République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Support de cours du module

Maths I

Par

HARRAT CHAHRAZED

Domaine : Sciences et technologie.

Version : 2018

Introduction

L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse et algèbre accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse et algèbre de la licence. Ce support de cours est à destination exclusive des étudiants de la première année : chimie, physique, génie de l'eau, domaine sciences et technologie.

Le cours est commencé par la méthode du raisonnement mathématique, puis on s'intéresse à la théorie des ensembles, les relations et les applicatons. On étudie les structures algébriques, les nombres complexes. On donne la notion de la limite, la continuité et dérivabilité des fonctions réelles à une variable réelle, puis application aux fonctions élémentaires et leurs développements limités. Le dernier chapitre est consacré à l'algébre linéaire.

J'essaierai également dans la mesure du possible de fournir l'essentiel des résultats de chaque chapitre. Je fournirai autant d'exemples et des figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours.

Il s'agit du polycopié d'un cours que j'ai donné pour les étudiants de la première année chimie à l'université USTO-MB en (2009-2010) et (2010-2011), les étudiants de la première année de génie de l'eau en (2011-2012) et (2012-2013), et les étudiants de la première année socle commun en (2014-2015). J'espère que ce polycopié sera utile.

Table des matières

Chapitre 1

Méthode du raisonnement mathématique

Le raisonnement mathématique est un outil qui fait appel à des règles de déduction, en faisant intervenir des définitions, des énoncés, des lois ou propositions où encore des résultats préalablement obtenus par un raisonnement. Il existe plusieurs types de raisonnement à savoir, le raisonnement direct, contraposé, par absurde, contre-exemple et par récurrence.

1.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple 1.1.1 *Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*

Rappelons que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ se constitue par la formule $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$ on obtient :

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} \\ &= \frac{pq' + p'q}{qq'} \end{aligned}$$

Or le numérateur $pq' + p'q$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$, le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme

$$a + b = \frac{p''}{q''}$$

ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion «$P \Rightarrow Q$ » est équivalente à « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ ».

Donc, montrer que l'assertion l'assertion « $P \Rightarrow Q$ », revient à montrer l'assertion « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ » est vraie.

Exemple 1.2.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair.

Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

Alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+1+4k \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \\ &= 2k^{'}+1,\ (k^{'}=2k^2+2k) \end{aligned}$$

et donc n^2 *est impair.*

Conclusion : Nous avons montré que si n *est impair alors* n^2 *est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si* n^2 *est pair alors* n *est pair.*

1.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemple 1.3.1 *Soient* $a, b \geqslant 0$*. Montrer que*

$$\text{si } \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ alors } a = b$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ et } a \neq b$$

Comme

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$$

alors

$$a + a^2 = b + b^2$$

cela conduit à

$$(a-b)(a+b) = -(a-b).$$

Comme $a \neq b$ *alors* $a - b \neq 0$ *et donc en divisant par* $(a-b)$ *on obtient* $a + b = -1$.

La somme des deux nombres positifs a *et* b *ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.*

Conclusion :

$$si \ \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \ alors \ a = b.$$

1.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E \ P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion « $\forall x \in E \ P(x)$ ».

Exemple 1.4.1 *Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».*

Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots,$ *Par exemple* $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Un contre-exemple est 7 *: les carrés inférieurs à* 7 *sont* $0, 1, 4$ *mais avec trois de ces nombres on ne peut pas obtenir* 7*.*

1.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1. Montrons que l'assertion est vraie : pour $n = 0$.
2. Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n.
3. On démontre alors que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n + 1$.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.5.1 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Pour $n \geqslant 0$, *notons* $P(n)$ *l'assertion suivante :*

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geqslant 0$.

Montrons que l'assertion est vraie : pour $n = 0$ *nous avons* $2^0 = 1 > 0$. *Donc* $P(0)$ *est vraie.*

Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n.

Montrons que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n+1$. est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \text{ , car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n+1 \text{ , car } 2^n > 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1 *En utilisant le principe de raisonnement par contraposée montrer que :*

$$\text{si } a^2 + 9 = 2^n \text{ alors } a \text{ est impair.}$$

Exercice 1.6.2 *Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.*

Exercice 1.6.3 *Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,*

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1.$$

1.6.1 Solutions des exercices

Exercice 1.6.1

Par contraposée montrons que

$$\text{si } a^2+9=2^n \text{ alors } a \text{ est impair.}$$

-Montrons que si a est pair alors $a^2+9 \neq 2^n$

$$\begin{aligned} a \text{ est pair} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}/a=2k \\ a^2+9 &= (2k)^2+9 \\ &= 4k^2+9 \\ &= 2(2k^2+4)+1 \\ &= 2k'+1. \end{aligned}$$

Alors a^2+9 est impair, or 2^n est pair.

D'où

$$a^2+9 \neq 2^n.$$

Exercice 1.6.2

Par absurdre : supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel donc $\exists p \in \mathbb{Z}$, $\exists p \in \mathbb{Z}^*$($p$ et q sont premiers entre eux), tel que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2}=\tfrac{p}{q} \quad &\Rightarrow \quad p=\sqrt{2}q \\ &\Rightarrow \quad p^2=2q^2/q^2 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \quad p^2=2k/k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \quad p^2 \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Montrons que

$$\text{si } p^2 \text{ est pair} \Rightarrow p \text{ est pair .}$$

Par contraposée supposons que p est impair :

$$\begin{aligned}
\exists k &\in \mathbb{N}/\ p = 2k+1 \\
\exists k &\in \mathbb{N}/\ p^2 = 4k^2+4k+1 \\
\exists k &\in \mathbb{N}/\ p^2 = 2(2k^2+2k)+1 \\
\exists k^{'} &= 2k^2+2k \in \mathbb{N}/\ p^2 = 2k^{'}+1
\end{aligned}$$

alors p^2 est impair.

Donc

$$\text{si } p^2 \text{ est pair} \Rightarrow p \text{ est pair.}$$

Et

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{2}q \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ 2k = \sqrt{2}q \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ q^2 = 2k^2 \\
&\Rightarrow \exists k^{''} = k^2 \in \mathbb{N},\ q^2 = 2k^{''} \\
&\Rightarrow q^2 \text{ est pair} \\
&\Rightarrow q \text{ est pair.}
\end{aligned}$$

D'où contradiction avec p et q sont premiers entre eux.

Alors $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 1.6.3

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Montrons que l'assertion est vraie pour $n = 1$:

$$1.1! = 1 \text{ et } (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n :

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Montrons que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned} 1.1! + 2.2! + ... + n.n! + (n+1).(n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! \\ &= (n+1)!.(1+n+1) - 1 \\ &= (n+1)!.(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

donc est vraie pour l'ordre $n+1$.

Chapitre 2

Théorie des ensembles

2.1 Ensemble

Définition 2.1.1 *Une collection ou ensemble est constitué par des objets ou éléments présentant une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer q'un objet appartient ou n'appartient pas à l'ensemble .*

Exemple 2.1.2 *On désigne par* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des enties naturels*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} .$$

L'ensemble des nombres pairs se notera

$$P = \{x / \ x = 2n, \forall n \in \mathbb{N}\} .$$

L'ensemble des nombres impairs se notera

$$K = \{x / \ x = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}\} .$$

L'ensemble vide est noté

$$\varnothing = \{x/x \in E \text{ } et \text{ } x \notin E\}.$$

2.2 Inclusion

On dit que l'ensemble A inclu dans l'ensemble B lorsque tout élément de A appartient à B et on note

$$A \subset B$$

i.e $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

Exemple 2.2.1 *Si on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombre réels, on aura*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

et si on désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}/ \text{ } b \neq 0, a \in \mathbb{Z} \text{ } et \text{ } b \in \mathbb{Z}^*, \text{ } p \text{ } et \text{ } q \text{ } sont \text{ } premiers \text{ } entre \text{ } eux\right\}$$

nous aurons

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.3 Égalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles

$$E = F \Longleftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E$$

i.e.

$$\forall x,\ x \in E \Longleftrightarrow x \in F.$$

2.4 Différence de deux ensembles

La différence de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F, noté $E - F$

$$E - F = \{x/\ x \in E \text{ et } x \notin F\},$$

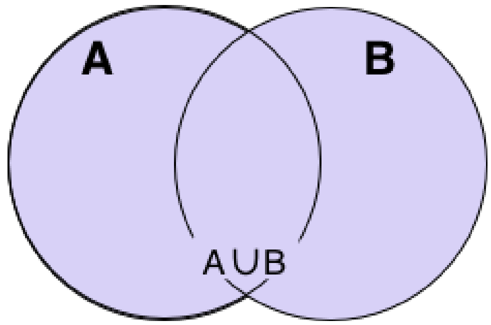
si $F \subset E$ alors $E - F$ est encore appelée complémentaire de F dans E, il est noté C_E^F ou F^c.

2.5 Opérations sur les ensembles

2.5.1 Réunion

Définition 2.5.1 *La réunion des deux ensembles A et B est l'ensemble C des éléments qui appartient à A ou B, on écrit*

$$\begin{aligned} C &= A \cup B \ \textit{(ce lit } C \textit{ égale } A \textit{ union } B\textit{)} \\ \textit{i.e. } x &\in C = A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \textit{ ou } x \in B. \end{aligned}$$



2.5.2 L'intersection

Définition 2.5.2 *L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble C des éléments qui appartient à A et B, on écrit*

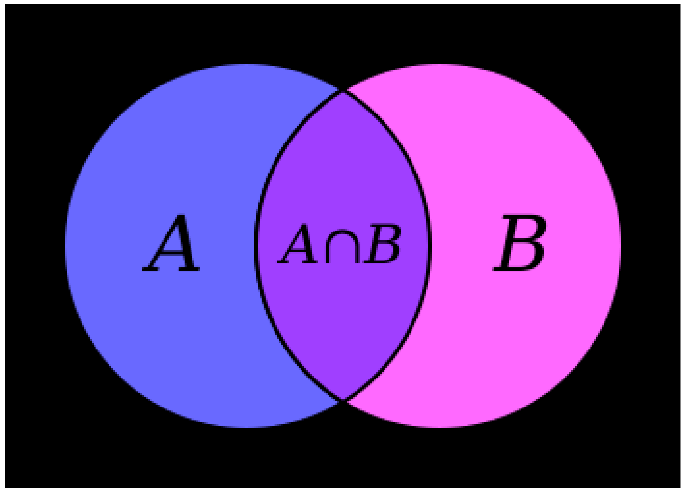
$$C = A \cap B (\textit{ce lit } C \textit{ égale } A \textit{ inter } B).$$

$$x \in C = A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \textit{ et } x \in B.$$

Remarque 2.5.3 *Si A et B n'ont pas des éléments commun, on dit qu'ils sont disjoints, alors $A \cap B = \varnothing$.*

Exemple 2.5.4 *L'ensemble des nombres naturels pairs et l'ensemble des nombres naturels impairs ont une intersection vide.*

Remarque 2.5.5 *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$*



1.

$$A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A$$

2.

$$B = C_E^A \Longleftrightarrow A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \varnothing.$$

3.

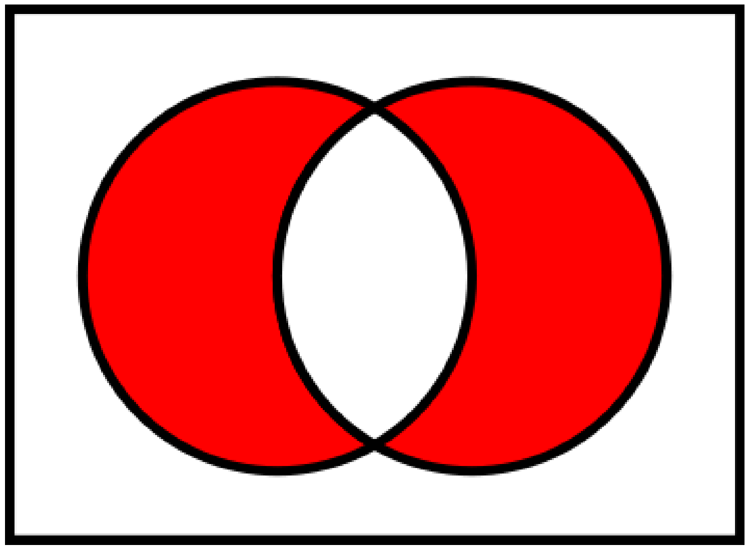
$$A - B = A \cap B^c.$$

2.5.3 La différence symétrique

Définition 2.5.6 *La différence symétrique de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas aux deux à la fois. C'est la différence de $A \cup B$ et de $A \cap B$, noté $A \vartriangle B$.*

$$A \vartriangle B = A \cup B - A \cap B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

$A \vartriangle B$ des ensembles A et B est l'ensemble coloré en rouge.



2.6 Propriétés des opérations sur les ensembles

2.6.1 Commutativité

Quels que soient les ensembles A et B

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A.$$

2.6.2 Associativité

Quels que soient les ensembles A, B et C

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\\(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C).\end{aligned}$$

2.6.3 Distributivité

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \\ A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C). \end{aligned}$$

l'intersection et la réunion sont distributives l'une par rapport à l'autre.

2.7 Lois de Morgan

- $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$
- $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$

Preuve. -Montrons la première loi :

On montre $(A\cap B)^c \subset A^c\cup B^c$ et $A^c\cup B^c \subset (A\cap B)^c$.

D'abord $(A\cap B)^c \subset A^c\cup B^c$.

Soit $x\in(A\cap B)^c \Longrightarrow x\notin A\cap B$

dans ce cas

1. $x\in A$ et $x\notin B \Longrightarrow x\in A$ et $x\in B^c \Longrightarrow x\in A^c\cup B^c$
2. $x\notin A$ et $x\in B \Longrightarrow x\in A^c$ et $x\in B^c \Longrightarrow x\in A^c\cup B^c$
3. $x\notin A$ et $x\notin B \Longrightarrow x\in A^c$ et $x\in B^c \Longrightarrow x\in A^c\cup B^c$

de 1,2 et 3 on a $(A\cap B)^c \subset A^c\cup B^c$.

Inversement montrons que $A^c\cup B^c \subset (A\cap B)^c$.

Soit $x \in A^c \cup B^c \Longrightarrow x \in A^c$ ou $x \in B^c$

1. si $x \in A^c \Longrightarrow x \notin A \Longrightarrow x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in (A \cap B)^c$

2. si $x \in B^c \Longrightarrow x \notin B \Longrightarrow x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in (A \cap B)^c$

d'où $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

-Montrons la dexième loi :

D'abord $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Soit $x \in (A \cup B)^c \Longrightarrow x \notin A \cup B$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$,

alors $x \in A^c$ et $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$.

D'où $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Inversement montrons que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

Soit $x \in A^c \cap B^c \Rightarrow x \in A^c$ et $x \in B^c$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$,

alors $x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$.

D'où $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. □

2.8 Produit d'ensembles

Soient A et B deux ensembles, a, b deux éléments telsque $a \in A$ et $b \in B$.

L'ensemble des couples (a, b) pris dans cet ordre est appelé l'ensembles produit cartésien des ensembles A et B. On note

$$A \times B.$$

Remarque 2.8.1 *Si A et B sont des ensembles finis et si on désigne par :*

$card(A)$: le nombre des éléments de A,

$card(B)$: le nombre des éléments de B,

on aura : $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$.

2.9 Exercices

Exercice 2.9.1 *1-Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut on écrie :*

$$\begin{array}{rccc} 1) & a & \in & E \\ 2) & a & \subset & E \\ 3) & \{a\} & \subset & E \\ 4) & \varnothing & \in & E \\ 5) & \varnothing & \subset & E \\ 6) & \{\varnothing\} & \subset & E \end{array}$$

2-Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

-Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$.

Exercice 2.9.2 *Soient E et F deux ensembles. Montrer que :*

$$P(E) = P(F) \Leftrightarrow E = F$$

($P(E)$ l'ensemble des parties de E).

Exercice 2.9.3 *Montrer pour toutes parties A, B, C de E*

$$\begin{aligned} 1) A \cap B &= A \cup B \Leftrightarrow A = B. \\ 2) A \cup B &= A \cap B \Leftrightarrow B \subset A \subset C. \end{aligned}$$

2.9.1 Solutions des exercices

Exercice.1

1-

$$\begin{aligned} &1) vraie \\ &2) faux \\ &3) vraie \\ &4) faux \\ &5) vraie \\ &6) faux. \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1, 2, 3\} \\ A \cup B &= \{0, 1, 2, 3\} \\ A \times B &= \left\{ \begin{array}{c} (1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1) \\ ,(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice.2

Montrons que $P(E) = P(F) \Leftrightarrow E = F$.

