q_v = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{où } S \text{ est une surface fermée entourant l'origine.}$$

1.9.3 Vortex ou tourbillon libre

On considère l'écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z) = -iC \ln z \quad \text{où } z = x + iy = r e^{i\theta} \text{ et } C \text{ une constante réelle.}$$

$$\Rightarrow f(z) = -iC \ln(r e^{i\theta}) = -iC(\ln r + i\theta) = C\theta - iC \ln r = \varphi + i\psi \Rightarrow \begin{cases} \varphi(r, \theta) = C\theta \\ \psi(r, \theta) = -C \ln r \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(r, \theta) = -C \ln r = C^{te} \Rightarrow r = C^{te} \forall \theta$ ce sont des cercles centrés sur l'origine.

Les équipotentielles sont telles que : $\varphi(r, \theta) = C\theta = C^{te} \Rightarrow \theta = C^{te} \forall r$ ce sont des droites passant par l'origine.

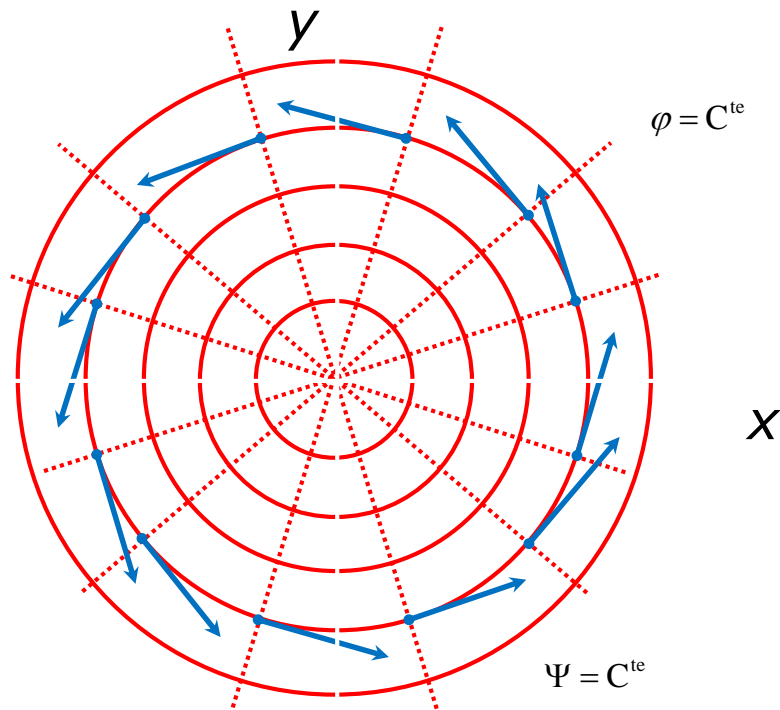
$$\text{Détermination du champ de vitesses : } \vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \vec{v} = \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{C}{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_\theta$$

Il s'agit donc d'un écoulement orthoradiale, tournant autour de l'origine, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Si $C > 0$, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le sens trigonométrique.

Si $C < 0$, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le sens horaire.



La signification physique de la constante C est en rapport avec l'intensité du tourbillon, c'est-à-dire avec la circulation du vecteur vitesse autour de l'origine du vortex.

En effet, Calculons la « circulation » de la vitesse autour de l'origine :

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{où } d\vec{\ell} \text{ parcourt une ligne de courant quelconque, i.e. une cercle de rayon } r.$$

$$\text{Avec } \vec{V} = \frac{C}{r} \vec{e}_\theta \text{ et } d\vec{\ell} = r d\theta \vec{e}_\theta \Rightarrow \Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C$$

$$\text{Donc : } C = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

Et par conséquent : $f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$ où Γ est la circulation du vortex (tourbillon libre)

Si $\Gamma > 0$, le vortex tourne dans le sens trigonométrique.

Si $\Gamma < 0$, le vortex tourne dans le sens horaire.

Remarque : Dans le cas où le vortex tourne autour d'un point z_0 quelconque du plan :

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

On considère deux écoulements, chacun décrit par un potentiel complexe des vitesses :

$$f_1(z) = \varphi_1(x, y) + i \Psi_1(x, y) \quad \text{où } \Delta \Psi_1 = 0 \text{ et } \Delta \varphi_1 = 0$$

$$f_2(z) = \varphi_2(x, y) + i \Psi_2(x, y) \quad \text{où } \Delta \Psi_2 = 0 \text{ et } \Delta \varphi_2 = 0$$

Comme l'équation de Laplace est linéaire, alors, pour toutes constantes α et β :

$$\Delta[\alpha\varphi_1(x, y) + \beta\varphi_2(x, y)] = \alpha\Delta\varphi_1(x, y) + \beta\Delta\varphi_2(x, y) = 0$$

$$\Delta[\alpha\Psi_1(x, y) + \beta\Psi_2(x, y)] = \alpha\Delta\Psi_1(x, y) + \beta\Delta\Psi_2(x, y) = 0$$

Si on pose : $\varphi(x, y) = \alpha\varphi_1(x, y) + \beta\varphi_2(x, y)$ et $\Psi(x, y) = \alpha\Psi_1(x, y) + \beta\Psi_2(x, y)$ alors

$$\varphi \quad \text{et} \quad \psi \quad \text{sont} \quad \text{harmoniques} : \quad \Delta\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\psi = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)$$

$f(z)$ décrit l'écoulement résultant de la superposition des deux écoulements f_1 et f_2 .

On peut donc créer des écoulements plus évolués par simple addition des potentiels complexes d'écoulements élémentaires.

1.9.4 Doublet et dipôle

On considère la superposition d'une source de débit $+q$, située en $x=a, y=0$, et d'un puits de débit $-q$, situé en $x=-a, y=0$.

