

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Support de cours du module

Maths I

Par

HARRAT CHAHRAZED

Domaine : Sciences et technologie.

Version : 2018

Introduction

L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse et algèbre accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse et algèbre de la licence. Ce support de cours est à destination exclusive des étudiants de la première année : chimie, physique, génie de l'eau, domaine sciences et technologie.

Le cours est commencé par la méthode du raisonnement mathématique, puis on s'intéresse à la théorie des ensembles, les relations et les applications. On étudie les structures algébriques, les nombres complexes. On donne la notion de la limite, la continuité et dérivabilité des fonctions réelles à une variable réelle, puis application aux fonctions élémentaires et leurs développements limités. Le dernier chapitre est consacré à l'algèbre linéaire.

J'essaierai également dans la mesure du possible de fournir l'essentiel des résultats de chaque chapitre. Je fournirai autant d'exemples et des figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours.

Il s'agit du polycopié d'un cours que j'ai donné pour les étudiants de la première

année chimie à l'université USTO-MB en (2009-2010) et (2010-2011), les étudiants de la première année de génie de l'eau en (2011-2012) et (2012-2013), et les étudiants de la première année socle commun en (2014-2015). J'espère que ce polycopié sera utile.

Table des matières

1	Méthode du raisonnement mathématique	5
1.1	Raisonnement direct	5
1.2	Contraposée	6
1.3	Absurde	7
1.4	Contre-exemple	8
1.5	Récurrence	9
1.6	Exercices	10
1.6.1	Solutions des exercices	10
2	Théorie des ensembles	14
2.1	Ensemble	14
2.2	Inclusion	15
2.3	Égalité de deux ensembles	15
2.4	Différence de deux ensembles	16
2.5	Opérations sur les ensembles	16
2.5.1	Réunion	16
2.5.2	L'intersection	17
2.5.3	La différence symétrique	18
2.6	Propriétés des opérations sur les ensembles	19
2.6.1	Commutativité	19
2.6.2	Associativité	19
2.6.3	Distributivité	20
2.7	Lois de Morgan	20
2.8	Produit d'ensembles	21
2.9	Exercices	22
2.9.1	Solutions des exercices	23

3	Les relations et les applications	28
3.1	Relation binaire dans un ensemble	28
3.2	Propriétés des relations binaires dans un ensemble	29
3.3	Classe d'équivalence	31
3.4	Notion d'application	32
3.5	Surjection	33
3.6	Injection	33
3.7	Bijection	34
3.8	Composition des applications	34
3.9	Image directe et image réciproque	35
3.9.1	Image directe	35
3.9.2	Image réciproque	36
3.10	Propriétés des applications	37
3.11	Exercices	39
3.11.1	Solutions des exercices	40
4	Structures algébriques.	45
4.0.2	Groupe	46
4.0.3	Anneaux	46
4.0.4	Corps	47
4.1	Exercices	48
4.1.1	Solutions des exercices	49
5	Les nombres complexes	52
5.0.2	Représentation graphique	52
5.0.3	Module-argument	52
5.0.4	Comment calculer θ et r	53
5.0.5	Opérations sur les nombres complexes	54
5.0.6	Formule de Moivre	55
5.0.7	Résolution de l'équation de second degré	57
5.1	Exercices	58
5.1.1	Solutions des exercices	59
6	Les fonctions réelles à une variable réelle	62
6.1	Généralités	62
6.1.1	Sens de variation	62
6.1.2	Parité, périodicité	63
6.2	Limites	63
6.2.1	Limite à droite, limite à gauche	63
6.2.2	Propriétés des limites	66

6.2.3	Opérations algébriques	67
6.2.4	Fonctions équivalentes	67
6.2.5	Fonctions équivalentes classiques	68
6.3	Continuité	69
6.3.1	Prolongement par continuité	69
6.3.2	Continuité sur un intervalle	70
6.3.3	Opérations sur la continuité	70
6.3.4	Image d'un intervalle par une fonction continue	71
6.3.5	Image d'un intervalle fermé	71
6.3.6	Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.	72
6.4	Dérivabilité	72
6.4.1	Dérivée en un point	72
6.4.2	Fonction dérivée	73
6.4.3	Interprétations	73
6.4.4	Propriétés	74
6.4.5	Opérations sur les fonctions dérivables	74
6.4.6	Dérivées successives	74
6.4.7	Formule de Leibniz	76
6.4.8	Fonction composée de deux fonctions dérivables	77
6.4.9	Dérivée d'une fonction réciproque	77
6.4.10	Variation d'une fonction dérivable	77
6.4.11	Extremum	78
6.4.12	Théorème de Rolle et des accroissements finis	78
6.4.13	Formule des accroissements finis	79
6.4.14	Règle de l'Hopital	80
6.5	Exercices	81
6.5.1	Solutions des exercices	82
7	Application aux fonctions élémentaires	84
7.1	Fonction inverse des fonctions trigonométriques	84
7.1.1	Fonction arcsinus	84
7.1.2	Fonction arccosinus	86
7.1.3	Fonction arctan(x)	87
7.1.4	Fonction arccot(x)	89
7.2	Fonctions hyperboliques	90

7.2.1	Fonction cosh et sinh	90
7.2.2	Propriétés	91
7.2.3	Variation	92
7.2.4	Fonction tangente hyperbolique (tanh)	93
7.2.5	Propriétés	93
7.3	Les fonctions hyperboliques inverses	94
7.3.1	Fonction $\arg \cosh(x)$	94
7.3.2	Fonction $\arg \sinh(x)$	96
7.3.3	Fonction $\arg \tanh(x)$	97
7.4	Exercices	99
7.4.1	Solutions des exercices	100
8	Développements limités	102
8.1	Développement limité d'ordre n au voisinage de 0	103
8.2	Opérations sur les développements limités	107
8.3	Développement limité au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$ et au voisinage de l'infini	112
8.4	Application du développement limité	114
8.4.1	Calcul des limites	114
8.5	Position du graphe d'une fonction par rapport à l'asymptote	115
8.5.1	Développement généralisés	115
8.5.2	Position du graphe	116
8.6	Exercices	117
8.6.1	Solutions des exercices	118
9	Algèbre linéaire	120
9.1	Espace vectoriel	120
9.1.1	Espace vectoriel et sous espace vectoriel	120
9.1.2	Somme de deux sous espaces vectoriels	125
9.1.3	Somme directe de deux sous espaces vectoriels	125
9.1.4	Sous espace supplémentaires	126
9.2	Familles génératrices, familles libres et bases	126
9.3	Applications linéaires	131
9.4	Applications linéaire sur des espaces de dimension finie	135
9.5	Exercices	138
9.5.1	Solutions des exercices	139
	Bibliographie	152

Chapitre 1

Méthode du raisonnement mathématique

Le raisonnement mathématique est un outil qui fait appel à des règles de déduction, en faisant intervenir des définitions, des énoncés, des lois ou propositions où encore des résultats préalablement obtenus par un raisonnement. Il existe plusieurs types de raisonnement à savoir, le raisonnement direct, contraposé, par absurde, contre-exemple et par récurrence.

1.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple 1.1.1 Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Rappelons que l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} se constitue par la formule $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$ on obtient :

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} \\ &= \frac{pq' + p'q}{qq'} \end{aligned}$$

Or le numérateur $pq' + p'q$ est bien un élément de \mathbb{Z} , le dénominateur qq' est lui un élément de \mathbb{N}^* . Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme

$$a + b = \frac{p''}{q''}$$

ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est équivalente à « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ».

Donc, montrer que l'assertion l'assertion « $P \Rightarrow Q$ », revient à montrer l'assertion « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ » est vraie.

Exemple 1.2.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair.

Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

Alors

$$\begin{aligned}
 n^2 &= (2k+1)^2 \\
 &= 4k^2 + 1 + 4k \\
 &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\
 &= 2k' + 1, \quad (k' = 2k^2 + 2k)
 \end{aligned}$$

et donc n^2 est impair.

Conclusion : Nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemple 1.3.1 Soient $a, b \geq 0$. Montrer que

$$\text{si } \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ alors } a = b$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ et } a \neq b$$

Comme

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$$

alors

$$a + a^2 = b + b^2$$

cela conduit à

$$(a - b)(a + b) = -(a - b).$$

Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $(a - b)$ on obtient $a + b = -1$.

La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion :

$$\text{si } \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ alors } a = b.$$

1.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion « $\forall x \in E P(x)$ ».

Exemple 1.4.1 Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».

Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$, Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut pas obtenir 7.

1.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1. Montrons que l'assertion est vraie : pour $n = 0$.
2. Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n .
3. On démontre alors que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n + 1$.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.5.1 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Montrons que l'assertion est vraie : pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n .

Montrons que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n + 1$. est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n, \text{ car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1, \text{ car } 2^n > 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1 En utilisant le principe de raisonnement par contraposée montrer que :

$$\text{si } a^2 + 9 = 2^n \text{ alors } a \text{ est impair.}$$

Exercice 1.6.2 Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 1.6.3 Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n + 1)! - 1.$$

1.6.1 Solutions des exercices

Exercice 1.6.1

Par contraposée montrons que

si $a^2 + 9 = 2^n$ alors a est impair.

-Montrons que si a est pair alors $a^2 + 9 \neq 2^n$

$$a \text{ est pair} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}/a = 2k$$

$$\begin{aligned} a^2 + 9 &= (2k)^2 + 9 \\ &= 4k^2 + 9 \\ &= 2(2k^2 + 4) + 1 \\ &= 2k' + 1. \end{aligned}$$

Alors $a^2 + 9$ est impair, or 2^n est pair.

D'où

$$a^2 + 9 \neq 2^n.$$

Exercice 1.6.2

Par absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel donc $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^*(p$

et q sont premiers entre eux), tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{p}{q} &\Rightarrow p = \sqrt{2}q \\ &\Rightarrow p^2 = 2q^2/q^2 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow p^2 = 2k/k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow p^2 \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Montrons que

si p^2 est pair $\Rightarrow p$ est pair .

Par contraposée supposons que p est impair :

$$\exists k \in \mathbb{N} / p = 2k + 1$$

$$\exists k \in \mathbb{N} / p^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\exists k \in \mathbb{N} / p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$\exists k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N} / p^2 = 2k' + 1$$

alors p^2 est impair.

Donc

si p^2 est pair $\Rightarrow p$ est pair.

Et

$$p = \sqrt{2}q \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, 2k = \sqrt{2}q$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, q^2 = 2k^2$$

$$\Rightarrow \exists k'' = k^2 \in \mathbb{N}, q^2 = 2k''$$

$$\Rightarrow q^2 \text{ est pair}$$

$$\Rightarrow q \text{ est pair.}$$

D'où contradiction avec p et q sont premiers entre eux.

Alors $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 1.6.3

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n + 1)! - 1.$$

Montrons que l'assertion est vraie pour $n = 1$:

$$1.1! = 1 \text{ et } (1 + 1)! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Supposons que l'assertion est vraie jusqu'au l'ordre n :

$$1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n + 1)! - 1.$$

Montrons que l'assertion reste vraie pour l'ordre $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! + (n + 1).(n + 1)! &= (n + 1)! - 1 + (n + 1).(n + 1)! \\ &= (n + 1)!.(1 + n + 1) - 1 \\ &= (n + 1)!.(n + 2) - 1 \\ &= (n + 2)! - 1 \end{aligned}$$

donc est vraie pour l'ordre $n + 1$.

Chapitre 2

Théorie des ensembles

2.1 Ensemble

Définition 2.1.1 *Une collection ou ensemble est constitué par des objets ou éléments présentant une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer q'un objet appartient ou n'appartient pas à l'ensemble .*

Exemple 2.1.2 *On désigne par \mathbb{N} l'ensemble des enties naturels*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

L'ensemble des nombres pairs se notera

$$P = \{x/ x = 2n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble des nombres impairs se notera

$$K = \{x/ x = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble vide est noté

$$\emptyset = \{x/x \in E \text{ et } x \notin E\}.$$

2.2 Inclusion

On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B lorsque tout élément de A appartient à B et on note

$$A \subset B$$

i.e $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

Exemple 2.2.1 Si on désigne par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, on aura

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

et si on désigne par \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs et par \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / b \neq 0, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*, p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux} \right\}$$

nous aurons

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.3 Égalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

i.e.

$$\forall x, x \in E \iff x \in F.$$

2.4 Différence de deux ensembles

La différence de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F , noté $E - F$

$$E - F = \{x / x \in E \text{ et } x \notin F\},$$

si $F \subset E$ alors $E - F$ est encore appelée complémentaire de F dans E , il est noté C_E^F ou F^c .

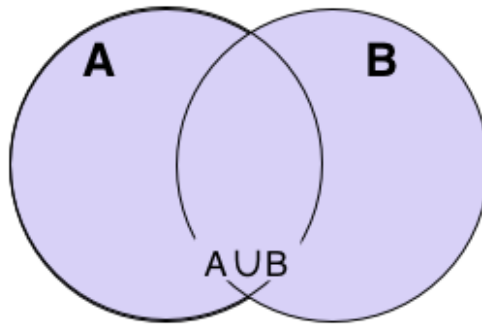
2.5 Opérations sur les ensembles

2.5.1 Réunion

Définition 2.5.1 *La réunion des deux ensembles A et B est l'ensemble C des éléments qui appartient à A ou B , on écrit*

$$C = A \cup B \text{ (ce lit } C \text{ égale } A \text{ union } B)$$

$$\text{i.e. } x \in C = A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$



2.5.2 L'intersection

Définition 2.5.2 *L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble C des éléments qui appartient à A et B, on écrit*

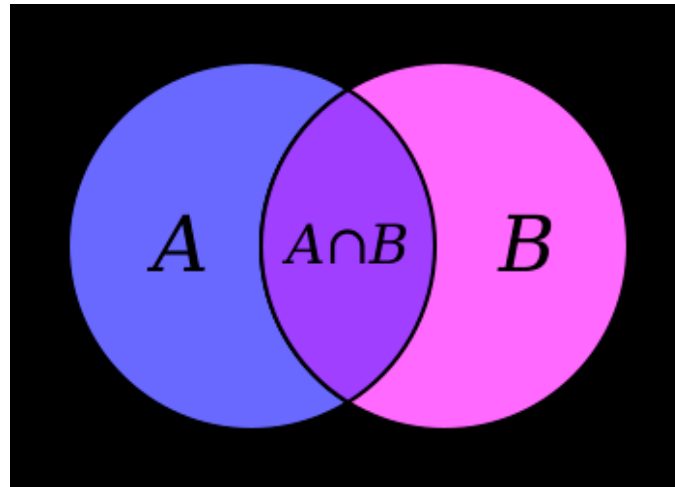
$$C = A \cap B \text{ (ce lit } C \text{ égale } A \text{ inter } B \text{).}$$

$$x \in C = A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Remarque 2.5.3 *Si A et B n'ont pas des éléments commun, on dit qu'ils sont dis-joints, alors $A \cap B = \emptyset$.*

Exemple 2.5.4 *L'ensemble des nombres naturels pairs et l'ensemble des nombres naturels impairs ont une intersection vide.*

Remarque 2.5.5 *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$*



1.

$$A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A$$

2.

$$B = C_E^A \iff A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

3.