1- Montrons si $P(E) = P(F) \Rightarrow E = F$

Supposons $P(E) = P(F)$

$$P(E) = \{A/\ A \subset E\} = \wp(F) = \{B/\ B \subset F\}$$

$$\begin{aligned}
1)\text{ soit } x &\in E \Rightarrow \{x\} \subset E \\
&\Rightarrow \{x\} \in P(E) \\
&\Rightarrow \{x\} \in P(F), (P(E) = P(F)) \\
&\Rightarrow \{x\} \subset F \\
&\Rightarrow x \in F \\
&\Rightarrow E \subset F.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\text{ soit } y &\in F \Rightarrow \{y\} \subset F \\
&\Rightarrow \{y\} \in P(F) \\
&\Rightarrow \{y\} \in P(E), (P(E) = P(F)) \\
&\Rightarrow \{y\} \subset E \\
&\Rightarrow y \in E \\
&\Rightarrow F \subset E.
\end{aligned}$$

D'où $E = F$.

2-Montrons si $E = F \Rightarrow P(E) = P(F)$.

Supposons $E = F$

$$\begin{aligned} 1-\ \text{soit } A &\in P(E) \Rightarrow A \subset E \\ &\Rightarrow {}^{E=F} A \subset F \\ &\Rightarrow A \in P(F) \\ &\Rightarrow P(E) \subset P(F). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2-\ \text{soit } B &\in P(F) \Rightarrow B \subset F \\ &\Rightarrow {}^{E=F} B \subset E \\ &\Rightarrow B \in P(E) \\ &\Rightarrow P(F) \subset P(E). \end{aligned}$$

D'où $P(E) = P(F)$.

Exercice.3

1) Monter que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

1-1) Montrons $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

Supposons $A \cap B = A \cup B$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x &\in A \Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Rightarrow x \in A \cap B, (A \cap B = A \cup B) \\ &\Rightarrow x \in B \\ &\Rightarrow A \subset B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } y &\in B \Rightarrow x \in B \cup A \\
&\Rightarrow x \in A \cap B, (A \cap B = A \cup B) \\
&\Rightarrow x \in A \\
&\Rightarrow B \subset A.
\end{aligned}$$

Alors $A = B$.

1-2) Montrons $A = b \Rightarrow A \cap B = A \cup B$.

Supposons $A = B$

$$\begin{aligned}
A \cap B &= A = B \\
A \cup B &= A = B
\end{aligned}$$

Alors $A \cap B = A \cup B$.

2)Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

2-1) Montrons $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$.

Supposons $A \cup B = A \cap C$.

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x &\in B \Rightarrow x \in B \cup A \\
&\Rightarrow x \in A \cap C, (A \cup B = A \cap C) \\
&\Rightarrow x \in A \\
&\Rightarrow B \subset A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } y &\in A \Rightarrow x \in A \cup B \\
&\Rightarrow y \in A \cap C, (A \cup B = A \cap C) \\
&\Rightarrow y \in C \\
&\Rightarrow A \subset C.
\end{aligned}$$

Alors $B \subset A \subset C$.

2-2) Montrons $B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$.

Supposons $B \subset A \subset C$,

$$\begin{aligned}
A \cup B &= A \\
A \cap C &= A.
\end{aligned}$$

Alors $A \cup B = A \cap C$.

Chapitre 3

Les relations et les applications

3.1 Relation binaire dans un ensemble

Définition 3.1.1 *Soient $x \in E$, $y \in F$ et une relation $\Re$ entre x et y est une correspondance entre x et y.*

Lorsque le couple (x, y) vérifie la relation $\Re$, on note $x\Re y$.

Si x, y appartiennent au meme ensemble E, la relation $\Re$ est appelée relation binaire dans E.

Exemple 3.1.2

1. $x, y \in \mathbb{N}$, $x\Re y \Longleftrightarrow x$ *divise* y, $\Re$ *relation binaire*
2. $x, y \in \mathbb{R}$, $x\Re y \Longleftrightarrow x = y$
3. $A \subset E, B \subset E$, $A\Re B \Leftrightarrow A \subset B$.

3.2 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soient $\Re$ une relation binaire dans un ensemble E et $x, y, z \in E$. On dit que $\Re$ est

1. Réflixive $\Leftrightarrow \forall x \in E \ , \ \ x \Re x$
2. Symétrique$\Leftrightarrow \forall x, y \in E$, $x \Re y \Rightarrow y \Re x$
3. Antisymétrique$\Leftrightarrow \forall x, y \in E$, $x \Re y$ et $y \Re x \Rightarrow x = y$
4. Transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E$, $x \Re y$ et $y \Re z \Rightarrow x \Re z$.

Définition 3.2.1 *Une relation est dite relation d'équivalence si elle est réflexive, symatrique et transitive.*

Une relation est dite relation d'odre si elle est réflexive, antisymatrique et transitive.

Exemple 3.2.2 *1.* $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ x \Re y \Leftrightarrow x = y$, *est une relation d'équivalence et une relation d'ordre.*

2. *Soient* $A, B \subset E \quad A \Re B \Leftrightarrow A \subset B$ *est une relation d'ordre.*

En effet :

-$\forall A \subset E, \ \ A \subset A \Leftrightarrow \Re$ *réflexive.*

-$\forall A, B \subset E$, $A \subset B$ *et* $B \subset A \Rightarrow A = B \Rightarrow \Re$ *est antisymetrique.*

-$\forall A, B, C \subset E, A \subset B$ *et* $B \subset C \Rightarrow A \subset C \Rightarrow \Re$ *est transitive .*

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ x \Re y \Leftrightarrow x \leq y$, *est une relation d'ordre.*

4. $\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x\Re y \Leftrightarrow x - y$ *est un multiple de* P $(P \geq 1)$ *est une relation d'équivalence, elle est appelée congruence modulo* P *et notée par*

$$x\Re y \Leftrightarrow x \equiv y\,[P] \Leftrightarrow x - y = kP, k \in \mathbb{Z}.$$

Définition 3.2.3 *Une relation d'ordre dans un ensemble* E *est dite d'ordre total si deux éléments quelconque de* E *sont comparable i.e.*

$$\forall x, y \in E \quad \textit{on a } x\Re y \textit{ ou } y\Re x$$

et on ecrit

$$x \leq y \textit{ ou } y \leq x.$$

Une relation d'odre qui n'est pas d'ordre total est dite d'ordre partiel.

Exemple 3.2.4 1. *Soient* $x, y \in \mathbb{R}, \quad x\Re y \Leftrightarrow x \leq y$

$\Re$ *est réfléxive* $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x \Leftrightarrow x\Re x)$.

$\Re$ *est antisymétrique* $\Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ *et* $y \leq x \Rightarrow x = y)$.

$\Re$ *est transitive* $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y$ *et* $y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

$\Re$ *est une relation d'ordre.*

L'ordre est total car $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *on a* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

2. *Soient* $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \ (x, y)\Re(x', y') \Leftrightarrow x \leq x'$ *et* $y \leq y'$.

$\Re$ *est une relation d'ordre. L'ordre est partiel car : soit* $(1, 2), (3, 0) \in \mathbb{R}^2$

on a $(1, 2)$ *ne pas en relation avec* $(3, 0)$, *et* $(3, 0)$ *ne pas en relation avec* $(1, 2)$.

3.3 Classe d'équivalence

Soit $\Re$ est une relation d'équivalence, on appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation $\Re$ avec x on la note :

$$C_x \text{ ou } \overline{x},$$

$$C_x \text{ ou } \overline{x} = \{y \in E/\ x\Re y\}.$$

Définition 3.3.1 *L'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de E est appellée ensemble quotient de E par $\Re$, il est noté $E/\Re$.*

$$E/\Re = \{\overline{x}/x \in E\}.$$

Exemple 3.3.2 $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x\Re y \Leftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$

$\Re$ est une relation d'équivalence, en effet

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 - x^2 = x^4 - x^2 \Leftrightarrow x\Re x \Leftrightarrow \Re$ *réfléxive.*

2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \Rightarrow y^4 - y^2 = x^4 - x^2 \Leftrightarrow \Re$ *symétrique.*

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 = y^4 - y^2$ *et* $y^4 - y^2 = z^4 - z^2 \Leftrightarrow \Re$ *transitive.*

Cherchons les classes d'équivalence de $0, 1, \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{y \in \mathbb{R}/\ 0\Re y\} \\
0\Re y &\Leftrightarrow 0^4 - 0^2 = y^4 - y^2 \\
&\Leftrightarrow y^2(y^2 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = -1 \\
\overline{0} &= \{-1, 0, 1\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{1} &= \{y \in \mathbb{R}/\ 1\Re y\} \\
1\Re y &\Leftrightarrow 1^4 - 1^2 = y^4 - y^2 \\
y &= 0 \ ou\ y = 1 \ ou\ y = -1 \\
\overline{1} &= \{-1, 0, 1\} = \overline{0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{1}{2}} &= \left\{y \in \mathbb{R}/\ \frac{1}{2}\Re y\right\} \\
\frac{1}{2}\Re y &\Leftrightarrow (\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^2 = y^4 - y^2 \\
&\Leftrightarrow y^4 - y^2 - \frac{3}{42} = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - \frac{1}{4})(y^2 - \frac{3}{4}) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, y = -\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}, y = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} \\
&\Leftrightarrow \overline{\frac{1}{2}} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}, \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}\right\}.
\end{aligned}$$

En général

$$\begin{aligned}
si\ |x| &> 1, \overline{x} = \{-x, x\} \\
si\ |x| &< 1, \overline{x} = \left\{-x, x, -\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\right\}.
\end{aligned}$$

3.4 Notion d'application

On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F une loi de correspondance f permettent d'associer à tout $x \in E$ un élément $y \in F$.

E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble image .

L'élément y associé à x est l'image de x par f, on note

$$f : x \mapsto y/\ f(x) = y.$$

Exemple 3.4.1 *l'application* $f : x \to y = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$ *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

3.5 Surjection

L'image $f(E)$ de E par f est en général une partie de F. Si tout élément de F est l'image par f d'au mois un élément de E, on dit que f est une application de E sur F ou encors que f est une application surjective, on a alors $f(E) = F$.

3.6 Injection

L'orsqu'à deux éléments distincts de E correspandent par f deux élément distincts de F, f réalise une injection de E dans F . On dit encore que f est une application injective, on a alors

$$\forall x_{1,} x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

ou bien par contraposé

$$\forall x_{1,} x_2 \in E, \ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

3.7 Bijection

f est une application bijective si elle est surjective et injective, tout élément de F est l'image d'un élément de E et d'un seul.

Dans ce cas il existe une application inverse f^{-1} de F sur E, puisqu'à tout $y \in F$, on associer un élément x bien déterminé de E.

f^{-1} est l'application inverse ou réciproque de f

$$x \overset{f}{\longmapsto} y \Leftrightarrow y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x$$

f^{-1} est elle même une bijection de F sur E *et* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple 3.7.1 $f(x) = a + x$, $x \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$

f est bijective, son inverse est $f^{-1}(y) = y - a$.

3.8 Composition des applications

Soient les ensembles E, F et G, et deux applications f et g de E dans F et de F dans G (*resp.*)

$f : E \to F$ | $g : F \to G$

$x \mapsto f(x) = y$ | $y \mapsto g(y) = z$

on définit l'application composée gof :

$gof : E \to G$

$x \to gof(x) = z.$

Proposition 3.8.1 *1. Si f et g sont injective $\Rightarrow gof$ est injective*

2. Si f et g sont surjective $\Rightarrow gof$ est surjective

Preuve.

1. $\forall x_1, x_2 \in E$, $gof(x_1) = gof(x_2) \overset{g\ injective}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f\ injective}{\Rightarrow} x_1 = x_2$, d'où gof injective.

2. $gof(E) = g(f(E)) \overset{f\ surjective}{=} g(F) \overset{g\ surjective}{=} G$, d'où gof surjective.

$\square$

Remarque 3.8.2 *La composée de deux bijections est une application bijective.*

En particulier, la composition de $f : E \to F$ et sa réciproque $f^{-1} : F \mapsto E$ est l'application identique I sur E

$$f^{-1}of = Id_E \quad et \quad fof^{-1} = Id_F$$

3.9 Image directe et image réciproque

3.9.1 Image directe

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. On appelle image de A par f le sous ensemble de F, noté $f(A)$ telque

$$f(A) = \{f(x) \in F/\ x \in A\}$$

3.9.2 Image réciproque

Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f le sous ensemble de E, noté $f^{-1}(B)$ telque

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/\ f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 3.9.1 *1. Soit f une application définie comme suit*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & [0,2] \\ & x & \mapsto & 2-x \end{array}$$

-Trouver $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$

$$\begin{aligned} f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) &= \left\{f(x)/x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{2-x/x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{2-x/0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -x \leq 0 \\ &\Rightarrow 2-\frac{1}{2} \leq 2-x \leq 2 \\ &\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2-x \leq 2 \end{aligned}$$

alors

$$f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{3}{2},2\right] \subset [0,2].$$

2. *Soit la fonction*

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,2] & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & (x-1)^2 \end{array}$$

-*calculer* $g^{-1}(\{0\})$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0\}) &= \{x \in [0,2] \, / f(x) \in \{0\}\} \\ &= \left\{x \in [0,2] \, /(x-1)^2 \in \{0\}\right\} \\ &= \left\{x \in [0,2] \, /(x-1)^2 = 0\right\} \\ &= \{1\} \, . \end{aligned}$$

3.10 Propriétés des applications

Soit $f : E \to F$

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \subset f(B)$

Démonstration

1. Soit $y \in f(A)$ alors $\exists x \in A / \; f(x) = y$

   or $A \subset B \Rightarrow x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$ d'où $f(A) \subset f(B)$.

2. Soit

$$\begin{aligned} y &\in f(A\cup B) \Leftrightarrow \exists x\in A\cup B/\ f(x)=y \\ &\Leftrightarrow \exists x\in A/\ f(x)=y\ ou\ \exists x\in B/\ f(x)=y \\ &\Leftrightarrow y\in f(A)\ ou\ y\in f(B) \end{aligned}$$

d'où $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

3. Soit

$$\begin{aligned} y &\in f(A\cap B) \Rightarrow \exists x\in A\cap B/\ y=f(x) \\ &\Rightarrow \exists x\in A/\ y=f(x)\ et\ \exists x\in B/\ y=f(x) \\ &\Rightarrow y\in f(A)\ et\ y\in f(B) \end{aligned}$$

d'où $f(A\cap B)\subset f(A)\cup f(B)$.

Remarque 3.10.1 *On ne peut pas faire double inclusion car les x ne sont pas forcement dans le même ensemble.*

Exemple 3.10.2 *Soit*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$A=[-1,0]\,,\ B=[0,1]\,,\ A\cap B=\{0\}$

$f(A)=[0,1]\,,\ f(A\cap B)=f(\{0\})=\{0\}\,, f(A)\cap f(B)=[0,1]$

d'où $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$

Remarque 3.10.3 *l'égalité n'ayant lieu que si f est injective.*

Proposition 3.10.4 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$*

1. *Si gof est injective alors f est injective.*
2. *Si gof est surjective alors g est surjective.*
3. *Si gof est bijective alors f est injective et g est surjective.*

Démonstration.

1. Soient $x_1, x_2 \in E/\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (g est une application)

   et comme gof est injective, alors $x_1 = x_2$

   d'où f est injective.

2. On a

$$f(E) \subset F \Rightarrow gof(E) \subset g(F) \subset G$$

   or gof est surjective alors $gof(E) = G, ainsi\ G \subset g(F) \subset G$

d'où

$$g(F) = G \text{ i.e. } g \text{ est surjective.}$$

3.11 Exercices

Exercice 3.11.1 *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$*. L'application* f *est-elle surjective ?*

2. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$*. L'application* f *est-elle injective ?*

Exercice 3.11.2 *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *les applications définie par* $f(x) = 2x + 1$ *et* $g(x) = x^2 - 1$.

