



République Algérienne Démocratique et populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des sciences et de la technologie d'Oran Mohammed Boudiaf  
USTO-MB

# ELECTRICITE

**E**lectrostatique  
**E**lectrocinétique  
**E**lectromagnétisme  
**E**xercices résolus



Docteur: Belkharroubi –Fadila

*Université des sciences et la technologie d'Oran  
Mohamed Boudiaf USTO-MB. Algérie  
2017/2018*

# *Introduction*

Conforme aux programmes du système Licence –Master-Doctorat (L.M.D.), ce fascicule s'adresse aux étudiants de première année de l'université spécialité Sciences et technologie (S.T) et sciences de la matière (SM). Cet ouvrage de référence traitant l'ensemble du programme du module Physique2, est conçu de façon à réduire au mieux les difficultés que peut rencontrer l'étudiant, à reprendre et approfondir le cours, à confronter les prédictions théoriques aux résultats expérimentaux.

Ce polycopié de référence traitant l'ensemble du programme du module d'électricité (physique 2), est planifié de la manière suivante:

- **Un rappel mathématiques:** vu le lien étroit entre notre module et certaines notions de mathématiques, on a consacré le début de ce programme à l'introduction de différents éléments de base tel que: Eléments de longueur, de surface, de volume dans des systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques, dérivées et intégrales multiples...

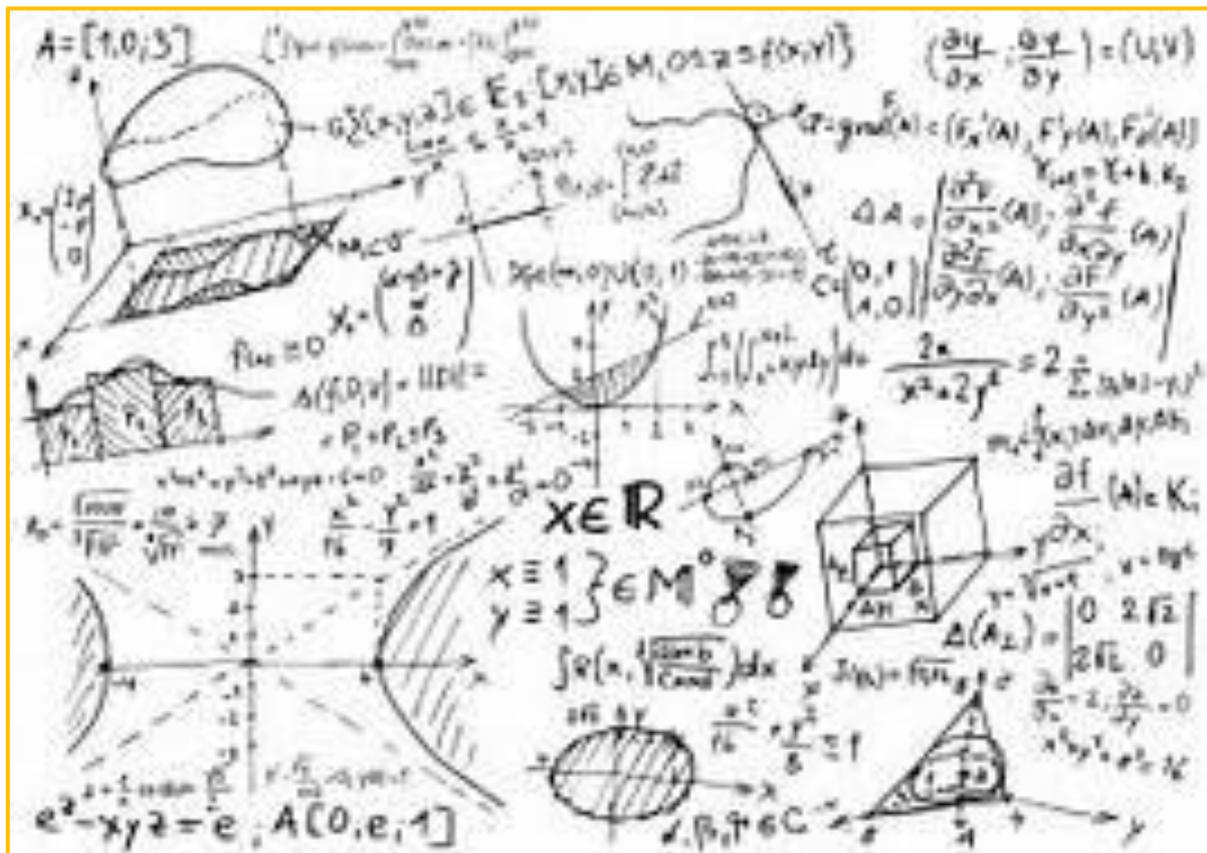
Le programme d'électricité et magnétisme est divisé en trois parties:

- **Electrostatique:** qui étudie les des phénomènes où agissent des charges électriques immobiles.
- **Electrocinétique:** est le domaine de la physique qui étudie le transport des charges électriques dans les circuits conducteurs.
- **Electromagnétisme:** Domaine de la physique qui s'intéresse à l'étude des charges électriques en mouvement relatif les unes par rapport aux autres, du champ électrique et du champ magnétique réunis dans le concept de champ électromagnétique.

Un nombre important d'exercices résolus est mis à la disposition de l'étudiant.

Notre ambition est de fournir une documentation aussi complète que possible.

# Rappels mathématiques



## 1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons faire passer en revue les principales notions de mathématiques qui vont nous servir à résoudre différents exercices concernant ce chapitre.

Nous avons insisté sur le calcul des dérivées et des intégrales dans différents systèmes de coordonnées: cartésiennes, cylindriques et sphériques. Généralement, ce sont les symétries du problème qui nous font choisir, et plus particulièrement les symétries de la répartition de charges ou de courants. Par exemple, pour le champ autour d'un fil, il est constant sur tous les points d'une surface à une distance  $d$  du fil, on choisit dans ce cas un repère cylindrique. Pour le champ autour d'une source ponctuelle, ce champ est constant sur tous les points d'une sphère de rayon  $r$  autour de la source on utilise dans ce cas les coordonnées sphériques.

## 2. Eléments de longueur, de surface, de volume dans des systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques:.

### 2.1. Coordonnées cartésiennes

Dans le repère d'espace  $(O, x, y, z)$  défini précédemment (voir figure 1), un point  $M$  est repéré par ses coordonnées d'espace  $(x, y, z)$  correspondant à la mesure algébrique de la projection de  $M$  successivement sur les 3 axes du repère. Ces 3 coordonnées sont de même nature et homogènes à une longueur.

La base orthonormée associée à ce système d'axe est notée  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

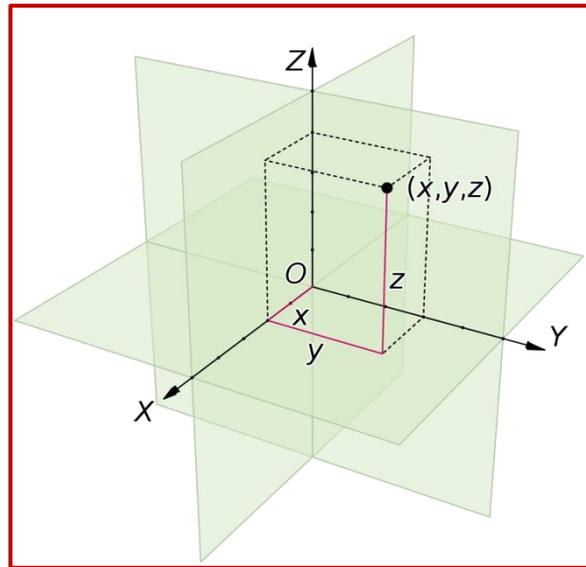
C'est une base qui ne change pas au cours du temps : ces vecteurs gardent la même direction, le même sens et la même norme au cours du temps. On dit encore que la base est *fixe* dans le repère. Ces vecteurs peuvent être représentés n'importe où dans l'espace mais en général ils sont représentés au point origine  $O$ .

La connaissance du vecteur position  $\vec{OM}$  permet aussi de repérer le point  $M$ . Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , correspondent aux coordonnées du point  $M$ :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad (1)$$

$(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes du point  $M$ .

$(x, y, z)$  sont les composantes du vecteur position  $\vec{OM}$  dans la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .



**Fig I.1:** Coordonnée cartésienne

La base associée à M est

$$\vec{u}_x \rightarrow \text{axe Ox}$$

$$\vec{u}_y \rightarrow \text{axe Oy}$$

$$\vec{u}_z \rightarrow \text{axe Oz.}$$

### 2.1.1. Élément de longueur:

Le vecteur de déplacement s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Selon l'axe Ox, l'élément de longueur  $d\ell$  engendré par le déplacement de M vers M' est :

$$\vec{d\ell} = dl \vec{u}_x$$

Dans le plan (xoy), l'élément de longueur  $d\ell$  engendré par le déplacement de M vers M' est :

$$\vec{d\ell} = dl \vec{u}_x + dl \vec{u}_y$$

Dans l'espace (oxyz), l'élément de longueur  $d\ell$  engendré par le déplacement de M vers M' est :

$$\vec{d\ell} = dl \vec{u}_x + dl \vec{u}_y + dl \vec{u}_z$$

L'élément de longueur  $dl$  s'exprime en  $m$ .

### 2.1.2. Élément de surface:

Dans le plan (xOy), l'élément de surface engendré par le déplacement de M vers M' décrit l'aire de l'élément de cette surface :  $dS_1 = dx.dy$ .

Dans le plan (yOz) l'élément de surface :  $dS_2 = dy.dz$ .

Dans le plan (zOx) l'élément de surface :  $dS_3 = dz.dx$ .

$dS$  s'exprime en  $m^2$

**2.1.3. Élément de volume.**

Dans l'espace  $(O,x,y,z)$ , l'élément de volume engendré par le déplacement de M vers M' décrit le volume infinitésimal:  $dV = S_{\text{base}} \cdot H_{\text{hauteur}}$  :

$$dV = dx dy dz.$$

$dV$  s'exprime en  $m^3$ .

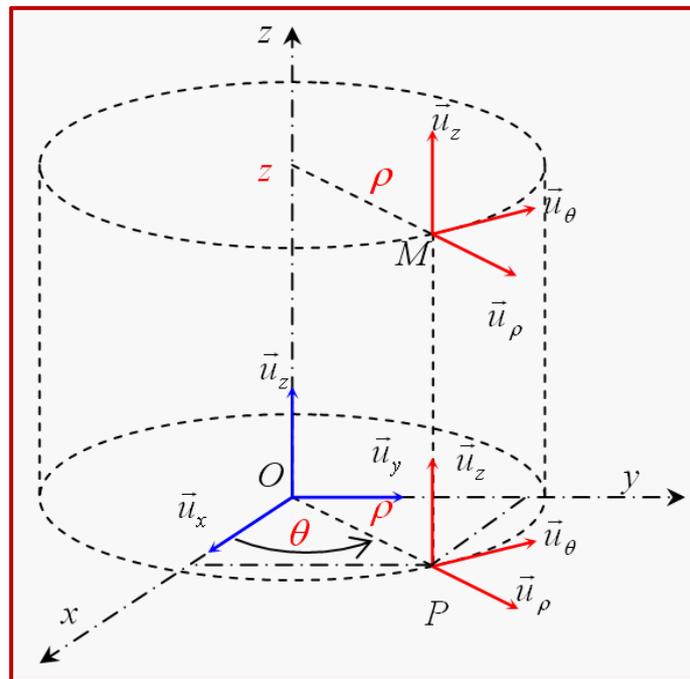
**2.2. Coordonnées cylindriques**

Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques il suffit de compléter le système de coordonnées polaires (dans le plan  $xOy$ ) par un troisième axe : l'axe  $Oz$  avec sa coordonnée cartésienne  $z$  (appelée la cote) (voir figure 2)

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques  $r, \theta$  et  $z$  dans la base associée au repère cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Avec  $r \geq 0$  et  $0 \leq \theta \leq 2\pi$



**Fig I.2:** Coordonnée cylindrique

La base cylindrique associée à M est :

$\vec{u}_r$  radial (perpendiculaire à l'axe  $Oz$ )

$\vec{u}_\theta$ , orthoradial (perpendiculaire. à  $Oz$  et  $\vec{u}_r$ )

$\vec{u}_z$  vecteur axial (suivant  $Oz$ )

### 2.2.1. Élément de longueur:

Le vecteur de déplacement est :

Si on fait varier  $r$  d'une valeur de  $dr$ , l'élément de longueur  $d\ell$  s'écrit :

$$d\ell = dr,$$

Si on fait varier l'angle  $\theta$  d'un élément  $d\theta$ , l'élément de longueur  $d\ell$  s'écrit :

$$d\ell = r d\theta$$

Si on fait varier le déplacement  $z$  d'un élément  $dz$ , l'élément de longueur  $d\ell$  s'écrit :

$$d\ell = dz$$

### 2.2.2. Élément de surface

Dans ce repère cylindrique, élément de surface  $dS$  engendré par le déplacement de  $M$  en gardant l'une des coordonnées fixe :

- Si on fixe le côté  $z$ :  $dS_z = dr \cdot r d\theta$
- Si on fixe le rayon  $r$ :  $dS_r = r d\theta \cdot dz$
- Si l'angle  $\theta$  est constant:  $dS_\theta = dr \cdot dz$

### 2.2.3. Élément de volume infinitésimal

Nous considérons le volume infinitésimal  $dV$  engendré par le déplacement du point  $M$  est un cube de hauteur  $dz$ .

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$$

## 2.3. Coordonnées sphériques

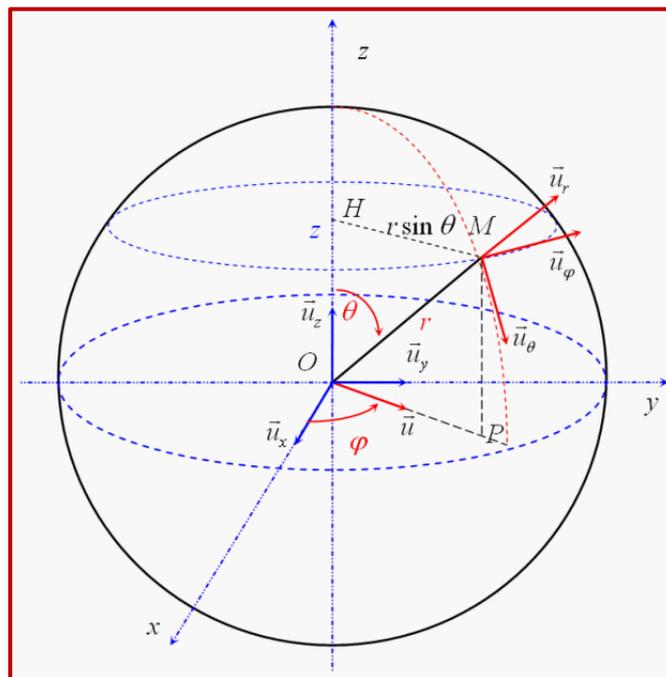


Fig I.3: Coordonnée sphérique

Dans ce système, la position du point M est donnée par  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  dans la base associée au repère sphériques  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

$r = OM$  toujours positif

$$\theta = (\vec{OZ}, \vec{OM})$$

$$\varphi = (\vec{OX}, \vec{Om})$$

Le déplacement infinitésimal du point M:

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Avec:  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

### 2.3.1. L'élément de longueur:

Si on fait varier  $r$  d'une valeur de  $dr$ , l'élément de longueur  $d\ell$  s'écrit :

$$d\ell = dr,$$

Si on fait varier l'angle  $\theta$  d'un élément  $d\theta$ , l'élément de longueur  $d\ell$  s'écrit :

$$d\ell = r d\theta$$

Si on fait varier l'angle  $\varphi$  d'un élément  $d\varphi$ , l'élément de longueur  $d\ell$  s'écrit :

$$d\ell = r \sin \theta d\varphi$$

### 2.3.2. Élément de surface:

L'élément de surface  $dS$  engendré par le déplacement de M en gardant l'une des coordonnées fixe est :

- Si on fixe  $r$  :  $dS = r \cdot d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\theta \cdot d\varphi$
- Si on fixe  $\theta$  :  $dS = r \sin \theta d\varphi dr$
- Si on fixe  $\varphi$  :  $dS = r dr \cdot d\theta$

### 2.3.3. Élément de volume infinitésimal:

On considère le volume infinitésimal  $dV$  engendré par le déplacement du point M, ce volume est donné par :

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

$$dV = r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$$

## 3. Dérivées:

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont fixes ; ils sont donc considérés comme constants lors du calcul de la dérivée.

**3.1. En coordonnées cartésiennes:**

La dérivée première du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

*La dérivée première du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées cartésiennes*

Compte tenu du fait que  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont des vecteurs constants, s'écrit simplement :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

*La dérivée seconde du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées cartésiennes*

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \right)$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z$$

**3.2. En coordonnées cylindriques:**

Par contre, en coordonnées cylindriques,  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  varient.

*Le calcul de la dérivée première d'un vecteur en coordonnées cylindriques*

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z)$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

Pour calculer la dérivée de  $\vec{u}_r$ , on exprime ce vecteur dans la base de coordonnées cartésiennes:

$$\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$$

Avec  $\theta$  qui dépend du temps.

En faisant un changement de variable:

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y)$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y = \vec{u}_\theta$$

D'où finalement:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

De même,

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (-\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta \vec{u}_x - \sin\theta \vec{u}_y = -\vec{u}_r$$

Soit finalement:

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

En conclusion:

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

**Le calcul de la dérivée seconde d'un vecteur en coordonnées cylindriques**

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \right)$$

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \left( \frac{d^2r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right) + \left( \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right) + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z$$

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_r + \left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z$$

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

### 3.3. En coordonnées sphériques:

La dérivée première du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées sphériques

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

La dérivée seconde du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2\theta \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_r \\ &+ \left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} - r \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_\theta \\ &+ \left( 2r \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + 2 \frac{dr}{dt} \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} + r \sin\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \vec{u}_\varphi \\ \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) \vec{u}_r + \left( 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} - r \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 \right) \vec{u}_\theta \\ &+ (2r \cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + 2 \dot{r} \sin\theta \dot{\varphi} + r \sin\theta \ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

## 4. Intégrales multiples:

### 4.1- Intégrale simple:

Aire sous la courbe Méthode des rectangles :

Pour calculer l'aire sous la courbe représentative d'une fonction  $f$  continue et positive sur un intervalle, on approche l'aire par une série de rectangles. Pour chaque valeur de  $x$ , la hauteur du rectangle est  $f(x)$ , et on représente sa largeur par  $dx$ , c'est-à-dire une petite longueur autour de  $x$ .

L'aire d'un de ces rectangles est donc :  $f(x) \times dx$

L'aire sous la courbe peut donc être approchée par :  $\sum_{x=a}^b f(x) dx$

Plus les largeurs  $dx$  sont petites, plus l'approximation est juste. L'aire sous la courbe est donc la limite de la somme précédente :  $\lim_{dx \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) dx$

#### 4.1.1. Définition de l'intégrale :

Cette limite est appelée intégrale de  $f$  de  $a$  à  $b$ , et est notée .  $\int_a^b f(x) dx$

L'intégrale se calcule en unités d'aire (u.a).

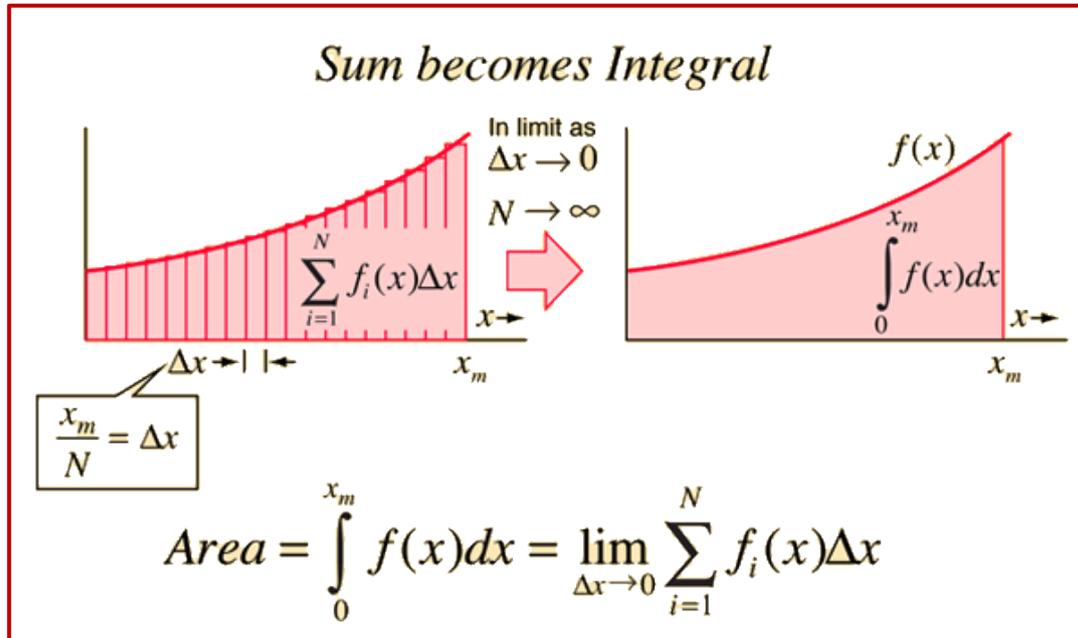
Les valeurs  $a$  et  $b$  sont appelées les bornes de l'intégrale.