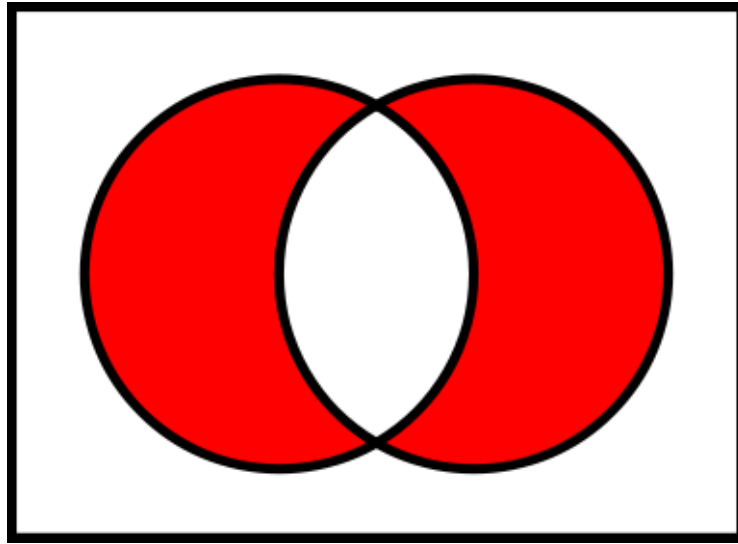
$$A - B = A \cap B^c.$$

2.5.3 La différence symétrique

Définition 2.5.6 La différence symétrique de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A , soit à B , mais pas aux deux à la fois. C'est la différence de $A \cup B$ et de $A \cap B$, noté $A \Delta B$.

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

$A \Delta B$ des ensembles A et B est l'ensemble coloré en rouge.



2.6 Propriétés des opérations sur les ensembles

2.6.1 Commutativité

Quels que soient les ensembles A et B

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A.$$

2.6.2 Associativité

Quels que soient les ensembles A , B et C

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

2.6.3 Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

l'intersection et la réunion sont distributives l'une par rapport à l'autre.

2.7 Lois de Morgan

$$- (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$- (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Preuve. -Montrons la première loi :

On montre $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ et $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

D'abord $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

Soit $x \in (A \cap B)^c \implies x \notin A \cap B$

dans ce cas

$$1. x \in A \text{ et } x \notin B \implies x \in A \text{ et } x \in B^c \implies x \in A^c \cup B^c$$

$$2. x \notin A \text{ et } x \in B \implies x \in A^c \text{ et } x \in B^c \implies x \in A^c \cup B^c$$

$$3. x \notin A \text{ et } x \notin B \implies x \in A^c \text{ et } x \in B^c \implies x \in A^c \cup B^c$$

de 1,2 et 3 on a $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

Inversement montrons que $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

Soit $x \in A^c \cup B^c \implies x \in A^c$ ou $x \in B^c$

1. si $x \in A^c \implies x \notin A \implies x \notin A \cap B \implies x \in (A \cap B)^c$

2. si $x \in B^c \implies x \notin B \implies x \notin A \cap B \implies x \in (A \cap B)^c$

d'où $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

-Montrons la deuxième loi :

D'abord $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Soit $x \in (A \cup B)^c \implies x \notin A \cup B$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$,

alors $x \in A^c$ et $x \in B^c \implies x \in A^c \cap B^c$.

D'où $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Inversement montrons que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

Soit $x \in A^c \cap B^c \implies x \in A^c$ et $x \in B^c$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$,

alors $x \notin A \cup B \implies x \in (A \cup B)^c$.

D'où $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. □

2.8 Produit d'ensembles

Soient A et B deux ensembles, a, b deux éléments tels que $a \in A$ et $b \in B$.

L'ensemble des couples (a, b) pris dans cet ordre est appelé l'ensemble produit cartésien des ensembles A et B . On note

$$A \times B.$$

Remarque 2.8.1 Si A et B sont des ensembles finis et si on désigne par :

$\text{card}(A)$: le nombre des éléments de A ,

$\text{card}(B)$: le nombre des éléments de B ,

on aura : $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

2.9 Exercices

Exercice 2.9.1 1-Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut on écrire :

$$1) \quad a \in E$$

$$2) \quad a \subset E$$

$$3) \quad \{a\} \subset E$$

$$4) \quad \emptyset \in E$$

$$5) \quad \emptyset \subset E$$

$$6) \quad \{\emptyset\} \subset E$$

2-Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

-Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$.

Exercice 2.9.2 Soient E et F deux ensembles. Montrer que :

$$P(E) = P(F) \Leftrightarrow E = F$$

($P(E)$ l'ensemble des parties de E).

Exercice 2.9.3 Montrer pour toutes parties A, B, C de E

$$1) A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B.$$

$$2) A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

2.9.1 Solutions des exercices

Exercice.1

1-

1) *vraie*

2) *faux*

3) *vraie*

4) *faux*

5) *vraie*

6) *faux.*

2-

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1) \\ , (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \end{array} \right\}.$$

Exercice.2

Montrons que $P(E) = P(F) \Leftrightarrow E = F$.

1- Montrons si $P(E) = P(F) \Rightarrow E = F$

Supposons $P(E) = P(F)$

$$P(E) = \{A / A \subset E\} = \wp(F) = \{B / B \subset F\}$$

$$1) \text{ soit } x \in E \Rightarrow \{x\} \subset E$$

$$\Rightarrow \{x\} \in P(E)$$

$$\Rightarrow \{x\} \in P(F), (P(E) = P(F))$$

$$\Rightarrow \{x\} \subset F$$

$$\Rightarrow x \in F$$

$$\Rightarrow E \subset F.$$

$$2) \text{ soit } y \in F \Rightarrow \{y\} \subset F$$

$$\Rightarrow \{y\} \in P(F)$$

$$\Rightarrow \{y\} \in P(E), (P(E) = P(F))$$

$$\Rightarrow \{y\} \subset E$$

$$\Rightarrow y \in E$$

$$\Rightarrow F \subset E.$$

D'où $E = F$.

2-Montrons si $E = F \Rightarrow P(E) = P(F)$.

Supposons $E = F$

$$1 - \text{ soit } A \in P(E) \Rightarrow A \subset E$$

$$\Rightarrow \overset{E=F}{A} \subset F$$

$$\Rightarrow A \in P(F)$$

$$\Rightarrow P(E) \subset P(F).$$

$$2 - \text{ soit } B \in P(F) \Rightarrow B \subset F$$

$$\Rightarrow \overset{E=F}{B} \subset E$$

$$\Rightarrow B \in P(E)$$

$$\Rightarrow P(F) \subset P(E).$$

D'où $P(E) = P(F)$.

Exercice.3

1) Montrer que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

1-1) Montrons $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

Supposons $A \cap B = A \cup B$

$$\text{Soit } x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B, (A \cap B = A \cup B)$$

$$\Rightarrow x \in B$$

$$\Rightarrow A \subset B.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } y \in B &\Rightarrow x \in B \cup A \\
 &\Rightarrow x \in A \cap B, (A \cap B = A \cup B) \\
 &\Rightarrow x \in A \\
 &\Rightarrow B \subset A.
 \end{aligned}$$

Alors $A = B$.

1-2) Montrons $A = B \Rightarrow A \cap B = A \cup B$.

Supposons $A = B$

$$A \cap B = A = B$$

$$A \cup B = A = B$$

Alors $A \cap B = A \cup B$.

2) Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

2-1) Montrons $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$.

Supposons $A \cup B = A \cap C$.

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \in B &\Rightarrow x \in B \cup A \\
 &\Rightarrow x \in A \cap C, (A \cup B = A \cap C) \\
 &\Rightarrow x \in A \\
 &\Rightarrow B \subset A.
 \end{aligned}$$

Soit $y \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow y \in A \cap C, (A \cup B = A \cap C)$

$\Rightarrow y \in C$

$\Rightarrow A \subset C.$

Alors $B \subset A \subset C.$

2-2) Montrons $B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C.$

Supposons $B \subset A \subset C,$

$$A \cup B = A$$

$$A \cap C = A.$$

Alors $A \cup B = A \cap C.$

Chapitre 3

Les relations et les applications

3.1 Relation binaire dans un ensemble

Définition 3.1.1 Soient $x \in E$, $y \in F$ et une relation \mathfrak{R} entre x et y est une correspondance entre x et y .

Lorsque le couple (x, y) vérifie la relation \mathfrak{R} , on note $x\mathfrak{R}y$.

Si x, y appartiennent au même ensemble E , la relation \mathfrak{R} est appelée relation binaire dans E .

Exemple 3.1.2 1. $x, y \in \mathbb{N}$, $x\mathfrak{R}y \iff x$ divise y , \mathfrak{R} relation binaire

2. $x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathfrak{R}y \iff x = y$

3. $A \subset E, B \subset E$, $A\mathfrak{R}B \iff A \subset B$.

3.2 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soient \mathfrak{R} une relation binaire dans un ensemble E et $x, y, z \in E$. On dit que \mathfrak{R} est

1. Réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E, x\mathfrak{R}x$
2. Symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$
3. Antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x \Rightarrow x = y$
4. Transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \Rightarrow x\mathfrak{R}z$.

Définition 3.2.1 Une relation est dite relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Une relation est dite relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 3.2.2 1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x = y$, est une relation d'équivalence et une relation d'ordre.

2. Soient $A, B \subset E \ A\mathfrak{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ est une relation d'ordre.

En effet :

$\forall A \subset E, A \subset A \Leftrightarrow \mathfrak{R}$ réflexive.

$\forall A, B \subset E, A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B \Rightarrow \mathfrak{R}$ est antisymétrique.

$\forall A, B, C \subset E, A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C \Rightarrow \mathfrak{R}$ est transitive .

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x \leq y$, est une relation d'ordre.

4. $\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \text{ est un multiple de } P \ (P \geq 1)$ est une relation d'équivalence, elle est appelée congruence modulo P et notée par

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \equiv y [P] \Leftrightarrow x - y = kP, k \in \mathbb{Z}.$$

Définition 3.2.3 Une relation d'ordre dans un ensemble E est dite d'ordre total si deux éléments quelconque de E sont comparable i.e.

$$\forall x, y \in E \text{ on a } x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x$$

et on écrit

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Une relation d'ordre qui n'est pas d'ordre total est dite d'ordre partiel.

Exemple 3.2.4 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y$

\mathcal{R} est réflexive $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x \Leftrightarrow x \mathcal{R} x)$.

\mathcal{R} est antisymétrique $\Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y)$.

\mathcal{R} est transitive $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

\mathcal{R} est une relation d'ordre.

L'ordre est total car $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

2. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$.

\mathcal{R} est une relation d'ordre. L'ordre est partiel car : soit $(1, 2), (3, 0) \in \mathbb{R}^2$

on a $(1, 2)$ ne pas en relation avec $(3, 0)$, et $(3, 0)$ ne pas en relation avec $(1, 2)$.

3.3 Classe d'équivalence

Soit \mathfrak{R} est une relation d'équivalence, on appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation \mathfrak{R} avec x on la note :

$$C_x \text{ ou } \bar{x},$$

$$C_x \text{ ou } \bar{x} = \{y \in E / x\mathfrak{R}y\}.$$

Définition 3.3.1 L'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de E est appelée ensemble quotient de E par \mathfrak{R} , il est noté E/\mathfrak{R} .

$$E/\mathfrak{R} = \{\bar{x}/x \in E\}.$$

Exemple 3.3.2 $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$

\mathfrak{R} est une relation d'équivalence, en effet

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - x^2 = x^4 - x^2 \Leftrightarrow x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow \mathfrak{R}$ réflexive.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \Rightarrow y^4 - y^2 = x^4 - x^2 \Leftrightarrow \mathfrak{R}$ symétrique.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \text{ et } y^4 - y^2 = z^4 - z^2 \Leftrightarrow \mathfrak{R}$ transitive.

Cherchons les classes d'équivalence de $0, 1, \frac{1}{2}$

$$\bar{0} = \{y \in \mathbb{R} / 0\mathfrak{R}y\}$$

$$0\mathfrak{R}y \Leftrightarrow 0^4 - 0^2 = y^4 - y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = -1$$

$$\bar{0} = \{-1, 0, 1\}.$$

$$\bar{1} = \{y \in \mathbb{R} / 1\Re y\}$$

$$1\Re y \Leftrightarrow 1^4 - 1^2 = y^4 - y^2$$

$$y = 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = -1$$

$$\bar{1} = \{-1, 0, 1\} = \bar{0}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{1}}{2} &= \left\{ y \in \mathbb{R} / \frac{1}{2}\Re y \right\} \\ \frac{1}{2}\Re y &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = y^4 - y^2 \\ &\Leftrightarrow y^4 - y^2 - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\left(y^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, y = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}, y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{1}}{2} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}, \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right\}. \end{aligned}$$

En général

$$\text{si } |x| > 1, \bar{x} = \{-x, x\}$$

$$\text{si } |x| < 1, \bar{x} = \left\{ -x, x, -\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

3.4 Notion d'application

On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F une loi de correspondance f permettant d'associer à tout $x \in E$ un élément $y \in F$.

E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble image .

L'élément y associé à x est l'image de x par f , on note

$$f : x \mapsto y / f(x) = y.$$

Exemple 3.4.1 *l'application $f : x \rightarrow y = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$ est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .*

3.5 Surjection

L'image $f(E)$ de E par f est en général une partie de F . Si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E , on dit que f est une application de E sur F ou encore que f est une application surjective, on a alors $f(E) = F$.

3.6 Injection

Lorsqu'à deux éléments distincts de E correspondent par f deux éléments distincts de F , f réalise une injection de E dans F . On dit encore que f est une application injective, on a alors

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

ou bien par contraposé

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 \neq x_2$$

3.7 Bijection

f est une application bijective si elle est surjective et injective, tout élément de F est l'image d'un élément de E et d'un seul.

Dans ce cas il existe une application inverse f^{-1} de F sur E , puisqu'à tout $y \in F$, on associe un élément x bien déterminé de E .

f^{-1} est l'application inverse ou réciproque de f

$$x \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y \xrightarrow{f^{-1}} x$$

f^{-1} est elle-même une bijection de F sur E et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple 3.7.1 $f(x) = a + x$, $x \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$

f est bijective, son inverse est $f^{-1}(y) = y - a$.