A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 3.11.3 *Dans chacun des cas suivants la relation* $\Re$ *définie sur* E *est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique ou transitive ?*

1.

$$E = \mathbb{N} \text{ et } x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}.$$

2.

$$E = \mathbb{N} \text{ et } x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ x = y^n.$$

3.11.1 Solutions des exercices

Exercice 3.11.1 L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

1)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ \frac{x}{1+x^2} = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ x^2 - x + 1 = 0\right\} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \triangle &= 1-4 \\ &= -3<0 \end{aligned}$$

alors

$$f^{-1}(\{1\}) = \varnothing.$$

et f n'est pas surjective car 1 n'admet pas un antécédent .

2)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\left\{\frac{1}{3}\right\}) &= \left\{x \in \mathbb{R}/ \ f(x) = \frac{1}{3}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/ \ \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{3}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 - 3x + 1 = 0\right\} \\ &= \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\} \end{aligned}$$

f n'est pas injective car $f(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = f(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.11.2

Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1, \ x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(x^2-1)+1 \\ (f \circ g)(x) &= 2x^2 - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= (2x+1)^2 - 1 \\
(g \circ f)(x) &= 4x^2 + 4x, \ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Exercice 3.11.3

1) -a)$\Re$ est réflexive :

$$\frac{x+2x}{3} = x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x\Re x$$

b)$\Re$ est symétrique

$$\begin{aligned}
x\Re y &\Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}. \\
&\Rightarrow x + 2y = 3k / \ k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow x = 3k - 2y \\
&\Rightarrow y + 2x = y + 6k - 4y \\
&\Rightarrow y + 2x = 3(2k - y) \\
&\Rightarrow \frac{y+2x}{3} \notin \mathbb{N} \\
&\Rightarrow y \text{ n'a pas une relation avec } x \\
&\Rightarrow \Re \text{ n'est pas symétrique.}
\end{aligned}$$

c)$\Re$ est antisymétrique

Soient $x = 1, y = 4$

$$\frac{1+8}{3} \in \mathbb{N}, \frac{4+2}{3} \in \mathbb{N} \nRightarrow 1 = 4.$$

Alors $\Re$ n'est pas antisymétrique.

d)$\Re$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N} \\ y\Re z \Leftrightarrow \frac{y+2z}{3} \in \mathbb{N} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3k/\ k \in \mathbb{N} \\ y + 2z = 3k^{'}/\ k^{'} \in \mathbb{N} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = 3k - 3y \\ 2z = 3k^{'} - y \end{cases} \\
&\Rightarrow x + 2z = 3((k + k^{'}) - y) \\
&\Rightarrow x + 2z = 3(k^{"} - y) \\
&\Rightarrow \frac{x+2z}{3} \notin \mathbb{N}. \\
&\Rightarrow x \text{ n'a pas une relation avec } z \\
&\Rightarrow \Re \text{ n'est pas transitive.}
\end{aligned}$$

2)$\forall x \in \mathbb{N}$, $x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ x = y^n$

a) $\Re$ est réflexive

$$\exists n = 1 \in \mathbb{N};\ x = x \Leftrightarrow x\Re y.$$

b) $\Re$ est symétrique

$$\begin{aligned} x\Re y &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ x = y^n \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ y = x^{\frac{1}{n}} \\ &\Rightarrow \exists n^{'} \notin \mathbb{N};\ y = x^{n^{'}} \\ &\Rightarrow \Re \text{ n'est pas symétrique.} \end{aligned}$$

c) $\Re$ est antisymétrique

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ x = y^n \\ y\Re x \Leftrightarrow \exists n^{'} \in \mathbb{N};\ y = x^{n^{'}} \end{cases} &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ \exists n^{'} \in \mathbb{N};\ x = x^{n^{'}n} \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ \exists n^{'} \in \mathbb{N};\ nn^{'} = 1 \\ &\Rightarrow n = n^{'} = 1 \\ &\Rightarrow x = y \\ &\Rightarrow \Re \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

d) $\Re$ est transitive

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ x = y^n \\ y\Re z \Leftrightarrow \exists n^{'} \in \mathbb{N};\ y = z^{n^{'}} \end{cases} &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ \exists n^{'} \in \mathbb{N};\ x = z^{n^{'}n} \\ &\Rightarrow \exists n^{"} = nn^{'} \in \mathbb{N};\ x = z^{n^{"}} \\ &\Rightarrow x\Re z \\ &\Rightarrow \Re\text{est transitive.} \end{aligned}$$

Chapitre 4

Structures algébriques.

Définition 4.0.4 *(Loi interne)*

Soit G un ensemble, on appelle loi interne sur G toute application de $G \times G$. On note une loi interne par $*$, Δ.

Exemple 4.0.5 *1. L'addition est une loi interne sur $\mathbb{R}$, de même pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.*

2.L'application

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} & \to & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ & (a,b) & \to & a+b-2ab \end{array}$$

est une loi interne dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ car $\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \forall b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$,

on a : $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$.

Définition 4.0.6 *Soit G un ensemble et $*$ une loi interne*

1. $*$ est dite commutative si et seulement si $\forall x, y \in G : x * y = y * x$

2. $*$ *est dite assosiative si et seulement si* $\forall x, y, z \in G : (\ x * y) * z = x * (y * z)$

3. $*$ *admet un élément neutre si et seulement si* $\exists e \in G / \forall x \in G : x * e = e * x = x$

4. *soit* $x \in G$, *on dit qu"un élément* $x' \in G$ *est l'élément inverse ou symétrique de* x *si et seulement si* $x * x' = x' * x = e$ *(*e *est élément neutre).*

4.0.2 Groupe

On appelle groupe un ensemble G mini d'une opération interne $*$ telleque

1. $(*)$ est associative

2. $(*)$ admet un élément neutre

3. tout élément de G admet un inverse dans G .

Remarque 4.0.7 *Si de plus* $*$ *est commutative , on dit que* $(G, *)$ *est un groupe commutative (ou ablien).*

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif

2. $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car le 0 n'admet pas d'inverse

3. $(\mathbb{R}^*, \times)$est un groupe commutatif.

4.0.3 Anneaux

Soit A un ensemble muni de deux lois de compossition interne $(*)$ *et* (Δ). On dit que $(A, *, \Delta)$ est un anneau si :

1. $(A,*)$ est un groupe commutatif
2. $\forall x,y,z\in A : x\Delta(y*z)=(x\Delta y)*(x\Delta z)$
3. (Δ) est assosiative.

Si de plus (Δ) admet un élément neutre on dit que $(A,*,\Delta)$ est un anneau unitaire.

4.0.4 Corps

Soit $\mathbb{k}$ un ensemble muni de deux lois interne $(*)$ *et* (Δ), on dit que $(\mathbb{k},*,\Delta)$ est un corps si :

1. $(\mathbb{k},*,\Delta)$ est un anneau unitaire
2. $(\mathbb{k}-\{e\},\Delta)$ est un groupe ou e désigne l'élément neutre de $(*)$.

Si de plus (Δ) est commutative, on dit que $(\mathbb{k},*,\Delta)$ est un corps commutatif.

Exemple 4.0.8 $(\mathbb{Z},+,.)$ *est un anneau commutatif*

$(\mathbb{R},+,.)$ *est un corps commutatif.*

Il existe un corps plus grand que le corps des nombres réels, c'est le corps des nombres complexes.

4.1 Exercices

Exercice 4.1.1 *I-Soit $*$ la loi définie dans $\mathbb{R}$ par*

$$x * y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

a) Vérifier que $*$ est commutative,non associative, et admet un élément neutre.

b) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1)\ 2 * x &= 5 \\ 2)\ x * x &= 1 \end{aligned}$$

II- On définit sur $\mathbb{R}$ la loi

$$x * y = x + y - xy$$

-Etudier l'associativité, commutativité, existance d'un élément neutre, existance d'élément symetrique.

Exercice 4.1.2 *On définit sur $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ la loi*

$$x * y = x + y + 2xy$$

-Montrer que $*$ est interne.

-Montrer que $\left(\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4.1.3 *On définit sur $\mathbb{Q}$ deux lois de composition internes $(*)$ et (Δ) comme suit*

$$\begin{cases} a * b = a + b - 1 \\ a \Delta b = a + b - ab \end{cases}$$

-Montrer que $(\mathbb{Q}, *, \Delta)$ *est un corps.*

4.1.1 Solutions des exercices

Exercice 4.1.1

a) $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

-$*$ est commutative$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = y * x$ ce qui est vraie

-$*$ est associative$\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z)$

on trouve $(x * y) * z \neq x * (y * z)$.

-$*$ admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$

on utilise une seule équation car $*$ est commutative.

$x * e = x \Leftrightarrow xe + (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x \Rightarrow e = 1.$

b) -$2 * x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{4}{3}$.

-$x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$, ou $x = -1$.

II- $x * y = x + y - xy$

-$*$ est associative$\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z)$

on a $(x * y) * z = x * (y * z)$ vraie

-$*$ est commutative$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = y * x$ ce qui est vraie.

-$*$ admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$

on utilise une seule équation car $*$ est commutative.

$x * e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x \Leftrightarrow e = 0.$

-Chaque élément x de $\mathbb{R}$ admet un élément symetrique.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x * x' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{-x}{1-x}$ pour $x \neq 1$.

1 n'admet pas un élément neutre, donc tout les élément de $\mathbb{R}$ n'ont pas un inverse.

Exercice 4.1.2 : sur $\mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * y = x + y + 2xy$

1) $*$ est interne$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * y \in \mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

i.e. $\forall x \neq \frac{-1}{2}, \forall y \neq \frac{-1}{2}, x * y \neq \frac{-1}{2}$.

Par absurde :

Supposons que $x * y = \frac{-1}{2}$ avec $x \neq \frac{-1}{2}, y \neq \frac{-1}{2}$

$x * y = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x + y + 2xy = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + y + 2xy = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + y\left(1 + 2x\right) = 0$

$x + \frac{1}{2} + 2y\left(\frac{1}{2} + x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(1 + 2y\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$ ou $y = \frac{-1}{2}$ contradiction.

Alors $x * y \neq \frac{-1}{2}$.

2) $\left(\mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ est un groupe commutatif$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} * \text{ est interne} \\ * \text{ est commutative} \\ * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un élément neutre} \\ \text{chaque élément admet un inverse} \end{array}\right.$

-$*$ est interne d'aprés la question 1).

-$*$ est commutative$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * y = y * x$ ce qui est vraie

-$*$ est associative$\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}, (x * y) * z = x * (y * z)$

-$*$ admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \forall x \in \mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * e = e * x = x$

on utilise une seule équation car $*$ est commutative.$x * e = x \Rightarrow e = 0$

-Chaque élément x de $\mathbb{Q}- \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ admet un élément symetrique.

$\forall x \in \mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}, \exists x' \in \mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * x' = 0$

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{-x}{2x+1}.$$

Montrons que $\frac{-x}{2x+1} \in \mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ *par l'absurde* :

Supposons que $\frac{-x}{2x+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 = 0$ impossible, donc

$$\frac{-x}{2x+1} \neq -\frac{1}{2}$$

et alors $\left(\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4.1. 3 :

$$(\mathbb{Q}, *, \Delta) \text{ est un corps} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbb{Q}, *, \Delta) \text{ anneau unitaire} \\ \text{chaque élément de } \mathbb{Q}-\{e\} \text{ admet un inverce par rappot à } \Delta \\ (\mathbb{Q}, *) \text{ est un groupe commutatif} \end{cases}$$

$$(\mathbb{Q}, *, \Delta) \text{ anneau unitaire} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbb{Q}, *) \text{ est un groupe commutatif} \\ \Delta \text{ est associative} \\ \Delta \text{ est distributive sur } * \text{ à gauche et à droite} \\ \Delta \text{ admet un élément neutre} \end{cases}$$

$$(\mathbb{Q}, *) \text{ est un groupe commutatif} \begin{cases} * \text{ est interne} \\ * \text{ est commutative} \\ * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un élément neutre } e = 1 \\ \text{chaque élément de } \mathbb{Q} \text{ admet un inverce par rapport à } * \end{cases}$$

Chapitre 5

Les nombres complexes

Définition 5.0.4 *Si x, y sont deux nombres réels, le couple ordonée $[x, y]$ est appelé nombre complexe et on note $z = x + iy$, $i^2 = -1$, i imaginaire.*

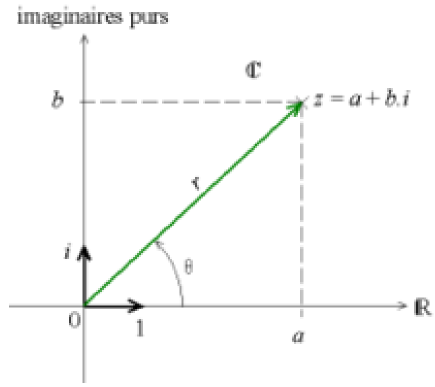
5.0.2 Représentation graphique

Dans le plan $0a, 0b$ le point Z a un abscisse a et ordonné b, donc chaque point Z dans le plan est représente par un nombre complexe.

5.0.3 Module-argument

L'angle $\theta = (0a, 0b)$ est l'argument de Z.

La longueur du vecteur $\overrightarrow{0Z}$ désigne le module de Z, noté par $r = |Z| = |0Z|$.



5.0.4 Comment calculer θ et r

Sachant que $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$

donc

$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

Remarque 5.0.5 *Si z est un nombre complexe noté $z = x + iy$, x partie réelle et y partie imaginaire.*

$z = x + iy$ peut s'écrire aussi sous forme trigonométrique

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

5.0.5 Opérations sur les nombres complexes

Addition

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes telsque $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Sous forme trigonométrique Soient

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

donc

$$z_1 + z_2 = (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2).$$

Produit

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Sous forme trigonométrique

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Division

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\
&= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\
&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.
\end{aligned}$$

Sous forme trigonométrique

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

5.0.6 Formule de Moivre

Considérons le nombre complexe de module 1 et d'argument θ

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Preuve. Par récurrence sur n,

pour $n = 0$ la formule est vraie : $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$et $\cos(0\theta) + i\sin(0\theta) = 1$.

Supposons la formule vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$,alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$,

on a

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + i(\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta) \\
&= \cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta) \\
&= \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que la formule est vraie pour l'ordre $n+1$. $\square$

Racine $n^{iéme}$ d'un nombre complexe

Soit l'équation

$$\begin{aligned} z^n &= \lambda / \ \lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \\ z &= \varphi(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ z^n &= \varphi^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{aligned}$$

par identification

$$\begin{aligned} \varphi^n &= r \text{ et } n\theta = \alpha + 2k\pi \\ \varphi &= \sqrt[n]{r} \text{ et } \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

on trouve n solutions $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

Exemple 5.0.6 *Trouver la racine cubique de* 1, *i.e.*

$$\begin{aligned} z^3 &= 1 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi \Rightarrow \\ z &= \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}), \ \ k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

on trouve trois solutions

$$\begin{aligned} si\ k &= 0, \ \ z_1 = 1 \\ si\ k &= 1, \ \ z_2 = \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ si\ k &= 2, \ \ z_3 = \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}) = 1. \end{aligned}$$

5.0.7 Résolution de l'équation de second degée

Soit l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

En mettant le trinome sous forme canonique, l'équation s'écrite

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2a^2} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{i^2(-\Delta)}{4a^2} = (\frac{i\sqrt{(-\Delta)}}{2a})^2$$

et donc

$$x = \frac{-b}{2a} \stackrel{+}{-} \frac{i\sqrt{(-\Delta)}}{2a}.$$

L'équation du second degré dont le discriminant est négatif a deux racines complexes conjugués.

Exemple 5.0.7 *Soit l'équation*

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = -3 = 3i^2$$

donc

$$x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Formule d'Euler

Soit

$$z = x + iy, \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

On définit $\exp(z)$ par

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$$

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y,$$

$$\exp(-iy) = \cos y - i \sin y,$$

$$\cos y = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2}, \;\; \sin y = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2i}.$$

5.1 Exercices

Exercice 5.1.1 *Soit :*

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \;\; z_2 = -2, \;\; z_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

1) Calculer le module et l'argument de chacun de ces nombres.