### 4.1.2. Calcul d'intégrales :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . Soit  $F$  une de ses primitives.

Alors on peut calculer de la manière suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



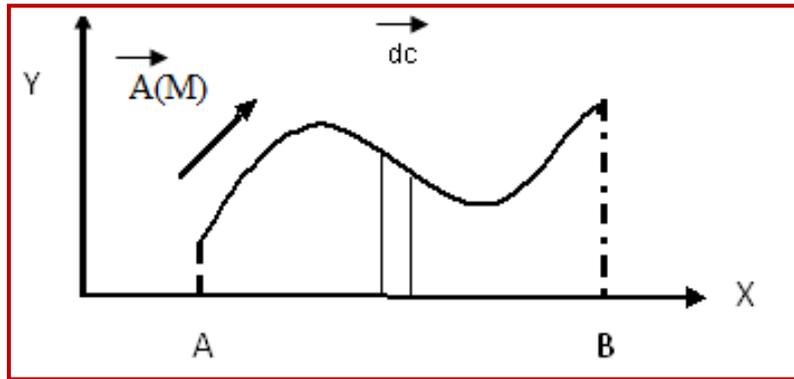
**Fig I.4:** L'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  peut-être interprétée comme l'aire du domaine par: (1) la courbe représentative de la fonction  $f$  (d'équation  $y= f(x)$ ), (2) l'axe des abscisses et (3-4) les droites verticales d'abscisses  $a$  et  $b$ .

### 4.1.3. Circulation d'un champ de vecteurs:

Soit  $E$  un **espace affine** sur lequel est défini un **champ de vecteurs**, on désigne par  $\vec{A}(M)$  le champ de vecteurs au point  $M$  de  $E$  et  $\overrightarrow{dM}$  un vecteur déplacement élémentaire de  $M$ . On appelle circulation élémentaire de  $A(M)$  le produit scalaire  $dC = \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$ .  $L$  étant un parcours entre deux points  $A$  et  $B$  de  $E$ , le champ de vecteur  $\vec{A}(M)$  étant défini et continu en tout point de  $L$ .

On appelle circulation de  $\vec{A}(M)$  sur le parcours  $L$  l'intégrale curviligne:

$$\int_A^B dC = \int_A^B \vec{A}(M) \cdot d\vec{M}$$



**Fig I.5:** Circulation d'un champ de vecteur

**Remarque:**

Si nous choisissons un contour fermé, nous utilisons le symbole  $C = \oint \vec{E} d\vec{C}$ .

Dans ce cas particulier, on a  $\oint \vec{E} d\vec{C} = 0$

**4.2. Intégrale double:**

On fixe un repère orthonormé direct de l'espace  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  Un point tel que:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

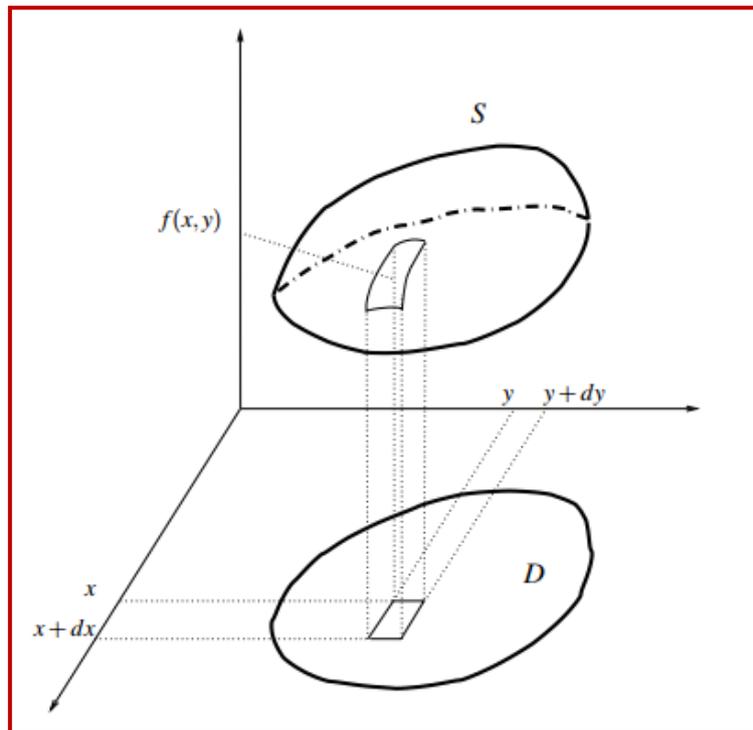
a donc pour coordonnées  $M(x,y,z)$ .

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, que l'on suppose positive pour commencer. L'équation  $z = f(x,y)$  définit donc une surface  $S$ . On fixe une partie  $D$  du plan  $z = 0$  ; on s'intéresse au volume de l'ensemble des points de l'espace compris entre  $D$  et la surface  $S$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $M(x,y,z)$  dont la coordonnée  $z$  est comprise entre 0 et  $f(x,y)$ . Pour calculer le volume de  $V$ , on peut décomposer  $V$  en une infinité de pavés infinitésimaux au-dessus de chaque point  $(x,y)$ , de longueur  $dx$ , largeur  $dy$  et hauteur  $f(x,y)$  :

$dx dy$ , parfois noté  $dS$ , est l'élément de surface, c'est à dire l'aire de la base de ce pavé infinitésimal.

La hauteur du pavé vaut  $f(x,y)$ , donc son volume est  $f(x,y)dx dy$ , et la « somme » de tous ces volumes infinitésimaux correspond une intégrale double :

$$\text{Volume}(V) = \iint_D f(x,y) dx dy$$



**Fig I.6:** Double intégral comme volume sous une surface

Si  $D$  désigne un domaine quarrable, son aire est notée.  $\iint dx dy$  où  $dx \cdot dy$  représente l'aire d'un élément de surface.

Pour calculer cette intégrale (qui est double), suivant la forme du domaine on utilise une méthode qui permet de la remplacer par deux intégrales simples successives.

### 1er Cas

Supposons que, d'une part les points de  $D$  ont tous des abscisses entre  $a$  et  $b$ , d'autre part, pour toute valeur de  $x$  entre  $a$  et  $b$ , les points de  $D$  ont des ordonnées  $y$  qui vérifient  $g_1(x) < y < g_2(x)$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions continues.

On peut alors écrire :

$$\iint_D dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right) dx$$

### 2ème Cas

Supposons que, d'une part les points de  $D$  ont tous des ordonnées entre  $c$  et  $d$ , d'autre part, pour toute valeur de  $y$  entre  $c$  et  $d$ , les points de  $D$  ont des abscisses  $x$  qui vérifient  $g_1(y) < x < g_2(y)$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions continues. On peut alors écrire :

$$\iint_D dx dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \right) dy$$

**Remarques fondamentales :**

- 1) A priori, **l'intégrale double est faite pour calculer un volume**, de même que l'intégrale simple était faite pour calculer une aire.
- 2) Si  $f(x, y)$  n'est pas à valeurs positives, l'intégrale ne s'interprète plus comme un volume
- 3) Dans une intégrale double, les bornes en  $x$  et  $y$  doivent toujours être rangées en ordre croissant c'est à dire la plus petite « en bas » et la plus grande « en haut ».

**4.3. Intégrales triples**

L'intégrale triple d'une fonction  $f(x,y,z)$  quelconque sur un volume  $V$  (un pavé, une boule, un cylindre...) généralise l'intégrale double. Elle n'a pas, a priori, d'interprétation géométrique dans l'espace ; cela n'empêche pas les intégrales triples d'être utiles notamment en mécanique pour calculer des masses ou des moments d'inertie, en électrostatique, ...

Par exemple, la masse d'un solide  $V$  dont la densité volumique en un point  $(x,y,z)$  est une fonction  $\rho(x,y,z)$  s'exprime par l'intégrale  $\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$ .

Dans le cas où  $f = 1$  cependant, de même qu'une intégrale double correspondait à une aire, une intégrale double correspond à un volume :

$$\iiint_V 1 dx dy dz = \text{Volume}(V)$$

**5. Champ scalaires et Champ vectoriel:****5.1. Champ de scalaires:**

À tout point de l'espace de coordonnées  $(x,y,z)$  on associe un nombre  $f$

**- Exemples :**

- La température  $T(x,y,z)$ , la densité  $\rho(x,y,z)$ , etc.
- Si à tout point d'un plan on associe un nombre alors on définit une surface. Exemple : topographie d'un terrain avec l'altitude de chaque point.

**5.2. Champ vectoriel:**

a tout point de l'espace  $(x,y,z)$  on associe un vecteur

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = F_x(x, y, z) \vec{u}_x + F_y(x, y, z) \vec{u}_y + F_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

**- Exemples :**

- Le champ électrique  $\mathbf{E}$ , le champ des vitesses  $\mathbf{v}$ , etc.

## 6. Les principaux opérateurs et leurs propriétés

-Il existe 3 opérateurs différentiels principaux appelés rotationnel, divergence, gradient qui généralisent la notion de dérivée - ces 3 opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur nabla (english : del) (défini uniquement en coord. cartésiennes)

$$\text{grad}(f) = \vec{\nabla} \cdot f$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

Avec:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

Les opérateurs vectoriels que nous rencontrerons transforment un champ (vectoriel ou scalaire) en un autre champ (vectoriel ou scalaire).

- ils définissent des relations locales :

- valables en tout point
- il faut intégrer pour atteindre les quantités physiques

### 6.1. Gradient $\vec{\nabla} f(x, y, z)$

- S'applique à un champ de scalaires
- Donne un champ vectoriel.

#### 6.1.1. Expression en coordonnées cartésiennes:

La forme différentielle totale d'une fonction  $f(x, y, z)$ , où  $x, y$  et  $z$  sont les trois variables de l'espace, est:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Définition pratique : le gradient d'un champ scalaire en un point M est un vecteur dirigé dans la direction dans laquelle  $f$  possède la pente la plus forte et dont le module est égal à la pente dans cette direction.

**Conséquence 1:** plus les lignes sont serrées, plus le module du gradient est grand.

**Conséquence 2:** le gradient est perpendiculaire à la surface  $f(x,y,z) = \text{cste}$ , c-a-d aux lignes d'isovaleurs

**Conséquence 3 :** le vecteur pointe des valeurs basses vers les valeurs plus hautes

Son interprétation physique est liée à la variation spatiale de la grandeur  $U$  à un instant fixé (gradient de pression dans un fluide, gradient de concentration dans un électrolyte, gradient de température, etc.).

### 6.1.2. Expression en coordonnées cylindriques:

Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ :

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

### 6.1.3. Expression en coordonnées sphériques:

Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ :

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

## 6.2. Divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

- S'applique à un champ de vecteurs
- Donne un champ scalaire

### 6.2.1. Expression en coordonnées cartésiennes:

La divergence d'un champ vectoriel  $\vec{F}$  est un scalaire défini par :

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

L'opérateur divergence est lié au flux d'un vecteur : il intervient très souvent en physique dans les équations de conservation :

- Conservation de la charge,
- Conservation de l'énergie en électromagnétisme ou en thermique,
- Conservation de la masse en mécanique des fluides,
- Conservation du nombre de particules, etc.

**6.2.2. Expression en coordonnées cylindriques:**

Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ :

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \dots$$

**6.2.3. Expression en coordonnées sphériques:**

Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ :

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

**6.3. Rotationnel  $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$** 

- S'applique à un champ de vecteurs
- Donne un champ de vecteurs

**6.3.1. Expression en coordonnées cartésiennes:**

Cela peut aussi s'écrire:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

**Exemple:**

- dans une tornade, le vent tourne autour de l'œil du cyclone et le champ vectoriel *vitesse du vent* a un rotationnel non nul autour de l'œil. Le rotationnel de ce champ de vitesse (autrement dit le champ de vélocité ou encore champ tourbillon) est d'autant plus intense que l'on est proche de l'œil. La vitesse instantanée de rotation d'un élément de volume dans un tourbillon est la moitié du rotationnel en ce point.

**6.3.2. Expression en coordonnées cylindriques:**

Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ :

$$\overrightarrow{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial(rF_r)}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

**6.3.3. Expression en coordonnées sphériques:**

Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ :

$$\overrightarrow{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r \sin \theta F_\phi)}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(rF_r)}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

**7. Théorèmes fondamentaux**

**7.1. Théorème de stokes**

De la définition du rotationnel, on déduit que :

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dl} = \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Où  $\vec{dS}$  est l'élément de surface se posant sur l'élément de contour  $\vec{dl}$ .

En intégrant cette expression, on obtient le théorème de Stokes-Ampère suivant :

La circulation d'un champ vectoriel  $\vec{E}$  le long d'un contour fermé  $C$  est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface  $S$  s'appuyant sur ce contour

$$\oint_{C \text{ fermée}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot dS$$

**7.2. Théorème de Green- Ostrogradsky**

De la définition de la divergence, on déduit que:

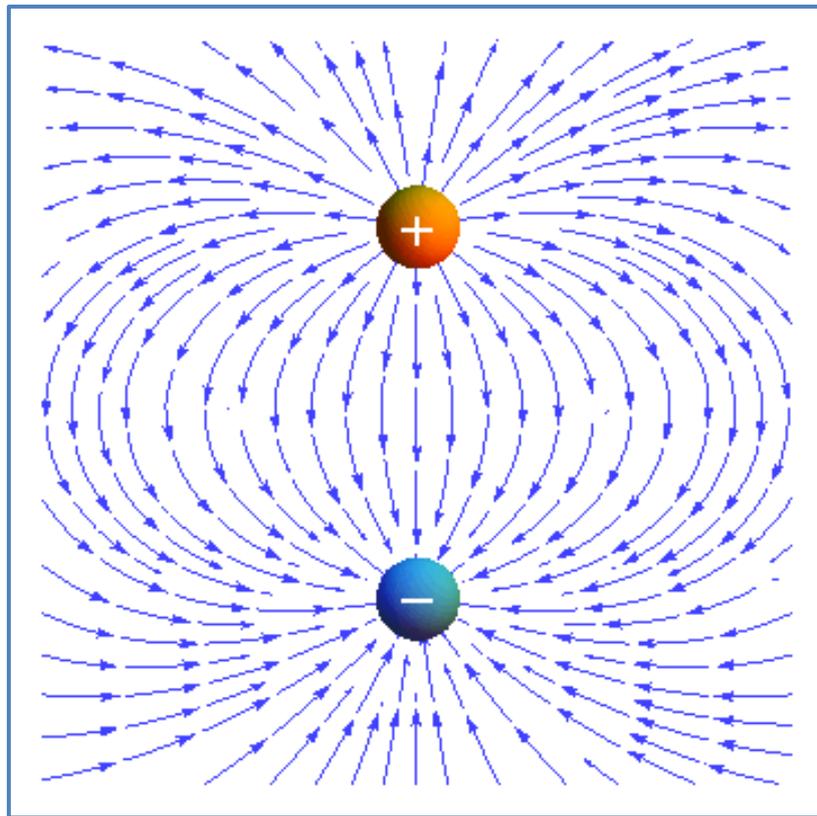
$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \text{div} \vec{A} \cdot dV$$

Où  $\vec{dS}$  est la surface fermée élémentaire délimitant le volume élémentaire  $dV$ . En intégrant cette égalité, on obtient le théorème de Green-Ostrogradski

Le flux sortant d'un champ vectoriel  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $S$  délimitant un volume  $V$  est égal à l'intégrale de sa divergence sur ce volume  $V$ .

$$\oint_{S \text{ fermée}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \cdot dV$$

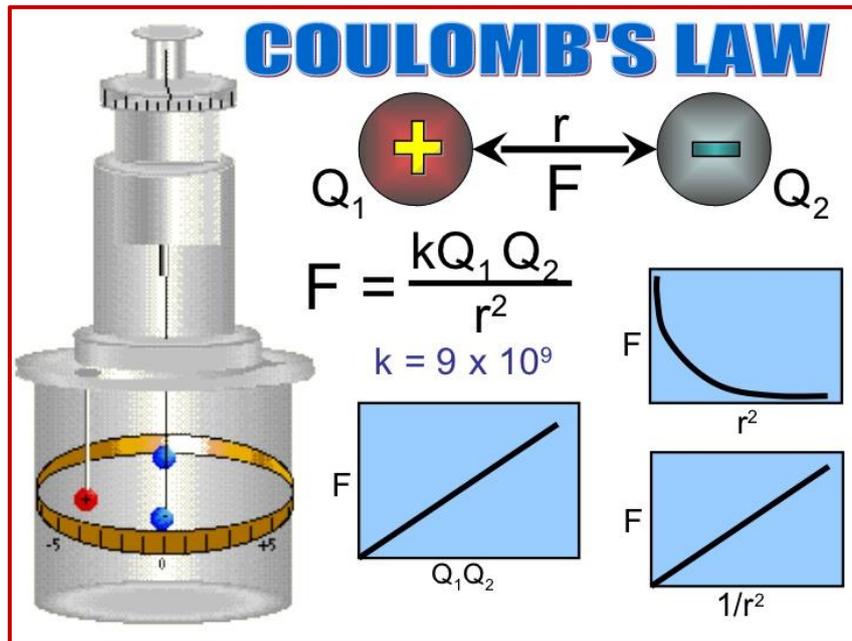
# Electrostatique



### 3. La force électrique:

#### 3.1. Loi de Coulomb

C'est en 1785, que le physicien français Charles Augustin Coulomb établit expérimentalement la loi donnant la force existant entre deux charges électriques. Pour mesurer les forces, Coulomb se servit d'une balance de torsion dans laquelle un dispositif en forme de haltère constitué d'une petite sphère métallique de charge  $Q_1$  et d'un contrepoids est suspendu à un fil de soie.



**Fig II.4:** Forces de répulsion et d'attraction entre deux sphères

Lorsqu'on approche de la sphère suspendue une autre sphère de charge  $Q_2$ , la force de répulsion existant entre les deux sphères provoque la rotation de l'haltère et une torsion du fil de soie. A l'équilibre, la distance entre les deux sphères est  $r$  et la force exercée par le fil tordu compense exactement la force électrique  $\vec{F}$  existant entre les deux sphères. La mesure de l'angle de torsion permet dès lors de déduire la valeur de la force électrique. En faisant varier séparément la distance  $r$  et les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  portées par les deux sphères, Coulomb a observé que la force électrique est proportionnelle à chacune des charges  $Q_1$  et  $Q_2$  et inversement proportionnelle au carré de la distance entre elles, ce qui se résume par :

$$F \propto Q_1$$

$$F \propto Q_2$$

$$F \propto 1/r^2$$

En d'autres termes :

$$F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$$

où  $k$  est une constante de proportionnalité qui dépend du choix d'unité.

Dans le SI,  $k$  prend la valeur suivante :

$$k = 8,988 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 \approx 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$$

Pour des raisons qui sortent du cadre de ce cours, cette constante est souvent écrite en fonction d'une autre constante  $\epsilon_0$ , qui est appelée permittivité du vide; elle est définie par la relation suivante:

$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$$

ce qui permet de calculer sa valeur en fonction de celle de  $k$ .

La permittivité du vide vaut :

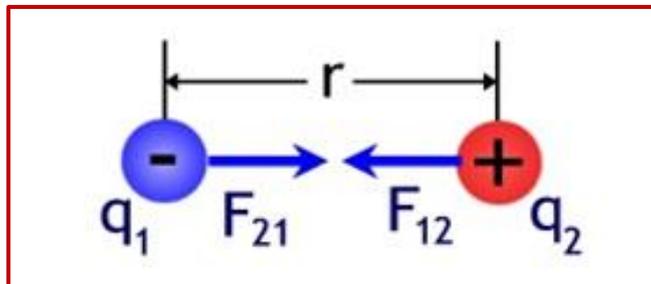
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi k} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$$

Ou, en arrondissant :

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$$

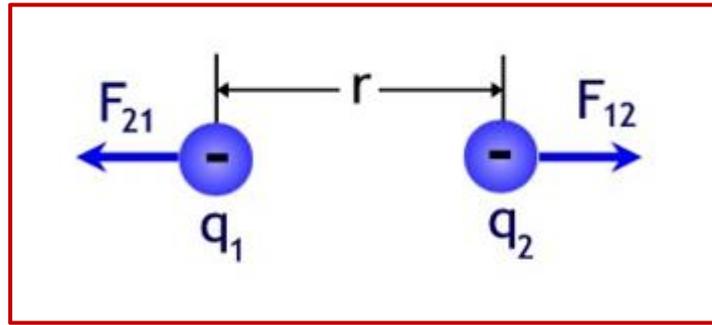
On remarquera l'analogie qui existe entre la loi de Coulomb, exprimée par la relation et la loi de la gravitation universelle. Les charges électriques jouent ici le rôle des masses. L'équation donne le module de la force qui existe entre deux charges électriques. Le vecteur force électrique est dirigé suivant la droite qui relie les charges  $Q_1$  et  $Q_2$ , vers l'autre charge si les charges sont de signes opposés, dans le sens contraire si les charges sont de même signe (voir figure 11. a et b).

a) Les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  de signes opposés:  $Q_1 Q_2 < 0$



**Fig II.5.a:** Forces d'attraction entre deux charges de signes opposés

b) Les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  de même opposés:  $Q_1 Q_2 > 0$



**Fig II.5.b:** Forces de répulsion entre deux charges de même signes.

En accord avec la troisième loi de Newton, on a:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

où  $\vec{F}_{12}$  est la force exercée par  $Q_2$  sur  $Q_1$  et  $\vec{F}_{21}$  la force exercée par  $Q_1$  sur  $Q_2$ .