On parle de l'écoulement généré par un doublet, dont le potentiel complexe des vitesses est :

$$f(z) = +\frac{q}{2\pi} \ln(z-a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z+a)$$

$$\text{Posons} \begin{cases} z_1 = z - a = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = z + a = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases}$$

D'où :

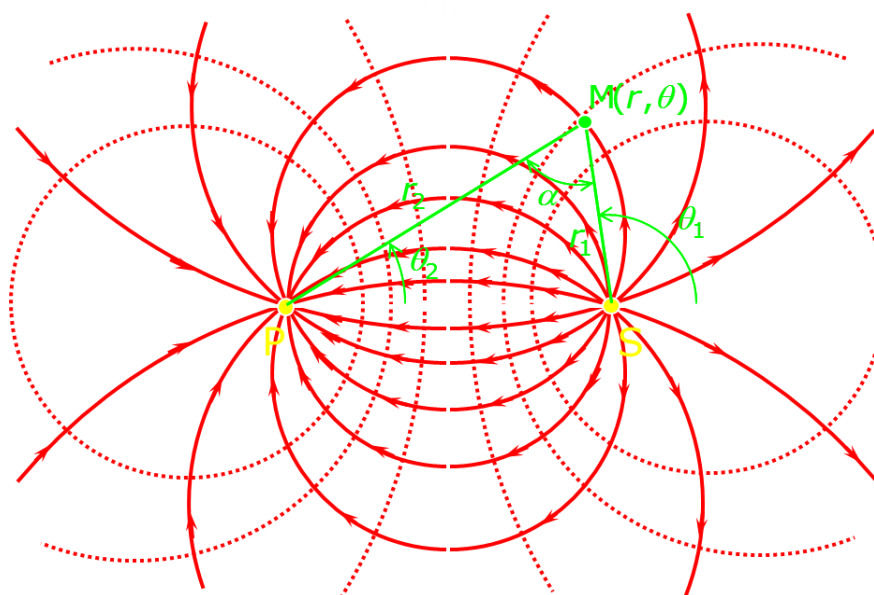
$$f(z) = \frac{q}{2\pi} (\ln z_1 - \ln z_2) = \frac{q}{2\pi} (\ln r_1 + i\theta_1 - \ln r_2 - i\theta_2) = \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \right] = \varphi + i\psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \\ \psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Et donc, les lignes de courant sont telles que :

$$\psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = C^{\text{te}} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = C^{\text{te}} = \alpha$$

Ce sont des cercles passant tous par les origines de la source S et du puits P. Les équipotentielles sont également des cercles.



L'écoulement diverge depuis la source et converge vers le puits.

Equipotentielle : $\varphi = C^{te} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = C^{te}$

Posons $\frac{r_1}{r_2} = k \Rightarrow \frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} = k \Rightarrow \left(x + \frac{k^2+1}{k^2-1}a\right)^2 + \left(\frac{2k}{k^2-1}\right)^2$

Equations de cercles orthogonaux aux lignes de courant, centrés sur l'axe des x.

Si on fait tendre a vers 0, on superpose le puits et la source à l'origine. On crée un dipôle.

$$f(z) = +\frac{q}{2\pi} \ln(z-a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z+a) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{z(1-a/z)}{z(1+a/z)}\right)$$

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{1-a/z}{1+a/z}\right) \text{ où } \frac{1}{1+a/z} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1-a/z \text{ et } \ln(1-a/z) \xrightarrow{a \rightarrow 0} -a/z$$

$$\text{Donc } f(z) \approx \frac{q}{2\pi} \ln\left[(1-a/z)^2\right] = \frac{q}{2\pi} 2\ln(1-a/z) \approx \frac{q}{2\pi} 2\left(-\frac{a}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{2aq}{z}$$

$$\text{En introduisant le moment dipolaire } p = 2aq : f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{z}$$

p est une constante qui peut être considérée complexe, et permettra ainsi d'orienter le dipôle dans le plan de l'écoulement.

Étudions le cas où le moment dipolaire est un réel positif :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{z} = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r e^{i\theta}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} e^{-i\theta} = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} (\cos\theta - i \sin\theta) = \varphi + i\Psi$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \varphi = -\frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} \cos \theta \\ \Psi = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} \sin \theta \end{cases}$$

Lignes de courant : $\Psi = C^{te} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{p}{r} \sin \theta = C^{te}$

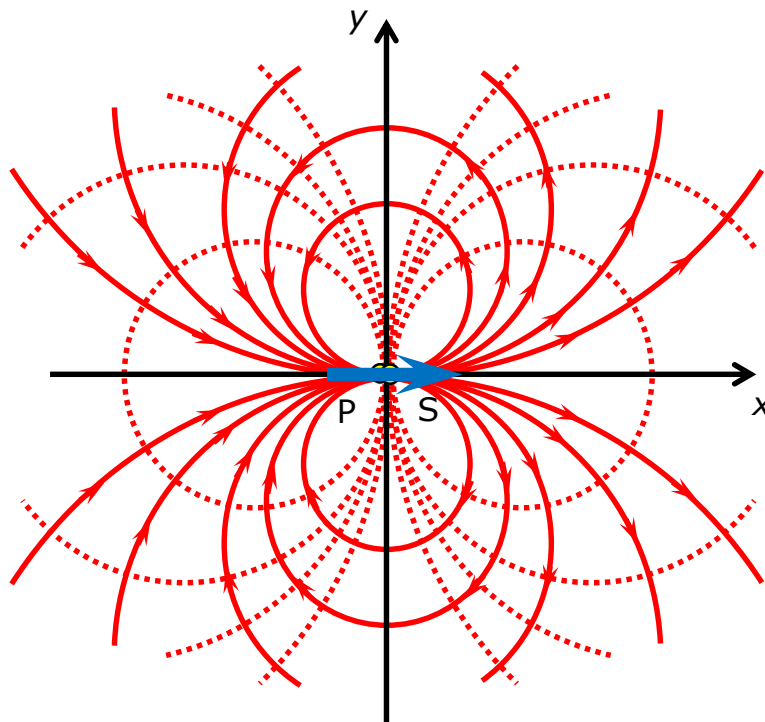
$$\Rightarrow \frac{1}{r} \sin \theta = C^{te} \Rightarrow r \sin \theta = C^{te} r^2 \Rightarrow y = C^{te} (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - C^{te} y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - Ky = 0 \Rightarrow x^2 + (y - K/2)^2 = (K/2)^2 \quad \text{cercles centrés sur l'axe des } y \text{ et tangents à l'axe des } x$$

Equipotentielles : $\varphi = C^{te} \Leftrightarrow \text{équation d'un cercle de centre } (0, K/2) \text{ et de rayon } K/2$

$$\varphi = C^{te} \Rightarrow \frac{\cos \theta}{r} = C^{te} \Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = k \Rightarrow \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