2) Calculer $\dfrac{Z_1}{Z_3}$ *et* $\dfrac{Z_2}{Z_1}$ *en forme trigonométrique*

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$Z^3 + 1 = 0.$$

Exercice 5.1.2 *Soient a et b deux entiers naturels.*

1) Déterminer a et b pour que

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)^2 = 4+2\sqrt{3}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$z^2 - \left(2+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right)z + 1 + \sqrt{3} + \left(1-\sqrt{3}\right)i = 0$$

3) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation précédente telles que $|z_1| < |z_2|$.

-Ecrire alors $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ sous forme algèbrique et sous forme trigonométrique.

-En déduire $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ *et* $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

5.1.1 Solutions des exercices

Exercice 5.1.1 : $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1-i\sqrt{3}$.

1) $|z_1| = 2, |z_2| = 2, |z_3| = 2.$

$\arg z_1 = \theta_1 : \cos z_1 = \frac{1}{2}, \sin z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}$

$\arg z_2 = \theta_2 : \cos z_2 = -1, \sin z_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \pi$

$\arg z_3 = \theta_3 : \cos z_3 = \frac{1}{2}, \sin z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_3 = -\frac{\pi}{3}.$

2) $\dfrac{z_1}{z_3} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}\right)} = \cos(\theta_1-\theta_3) + i\sin(\theta_1-\theta_3) = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right).$

$\dfrac{z_2}{z_1} = \frac{2(\cos\pi+i\sin\pi)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1) = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right).$

3) $z^3+1=0 \Rightarrow z^3 = -1 = (\cos\pi + i\sin\pi).$

On pose $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = (\cos\pi + i\sin\pi)$

par identification $\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi,\ k = 0,1,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k = 0,1,2 \end{cases}$

pour $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

pour $k = 1$, $\theta = \pi \Rightarrow z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

pour $k = 2$, $\theta = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 5.1.2 :

1) $\left(a + b\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 1$ et $b = 1, a, b \in \mathbb{N}$.

2) $z^2 - \left(2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)i\right)z + 1 + \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)i = 0$

$$\Delta = -\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = i^2\left(1 + \sqrt{3}\right)^2$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\left(2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)i\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right)}{2} = 1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2} \\ z_2 &= \frac{\left(2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)i\right) - i\left(1 + \sqrt{3}\right)}{2} = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)i}{2} \rightarrow \text{forme algèbrique}$$

$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ →forme trigonométrique

par identification de la forme algèbrique avec la forme trigonométrique on obtient

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right).$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} \Rightarrow \sin \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$

Chapitre 6

Les fonctions réelles à une variable réelle

6.1 Généralités

f désigne une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

6.1.1 Sens de variation

f est dite croissante sur $I \subset D$ et $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(\ x_1) \leqslant f(x_2)$

f est dite décroissante sur $I \subset D$ et $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(\ x_1) \geqslant f(x_2)$

f est dite monotone sur $I \subset D$ si elle est croissante ou décroissante sur I.

Avec les inégalités stricte, on définit : f strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone sur I.

6.1.2 Parité, périodicité

f est paire si : $\forall x \in D, \forall(-x) \in D,\ f(-x) = f(x)$, son graphe est symétrique par rapport à $(0y)$.

f est impaire si : $\forall x \in D, \forall(-x) \in D,\ f(-x) = -f(x)$, son graphe est symétrique par rapport à l'origine 0.

f est périodique de période T (ou T-périodique) si $\forall x \in D,\ x + T \in D, x - T \in D/$ $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

6.2 Limites

Définition 6.2.1 *(Limite d'une fonction en x_0)*

Soit $x_0 \in I$, on dit que f admet une limite l finie en x_0 et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ si\ \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

si f admet une limite l en x_0, cette limite est unique.

6.2.1 Limite à droite, limite à gauche

Une fonction f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet pour limite l en x_0.

On note

$$\lim_{x^> \to x_0} f(x) = l$$

et on a

$$\lim_{x^{>}\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Une fonction f admet une limite à gauche l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet pour limite l en x_0.

On note

$$\lim_{x^{<}\to x_0} f(x) = l$$

et on a

$$\lim_{x^{<}\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : -\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Théoréme 6.2.2

$$\lim_{x^{<}\to x_0} f(x) = \lim_{x^{>}\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

Exemple 6.2.3

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x| < \alpha \Rightarrow \left|x^2 - 0\right| < \epsilon$$

$$\left|x^2\right| < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\epsilon}$$

il suffit de prendre $\alpha = \sqrt{\epsilon}$.

$$\lim_{x\to 2} x + 1 = 3 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - 2| < \alpha \Rightarrow |x + 1 - 3| < \epsilon$$

$$|x + 1 - 3| = |x - 2| < \epsilon$$

il suffit de prendre $\alpha = \epsilon$.

Extension de notion de limite

1.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$$

2.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A.$$

3.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x \geqslant \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

4.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x \leqslant -\beta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

5.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x > \beta \Rightarrow f(x) > A.$$

6.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x > \beta \Rightarrow f(x) < -A.$$

7.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x < -\beta \Rightarrow f(x) > A.$$

8.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x < -\beta \Rightarrow f(x) < -A.$$

6.2.2 Propriétés des limites

Théoréme 6.2.4 *(Théoreme d'encadrement)*

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a, +\infty[$, si pour tout $x \in]a, +\infty[,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$ et si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l; (l \in \mathbb{R})$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = l.$$

Exemple 6.2.5 *Calculer*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,$ *on a*

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

alors

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x},$$

or

$$\lim_{x\to+\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}) = 0$$

d'après le théorème d'encadrement, on déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

6.2.3 Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 et admettant des limites l_1, l_2 en x_0, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $f+ g$ admet comme limite $l_1 + l_2$.
2. λf admet comme limite λl_1.
3. $f\ g$ admet comme limite $l_1 l_2$.
4. Si $l_2 \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet comme limite $\frac{l_1}{l_2}$.
5. Si g est bornnée et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \text{ alors } \lim_{x \to x_0} fg(x) = 0.$$

6.2.4 Fonctions équivalentes

Définition 6.2.6 *Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in I$, si $\frac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0(sauft peut etre en x_0). On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

et on note

$$f \backsim g \text{ ou } f \backsim^{x_0} g.$$

1. Si $f_1 \overset{x_0}{\backsim} g_1$ et $f_2 \overset{x_0}{\backsim} g_2 \Rightarrow f_1\ f_2 \overset{x_0}{\backsim} g_1 g_2$.
2. Si $f_1 \overset{x_0}{\backsim} g_1$ et $f_2 \overset{x_0}{\backsim} g_2 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \overset{x_0}{\backsim} \frac{g_1}{g_2}$ avec $f_2,\ g_2 \neq 0$.

3. Si $f \overset{x_0}{\backsim} g$ et si

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Proposition 6.2.7 *Pour chercher la limite d'un produit ou d'un quotient on peut donc remplacer chacune des définitions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.*

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ou dans une fraction composée.

6.2.5 Fonctions équivalentes classiques

1. $\exp(x) - 1 \overset{0}{\backsim} x$.
2. $\sin(x) \overset{0}{\backsim} x$.
3. $1 - \cos(x) \overset{0}{\backsim} \frac{x^2}{2}$.
4. $\log(1 + x) \overset{0}{\backsim} x$.
5. $\tan(x) \overset{0}{\backsim} x$.
6. $(1 - x)^\alpha - 1 \overset{0}{\backsim} \alpha x$.

6.3 Continuité

Définition 6.3.1 *(Continuité en un point) f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$

f est continue à droite(resp. à gauche) en x_0 si

$$\lim_{x^> \to x_0} f(x) = f(x_0)(resp.\ \lim_{x^< \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

6.3.1 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$,

la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par

$$\widetilde{f}\ (x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ l \qquad \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est la seule fonction continue en x_0 donc la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 6.3.2 *1.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|},\ x \neq 0 \\ 1,\ x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x^> \to 0} f(x) = 1 = f(0) \Rightarrow f \textit{ est continue à droite de } 0.$$

$$\lim_{x^< \to 0} f(x) = -1 \neq f(x) \Rightarrow f \textit{ n'est pas continue à gauche de } 0.$$

D'où f n'est pas continue en 0.

2.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \;\; x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \; car : \sin \frac{1}{x} born\acute{e}e \; et \; \lim_{x \to 0} x = 0$$

alors f *admet un prolongement par continuité en* 0, *et on a*

$$\widetilde{f}\,(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si \; x \neq 0 \\ 0 & si \; x = 0 \end{cases}.$$

6.3.2 Continuité sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$

f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

6.3.3 Opérations sur la continuité

Si f et g sont continues en x_0 alors

1. $f + g$ est continuie en x_0.
2. λf est continue en x_0.
3. fg est continue en x_0.
4. Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.
5. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.

6.3.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théoréme 6.3.3 *(Théoreme des valeurs intermédiaires)*

Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle .

6.3.5 Image d'un intervalle fermé

Si f est continue sur un intervalle fermé I , alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

En particulier, si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$ en effet,

$$f([a, b]) = [c, d] \Leftrightarrow \forall y\, [c, d]\, , \exists x \in [a, b]\, / f(x) = y$$

on a : $a \leqslant x \leqslant b$ et f est continue : $f(a) < f(x) < f(b)$, $f(a) \geqslant 0$ et $f(b) \leqslant 0$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) = 0$

alors $\exists x \in [a, b]\, /\ f(x) = 0.$

Exemple 6.3.4

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x + x^3 + x - 3 = 0 \ \textit{sur}\ [1, 2] \\ f(1) &= -1 < 0,\ f(2) = \log 2 + 7 > 0. \end{aligned}$$

f continue sur $[1, 2]$ alors $f(x) = 0$ admet au mois une racine et on voit que f est croissante d'ou on a une seul solution.

6.3.6 Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Soit f une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I , alors f est une bijection de I dans $f(I)$, et sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.

Remarque 6.3.5 *Dans un repére orthonormé, les graphes de f et f^{-1} sont symétrique par rapport à la premier bissection des axes.*

6.4 Dérivabilité

6.4.1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et $x_0 \in D$. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre(lorsqu'il existe)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

on dit alors que f est dérivable en x_0.

Si

$$\lim_{x^> \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ } existe,$$

f est dite dérivable à droite en x_0 et cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0 et notée $f_d'(x_0)$.

On définit de même la dérivée à gauche en x_0 noté $f_g^{'}(x_0)$.

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

6.4.2 Fonction dérivée

La fonction f est dite dérivable sur E, si elle est dérivable en tout point x de E. On appelle fonction dérivée de f sur E, la fonction notée $f^{'}$, définie sur E par :

$$x \longmapsto f^{'}(x).$$

6.4.3 Interprétations

Interprétation graphique

f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente, non paralléle à l'axe oy de pente $f^{'}(x_0)$.

Si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

f n'est pas dérivable en x_0 mais le praphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente paralléle a oy.

Interprétation cinimatique

Soit t la durée écoulée entre une origine des temps et l'instant considéré. Si $f(t)$ est la distance parcourue pour un mobile pendant la durée t, le taux de variation

$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ est la vitesse moyenne entre les instants t et $t_{0.}$

La d'rivée $f^{'}(t_0)$ est la vitesse instantanée à l'instant t_0.

La dérivée second $f^{''}(t_0)$ est l'accélération instantanée à l'instant t_0.

6.4.4 Propriétés

Tout fonction dérivable en x_0 est continue en x_0,la réciproque est fausse, par exemple : la fonction $x \mapsto |x|$ et une dérivée différentes.

6.4.5 Opérations sur les fonctions dérivables

Si f et g sont dérivables en x_0, il en est de même de

1. $f + g$ et on a : $(f + g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0)$
2. fg et on a :$(fg)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{'}(x_0)$
3. Si $g(x_0) \neq 0$: $\frac{f}{g}$ est dérivable et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x_0) = \frac{f^{'}(x_0)g(x_0) - f(x_0)g^{'}(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

6.4.6 Dérivées successives

Soit f dérivable sur E, si $f^{'}$ est dérivable sur E , on note sa dérivée f" ou $f^{(2)}$. On l'appelle dérivée second de f .

Pour n entier, on définit par récurence la dérivée $n^{iéme}$ ou dérivée d'ordre n de f, en posant

$$f^{(0)} = f,\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \text{ lorsque } f^{(n-1)} \text{ est dérivable sur } E.$$

Exemple 6.4.1 *1.* $f(x) = \exp(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \exp(x)$

2. $f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

3. $f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Preuve. 1-Montrons que $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Par récurrence :

a) Pour $n = 1, (\cos x)' = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).(vraie)$

b)Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

c)Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n+1)} = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \left((\cos x)^{(n)}\right)' = \left(\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)'$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n+1)} = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n+1)} = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

2-Montrons que $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Par récurrence :

a) Pour $n = 1, (\sin x)' = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).(vraie)$

b)Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$

c)Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n+1)} = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \left((\sin x)^{(n)}\right)' = \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)'$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n+1)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n+1)} = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

□

f est dite de classe C^n sur I si $f^{(n)}$ existe et continue sur I et on note $f \in C^n(I)$.

6.4.7 Formule de Leibniz

Si f et g attmettent des dérivées d'ordre n en x_0, alors il est de même de fg et on a :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)}(x_0) &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x) g^{(n-p)}(x) \\
&= C_n^0 f^{(0)}(x) g^{(n)}(x) + C_n^1 f'(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^2 f^{(2)}(x) g^{(n-2)}(x) + ... + C_n^n f^{(n)}(x) g^{(0)}(x) \\
&= f.g^{(n)} + nf'g^{(n-1)} + \frac{n(n+1)}{2} f'' g^{(n-2)} + ... + f^{(n)} g.
\end{aligned}$$

6.4.8 Fonction composée de deux fonctions dérivables

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$ alors gof est dérivable en x_0 et on a

$$(gof)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0).$$

6.4.9 Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On suppose que f est dérivable en x_0 et que $f^{'}(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})^{'}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple 6.4.2 *Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, definie sur $\mathbb{R}_+$ dérivable sur$\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $f^{-1}(y) = y^2$, definie sur $\mathbb{R}_+$ dérivable :*

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)^{'}(y) &= 2y \\ \left(f^{-1}\right)^{'}(f(x)) &= 2f(x) = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{x}$$

6.4.10 Variation d'une fonction dérivable

1. Si $\forall x \in I,\ f^{'}(x) = 0$ alors f est constante sur I.

2. Si $\forall x \in I,\ f^{'}(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.

3. Si $\forall x \in I,\ f^{'}(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I.

6.4.11 Extremum

Définition 6.4.3 *On dit que f admet un maximum (resp.minimum) local en x_0 , s'il existe un intervalle ouvert I,contenant x_0 et inclu dans D, tel que*

$$\forall x \in I,\ \ f(x) \leqslant f(x_0)\ (resp. f(x) \geqslant f(x_0))$$

Définition 6.4.4 *Un maximum ou minimum mocale est dit extremum local en x_0.*

Condition necessaire d'extremum local

Si $f(x_0)$ est un extremum local et si f est dérivable alors $f^{'}(x) = 0$.

Condition suffisante d'éxtremum local

$f,\ f^{'},\ f^{''}$étant continues, sur $[a, b]$, si en $x_0 \in]a, b[$ on a $f^{'}(x) = 0$ et $f^{''}(x_0) \neq 0$, la fonction f présente un extremum relatif en x_0.

Il s'agit d'un maximum si $f^{''}(x_0) \leqslant 0$ et d'un minimum si $f^{''}(x_0) \geqslant 0$.

6.4.12 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théoréme 6.4.5 *(Rolle) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telleque : $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$, telque $f^{'}(c) = 0$.*

Globalement, cela veut dire qu'il existe un point c ou la tangente au graphe de f est paralléle à la droite passante par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ qui est elle même paralléle à l'axe de x.

Exemple 6.4.6 *Soit la fonction* $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composition des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x}{x^2+1}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim \dfrac{x^2}{x^2+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 = g'(0)$.

$\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$ donc g' est continue au point 0.

2. $g\left(-\frac{1}{\pi}\right) = g\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$ et g est continue sur $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right[$, d'après le théorème de Rolle :$\exists c \in \left]-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right[$, tel que $g'(c) = 0$.

6.4.13 Formule des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ / $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

L'interprétation graphique est assez simple : le segment qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et la tangeante au graphe de f au point $(c, f'(c))$ sont parallèles.