La loi de Coulomb peut s'exprimer sous forme vectorielle de la manière suivante :

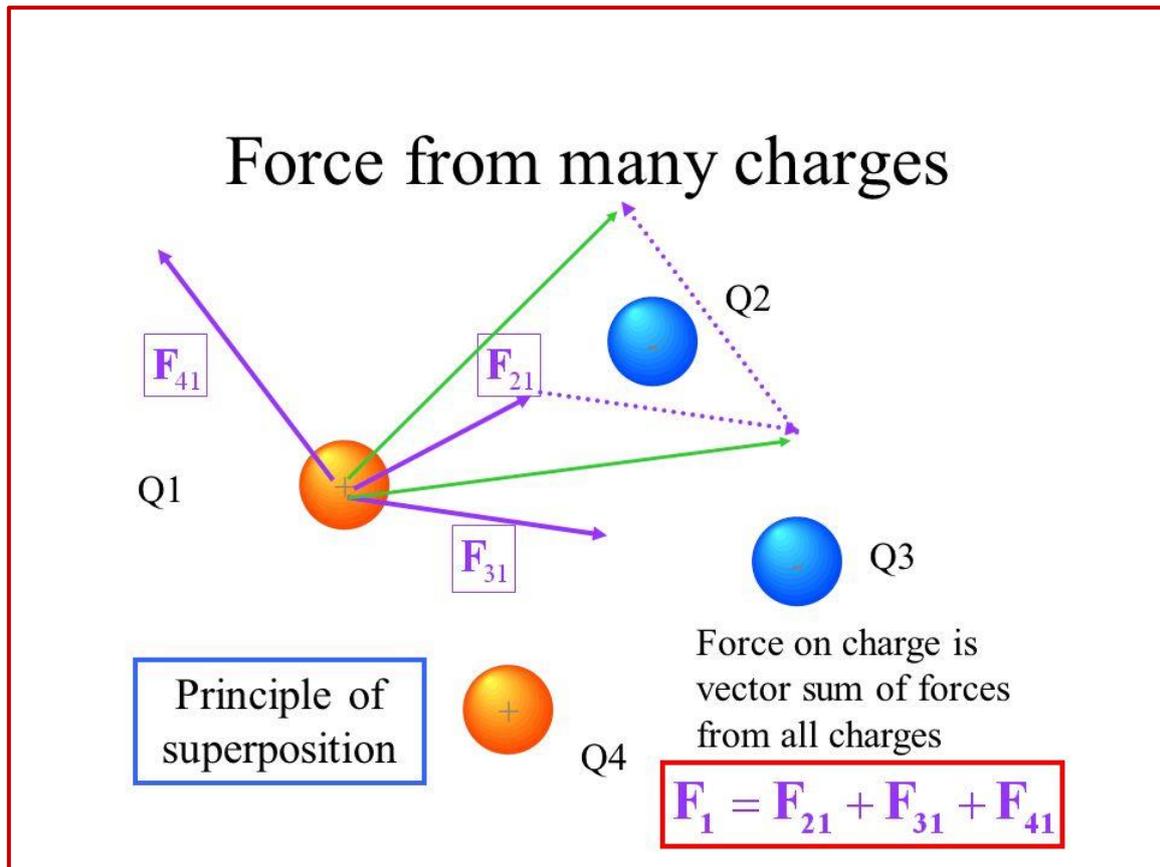
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{u}$$

où  $r_{12}$  est la distance entre les deux charges et  $\vec{u}$  est un vecteur unité dirigé de 2 vers 1. On peut vérifier aisément qu'avec ce choix de la direction du vecteur unité,  $\vec{F}_{12}$  est dirigé vers  $Q_2$  dans le cas de charges de signes opposés et est bien répulsive dans le cas de charges de même signe.

### 3.2. Principe de la superposition:

La force électrique étant, comme toutes les forces, une grandeur vectorielle, les forces électriques exercées par différentes charges électriques:  $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ , sur une charge  $Q_1$ , se calculent indépendamment l'une de l'autre et s'ajoutent vectoriellement. La force totale exercée sur la charge  $Q_1$  par les autres charges, est donnée par la relation vectorielle :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots = \sum_{k=2}^N \vec{F}_{k1}$$



**Fig II.6:** Loi de coulomb et principe de superposition des champs électrostatique

1. La force exercée par une charge ( $q_2$ ) sur une charge ( $q_1$ ) est indépendante de la présence d'autres charges ( $q_3$  ;  $q_4$  ; ...).
2. La force nette exercée sur  $q_1$  est la somme vectorielle des forces individuelles exercées par chaque autre charge sur  $q_1$

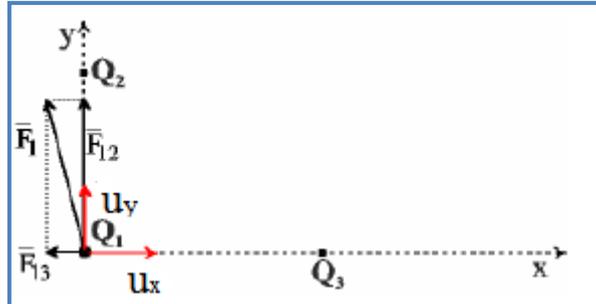
Le principe de superposition est un fait expérimental, pour lequel il n'existe pas de bases théoriques formelles

La Loi de Coulomb et le principe de superposition sont suffisants pour définir l'ensemble des phénomènes électrostatiques

**Exercices corrigés****Exercice 1**

Calculer la force qui s'exerce sur la charge  $Q_1$ , due à la présence des charges  $Q_2$  et  $Q_3$ .

Les trois charges sont situées aux sommets d'un triangle rectangle (voir figure).



Les charges  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  valent respectivement:  $30 \mu\text{C}$ ,  $-60 \mu\text{C}$  et  $40 \mu\text{C}$ . La distance entre  $Q_1$  et  $Q_2$  est de  $1 \text{ m}$ , celle entre  $Q_1$  et  $Q_3$ ,  $2 \text{ m}$ .

**Solution:**

a) On calcule les modules des forces exercées par chacune de charges électriques en utilisant la loi de Coulomb :

$$F_{12} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r_{12}^2}$$

$$F_{12} = \frac{1}{9.10^9} \frac{30 \times 10^{-6} \times 60 \times 10^{-6}}{1^2} = 16.2 \text{ N}$$

$$F_{13} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_3|}{r_{13}^2}$$

$$F_{13} = \frac{1}{9.10^9} \frac{30 \times 10^{-6} \times 40 \times 10^{-6}}{2^2} = 2.7 \text{ N}$$

b) On choisit un système de coordonnées d'axes  $x$  et  $y$  dans lequel on écrit chaque force en fonction de ses composantes et des vecteurs unités  $u_x$  et  $u_y$  (voir figure) :

$F_{12} = 16,2 u_y \text{ N}$  car les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  sont de signes opposés et s'attirent

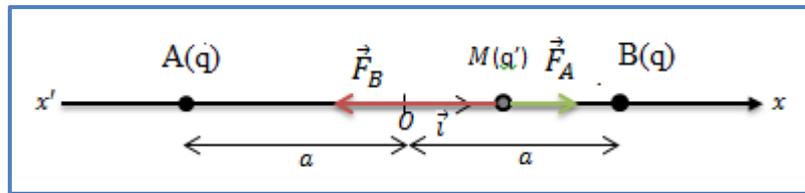
$F_{13} = -2,7 u_x \text{ N}$  car les charges  $Q_1$  et  $Q_3$  sont de même signe et se repoussent.

c) On effectue la somme vectorielle des différentes forces en ajoutant entre elles les composantes  $x$  et les composantes  $y$  :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = (0 - 2.7) + (16.2 + 0) u_y \text{ (N)} = -2.7 u_x + 16.2 u_y \text{ (N)}$$

**Exercice 2**

Deux charges électriques de même valeur  $q$ , sont fixées en  $A$  et  $B$  sur un axe  $(x'Ox)$  aux abscisses  $x_A = -a$  et  $x_B = +b$ . Entre  $A$  et  $B$  on place une charge  $q'$  libre de se déplacer sur l'axe. Quelle est la position d'équilibre de  $q'$  ? Quelle est la force exercée sur  $q'$  hors de sa position d'équilibre ? Discuter de la stabilité de l'équilibre.

**Solution:**

Soit  $M$  portant  $q'$ , et  $\overline{OM} = x$ .

Force résultante sur  $M$  :  $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$

$$= K \frac{qq'}{AM^2} \vec{i} + K \frac{qq'}{BM^2} (-\vec{i}) = Kqq' \left[ \frac{1}{AM^2} \vec{i} + \frac{1}{BM^2} (-\vec{i}) \right]$$

avec  $\overline{AM} = x + a$  et  $\overline{BM} = x - a$

$$\Rightarrow \vec{F} = Kqq' \frac{-4ax}{(x^2 - a^2)^2} \vec{i}$$

1/ équilibre pour  $q'$  en  $O$  (car si  $x = 0$  on a  $\vec{F} = \vec{0}$ )

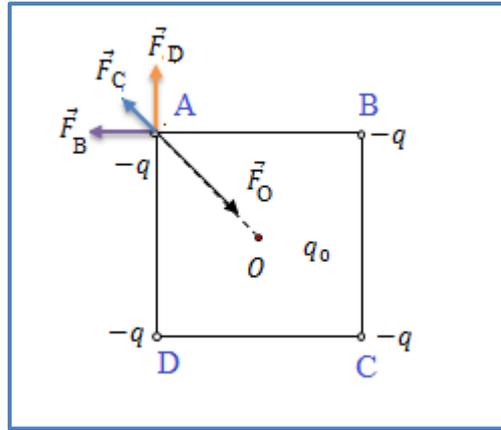
2/ - si  $qq' > 0$ ,  $\vec{F}$  est dirigée vers  $O$  :  $\forall x \neq 0$  stabilité.

**Exercice 3**

Quatre charges ponctuelles identiques  $-q$  ( $q > 0$ ) sont fixées aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté  $a$ . Une cinquième charge  $q_0 > 0$  est maintenue fixe au centre O du carré. Déterminer la valeur de  $q_0$  en fonction de  $q$  pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle.

**Solution:**

La force électrostatique  $\vec{F}(O)$  exercée par les quatre charges identiques  $-q$  sur la charge  $q_0$  est nulle quelle que soit la valeur de  $q_0$ . Il reste à évaluer la force totale exercée sur chacune des charges  $-q$ , par exemple la charge placée en A (voir la figure).



D'après le principe de superposition :

$$\vec{F}(A) = \sum_{i=2}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_O = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3} + \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|^3} + \frac{\vec{DA}}{\|\vec{DA}\|^3} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|^3}$$

Or,  $\|\vec{BA}\| = \|\vec{DA}\| = a$

$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$  ainsi,  $\|\vec{CA}\| = \sqrt{2}a$

$OA = \frac{CA}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Ainsi,

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( \vec{BA} + \vec{DA} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \vec{CA} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 \vec{OA}$$

Avec,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$  et  $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( \vec{BA} + \vec{DA} + \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{CA} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} 2\sqrt{2} \vec{OA}$$

Puisque :  $\vec{BO} = -\vec{OD}$

$\vec{BA} + \vec{DA} = (\vec{BO} + \vec{OA}) + (\vec{DO} + \vec{OA}) = 2\vec{OA}$  ;  $\vec{CA} = 2\vec{OA}$

$$\vec{F}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( q \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{4} 2 \right) - q_0 2\sqrt{2} \right) \vec{OA} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( q \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - q_0 2\sqrt{2} \right) \vec{OA}$$

La force  $\vec{F}(A)$  est nulle lorsque :  $q \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - q_0 2\sqrt{2} = 0$

Ainsi:

$$q_0 = q \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = q \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$$

## 4. Le champ électrostatique:

### 4.1. Notion de champ électrique

Un champ électrique est une région de l'espace où une charge électrique est soumise à une force électrique.

#### Conséquences :

- Pour contrôler s'il règne un champ électrique dans une région, on y place une petite charge témoin, et on examine si elle est soumise à une force électrique ou non.
- Le pendule électrostatique chargé peut servir de charge témoin.
- À proximité d'un corps chargé règne un champ électrique. Tout corps chargé est donc source d'un champ électrique.

#### Remarques importantes

On distingue rigoureusement entre charge source d'un champ électrique et charge témoin.

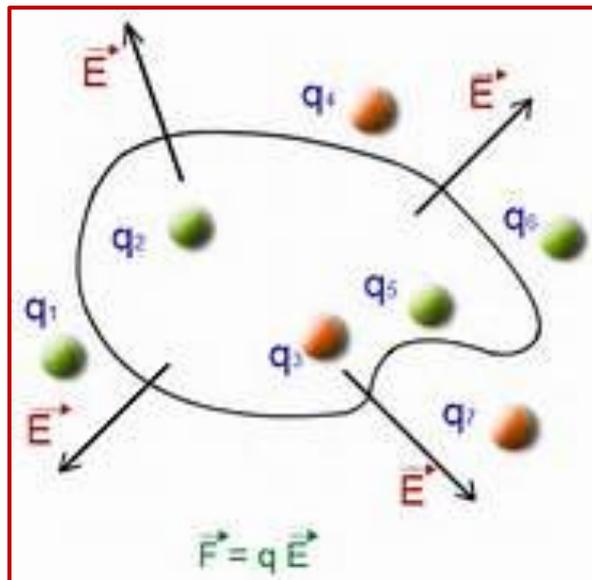
- La charge témoin ne sert qu'à contrôler s'il règne ou non un champ électrique.
- La charge source crée le champ électrique. Dans ce champ peuvent se trouver une ou plusieurs charges témoin soumises à des forces électriques exercées par la charge source.
- La charge témoin crée bien sûr aussi un champ électrique. Comme elle est faible, son champ est négligé de sorte que sa présence ne modifie pas le champ de la charge source.
- Le champ créé par une charge source existe même en absence de la charge témoin qui l'a mis en évidence.

#### Exemples

- ❖ Les électrodes fortement chargées d'une machine de Whimshurst créent un puissant champ électrique entre elles.
- ❖ La cloche d'un générateur de Van der Graaf crée un puissant champ électrique autour d'elle.
- ❖ Les corps neutres ne créent pas de champ électrique.
- ❖ Dans les atomes, chaque électron se déplace dans le champ électrique créé par le noyau électrique et par les autres électrons.
- ❖ Dans un fil conducteur connecté aux pôles d'un générateur de tension règne un champ électrique, responsable des forces électriques qui propulsent les électrons et créent ainsi le courant électrique dans le fil.

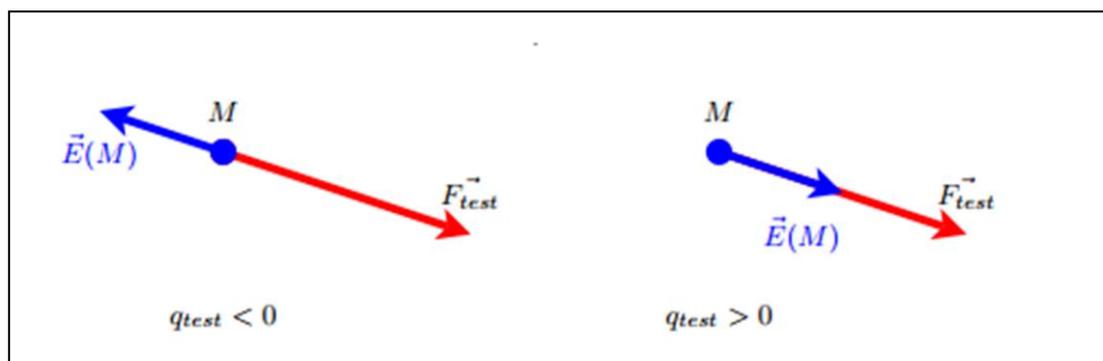
### 4.2. Définition du vecteur champ électrique

Une charge témoin  $q > 0$  est placée en un point M où règne un champ électrique. Elle subit une force électrique  $\vec{F}$  qui dépend de la valeur de la charge  $q$ . En fait, comme le suggère la loi de Coulomb, cette force est proportionnelle à la charge  $q$ . En conséquence :  $\frac{\vec{F}}{q}$  est constant au point M.



**Fig II.7:** On définit le vecteur champ électrique en M par :  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

### Caractéristiques du vecteur $\vec{E}$ :



**Fig II.8:** Représentation du vecteur champ électrique

\* **Intensité** :  $E = \frac{F}{|q|}$

Elle est numériquement égale à l'intensité de la force électrique qui s'exerce sur une charge témoin  $q = 1 \text{ C}$ .

\* **Direction** : la même que celle de la force électrique  $\vec{F}$ .

\* **Sens** : si  $q > 0$  : celui de la force électrique  $\vec{F}$ .

si  $q < 0$  : opposé à celui de la force électrique  $\vec{F}$ .

\* **Formule** vectorielle du champ électrique

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Leftrightarrow \vec{F} = q \vec{E}$$

### 4.3. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Plaçons une charge ponctuelle  $q$  en un point noté  $O$  (cause). La charge test  $q_{test}$  placée en  $M$  (effet) subit la force de Coulomb :

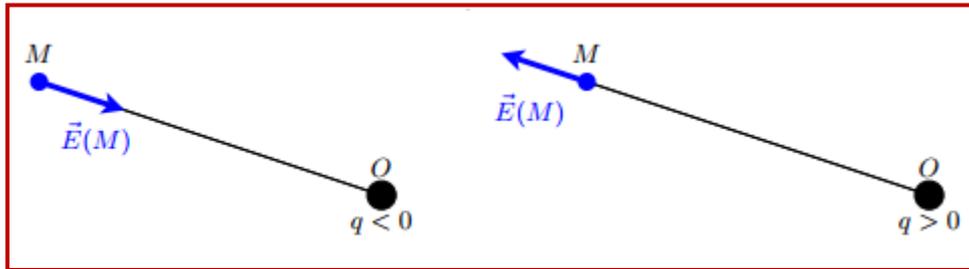
$$\vec{F}_{test} = \frac{q q_{test}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{OM}}{OM^2}$$

$\vec{u}_{OM}$  est un vecteur unitaire orienté de la cause vers l'effet (de la charge créant la force vers celle la subissant). Le champ créé par la charge placée en  $O$  est alors donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{test}}{q_{test}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{OM}}{OM^2}$$

D'où l'expression du champ électrique, devient :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$



**Fig II.9:** Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Comme la force de Coulomb, le champ varie comme l'inverse de la distance à la charge au carré, il a toujours une direction radiale.

### 4.4. Champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Ensemble de charges  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  placées en des points  $M_1, M_2, \dots, M_n$

Action de ce système sur une charge  $q_0$  placée en  $M(x, y, z)$  ?

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{0i}^2} \vec{u}_{0i}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q_0 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{0i}^2} \vec{u}_{0i}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q_0 \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$\vec{E}$  est le champ électrique (ou électrostatique) du système de charges  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4 \pi \epsilon_0 r_{0i}^2} \vec{u}_{oi}$$

#### 4.5. Exemples:

##### 4.5.1. Champ électrique créé par deux charges ponctuelles

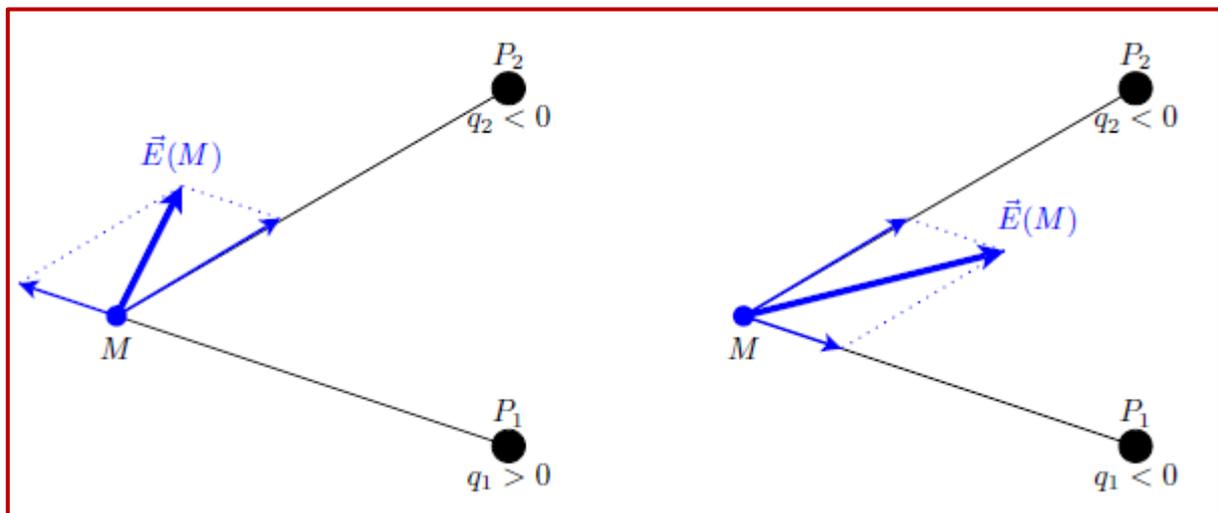


Fig II.10: Champ électrique créé par une charge ponctuelle

##### 4.5.2. Champ électrique créé par quatre charges ponctuelles

4 charges  $q$  placées aux 4 coins d'un carré imaginaire de côté  $a$ . Champ électrique en  $M$  sur l'axe  $Ox$  ? (axe perpendiculaire au plan du carré et passant par son centre).