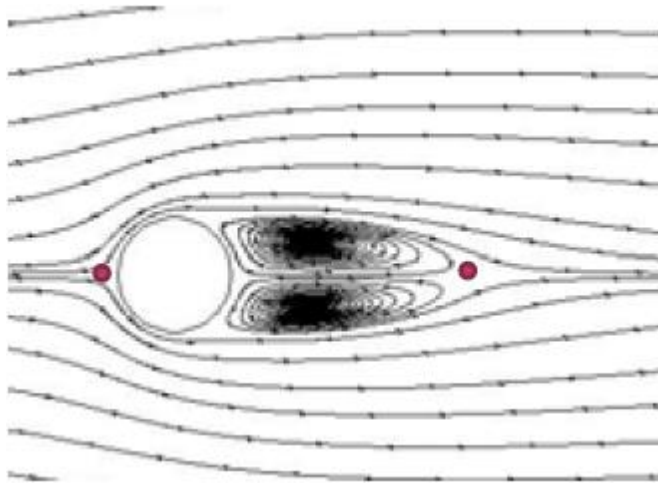
Cercles centrés sur l'axe des x , et tangents à l'axe des y .



1.9.5 Coins et points d'arrêt

On appelle « point d'arrêt » un point où la vitesse est nulle.

Les lignes de courant pouvant être assimilées à des barrières infranchissables, celles passant par le point d'arrêt forment des coins d'arrêt.



Application : écoulement autour de coins ou de dièdres

On considère un écoulement plan modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z) = m z^{n+1} \text{ où } n \geq -\frac{1}{2}$$

En coordonnées cylindriques : $z = r e^{i\theta}$ et donc
 $f(z) = m r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} = m r^{n+1} [\cos[(n+1)\theta] + i \sin[(n+1)\theta]] = \varphi + i\psi$

On a alors
$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = m r^{n+1} \cos[(n+1)\theta] \\ \psi(r, \theta) = m r^{n+1} \sin[(n+1)\theta] \end{cases}$$

Le champ de vitesses s'obtient par :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = m(n+1) r^n \cos[(n+1)\theta] \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -m(n+1) r^n \sin[(n+1)\theta] \end{cases}$$

On remarque que la vitesse s'annule si $r = 0$. L'origine est donc un point d'arrêt.

Les lignes de courant passant par l'origine vérifient :

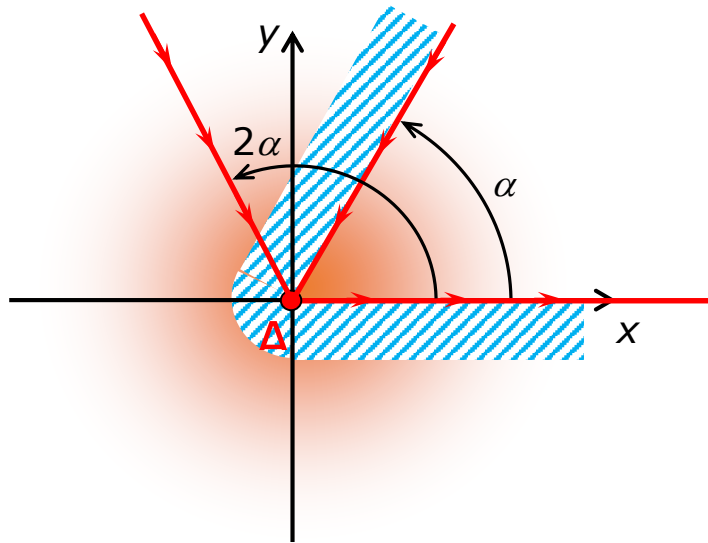
$$\psi(r, \theta) = C^{te} = m r^{n+1} \sin[(n+1)\theta] = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \sin[(n+1)\theta] = 0 \Rightarrow \theta = \frac{k}{(n+1)} \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Si $k=0$: $\theta = 0 \Rightarrow$ demi-droite (Ox)

Si $k=1$: $\theta = \frac{\pi}{n+1} = \alpha \Rightarrow$ demi-droite d'angle α avec (Ox)

Si $k=2$: $\theta = \frac{2\pi}{n+1} = 2\alpha \Rightarrow$ demi-droite d'angle 2α avec (Ox) .

Les lignes de courant pouvant être assimilées à des barrières infranchissables, celles passant par le point d'arrêt forment des « coins » : ce sont les **coins d'arrêt**.



Analysons maintenant l'écoulement du fluide entre ces coins d'arrêt pour quelques valeurs particulières de m .

$$f(z) = m z^{n+1} \text{ où } n \geq -\frac{1}{2}$$

cas où $n=1$

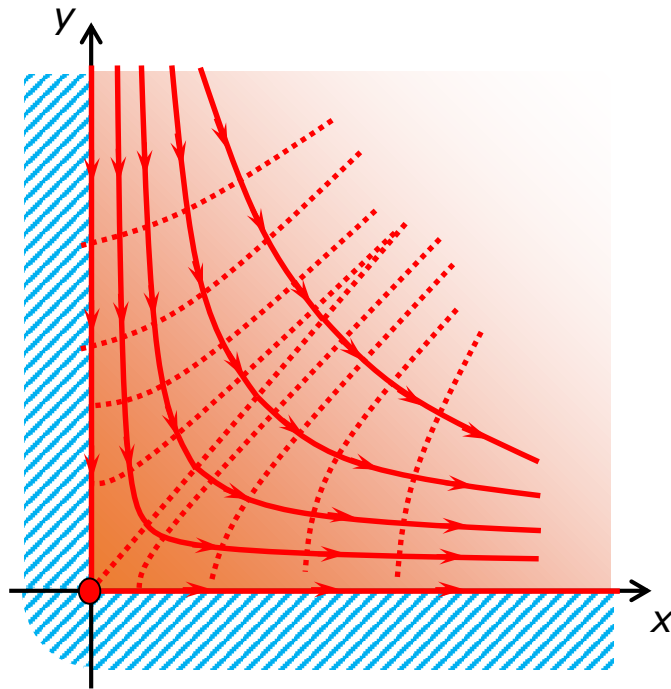
$$\psi(r, \theta) = m r^2 \sin [2\theta] = C^{\text{te}} \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ coin à angle droit}$$