3.8 Composition des applications

Soient les ensembles E , F et G , et deux applications f et g de E dans F et de F dans G (*resp.*)

$$f : E \rightarrow F$$

$$g : F \rightarrow G$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

$$y \mapsto g(y) = z$$

on définit l'application composée $g \circ f$:

$$g \circ f : E \rightarrow G$$

$$x \mapsto g \circ f(x) = z.$$

Proposition 3.8.1 1. Si f et g sont injective \Rightarrow $g \circ f$ est injective

2. Si f et g sont surjective \Rightarrow $g \circ f$ est surjective

Preuve.

1. $\forall x_1, x_2 \in E, g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \stackrel{g \text{ injective}}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \stackrel{f \text{ injective}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$, d'où $g \circ f$ injective.

2. $g \circ f(E) = g(f(E)) \stackrel{f \text{ surjective}}{=} g(F) \stackrel{g \text{ surjective}}{=} G$, d'où $g \circ f$ surjective.

□

Remarque 3.8.2 La composée de deux bijections est une application bijective.

En particulier, la composition de $f : E \rightarrow F$ et sa réciproque $f^{-1} : F \mapsto E$ est l'application identique I sur E

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

3.9 Image directe et image réciproque

3.9.1 Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle image de A par f le sous ensemble de F , noté $f(A)$ telque

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$$

3.9.2 Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f le sous ensemble de E , noté $f^{-1}(B)$ telque

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 3.9.1 1. Soit f une application définie comme suit

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$$

$$x \mapsto 2 - x$$

-Trouver $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$

$$\begin{aligned} f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) &= \left\{f(x)/x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{2 - x/x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{2 - x/0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -x \leq 0 \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{2} \leq 2 - x \leq 2 \\ &\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2 - x \leq 2 \end{aligned}$$

alors

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{3}{2}, 2\right] \subset [0, 2].$$

2. Soit la fonction

$$g : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto (x - 1)^2$$

-calculer $g^{-1}(\{0\})$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0\}) &= \{x \in [0, 2] / f(x) \in \{0\}\} \\ &= \{x \in [0, 2] / (x - 1)^2 \in \{0\}\} \\ &= \{x \in [0, 2] / (x - 1)^2 = 0\} \\ &= \{1\}. \end{aligned}$$

3.10 Propriétés des applications

Soit $f : E \rightarrow F$

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \subset f(B)$

Démonstration

1. Soit $y \in f(A)$ alors $\exists x \in A / f(x) = y$

or $A \subset B \Rightarrow x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$ d'où $f(A) \subset f(B)$.

2. Soit

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B / f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A / f(x) = y \text{ ou } \exists x \in B / f(x) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \end{aligned}$$

d'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3. Soit

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B / y = f(x) \\ &\Rightarrow \exists x \in A / y = f(x) \text{ et } \exists x \in B / y = f(x) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B) \end{aligned}$$

d'où $f(A \cap B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Remarque 3.10.1 *On ne peut pas faire double inclusion car les x ne sont pas forcément dans le même ensemble.*

Exemple 3.10.2 *Soit*

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

$$A = [-1, 0], B = [0, 1], A \cap B = \{0\}$$

$$f(A) = [0, 1], f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}, f(A) \cap f(B) = [0, 1]$$

d'où $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Remarque 3.10.3 *l'égalité n'ayant lieu que si f est injective.*

Proposition 3.10.4 *Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$*

1. *Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.*
3. *Si $g \circ f$ est bijective alors f est injective et g est surjective.*

Démonstration.

1. Soient $x_1, x_2 \in E / f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (g est une application)

et comme $g \circ f$ est injective, alors $x_1 = x_2$

d'où f est injective.

2. On a

$$f(E) \subset F \Rightarrow g \circ f(E) \subset g(F) \subset G$$

or $g \circ f$ est surjective alors $g \circ f(E) = G$, ainsi $G \subset g(F) \subset G$

d'où

$$g(F) = G \text{ i.e. } g \text{ est surjective.}$$

3.11 Exercices

Exercice 3.11.1 *Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$. L'application f est-elle surjective ?

2. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$. L'application f est-elle injective ?

Exercice 3.11.2 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 3.11.3 Dans chacun des cas suivants la relation \mathfrak{R} définie sur E est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique ou transitive ?

1.

$$E = \mathbb{N} \text{ et } x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \frac{x + 2y}{3} \in \mathbb{N}.$$

2.

$$E = \mathbb{N} \text{ et } x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}; x = y^n.$$

3.11.1 Solutions des exercices

Exercice 3.11.1 L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

1)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 1\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{1 + x^2} = 1 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x + 1 = 0\} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - 4 \\ &= -3 < 0\end{aligned}$$

alors

$$f^{-1}(\{1\}) = \emptyset.$$

et f n'est pas surjective car 1 n'admet pas un antécédent .

2)

$$\begin{aligned}f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{3}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 1 = 0\} \\ &= \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}\end{aligned}$$

f n'est pas injective car $f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.11.2

Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(x^2 - 1) + 1\end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
 &= (2x + 1)^2 - 1 \\
 (g \circ f)(x) &= 4x^2 + 4x, \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Exercice 3.11.3

1) -a) \mathfrak{R} est réflexive :

$$\frac{x + 2x}{3} = x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \mathfrak{R} x$$

b) \mathfrak{R} est symétrique

$$\begin{aligned}
 x \mathfrak{R} y &\Leftrightarrow \frac{x + 2y}{3} \in \mathbb{N}. \\
 &\Rightarrow x + 2y = 3k / k \in \mathbb{N} \\
 &\Rightarrow x = 3k - 2y \\
 &\Rightarrow y + 2x = y + 6k - 4y \\
 &\Rightarrow y + 2x = 3(2k - y) \\
 &\Rightarrow \frac{y + 2x}{3} \notin \mathbb{N} \\
 &\Rightarrow y \text{ n'a pas une relation avec } x \\
 &\Rightarrow \mathfrak{R} \text{ n'est pas symétrique.}
 \end{aligned}$$

c) \mathcal{R} est antisymétrique

Soient $x = 1, y = 4$

$$\frac{1+8}{3} \in \mathbb{N}, \frac{4+2}{3} \in \mathbb{N} \not\Rightarrow 1 = 4.$$

Alors \mathcal{R} n'est pas antisymétrique.

d) \mathcal{R} est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N} \\ y \mathcal{R} z \Leftrightarrow \frac{y+2z}{3} \in \mathbb{N} \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 3k / k \in \mathbb{N} \\ y + 2z = 3k' / k' \in \mathbb{N} \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3k - 3y \\ 2z = 3k' - y \end{array} \right. \\ &\Rightarrow x + 2z = 3((k + k') - y) \\ &\Rightarrow x + 2z = 3(k'' - y) \\ &\Rightarrow \frac{x + 2z}{3} \notin \mathbb{N}. \\ &\Rightarrow x \text{ n'a pas une relation avec } z \\ &\Rightarrow \mathcal{R} \text{ n'est pas transitive.} \end{aligned}$$

2) $\forall x \in \mathbb{N}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}; x = y^n$

a) \mathcal{R} est réflexive

$$\exists n = 1 \in \mathbb{N}; x = x \Leftrightarrow x \mathcal{R} y.$$

b) \mathcal{R} est symétrique

$$\begin{aligned}
 x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}; x = y^n \\
 &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}; y = x^{\frac{1}{n}} \\
 &\Rightarrow \exists n' \notin \mathbb{N}; y = x^{n'} \\
 &\Rightarrow \mathcal{R} \text{ n'est pas symétrique.}
 \end{aligned}$$

c) \mathcal{R} est antisymétrique

$$\begin{cases}
 x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}; x = y^n \\
 y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}; y = x^{n'}
 \end{cases}
 \begin{aligned}
 &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}; \exists n' \in \mathbb{N}; x = x^{n'n} \\
 &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}; \exists n' \in \mathbb{N}; nn' = 1 \\
 &\Rightarrow n = n' = 1 \\
 &\Rightarrow x = y \\
 &\Rightarrow \mathcal{R} \text{ est antisymétrique.}
 \end{aligned}$$

d) \mathcal{R} est transitive

$$\begin{cases}
 x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}; x = y^n \\
 y\mathcal{R}z \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}; y = z^{n'}
 \end{cases}
 \begin{aligned}
 &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}; \exists n' \in \mathbb{N}; x = z^{n'n} \\
 &\Rightarrow \exists n'' = nn' \in \mathbb{N}; x = z^{n''} \\
 &\Rightarrow x\mathcal{R}z \\
 &\Rightarrow \mathcal{R} \text{ est transitive.}
 \end{aligned}$$

Chapitre 4

Structures algébriques.

Définition 4.0.4 (*Loi interne*)

Soit G un ensemble, on appelle loi interne sur G toute application de $G \times G$. On note une loi interne par $*$, Δ .

Exemple 4.0.5 1. L'addition est une loi interne sur \mathbb{R} , de même pour la multiplication dans \mathbb{R} .

2. L'application

$$* : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$(a, b) \rightarrow a + b - 2ab$$

est une loi interne dans $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ car $\forall a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \forall b \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$,

on a : $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$.

Définition 4.0.6 Soit G un ensemble et $*$ une loi interne

1. $*$ est dite commutative si et seulement si $\forall x, y \in G : x * y = y * x$

2. $*$ est dite associative si et seulement si $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$
3. $*$ admet un élément neutre si et seulement si $\exists e \in G / \forall x \in G : x * e = e * x = x$
4. soit $x \in G$, on dit qu'un élément $x' \in G$ est l'élément inverse ou symétrique de x si et seulement si $x * x' = x' * x = e$ (e est élément neutre).

4.0.2 Groupe

On appelle groupe un ensemble G muni d'une opération interne $*$ telle que

1. $(*)$ est associative
2. $(*)$ admet un élément neutre
3. tout élément de G admet un inverse dans G .

Remarque 4.0.7 Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif (ou abélien).

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif
2. (\mathbb{R}, \times) n'est pas un groupe car le 0 n'admet pas d'inverse
3. (\mathbb{R}^*, \times) est un groupe commutatif.

4.0.3 Anneaux

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne $(*)$ et (Δ) . On dit que $(A, *, \Delta)$ est un anneau si :

1. $(A, *)$ est un groupe commutatif
2. $\forall x, y, z \in A : x \Delta (y * z) = (x \Delta y) * (x \Delta z)$
3. (Δ) est associative.

Si de plus (Δ) admet un élément neutre on dit que $(A, *, \Delta)$ est un anneau unitaire.

4.0.4 Corps

Soit \mathbb{k} un ensemble muni de deux lois interne $(*)$ et (Δ) , on dit que $(\mathbb{k}, *, \Delta)$ est un corps si :

1. $(\mathbb{k}, *, \Delta)$ est un anneau unitaire
2. $(\mathbb{k} - \{e\}, \Delta)$ est un groupe ou e désigne l'élément neutre de $(*)$.

Si de plus (Δ) est commutative, on dit que $(\mathbb{k}, *, \Delta)$ est un corps commutatif.

Exemple 4.0.8 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

Il existe un corps plus grand que le corps des nombres réels, c'est le corps des nombres complexes.

4.1 Exercices

Exercice 4.1.1 I- Soit $*$ la loi définie dans \mathbb{R} par

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

a) Vérifier que $*$ est commutative, non associative, et admet un élément neutre.

b) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$1) 2 * x = 5$$

$$2) x * x = 1$$

II- On définit sur \mathbb{R} la loi

$$x * y = x + y - xy$$

-Etudier l'associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, existence d'élément symétrique.

Exercice 4.1.2 On définit sur $\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$ la loi

$$x * y = x + y + 2xy$$

-Montrer que $*$ est interne.

-Montrer que $(\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4.1.3 On définit sur \mathbb{Q} deux lois de composition internes $(*)$ et (Δ) comme suit

$$\begin{cases} a * b = a + b - 1 \\ a \Delta b = a + b - ab \end{cases}$$

-Montrer que $(\mathbb{Q}, *, \Delta)$ est un corps.

4.1.1 Solutions des exercices

Exercice 4.1.1

a) $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

-* est commutative $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = y * x$ ce qui est vraie

-* est associative $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z)$

on trouve $(x * y) * z \neq x * (y * z)$.

-* admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$

on utilise une seule équation car * est commutative.

$$x * e = x \Leftrightarrow xe + (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x \Rightarrow e = 1.$$

b) $-2 * x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{4}{3}$.

$$-x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1, \text{ ou } x = -1.$$

II- $x * y = x + y - xy$

-* est associative $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z)$

on a $(x * y) * z = x * (y * z)$ vraie

-* est commutative $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = y * x$ ce qui est vraie.

-* admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$

on utilise une seule équation car * est commutative.

$$x * e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x \Leftrightarrow e = 0.$$

-Chaque élément x de \mathbb{R} admet un élément symétrique.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x * x' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{-x}{1-x}$ pour $x \neq 1$.

1 n'admet pas un élément neutre, donc tout les élément de \mathbb{R} n'ont pas un inverse.

Exercice 4.1.2 : sur $\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$, $x * y = x + y + 2xy$

1) $*$ est interne $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, x * y \in \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$

i.e. $\forall x \neq \frac{-1}{2}, \forall y \neq \frac{-1}{2}, x * y \neq \frac{-1}{2}$.

Par absurde :

Supposons que $x * y = \frac{-1}{2}$ avec $x \neq \frac{-1}{2}, y \neq \frac{-1}{2}$

$$x * y = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x + y + 2xy = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + y + 2xy = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + y(1 + 2x) = 0$$

$$x + \frac{1}{2} + 2y(\frac{1}{2} + x) = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})(1 + 2y) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ ou } y = \frac{-1}{2} \text{ contradiction.}$$

Alors $x * y \neq \frac{-1}{2}$.

$$2) (\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, *) \text{ est un groupe commutatif} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} * \text{ est interne} \\ * \text{ est commutative} \\ * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un élément neutre} \\ \text{chaque élément admet un inverse} \end{array} \right.$$

- $*$ est interne d'après la question 1).