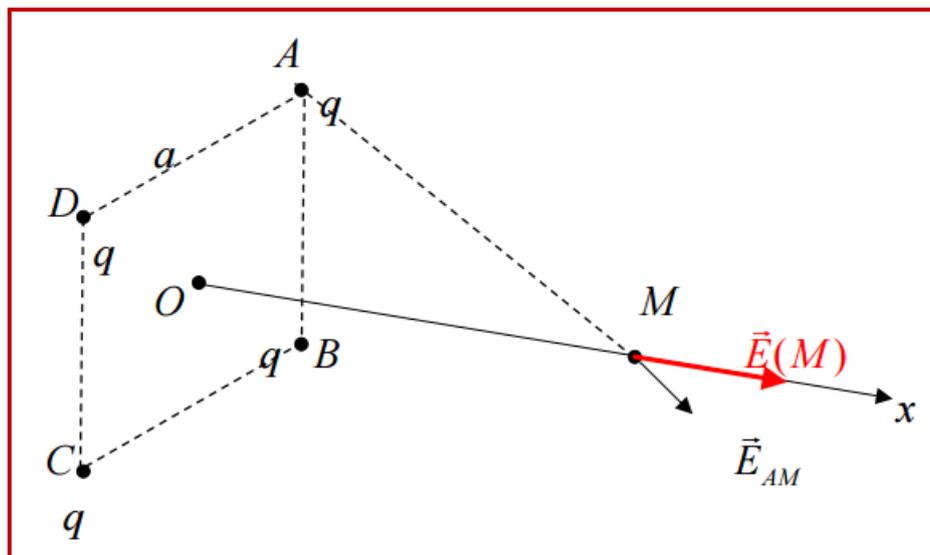


Fig II.11: Champ électrique crée par quatre charges ponctuelles

#### 4.6. Théorème de superposition :

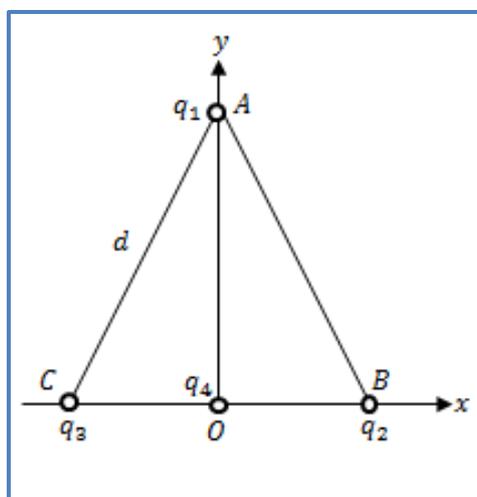
Le champ créé par N charges est la somme (superposition) des champs créés par chaque charge prise indépendamment des autres.

#### Exercices corrigés:

##### Exercice 1

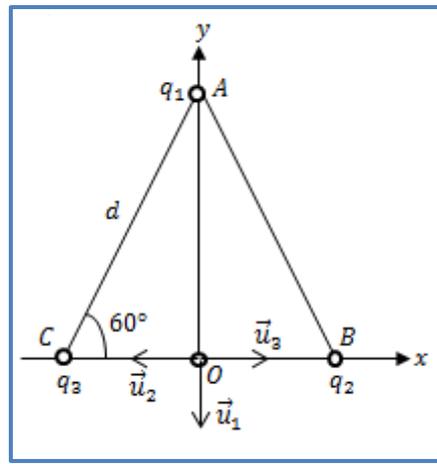
On considère les trois charges ponctuelles situées aux sommets du triangle équilatéral( $ABC$ ) de cotés  $d$  de la figure ci-dessous.  $q_1 = +3q$ ;  $q_2 = -q$ ;  $q_3 = -2q$ .

1. Déterminer le champ électrique produit à l'origine  $O$  par les trois charges  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$
2. Quelle est la force électrique exercée sur la charge  $q_4 = +q$  placée en  $O$  ?
3. Si on change le signe de la charge située à l'origine, quel est l'effet sur le champ calculé la question 1?



**Solution:**

1. Calcul du champ électrique produit en  $O$  par les trois charges:



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\vec{E} = K \left( \frac{q_1}{OA^2} \vec{u}_1 + \frac{q_2}{OB^2} \vec{u}_2 + \frac{q_3}{OC^2} \vec{u}_3 \right)$$

$$\text{Avec : } q_1 = +3q; q_2 = -q; q_3 = -2q$$

$$OA = d \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

$$CO = CB = \frac{d}{2}$$

$$\text{Et } \vec{u}_1 = -\vec{j}, \vec{u}_2 = -\vec{i} \text{ et } \vec{u}_3 = \vec{i}$$

Ce qui conduit à:

$$\vec{E} = K \left( -\frac{3q}{d^2} \frac{4}{3} \vec{j} + \frac{4q}{d^2} \vec{i} - \frac{8q}{d^2} \vec{i} \right) = -4 \frac{Kq}{d^2} (\vec{i} + \vec{j})$$

2. La force électrique exercée sur la charge  $q_4 = +q$  placée en  $O$  est égale à :

$$\vec{F} = q_4 \cdot \vec{E} = q \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{F} = -4 \frac{Kq^2}{d^2} (\vec{i} + \vec{j})}$$

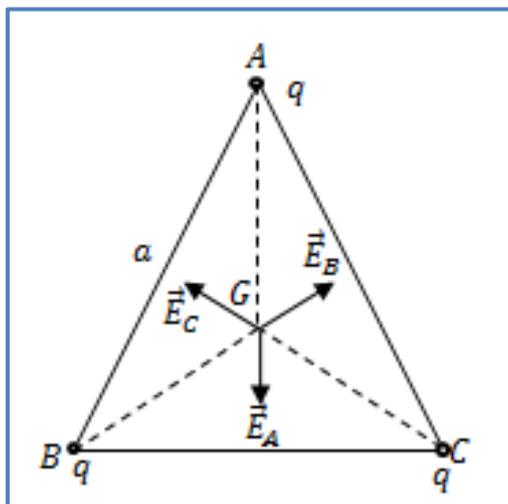
3. Si on change le signe de la charge située à l'origine, le champ électrique créé au point  $O$  par les trois charges  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  ne change pas, c'est la force appliquée sur  $q_4$  qui change de sens.

**Exercice 2**

Déterminer le champ électrostatique créé par trois charges ponctuelles identiques  $q > 0$  placées aux sommets d'un triangle équilatéral, en son centre géométrique  $G$ .

**Solution:**

- Détermination du champ électrostatique créé les trois charges



D'après le principe de superposition, on a :

$$\begin{aligned}\vec{E}(G) &= \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{AG}}{\|\vec{AG}\|^3} + \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|^3} + \frac{\vec{CG}}{\|\vec{CG}\|^3} \right)\end{aligned}$$

Or,  $\|\vec{AG}\| = \|\vec{BG}\| = \|\vec{CG}\|$

$$\vec{E}(G) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BG}\|^3} (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG})$$

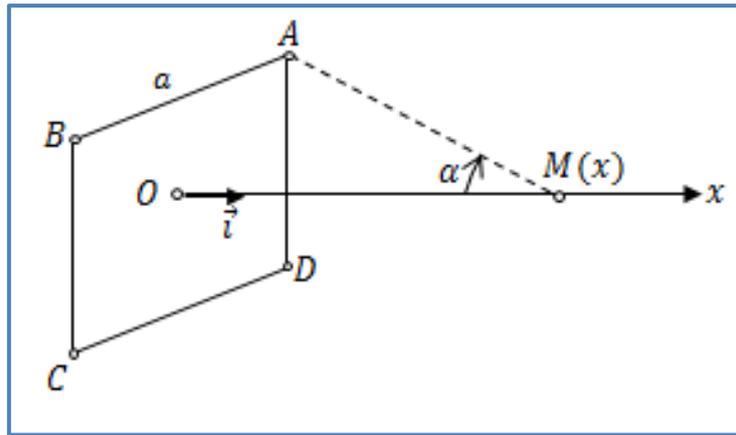
Soit, O étant point quelconque de l'espace :

$$\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + 3\vec{OG} = \vec{0} \text{ car } \vec{OG} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^3 \vec{OA},$$

$$\vec{E}(G) = 0$$

**Exercice 3**

Déterminer le champ électrostatique créé par quatre charges ponctuelles identiques  $q$  placées aux sommets d'un carré de côté  $a$ , en un point  $M$  d'abscisse  $x$  de l'axe passant par son centre  $O$  et perpendiculaire à son plan (la figure ci-dessous).

**Solution:**

D'après le principe de superposition, on a :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \sum_{i=1}^4 \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^3} + \frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|^3} + \frac{\vec{CM}}{\|\vec{CM}\|^3} + \frac{\vec{DM}}{\|\vec{DM}\|^3} \right)\end{aligned}$$

$$\|\vec{AM}\| = \|\vec{BM}\| = \|\vec{CM}\| = \|\vec{DM}\| = \left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} + \vec{DM}}{\|\vec{AM}\|^3}$$

La distribution de charges présente une symétrie de révolution autour de la droite  $(OM)$ . Le champ résultant en  $M$  n'a donc de composante non nulle que suivant cette droite, par exemple la direction  $x'x$  de vecteur unitaire  $\vec{i}$ .

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{AM}\|^3} 4\|\vec{AM}\| \cos\alpha \vec{i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{AM}\|^3} 4x\vec{i}$$

Soit,

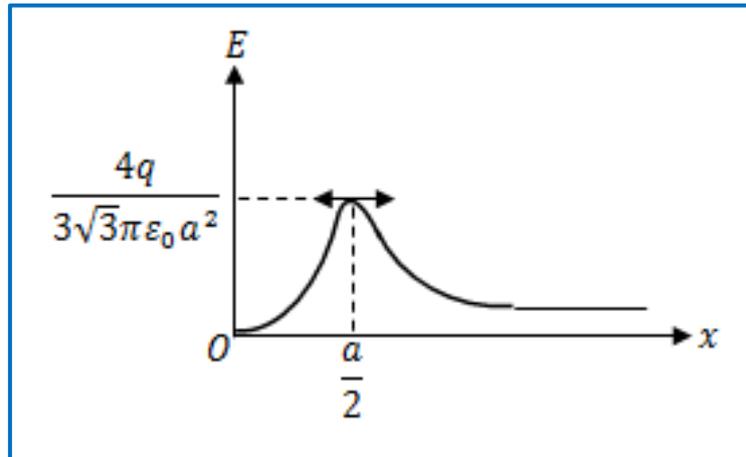
$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{4qx}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}} \vec{i}}$$

**Cas limite:**

- A l'origine  $O(x = 0)$ , le champ est nul. En effet, d'après la symétrie par rapport à ce point les champs créés par les charges s'annulent deux à deux.
- En un point  $M$  éloigné de l'origine  $O(x \gg a)$ , on a :

$$\vec{E}(M) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 x^2 \left(1 + \frac{a^2}{2x^2}\right)^{3/2}} \vec{i} \cong \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en  $M$  par une charge  $Q = 4q$  concentrée en  $O$ . Son module varie en  $1/x^2$  (comme le montre la figure).



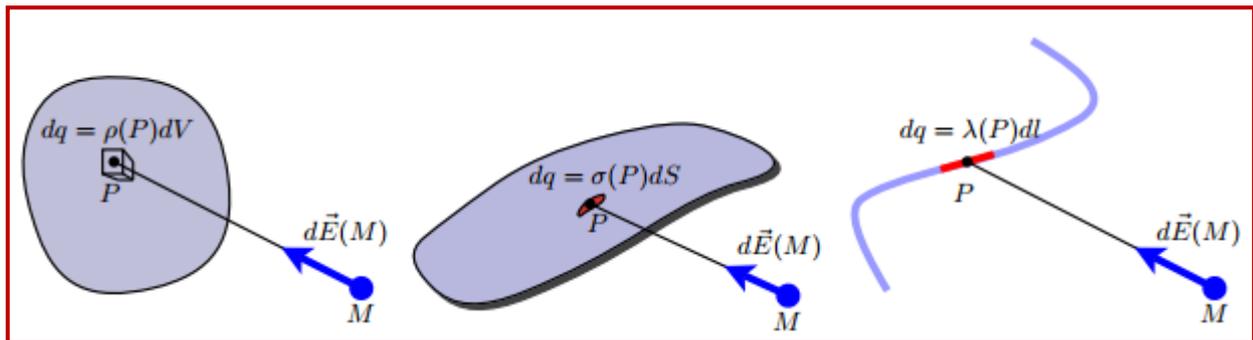
#### 4.7. Champ électrique créé par une distribution continue de charge:

Une distribution continue de charge est en fait : soit un volume chargé  $V$ , soit une surface chargée  $S$ , soit une courbe chargée  $C$ . Chaque élément infinitésimal de la distribution (noté  $dV$  ou  $dS$  ou  $dl$ ) centré au point  $P$  (cause) porte une charge infinitésimale  $dq$  et crée un champ infinitésimal en  $M$  (effet) :

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

Selon le type de distribution, on peut définir une densité volumique ( $C.m^{-3}$ ), surfacique ( $C.m^{-2}$ ) ou linéique ( $C.m^{-1}$ ) de charges électriques en divisant la charge infinitésimale de l'élément infinitésimal par sa mesure (volume, surface ou longueur) :

- Densité volumique de charge :  $dq = \rho(P) \times dV$
- Densité surfacique de charge :  $dq = \sigma(P) \times dS$
- Densité linéique de charge :  $dq = \lambda(P) \times dl$



**Fig II.12:** Distribution continue de charge linéique, surfacique et volumique.

Distribution	Uniformément chargée	Non uniformément chargée
Volumique	$Q = \rho \times V$	$Q = \iiint \rho(P)dV$
Surfacique	$Q = \sigma \times S$	$Q = \iint \sigma(P)dS$
Linéique	$Q = \lambda \times l$	$Q = \int \lambda(P)dl$

Charge totale d'une distribution continue

La distribution est dite uniformément chargée si sa densité de charge est uniforme. Le champ total créé par la distribution est obtenu en intégrant le champ infinitésimal : soit dans le volume  $V$ , soit sur la surface  $S$ , soit le long de la courbe  $C$ .

Distribution	Uniformément chargée	Non uniformément chargée
Volumique	$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{4\pi \epsilon_0} \iiint \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dV$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint \rho(P) \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dV$
Surfacique	$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi \epsilon_0} \iint \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iint \sigma(P) \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$
Linéique	$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \lambda(P) \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl$

### Champ créé par une distribution continue

#### Quelques propriétés:

- Le champ est continu dans le vide ou dans une distribution volumique de charges.
- Le champ est discontinu à la traversée d'une surface chargée (en fait, seule la composante normale est discontinue).
- Le champ diverge à l'approche d'une distribution linéique de charges ou d'une charge ponctuelle.

#### 4.8. Lignes ou spectre de champ

On appelle ligne de champ une ligne qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur champ électrique  $\vec{E}$  en ce point.

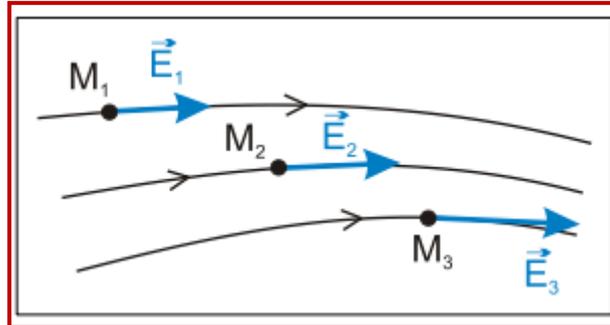
Le tracé des lignes de champ permet d'établir l'allure générale du champ électrique dans une région donnée de l'espace. La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point. Pour tracer convenablement les lignes de champ, certaines règles s'appliquent

##### 4.8.1. Propriétés des lignes de champ :

- 1) Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives
- 2) Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge  $+2q$  produit deux fois plus de lignes qu'en absorbe une charge  $-q$ )
- 3) Les lignes de champ doivent respecter la symétrie de la distribution des charges.
- 4) Les lignes de champ ne doivent pas se croiser.

5) En s'éloignant de la distribution de charges, les lignes de champ semblent provenir d'une charge ponctuelle de valeur égale à la charge nette de la distribution

**Remarque :** La figure des lignes de champ est une représentation du champ. Elle est encore appelée spectre électrique.

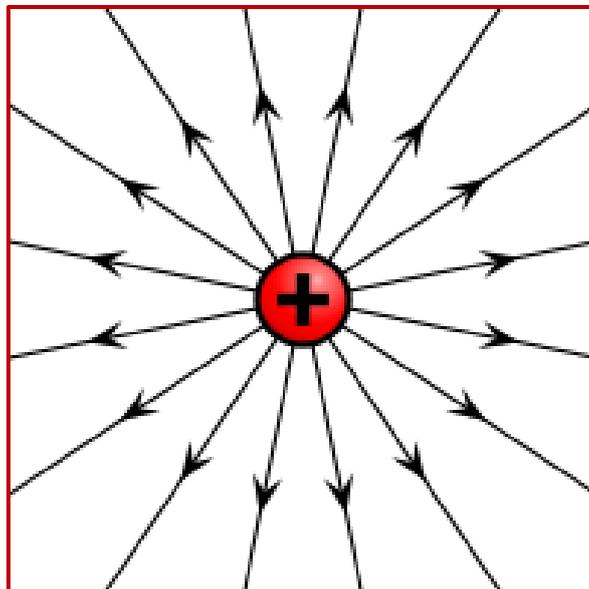


**Fig II.13:** Les lignes de champ électrique

#### 4.8.2. Exemples de spectres électriques

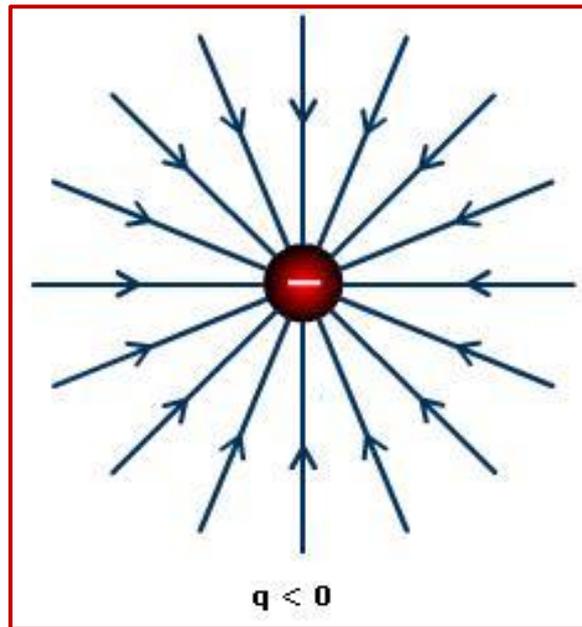
Lignes de champ créée par une charge ponctuelle

Charge positive:



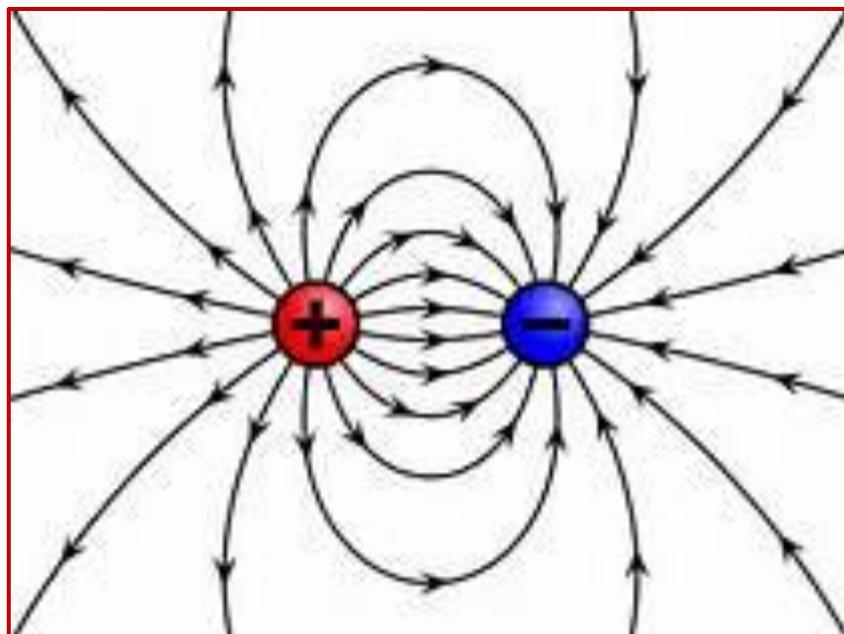
**Fig II.14:** Lignes de champ produites par une charge ponctuelle positive isolée

**Charge négative:**



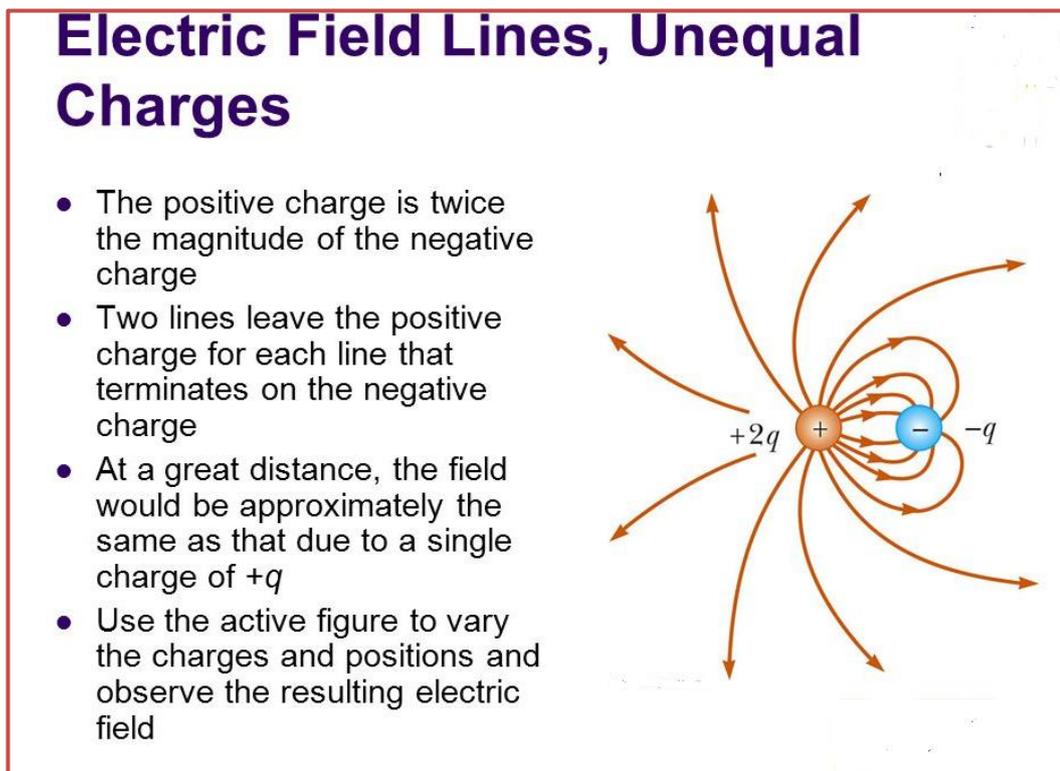
**Fig II.15:** Lignes de champ produites par une charge ponctuelle négative isolée

**Le dipôle électrostatique**



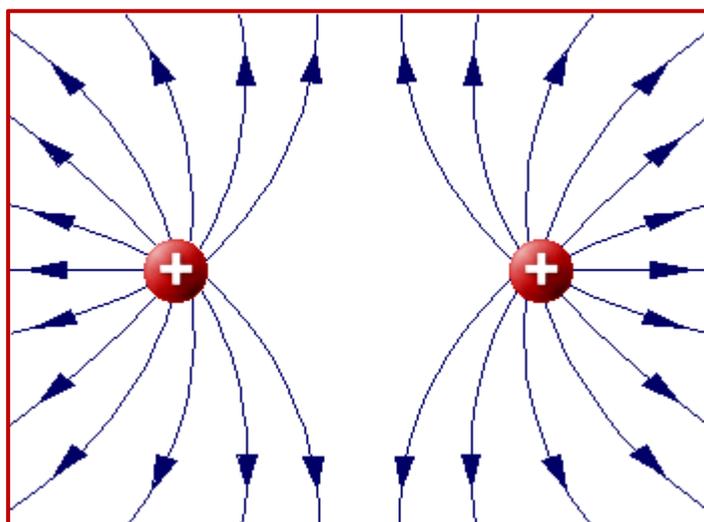
**Fig II.16:** Les lignes de champ d'un dipôle électrique

Le nombre de lignes de champ produites par la charge positive est le même que le nombre de lignes de champ absorbées par la charge négative

Deux charges électrique  $+2q$  et  $-q$ 

**Fig II.17:** Les lignes de champ crée par deux charges électrique  $+2q$  et  $-q$

Le nombre de lignes de champ produites par la charge positive est deux fois plus élevé que le nombre de lignes de champ absorbées par la charge négative.