$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = 2m r^2 \sin \theta \cos \theta = 2m r \sin \theta r \cos \theta = C^{\text{te}}$$

$$\psi(r, \theta) = C^{\text{te}} \Leftrightarrow 2m x y = C^{\text{te}}$$

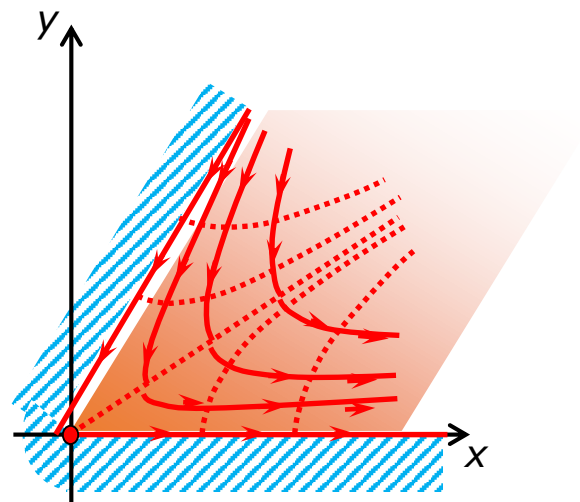
$$y = \frac{C^{\text{te}}}{x} :$$

À l'intérieur de ce coin les lignes de courant sont des hyperboles. Les équipotentiels le sont également.



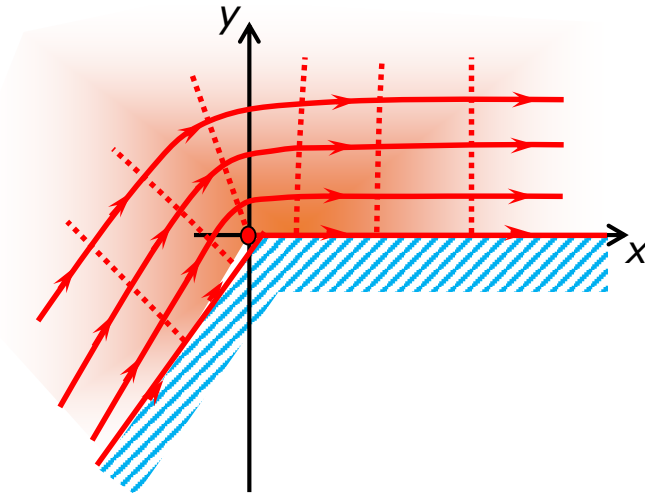
Cas où $n > 1$ $\alpha = \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{2}$

Il s'agit de l'écoulement autour d'un coin aigu.



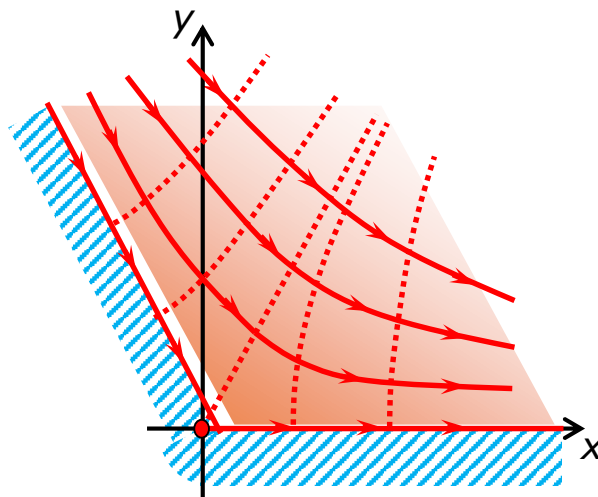
Cas où $-\frac{1}{2} < n < 0$ $\pi < \alpha = \frac{\pi}{n+1} < 2\pi$

Il s'agit de l'écoulement autour d'un dièdre.



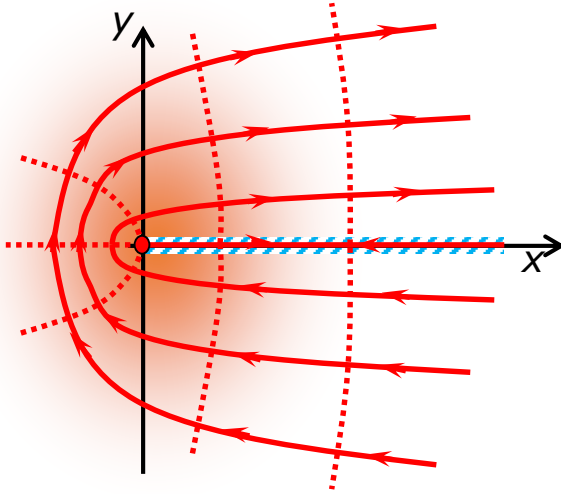
Cas où $0 < n < 1$ $\frac{\pi}{2} < \alpha = \frac{\pi}{n+1} < \pi$

Il s'agit de l'écoulement autour d'un coin obtus.



Cas où $m = -\frac{1}{2}$ $\alpha = 2\pi$

Il s'agit d'un contournement d'un demi-plan.



Chapitre 2

Théorie de la couche limite

D'une manière générale, l'écoulement bi-dimensionnel autour d'un obstacle placé dans un champ de vitesse uniforme développe une fine couche tout le long de cet objet avec une grande variation de la vitesse autour de cet obstacle. Cette couche est appelée couche limite et est due à la viscosité du fluide.

2.1 Notion de couche limite

On considère un écoulement bidimensionnel, stationnaire, incompressible d'un fluide sans force de masse.

On considère l'écoulement d'un fluide autour d'un objet (Figure 2.1). Relativement loin de l'objet, on peut négliger les effets de la viscosité si le nombre de Reynolds est suffisamment grand. Dans ces conditions, le fluide peut être considéré parfait et l'écoulement peut être décrit par la cinématique. Mais cette hypothèse n'a plus de sens lorsqu'on se rapproche de la paroi de l'objet, la vitesse du fluide devient progressivement nulle. Proche de la paroi, la viscosité joue un rôle important, on doit y décrire l'écoulement au moyen de l'équation de Navier-Stokes.

Le domaine de transition où la vitesse devient progressivement nulle est appelée « couche limite ».