- $*$ est commutative $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, x * y = y * x$ ce qui est vraie

- $*$ est associative $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, (x * y) * z = x * (y * z)$

- $*$ admet un élément neutre $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, \forall x \in \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, x * e = e * x = x$

on utilise une seule équation car $*$ est commutative. $x * e = x \Rightarrow e = 0$

-Chaque élément x de $\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$ admet un élément symétrique.

$$\forall x \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \exists x' \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * x' = 0$$

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{-x}{2x+1}.$$

Montrons que $\frac{-x}{2x+1} \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par l'absurde :

Supposons que $\frac{-x}{2x+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 = 0$ impossible, donc

$$\frac{-x}{2x+1} \neq -\frac{1}{2}$$

et alors $(\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4.1. 3 :

$$\begin{array}{l}
 (\mathbb{Q}, *, \Delta) \text{ est un corps} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{Q}, *, \Delta) \text{ anneau unitaire} \\ \text{chaque élément de } \mathbb{Q} - \{e\} \text{ admet un inverse par rapport à } \Delta \\ (\mathbb{Q}, *) \text{ est un groupe commutatif} \end{array} \right. \\
 (\mathbb{Q}, *, \Delta) \text{ anneau unitaire} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{Q}, *) \text{ est un groupe commutatif} \\ \Delta \text{ est associative} \\ \Delta \text{ est distributive sur } * \text{ à gauche et à droite} \\ \Delta \text{ admet un élément neutre} \end{array} \right. \\
 (\mathbb{Q}, *) \text{ est un groupe commutatif} \left\{ \begin{array}{l} * \text{ est interne} \\ * \text{ est commutative} \\ * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un élément neutre } e = 1 \\ \text{chaque élément de } \mathbb{Q} \text{ admet un inverse par rapport à } * \end{array} \right.
 \end{array}$$

Chapitre 5

Les nombres complexes

Définition 5.0.4 *Si x, y sont deux nombres réels, le couple ordonné $[x, y]$ est appelé nombre complexe et on note $z = x + iy$, $i^2 = -1$, i imaginaire.*

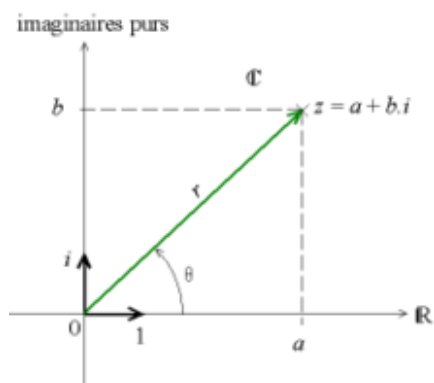
5.0.2 Représentation graphique

Dans le plan $0a, 0b$ le point Z a une abscisse a et une ordonnée b , donc chaque point Z dans le plan est représenté par un nombre complexe.

5.0.3 Module-argument

L'angle $\theta = (0a, 0b)$ est l'argument de Z .

La longueur du vecteur $\overrightarrow{0Z}$ désigne le module de Z , noté par $r = |Z| = |0Z|$.



5.0.4 Comment calculer θ et r

Sachant que $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$

donc

$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta.$$

Remarque 5.0.5 Si z est un nombre complexe noté $z = x + iy$, x partie réelle et y partie imaginaire.

$z = x + iy$ peut s'écrire aussi sous forme trigonométrique

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

5.0.5 Opérations sur les nombres complexes

Addition

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Sous forme trigonométrique Soient

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

donc

$$z_1 + z_2 = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + i(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2).$$

Produit

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Sous forme trigonométrique

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Sous forme trigonométrique

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

5.0.6 Formule de Moivre

Considérons le nombre complexe de module 1 et d'argument θ

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Preuve. Par récurrence sur n ,

pour $n = 0$ la formule est vraie : $(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$ et $\cos(0\theta) + i \sin(0\theta) = 1$.

Supposons la formule vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = \cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta$,

on a

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos n\theta + i \sin n\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta + i(\cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta) \\ &= \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que la formule est vraie pour l'ordre $n + 1$. □

Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Soit l'équation

$$z^n = \lambda / \lambda = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

$$z = \varphi(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$z^n = \varphi^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

par identification

$$\varphi^n = r \text{ et } n\theta = \alpha + 2k\pi$$

$$\varphi = \sqrt[n]{r} \text{ et } \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

on trouve n solutions ($k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$).

Exemple 5.0.6 *Trouver la racine cubique de 1, i.e.*

$$z^3 = 1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \Rightarrow$$

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

on trouve trois solutions

$$\text{si } k = 0, \quad z_1 = 1$$

$$\text{si } k = 1, \quad z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{si } k = 2, \quad z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = 1.$$

5.0.7 Résolution de l'équation de second degré

Soit l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

En mettant le trinome sous forme canonique, l'équation s'écrit

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{i^2(-\Delta)}{4a^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

et donc

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

L'équation du second degré dont le discriminant est négatif a deux racines complexes conjugués.

Exemple 5.0.7 Soit l'équation

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = -3 = 3i^2$$

donc

$$x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Formule d'Euler

Soit

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

On définit $\exp(z)$ par

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$$

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y,$$

$$\exp(-iy) = \cos y - i \sin y,$$

$$\cos y = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2}, \quad \sin y = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2i}.$$

5.1 Exercices

Exercice 5.1.1 *Soit :*

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

1) Calculer le module et l'argument de chacun de ces nombres.

2) Calculer $\frac{Z_1}{Z_3}$ et $\frac{Z_2}{Z_1}$ en forme trigonométrique

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$Z^3 + 1 = 0.$$

Exercice 5.1.2 Soient a et b deux entiers naturels.

1) Déterminer a et b pour que

$$(a + b\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante

$$z^2 - \left(2 + (1 - \sqrt{3})i\right)z + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i = 0$$

3) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation précédente telles que $|z_1| < |z_2|$.

-Ecrire alors $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

-En déduire $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

5.1.1 Solutions des exercices

Exercice 5.1.1 : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) $|z_1| = 2$, $|z_2| = 2$, $|z_3| = 2$.

$\arg z_1 = \theta_1 : \cos \theta_1 = \frac{1}{2}$, $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}$

$\arg z_2 = \theta_2 : \cos \theta_2 = -1$, $\sin \theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \pi$

$\arg z_3 = \theta_3 : \cos \theta_3 = \frac{1}{2}$, $\sin \theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_3 = -\frac{\pi}{3}$.

2) $\frac{z_1}{z_3} = \frac{2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})}{2(\cos -\frac{\pi}{3} + i \sin -\frac{\pi}{3})} = \cos(\theta_1 - \theta_3) + i \sin(\theta_1 - \theta_3) = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i \sin 2\frac{\pi}{3}\right)$.

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2(\cos \pi + i \sin \pi)}{2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})} = \cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1) = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i \sin 2\frac{\pi}{3}\right)$.

3) $z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1 = (\cos \pi + i \sin \pi)$.

On pose $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = (\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\text{par identification } \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi, k = 0, 1, 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$$\text{pour } k = 0, \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{pour } k = 1, \theta = \pi \Rightarrow z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\text{pour } k = 2, \theta = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 5.1.2 :

$$1) (a + b\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 1, a, b \in \mathbb{N}.$$

$$2) z^2 - (2 + (1 - \sqrt{3})i)z + 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i = 0$$

$$\Delta = - (4 + 2\sqrt{3}) = i^2 (1 + \sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{(2 + (1 - \sqrt{3})i) + i(1 + \sqrt{3})}{2} = 1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}$$

$$z_2 = \frac{(2 + (1 - \sqrt{3})i) - i(1 + \sqrt{3})}{2} = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = 2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{2} \rightarrow \text{forme algébrique}$$

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 (\cos (-\frac{\pi}{3}) + i \sin (-\frac{\pi}{3}))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i \sin (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}) \rightarrow \text{forme}$$

trigonométrique

par identification de la forme algébrique avec la forme trigonométrique on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \sin \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

Chapitre 6

Les fonctions réelles à une variable réelle

6.1 Généralités

f désigne une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

6.1.1 Sens de variation

f est dite croissante sur $I \subset D$ et $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

f est dite décroissante sur $I \subset D$ et $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

f est dite monotone sur $I \subset D$ si elle est croissante ou décroissante sur I .

Avec les inégalités strictes, on définit : f strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone sur I .

6.1.2 Parité, périodicité

f est paire si : $\forall x \in D, \forall (-x) \in D, f(-x) = f(x)$, son graphe est symétrique par rapport à $(0y)$.

f est impaire si : $\forall x \in D, \forall (-x) \in D, f(-x) = -f(x)$, son graphe est symétrique par rapport à l'origine 0 .

f est périodique de période T (ou T -périodique) si $\forall x \in D, x + T \in D, x - T \in D /$
 $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

6.2 Limites

Définition 6.2.1 (*Limite d'une fonction en x_0*)

Soit $x_0 \in I$, on dit que f admet une limite l finie en x_0 et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ si } \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

si f admet une limite l en x_0 , cette limite est unique.

6.2.1 Limite à droite, limite à gauche

Une fonction f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet pour limite l en x_0 .

On note

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

et on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Une fonction f admet une limite à gauche l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet pour limite l en x_0 .

On note

$$\lim_{x \leftarrow x_0} f(x) = l$$

et on a

$$\lim_{x \leftarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : -\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Théorème 6.2.2

$$\lim_{x \leftarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Exemple 6.2.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 0| < \epsilon$$

$$|x^2| < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\epsilon}$$

il suffit de prendre $\alpha = \sqrt{\epsilon}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - 2| < \alpha \Rightarrow |x + 1 - 3| < \epsilon$$

$$|x + 1 - 3| = |x - 2| < \epsilon$$

il suffit de prendre $\alpha = \epsilon$.

Extension de notion de limite

1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x \geq \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x \leq -\beta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x > \beta \Rightarrow f(x) > A.$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x > \beta \Rightarrow f(x) < -A.$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x < -\beta \Rightarrow f(x) > A.$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0, \forall x : x < -\beta \Rightarrow f(x) < -A.$$

6.2.2 Propriétés des limites

Théorème 6.2.4 (*Théorème d'encadrement*)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a, +\infty[$, si pour tout $x \in]a, +\infty[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l; (l \in \mathbb{R})$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l.$$

Exemple 6.2.5 *Calculer*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

alors

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x},$$

or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

d'après le théorème d'encadrement, on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

6.2.3 Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 et admettant des limites l_1, l_2 en x_0 , soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $f + g$ admet comme limite $l_1 + l_2$.
2. λf admet comme limite λl_1 .
3. $f g$ admet comme limite $l_1 l_2$.
4. Si $l_2 \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet comme limite $\frac{l_1}{l_2}$.
5. Si g est bornée et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} f g(x) = 0.$$

6.2.4 Fonctions équivalentes

Définition 6.2.6 Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in I$, si $\frac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

et on note

$$f \sim g \text{ ou } f \sim^{x_0} g.$$

1. Si $f_1 \sim^{x_0} g_1$ et $f_2 \sim^{x_0} g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim^{x_0} g_1 g_2$.
2. Si $f_1 \sim^{x_0} g_1$ et $f_2 \sim^{x_0} g_2 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim^{x_0} \frac{g_1}{g_2}$ avec $f_2, g_2 \neq 0$.

3. Si $f \stackrel{x_0}{\sim} g$ et si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Proposition 6.2.7 *Pour chercher la limite d'un produit ou d'un quotient on peut donc remplacer chacune des définitions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.*

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ou dans une fraction composée.

6.2.5 Fonctions équivalentes classiques

1. $\exp(x) - 1 \stackrel{0}{\sim} x.$

2. $\sin(x) \stackrel{0}{\sim} x.$

3. $1 - \cos(x) \stackrel{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$

4. $\log(1 + x) \stackrel{0}{\sim} x.$

5. $\tan(x) \stackrel{0}{\sim} x.$

6. $(1 - x)^\alpha - 1 \stackrel{0}{\sim} \alpha x.$

6.3 Continuité

Définition 6.3.1 (Continuité en un point) f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\text{i.e. } \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)).$$

6.3.1 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$,

la fonction \tilde{f} définie sur $I \cup \{x_0\}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est la seule fonction continue en x_0 donc la restriction à I soit f . On l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

Exemple 6.3.2 1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à droite de } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq f(0) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue à gauche de } 0.$$

D'où f n'est pas continue en 0.

2.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ car : } \sin \frac{1}{x} \text{ bornée et } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

alors f admet un prolongement par continuité en 0, et on a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

6.3.2 Continuité sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

6.3.3 Opérations sur la continuité

Si f et g sont continues en x_0 alors

1. $f + g$ est continue en x_0 .
2. λf est continue en x_0 .
3. fg est continue en x_0 .
4. Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
5. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

6.3.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 6.3.3 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle .

6.3.5 Image d'un intervalle fermé

Si f est continue sur un intervalle fermé I , alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

En particulier, si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$ en effet,

$$f([a, b]) = [c, d] \Leftrightarrow \forall y [c, d], \exists x \in [a, b] / f(x) = y$$

on a : $a \leq x \leq b$ et f est continue : $f(a) < f(x) < f(b)$, $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$

alors $0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$

alors $\exists x \in [a, b] / f(x) = 0$.

Exemple 6.3.4

$$f(x) = \log x + x^3 + x - 3 = 0 \text{ sur } [1, 2]$$

$$f(1) = -1 < 0, f(2) = \log 2 + 7 > 0.$$

f continue sur $[1, 2]$ alors $f(x) = 0$ admet au moins une racine et on voit que f est croissante d'où on a une seule solution.

6.3.6 Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Soit f une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I , alors f est une bijection de I dans $f(I)$, et sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.

Remarque 6.3.5 *Dans un repère orthonormé, les graphes de f et f^{-1} sont symétrique par rapport à la premier bissection des axes.*

6.4 Dérivabilité

6.4.1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et $x_0 \in D$. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

on dit alors que f est dérivable en x_0 .

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe,}$$

f est dite dérivable à droite en x_0 et cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0 et notée $f'_d(x_0)$.

On définit de même la dérivée à gauche en x_0 noté $f'_g(x_0)$.

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

6.4.2 Fonction dérivée

La fonction f est dite dérivable sur E , si elle est dérivable en tout point x de E .

On appelle fonction dérivée de f sur E , la fonction notée f' , définie sur E par :

$$x \longmapsto f'(x).$$

6.4.3 Interprétations

Interprétation graphique

f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente, non parallèle à l'axe oy de pente $f'(x_0)$.

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

f n'est pas dérivable en x_0 mais le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à oy .

Interprétation cinématique

Soit t la durée écoulée entre une origine des temps et l'instant considéré. Si $f(t)$ est la distance parcourue pour un mobile pendant la durée t , le taux de variation

$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ est la vitesse moyenne entre les instants t et t_0 .

La dérivée $f'(t_0)$ est la vitesse instantanée à l'instant t_0 .

La dérivée seconde $f''(t_0)$ est l'accélération instantanée à l'instant t_0 .

6.4.4 Propriétés

Tout fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 , la réciproque est fautive, par exemple : la fonction $x \mapsto |x|$ et une dérivée différentes.

6.4.5 Opérations sur les fonctions dérivables

Si f et g sont dérivables en x_0 , il en est de même de

1. $f + g$ et on a : $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. fg et on a : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. Si $g(x_0) \neq 0$: $\frac{f}{g}$ est dérivable et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

6.4.6 Dérivées successives

Soit f dérivable sur E , si f' est dérivable sur E , on note sa dérivée f'' ou $f^{(2)}$.

On l'appelle dérivée seconde de f .