Deux charges électrique  $+2q$ 

**Fig II.18:** Les lignes de champ produites par deux charges positives  $+q$  et  $+q$

#### 4.9. Champ créé par un condensateur chargé:

(deux plaques parallèles rapprochées chargées l'une positivement l'autre négativement, et avec des charges de même valeur absolue) à l'exception des régions aux bords, les lignes de champ sont parallèles, perpendiculaires aux plaques, et partout de même densité même vecteur  $E$  : le champ est uniforme.

Dans la région des bords du condensateur, les lignes de champ sont courbées vers l'extérieur. On appelle ce phénomène « effet de bord ».

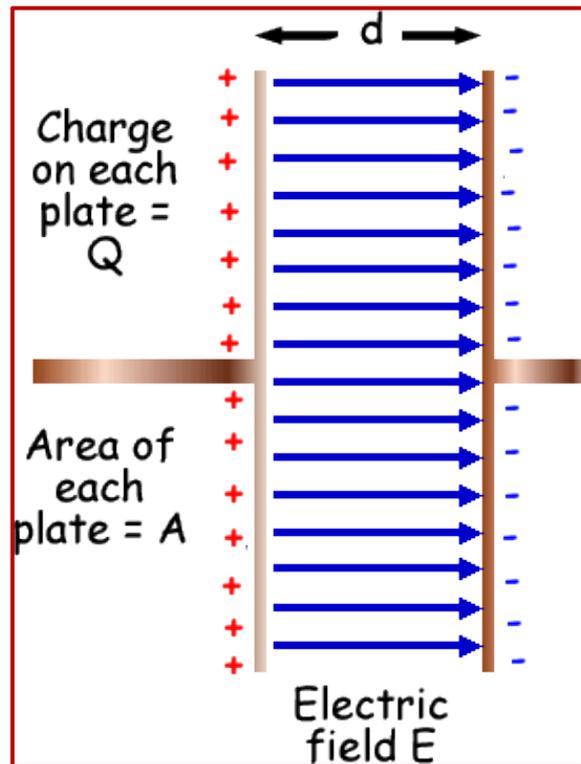


Fig II.19: Les lignes de champ produites par deux plaques métalliques chargées.

#### Exercices corrigés

##### Exercice 1:

Un segment AB est uniformément chargé avec la densité  $\lambda > 0$ .

- 1- Calculer le champ  $\vec{E}$  créé par le segment en un point M de son plan médiateur
- 2- Que devient  $\vec{E}$  si la longueur devient infinie ?

##### Solution

$\vec{E}$  est porté par HM, HM est une ligne de champ

Cherchons le champ  $dE'$  créée par l'élément  $dl$  du segment AB.

$$dE' = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(PM)^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(PM)^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(PM)^2}$$

Or---

$$dE = dE' \cos\alpha = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(PM)^2} \cos\alpha$$

D'autre part:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{r}, \quad dx = \frac{r}{\cos^2\alpha} d\alpha \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{r}{PM}$$

Et on obtient donc :

$$E = \int_{-\theta}^{\theta} dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\theta}^{\theta} \cos\alpha d\alpha$$

Finalement

$$E = \frac{\lambda \sin\theta}{2\pi\epsilon_0 r}$$

2 pour une ligne infinie, on a;

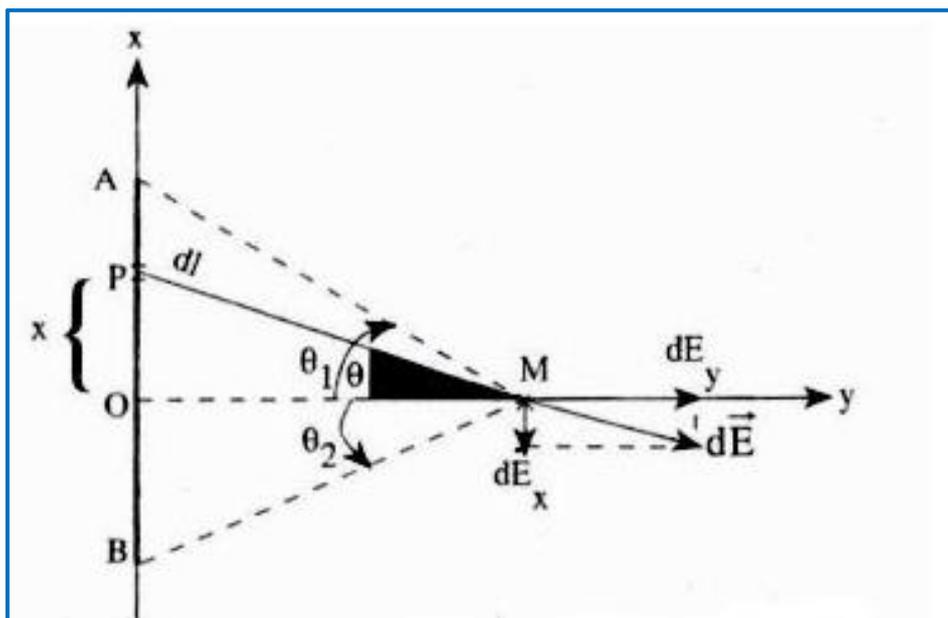
$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

### Exercice 2:

Un segment AB de longueur  $2l$  est chargé avec la densité  $\lambda > 0$ . Le segment est placé selon l'axe Ox; l'axe Oy ne passe pas par son milieu.

- 1- Calculer le champ électrostatique au point M sur l'axe de symétrie Oy.
- 2- En déduire le champ lorsque le point M est sur l'axe de symétrie du segment.

### Solution:



La charge élémentaire  $dq = \lambda dl$  en un point P crée en un point M un champ électrique:

$$dE = \frac{\lambda dl}{4 \pi \epsilon_0 (PM)^2} = \frac{\lambda dx}{4 \pi \epsilon_0 (PM)^2}$$

Par ailleurs:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{r}, \quad dx = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{r}{PM}$$

Le champ électrique peut encore s'écrire :

$$dE = \frac{\lambda d\theta}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Les composantes du vecteur champ sont:

$$d\vec{E} \begin{cases} dE_x = -dE \sin \theta \\ dE_y = dE \cos \theta \end{cases}$$

D'où:

$$E_x = - \int dE \sin \theta = - \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 r} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 r} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2]$$

Et

$$E_y = - \int dE \cos \theta = - \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 r} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta d\theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 r} [\sin \theta_1 - \sin \theta_2]$$

Le module du champ est

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 r} \sqrt{2 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

3- Si M appartient à l'axe de symétrie, alors on a:

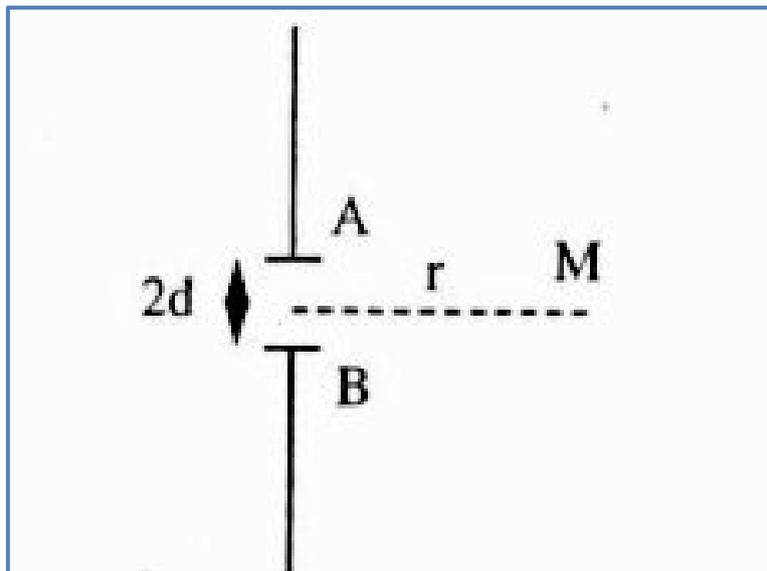
$\theta_2 = -\theta_1$  et l'expression du champ  $\vec{E}$  est:

$$E = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 r} \sin \theta \quad \text{ou} \quad E = \frac{\lambda l}{2 \pi \epsilon_0 r \sqrt{l^2 + r^2}}$$

### Exercice 3:

Deux demi-droites distantes de  $2d$  comme le montre la figure, sont chargées avec la densité  $\lambda > 0$ .

Déterminer le champ en un point M du plan médiateur du segment AB.

**Solution:**

Si le segment AB était chargé avec la même densité  $\lambda > 0$ , il créerait un champ:

$$E_{AB} = \frac{\lambda \sin\theta}{2 \pi \epsilon_0 r}$$

Et on aurait alors un fil infini dont le champ serait:

$$E_{\infty} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r}$$

Le champ créé par l'ensemble des deux demi-droites correspond donc à l'état du fil infini auquel on enlève les mêmes charges du segment AB. On a alors:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{\infty} - \vec{E}_{AB}$$

Les deux champs ont même sens, et

$$E(M) = E_{\infty} - E_{AB}$$

d'où:

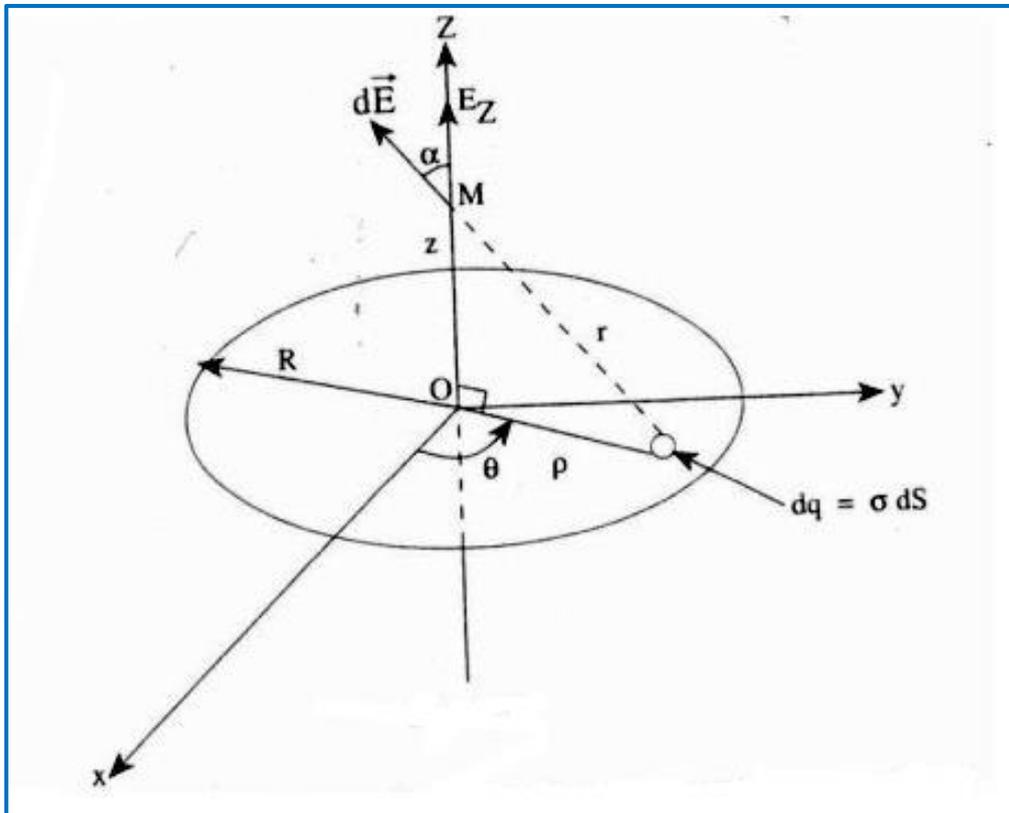
$$E(M) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r} [1 - \sin\theta] = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r} \left[ 1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}} \right]$$

**Exercice 4:**

Un disque de centre O et de rayon R est uniformément chargé avec une densité de charge  $\sigma$  positive.

- 1- Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M de l'axe du disque (OM = z).

- 2- Trace la courbe  $E(z)$  et en déduire le champ au centre  $O$  du disque.
- 3- Retrouver le champ créé par un plan illimité uniformément chargé en tout point de l'espace

**Solution:**

Calcul direct du champ en un point  $M(0, 0, z)$ :

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de  $\vec{z}'z'$ . Tout plan contenant l'axe  $\vec{z}'z'$  est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ  $\vec{E}$  en un point  $M$  de l'axe  $\vec{z}'z'$  est porté par  $\vec{k}$  :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0, 0, z) = E(z)\vec{k}$$

Un élément de charge  $dq = \sigma dS$ , centré en  $O$  (Comme le montre la figure ci-dessous), crée en un point  $M$  de l'axe du disque un champ élémentaire  $d\vec{E}$  donné par :

$$\text{La charge } dq = \sigma dS \text{ produit un champ: } dE = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le champ électrique est normal au disque, on a:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0, 0, z) = E(z)\vec{k}$$

Par projection sur l'axe  $OZ$ :

$$E(z) = \iint_{\text{disque}} dE \cos\alpha$$

$$E(z) = \iint_{\text{disque}} \frac{\sigma dS}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \cos\alpha = \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0} \iint_{\text{disque}} \frac{\rho d\rho d\theta}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$$

Or:

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

On a:

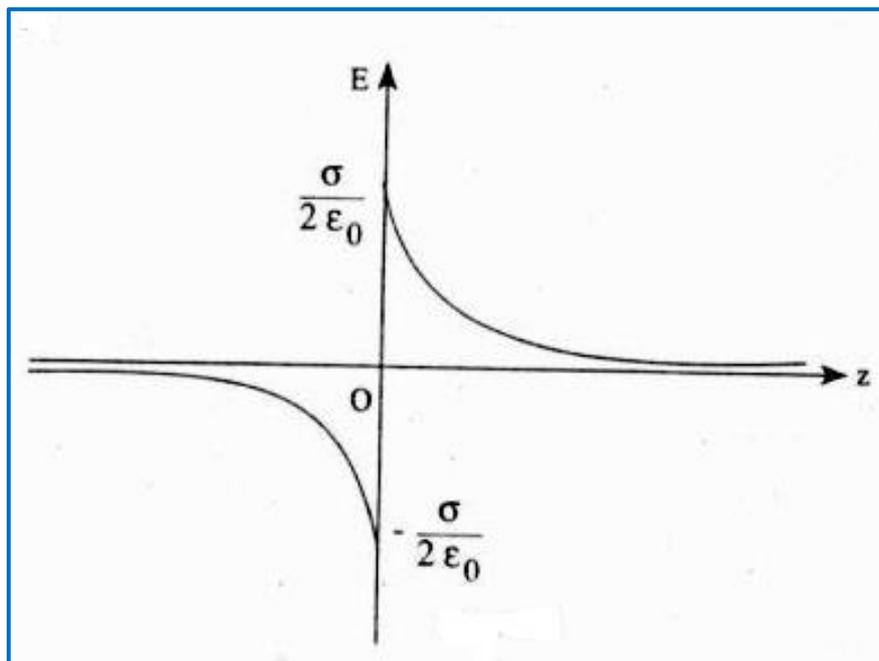
$$E(z) = \frac{\sigma z}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{[\sqrt{z^2 + \rho^2}]^3} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E(z) = \frac{\sigma z}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

Soit:

$$E(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] & \text{pour } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[ -1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

2.



Le champ  $E$  est discontinu à travers une surface chargée.

Pour  $z = 0$ :

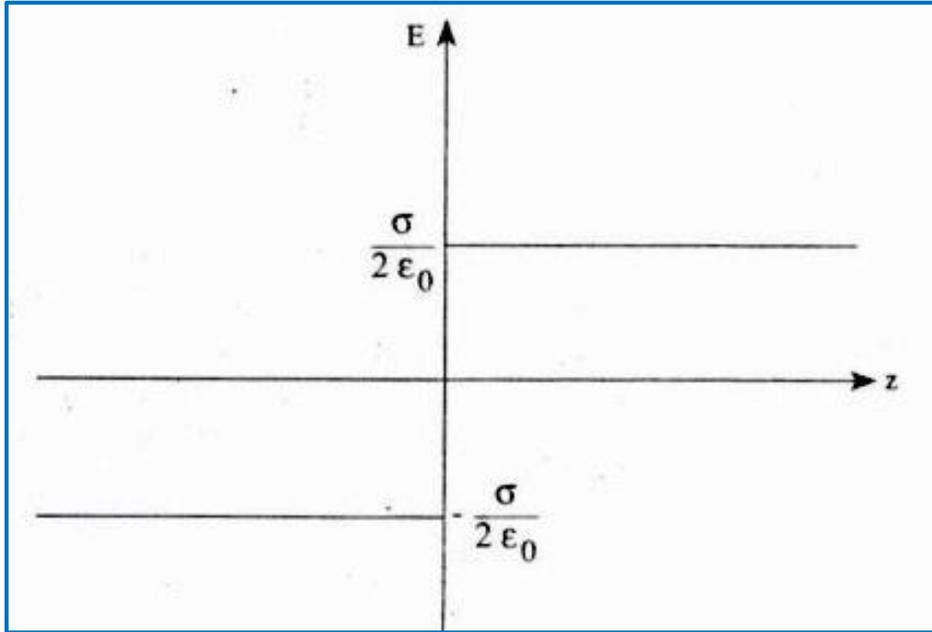
$$\vec{E}(0) = \frac{\vec{E}(z = 0^+) + \vec{E}(z = 0^-)}{2} = \vec{0}$$

$$\vec{E}(0) = \vec{0}$$

O est un centre de symétrie, le champ y est nul.

3. il suffit de faire tendre vers l'infini le rayon R du disque chargé.

$$\vec{E}(\text{plan infin}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E}(\text{disque}) = \pm \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{k}$$



Le champ est uniforme de chaque côté du plan, mais le sens est opposé de part et d'autre du plan.

## 5. P o t e n t i e l é l e c t r i q u e

On peut caractériser la perturbation du milieu due à la présence de charges électriques par une fonction scalaire : le potentiel électrostatique  $V(x,y,z)$

- Potentiel créé par une charge  $q$

Le potentiel en un point  $M$ , situé à la distance  $r$  de la charge  $q$  est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

### 5.1. Potentiel créé par un système de $n$ charges

Le potentiel en un point  $M$  créé par ensemble de charges  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  placées en des points  $M_1, M_2, \dots, M_n$  est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Avec:  $r_i = \overline{M_i M}$

### 5.2. Relation entre potentiel et champ électrique

Le champ électrique est la variation du potentiel dans l'espace

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$$

**Pour une charge ponctuelle placée à l'origine :**

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

### 5.3. Potentiel créé par $N$ charges ponctuelles:

Plaçons  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  en des points notés  $P_i$ .

Le champ créé par la charge  $q_i$  placée en  $P_i$  dérive d'un potentiel électrique

$$\vec{E}_{i(M)} = -\overrightarrow{grad} (V_i(M)) = -\overrightarrow{grad} \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} + cste \right)$$

Le champ total est obtenu en sommant les champs créés par chaque charge:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) = -\sum_{i=1}^N \overrightarrow{grad} (V_i(M)) = -\overrightarrow{grad} \left( \sum_{i=1}^N V_i(M) \right)$$

Le potentiel électrostatique créé par l'ensemble des  $N$  charges est alors donné par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{P_i M} + cste$$

**Théorème:** de superposition: le potentiel crée par N charges est la somme (superposition) des potentiels créés par chaque charge prise indépendamment des autres.