Exemple 6.4.7 *Soit* f *une fonction dérivable sur* $[2,5]$, *telle que* $1 \leq f^{'}(x) \leq 4$, $\forall x \in [2,5]$.

Montrer que : $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12.$

En effet,

f *est dérivable sur* $[2,5]$ *alors* f *est continue sur* $[2,5]$, *d'aprés le théorème des accroissements finis :*

$$\exists c \in \left]2,5\right[\text{ tel que } f^{'}(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} \Rightarrow 4 \forall x \in [2,5],\ 1 \leq \frac{f(5)-f(2)}{5-2} \leq 4$$

$$\Rightarrow \quad 3 \leq f(5) - f(2) \leq 12.$$

Exemple 6.4.8 *Existe t-il une fonction* f *telle que* $f(0) = -1$ *et* $f(2) = 4$, $f^{'}(x) \leq 2$ *por tout* $x \in \left]0,2\right[$?

Supposons qu'il existe une fonction f *dérivable sur* $[0,2]$ *alors* f *est continue sur* $[0,2]$, *d'aprés le théorème des accroissements finis :*

$$\exists c \in \left]0,2\right[\text{ tel que } f^{'}(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{5}{2} > 2 \text{ (absurde).}$$

6.4.14 Régle de l'Hopital

Soient f et g deux fonctions dérivables dans au voisinage de x_0,

$$si \lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l \text{ (existe)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

La réciproque est fausse : il est possible que $\lim \frac{f}{g}$ existe et $\lim \frac{f^{'}}{g^{'}}$ n'existe pas.

Exemple 6.4.9 *1.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{x}=\frac{0}{0}\ \text{ et }\ \lim_{x\to 0}2\exp(2x)=2$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(x)}{\exp(x)}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{ et }\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\exp(x)}=0.$$

6.5 Exercices

Exercice 6.5.1 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On note par g son prolongement.
3. Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ puis calculer g'. g' est elle continue au point 0.
4. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à g sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]$.

Exercice 6.5.2 *Soit la fonction :*

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & si\ x=0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction f est elle de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6.5.3 *Soit la fonction :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arcsin \dfrac{1}{x}, & si\ x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.

6.5.1 Solutions des exercices

Exercice 6.5.1.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. $D(f) = \mathbb{R}^*$. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

2. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ donc f admet un prolongement par continuité en 0 et
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

3. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim \dfrac{x^2}{x^2+1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 = g'(0)$
$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x}{x^2+1} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$ donc g' est continue au point 0.

4. $g\left(-\frac{1}{\pi}\right) = g\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$ et g est continue sur $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right[$ donc on peut appliquer Rolle .

Exercice 6.5.2

1. Si $x \neq 0$, f est continue comme produit et composition de fonctions continues
$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

2. Si $x \neq 0$, f est dérivable comme produit et composition de fonctions dérivables
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = 0.$$
donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

3. La fonction f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Exercice 6.5.3

1) f est continue et dérivable sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ comme produit et composition de fonctions continues.

2) f est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} x^2 \arcsin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$, de plus $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\arcsin\frac{1}{x}}{x} = 0$.
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\arcsin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Chapitre 7

Application aux fonctions élémentaires

7.1 Fonction inverse des fonctions trigonométriques

7.1.1 Fonction arcsinus

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est continue, croissante donc admet une fonction inverse qui est continue croissante notée $\arcsin$.

$$\begin{aligned} \sin^{-1} = \arcsin : \quad [-1,1] \quad &\to \quad \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \\ x \quad &\longmapsto \quad \arcsin x \end{aligned}$$

la fonction arcsin est impaire.

$$\begin{aligned}\arcsin 0 &= 0\\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2}\\ \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

La dérivée de arcsin$x$

Soit

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y\\ &\Rightarrow x^{'} = y^{'} \cos y\\ &\Rightarrow 1 = y^{'} \cos y\end{aligned}$$

or

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

d'où

$$y^{'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$

D'une façon générale

$$(\arcsin h(x))^{'} = \frac{h^{'}(x)}{\sqrt{1-h^2(x)}}, \text{ pour tout } h(x) \in \left]-1, 1\right[.$$

7.1.2 Fonction arccosinus

cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue, strictement décroissante donc elle admet une fonction inverse qui est continue et strictement décroissante notée arccos.

$$\begin{array}{rccc} cos^{-1} = \arccos : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos x \end{array}$$

la fonction arccos est paire.

$$\begin{aligned} \arccos 0 &= \frac{\pi}{2}, \\ \arccos 1 &= 0, \\ \arccos(-1) &= \pi. \end{aligned}$$

La dérivée de $\arccos x$

Soit

$$\begin{aligned} y &= \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \\ &\Rightarrow x^{'} = -y^{'} \sin y \\ &\Rightarrow 1 = -y^{'} \sin y \\ &\Rightarrow y^{'} = \frac{-1}{\sin y} \\ &\Rightarrow y^{'} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$(\arccos x)^{'} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in [-1, 1]$$

d'une façon générale

$$(\arccos h(x))' = \frac{-h'(x)}{\sqrt{1-h^2(x)}}, \text{ pour tout } h(x) \in [-1,1].$$

Remarque 7.1.1

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

en effet, posons

$$\begin{aligned} y &= \arccos x + \arcsin x \Rightarrow \\ \cos(y) &= \cos(\arccos x + \arcsin x) \\ &= \cos(\arccos x)\cos(\arcsin x) - \sin(\arccos x)\sin(\arcsin x) \\ &= x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

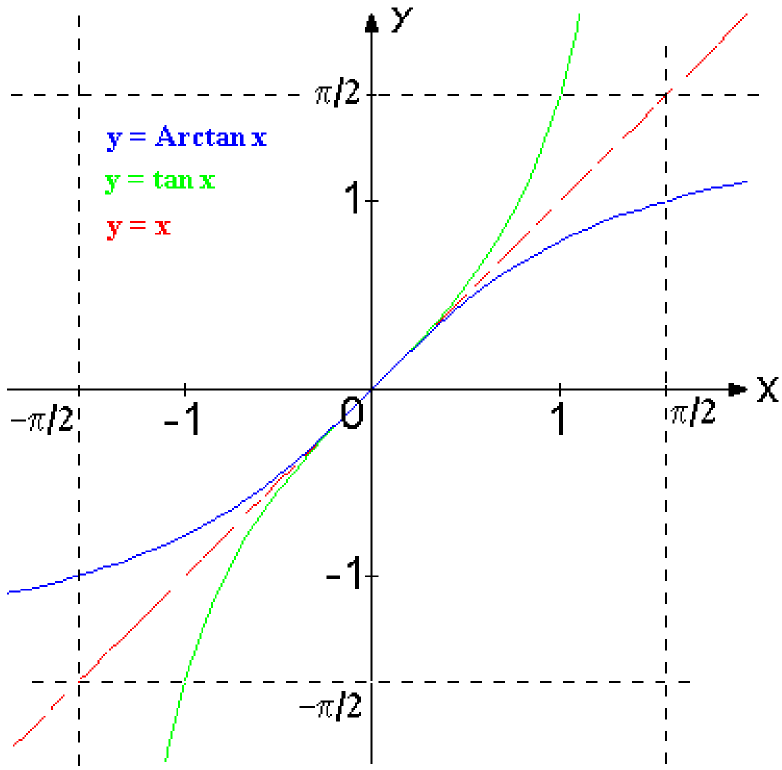
donc

$$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}.$$

7.1.3 Fonction $\arctan(x)$

$tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante donc admet une fonction inverse continue et strictement croissante

$$\begin{aligned} tg^{-1} = \arctan : \ \mathbb{R} &\to \left]\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$



La dérivé de $\arctan x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}
y &= arctg(x) \Rightarrow \\
x &= tg(y) \Rightarrow \\
x^{'} &= \frac{y^{'}}{\cos^2(y)} \Rightarrow \\
1 &= y^{'}(1 + tg^2(y)) \Rightarrow \\
y^{'} &= \frac{1}{1 + tg^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \\
(\arctan(x))^{'} &= \frac{1}{1 + x^2}.
\end{aligned}$$

En général

$$\left(\arctan(h(x))\right)^{'} = \frac{1}{1+h(x)^2}, \text{ pour tout } h(x).$$

7.1.4 Fonction arccot(x)

$\cot = \frac{1}{\tan} :]0,\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement décroissante donc admet une fonction inverse continue et strictement décroissante.

$$\begin{array}{rcl} \cot^{-1} = \operatorname{arccot}(x) \quad \mathbb{R} & \rightarrow &]0,\pi[\\ x & \mapsto & \operatorname{arccot}(x) \end{array}$$

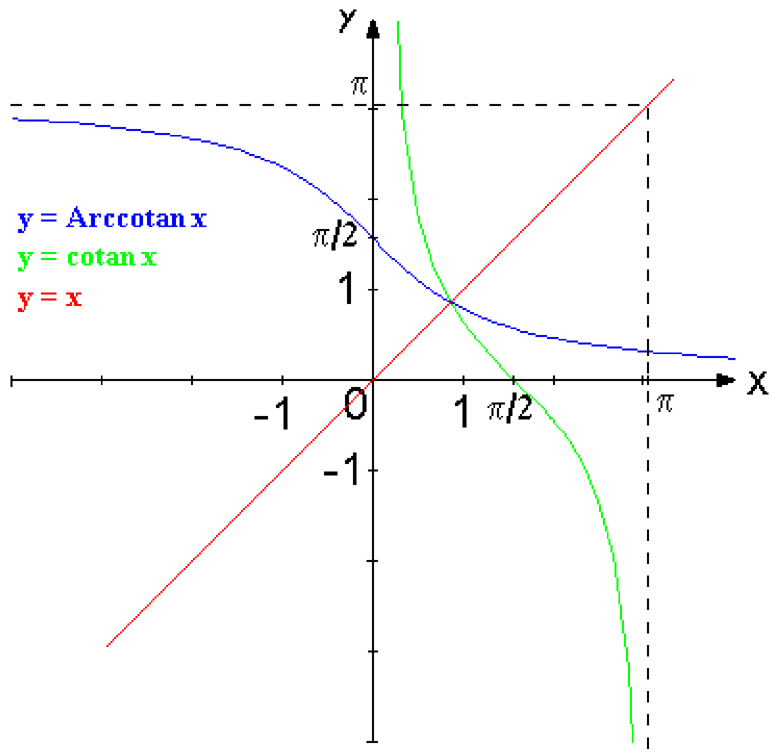
La dérivée de arccot(x)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arccot}(x) \Longleftrightarrow x = \cot(y) \\ &\Rightarrow x^{'} = -y^{'}(1+\cot^2(y)) \\ &\Rightarrow y^{'} = \frac{-1}{1+x^2} \\ &\Rightarrow (\operatorname{arccot}(x))^{'} = \frac{-1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

En général

$$\left(\operatorname{arccot}(h(x))\right)^{'} = \frac{-1}{1+h(x)^2}, \text{ pour tout } h(x) \in \mathbb{R}.$$



7.2 Fonctions hyperboliques

7.2.1 Fonction cosh et sinh

Définition 7.2.1 *Rappelons que la fonction* $x \to \exp x$ *n'est ni une fonction paire ni une fonction impaire. Mais on peut trouver deux fonctions* P *paire et* I *impaire telles que*

$$\exp(x) = P(x) + I(x)$$

ces fonctions devront également vérifier

$$\exp(-x) = P(-x) + I(-x) = P(x) - I(x)$$

d'où par addition

$$P(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

et par soustraction

$$I(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

ces deux fonctions admettent bien les propriétés demandée.

Nous les appellons respectement $\cosh x$ *(cosinus hyperboliques de x) et* $\sinh x$ *(sinus hyperbolique de x).*

On appelle cosinus et sinus hyperboliques les fonctions

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

7.2.2 Propriétés

$\cosh x$ est une fonction paire $\cosh(-x) = \cosh(x)$

$\sinh x$ est une fonction impaire $\sinh(-x) = -\sinh x$

on a de plus

$$\begin{aligned} \cosh x + \sinh x &= \exp(x) \\ \cosh x - \sinh x &= \exp(-x) \end{aligned}$$

d'où on déduit, et multipliant membre à membre

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

par définition

$$\cosh(a+b) = \frac{\exp(a+b) + \exp(-(a+b))}{2}$$

avec

$$\begin{aligned} \exp(a) &= \cosh a + \sinh a \\ \exp(-a) &= \cosh a - \sinh a \end{aligned}$$

il en résult

$$\begin{aligned} \cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \\ \cosh(a-b) &= \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\cosh(b) \\ \sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) - \cosh(a)\sinh(b) \\ \sinh(a-b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)s\sinh(b). \end{aligned}$$

En particulier si $a = b = x$

$$\begin{aligned} \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \sinh^2 x &= 2\sinh(x)\cosh(x) \\ \cosh^2 x &= \frac{\cosh(2x)+1}{2} \\ \sinh^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2}. \end{aligned}$$

7.2.3 Variation

cosh étant paire est sinh impaire, on peut se borner à les étudiers dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

La fonction cosh est toujours positive.

La fonction sinh est positive pour $x > 0$ car elle s'écrit $\sinh x = \frac{\exp x(1-\exp(-2x))}{2}$.

Les dérivées :

$$\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \cosh x, \ \lim_{x\to\infty} \cosh x = +\infty, \ \cosh(0) = 0 \\
(\cosh x)' &= \sinh x, \ \lim_{x\to\infty} \sinh x = +\infty, \ \sinh(0) = 1
\end{aligned}$$

7.2.4 Fonction tangente hyperbolique (tanh)

On appelle fonction tangente hyperbolique la fonction

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

definie sur $\mathbb{R}$.

7.2.5 Propriétés

1. La fonction tangente hyperbolique est impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x)$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2(x)$$

3. $\forall a, b, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\tanh(a+b) &= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \\
\tanh(a-b) &= \frac{\tanh a - \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \\
\tanh 2x &= \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}
\end{aligned}$$

4. La dérivée

$$\begin{aligned}
y &= \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \\
y^{'} &= \frac{1}{\cosh^2 x} > 0. \\
\lim_{x \to +\infty} \tanh x &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

7.3 Les fonctions hyperboliques inverses

7.3.1 Fonction $\arg\cosh(x)$

La fonction cosh est continue est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc admet une fonction inverse continue et strictement croissante appellée argument cosinus hyperbolique.

$$x = \cosh y \Longleftrightarrow y = \arg\cosh x, \text{ y} \geqslant 0$$

La dérivée

$$\begin{aligned}
y &= \arg\cosh x \Rightarrow \\
x^{'} &= (\cosh y)^{'} \Rightarrow \\
1 &= y^{'} \cosh^{'} y \\
y^{'} &= \frac{1}{\sinh y}
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\cosh^2 y - \sinh^2 y &= 1 \Rightarrow \\
\sinh y &= \sqrt{\cosh^2 y - 1} \\
&= \sqrt{x^2 - 1}
\end{aligned}$$

d'où

$$(\arg\cosh x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

En générale

$$(\arg\cosh h(x))^{'} = \frac{f^{'}(x)}{\sqrt{f^2(x) - 1}}.$$

Expression au moyen de logarithme

$$\begin{aligned}
y &= \arg\cosh x \Leftrightarrow \\
x &= \cosh y \text{ et } \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}
\end{aligned}$$

or

$$\cosh y + \sinh y = \exp y \text{ i.e. } x + \sqrt{x^2-1} = \exp y$$

alors

$$\begin{aligned} y &= \log(x+\sqrt{x^2-1}) \\ \arg\cosh x &= \log(x+\sqrt{x^2-1}). \end{aligned}$$

7.3.2 Fonction $\arg\sinh(x)$

La fonction sinh est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc admet une fonction inverse continue et strictement croissante appellée argument sinus hyperbolique.

$$x = \sinh y \Longleftrightarrow y = \arg\sinh x.$$

La dérivée

$$\begin{aligned} y &= \arg\sinh x \Rightarrow y^{'} = \frac{1}{\cosh y} \\ &\Rightarrow y^{'} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

d'où

$$(\arg\sinh x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En générale

$$(\arg\sinh f(x))^{'} = \frac{f^{'}(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}..$$

Expression au moyen de logarithme

$$\begin{aligned} y &= \arg\sinh x \Leftrightarrow \\ x &= \sinh y \text{ et } \cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1} = \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

or

$$\cosh y + \sinh y = \exp y \text{ i.e. } x + \sqrt{x^2+1} = \exp y$$

alors

$$\begin{aligned} y &= \log(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \arg\cosh x &= \log(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

7.3.3 Fonction $\arg\tanh(x)$

tanh est continue et strictement croissante dans $\mathbb{R}$,donc admet une fonction inverse continue et strictement croissante appellée argument tangente hyperbolique.

$$\begin{aligned} \arg\tanh = \tanh^{-1} : \;]-1,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arg\tanh x. \end{aligned}$$

La dérivée

$$x = \arg\tanh y \Leftrightarrow y = \arg\tanh x$$

$$x' = \frac{y'}{ch^2 y} \Rightarrow y' = ch^2 y = \frac{1}{1 - \tanh^2 y}$$

d'où

$$(\arg\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

En générale

$$(\arg\tanh f(x))' = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}.$$

Expression au moyen de logarithme

$$y = \arg\tan x \Leftrightarrow x = \tanh y \text{ et } \cosh^2 y = \frac{1}{1-\tanh^2 y}$$

or

$$\begin{aligned} \sinh^2 y &= \cosh^2 y - 1 \\ &= \frac{1}{1-\tanh^2 y} - 1 \\ &= \frac{\tanh^2 y}{1-\tanh^2 y} \\ &= \frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\sinh y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \cosh y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\sinh y + \cosh y = \exp y \Leftrightarrow y = \log(\sinh y + \cosh y)$$

alors

$$\begin{aligned} y &= \log(\sinh y + \cosh y) \\ &= \log\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \log(1+x) - \log\sqrt{1-x^2} \\ &= \log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x^2) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\arg\tanh x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

7.4 Exercices

Exercice 7.4.1 *Montrer que*

$$\arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

Exercice 7.4.2 *Soient les réels x et y telques*

$$x = \ln(\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}))$$

-*Calculer* $\cosh x$ *et* $\sinh\ x$.