Pour n entier, on définit par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ ou dérivée d'ordre n de f ,

en posant

$$f^{(0)} = f, f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \text{ lorsque } f^{(n-1)} \text{ est dérivable sur } E.$$

Exemple 6.4.1 1. $f(x) = \exp(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \exp(x)$

$$2. f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3. f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Preuve. 1-Montrons que $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Par récurrence :

$$a) \text{ Pour } n = 1, (\cos x)' = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (vraie)}$$

$$b) \text{ Supposons que } \forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$c) \text{ Montrons que } \forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n+1)} = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, ((\cos x)^{(n)})' = \left(\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)'$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n+1)} = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\cos x)^{(n+1)} = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

$$2\text{-Montrons que } (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Par récurrence :

a) Pour $n = 1$, $(\sin x)' = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. (vraie)

b) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\sin x)^{(n+1)} = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, ((\sin x)^{(n)})' = \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)'$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n+1)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n+1)} = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

□

f est dite de classe C^n sur I si $f^{(n)}$ existe et continue sur I et on note $f \in C^n(I)$.

6.4.7 Formule de Leibniz

Si f et g admettent des dérivées d'ordre n en x_0 , alors il est de même de fg et on

a :

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x_0) &= \sum_{p=0}^n C_n^p f^{(p)}(x) g^{(n-p)}(x) \\ &= C_n^0 f^{(0)}(x) g^{(n)}(x) + C_n^1 f'(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^2 f^{(2)}(x) g^{(n-2)}(x) + \dots + C_n^n f^{(n)}(x) g^{(0)}(x) \\ &= f \cdot g^{(n)} + n f' g^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} f'' g^{(n-2)} + \dots + f^{(n)} g. \end{aligned}$$

6.4.8 Fonction composée de deux fonctions dérivables

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

6.4.9 Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I . On suppose que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple 6.4.2 Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur \mathbb{R}_+ dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc la fonction $f^{-1}(y) = y^2$, définie sur \mathbb{R}_+ dérivable :

$$(f^{-1})'(y) = 2y$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = 2f(x) = 2\sqrt{x}$$

et

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{x}$$

6.4.10 Variation d'une fonction dérivable

1. Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

2. Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
3. Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .

6.4.11 Extremum

Définition 6.4.3 On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0 , s'il existe un intervalle ouvert I , contenant x_0 et inclu dans D , tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Définition 6.4.4 Un maximum ou minimum locale est dit extremum local en x_0 .

Condition nécessaire d'extremum local

Si $f(x_0)$ est un extremum local et si f est dérivable alors $f'(x) = 0$.

Condition suffisante d'extremum local

f, f', f'' étant continues, sur $[a, b]$, si en $x_0 \in]a, b[$ on a $f'(x) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f présente un extremum relatif en x_0 .

Il s'agit d'un maximum si $f''(x_0) \leq 0$ et d'un minimum si $f''(x_0) \geq 0$.

6.4.12 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 6.4.5 (Rolle) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que : $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

Globalement, cela veut dire qu'il existe un point c où la tangente au graphe de f est parallèle à la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ qui est elle-même parallèle à l'axe de x .

Exemple 6.4.6 Soit la fonction $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. g est dérivable sur \mathbb{R}^* comme produit et composition des fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* .

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2 + 1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = g'(0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0) \text{ donc } g' \text{ est continue au point } 0.$$

2. $g\left(-\frac{1}{\pi}\right) = g\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$ et g est continue sur $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right[$, d'après le théorème de Rolle : $\exists c \in \left]-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right[$, tel que $g'(c) = 0$.

6.4.13 Formule des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ / $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

L'interprétation graphique est assez simple : le segment qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et la tangente au graphe de f au point $(c, f'(c))$ sont parallèles.

Exemple 6.4.7 Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$, telle que $1 \leq f'(x) \leq 4$,
 $\forall x \in [2, 5]$.

Montrer que : $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$.

En effet,

f est dérivable sur $[2, 5]$ alors f est continue sur $[2, 5]$, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \exists c \in]2, 5[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} &\Rightarrow \forall x \in [2, 5], 1 \leq \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \leq 4 \\ &\Rightarrow 3 \leq f(5) - f(2) \leq 12. \end{aligned}$$

Exemple 6.4.8 Existe-t-il une fonction f telle que $f(0) = -1$ et $f(2) = 4$, $f'(x) \leq 2$
 pour tout $x \in]0, 2[$?

Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $[0, 2]$ alors f est continue sur
 $[0, 2]$, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]0, 2[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5}{2} > 2 \text{ (absurde).}$$

6.4.14 Règle de l'Hôpital

Soient f et g deux fonctions dérivables dans un voisinage de x_0 ,

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (existe)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

La réciproque est fautive : il est possible que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$ n'existe pas.

Exemple 6.4.9 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x) - 1}{x} = \frac{0}{0} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \exp(2x) = 2$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\exp(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\exp(x)} = 0.$$

6.5 Exercices

Exercice 6.5.1 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On note par g son prolongement.
3. Etudier la dérivabilité de g sur \mathbb{R} puis calculer g' . g' est elle continue au point 0.
4. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à g sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

Exercice 6.5.2 Soit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

2. Etudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
3. La fonction f est elle de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6.5.3 Soit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arcsin \frac{1}{x}, & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f .

6.5.1 Solutions des exercices

Exercice 6.5.1.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. $D(f) = \mathbb{R}^*$. f est continue sur \mathbb{R}^* comme produit et composition de fonctions continues sur \mathbb{R}^* .
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc f admet un prolongement par continuité en 0 et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. g est dérivable sur \mathbb{R}^* comme produit et composition de fonctions dérivables sur

$$\mathbb{R}^*. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = g'(0)$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2 + 1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$ donc g' est continue au point 0.

4. $g\left(-\frac{1}{\pi}\right) = g\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$ et g est continue sur $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right[$ donc on peut appliquer Rolle .

Exercice 6.5.2

1. Si $x \neq 0$, f est continue comme produit et composition de fonctions continues

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

2. Si $x \neq 0$, f est dérivable comme produit et composition de fonctions dérivables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = 0.$$

donc f est dérivable sur \mathbb{R}

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

3. La fonction f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

Exercice 6.5.3

- 1) f est continue et dérivable sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ comme produit et composition de fonctions continues.

- 2) f est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \arcsin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, de plus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \arcsin \frac{1}{x}}{x} =$

0.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}, & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

Chapitre 7

Application aux fonctions

élémentaires

7.1 Fonction inverse des fonctions trigonométriques

7.1.1 Fonction arcsinus

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ est continue, croissante donc admet une fonction inverse

qui est continue croissante notée \arcsin .

$$\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longmapsto \arcsin x$$

la fonction arcsin est impaire.

$$\begin{aligned}\arcsin 0 &= 0 \\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

La dérivée de arcsin x

Soit

$$\begin{aligned}y &= \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \\ \Rightarrow x' &= y' \cos y \\ \Rightarrow 1 &= y' \cos y\end{aligned}$$

or

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

d'où

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall x \in]-1, 1[.$$

D'une façon générale

$$(\arcsin h(x))' = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 - h^2(x)}}, \text{ pour tout } h(x) \in]-1, 1[.$$

7.1.2 Fonction arccosinus

$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue, strictement décroissante donc elle admet une fonction inverse qui est continue et strictement décroissante notée \arccos .

$$\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos x$$

la fonction \arccos est paire.

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos 1 = 0,$$

$$\arccos(-1) = \pi.$$

La dérivée de $\arccos x$

Soit

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$\Rightarrow x' = -y' \sin y$$

$$\Rightarrow 1 = -y' \sin y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin y}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in [-1, 1]$$

d'une façon générale

$$(\arccos h(x))' = \frac{-h'(x)}{\sqrt{1-h^2(x)}}, \text{ pour tout } h(x) \in [-1, 1].$$

Remarque 7.1.1

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

en effet, posons

$$\begin{aligned} y &= \arccos x + \arcsin x \Rightarrow \\ \cos(y) &= \cos(\arccos x + \arcsin x) \\ &= \cos(\arccos x) \cos(\arcsin x) - \sin(\arccos x) \sin(\arcsin x) \\ &= x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}.$$

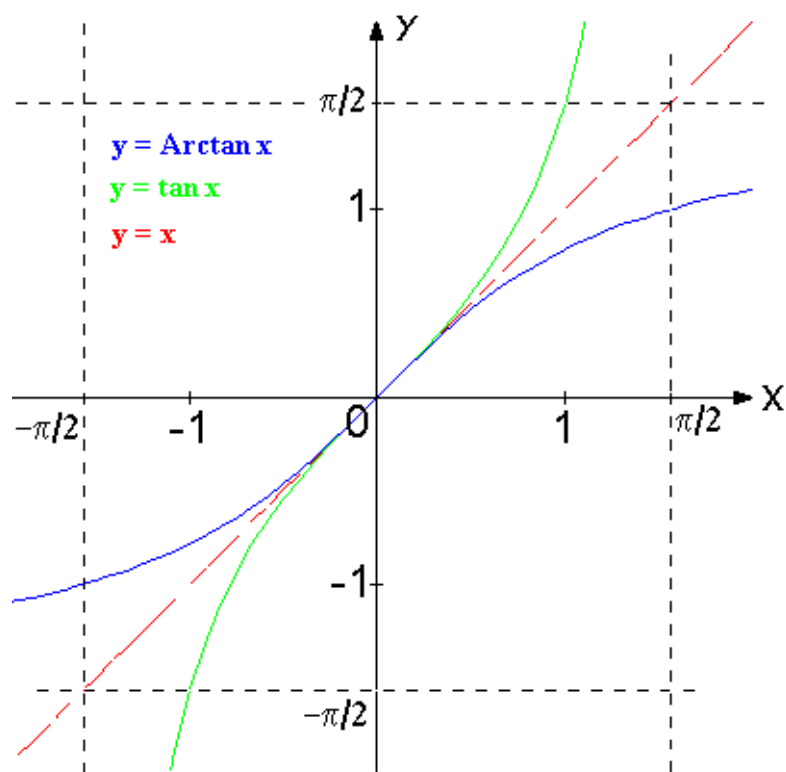
7.1.3 Fonction $\arctan(x)$

$tg :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante donc admet une fonction

inverse continue et strictement croissante

$$tg^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$x \mapsto \arctan(x)$$



La dérivé de $\arctan x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$y = \arctg(x) \Rightarrow$$

$$x = \operatorname{tg}(y) \Rightarrow$$

$$x' = \frac{y'}{\cos^2(y)} \Rightarrow$$

$$1 = y'(1 + \operatorname{tg}^2(y)) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

En général

$$(\arctan(h(x)))' = \frac{1}{1+h(x)^2}, \text{ pour tout } h(x).$$

7.1.4 Fonction $\operatorname{arccot}(x)$

$\cot = \frac{1}{\tan} :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement décroissante donc admet une fonction inverse continue et strictement décroissante.

$$\cot^{-1} = \operatorname{arccot}(x) \quad \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

$$x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$$

La dérivée de $\operatorname{arccot}(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in$

$$y = \operatorname{arccot}(x) \iff x = \cot(y)$$

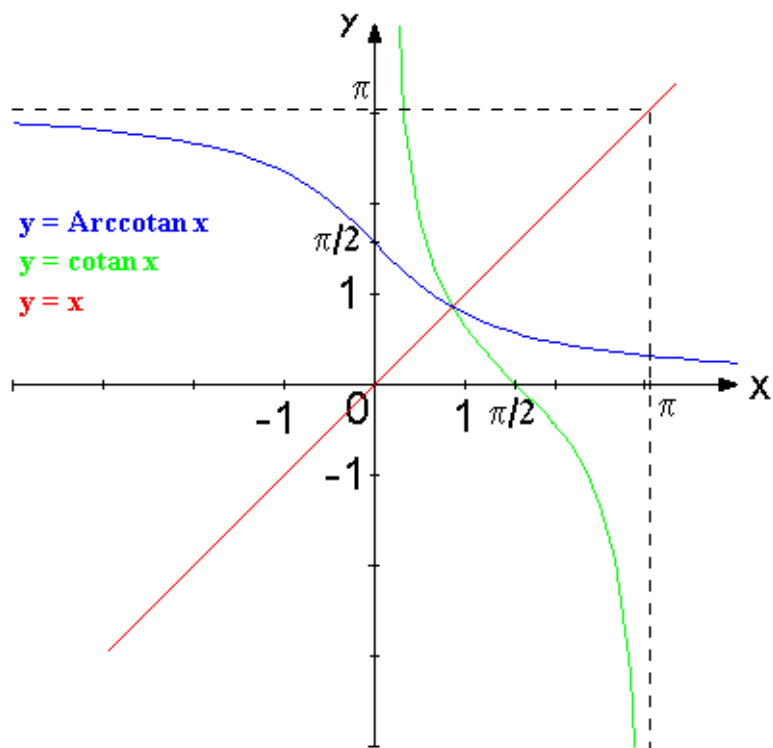
$$\Rightarrow x' = -y'(1 + \cot^2(y))$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{arccot}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

En général

$$(\operatorname{arccot}(h(x)))' = \frac{-1}{1+h(x)^2}, \text{ pour tout } h(x) \in \mathbb{R}.$$



7.2 Fonctions hyperboliques

7.2.1 Fonction cosh et sinh

Définition 7.2.1 Rappelons que la fonction $x \rightarrow \exp x$ n'est ni une fonction paire ni une fonction impaire. Mais on peut trouver deux fonctions P paire et I impaire telles que

$$\exp(x) = P(x) + I(x)$$

ces fonctions devront également vérifier

$$\exp(-x) = P(-x) + I(-x) = P(x) - I(x)$$

d'où par addition

$$P(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

et par soustraction

$$I(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

ces deux fonctions admettent bien les propriétés demandée.

Nous les appelons respectement $\cosh x$ (cosinus hyperboliques de x) et $\sinh x$ (sinus hyperbolique de x).

On appelle cosinus et sinus hyperboliques les fonctions

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

7.2.2 Propriétés

$\cosh x$ est une fonction paire $\cosh(-x) = \cosh(x)$

$\sinh x$ est une fonction impaire $\sinh(-x) = -\sinh x$

on a de plus

$$\cosh x + \sinh x = \exp(x)$$

$$\cosh x - \sinh x = \exp(-x)$$

d'où on déduit, et multipliant membre à membre

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

par définition

$$\cosh(a + b) = \frac{\exp(a + b) + \exp(-(a + b))}{2}$$

avec

$$\exp(a) = \cosh a + \sinh a$$

$$\exp(-a) = \cosh a - \sinh a$$

il en résulte

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$$

$$\cosh(a - b) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b)$$

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b)$$

$$\sinh(a - b) = \sinh(a) \cosh(b) - \cosh(a) \sinh(b).$$

En particulier si $a = b = x$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh^2 x = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}.$$

7.2.3 Variation

\cosh étant paire et \sinh impaire, on peut se borner à les étudier dans l'intervalle

$[0, +\infty[$.

La fonction \cosh est toujours positive.