#### 5.4. Energie potentielle

Pour une charge  $q_i$  placée en  $M_i$  sous l'action du potentielle  $V_i$  créée en  $M_i$  par toute les charges sauf  $q_i$ , son énergie électrostatique sera  $q_i V_i$ . Pour l'ensemble des charges, l'énergie électrostatique sera:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i^n q_i V_i$$

#### 5.5. Energie d'une distribution continue de charges

On se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en charges élémentaires  $dq$  :

Distribution linéique :

$$dq = \lambda dl \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_l \lambda \cdot V \cdot dl$$

Distribution surfacique:

$$dq = \sigma dS \Rightarrow W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \cdot V \cdot dS$$

Distribution volumique :

$$dq = \rho dV \Rightarrow W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \cdot V \cdot dV$$

$V$  étant le potentiel créé par toutes les charges de la distribution au point où se trouve la charge élémentaire  $dq$ .

### Exercices corrigés

#### Exercice 1

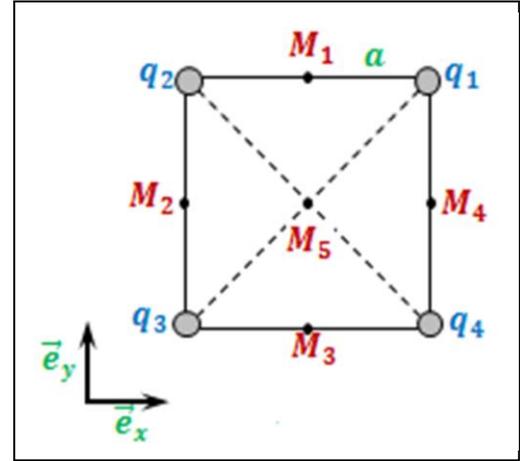
Dans la figure sous contre, toutes les charges ont la même valeur

( $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = +q$ ) elles sont placées sur les sommets d'un carré de côté  $a$ .

En considérant la symétrie des charges .

Calculez les potentiel électrique  $V_{M_i}$  créée par ces charges aux points  $M_i (i = 1,2,3,4,5)$  au milieu de chaque côté, et au centre.

- 1) Calculez les vecteurs champs électriques  $\vec{E}_{M_i}$  créée aux points  $M_i$ .
- 2) Trouvez l'énergie potentielle interne  $U_5$  du système composé de ces quatre charges.
- 3) Calculez le module de la force appliquée sur la charge  $q_1$  par le reste des charges.
- 4) En déduire la valeur de la charge  $q_5$  qu'on doit poser au point  $M_5$  pour que la force appliquée sur chaque charge soit nul.
- 5) Calculez l'énergie potentielle  $U_5$  de la charge  $q_5$  au point  $M_5$ .



**Solution:**

1. Calculons d'abord les distances  $d_1$  et  $d_2$ .

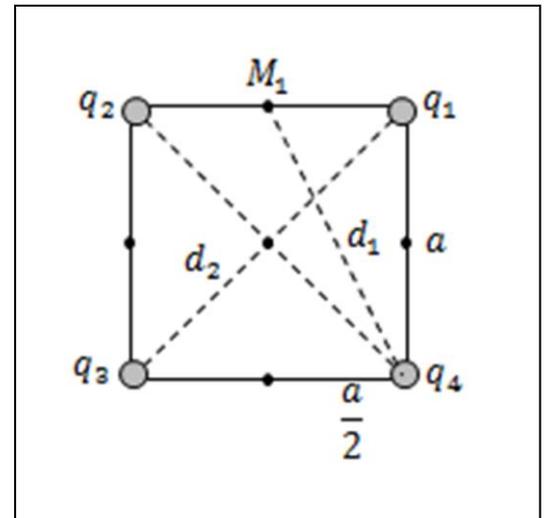
$$d_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a ; d_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

1. Calculons le potentiel aux points  $M_i$ :

$$V_{M_i} = \sum_i V_i = \sum_i K \frac{q_i}{r_i} = K q_i \sum_i \frac{1}{r_i}$$

$$r_1 = r_2 = \frac{a}{2} ; d_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$r_1 = r_2 = \frac{a}{2} \text{ et } r_3 = r_4 = d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a \Rightarrow V_{M_i} = 4K \frac{q}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$



En utilisant la symétrie:

$$V_{M_1} = V_{M_2} = V_{M_3} = V_{M_4} = 4K \frac{q}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$V_{M_5} = \sum_i V_i = \sum_i K \frac{q_i}{r_i} = K q \sum_i \frac{1}{r_i}$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a \Rightarrow V_{M_5} = 4\sqrt{2} \cdot K \frac{q}{a}$$

2. Calculons les vecteurs champs aux points  $M_i$ :

$$\vec{E}_{M_5} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = Kq \sum_i \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\text{avec } r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = K \frac{q}{2a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{M_5} = \vec{0}}$$

$$\vec{E}_{M_i} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = Kq \sum_i \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$r_1 = r_2 = \frac{a}{2} \Rightarrow |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = 4K \frac{q}{a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}}$$

$$r_3 = r_4 = d_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} a \Rightarrow |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = \frac{4}{5} K \frac{q}{a^2}$$

$$\vec{E}_{M_i} = 2|\vec{E}_3| \cos \alpha \vec{e}_y \quad \text{d'après la figure ci contre} \quad \cos \alpha = \frac{a}{d_1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Donc:

$$\boxed{\vec{E}_{M_i} = \frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{e}_y}$$

En utilisant la symétrie:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_{M_1} &= \frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{e}_x \\ \vec{E}_{M_2} &= -\frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{e}_x \\ \vec{E}_{M_3} &= -\frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{e}_y \end{aligned}}$$

3. Calculons l'énergie potentielle du système:

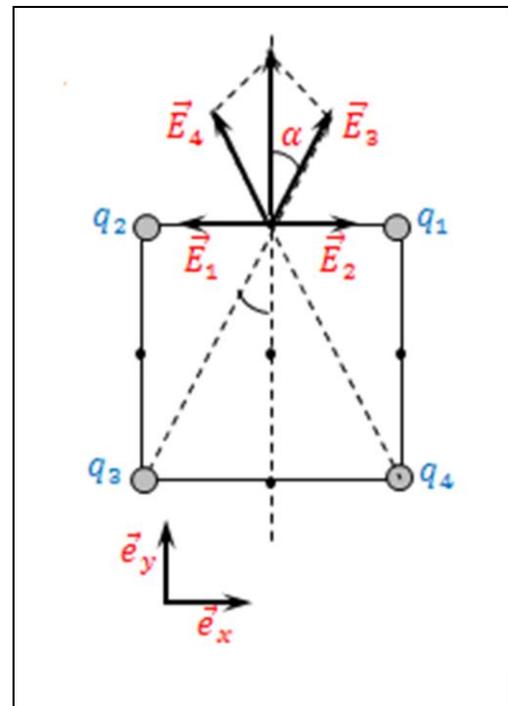
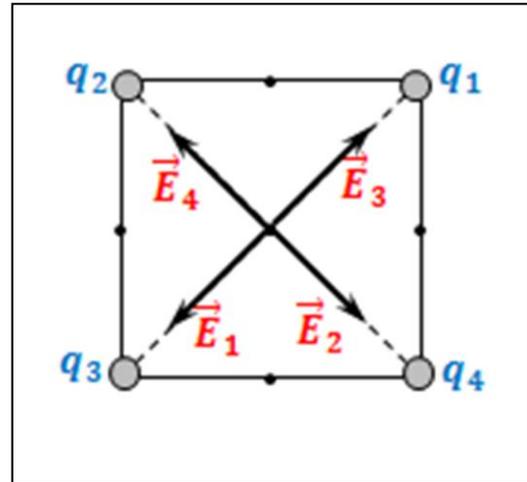
$$U_S = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_{ij} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U_S = Kq^2 \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{14}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{24}} + \frac{1}{r_{34}} \right)$$

$$\text{Avec } \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{r_{14}} = \frac{1}{r_{34}} = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_{24}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

D'où:

$$\boxed{U_S = K \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2})}$$



4. La force appliquée sur la charge  $q_1$  :

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = Kq^2 \sum_i \frac{1}{r_{1i}^2} \vec{u}_i$$

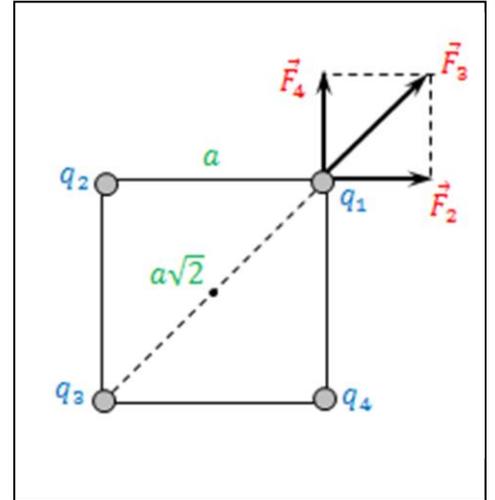
$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = K \frac{q^2}{a^2} \text{ et } |\vec{F}_3| = K \frac{q^2}{2a^2}$$

En utilisant la symétrie :

$$\vec{F}' = \vec{F}_2 + \vec{F}_4 \Rightarrow |\vec{F}'| = \sqrt{|\vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_4|^2} = \sqrt{2} |\vec{F}_2| \Rightarrow |\vec{F}'| = \sqrt{2} K \frac{q^2}{a^2}$$

Comme  $\vec{F}'$  et  $\vec{F}_3$  sont parallèles et dans le même sens

$$|\vec{F}| = |\vec{F}'| + |\vec{F}_3| \Rightarrow |\vec{F}| = K \frac{q^2}{a^2} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)$$



5. Calculons la charge  $q_5$  :

Pour que la force appliquée sur la charge  $q_1$  soit nulle, il faut que la force  $\vec{F}_5$  appliquée par la nouvelle charge  $q_5$  ai le même module que  $\vec{F}$  et opposée en direction. Donc le signe de  $q_5$  est négatif ( $q_5 < 0$ ).

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_5| \Rightarrow K \frac{q^2}{a^2} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) = K \frac{|q_1 q_5|}{r_{15}^2} \text{ avec } r_{15} = d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

Donc :

$$|q_5| = \frac{q}{4} (1 + 2\sqrt{2}) \text{ et } q_5 = -\frac{q}{4} (1 + 2\sqrt{2})$$

En utilisant la symétrie les forces appliquées aux charges  $q_2$ ,  $q_3$  et  $q_4$  sont nulles.

Et puisque on a toujours  $\vec{E}_{M_5} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}(q_5) = q_5 \cdot \vec{E}_{M_5} = \vec{0}$

6. Energie potentielle de la charge  $q_5$  :

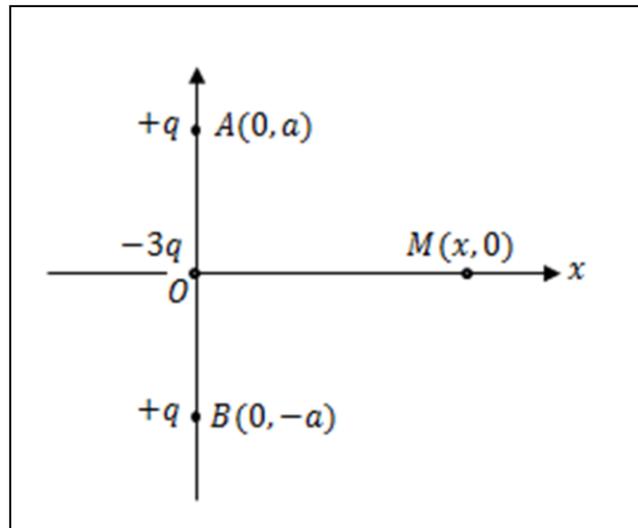
$$U_5 = q_5 \cdot V_{M_5} \Rightarrow U_5 = -(4 + \sqrt{2}) K \frac{q^2}{a}$$

### Exercice 2

On considère un système de trois charges ponctuelles : deux charges positives  $+q$  et une charge négative  $-3q$ . Ces charges disposées respectivement aux points  $A(0, a)$ ,  $B(0, -a)$  et  $O(0,0)$  (figure ci-dessous)

1. Exprimer en fonction  $a$ ,  $q$  et  $x$  le champ électrostatique  $\vec{E}$  au point  $M(0, x)$ .
2. Déduire la force électrostatique appliquée sur une charge  $q'$  placée au point  $M$ .

3. calculer au point  $M$  le potentiel crée par les trois charges et déduire le travail de la force électrostatique lorsqu'on déplace la charge  $q'$  le long de l'axe  $Ox$ , du point  $M$  d'abscisse  $a$  vers au point  $N$  d'abscisse  $2a$ .



**Solution:**

1. Le champ électrostatique  $\vec{E}$  au point  $M$  en fonction de  $a$ ,  $q$  et  $x$ .

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{A/M} + \vec{E}_{B/M} + \vec{E}_{O/M} \dots \dots \dots (1)$$

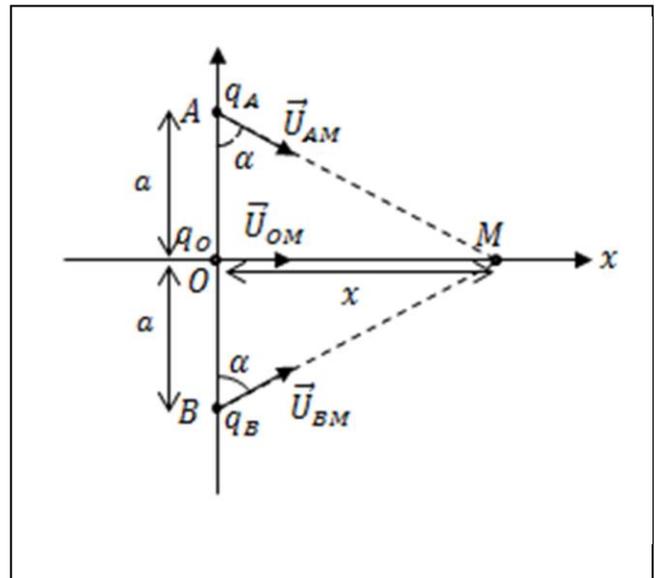
$$\begin{cases} \vec{E}_{A/M} = K \frac{q_A}{AM^2} \vec{U}_{AM} \\ \vec{E}_{B/M} = K \frac{q_B}{BM^2} \vec{U}_{BM} \\ \vec{E}_{O/M} = K \frac{q_O}{OM^2} \vec{U}_{OM} \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} q_A = q_B = +q \\ q_O = -3q \end{cases}, \begin{cases} AM^2 = BM^2 = a^2 + x^2 \\ OM^2 = x^2 \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \vec{U}_{AM} = \sin\alpha \vec{i} - \cos\alpha \vec{j} \\ \vec{U}_{BM} = \sin\alpha \vec{i} + \cos\alpha \vec{j} \\ \vec{U}_{OM} = \vec{i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{A/M} = K \frac{q}{a^2 + x^2} (\sin\alpha \vec{i} - \cos\alpha \vec{j}) \\ \vec{E}_{B/M} = K \frac{q}{a^2 + x^2} (\sin\alpha \vec{i} + \cos\alpha \vec{j}) \dots \dots (2) \\ \vec{E}_{O/M} = K \frac{(-3q)}{x^2} \vec{i} \end{cases}$$



$$(1) \Rightarrow \vec{E}_M = \frac{2Kq}{(a^2 + x^2)} \sin\alpha \vec{i} + 0 \vec{j} + \frac{-3Kq}{x^2} \vec{i}$$

Avec :

$$\sin\alpha = \frac{OM}{AM} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_M = \left[ \frac{2Kqx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{3Kq}{x^2} \right] \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_M = Kq \left[ \frac{2x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{3}{x^2} \right] \vec{i} \dots \dots \dots (3)$$

2. Force électrostatique appliquée sur la charge  $q'$  placée au point  $M$  :

$$a- \vec{E}_{/q'} = q' \cdot \vec{E}_M \dots \dots \dots (4)$$

$$(4) \Rightarrow \vec{E}_{/q'} = Kq q' \left[ \frac{2x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{3}{x^2} \right] \vec{i}$$

3. Le potentiel au point  $M$  :

$$V_M = V_{A/M} + V_{B/M} + V_{O/M} \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{cases} V_{A/M} = K \frac{q_A}{AM} = \frac{Kq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ V_{B/M} = K \frac{q_B}{BM} = \frac{Kq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \dots \dots \dots (2) \\ V_{O/M} = K \frac{q_O}{OM} = \frac{-3Kq}{x} \end{cases}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow V_M = Kq \left[ \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{3}{x} \right] \dots \dots \dots (3)$$

b- Le travail de la force électrostatique

$$W_{\text{électrique}} = -W_{\text{ext}} = q' \cdot (V_M - V_N) \dots \dots \dots (4)$$

$$x = a \rightarrow (3) \Rightarrow V_M = Kq \left[ \frac{2}{\sqrt{a^2 + a^2}} - \frac{3}{a} \right] = \frac{Kq}{a} (\sqrt{2} - 3)$$

$$x = 2a \rightarrow (3) \Rightarrow V_N = Kq \left[ \frac{2}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} - \frac{3}{2a} \right] = \frac{Kq}{a} \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow W_{\text{électrique}} = -W_{\text{ext}} \cong \frac{Kq}{a} \left( \sqrt{2} - 3 - \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{\text{électrique}} = -W_{\text{ext}} \cong -\left(\frac{4Kq}{a}\right) q'}$$

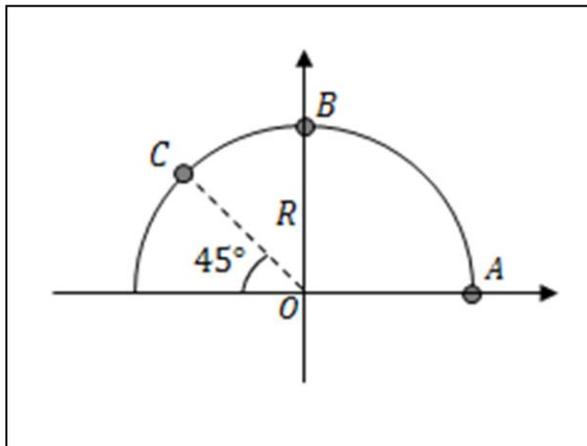
### Exercice 3

On considère trois charges ponctuelles  $q_A$ ,  $q_B$  et  $q_C$  placées respectivement aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ( $q_A = -q$ ,  $q_B = +2q$ ,  $q_C = -2q$ ) appartenant à un cercle de centre  $O$  de rayon  $R$  selon la figure ci-dessous :

1. Calculer le potentiel électrostatique au point  $O$ .
2. Quel est le champ électrostatique au point  $O$ .
3. on place au point  $O$  une charge  $q_0 = +2q$ .

Calculer la force électrostatique exercée sur la charge  $q_0$ .

Est-ce que le champ électrostatique dépend de la valeur de  $q_0$ ?



**Solution:**

1°/ Le potentiel électrostatique au point  $O$

$$V_O = V_A + V_B + V_C$$

$$\begin{cases} V_A = K \frac{q_A}{r_A} = K \frac{-q}{R} \\ V_B = K \frac{q_B}{r_B} = K \frac{2q}{R} \\ V_C = K \frac{q_C}{r_C} = K \frac{-2q}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_O = -K \frac{q}{R} + 2K \frac{q}{R} - 2K \frac{q}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_O = -K \frac{q}{R}}$$

2°/ Le champ électrostatique au point  $O$ .

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E}_A = K \frac{q_A}{r_A^2} \vec{U}_A = K \frac{-q}{R^2} (-\vec{i})$$

$$\vec{E}_B = K \frac{q_B}{r_B^2} \vec{U}_B = K \frac{2q}{R^2} (-\vec{j})$$

$$\vec{E}_C = K \frac{q_C}{r_C^2} \vec{U}_C = K \frac{-2q}{R^2} (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})$$

$$= K \frac{-2q}{R^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$= K \frac{\sqrt{2}q}{R^2} (-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{E}_O = K \frac{q}{R^2} \vec{i} - K \frac{2q}{R^2} \vec{j} + K \frac{\sqrt{2}q}{R^2} (-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{E}_O = K \frac{q}{R^2} [(1 - \sqrt{2}) \vec{i} + (\sqrt{2} - 2) \vec{j}]}$$

3°/ La force électrostatique exercée sur la charge  $q_0$ :

$$\vec{F}_0 = q_0 \cdot \vec{E}_O$$

$$= +2q \cdot K \frac{q}{R^2} [(1 - \sqrt{2}) \vec{i} + (\sqrt{2} - 2) \vec{j}]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_0 = K \frac{2q^2}{R^2} [(1 - \sqrt{2}) \vec{i} + (\sqrt{2} - 2) \vec{j}]}$$

Le champ électrostatique au point  $O$  ne dépend pas de la valeur de  $q_0$ .

#### Exercice 4

I. Deux charges électriques ponctuelles  $q$  et  $q' = -q (q > 0)$  sont placées respectivement aux points  $O$  et  $A$  d'un axe  $x'Ox$  ( $OA = d$ ). Exprimer puis représenter les champs électriques créés par les charges  $q$  et  $q'$  au milieu  $M$  de la droite  $OA$ . Calculer le potentiel  $V(M)$  au point  $M$ .

II. Deux charges électriques ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  sont placées respectivement aux points  $O$  et  $A$  d'un axe  $x'Ox$  ( $OA = d$ ). Sachant que le champ électrique est nul en point  $B$  entre  $O$  et  $A$  tel que  $OB = d/3$ .

1.a)- Que peut-on dire des signes de  $q_1$  et  $q_2$ ? Justifier votre réponse

b)- Exprimer  $q_2$  en fonction de  $q_1$ .