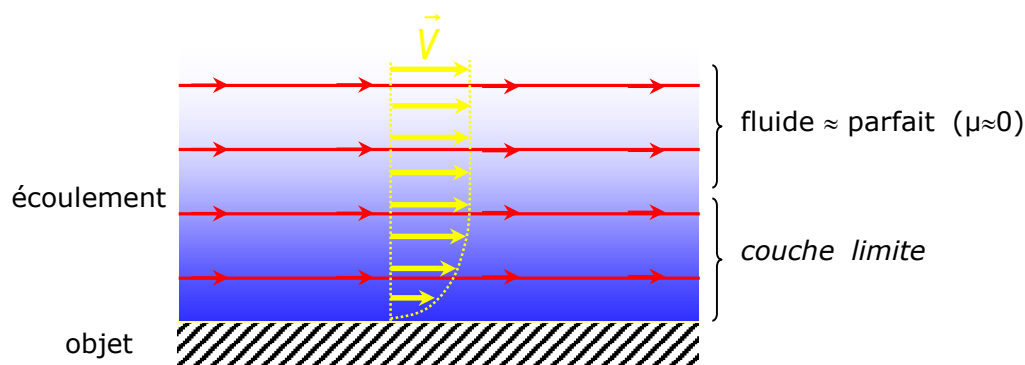


Figure 2.1 :

L'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de Reynolds Re . Au sein de la couche limite, l'écoulement peut être soit laminaire soit turbulent (cela dépend également de Re).

Au contact de la paroi, quand le profil de vitesse présente une pente infinie, on dit qu'il y a un décollement de la couche limite. (Figure 2.2)

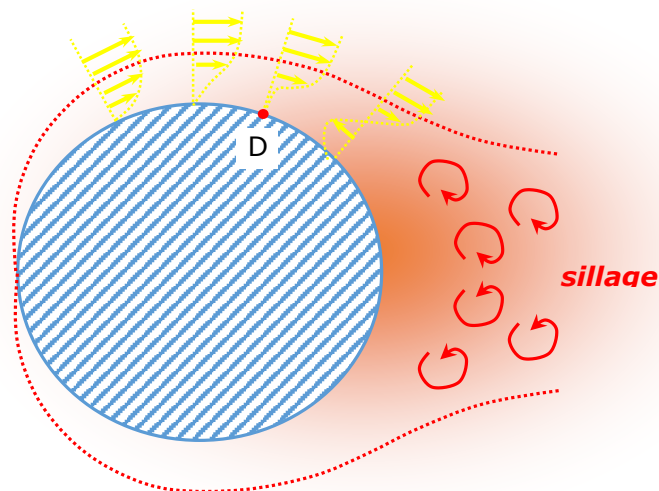


Figure 2.2 : Décollement de la couche limite

Après le point de décollement D, la couche limite devient turbulente. les forces de viscosité ne sont plus assez importantes pour assurer le contournement normal de l'objet, il se forme un « sillage ». Le sillage est d'autant plus important que l'objet est mal profilé : en pratique, on cherche à optimiser le profil de façon à minimiser le sillage qui en effet responsable d'une dissipation d'énergie importante.

2.2 Grandeurs caractéristiques de la couche limite

a) Epaisseur

Elle est définie comme la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse devient supérieure à 99% de la vitesse de l'écoulement uniforme (non perturbé par l'objet) :

$$u(y = \delta) = 0,99U$$

δ : épaisseur de la couche limite

Figure 2.3 :

b) Epaisseur de déplacement

Pour définir l'épaisseur de déplacement, on évalue le flux manquant par rapport à celui qu'on aurait dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme jusqu'à la paroi.

On a ainsi :

$$\int_0^{\infty} (U - u) dy = \int_0^{\delta^*} U dy = U \delta^*$$

$$\text{D'où } \delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

2.3 Etude dimensionnelle de la couche limite

Au sein de la couche limite, l'écoulement doit être décrit au moyen de l'équation de Navier-Stokes. La résolution de cette équation s'avère difficile sans poser un certain nombre d'approximations. Ces approximations doivent être validées sur les bases d'une analyse dimensionnelle.

Considérons alors, au sein de la couche limite, un écoulement :

- bidimensionnel (x,y) ;
- stationnaire ;
- où les effets de la pesanteur sont négligeables.

Avec ces hypothèses, l'équation de Navier-Stokes se résume à :

$$\begin{cases} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Et comme $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, on peut écrire

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots\dots (i) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \dots\dots (ii) \end{cases}$$

On peut ainsi poser que : $v \ll u$ et $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

Ainsi l'équation (i) devint $\Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

et

l'équation (ii) $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$

Analysons les différents ordres de grandeurs caractéristiques :

$u \approx U$: ordre de grandeur de la vitesse longitudinale (écoulement uniforme).

$v \approx V$: ordre de grandeur de la vitesse transversale.

$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{x}$: où x peut représenter la distance au front de l'objet.

$\frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{\delta}$: où δ peut représenter l'épaisseur de la couche limite.

On sait que l'équation de continuité doit être vérifiée : $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ donc } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} \text{ sont nécessairement du même ordre de grandeur.}$$

$$\Rightarrow \frac{U}{x} \approx \frac{V}{\delta} \Rightarrow V \approx U \frac{\delta}{x}$$

On peut alors en déduire que $u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U^2}{x}$ et $v \frac{\partial u}{\partial y} \approx V \frac{U}{\delta} \approx \frac{U^2}{x}$

On sait alors que $u \frac{\partial u}{\partial x}$ et $v \frac{\partial u}{\partial y}$ sont du même ordre de grandeur $\frac{U^2}{x}$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ donc } \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U^2}{x}$$

Et on sait que $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \nu \frac{U}{\delta^2}$

$$\text{Alors } \nu \frac{U}{\delta^2} \approx \frac{U^2}{x}$$

On en déduit l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{U}} \sqrt{x}$$

Bilan :

L'analyse dimensionnelle nous a permis de montrer que :

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$$

$$\delta^2 \approx \frac{\nu x}{U}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ équation à résoudre avec comme conditions aux limites :}$$

$$u(x,0) = 0, v(x,0) = 0 \text{ et } u(x,\infty) = U$$

2.4 Equation de Blasius

$$\text{L'équation à résoudre : } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

on sait que sur une même ligne de courant, la vitesse reste à peu près constante, par conséquent :

$\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$: sur une ligne de courant en dehors de la couche limite.