La fonction \sinh est positive pour $x > 0$ car elle s'écrit $\sinh x = \frac{\exp x(1-\exp(-2x))}{2}$.

Les dérivées :

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = +\infty, \quad \cosh(0) = 1$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = +\infty, \quad \sinh(0) = 0$$

7.2.4 Fonction tangente hyperbolique (\tanh)

On appelle fonction tangente hyperbolique la fonction

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

definie sur \mathbb{R} .

7.2.5 Propriétés

1. La fonction tangente hyperbolique est impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2(x)$$

3. $\forall a, b, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tanh(a+b) &= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \\ \tanh(a-b) &= \frac{\tanh a - \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \\ \tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}\end{aligned}$$

4. La dérivée

$$\begin{aligned}y &= \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \\ y' &= \frac{1}{\cosh^2 x} > 0. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1} \\ &= 1\end{aligned}$$

7.3 Les fonctions hyperboliques inverses

7.3.1 Fonction $\arg \cosh(x)$

La fonction \cosh est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument cosinus hyperbolique.

$$x = \cosh y \iff y = \arg \cosh x, \quad y \geq 0$$

La dérivée

$$y = \arg \cosh x \Rightarrow$$

$$x' = (\cosh y)' \Rightarrow$$

$$1 = y' \cosh' y$$

$$y' = \frac{1}{\sinh y}$$

or

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Rightarrow$$

$$\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$$

$$= \sqrt{x^2 - 1}$$

d'où

$$(\arg \cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

En générale

$$(\arg \cosh h(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - 1}}.$$

Expression au moyen de logarithme

$$y = \arg \cosh x \Leftrightarrow$$

$$x = \cosh y \text{ et } \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

or

$$\cosh y + \sinh y = \exp y \text{ i.e. } x + \sqrt{x^2 - 1} = \exp y$$

alors

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\arg \cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

7.3.2 Fonction $\arg \sinh(x)$

La fonction \sinh est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , donc admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument sinus hyperbolique.

$$x = \sinh y \iff y = \arg \sinh x.$$

La dérivée

$$\begin{aligned} y &= \arg \sinh x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh y} \\ \Rightarrow y' &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

d'où

$$(\arg \sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

En générale

$$(\arg \sinh f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}}.$$

Expression au moyen de logarithme

$$y = \arg \sinh x \Leftrightarrow$$

$$x = \sinh y \text{ et } \cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$$

or

$$\cosh y + \sinh y = \exp y \text{ i.e. } x + \sqrt{x^2 + 1} = \exp y$$

alors

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\arg \cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

7.3.3 Fonction $\arg \tanh(x)$

\tanh est continue et strictement croissante dans \mathbb{R} , donc admet une fonction inverse continue et strictement croissante appelée argument tangente hyperbolique.

$$\arg \tanh = \tanh^{-1} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \arg \tanh x.$$

La dérivée

$$x = \arg \tanh y \Leftrightarrow y = \arg \tanh x$$

$$x' = \frac{y'}{\cosh^2 y} \Rightarrow y' = \cosh^2 y = \frac{1}{1 - \tanh^2 y}$$

d'où

$$(\arg \tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

En générale

$$(\arg \tanh f(x))' = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}.$$

Expression au moyen de logarithme

$$y = \arg \tanh x \Leftrightarrow x = \tanh y \text{ et } \cosh^2 y = \frac{1}{1-\tanh^2 y}$$

or

$$\begin{aligned} \sinh^2 y &= \cosh^2 y - 1 \\ &= \frac{1}{1-\tanh^2 y} - 1 \\ &= \frac{\tanh^2 y}{1-\tanh^2 y} \\ &= \frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\sinh y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \cosh y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\sinh y + \cosh y = \exp y \Leftrightarrow y = \log(\sinh y + \cosh y)$$

alors

$$\begin{aligned}
 y &= \log(\sinh y + \cosh y) \\
 &= \log\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
 &= \log(1+x) - \log\sqrt{1-x^2} \\
 &= \log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x^2) \\
 &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\arg \tanh x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

7.4 Exercices

Exercice 7.4.1 *Montrer que*

$$\arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

Exercice 7.4.2 *Soient les réels x et y tels que*

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

-Calculer $\cosh x$ et $\sinh x$.

Exercice 7.4.3 *Ecrire sous forme d'expression algébrique*

1) $\sin(\arccos x)$

2) $\cos(\arcsin x)$.

7.4.1 Solutions des exercices

Exercice 7.4.1

Soit la fonction

$$f(x) = \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-\sqrt{1-x^2} + 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-x^2} \\ f'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}, \quad 0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \end{aligned}$$

f est strictement croissante et $f(x) = 0$ pour tout $0 < x < 1$.

D'où

$$\arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

Exercice 7.4.2

1)

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{\exp x + \frac{1}{\exp x}}{2} \\ &= \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} \\ &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos y}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{\exp x - \frac{1}{\exp x}}{2} \\
&= \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2 \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1 - 2 \cos^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{-\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{-1}{\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.4.31) $\sin(\arccos x)$:

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y \Rightarrow \sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y},$$

donc

$$\sin(\arccos x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} \Rightarrow \sin(\arccos x) = \pm \sqrt{1 - x^2},$$

et comme $\arccos x \geq 0$ on a $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1 - x^2}$.2) $\cos(\arcsin x)$:

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y \Rightarrow \cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y},$$

donc

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - x^2},$$

et comme $\arcsin x \geq 0$ on a $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - x^2}$.

Chapitre 8

Développements limités

Les développements limités permettent de trouver des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes.

Un développement limité (noté DL) d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme d'une fonction polynomiale, et d'un reste qui peut être négligé lorsque la variable est suffisamment proche du point considéré.

8.1 Développement limité d'ordre n au voisinage de 0

Notation 8.1.1 (de Landau) On dit qu'une fonction f est négligeable devant une fonction g quand $x \rightarrow x_0$ et on écrit

$$f = o(g) \text{ si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple 8.1.2 1.

$$x^3 = o(x^2) \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

2. si $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ alors $x^n \varepsilon(x) = o(x^n)$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \varepsilon(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Définition 8.1.3 Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on note $V(0)$, s'il existe des constantes a_0, a_1, \dots, a_n , et une fonction $\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que

$$\forall x \in V(0), f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

ou encore

$$\forall x \in V(0), f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

Le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ s'appelle la partie régulière du développement et $x^n\varepsilon(x)$ s'appelle le reste ou terme complémentaire.

Exemple 8.1.4 La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ admet un développement limité de n'importe quel ordre n . En effet, on obtient par division suivant les puissances croissantes de x

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

et comme

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} = x^n \left(\frac{x}{1+x} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x} = 0$$

alors

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Théorème 8.1.5 Si f admet un développement au voisinage de 0

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

alors

1. Le développement est unique .
2. f admet une limite quand $x \rightarrow 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$.
3. Si de plus f est continue en 0 alors f est automatiquement dérivable en 0 et on a : $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$.
4. Si f une fonction paire alors $a_1 = a_3 = \dots = a_{2k+1} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $2k + 1 \leq n$.
5. Si f est une fonction impaire alors $a_0 = a_2 = \dots = a_{2k} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $2k \leq n$.

Exemple 8.1.6 Les fonctions $\log|x|$ et $\cot x$ n'admettent pas de développement limité au voisinage de 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log|x| = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \pm\infty.$$

La fonction $f(x) = |x|$ n'admet pas de développement limité au voisinage de 0 car c'est une fonction continue en 0 et si elle admet un développement limité alors d'après le théorème précédent elle sera dérivable en 0, or on sait que cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Si on considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ alors f est une fonction paire, donc si f admet un développement limité en 0, alors tous les coefficients impaires de ce développement sont nulle, en effet, par la division suivant les puissances croissantes de x on obtient

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + x^{2n} \left(\frac{x}{1-x^2} \right)$$

on voit bien

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2k} = 0.$$

Définition 8.1.7 Une fonction f définie sur un ensemble E est dite de classe C^n sur E si f est dérivable n fois sur E et sa dérivée d'ordre n est continue.

Théorème 8.1.8 (de Taylor-Maclaurin Young). Si f est une fonction définie sur un intervalle I avec $0 \in I$ et si $f^{(n)}(0)$ existe alors $\forall x \in I$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Par le théorème précédent et par l'unicité du développement limité, on déduit le théorème suivant :

Théorème 8.1.9 *Si f est une fonction de classe C^n au voisinage de 0 alors f admet un développement d'ordre n et on a*

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ceci permet de trouver le développement limité d'une fonction de classe C^∞ si l'on connaît les dérivées successives de f en 0.

On a aussi

1.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

2.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

3.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots\alpha-(n-1)}{n} x^n + o(x^n)$$

Dans 4 si on donne plusieurs valeurs de α on obtient différents développements limités, par exemple pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} x^n + o(x^n)$$

et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + (-1)^{(n)} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} x^n + o(x^n).$$

Remarque 8.1.10 Si l'on connaît le développement limité d'une fonction de classe C^n alors par unicité du développement on peut déterminer les dérivées successives de f en 0, par exemple on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

et comme $\frac{1}{1-x}$ est de classe C^n au voisinage de 0 alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n! \text{ (car } a_n = 1 = \frac{f^{(n)}(0)}{n! \text{)}).$$

8.2 Opérations sur les développements limités

Théorème 8.2.1 Soient f et g deux fonctions admettent des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. Alors les fonctions $f+g$, $f \cdot g$ admettent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$$

et on a :

1. La partie régulière de $f + g$ est la somme des parties régulières de f et g .

2. La partie régulière de $f.g$ s'obtient par le produit des parties régulières de f et g mais en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égale à n .
3. La partie régulière de $\frac{f}{g}$ s'obtient par la division suivant les puissance croissantes de x de la partie régulière de f sur la partie régulière de g mais en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n .

1. Déterminant le D.L de la fonction $\cosh x$ à l'ordre n à l'origine, on a

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{1}{2}(\exp x + \exp(-x)) \text{ et comme} \\ \exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \exp(-x) &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\end{aligned}$$

donc

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n).$$

2. Pour déterminer le D.L de la fonction $\frac{\exp x}{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}\frac{\exp x}{1-x} &= \exp x \left(\frac{1}{1-x} \right) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^n) \right) (1 + x + x^2 + o(x^n)) \\ &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \right) (1 + x + x^2) + o(x^n) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^n).\end{aligned}$$

3. Pour déterminer le D.L de $\tan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \tan x &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ \tan x &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2}} + o(x^3) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

Théorème 8.2.2 Soient f et g deux fonctions admettant des D. L d'ordre n au voisinage de 0 avec $g(0) = 0$. Alors la fonction $f \circ g$ admet un D. L d'ordre n au voisinage de 0 et la partie régulière de $f \circ g$ s'obtient en substituant la partie régulière de g dans la partie régulière de f mais en gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Exemple 8.2.3 Pour déterminer le D. L d'ordre 3 à l'origine de la fonction $\exp(\sin x)$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

alors posant

$$u = \sin x$$

donc

$$\begin{aligned}\exp(\sin x) &= \exp u \\ &= 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^n)\end{aligned}$$

et on a

$$u = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\exp(\sin x) = 1 + \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{1!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}o(x^3).$$

Théorème 8.2.4 Soit f une fonction définie sur $[-a, a]$ admet un D . L d'ordre n au voisinage de 0

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + na_nx^n + o(x^n)$$

1. Si f est dérivable sur $[-a, a]$ et f' admet un D . L au voisinage de 0 à l'ordre $(n-1)$ alors la partie régulière de f' s'obtient en dérivant la partie régulière de f et on a

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x^1 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

2. Si f admet une primitive F alors F admet un D . L au voisinage de 0 à l'ordre $(n+1)$ et on a

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple 8.2.5 Du développement

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

on obtient par dérivation que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

et on déduit par intégration

$$-\log(1-x) = \log 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

et donc

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots - \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

et

$$\log(1+x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

Pour déterminer le D. L de la fonction $f(x) = \arctan x$, on dérive la fonction f , on cherche le D. L de la dérivée puis on intègre pour trouver celui de f on a aussi

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

or on sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

en remplaçant x par $(-x^2)$ on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

donc par intégration

$$\arctan x = \arctan 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

d'où

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

8.3 Développement limité au voisinage d'un point

$x_0 \neq 0$ et au voisinage de l'infini

Définition 8.3.1 1. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$, on dit que f admet un D.L au voisinage de x_0 si la fonction $F(X) = f(X + x_0)$ admet un D.L au voisinage de 0.

$$F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + o(X^n)$$

et on a alors

$$f(x) = F(X - x_0) = a_0 + a_1(X - x_0) + a_2(X - x_0)^2 + \dots + a_n(X - x_0)^n + o((X - x_0)^n).$$

2. Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, +\infty[$, on dit que f admet un D.L à l'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction $F(X) = f(\frac{1}{X})$ admet un D.L au voisinage de 0.

$$F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + o(X^n)$$

et on a alors

$$f(x) = F\left(\frac{1}{X}\right) = a_0 + a_1\frac{1}{X} + a_2\left(\frac{1}{X}\right)^2 + \dots + a_n\left(\frac{1}{X}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{X}\right)^n\right).$$

Exemple 8.3.2 1. Pour chercher le D.L de $\exp x$ d'ordre n au voisinage de 1, on considère la fonction $F(X) = \exp(x + 1)$ et on détermine le D.L. de $F(X)$ au voisinage de 0.

on a aussi

$$\begin{aligned}
 F(X) &= \exp(X + 1) \\
 &= \exp 1 \exp x \\
 &= \exp(1) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \right)
 \end{aligned}$$

d' où

$$\begin{aligned}
 f(x) &= F(x - 1) = \\
 &= \exp x \\
 &= \exp(1) \left(1 + \frac{x - 1}{1!} + \frac{(x - 1)^2}{2!} + \frac{(x - 1)^3}{3!} + \dots + \frac{(x - 1)^n}{n!} + o((x - 1)^n) \right).
 \end{aligned}$$

2. Le D. L. de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ d'ordre n au voisinage de ∞ s'obtient par le D. L.

de $F(X) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sin X$ au voisinage de 0.

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{X^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + o(X^{2n+2})$$

d' où

$$\begin{aligned}
 f(x) &= F\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= \sin \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3!X^3} + \frac{1}{5!X^5} - \frac{1}{7!X^7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!X^{(2n+1)}} + o\left(\frac{1}{X^{2n+2}}\right).
 \end{aligned}$$

8.4 Application du développement limité

8.4.1 Calcule des limites

1.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) + o(x^4)}{x^2(x + o(x^2))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{6}x^3 - \frac{x^5}{4!} + o(x^4)}{x^3 + o(x^4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{6} + o(x)}{1 + o(x)} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x \log(1 + \frac{1}{x})) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \exp(\frac{1}{y} \log(1 + y)) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \exp(\frac{1}{y}(y - \frac{y^2}{2} + o(y^2))) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \exp(1 - \frac{y}{2} - o(y)) \\
 &= \exp(1)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \exp(1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{1}{x} \log(1+x)\right) - \exp(1)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} o(x^2)\right)\right) - \exp(1)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(1) \exp\left(-\frac{x^2}{2} o(x^2)\right) - \exp(1)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(1) \left(1 - \frac{x^2}{2} o(x^2) - 1\right)}{x} \\
&= \frac{-\exp(1)}{2}.
\end{aligned}$$

8.5 Position du graphe d'une fonction par rapport à l'asymptote

8.5.1 Développement généralisés

Définition 8.5.1 Soit f une fonction qui n'admet pas de D. L. au voisinage de 0.