2. on donne :  $q_1 = 2\mu C$ ,  $d = 1,2m$ ,  $K = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$

a)- Calculer le potentiel  $V(B)$  au point  $B$ .

b)- On place au point  $B$  une troisième charge  $q_3 = 1\mu C$ . Calculer son énergie potentielle.

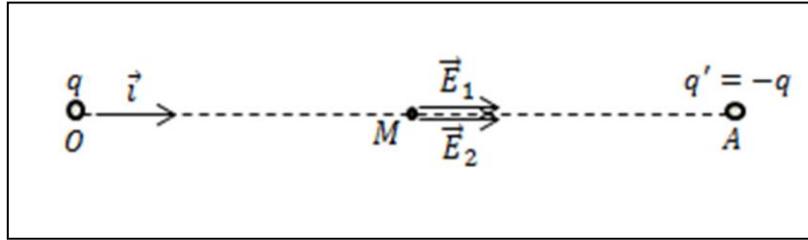
c)- Au point  $B$ , la charge  $q_3$  est en équilibre. Sans faire de calculs, représenter qualitativement les forces agissant sur  $q_3$  si on la déplace légèrement à droite puis à gauche (sur la droite  $OA$ ). la charge  $q_3$  est-elle en équilibre stable (a-t-elle tendance à revenir à sa position d'équilibre?) ou instable (a-t-elle tendance à s'éloigner de sa position d'équilibre?).

**a**

I. Champs électriques créés par les charges  $q$  et  $q'$  au point  $M$  (milieu de la droite  $OA$ ).

$$\vec{E}_1(M) = K \frac{q}{(d/2)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E}_2(M) = K \frac{q'}{(d/2)^2} (-\vec{i}) = K \frac{q}{(d/2)^2} \vec{i} = \vec{E}_1(M)$$



Potentiel  $V(M)$  au point  $M$  :

$$V(M) = K \frac{q}{d/2} + K \frac{q'}{d/2} = 0$$

II. 1. a). Signes des charges  $q_1$  et  $q_2$

Pour que le champ total s'annule en un point entre les deux charges, les deux champs créés par les deux charges doivent être égaux et opposés, c'est-à-dire les charges  $q_1$  et  $q_2$  doivent être de même signe.

b). Relation entre  $q_1$  et  $q_2$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(B) = \vec{0} &\Rightarrow K \frac{q_1}{(OB)^2} \vec{i} + K \frac{q_2}{(AB)^2} (-\vec{i}) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \frac{q_1}{(d/3)^2} = \frac{q_2}{(2d/3)^2} \Rightarrow q_2 = 4q_1 \\ &\Rightarrow \boxed{q_2 = 4q_1} \end{aligned}$$

2. a). Potentiel  $V(B)$  au point  $B$  :

$$\begin{aligned} V(B) &= K \frac{q_1}{OB} + K \frac{q_2}{AB} = K \frac{q_1}{d/3} + K \frac{q_2}{2d/3} \\ &\Rightarrow \boxed{V(B) = K \frac{9q_1}{d}} \end{aligned}$$

A.N:  $\boxed{V(B) = 135 \cdot 10^3 \text{ volts}}$

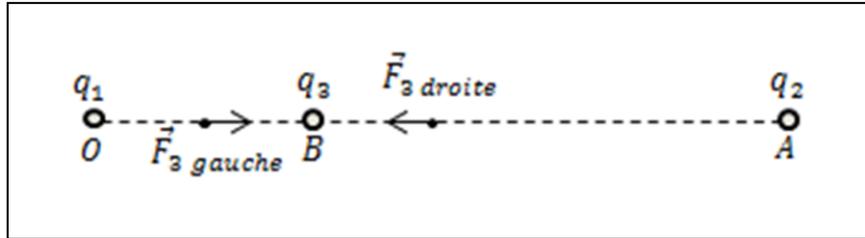
b). Energie potentielle de  $q_3$

On a:  $E_p = q_3 V(B)$ . A.N:  $\boxed{E_p = 0,135 \text{ J}}$

c). Nature de l'équilibre de  $q_3$

D'après le sens de  $\vec{F}_3$  (schéma ci-contre), la charge  $q_3$  a tendance à revenir à sa position d'équilibre si on la déplace légèrement de part et d'autre de  $B$  sur la droite  $OA$ .

→ Donc, la charge  $q_3$  est en équilibre stable.



### 5.6. Potentiel crée par une distribution continue:

Chaque élément infinitésimal de la distribution (noté  $dV$  ou  $dS$  ou  $dl$ ) centré au point P porte une charge

Infinitésimale  $dq$  et crée un potentiel infinitésimal :

$$dV(M) = \frac{dq}{4 \pi \epsilon_0 PM} + cste$$

Le potentiel total crée par la distribution est obtenu en intégrant le potentiel infinitésimal: soit dans le volume  $V$ , soit sur la surface  $S$ , soit le long de la courbe  $C$ .

Distribution	Uniformément chargée	Non uniformément chargée
Volumique	$V(M) = \frac{\rho}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_V \frac{dV}{PM} + cste$	$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) dV}{PM} + cste$
Surfacique	$V(M) = \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0} \iint_S \frac{dS}{PM} + cste$	$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{PM} + cste$
Linéique	$V(M) = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \int_C \frac{dl}{PM} + cste$	$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(P) dl}{PM} + cste$

#### Quelques propriétés :

- Le potentiel est continu et dérivable dans le vide ou dans une distribution volumique de charges.
- Le potentiel est continu et non dérivable à la traversée d'une surface chargée.
- Le potentiel diverge à l'approche d'une distribution linéique de charges ou d'une charge ponctuelle.

### 5.7. Propriétés du champ et du potentiel électriques pour une distribution de charges continues

#### Champ de gradient

Le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire par la relation

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

Le potentiel électrique n'est pas unique, il est défini à une constante additive près (on peut fixer arbitrairement l'origine de ce potentiel).

Le gradient d'un champ scalaire est défini par la relation :

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \cdot \overrightarrow{dM} = -\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$$

Cette expression permet d'obtenir les différentes expressions du gradient dans les différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	Gradient	Déplacement élémentaire
Cartésien à 2 D	$\vec{E}(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y$	$\overrightarrow{dM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$
Polaire	$\vec{E}(\rho, \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$	$\overrightarrow{dM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi$
Cartésien à 3 D	$\vec{E}(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$	$\overrightarrow{dM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$
Cylindrique	$\vec{E}(\rho, \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$	$\overrightarrow{dM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{u}_z$
Sphérique	$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$	$\overrightarrow{dM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

### 5.8. Circulation du champ électrique

La circulation, le long d'une courbe (ou contour) d'un champ vectoriel  $\vec{E}$  est donnée par

$$\int_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM} = - \int_C \overrightarrow{grad} V(M) \cdot \overrightarrow{dM} = \int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

Pour un champ de gradient, cette circulation est indépendante du chemin suivi, elle ne dépend que de la différence de potentiels entre les points de départ et d'arrivée.

Dans le cas du champ électrique, cette différence de potentiels est appelée tension électrique

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM}$$

Comme le potentiel électrique est défini à un constant additif près, seules les différences de potentiels (Indépendantes de cette constante) ont un sens physique.

**Corollaire** : La circulation du champ électrique sur tout contour fermé est nulle: c'est un champ conservatif

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{M} = 0 \quad \forall C$$

### 5.9. Invariances et symétrie du champ électrostatique:

Le principe du Curie affirme que « Lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets. »

En électrostatique, les symétries des distributions de charges (causes) se retrouvent dans le champ et le potentiel électriques (effets). Les symétries envisagées sont des transformations géométriques qui laissent les distributions de charges invariantes.

En physique théorique, les symétries sont classées en groupe de symétrie.

**Remarque** : comme les invariances et les symétries s'appliquent aux champs et aux potentiels électriques, elles s'appliquent aussi aux lignes de champ et aux équipotentielles.

#### 5.9.1. Invariances

1. Si une distribution de charges est invariante pour toute translation parallèle à un axe noté  $(Oz)$ , champ et potentiel seront indépendants de la coordonnée cartésienne  $z$ .
2. Si une distribution de charges est invariante pour toute translation parallèle à un plan noté  $(Oxy)$ , champ et potentiel ne dépendront que de la coordonnée cartésienne  $z$ .
3. Si une distribution de charges est invariante pour toute rotation autour d'un axe noté  $(Oz)$ , champ et potentiel seront indépendants de la coordonnée cylindrique  $\varphi$ . Le problème est dit à **symétrie de révolution**.
4. Si une distribution de charges possède les invariances (1) et (3), champ et potentiel ne dépendront que de la coordonnée cylindrique  $\rho$ . Le problème est dit à **symétrie cylindrique**.
5. Si une distribution de charges est invariante pour toute rotation d'axe passant par un point noté  $O$ , champ et potentiel ne dépendront que de la coordonnée sphérique  $r$ . Le problème est dit à **symétrie sphérique**.

Symétries	Champ et potentiel électrique	Lignes de champ	Equipotentielles
Translation	$\vec{E}(x, y) = -\frac{dV}{dx}(x, y)\vec{u}_x - \frac{dV}{dy}(x, y)\vec{u}_y$ $\vec{E}(\rho, \varphi) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho, \varphi)\vec{u}_\rho - \frac{dV}{d\varphi}(\rho, \varphi)\vec{u}_\varphi$	plan parallèle	Surface à symétrie de translation
Révolution	$\vec{E}(\rho, z) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho, z)\vec{u}_\rho - \frac{dV}{dz}(\rho, z)\vec{u}_z$	plan méridien	Surface à symétrie de révolution
Cylindrique	$\vec{E}(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho)\vec{u}_\rho$	Axiales	Cylindres (infinis)
Sphérique	$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr}(r)\vec{u}_r$	Radiales	Sphères

### 5.9.2. Symétrie et antisymétrie plane:

#### Définitions :

- Une symétrie plane est un symétrique plan (au sens géométrique) qui laisse invariante les charges électriques.
- Une antisymétrie plane est un symétrique plan (au sens géométrique) qui change les signes de toutes les charges électriques.

Les plans de symétrie sont noté  $\Pi_s$  et ceux d'antisymétrie  $\Pi_a$ .

#### Théorèmes :

- En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique est contenu dans ce plan
- $M \in \Pi_s \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_s$
- En tout point d'un plan d'antisymétrie, le champ électrique est orthogonal à ce plan :
- $M \in \Pi_a \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_a^\perp$

### 5.10. Surface équipotentielle

On appelle surface équipotentielle, une surface S dont tous les points sont au même potentiel V.

C'est la surface (x, y, z) sur laquelle le potentiel reste constant.

$$V(x, y, z) = V_0$$

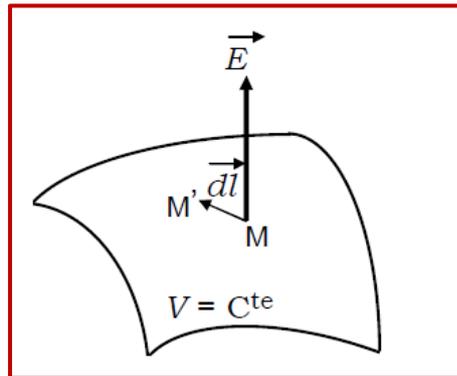
Soit alors un déplacement infinitésimal  $d\vec{M}$  sur cette surface

Si  $M \rightarrow dM$  alors  $V \rightarrow dV$

Mis avec  $dV = 0$  (on reste sur la surface  $V_0$ )

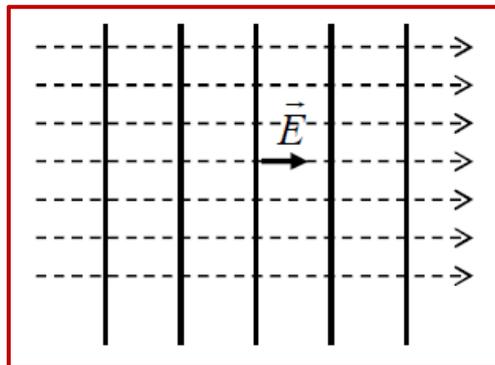
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{M}$$

- a) Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles qu'elles rencontrent.



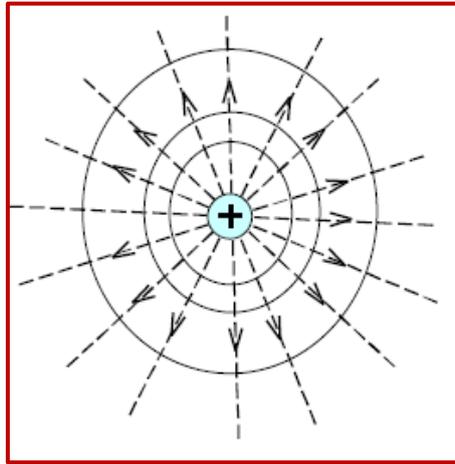
**Fig II.20: Surface équipotentielle**

- b) Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ.  
 c) Le champ électrique est plus intense là où les équipotielles sont les plus resserrées.  
 d) Dans le cas d'un champ uniforme les lignes de champ sont des droites parallèles et les surfaces équipotielles sont des plans perpendiculaires à ces droites.



**Fig II.21: Surfaces équipotielles sont des plans perpendiculaires aux lignes de champ**

- e) Dans le cas d'une charge ponctuelle, les surfaces équipotielles sont des sphères concentriques de centre O et les lignes de champ sont radiales

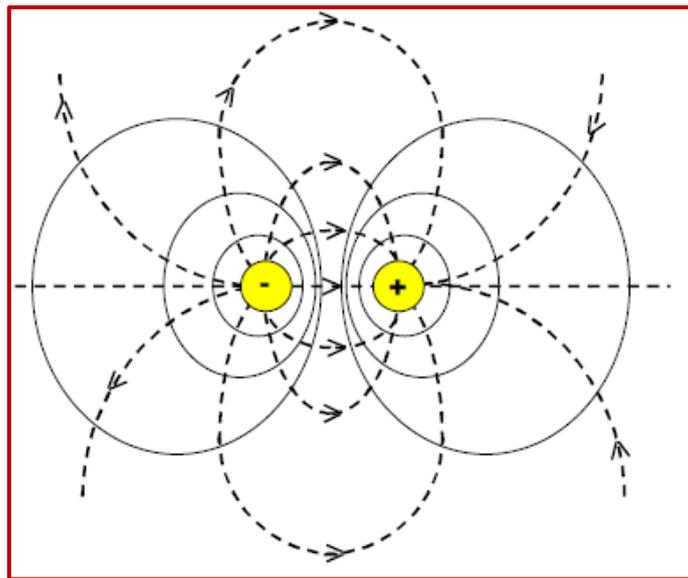


**Fig II.22:** Les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques de centre O et les lignes de champ sont radiales

f) Le cas de deux charges électriques égales et opposées :

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

Sur ces figures, les lignes de champs sont représentées en pointillés et les traces des équipotentielles en traits continus.



**Fig II.23:** Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles

### 5.11 Energie d'une distribution continue de charges

On se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en charges élémentaires  $dq$  :

Distribution linéique :

$$dq = \lambda dl \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_l \lambda \cdot V \cdot dl$$

Distribution surfacique :

$$dq = \sigma dS \Rightarrow W = \frac{1}{2} \iint_s \sigma \cdot V \cdot dS$$

Distribution volumique :

$$dq = \rho dV \Rightarrow W = \frac{1}{2} \iiint_v \rho \cdot V \cdot dV$$

$V$  étant le potentiel créé par toutes les charges de la distribution au point où se trouve la charge élémentaire  $dq$ .

## 5.12. Applications

### 5.12.1. Distributions linéiques

#### 5.12.1.1. Droite uniformément chargée

Considérons une droite  $\Delta$  (infinie) uniformément chargée ( $\lambda = cst.$ ).

La charge totale de la distribution est infinie.

Etude des symétries :

On pose  $\Delta = (Oz)$ , la distribution admet une symétrie cylindrique.

Tout plan contenant la droite  $\Delta$  est plan de symétrie. Tout plan orthogonal à la droite  $\Delta$  est plan de symétrie.

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{u}_\rho = - \frac{dV}{d\rho}(\rho) \vec{u}_\rho$$

Calcul du champ électrique :

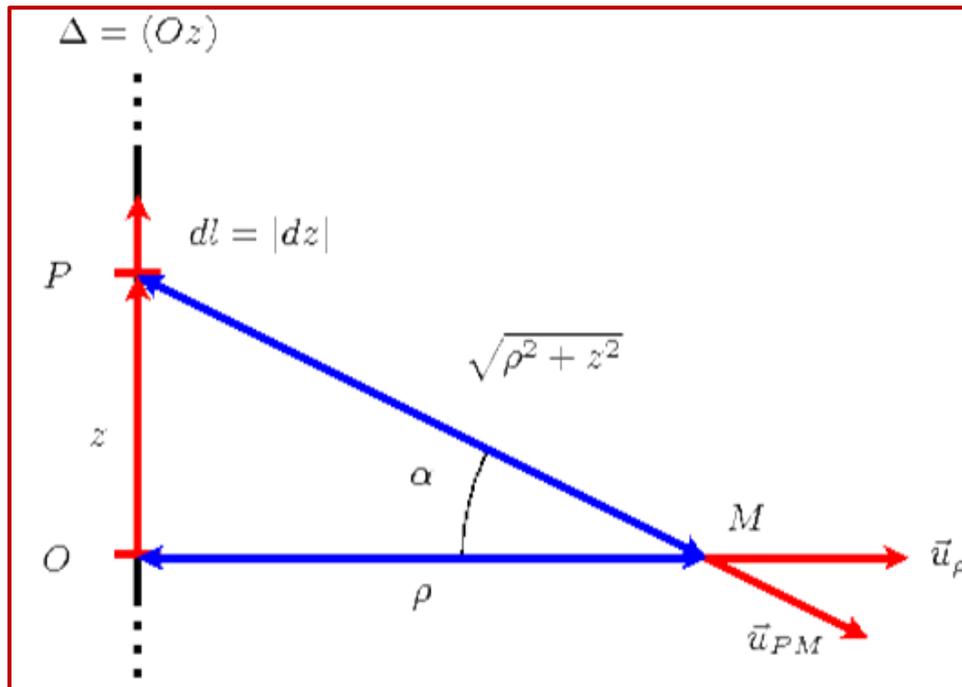


Fig II.24: Droite chargée

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho)\vec{u}_\rho = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl$$

Par projection :

$$\vec{E}(M)\vec{u}_\rho = E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl$$

Le point  $P$  est repéré par sa coordonnée cartésienne  $z$ :

$$E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

On pose le changement de variable :  $z = \rho \tan\alpha \Rightarrow dz = \rho/\cos^2\alpha d\alpha$

$$E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

Calcul du potentiel électrique :

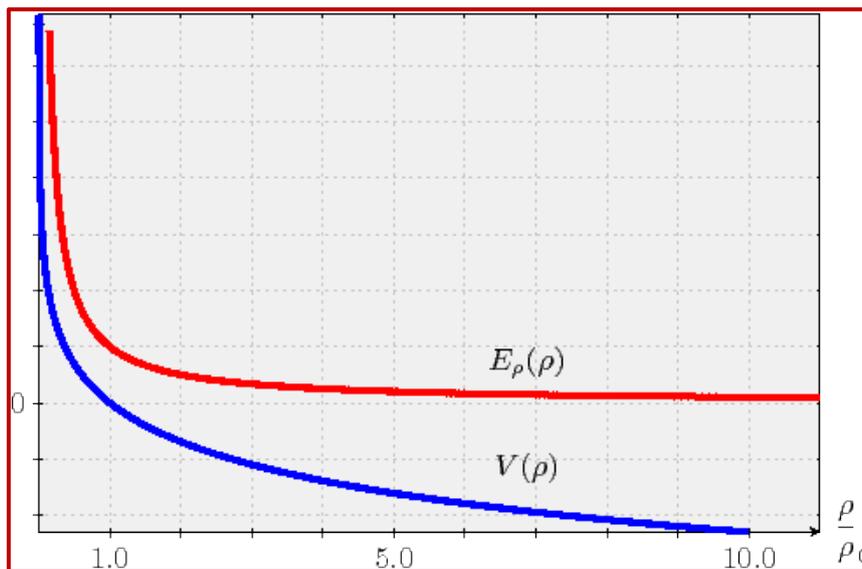
$$E_\rho(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho) \Rightarrow V(\rho) = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

En posant  $V(\rho_0) = 0$ , comme il y a des charges à l'infini, l'origine des potentiels ne peut être prise à l'infini.

Résultats :

Le champ électrique: 
$$\vec{E}_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0 \rho} \vec{u}_\rho$$

Le potentiel électrique: 
$$V(\rho) = - \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$



**Fig II.25:** Droite uniformément chargée ( $\lambda > 0$ )

### 5.12.1.2. Segment uniformément chargé

Considérons un segment  $AB$  de longueur  $l$  uniformément chargé ( $\lambda = cst.$ ).

La charge totale de la distribution est  $q = \lambda l$ .

Etude des symétries :

On pose  $AB \parallel (Oz)$ , la distribution admet une symétrie de révolution.

Tout plan contenant le segment  $AB$  est plan de symétrie. Le plan médiateur du segment  $AB$  est plan de symétrie.