Or, on a vu que dans la couche limite, on a : $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$

Donc, comme il y a continuité des pressions à la frontière de la couche limite, on peut en déduire que $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$ dans la couche limite

Par conséquent, il reste seulement à résoudre :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

On peut alors raisonner en terme de lignes de courant au sein même de la couche limite :

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \quad \text{où } u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et } v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Donc $d\Psi = -v dx + u dy \approx u dy$

On peut alors trouver $\Psi(x, y)$ en intégrant :

$$\Psi(x, y) = \int_0^y u(x, y') dy'$$

Exprimons d'abord la vitesse u en fonction de U :

$$u = U g(\eta) \quad \text{où } \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

η : nombre sans dimension

$\delta(x)$: épaisseur de la couche limite en x

$$\Rightarrow \Psi = \int_0^\eta U g(\eta') \delta d\eta'$$

$$\Rightarrow \Psi = U \delta \int_0^\eta g(\eta') d\eta'$$

Posons $f(\eta') = \int_0^{\eta'} g(\eta') d\eta'$

donc la fonction $f(\eta)$ est telle que :

$$f'(\eta) = \frac{df}{d\eta} = g(\eta)$$

On peut alors écrire : $\Psi(x, y) = U\delta(x)f(\eta)$ car $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$

Donc il faut résoudre : $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sachant que :

$$u = U g(\eta) = U f'(\eta)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -Uf'(\eta) \frac{d\delta}{dx} - U\delta \frac{\partial \eta}{\partial x} f'(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{\partial \eta}{\partial x} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial \eta}{\partial y} f''(\eta) = \frac{U}{\delta} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \eta}{\partial y} f'''(\eta) = \frac{U}{\delta^2} f'''(\eta)$$

On obtient ainsi : $Uf' \cdot U \frac{\partial \eta}{\partial x} f'' - U \left(f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{\partial \eta}{\partial x} f' \right) \cdot \frac{U}{\delta} f'' = \nu \frac{U}{\delta^2} f'''$

Soit, après simplification : $2f''' + f f'' = 0$ qui s'appelle équation de **Blasius**

Après résolution numérique on trouve $f(\eta)$, on la dérive on trouve $f'(\eta)$

Et l'équation devient : $u = U f'(\eta)$

En considérant les conditions aux limites suivantes :

$$\eta = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow u = v = 0 \Rightarrow f(0) = f'(0) = 0$$

Et

$$\eta \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \Rightarrow u = U \Rightarrow f'(\eta \rightarrow \infty) = 1$$

La solution numérique peut être approximée, proche de la paroi, par :

$$f(\eta) = \frac{1}{2} 0,332 \eta^2 + O(\eta^5)$$

$$u = Uf'$$

$$u(\eta) \approx 0,332 U\eta$$

On en déduit aussi :

$$v(\eta) \approx v(x) = 0,860 U \left(\frac{\nu}{xU} \right)^{1/2}$$

$$v(\eta) \approx v(x) = 0,860 U \left(\frac{1}{\text{Re}_x} \right)^{1/2}$$

On peut donc définir un nombre de *Reynolds* « local » :

$\text{Re}_x = \frac{xU}{\nu}$ qui caractérise la nature de l'écoulement à la distance x du front de l'objet, au sein de la couche limite.

Ainsi, toutes les grandeurs sans dimensions qui peuvent caractériser la couche limite peuvent être définies à partir de ce nombre de *Reynolds* local :

$$\frac{v(x)}{U} \approx \frac{0,860}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\frac{\delta(x)}{x} \approx \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\frac{\delta^*(x)}{x} \approx \frac{1,72}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Coefficient de traînée local : $c_f(x) = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho u^2} \approx \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$

Où :

$\tau = \tau_{xy}$ est la contrainte de frottement

pour obtenir le coefficient de traînée global, il suffit d'intégrer c_f sur toute la longueur de l'objet, soit :

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}}$$

Où :

Re : nombre de Reynolds global

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

2.5 Couche limite turbulente

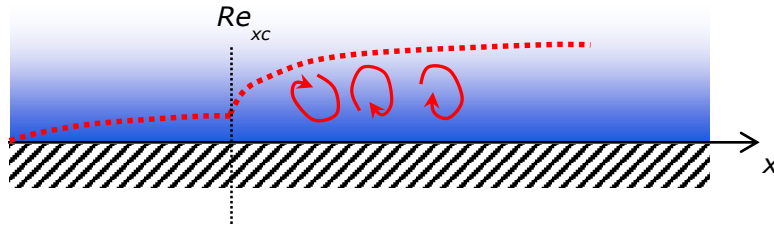
Ce que l'on vient d'établir concerne une couche limite laminaire.

On a vu que la nature de l'écoulement pouvait être localement décrit au moyen du nombre de *Reynolds* local :

$$\text{Re}_x = \frac{xU}{\nu}$$

On constate alors que Re_x croît avec la distance x , quand $Re_x > 5.10^5 (=Re_{xc})$, la couche limite devient **turbulente**.

Concrètement, la transition du laminaire au turbulent se manifeste par un épaissement brutal de la couche limite.



Chapitre 3

Analyse dimensionnelle et similitudes

3.1 Introduction

Quand le système étudié est trop complexe pour permettre une résolution complète des équations fondamentales, ou bien lorsque son comportement est chaotique, l'analyse dimensionnelle donne accès de façon simple à des relations entre les différentes grandeurs caractérisant ce système.

Le regroupement de ces différentes grandeurs en des nombres sans dimension permettra par ailleurs d'établir des similitudes entre les comportements de systèmes semblables mais différents (prototype/maquette).

3.2 Théorème Π de *Buckingham*

Si une équation comportant k variables est homogène, elle peut être réduite à une relation entre $(k-r)$ produits indépendants sans dimension, où r est le nombre minimal de dimensions requis pour décrire les k variables.

Prenons l'exemple de la détermination des pertes de charge régulières dans une conduite cylindrique :

Les différentes grandeurs qui interviennent sont :

$\frac{\Delta P_t}{L}$ la perte de charge par unité de longueur,

D : le diamètre de la conduite,

ε : la rugosité de la conduite,

V : la vitesse moyenne de l'écoulement (ou le débit),

μ : la viscosité du fluide,

ρ : la masse volumique du fluide.