Exercice 7.4.3 *Ecrire sous forme d'expression algébrique*

$$1) \sin(\arccos x)$$

$$2) \cos(\arcsin x).$$

7.4.1 Solutions des exercices

Exercice 7.4.1

Soit la fonction

$$f(x) = \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

alors

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-\sqrt{1-x^2} + 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-x^2} \\ f^{'}(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}, \; 0 < x < 1 \Rightarrow f^{'}(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

f est strictement croissante et $f(x) = 0$ pour tout $0 < x < 1$.

D'où

$$\arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

Exercice7.4.2

1)

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{\exp x + \frac{1}{\exp x}}{2} \\ &= \frac{\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\tan(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sin(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{\sin(y + \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{\cos y}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{\exp x - \frac{1}{\exp x}}{2} \\
&= \frac{\tan(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\tan(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})}}{2} \\
&= \frac{\sin^2(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})}{2\sin(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})} \\
&= \frac{1-2\cos^2(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(y+\frac{\pi}{4})} \\
&= \frac{-\cos(y+\frac{\pi}{4})}{\sin(y+\frac{\pi}{4})} \\
&= \frac{-1}{\tan(y+\frac{\pi}{4})}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.4.3

1) $\sin(\arccos x)$:

$$\sin^2 y = 1-\cos^2 y \Rightarrow \sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y},$$

donc

$$\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} \Rightarrow \sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2},$$

et comme $\arccos x \geqslant 0$ on a $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$.

2) $\cos(\arcsin x)$:

$$\cos^2 y = 1-\sin^2 y \Rightarrow \cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y},$$

donc

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2},$$

et comme $\arcsin x \geqslant 0$ on a $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-x^2}$.

Chapitre 8

Développements limités

Les développements limités permettent de trouver des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes.

Un développement limité (noté DL) d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme d'une fonction polynomiale, et d'un reste qui peut être négligé lorsque la variable est suffisamment proche du point considéré.

8.1 Développement limité d'ordre n au voisinage de 0

Notation 8.1.1 *(de Landau) On dit qu'une fonction f est négligeable devant une fonction g quand $x \to x_0$ et on écrit*

$$f = o(g) \text{ si } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple 8.1.2 *1.*

$$x^3 = o(x^2) \text{ quand } x \to 0 \text{ car } \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

2. si $\varepsilon(x)$ une fonction telleque $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ alors $x^n\ \varepsilon(x) = o(x^n)$ car

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n \varepsilon(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Définition 8.1.3 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on note $V(0)$, s'il existe des constantes $a_0, a_1, ..., a_n$, et une fonction $\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que*

$$\forall x \in V(0),\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

ou encore

$$\forall x \in V(0),\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Le polynome $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ s'appelle la partie réguliere du développement et $x^n \varepsilon(x)$ s'appelle le reste ou terme complémentaire.

Exemple 8.1.4 *La fonction* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ *admet un développement limité de n'importe quel ordre* n*. En effet, on obtient par division suivant les puissances croissantes de* x

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

et comme

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} = x^n \left(\frac{x}{1+x}\right) \quad \text{et } \lim_{x \to 0} \frac{x}{1+x} = 0$$

alors

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Théoréme 8.1.5 *Si* f *admet un développement au voisinage de* 0

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

alors

1. *Le développement est unique .*
2. f *admet une limite quand* $x \to 0$ *et* $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$.
3. *Si de plus* f *est continue en* 0 *alors* f *est automatiquement dérivable en* 0 *et on a :* $f(0) = a_0$ *et* $f'(0) = a_1$.
4. *Si* f *une fonction paire alors* $a_1 = a_3 = ... = a_{2k+1} = 0$*, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *avec* $2k + 1 \leqslant n$.
5. *Si* f *est une fonction impaire alors* $a_0 = a_2 = ... = a_{2k} = 0$*, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *avec* $2k \leqslant n$.

Exemple 8.1.6 *Les fonctions* $\log|x|$ *et* $\cot x$ *n'admettent pas de développement limité au voisinage de* 0 *car*

$$\lim_{x\to 0}\log|x| = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0}\cot x = \pm\infty.$$

La fonction $f(x) = |x|$ *n'admet pas de développement limité au voisinage de* 0 *car c'est une fonction continue en* 0 *et si elle admet une développement limité alors d'aprés le théorème précédent elle sera dérivable en* 0*, or on sait que cette fonction n'est pas dérivable en* 0*.*

Si on considére la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ *alors* f *est une fonction paire, donc si* f *admet un développement limité en* 0*, alors tout les cooefficients impaire de ce développement sont nulle, en effet, par la division suivant les puissance croissante de* x *on obtient*

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{2n} + x^{2n}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

on voit bien

$$a_0 = a_2 = ... = a_{2k} = 0.$$

Définition 8.1.7 *Une fonction* f *définie sur un ensemble* E *est dite de classe* C^n *sur* E *si* f *est dérivable* n *fois sur* E *et sa dérivée d'ordre* n *est continue.*

Théoréme 8.1.8 *(de Taylor-Maclaurin Young). Si* f *est une fonction définie sur un intervalle* I *avec* $0 \in I$ *et si* $f^{(n)}(0)$ *existe alors* $\forall x \in I$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Par le théorème précedent et par l'unicité du développement limité, on déduit le théorème suivant :

Théoréme 8.1.9 *Si f est une fonction de classe C^n au voisinage de 0 alors f admet un développement d'ordre n et on a*

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ceci permet de trouver le développement limité d'une fonction de classe C^∞ si l'on connait les dérivées successives de f en 0.

On a aussi

1. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

2. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

3. $$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...+\frac{\alpha(\alpha-1)....\alpha(\alpha-(n-1))}{n}x^n+o(x^n)$$

Dans 4 si on donne plusieurs valeurs de α on obtient différent développement limités, par exemple pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^3 + ... + (-1)^{(n-1)}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}...\frac{(2n-3)}{2n}x^n + o(x^n)$$

et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^3 + ... + (-1)^{(n)}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}...\frac{(2n-1)}{2n}x^n + o(x^n).$$

Remarque 8.1.10 *Si l'on connait le développement limité d'une fonction de classe C^n alors par unicité du développement on peut déterminer les dérivées successives de f en 0, par exemple on a*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$$

et comme $\frac{1}{1-x}$ est de classe C^n au voisinage de 0 alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n! \text{ (car } a_n = 1 = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\text{)}.$$

8.2 Opérations sur les développements limités

Théoréme 8.2.1 *Soient f et g deux fonctions admettent des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 . Alors les fonctions $f+g$, $f.g$ admettent un développement limité d'odre n au voisinage de 0 et la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 si*

$$\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$$

et on a :

1. La partie réguliére de $f+g$ est la somme des parties réguliers de f et g.

2. La partie réguliére de $f.g$ s'obtient par le produit des parties réguliéres de f et g mais en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égale à n.

3. La partie réguliére de $\frac{f}{g}$ s'obtient par la division suivant les puissance croissantes de x de la partie réguliére de f sur la partie réguliére de g mais en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

1. Déterminant le D.L de la fonction $\cosh x$ à l'odre n à l'origine, on a

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(\exp x + \exp(-x)) \text{ et comme} \\
\exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\exp(-x) &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)
\end{aligned}$$

donc

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n).$$

2. Pour déterminer le D.L de la fonction $\frac{\exp x}{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}
\frac{\exp x}{1-x} &= \exp x(\frac{1}{1-x}) = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^n))(1 + x + x^2 + o(x^n)) \\
&= (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!})(1 + x + x^2) + o(x^n) \\
&= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^n).
\end{aligned}$$

3. Pour déterminer le D.L de $\tan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\tan x &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\
\tan x &= \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2}} + o(x^3) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Théoréme 8.2.2 *Soient f et g deux fonctions admettant des D. L d'ordre n au voisinage de 0 avec $g(0) = 0$. Alors la fonction fog admet un D. L d'ordre n au voisinage de 0 et la partie réguliére de fog s'obtient en substituant la partie réguliere de g dans la partie réguliére de f mais en gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemple 8.2.3 *Pour déterminer le D. L d'ordre 3 à l'origine de la fonction $\exp(\sin x)$ on a*

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

alors posant

$$u = \sin x$$

donc

$$\begin{aligned}
\exp(\sin x) &= \exp u \\
&= 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^n)
\end{aligned}$$

et on a

$$u = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}
\exp(\sin x) &= 1 + \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{1!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} + o(x^3) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} o(x^3).
\end{aligned}$$

Théoréme 8.2.4 *Soit f une fonction définie sur $[-a, a]$ admet un D. L d'ordre n au voisinage de* 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + n a_n x^n + o(x^n)$$

1. *Si f est dérivable sur $[-a, a]$ et f' admet un D. L au voisinage de 0 à l'ordre $(n-1)$ alors la partie réguliére de f' s'obtient en dérivant la partie réguliére de f et on a*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x^1 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

2. *Si f admet une primitive F alors F admet un D. L au voisinage de 0 à l'ordre $(n+1)$ et on a*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 .... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple 8.2.5 *Du développement*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$$

on obtient par dérivation que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

et on déduit par intégration

$$-\log(1-x) = \log 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

et donc

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - ... - \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

et

$$\log(1+x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

Pour déterminer le D. L de la fonction $f(x) = \arctan x$, *on dérive la fonction* f , *on charche le D. L de la dérivée puis on integre pour trouver celui de* f *on a aussi*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

or on sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$$

en remplacant x *par* $(-x^2)$ *on obtient*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

donc par intégration

$$\arctan x = \arctan 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

d'ou

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

8.3 Développement limité au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$ et au voisinage de l'infini

Définition 8.3.1 *1. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$, on dit que f admet un D.L au voisinage de x_0 si la fonction $F(X) = f(X + x_0)$ admet un D.L au voisinage de* 0*.*

$$F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n + o(X^n)$$

et on a alors

$$f(x) = F(X-x_0) = a_0+a_1(X-x_0)+a_2(X-x_0)^2+....+a_n(X-x_0)^n+o((X-x_0)^n).$$

2. Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, +\infty[$, on dit que f admet un D.L à l'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction $F(X) = f(\frac{1}{X})$ admet un D. L au voisinage de 0*.*

$$F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n + o(X^n)$$

et on a alors

$$f(x) = F\left(\frac{1}{X}\right) = a_0 + a_1\frac{1}{X} + a_2\left(\frac{1}{X}\right)^2 + ... + a_n\left(\frac{1}{X}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{X}\right)^n\right).$$

Exemple 8.3.2 *1. Pour chercher le D.L de $\exp x$ d'ordre n au voisinage de 1 , on considére la fonction $F(X) = \exp(x + 1)$ et on détermine le D.L. de $F(X)$ au voisinage de* 0*.*

on a aussi

$$\begin{aligned} F(X) &= \exp(X+1) \\ &= \exp 1 \exp x \\ &= \exp(1)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)) \end{aligned}$$

d' où

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x-1) = \\ &= \exp x \\ &= \exp(1)\left(1+\frac{x-1}{1!}+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+...+\frac{(x-1)^n}{n!}+o((x-1)^n)\right). \end{aligned}$$

2. *Le D. L. de la fonction* $\frac{\sin x}{x}$ *d'ordre* n *au voisinage de* ∞ *s'obtient par le D. L. de* $F(X) = f(\frac{1}{x}) = \sin X$ *au voisinage de* 0.

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{X^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + o\left(X^{2n+2}\right)$$

d' où

$$\begin{aligned} f(x) &= F(\frac{1}{x}) \\ &= \sin\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3!X^3} + \frac{1}{5!X^5} - \frac{1}{7!X^7} + ... + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!X^{(2n+1)}} + o(\frac{1}{X^{2n+2}}). \end{aligned}$$

8.4 Application du développement limité

8.4.1 Calcule des limites

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})+o(x^4)}{x^2(x+o(x^2))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{6}x^3-\frac{x^5}{4!}+o(x^4)}{x^3+o(x^4)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{6}+o(x)}{1+o(x)}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x &= \lim_{x\to+\infty}\exp(x\log(1+\frac{1}{x}))\\
&= \lim_{y\to 0}\exp(\frac{1}{y}\log(1+y))\\
&= \lim_{y\to 0}\exp(\frac{1}{y}(y-\frac{y^2}{2}+o(y^2))\\
&= \lim_{y\to 0}\exp(1-\frac{y}{2}-o(y))\\
&= \exp(1)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\exp(1)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\exp(\frac{1}{x}\log(1+x))-\exp(1)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\exp(\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2}o(x^2)))-\exp(1)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\exp(1)\exp(-\frac{x^2}{2}o(x^2))-\exp(1)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\exp(1)\left(1-\frac{x^2}{2}o(x^2)-1\right)}{x}\\
&= \frac{-\exp(1)}{2}.
\end{aligned}$$

8.5 Position du graphe d'une fonction par rapport à l'asymptote

8.5.1 Développement généralisés

Définition 8.5.1 *Soit f une fonction qui n'admet pas de D. L. au voisinage de* 0. *On dit que f admet un D. L. généralisé au voisinage de* 0 *s'il existe* $\alpha > 0$ *telque* $x^\alpha f$ *admet un D. L. au voisinage de* 0.

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

et le dévéloppement limité généralisé de f est

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + o(x^n)).$$

Exemple 8.5.2 *La fonction* $f(x) = \cot(x)$ *n'admet pas de D. L. au voisinage de* 0. *En effet, on a par exemple à l'ordre* 4

$$\begin{aligned} xf(x) &= \frac{x\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{x(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5))}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)} \\ &= 1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45.}+o(x^4) \end{aligned}$$

ce qui donne le D.L. généralisé a l'ordre 3

$$\cot(x) = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o(x^3).$$

8.5.2 Position du graphe

Exemple 8.5.3 *Soit*

$$f(x) = x\exp(\frac{1}{x})$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

alors f n'admet pas un D. L. au voisinage de ∞, posons

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \to 0 \;\; qd\; x\to\infty \\ f(\frac{1}{y}) &= \frac{\exp(y)}{y} \end{aligned}$$

et $yf(\frac{1}{y})$ admet un D. L au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} yf(\frac{1}{y}) &= \exp(y) \\ &= 1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+o(y^3) \end{aligned}$$

$$f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{y} + 1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{3!} + o(y^2)$$

d' où

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

Alors $(\triangle) : Y = x + 1$ *est une asymptote car*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (x + 1) = 0.$$

Si $f(x) - Y \quad \rightarrow \quad 0^+$ *quand* $x \rightarrow +\infty,$ *alors le graphe est au dessus de* $(\triangle)$.