On dit que f admet un D. L. généralisé au voisinage de 0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que $x^\alpha f$ admet un D. L. au voisinage de 0.

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

et le développement limité généralisé de f est

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)).$$

Exemple 8.5.2 La fonction $f(x) = \cot(x)$ n'admet pas de D. L. au voisinage de 0.

En effet, on a par exemple à l'ordre 4

$$\begin{aligned}
 xf(x) &= \frac{x \cos x}{\sin x} \\
 &= \frac{x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5))}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\
 &= 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4)
 \end{aligned}$$

ce qui donne le D.L. généralisé a l'ordre 3

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3).$$

8.5.2 Position du graphe

Exemple 8.5.3 Soit

$$f(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

alors f n'admet pas un D. L. au voisinage de ∞ , posons

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow \infty$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\exp(y)}{y}$$

et $yf\left(\frac{1}{y}\right)$ admet un D. L au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
 yf\left(\frac{1}{y}\right) &= \exp(y) \\
 &= 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)
 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + 1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{3!} + o(y^2)$$

d' où

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Alors $(\Delta) : Y = x + 1$ est une asymptote car

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (x + 1) = 0.$$

Si $f(x) - Y \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors le graphe est au dessus de (Δ) .

Si $f(x) - Y \rightarrow 0^-$ quand $x \rightarrow -\infty$, alors le graphe est en dessous de (Δ) .

8.6 Exercices

Exercice 8.6.1 1) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$g(x) = (\cos x)^{x \cot x}$$

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Exercice 8.6.2 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- i) f admet-elle un développement de Taylor au voisinage de 0?
- ii) Trouver le développement limité généralisé de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 3.
- iii) Déduire les asymptotes obliques et leurs positions par rapport au graphe de f .

8.6.1 Solutions des exercices

Exercice 8.6.1

1)

$$\begin{aligned} x \cot x &= 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \\ (\cos x)^{x \cot x} &= 1 + \left(1 - \frac{x^2}{3}\right)\left(-\frac{x^2}{2!}\right) + o(x^3) \\ (\cos x)^{x \cot x} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 8.6 .2 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$ donc f n'est pas continue en 0 alors f n'admet pas un développement de Taylor au voisinage de 0.

ii) Au $V(-\infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctgy} = y - \frac{y^3}{3} + O(y^3) \\ \operatorname{actg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ x^2 \operatorname{actg}\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x}\right). \end{array} \right.$$

Au $V(+\infty)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + O(y^3) \\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

iii) Au $V(-\infty)$: Asymptote $y = x$ et position en dessous de graphe .

Au $V(+\infty)$: Asymptote $y = x - \frac{1}{2}$ et position en dessous de graphe .

Chapitre 9

Algèbre linéaire

9.1 Espace vectoriel

9.1.1 Espace vectoriel et sous espace vectoriel

Soit \mathbb{k} un corps commutatif (généralement \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée :

$$(+): E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow X + Y$$

et d'une opération externe notée :

$$(\cdot): \mathbb{k} \times E \rightarrow E$$

$$(\lambda, y) \rightarrow \lambda.x$$

Définition 9.1.1 *Un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} ou un \mathbb{k} – espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que*

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x, y \in E, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y.$
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x.$
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x.$
5. $\forall x \in E, 1_{\mathbb{k}}.x = x.$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et les éléments de \mathbb{k} sont appelés des scalaires.

Proposition 9.1.2 Si E est un \mathbb{k} – espace vectoriel alors on a les propriétés suivantes

1. $\forall x \in E, 0_{\mathbb{k}}.x = 0_E.$
2. $\forall x \in E, -1_{\mathbb{k}}.x = -x.$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \lambda.0_E = 0_E.$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x, y \in E, \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{k}} \text{ ou } x = 0_E.$

Exemple 9.1.3 1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} – espace vectoriel et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un \mathbb{C} – espace vectoriel.

2. Si on considère $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ muni des deux opérations suivantes

$$\begin{aligned}
 (+) : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\
 ((x, y), (x', y')) &\quad \rightarrow \quad (x + x', y + y')
 \end{aligned}$$

$$(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\lambda, (x', y')) \rightarrow (\lambda.x, \lambda.y)$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} – espace vectoriel .

3. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f / f \text{ une application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$ muni des deux opérations suivantes $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

est un \mathbb{R} – espace vectoriel .

4. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ n'est pas un \mathbb{C} – espace vectoriel, car pour $\lambda \in \mathbb{C}$, et pour $x \in \mathbb{R}$ on a pas nécessairement $\lambda.x \in \mathbb{R}$.

Définition 9.1.4 Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{k} – espace vectoriel et soit F un sous ensemble non vide de E . On dit que F est un sous espace vectoriel de E , si $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{k} – espace vectoriel.

Théorème 9.1.5 Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{k} – espace vectoriel et $F \subset E, F \neq \emptyset$. On a les équivalences suivantes

1. F est un sous espace vectoriel de E .
2. F est stable par l'addition et par la multiplication :

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{k}, x + y \in F, \lambda x \in F.$$

3.

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \lambda x + \mu y \in F.$$

d' où

F est un sous espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \lambda x + \mu y \in F$.

Exemple 9.1.6 1. $\{0_E\}$ et E sont des sous espaces vectoriels de E .

2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . En effet

$$-F \neq \emptyset \text{ car } (0, 0) \in F.$$

$$-\forall (x, y), (x', y') \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) + \mu(x', y') &= (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &\in F \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu x' + \lambda x + \mu y' &= \lambda(x + y) + \mu(x' + y') \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. L'espace $F = \{(x + y + z, 2x - y, 3z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En effet

$$-F \neq \emptyset \text{ car } (0, 0, 0) \in F$$

$$\text{-Soient } \begin{cases} X = (x + y + z, 2x - y, 3z)/x, y, z \in \mathbb{R} \\ Y = (x' + y' + z', 2x' - y', 3z')/x', y', z' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda X + \mu Y &= (\lambda x + \lambda y + \lambda z, 2\lambda x - \lambda y, 3\lambda z) + (\mu x' + \mu y' + \mu z', 2\mu x' - \mu y', 3\mu z') \\ &= ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), 2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 3(\lambda z + \mu z')) \\ &= (x'' + y'' + z'', 2x'' - y'', 3z'') \in F \end{aligned}$$

où

$$(\lambda x + \mu x') = x''$$

$$(\lambda y + \mu y') = y''$$

$$(\lambda z + \mu z') = z''.$$

Théorème 9.1.7 *L'intersection d'une famille non vide des sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel.*

Remarque 9.1.8 *La réunion de deux sous espaces vectoriels n'est pas forcément un sous espace vectoriel.*

Exemple 9.1.9

$$E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous espace vectoriel car

$$U_1 = (1, 0) \in E_1$$

$$U_2 = (0, 1) \in E_2$$

$$U_1 + U_2 = (1, 1) \notin E_1 \cup E_2$$

car $(1, 1) \notin E_1$ et $(1, 1) \notin E_2$.

9.1.2 Somme de deux sous espaces vectoriels

Définition 9.1.10 Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{k} -espace vectoriel. On appelle somme de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 et on note $E_1 + E_2$ l'ensembles suivant

$$E_1 + E_2 = \{U \in E / \exists U_1 \in E_1, \exists U_2 \in E_2 / U = U_1 + U_2\}.$$

Proposition 9.1.11 La somme de deux sous espaces vectoriels E_1, E_2 (d'un même \mathbb{k} -espace vectoriel) est un sous espace vectoriel de E contenant $E_1 \cup E_2$ i.e $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$.

9.1.3 Somme directe de deux sous espaces vectoriels

On dira que la somme $E_1 + E_2$ est directe si $\forall U \in E_1 + E_2$ il existe un vecteur $U_1 \in E_1$ unique et un vecteur $U_2 \in E_2$ unique telque $U = U_1 + U_2$. On note $E_1 \oplus E_2$.

Théorème 9.1.12 Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E d'un même \mathbb{k} -espace vectoriel la somme $E_1 + E_2$ est directe si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

9.1.4 Sous espace supplémentaires

Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E d'un même \mathbb{k} -espace vectoriel, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E_1 \oplus E_2$.

Exemple 9.1.13

$$E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}, \quad E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2.$$

9.2 Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ par E .

Définition 9.2.1 Soit E un espace vectoriel et e_1, e_2, \dots, e_n des vecteurs de E .

1. On dit que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sont libres ou linéairement indépendant

$$\text{si : } \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{k}}.$$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.

2. On dit que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une familles génératrice de E ou que E est engendré par $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ si

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k} / x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

On dit que x est combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n .

3. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une famille libre et génératrice de E alors $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est appelée base de E .

Remarque 9.2.2 Dans un espace vectoriel E , tout vecteur non nul est libre.

Théorème 9.2.3 Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ sont deux bases pour un même espace vectoriel E alors $n = m$.

En d'autre terme, si un espace vectoriel E admet une base alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre la ne dépend pas de la base mais il dépend seulement de l'espace E , d'où la définition suivantes

Définition 9.2.4 Soit E un espace vectoriel et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base pour E , le nombre n est appelé dimension de E et il est noté $\dim E$.

Exemple 9.2.5 1. Cherchons une base de \mathbb{R}^3 , il faut trouver une famille de vecteurs dans \mathbb{R}^3 qui engendrent \mathbb{R}^3 et qui soit une famille libre.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \end{aligned}$$

en posant $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, on voit bien que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille génératrice pour \mathbb{R}^3 , montrons qu'elle est libre $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in$

$$\mathbb{R}, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

ainsi $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille libre, d'où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base pour \mathbb{R}^3 qu'on l'appelle la base canonique de \mathbb{R}^3 et on a $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

De la même manière, on a la base canonique de \mathbb{R}^2 est $\{(1, 0), (0, 1)\}$ et celle de \mathbb{R}^4 est $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

2. Montrons que les vecteurs $v_1 = (1, -1)$ et $v_2 = (2, 1)$ sont une autre base de \mathbb{R}^2 .

$$\{v_1, v_2\} \text{ est génératrice} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / (x, y) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = -\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \lambda_1 = \frac{x-2y}{3} \\ \lambda_2 = \frac{x+y}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\{v_1, v_2\}$ une partie génératrice de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2\} \text{ est libre} &\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi $\{v_1, v_2\}$ une base de \mathbb{R}^2 .

Théorème 9.2.6 Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de $E \Leftrightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ famille génératrice de $E \Leftrightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ famille libre.
2. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ sont p vecteurs dans E , avec $p > n$ alors $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ ne peut être libre, de plus si $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ est génératrice alors il existe n vecteurs parmi $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ qui forment une base pour E .
3. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ sont p vecteurs dans E , avec $p < n$ alors $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ ne peut être génératrice, de plus si $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ est libre alors il existe $(n-p)$ vecteurs $\{e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n\}$ dans E tels que $\{e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n\}$ est une base pour E .
4. Si F est un sous espace vectoriel de E alors $\dim F \leq n$ et de plus : $\dim F = n \Leftrightarrow E = F$.

Exemple 9.2.7 *Cherchons une base pour l'espace*

$$F = \{(x + y, 2x + z, 2y - z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

comme $F \subset \mathbb{R}^3$ alors $\dim F \leq 3$, donc la base de F ne peut posséder plus de trois vecteurs.

$$\begin{aligned} (x + y, 2x + z, 2y - z) &= (x, 2x, 0) + (y, 0, 2y) + (0, z, -z) \\ &= x(1, 2, 0) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, -1) \end{aligned}$$

d'où les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, 1, -1)$ forment une famille génératrice pour F , si cette famille est libre alors elle formera une base pour F , $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(1, 0, 2) + \lambda_3(0, 1, -1) &= (0, 0, 0) \\ (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_2 - \lambda_3) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = -2\lambda_1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas libre, mais d'après le théorème on peut extraire de cette famille une base de F .

Pour le faire on doit chercher deux vecteurs de cette famille qui sont libres, si on trouve ces deux vecteurs, alors ils forment une base pour F , si on ne les trouve pas alors on cherchera un vecteur libre (non nul) et ce vecteur sera une base de F .

Prenons par exemple v_1 et v_2

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(1, 0, 2) &= (0, 0, 0) \\ (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, 2\lambda_2) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\{v_1, v_2\}$ est une base pour F et $\dim F = 2$.

On a montré que $\dim F = 3$ et $F \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, d'où $F = \mathbb{R}^3$.

9.3 Applications linéaires

Définition 9.3.1 Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux \mathbb{k} -espaces vectoriels et soit f une application de E dans F . On dit que f est une application linéaire si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

ou d'une manière équivalente

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

1. Si de plus f est bijective, on dit alors que f est un isomorphisme.
2. Une application linéaire de $(E, +, \cdot)$ dans $(F, +, \cdot)$ est dite un endomorphisme.
3. Un isomorphisme de $(E, +, \cdot)$ dans $(F, +, \cdot)$ est dite un automorphisme.

Exemple 9.3.2 *L'application*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + 2y$$

est une application linéaire car $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Remarque 9.3.3 *On peut montrer facilement que la somme, le produit d'une application linéaire par un scalaire et composé de deux applications linéaire est une application linéaire.*

Proposition 9.3.4 *Soit f une application linéaire de E dans F .*

1.

$$f(0_E) = 0_F$$

2.

$$\forall x \in E, f(-x) = -f(x).$$

Preuve. On a

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_F$$

$$f(-x) = f(x - x) = f(0_E) = 0_F \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

□

Définition 9.3.5 *Soit f une application linéaire de E dans F .*

1. *On appelle image de f et on note $\text{Im } f$ l'ensemble défini comme suit*

$$\text{Im } f = \{f(x) / x \in E\}$$

2. On appelle noyau de f et on note $\ker f$ l'ensemble défini comme suit

$$\ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

on note $\ker f$ par $f^{-1}(\{0_F\})$.

3. Si f est une application linéaire de E dans F , alors $\text{Im } f$ est un sous espace vectoriel de F et $\ker f$ sous espace vectoriel de E .