Par conséquent, il existe une relation entre ces différentes grandeurs :

$$\frac{\Delta P_t}{L} = f(D, \varepsilon, V, \mu, \rho)$$

Nous avons $k=6$ variables $\left(\frac{\Delta P_t}{L}, D, \varepsilon, V, \mu, \rho\right)$, qui nécessitent un minimum de $r=3$ dimensions (M,L,T).

$$\left[\frac{\Delta P_t}{L}\right] = ML^{-2}T^{-2},$$

$$[D] = L,$$

$$[\varepsilon] = L,$$

$$[V] = LT^{-1},$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1},$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

Par conséquent, l'équation reliant les 6 variables peut être ramenée à une équation reliant $k-r = 3$ produits sans dimension :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P_t}{L} \frac{D}{\rho V^2} = \lambda, \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = Re, \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \epsilon_r$$

Le théorème Π de *Buckingham*, permet donc le passage de

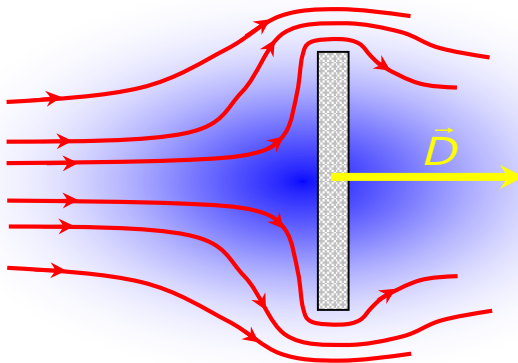
$$\frac{\Delta P_t}{L} = f(D, \varepsilon, V, \mu, \rho) \text{ à } \Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

Afin d'appliquer ce théorème, il convient d'utiliser une méthode systématique :

1. Faire la liste des variables du problème $\Rightarrow k$
2. Écrire l'équation aux dimensions de chacune des k variables.
3. Déterminer r , et donc $k-r \Rightarrow$ le nombre de produits sans dimension caractérisant le problème.
4. Parmi les k variables, en choisir un nombre r , qui soient dimensionnellement indépendantes $\Rightarrow r$ variables primaires.
5. Former les $k-r$ produits Π en combinant les $k-r$ variables non primaires avec les r primaires de façon à obtenir des grandeurs sans dimension.
6. Formuler la relation entre les $k-r$ produits Π trouvés.

Exemple :

On appelle force de traînée, la force \vec{D} exercée par un écoulement sur un objet, dans la direction parallèle à l'écoulement. Nous allons étudier le cas d'une plaque plane rectangulaire.



1. les variables du problème sont :

D : force de traînée

h : hauteur de la plaque

L : largeur de la plaque

V : vitesse moyenne de l'écoulement

μ : viscosité du fluide

ρ : masse volumique du fluide

2. Équations aux dimensions :

$$\left. \begin{array}{l} [D] = MLT^{-2} \\ [h] = L \\ [L] = L \\ [V] = LT^{-1} \\ [\mu] = ML^{-1}T^{-1} \\ [\rho] = ML^{-3} \end{array} \right\} M, L, T \Rightarrow r = 3$$

3. Nombre de produits Π sans dimension : $(k - r) = 6 - 3 = 3$

4. Choix de $r = 3$ variables primaires dimensionnellement indépendantes :

par exemple h , ρ et v , on ne peut pas choisir à la fois h et L

5. Formation des 3 produits Π :

par combinaison des variables primaires et non primaires.

$$\Pi_1 = Dh^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} V^{\gamma_1}$$

$$\Pi_2 = Lh^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} V^{\gamma_2}$$

$$\Pi_3 = \mu h^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} V^{\gamma_3}$$

Pour trouver Π_1 on a :

$$M^0 L^0 T^0 = M^1 L^1 T^{-2} L^{\alpha_1} (M^1 L^{-3})^{\beta_1} (L^1 T^{-1})^{\gamma_1} = M^{(1+\beta_1)} L^{(1+\alpha_1-3\beta_1+\gamma_1)} T^{(-2-\gamma_1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \beta_1 = 0 \\ 1 + \alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ -2 - \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \alpha_1 = -2 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{D}{\rho V^2 h^2} \\ \gamma_1 = -2 \end{cases}$$

Pour trouver Π_2 on a :

$$M^0 L^0 T^0 = L^1 L^{\alpha_2} (M^1 L^{-3})^{\beta_2} (L^1 T^{-1})^{\gamma_2} = M^{\beta_2} L^{(1+\alpha_2-3\beta_2+\gamma_2)} T^{-\gamma_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ 1 + \alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ -\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 = -1 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{L}{h} \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Pour trouver Π_3 on a :

$$M^0 L^0 T^0 = M L^{-1} T^{-1} L^{\alpha_3} (M^1 L^{-3})^{\beta_3} (L^1 T^{-1})^{\gamma_3} = M^{(1+\beta_3)} L^{(-1+\alpha_3-3\beta_3+\gamma_3)} T^{(-1-\gamma_3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \beta_3 = 0 \\ -1 + \alpha_3 - 3\beta_3 + \gamma_3 = 0 \\ -1 - \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_3 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \Rightarrow \Pi_3 = \frac{\mu}{\rho V h} \\ \gamma_3 = -1 \end{cases}$$

Formuler la relation entre les trois produits Π trouvés :

$$D = f(h, L, V, \mu, \rho) \Rightarrow \Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

avec :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{D}{\rho V^2 h^2} \\ \Pi_2 &= \frac{L}{h} \\ \Pi_3 &= \frac{\mu}{\rho V h}\end{aligned}$$

Soit

$$D = \rho V^2 h^2 \Phi\left(\frac{L}{h}, 1/Re\right)$$

$1/Re$ caractérise la nature de l'écoulement

L/h : facteur de forme

Illustration de l'intérêt de la méthode :

Si D_1 est la traînée mesurée sur une plaque de dimensions $L_1 \times h_1$ quand elle est soumise à un écoulement de vitesse v_1 , alors :

$$\frac{D_1}{\rho v_1^2 h_1^2} = \Phi(L_1/h_1, 1/Re_1) \text{ où } Re_1 = \frac{\rho v_1 h_1}{\mu}$$