Si $f(x) - Y \quad \rightarrow \quad 0^-$ *quand* $x \rightarrow -\infty,$ *alors le graphe est en dessous de* $(\triangle)$.

8.6 Exercices

Exercice 8.6.1 *1) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de* 0 *de la fonction*

$$g\left(x\right) = \left(\cos x\right)^{xcotgx}$$

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} g\left(x\right)$.

Exercice 8.6.2 *Soit la fonction* f *définie par :*

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2 arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

i) f admet-elle un développement de Taylor au voisinage de 0?

ii) Trouver le développement limité généralisé de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 3.

iii) Déduire les asymptotes obliques et leurs positions par rapport au graphe de f.

8.6.1 Solutions des exercices

Exercice 8.6.1

1)

$$\begin{aligned}
x\cot x &= 1-\frac{x^2}{3}+o(x^3)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\\
(\cos x)^{x\cot x} &= 1+(1-\frac{x^2}{3})(-\frac{x^2}{2!})+o(x^3)\\
(\cos x)^{x\cot x} &= 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3).
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g\left(x\right) &= \lim_{x\to 0} 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Exercice 8.6 .2 Soit la fonction f définie par :

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x>0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\\ x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$ donc f n'est pas continue en 0 alors f n'admet pas un développement de Taylor au voisinage de 0.

ii) Au $V(-\infty)$:

$$\begin{cases} arctgy = y - \frac{y^3}{3} + O(y^3) \\ actg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ x^2 actg\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Au $V(+\infty)$:

$$\begin{cases} \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + O(y^3) \\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

iii) Au $V(-\infty)$: Asymptote $y = x$ et position en dessous de graphe .

Au $V(+\infty)$: Asymptote $y = x - \frac{1}{2}$ et position en dessous de graphe .

Chapitre 9

Algébre linéaire

9.1 Espace vectoriel

9.1.1 Espace vectoriel et sous espace vectorel

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée :

$$\begin{array}{rccc} (+): & E \times E & \rightarrow & E \\ & (x, y) & \rightarrow & X + Y \end{array}$$

et d'une opération externe notée :

$$\begin{array}{rccc} (.): & \mathbb{k} \times E & \rightarrow & E \\ & (\lambda, y) & \rightarrow & \lambda . x \end{array}$$

Définition 9.1.1 *Un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{k}$ *ou un* $\mathbb{k} -$ *espace vectoriel est un triplet* $(E, +, .)$ *telque*

1. $(E,+)$ *est un groupe commutatif.*

2. $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x, y \in E,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y.$

3. $\forall \lambda, \mu \in \Bbbk, \forall x \in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x.$

4. $\forall \lambda, \mu \in \Bbbk, \forall x \in E,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x.$

5. $\forall x \in E,\ 1_{\Bbbk}.x = x.$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et les éléments de $\Bbbk$ *sont sont appelés des scalaires.*

Proposition 9.1.2 *Si E est un $\Bbbk -$ espace vectoriel alors on a les propriétés suivantes*

1. $\forall x \in E,\ 0_{\Bbbk}.x = 0_E.$

2. $\forall x \in E,\ -1_{\Bbbk}.x = x.$

3. $\forall \lambda \in \Bbbk,\ \lambda.0_E = 0_E.$

4. $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x, y \in E,\ \lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y.$

5. $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x \in E,\ \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\Bbbk}$ *ou* $x = 0_E.$

Exemple 9.1.3

1. $(\mathbb{R},+,.)$ *est un $\mathbb{R} -$ espace vectoriel et* $(\mathbb{C},+,.)$ *est un $\mathbb{C} -$ espace vectoriel.*

2. *Si on considére* $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/\ x, y \in \mathbb{R}\}$ *muni des deux opérations suivantes*

$$\begin{array}{rccc} (+): & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & ((x,y),(x',y')) & \to & (x+x', y+y') \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} (.): & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda,(x',y')) & \rightarrow & (\lambda.x,\lambda.y) \end{array}$$

$(\mathbb{R}^2,+,.)$ *est un* $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel .*

3. *L'ensemble* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f/\ f$ *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}\}$ *muni des deux opération suivantes* $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\ f,g\ \ \in\ \ \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (\lambda.f)(x) &= \lambda.f(x) \end{aligned}$$

est un $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel .*

4. $(\mathbb{R},+,.)$ *n'est pas un* $\mathbb{C}-$ *espace vectoriel, car pour* $\lambda\in\mathbb{C}$, *et pour* $x\in\mathbb{R}$ *on a pas necessairement* $\lambda.x\in\mathbb{R}$.

Définition 9.1.4 *Soit* $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{k}-$ *espace vectoriel et soit* F *un sous ensemble non vide de* E*.On dit que* F *est un sous espace vectorielde* E*, si* $(F,+,.)$ *est un* $\mathbb{k}-$ *espace vectoriel.*

Théoréme 9.1.5 *Soit* $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{k}-$ *espace vectoriel et* $F\subset E, F\neq\varnothing$*. On a les éqyivalence suivantes*

1. F *est un sous espace vectoriel de* E.
2. F*est stable par l'addition et par la multiplication :*

$$\forall x,y\in F,\ \forall\lambda\in\mathbb{k},\ x+y\in F,\ \lambda x\in F.$$

3.

$$\forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \Bbbk,\ \lambda x + \mu y \in F.$$

d' où

F *est un sous espace vectoriel de* $E \Leftrightarrow F \neq \varnothing$ *et* $\forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \Bbbk,\ \lambda x + \mu y \in F.$

Exemple 9.1.6 *1.* $\{0_E\}$ *et* E *sont des sous espaces vectoriels de* E.

2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x + y = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$. *En effet*

-$F \neq \varnothing$ *car* $(0, 0) \in F$.

-$\forall (x, y), (x^{'}, y^{'}) \in F$,$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) + \mu(x^{'}, y^{'}) &= (\lambda x + \mu x^{'}, \lambda x + \mu y^{'}) \\ &\in F \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu x^{'} + \lambda x + \mu y^{'} &= \lambda(x + y) + \mu(x^{'} + y^{'}) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. *L'espace* $F = \{(x + y + z, 2x - y, 3z) /\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *En effet*

-$F \neq \varnothing$ *car* $(0, 0, 0) \in F$

-*Soient* $\begin{cases} X = (x+y+z, 2x-y, 3z)/x, y, z \in \mathbb{R} \\ Y = (x^{'}+y^{'}+z^{'}, 2x^{'}-y^{'}, 3z^{'})/x^{'}, y^{'}, z^{'} \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lambda X + \mu Y &= (\lambda x + \lambda y + \lambda z, 2\lambda x - \lambda y, 3\lambda z) + (\mu x^{'} + \mu y^{'} + \mu z^{'}, 2\mu x^{'} - \mu y^{'}, 3\mu z^{'}) \\ &= ((\lambda x + \mu x^{'}) + (\lambda y + \mu y^{'}) + (\lambda z + \mu z^{'}), 2(\lambda x + \mu x^{'}) - (\lambda y + \mu y^{'}), 3(\lambda z + \mu z^{'})) \\ &= (x^{''} + y^{''} + z^{''}, 2x^{''} - y^{''}, 3z^{''}) \in F \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu x^{'}) &= x^{''} \\ (\lambda y + \mu y^{'}) &= y^{''} \\ (\lambda z + \mu z^{'}) &= z^{''}. \end{aligned}$$

Théoréme 9.1.7 *L'intersection d'une famille non vide des sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel.*

Remarque 9.1.8 *La réunion de deux sous espaces vectoriels n'est pas forcement un sous espace vectoriel.*

Exemple 9.1.9

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ E_2 &= \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$

$E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous espace vectoriel car

$$\begin{aligned} U_1 &= (1,0) \in E_1 \\ U_2 &= (0,1) \in E_2 \\ U_1 + U_2 &= (1,1) \notin E_1 \cup E_2 \\ car \ \ (1,1) &\notin E_1 \ et \ (1,1) \notin E_2. \end{aligned}$$

9.1.2 Somme de deux sous espaces vectoriels

Définition 9.1.10 *Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. On appelle somme de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 et on note $E_1 + E_2$ l'ensembles suivant*

$$E_1 + E_2 = \{U \in E / \ \exists U_1 \in E_1, \exists U_2 \in E_2 / \ U = U_1 + U_2\}.$$

Proposition 9.1.11 *La somme de deux sous espaces vectoriels E_1, E_2 (d'un même $\mathbb{k}-$espace vectoriel) est un sous espace vectoriel de E contenant $E_1 \cup E_2$ i.e $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$.*

9.1.3 Somme directe de deux sous espaces vectoriels

On dira que la somme $E_1 + E_2$ est directe si $\forall \ U \in E_1 + E_2$ il existe un vecteur $U_1 \in E_1$ unique et un vecteur $U_2 \in E_2$ unique telque $U = U_1 + U_2$. On note $E_1 \oplus E_2$.

Théoréme 9.1.12 *Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E d'un même $\mathbb{k}-$espace vectoriel la somme $E_1 + E_2$ est directe si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.*

9.1.4 Sous espace supplémentaires

Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E d'un même $\mathbb{k}-$espace vectoriel , on dit que E_1et E_2 sont supplémentaires si $E_1 \oplus E_2$.

Exemple 9.1.13

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2\right\}, \; E_2 = \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ \mathbb{R}^2 &= E_1 \oplus E_2. \end{aligned}$$

9.2 Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, .)$ par E.

Définition 9.2.1 *Soit E un espace vectoriel et $e_1, e_2, ..., e_n$ des vecteurs de E.*

1. *On dit que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sont libres ou linéairement indépendant*

   si : $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{k}}$.

   Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.

2. *On dit que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une familles génératrice de E ou que E est engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ si*

   $$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k} / \; x = \lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, ..., \lambda_n e_n.$$

   On dit que x est combinaisson linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$.

3. *Si* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *est une famille libre et génératrice de* E *alors* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *est appelée base de* E.

Remarque 9.2.2 *Dans un espace vectoriel* E, *tout vecteur non nul est libre.*

Théoréme 9.2.3 *Si* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *et* $\left\{e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_m^{'}\right\}$ *sont deux bases pour un même espace vectoriel* E *alors* $n = m$.

En d'autre terme, si un espace vectoriel E admet une base alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre la ne dépend pas dela base mais il dépend seulement de l'espace E, d'où la définition suivantes

Définition 9.2.4 *Soit* E *un espace vectoriel et* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *une base pour* E, *le nombre* n *est appelé dimension de* n *et il est noté* $\dim E$.

Exemple 9.2.5 1. *Cherchons une base de* $\mathbb{R}^3$, *il faut trouver une famille de vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$ *qui engendre* $\mathbb{R}^3$ *et qui soit une famille libre.*

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, o) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \end{aligned}$$

en posant $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$, *on voit bien que* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une famille génératrice pour* $\mathbb{R}^3$, *montrons qu'elle est libre* $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in$

$\mathbb{R}, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + .\lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\in \mathbb{R},\ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + .\lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Rightarrow \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + .\lambda_3(0,0,1) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

ainsi $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une famille libre , d'où* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une base pour* $\mathbb{R}^3$ *qu'on l'appelle la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et on a* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

De la même maniére, on a la base canonique de $\mathbb{R}^2$ *est* $\{(1,0),(0,1)\}$ *et celle de* $\mathbb{R}^4$ *est* $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

2. *Montrons que les vecteurs* $v_1 = (1,-1)$ *et* $v_2 = (2,1)$ *sont une autre base de* $\mathbb{R}^2$.

$$\{v_1, v_2\} \text{ est génératrice } \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}/\ (x,y) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\begin{aligned} (x,y) &= (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = -\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x-2y}{3} \\ \lambda_2 = \frac{x+y}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\{v_1, v_2\}$*une partie génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\{v_1, v_2\} \text{ est libre} &\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi $\{v_1, v_2\}$*une base de* $\mathbb{R}^2$.

Théoréme 9.2.6 *Soit E un espace vectoriel de dimenssion n.*

1. *Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de $E$$\Leftrightarrow$ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ famille génératrice de E $\Leftrightarrow$ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ famille libre.*

2. *Si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ sont p vecteurs dans E, avec $p > n$ alors $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ ne peut être libre, de plus si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ est génératrice alors il existe n vecteurs parmis $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ qui forment une base pour E.*

3. *Si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ sont p vecteurs dans E, avec $p < n$ alors $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ ne peut être génératrice , de plus si $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ est libre alors il existe $(n-p)$ vecteurs $\{e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ dans E telsque $\{e_1, e_2, ..., e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ est une base pour E.*

4. *Si F est un sous espace vectoriel de E alors $\dim F \leqslant n$ et de plus : $\dim F = n \Leftrightarrow E = F$.*

Exemple 9.2.7 *Cherchons une base pour l'espace*

$$F = \{(x+y, 2x+z, 2y-z)/\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

comme $F \subset \mathbb{R}^3$ *alors* $\dim F \leqslant 3$, *donc la base de* F *ne peut posséder plus de trois vecteurs.*

$$\begin{aligned}
(x+y, 2x+z, 2y-z) &= (x, 2x, 0) + (y, 0, 2y) + (0, z, -z) \\
&= x(1,2,0) + y(1,0,2) + z(0,1,-1)
\end{aligned}$$

d'où les vecteurs $v_1 = (1,2,0), v_2 = (1,0,2), v_3 = (0,1,-1)$ *forment une famille génératrice pour* F, *si cette famille est libre alors elle formera une base pour* F,$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(1,0,2) + \lambda_3(0,1,-1) &= (0,0,0) \\
(\lambda_1+\lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_3, 2\lambda_2-\lambda_3) &= (0,0,0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = -2\lambda_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ *n'est pas libre, mais d'aprés le théorème on peut extraire de cette famolle une base de* F.

Pour le faire on doit chercher deux vecteurs de cette famille qui sont libres, si on trouve ces deux vecteurs, alors il formet une base pour F, *si on ne les trouve pas alors on cherchera un vecteurs libre (non nul) et se vecteur sera une base de* F.

Prenons par exemple v_1 *et* v_2

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,2,0)+\lambda_2(1,0,2) &= (0,0,0)\\
(\lambda_1+\lambda_2, 2\lambda_1, 2\lambda_2) &= (0,0,0)\\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0\\ 2\lambda_1=0\\ 2\lambda_2=0 \end{cases}\\
&\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\{v_1, v_2\}$ *est une base pour* F *et* $\dim F = 2$.

On a montrer que $\dim F = 3$ *et* $F \subset \mathbb{R}^3$ *et* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, *d'où* $F = \mathbb{R}^3$.

9.3 Applications linéaires

Définition 9.3.1 *Soit* $(E,+,.)$ *et* $(F,+,.)$ *deux* $\Bbbk-$*espaces vectotiels et soit* f *une application de* E *dans* F. *On dit que* f *est une application linéaire si*

$$\forall x,y\in E, \forall\lambda\in\Bbbk,\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

ou d'une maniére équivalente

$$\forall x,y\in E, \forall\lambda,\mu\in\Bbbk,\ f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y).$$

1. *Si de plus* f *est bijective, on dit alors que* f *est un isomorphisme.*

2. *Une application linéaire de* $(E,+,.)$ *dans* $(F,+,.)$ *est dite un endomorphisme.*

3. *Un isomorphisme de* $(E,+,.)$ *dans* $(F,+,.)$ *est dite un automorphisme.*

Exemple 9.3.2 *L'application*

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}$$

$$(x, y) \quad \to \quad x + 2y$$

est une application linéaire car $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Remarque 9.3.3 *On peut montrer facilement que la somme, le produit d'une application linéaire par un scalaire et composé de deux applications linéaire est une application linéaire.*

Proposition 9.3.4 *Soit f une application linéaire de E dans F.*

1.
$$f(0_E) = 0_F$$

2.
$$\forall x \in E, f(-x) = -f(x).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} f(0_E) &= f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_F \\ f(-x) &= f(x - x) = f(0_E) = 0_F \Rightarrow f(-x) = -f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Définition 9.3.5 *Soit f une application linéaire de E dans F.*

1. *On appelle image de f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble défini comme suit*

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) / \ x \in E\}$$

2. *On appelle noyau de* f *et on note* $\ker f$ *l'ensemble défini comme suit*

$$\ker f = \{x \in E / \ f(x) = 0_F\}$$

on note $\ker f$ *par* $f^{-1}(\{0_F)\}$.