4. Si $\dim \text{Im } f = n < +\infty$ alors n est appelé rang de f et on note $\text{rg}(f)$.

Exemple 9.3.6 1. Déterminer le noyau de l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow x + 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -2y\} \\ &= \{(-2y, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 1) / y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

donc $\ker f$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , il est de dimension 1 et il admet pour base $\{(-2, 1)\}$.

2. Cherchons Image de l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (-x + y, x - 3z, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{f(x, y, z)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(-x + y, x - 3z, y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(-x, x, 0) + (y, 0, y) + (0, -3z, 0)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{x(-1, 1, 0) + y(1, 0, 1) + z(0, -3, 0)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $\{(-1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (0, -3, 0)\}$,

comme ces vecteurs sont libres alors ils forment une base pour $\operatorname{Im} f$, donc

$$\dim \operatorname{Im} f = 3$$

donc $\operatorname{rg}(f) = 3$, et par conséquent $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Proposition 9.3.7 Soit f est une application linéaire de E dans F . On a les équivalences suivantes

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$$

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}.$$

Exemple 9.3.8 Dans l'exemple précédent, on a $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, donc f est surjective.

Montrons que f est injective

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + y = 0 \text{ et } x - 3z = 0 \text{ et } y = 0\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ et } z = 0 \text{ et } y = 0\} \\
&= \{(0, 0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Donc f est injective, par conséquent f bijective.

9.4 Applications linéaire sur des espaces de dimension finie

Proposition 9.4.1 Soit E et F deux \mathbb{k} -espaces vectoriels et f et g deux applications linéaires de E dans F . Si E est de dimension finie n et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E alors

$$\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$$

Preuve.

1. On a E est engendré par $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, donc $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

comme f et g sont applications linéaires alors

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n)$$

$$g(x) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + \dots + \lambda_n g(e_n)$$

donc si on suppose que $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, f(e_k) = g(e_k)$, on déduit alors que

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

2. Si $\forall x \in E, f(x) = g(x)$, et comme $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ famille génératrice de E , alors

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k} :$$

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

donc

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n)$$

on a f et g sont applications linéaires alors

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + \dots + \lambda_n g(e_n)$$

on déduit que $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $f(e_k) = g(e_k)$.

□

Cette proposition montre qu'une application linéaire sur un espace de dimension finie est déterminée de manière unique par ses valeurs sur une base de E .

Exemple 9.4.2 Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 telle que $f(1, 0) = (2, 1)$, $f(0, 1) = (-1, -1)$

alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

donc

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x(1, 0) + y(0, 1)) \\ &= xf(1, 0) + yf(0, 1) \\ &= x(2, 1) + y(-1, -1) \\ &= (2x - y, x - y). \end{aligned}$$

Théorème 9.4.3 Soit f est une application linéaire de E dans F avec dimension de E finie, on a

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Exemple 9.4.4 Pour l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (-x + y, x - 3z, y). \end{aligned}$$

On avait montré que $\dim \ker f = 0$ et $\dim \operatorname{Im} f = 3$, on voit bien que

$$\dim \ker f = 0 + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3.$$

Proposition 9.4.5 Soit f est une application linéaire de E dans F avec $\dim E = \dim F < +\infty$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme} &\Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim F \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow \dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}. \end{aligned}$$

De cette proposition, on déduit que si f est un isomorphisme de E dans F avec $\dim E$ finie alors nécessairement $\dim E = \dim F$, on d'autre termes si $\dim E \neq \dim F$ alors f ne peut être un isomorphisme.

Exemple 9.4.6 Considerons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (2x - y, x - y). \end{aligned}$$

On remarque que $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc f peut être un isomorphisme. Pour vérifier utilisons une des équivalences de la proposition, par exemple cherchons $\ker f$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 0 \text{ et } x - y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x = y \text{ et } y = x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x = 0 \text{ et } y = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

donc f est un isomorphisme.

9.5 Exercices

Exercice 9.5.1 On considère les familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 suivantes :

$$F_1 = \{u_1 = (1, 1, 3), u_2 = (1, 2, 0)\}, F_2 = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (3, 0, 0)\}$$

et $F_3 = \{w_1 = (1, 1, 2), w_2 = (1, 3, 1), w_3 = (0, 0, 1), w_4 = (2, 4, 0)\}$

Déterminer les familles libres, les familles génératrices de \mathbb{R}^3 et les bases de \mathbb{R}^3 .

Exercice 9.5.2 Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ deux sous ensembles de \mathbb{R}^3 et $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E et F sont deux sous espaces vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

3. Montrer que $\{v, w\}$ est une base de F .

4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

5. Soit $X = (x, y, z)$, exprimer X dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice 9.5.3 Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow -2x.$$

-Montrer que f est linéaire.

-Montrer que f est un isomorphisme.

9.5.1 Solutions des exercices

Exercice. 9.6.1

-Pour F_1 :

- F_1 est-elle libre ?

Soient α et β deux réels

$$\begin{aligned}
\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \alpha = \beta = 0
\end{aligned}$$

donc, F_1 est une famille libre.

- F_1 est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. est ce qu'il existe deux réels a et b tel que : $u = au_1 + bu_2$?

on a :

$$u = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b \dots\dots\dots(1) \\ y = a + 2b \dots\dots\dots(2) \\ z = 3a \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

L'équation (3) donne $a = \frac{z}{3}$ et les deux autres équations donne $b = y - x$ et $a = 2x - y$.

Donc pour les vecteurs $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ où $2x - y \neq \frac{z}{3}$, on ne peut pas trouver deux

scalaires a et b tel que : $u = au_1 + bu_2$. Par exemple on prend $u = (4, 2, 1)$

Ce qui montre que F_1 n'est pas une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

Alors F_1 ne forme pas une base de \mathbb{R}^3 .

—Pour F_2 :

- F_2 est-elle libre ?

Soient α, β et γ trois réels

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ \beta \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

donc, F_2 est une famille libre.

F_2 est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. est ce qu'il existe trois réels a, b et c tel que : $u = av_1 + bv_2 + cv_3$?

on a :

$$u = av_1 + bv_2 + cv_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2b + 3c \\ y = b \\ z = -a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{3}(x - 3y + z) \\ b = y \\ a = y - z \end{cases}$$

Donc, pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut trouver trois scalaires $a = y - z$, $b = y$ et $c = \frac{1}{3}(x - 3y + z)$ tel que : $u = av_1 + bv_2 + cv_3$.

Ce qui montre que F_2 est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

Alors F_2 forme une base de \mathbb{R}^3 .

-Pour F_3 :

- F_3 est-elle libre ?

F_3 n'est pas une famille libre, car $w_4 = w_1 + w_2 - 3w_3$

- F_3 est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. est ce qu'il existe trois réels a, b, c et d tel que : $u = aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4$?

on a :

$$u = aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b + 2d \\ y = a + 3b + 4d \\ z = 2a + b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - d \\ b = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - d \\ c = \frac{1}{2}y + z - \frac{5}{2}x + 3d \end{cases}$$

Donc, pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut trouver quatre scalaires $a = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - d$, $b = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - d$, $c = \frac{1}{2}y + z - \frac{5}{2}x + 3d$ et $d = t$ tel que : $u = aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4$.

Ce qui montre que F_3 est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

Comme F_3 est liée, alors elle ne forme pas une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice.9.6.2

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$,

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ deux sous ensembles de \mathbb{R}^3 et $u = (1, 1, 1)$,

$$v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que E et F sont deux sous espaces vectoriel de \mathbb{R}^3 .

(i)- $0_{\mathbb{R}^3} \in E, 0_{\mathbb{R}^3} \in F$:

$$\text{on a : } 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E, \text{ car } 0 + 0 - 2 \times 0 = 0 \text{ et } 2 \times 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\text{et on a aussi : } 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F, \text{ car } 0 + 0 - 0 = 0$$

(ii)- $\alpha u_1 + \beta u'_2 \in E, \alpha v_1 + \beta v'_2 \in F$:

Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u'_2 = (x'_1, y'_1, z'_1)$ deux vecteurs de E et $v_1 = (x_2, y_2, z_2)$

et $v'_2 = (x'_2, y'_2, z'_2)$ deux vecteurs de F et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donc,

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \text{ et } 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ x'_1 + y'_1 - 2z'_1 = 0 \text{ et } 2x'_1 - y'_1 - z'_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x_1 + y_1 - 2z_1) = 0 \text{ et } \alpha(2x_1 - y_1 - z_1) = 0 \\ \beta(x'_1 + y'_1 - 2z'_1) = 0 \text{ et } \beta(2x'_1 - y'_1 - z'_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x'_1) + (\alpha y_1 + \beta y'_1) - 2(\alpha z_1 + \beta z'_1) = 0 \text{ et}$$

$$2(\alpha x_1 + \beta x'_1) - (\alpha y_1 + \beta y'_1) - (\alpha z_1 + \beta z'_1) = 0$$

$$\Rightarrow u_1 + u'_2 = (\alpha x_1 + \beta x'_1, \alpha y_1 + \beta y'_1, \alpha z_1 + \beta z'_1) \in E$$

et

$$\begin{cases} x_2 + y_2 - z_2 = 0 \\ x'_2 + y'_2 - z'_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x_2 + y_2 - z_2) = 0 \\ \beta(x'_2 + y'_2 - z'_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha x_2 + \beta x'_2) + (\alpha y_2 + \beta y'_2) - (\alpha z_2 + \beta z'_2) = 0$$

$$\Rightarrow v_1 + v'_2 = (\alpha x_2 + \beta x'_2, \alpha y_2 + \beta y'_2, \alpha z_2 + \beta z'_2) \in F$$

de (i) et (ii) on déduit que E et F sont des s.e.v de \mathbb{R}^3

2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

Soit $k = (x, y, z) \in E$, alors :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2z \\ 2(-y + 2z) - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2z \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

donc

$$k = (x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1)$$

E est génératrice par la famille $\{u = (1, 1, 1)\}$ et comme $u \neq 0$, alors elle forme une

base de E et on a : $\dim E = 1$

3. Montrer que $\{v, w\}$ est une base de F .

Soit $k = (x, y, z) \in F$, alors :

$$x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$$

donc

$$k = (x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

$$= xv + yw$$

F est génératrice par la famille $\{v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 1)\}$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha v + \beta w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors la famille $\{v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 1)\}$ est libre.

alors elle forme une base de E et on a : $\dim E = 2$

4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Il faut montrer que $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $E + F = \mathbb{R}^3$

(a) $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$: Soit $k = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$k = (x, y, z) \in E \cap F \Leftrightarrow (k = (x, y, z) \in E \text{ et } k = (x, y, z) \in F)$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0 \text{ et } x + y - z = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \dots\dots (1) \\ 2x - y - z = 0 & \dots\dots (2) \\ x + y - z = 0 & \dots\dots (3) \end{cases}$$

De l'éq (3) on obtient : $z = x + y$, on remplace dans (1) et (2), on trouve :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

donc,

$$z = x = y = 0$$

Alors, le seul vecteur de $E \cap F$ est le vecteur nul, donc $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$.

(b) $E + F = \mathbb{R}^3$: il faut montrer que n'importe quel vecteur $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$ de \mathbb{R}^3 s'écrit sous la forme : $u_3 = (x_3, y_3, z_3) = u_1 + u_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ où

$u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$. On obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \\ 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \\ 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{array} \right.$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y_1 = z_1 = x_3 + y_3 - z_3 \\ x_2 = -2x_3 - y_3 + 3z_3 \\ y_2 = -x_3 + z_3 \\ z_2 = -x_3 - y_3 + 2z_3 \end{array} \right.$$

De (a) et (b) on déduit que : $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Remarque :

Pour montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$, on peut montrer que : la famille $\{u, v, w\}$ forme une base de \mathbb{R}^3 .

5. Soit $X = (x, y, z)$, exprimer X dans la base $\{u, v, w\}$.

On cherche α, β et γ tel que : $X = (x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$$X = (x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha + \gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - \alpha \\ \gamma = y - \alpha \\ \alpha + (x - \alpha) + (y - \alpha) = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -y + z \\ \gamma = -x + z \\ \alpha = x + y - z \end{cases}$$

Exercice 9.6.3

Soit l'application

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow -2x.$$

$-f$ est linéaire car $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= -2(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda(-2x) + \mu(-2y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

$-f$ est un isomorphisme , en effet : f est évidemment bijective (l'application réciproque

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x).$$

Bibliographie

- [1] Kada Allab, "*Elements d'analyse*", *Entreprise Nationale*, 1990.
- [2] Nicolas Bourbaki, "*Sur certains espaces vectoriels topologiques* ", *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 2, 1950.
- [3] Nicolas Bourbaki, "*Espaces vectoriels topologiques*", *Masson*, 1981, 3e éd.
- [4] René Cori et Daniel Lascar, "*Logique mathématique*", tomes 1 , *Masson*, 2003.
- [5] René David, Karim Nour et Christophe Raffalli, "*Introduction à la logique*", *Cours et exercices corrigés*, *Dunod*, 2001.
- [6] Yannis Delmas-Rigoutsos et René Lalement, "*La Logique ou l'art de raisonner*", *Paris*, *Le Pommier*, 2000.
- [7] C.Djabbour, "*AnalyseI*", *OPU*, *Oran*, 2006.
- [8] Dominique Flament, "*Histoire des nombres complexes : Entre algèbre et géométrie*", *Paris*, *CNRS Éditions*, 2003.
- [9] Roger Godement, "*Cours d'algèbre*", *Edition*, 2. *Publisher*, *Hermann*, 1966.
- [10] Xavier Gourdon, "*Les maths en tête* ", *Analyse*, *Ellipses*, 2008.

- [11] *Amara Hitta, "Cours d'algebre et exercices corriges", OPU, 1994.*
- [12] *Marie Josée et Durand Richard, "Nombre, grandeur, quantité, opérations : de la transformation conjointe de leurs significations ", 1998.*
- [13] *William Kahan, "Branch cuts for complex elementary functions or Much ado about nothing's sign bit ", The State of the Art in Numerical Analysis, Clarendon Press, 1987.*
- [14] *René Lalement, "Logique, réduction, résolution", Publisher, Masson, 1990.*
- [15] *Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, "Cours de mathématiques", t. 2 : Analyse, Bordas, 1977, 4e éd.*
- [16] *Serge Lang, "Structures algébriques", Paris, InterEditions, 1976.*
- [17] *Reinhold Remmert, " Les nombres complexes, Le théorème fondamentale de l'algebre ", Vuibert, 1998.*
- [18] *Michel de Rougemont et Richard Lassaigne, " Logique et fondements de l'informatique", Hermes Science Publications, 1997.*
- [19] *M.H.Mortad, "Exercices corrigés d'Algèbre", Dar el Bassair, Alger, 2013.*
- [20] *M.H.Mortad, "Exercices corrigés d'Analyse", Edition Houma, Alger, 2011.*
- [21] *E. Study et É. Cartan, " Les nombres complexes ", Sci. Math., vol. 1, t. 1, 1908.*