L'analyse dimensionnelle par le théorème de *Buckingham* permet d'en déduire que pour une plaque de dimensions $L_2 \times h_2$ telles que :

$$L_2/h_2 = L_1/h_1 \text{ si } V_2 = \frac{h_1}{h_2} V_1 \Leftrightarrow V_1 h_1 = V_2 h_2 \Leftrightarrow Re_1 = Re_2$$

Et donc $\Phi(L_1/h_1, 1/Re_1) = \Phi(L_2/h_2, 1/Re_2)$

$$\Rightarrow \frac{D_1}{\rho V_1^2 h_1^2} = \frac{D_2}{\rho V_2^2 h_2^2} \Rightarrow D_2 = \frac{V_2^2 h_2^2}{V_1^2 h_1^2} D_1 \Rightarrow D_2 = D_1$$

3.3 Coefficients sans dimension usuels

Outre le nombre de *Reynolds* (pour le caractère turbulent ou laminaire d'un écoulement), il existe un certain nombre de grandeurs sans dimension qui peuvent caractériser la nature d'un écoulement :

Nombre de **Reynolds**

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \Rightarrow \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de viscosité}}$$

Il a une importance générale pour tout type d'écoulement.

Nombre de **Froude** :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} \Rightarrow \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de gravité}}$$

Il a une importance pour les écoulements à surface libre.

Comme c'est la pesanteur qui est responsable de la forme de la surface libre, plus Fr est grand, moins la surface libre a d'effets sur l'écoulement, et inversement.

Nombre d'**Euler**

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \Rightarrow \frac{\text{forces de pression}}{\text{forces d'inertie}}$$

Il a une importance s'il existe de grandes différences de pression au sein de l'écoulement.

Nombre de **Mach**

$$Ma = \frac{V}{c} \Rightarrow \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de compressibilité}}$$

Il a une importance pour les écoulements de fluides compressibles.

$c = 1/\sqrt{\rho\chi}$ est la vitesse du son.

χ : coefficient de compressibilité isentropique

Nombre de **Strouhal**

$$St = \frac{\omega L}{V} \Rightarrow \frac{\text{forces d'inertie locales}}{\text{forces d'inertie convectives}}$$

Il a une importance pour les écoulements non stationnaires.

3.4 Application aux maquettes

L'analyse dimensionnelle, grâce notamment au théorème de *Buckingham*, permet de résumer le comportement d'un système à une relation entre un nombre restreint de grandeurs sans dimension.

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k_r})$$

Pour des systèmes complexes la détermination de la fonction Φ n'est accessible que par mesures expérimentales. Ainsi, lors de la mise au point d'un prototype, il est économiquement et pratiquement plus pertinent de procéder à ces mesures sur un modèle réduit : la maquette.

Il faut alors pouvoir transposer les résultats obtenus sur la maquette à ceux que l'on obtiendra sur le prototype :

On s'arrange donc pour respecter le maximum de similitudes entre la maquette et le prototype.

A titre d'illustration, reprenons l'exemple de la force de traînée exercée par un écoulement sur une plaque plane :

Pour la maquette

$$\frac{D_m}{\rho_m V_m^2 h_m^2} = \Phi \left(\frac{L_m}{h_m}, \frac{\mu_m}{\rho_m V_m h_m} \right)$$

Et pour le prototype

$$\frac{D_p}{\rho_p V_p^2 h_p^2} = \Phi \left(\frac{L_p}{h_p}, \frac{\mu_p}{\rho_p V_p h_p} \right)$$

On commence alors par se fixer un facteur d'échelle : $\frac{L_m}{L_p} = \alpha = 1/25$

On respecte ensuite le facteur de forme : $\frac{L_m}{h_m} = \frac{L_p}{h_p}$

Si on utilise le même fluide, on a : $\rho_m = \rho_p$ et $\mu_m = \mu_p$

Et par conséquent, respecter la similitude de *Reynolds* revient à :

$$V_m h_m = V_p h_p \Rightarrow V_m = V_p \frac{h_p}{h_m} = V_p / \alpha$$

Dans ces conditions :

$$\frac{D_m}{\rho_m V_m^2 h_m^2} = \frac{D_p}{\rho_p V_p^2 h_p^2} \Rightarrow D_p = \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \left(\frac{h_p}{h_m} \right)^2 D_m$$

$$D_p = \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \left(\frac{h_p}{h_m} \right)^2 D_m = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot D_m \Rightarrow D_p = D_m$$

Ce résultat, spécifique au problème étudié, montre que par un choix approprié de la vitesse, la mesure expérimentale de la traînée sur une maquette géométriquement semblable donne directement la traînée à laquelle on doit s'attendre sur le prototype.

En pratique, tout n'est pas si simple, dans la mesure où l'on ne peut souvent pas respecter simultanément toutes les similitudes.

Références bibliographiques

1. R. Comolet, « Mécanique expérimentale des fluides », Editeur Masson, 1976, Tomes I, II et III.
2. Ouziaux R., Perrier J. Mécanique des fluides appliquée, Dunod, Paris, 1998.
3. Renald V. Giles, Jack B. Evett, Cheng Liu, Mécanique des fluides et hydraulique (cours et problèmes), 2^{ème} édition, Série Schaum, 1995.
4. Lumbroso H. Problèmes résolus de mécanique des fluides, Dunod, 1989.
5. Candel S. Mécanique des fluides, 2^{ème} édition, Dunod, 2005.
6. R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, "Transport Phenomena", Wiley editor, 1960.
7. Rjucsh K. Kundu, I. M. Cohen, "Fluid Mechanics", 2nd Edition, Academic Press, 2002.
8. D. P. Kessler and R. A. Greenkorn, "Momentum, Heat, and Mass transfer: Fundamentals", M. Dekker, 1999.
9. T. C. Papanastasiou, G. C. Georgiou and A. N. Alexandrou, "Viscous fluid flow", CRC Press LLC, 2000.
10. G. Emanuel, "Analytical Fluid, Dynamics", 2nd edition, CRC Press, 2000.
11. R. W. Fox, A. T. Mc Donald and P. J. Pritchard, "Introduction to fluid mechanics", sixth edition, Wiley and sons editor, 2003.
12. G. K. Batchelor, FRS, "An Introduction to fluid dynamics", Cambridge University Press.