3. *Si* f *est une application linéaire de* E *dans* F *, alors* $\operatorname{Im} f$ *est un sous espace véctoriel de* F *et* $\ker f$ *sous espace véctoriel de* E.

4. *Si* $\dim \operatorname{Im} f = n < +\infty$ *alors* n *est appelé rang de* f *et on note* $rg(f)$.

Exemple 9.3.6 1. *Déterminer le noyau de l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & x+2y \end{array}$$

$$\begin{aligned} \ker f &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = -2y\big\} \\ &= \{(-2y, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1) / y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

donc $\ker f$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*, il est de dimension* 1 *et il admet pour base* $\{(-2,1)\}$.

2. *Cherchons Image de l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (-x+y, x-3z, y) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \left\{f(x,y,z)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{(-x+y, x-3z, y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{(-x,x,0)+(y,0,y)+(0,-3z,0)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{x(-1,1,0)+y(1,0,1)+z(0,-3,0)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Im} f$ *est un sous espace véctoriel de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par* $\{(-1,1,0)+(1,0,1)+(0,-3,0)\}$, *comme ces vecteurs sont libres alors ils forment une base pour* $\operatorname{Im} f$, *donc* $\dim \operatorname{Im} f = 3$

donc $rg(f) = 3$, *et par conséquent* $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Proposition 9.3.7 *Soit* f *est une application linéaire de* E *dans* F. *On a les équivalences suivantes*

$$\begin{aligned}
f \text{ surjective} &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \\
f \text{ injective} &\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}.
\end{aligned}$$

Exemple 9.3.8 *Dans l'exemple précédent, on a* $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, *donc* f *est surjective.*

Montrons que f *est injective*

$$\begin{aligned}
\ker f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/f(x,y,z) = (0,0,0)\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/-x+y=0 \text{ et } x-3z=0 \text{ et } y=0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x=0 \text{ et } z=0 \text{ et } y=0\right\} \\
&= \{(0,0,0)\}.
\end{aligned}$$

Donc f est injective , par conséquent f bijective.

9.4 Applications linéaire sur des espaces de dimension finie

Proposition 9.4.1 *Soit E et F deux $\Bbbk-$espaces vectotiels et f et g deux applications linéaires de E dans F . Si E est de dimension finie n et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E alors*

$$\forall k \in \{1, 2, 3, ..., n\}\,,\ f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) = g(x)$$

Preuve.

1. On a E est engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, donc $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Bbbk$:

   $$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_{2+} ... + \lambda_n e_n$$

   comme f et g sont applications linéaires alors

   $$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_{2+} ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(e_n) \\ g(x) &= g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_{2+} ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + ... + \lambda_n g(e_n) \end{aligned}$$

   donc si on suppose que $\forall k \in \{1, 2, 3, ..., n\}\,,\ f(e_k) = g(e_k)$, on déduit alors que $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

2. Si $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$, et comme $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ famille génératrice de E, alors $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Bbbk$:

   $$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_{2+} ... + \lambda_n e_n$$

donc

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_{2+} ... + \lambda_n e_n) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_{2+} ... + \lambda_n e_n)$$

on a f et g sont applications linéaires alors

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + ... + \lambda_n g(e_n)$$

on déduit que $\forall k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, $f(e_k) = g(e_k)$.

□

Cette proposition montre qu'une application linéaire sur un espace de dimension finie est déterminée de maniére unique par ses valeurs sur une base de E.

Exemple 9.4.2 *Soit* f *une application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *telleque* $f(1,0) = (2,1),\ f(0,1) = (-1,-1)$

alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) = (x,0) + (0,y)$$

donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= x(2,1) + y(-1,-1) \\ &= (2x - y, x - y). \end{aligned}$$

Théoréme 9.4.3 *Soit f est une application linéaire de E dans F avec dimension de E finie, on a*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Exemple 9.4.4 *Pour l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & (-x+y, x-3z, y). \end{array}$$

On avait montré que $\dim \ker f = 0$ *et* $\dim \operatorname{Im} f = 3$, *on voit bien que*

$$\dim \ker f = 0 + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3.$$

Proposition 9.4.5 *Soit f est une application linéaire de E dans F avec* $\dim E = \dim F < +\infty$. *On a alors les équivalences suivantes*

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme } &\Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim F \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow \dim kef = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}. \end{aligned}$$

De cette proposition, on déduit que si f est un isomorphisme de E dans F avec $\dim E$ finie alors nécessairement $\dim E = \dim F$, on d'autre termes si $\dim E \neq \dim F$ alors f ne peut être un isomorphisme.

Exemple 9.4.6 *Considerons l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightarrow & (2x-y, x-y). \end{array}$$

On remarque que $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}^2$, *donc* f *peut être un isomorphisme. Pour vérifier utilisons une des équivalences de la proposition, par exemple cherchons* $\ker f$

$$\begin{aligned}
\ker f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (0,0)\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2x - y = 0 = \textit{et } x - y = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2x = y \ \textit{ et } y = x\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2x = 0 \ \textit{ et } y = 0\right\} \\
&= \{(0,0)\}.
\end{aligned}$$

donc f *est un isomorphisme.*

9.5 Exercices

Exercice 9.5.1 *On considère les familles de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *suivantes :*

$F_1 = \{u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,2,0)\}$, $F_2 = \{v_1 = (1,0,-1), v_2 = (2,1,1), v_3 = (3,0,0)\}$ *et* $F_3 = \{w_1 = (1,1,2), w_2 = (1,3,1), w_3 = (0,0,1), w_4 = (2,4,0)\}$

Déterminer les familles libres, les familles génératrices de $\mathbb{R}^3$ *et les bases de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.5.2 *Soient* $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \textit{ et } 2x - y - z = 0\}$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ *deux sous ensembles de* $\mathbb{R}^3$ *et* $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,1)$, $w = (0,1,1)$.

1. Montrer que E *et* F *sont deux sous espaces vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

2. Determiner une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

3. Montrer que $\{v, w\}$ est une base de F.

4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

5. Soit $X = (x, y, z)$, exprimer X dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice 9.5.3 *Soit l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & -2x. \end{array}$$

-Montrer que f est linéaire.

-Monter que f est un isomorphisme.

9.5.1 Solutions des exercices

Exercice. 9.6.1

$-$Pour F_1 :

-F_1 est-elle libre ?

Soient α et β deux réels

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc, F_1 est une famille libre.

-F_1 est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$ **?**

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. est ce qu'il existe deux réels a et b tel que : $u = au_1 + bu_2$?

on a :

$$u = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b........(1) \\ y = a + 2b.......(2) \\ z = 3a...........(3) \end{cases}$$

L'équation (3) donne $a = \frac{z}{3}$ et les deux autres équations donne $b = y - x$ et $a = 2x - y$.

Donc pour les vecteurs $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ où $2x - y \neq \frac{z}{3}$, on ne peut pas trouver deux scalaires a et b tel que : $u = au_1 + bu_2$.Par exemple on prend $u = (4, 2, 1)$

Ce qui montre que F_1 n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Alors F_1 ne forme pas une base de $\mathbb{R}^3$.

$-$Pour F_2 **:**

-F_2 est-elle libre ?

Soient α, β et γ trois réels

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ \beta \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc, F_2 est une famille libre.

F_2 est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$ **?**

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. est ce qu'il existe trois réels a, b et c tel que : $u = av_1 + bv_2 + cv_3$?

on a :

$$u = av_1 + bv_2 + cv_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2b + 3c \\ y = b \\ z = -a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{3}(x - 3y + z) \\ b = y \\ a = y - z \end{cases}$$

Donc, pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut trouver trois scalaires $a = y - z, b = y$ et $c = \frac{1}{3}(x - 3y + z)$ tel que : $u = av_1 + bv_2 + cv_3$.

Ce qui montre que F_2 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Alors F_2 forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$-$Pour F_3 **:**

-F_3 est-elle libre **?**

F_3 n'est pas une famille libre, car $w_4 = w_1 + w_2 - 3w_3$

-F_3 est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$ **?**

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. est ce qu'il existe trois réels a, b, c et d tel que : $u = aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4$?

on a :

$$u = aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b + 2d \\ y = a + 3b + 4d \\ z = 2a + b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - d \\ b = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - d \\ c = \frac{1}{2}y + z - \frac{5}{2}x + 3d \end{cases}$$

Donc, pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut trouver quatre scalaires $a = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - t, b = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - t, c = \frac{1}{2}y + z - \frac{5}{2}x + 3t$ et $d = t$ tel que : $u = aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4$.

Ce qui montre que F_3 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Comme F_3 est liée, alors elle ne forme pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice.9.6.2

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \ et \ 2x - y - z = 0\}$,

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ et $u = (1, 1, 1)$,

$v = (1,0,1)\,,\ w = (0,1,1)\,.$

1. Montrer que E et F sont deux sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(i)-$0_{\mathbb{R}^3} \in E$, $0_{\mathbb{R}^3} \in F$:

on a : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E$, car $0+0-2\times 0 = 0$ et $2\times 0 - 0 - 0 = 0$

et on a aussi : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$, car $0+0-0=0$

(ii)-$\alpha u_1 + \beta u_2' \in E, \alpha v_1 + \beta v_2' \in F$:

Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2' = (x_1', y_1', z_1')$ deux vecteurs de E et $v_1 = (x_2, y_2, z_2)$ et $v_2' = (x_2', y_2', z_2')$ deux vecteurs de F et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donc,

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \text{ et } 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ x_1' + y_1' - 2z_1' = 0 \text{ et } 2x_1' - y_1' - z_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\,(x_1 + y_1 - 2z_1) = 0 \text{ et } \alpha\,(2x_1 - y_1 - z_1) = 0 \\ \beta\,(x_1' + y_1' - 2z_1') = 0 \text{ et } \beta\,(2x_1' - y_1' - z_1') = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_1') + (\alpha y_1 + \beta y_1') - 2\,(\alpha z_1 + \beta z_1') = 0 \text{ et}$$

$$2\,(\alpha x_1 + \beta x_1') - (\alpha y_1 + \beta y_1') - (\alpha z_1 + \beta z_1') = 0$$

$$\Rightarrow u_1 + u_2' = (\alpha x_1 + \beta x_1', \alpha y_1 + \beta y_1', \alpha z_1 + \beta z_1') \in E$$

et

$$\begin{cases} x_2 + y_2 - z_2 = 0 \\ \\ x_2' + y_2' - z_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\left(x_2 + y_2 - z_2\right) = 0 \\ \\ \beta\left(x_2' + y_2' - z_2'\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\alpha x_2 + \beta x_2'\right) + \left(\alpha y_2 + \beta y_2'\right) - \left(\alpha z_2 + \beta z_2'\right) = 0$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2' = \left(\alpha x_2 + \beta x_2', \alpha y_2 + \beta y_2', \alpha z_2 + \beta z_2'\right) \in F$$

de (i) et (ii) on déduit que E et F sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2. Determiner une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

Soit $k = (x, y, z) \in E$, alors :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2z \\ \\ 2\left(-y + 2z\right) - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2z \\ \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ \\ y = z \end{cases}$$

donc

$$k = (x, y, z) = (z, z, z) = z\,(1, 1, 1)$$

E est génératrice par la famille $\{u = (1, 1, 1)\}$ et comme $u \neq 0$, alors elle forme une base de E et on a : $dimE = 1$

3. Montrer que $\{v, w\}$ est une base de F.

Soit $k = (x, y, z) \in F$, alors :

$$x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$$

donc

$$k = (x, y, z) = (x, y, x + y) = x\,(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 1)$$

$$= xv + yw$$

F est génératrice par la famille $\{v = (1, 0, 1)\,, w = (0, 1, 1)\}$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha v + \beta w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors la famille $\{v = (1, 0, 1)\,, w = (0, 1, 1)\}$ est libre.

alors elle forme une base de E et on a : $dimE = 2$

4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Il faut montrer que $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $E + F = \mathbb{R}^3$

(a) $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$: Soit $k = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$k = (x, y, z) \in E \cap F \Leftrightarrow (k = (x, y, z) \in E \quad \text{et} \quad k = (x, y, z) \in F)$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0 \quad \text{et} \quad x + y - z = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \ldots\ldots. (1) \\ 2x - y - z = 0 & \ldots\ldots. (2) \\ x + y - z = 0 & \ldots\ldots. (3) \end{cases}$$

De l'eq (3) on obtient : $z = x + y$, on remplace dans (1) et (2), on trouve :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

donc,

$$z = x = y = 0$$

Alors, le seul vecteur de $E \cap F$ est le vecteur nul, donc $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$.

(b) $E + F = \mathbb{R}^3$: il faut montrer que n'importe quel vecteur $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme : $u_3 = (x_3, y_3, z_3) = u_1 + u_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ où

$u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \\ 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \\ 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = z_1 = x_3 + y_3 - z_3 \\ x_2 = -2x_3 - y_3 + 3z_3 \\ y_2 = -x_3 + z_3 \\ z_2 = -x_3 - y_3 + 2z_3 \end{cases}$$

De (a) et (b) on déduit que : $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Remarque :

Pour montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$, on peut montrer que : la famille $\{u, v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Soit $X = (x, y, z)$, exprimer X dans la base $\{u, v, w\}$.

On cherche α, β et γ tel que : $X = (x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$$X = (x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha + \gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - \alpha \\ \gamma = y - \alpha \\ \alpha + (x - \alpha) + (y - \alpha) = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -y + z \\ \gamma = -x + z \\ \alpha = x + y - z \end{cases}$$

Exercice 9.6.3

Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & -2x. \end{array}$$

-f est linéaire car $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= -2(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda(-2x) + \mu(-2y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

-f est un isomorphisme , en effet : f est évidement bijective (l'application réciproque $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x$).

Bibliographie

[1] *Kada Allab, "Elements d'analyse", Entreprise Nationale, 1990.*

[2] *Nicolas Bourbaki, " Sur certains espaces vectoriels topologiques ", Annales de l'Institut Fourier, vol. 2, 1950.*

[3] *Nicolas Bourbaki," Espaces vectoriels topologiques", Masson, 1981, 3e éd.*

[4] *René Cori et Daniel Lascar, "Logique mathématique", tomes 1 , Masson, 2003.*

[5] *René David, Karim Nour et Christophe Raffalli, "Introduction à la logique", Cours et exercices corrigés, Dunod, 2001.*

[6] *Yannis Delmas-Rigoutsos et René Lalement, "La Logique ou l'art de raisonner", Paris, Le Pommier, 2000.*

[7] *C.Djabbour, "AnalyseI", OPU, Oran, 2006.*

[8] *Dominique Flament, "Histoire des nombres complexes : Entre algèbre et géométrie", Paris, CNRS Éditions, 2003.*

[9] *Roger Godement," Cours d'algèbre", Edition, 2. Publisher, Hermann, 1966.*

[10] *Xavier Gourdon, "Les maths en tête ", Analyse, Ellipses, 2008.*

[11] *Amara Hitta,"Cours d'algebre et exercices corriges",OPU,1994.*

[12] *Marie Josée et Durand Richard, "Nombre, grandeur, quantité, opérations : de la transformation conjointe de leurs significations ", 1998.*

[13] *William Kahan, "Branch cuts for complex elementary functions or Much ado about nothing's sign bit ", The State of the Art in Numerical Analysis, Clarendon Press, 1987.*

[14] *René Lalement, "Logique, réduction, résolution",Publisher, Masson, 1990.*

[15] *Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès,"Cours de mathématiques", t. 2 : Analyse, Bordas, 1977, 4e éd.*

[16] *Serge Lang, "Structures algébriques", Paris, InterEditions, 1976.*

[17] *Reinhold Remmert, " Les nombres complexes, Le théorème fondamentale de l'algèbre ", Vuibert, 1998.*

[18] *Michel de Rougemont et Richard Lassaigne," Logique et fondements de l'informatique", Hermes Science Publications, 1997.*

[19] *M.H.Mortad,"Exercices corrigés d'Algèbre", Dar el Bassair, Alger, 2013.*

[20] *M.H.Mortad,"Exercices corrigés d'Analyse", Edition Houma, Alger, 2011.*

[21] *E. Study et É. Cartan, " Les nombres complexes ", Sci. Math., vol. 1, t. 1, 1908.*