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho, z) \vec{u}_\rho + E_z(\rho, z) \vec{u}_z$$

Sur le plan médiateur du segment :

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{u}_\rho = - \frac{dV}{d\rho}(\rho) \vec{u}_\rho$$

Calcul du champ électrique dans le plan médiateur :

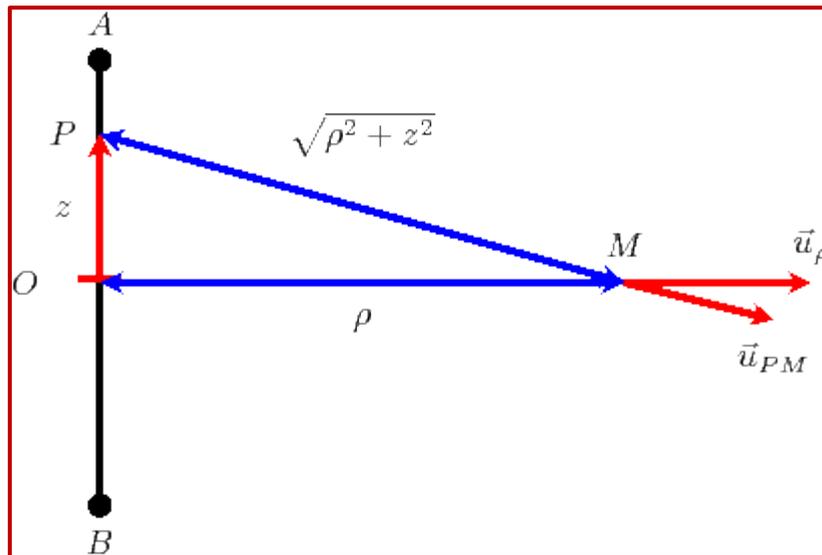


Fig II.26: Segment chargé

$$\vec{E}(M) \cdot \vec{u}_\rho = E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{AB} \frac{\vec{u}_{PM} \vec{u}_\rho}{PM^2} dl$$

Le point  $P$  est repéré par sa coordonnée cartésienne  $z$ :

$$E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

On pose le changement de variable :  $z = \rho \tan \alpha \Rightarrow dz = \rho / \cos^2 \alpha d\alpha$

$$E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \frac{l}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + \rho^2}}$$

Résultat :

Le champ électrique:  $\vec{E}_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \frac{l}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + \rho^2}} \vec{u}_\rho$

Le comportement asymptotique  $\rho \rightarrow 0$  ( $\rho \ll l$ ) permet de retrouver le champ créé par une droite uniformément chargée :

$$\vec{E}_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \frac{l}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + \rho^2}} \vec{u}_\rho \text{ lorsque } \rho \mapsto 0 \quad \vec{E}_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \vec{u}_\rho$$

Le comportement asymptotique  $\rho \rightarrow \infty$  ( $\rho \gg l$ ) permet de retrouver le champ créé par une charge ponctuelle  $q = \lambda l$  :

$$\vec{E}_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \frac{l}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + \rho^2}} \vec{u}_\rho \text{ lorsque } \rho \mapsto \infty \quad \vec{E}_\rho(\rho) = \frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0\rho^2} \cdot \vec{u}_\rho$$

### 5.12.1.3. Cercle uniformément chargé

Considérons un cercle  $C$  d'axe  $\Delta$ , de rayon  $R$ , uniformément chargé ( $\lambda = \text{cst.}$ ).

La charge totale de la distribution est  $q = 2\pi R \lambda$ .

Etude des symétries :

On pose  $\Delta = (Oz)$ , la distribution admet une symétrie de révolution.

Tout plan contenant l'axe  $\Delta$  du cercle  $C$  est plan de symétrie. Le plan du cercle  $C$  est plan de symétrie.

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho, z)\vec{u}_\rho + E_z(\rho, z)\vec{u}_z$$

Sur l'axe du cercle :

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{u}_z = -\frac{dV}{dz}(z)\vec{u}_z$$

Calcul du champ électrique sur l'axe :

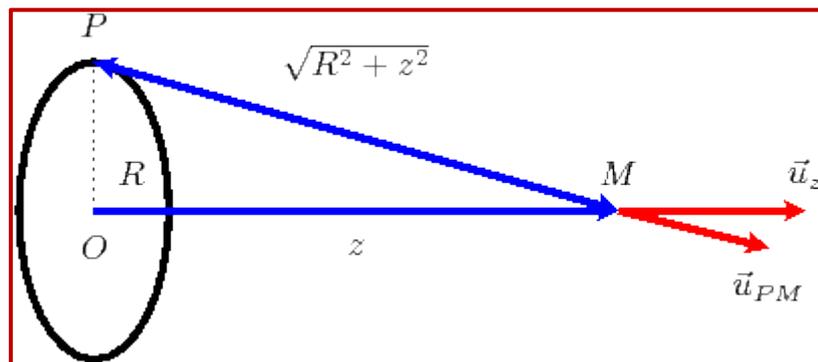


Fig II.27: Cercle chargé

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \cdot \vec{u}_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl$$

Par projection :

$$\vec{E}_z(z) \cdot \vec{u}_z = E_z(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\vec{u}_{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^2} dl$$

Si le cercle est dans le plan  $(Oxy)$ , le point  $P$  est repéré par ses coordonnées polaires  $(\rho = R, \varphi)$  :

$$E_z(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R d\varphi = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Calcul du potentiel électrique :

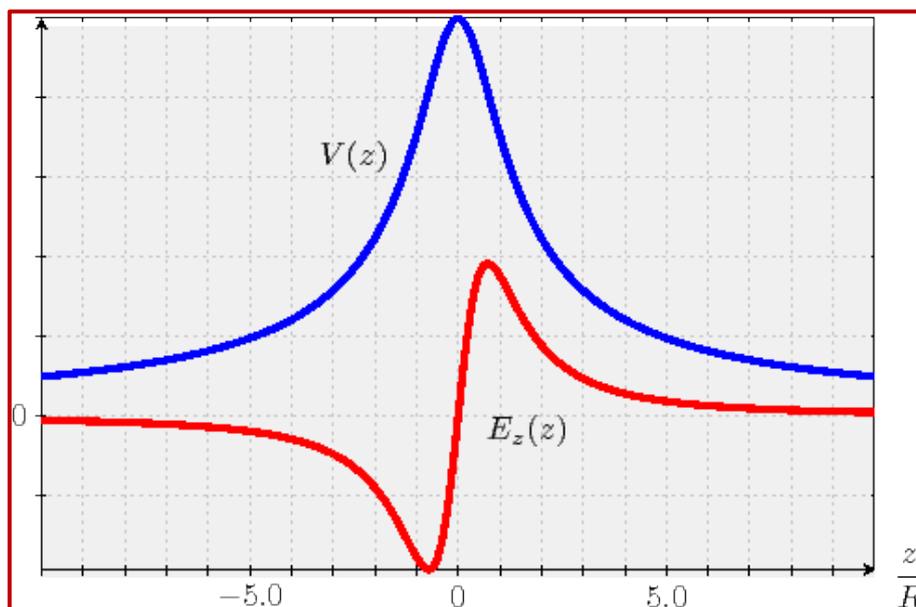
$$E_z(z) = - \frac{dV}{dz}(z) \Rightarrow V(z) = - \int \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

L'origine des potentiels est prise à l'infini.

Résultats :

Le champ électrique: 
$$\vec{E}_z(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Le potentiel: 
$$V(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$



**Fig II.28:** Cercle uniformément chargé ( $\lambda > 0$ )

Le comportement asymptotique  $|z| \rightarrow \infty$  ( $|z| \gg R$ ) permet de retrouver le champ et le potentiel créés par une charge ponctuelle  $q = 2 \pi R \lambda$  :

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \frac{zR}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \text{ lorsque } |Z| \mapsto 0 \quad \vec{E}(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{z^2} \cdot \vec{u}_z = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\epsilon_0\rho^2} \vec{u}_z$$

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} \text{ lorsque } |Z| \mapsto 0, \quad V(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{z} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\epsilon_0 z}$$

### 5.12.2. Distributions surfaciques

#### 5.12.2.1. Plan uniformément chargé

Considérons un plan  $\Pi$  (infini) uniformément chargé ( $\sigma = \text{cst.}$ ).

La charge totale de la distribution est infinie.

Etude des symétries :

On pose  $\Pi = (Oxy)$ , la distribution admet une symétrie de translation parallèlement au plan  $\Pi$ .

Tout plan orthogonal au plan  $\Pi$  est plan de symétrie. Le plan  $\Pi$  est plan de symétrie.

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{u}_z = - \frac{dV}{dz}(z) \vec{u}_z$$

Calcul du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{u}_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Pi} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$$

Par projection :

$$E_z(z) \vec{u}_z = E_z(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Pi} \frac{\vec{u}_{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^2} dS$$

Le point  $P$  est repéré par ses coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  :

$$\vec{E}_z(z) \vec{u}_z = E_z(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \rho d\rho d\varphi = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{\pi} d\varphi$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z).$$

Calcul du potentiel électrique :

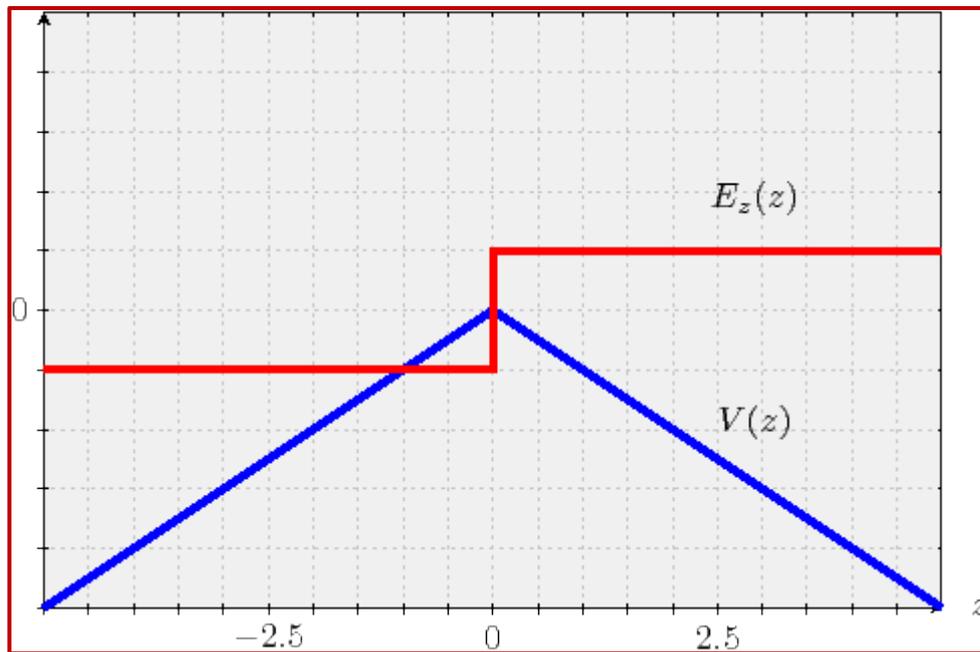
$$E_z(z) = - \frac{dV}{dz}(z) \Rightarrow V(z) = - \int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) dz = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|$$

En posant  $V(0) = 0$ , comme il y a des charges à l'infini, l'origine des potentiels ne peut être prise à l'infini.

Résultats :

Le champ électrique:  $\vec{E}_z(z) = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \vec{u}_z.$

Le potentiel électrique:  $V(z) = -\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} |z|$



**Fig II.29:** Plan uniformément chargé ( $\sigma > 0$ )

Comme prévu, le champ électrique (sa composante normale en fait) est discontinu à la traversée du plan chargé.

### 5.12.2.2. Disque uniformément chargé

Considérons un disque  $D$  d'axe  $\Delta$ , de rayon  $R$ , uniformément chargé ( $\sigma = \text{cst.}$ ).

La charge totale de la distribution est  $q = \pi R^2 \sigma$ .

Etude des symétries :

On pose  $\Delta = (Oz)$ , la distribution admet une symétrie de révolution.

Tout plan contenant l'axe  $\Delta$  du disque  $D$  est plan de symétrie. Le plan du disque  $D$  est plan de symétrie.

Sur l'axe du disque :

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz}(z) \vec{u}_z$$

Calcul du champ électrique :

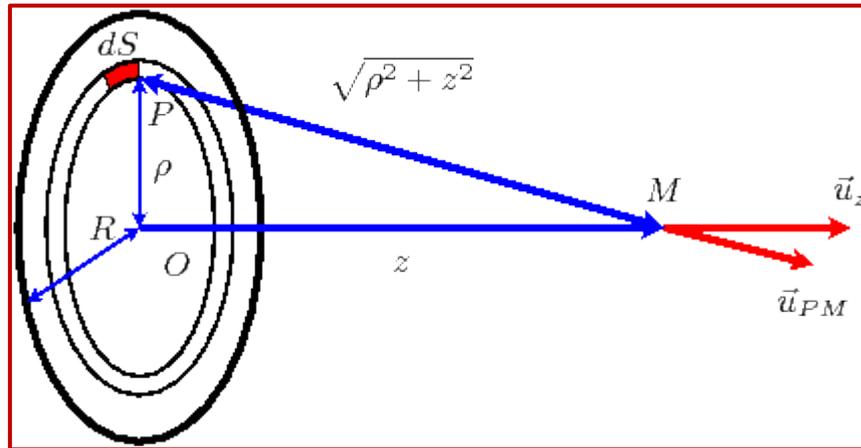


Fig II.30: Disque chargé

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{u}_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Pi} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$$

Par projection :

$$E_z(M) \vec{u}_z = E_z(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Pi} \frac{\vec{u}_{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^2} dS$$

Si le disque est dans le plan  $(Oxy)$ , le point  $P$  est repéré par ses coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$  :

$$\vec{E}_z(z) \vec{u}_z = E_z(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \rho d\rho d\varphi = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho=0}^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{\pi} d\varphi$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right]_0^R$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) .$$

Calcul du potentiel électrique :

$$E_z(z) = -\frac{dV}{dz}(z) \Rightarrow$$

$$V(z) = -\int \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) dz = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} (|z| + R - \sqrt{R^2 + z^2})$$

L'origine des potentiels est prise à  $z = 0$ .

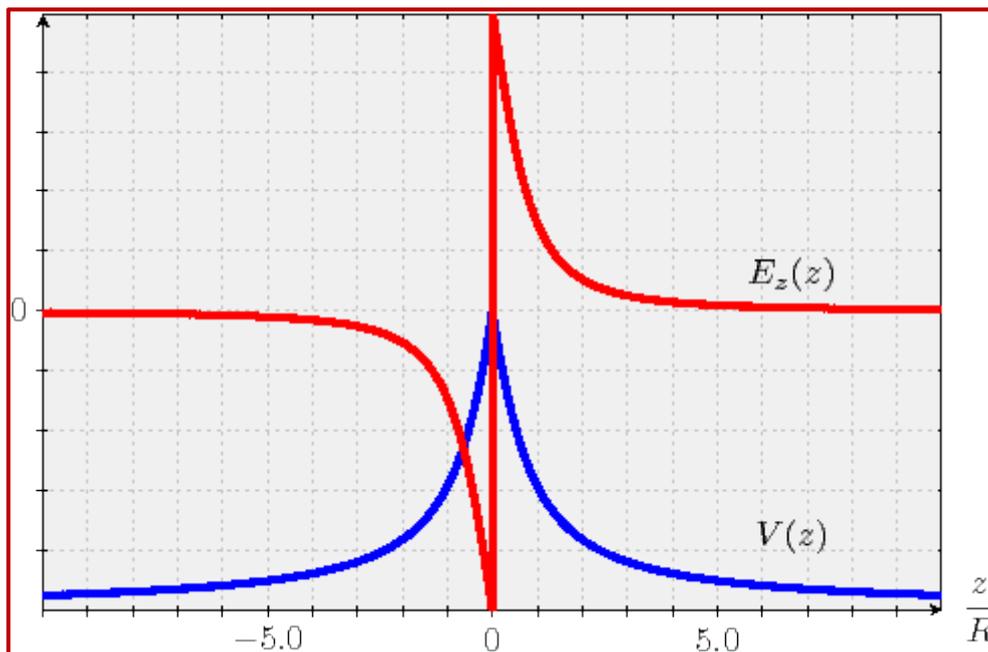
Résultats :

Le champ électrique:

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2 \varepsilon_0} \left( \operatorname{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Le potentiel électrique:

$$V(z) = -\frac{\sigma z}{2 \varepsilon_0} (|z| + R - \sqrt{R^2 + z^2})$$



**Fig II.31:** Disque uniformément chargé ( $\sigma > 0$ )

Comme prévu, le champ électrique (sa composante normale en fait) est discontinu à la traversée du disque chargé.

Le comportement asymptotique  $|z| \rightarrow 0$  ( $|z| \ll R$ ) permet de retrouver le champ et le potentiel créés par un plan uniformément chargé :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \operatorname{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z \text{ lorsque } |z| \rightarrow 0 \text{ alors } E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \vec{u}_z$$

Le comportement asymptotique  $|z| \rightarrow \infty$  ( $|z| \gg R$ ) permet de retrouver le champ et le potentiel créés par une charge ponctuelle  $q = \pi R^2 \sigma$  :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \operatorname{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \left( 1 - \left( \frac{R}{z} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \vec{u}_z$$

$$\text{lorsque } z \rightarrow \infty \text{ alors } E(z) = \frac{\pi R^2 \sigma}{4 \pi \varepsilon_0 |z|} \vec{u}_z$$

### 5.12.2.3. Sphère uniformément chargée

Considérons une sphère  $S$  de rayon  $R$ , uniformément chargée ( $\sigma = \text{cst.}$ ).

La charge totale de la distribution est  $q = 4 \pi R^2 \sigma$ .

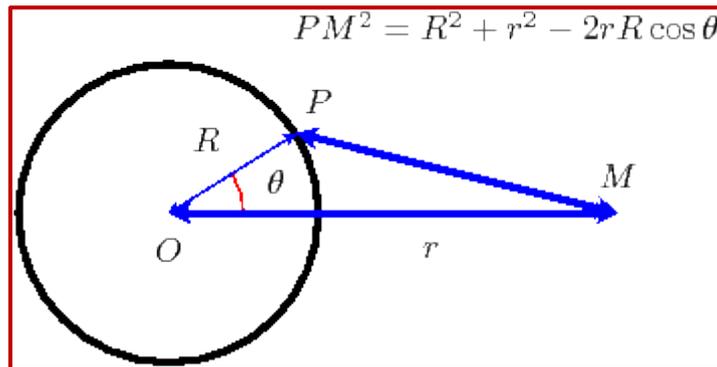
Etude des symétries :

La distribution admet une symétrie sphérique.

Tout plan contenant le centre de la sphère  $S$  est plan de symétrie.

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r = - \frac{dV}{dr}(r) \vec{u}_r$$

Calcul du potentiel électrique :



**Fig II.31:** Sphère chargée

$$V(M) = V(r) = \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0} \iint_S \frac{dS}{PM}$$

Si la sphère est de centre  $O$ , le point  $P$  est repéré par ses coordonnées sphériques ( $r = R, \theta, \varphi$ ) :

$$V(r) = \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \frac{R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 r R \cos \theta}} = \frac{R^2 \sigma}{4 \pi \epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 r R \cos \theta}} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} d\varphi$$

$$V(r) = \frac{2 \pi R^2 \sigma}{4 \pi \epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 r R \cos \theta}} = \frac{2 \pi R \sigma}{4 \pi \epsilon_0 r} \left[ \sqrt{R^2 + r^2 - 2 r R \cos \theta} \right]_0^{\pi} = \frac{2 \pi R \sigma}{4 \pi \epsilon_0 r} (R + r - R - r)$$

Il faut alors considérer deux cas :

$$V(r \leq R) = \frac{R \sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R} = \text{cst}$$

$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

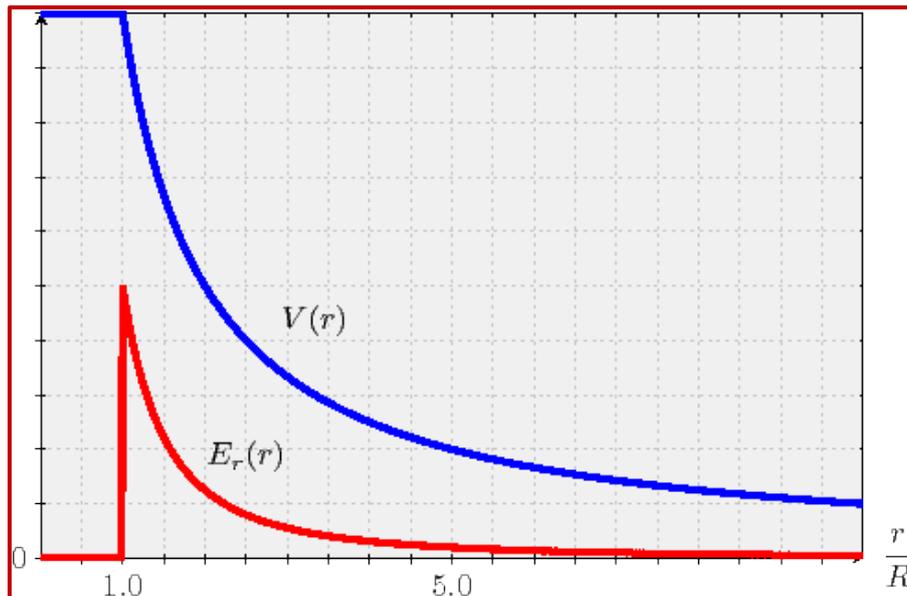
Calcul du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r = - \frac{dV}{dr}(r) \vec{u}_r$$

Il faut encore considérer deux cas :

$$\vec{E}(r \leq R) = \vec{0}$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$



**Fig II.32:** Sphère uniformément chargée ( $\sigma > 0$ )

Comme prévu, le champ électrique (sa composante normale en fait) est discontinu à la traversée de la sphère chargée.

A l'extérieur de la distribution à symétrie sphérique, champ et potentiel sont ceux d'une charge ponctuelle qui serait centrée sur la distribution et qui porterait sa charge totale  $q = 4 \pi R^2 \sigma$ .

### 5.12.3. Distributions volumiques

#### 5.12.3.1. Boule uniformément chargée

Considérons une boule  $B$  de rayon  $R$ , uniformément chargée ( $\rho = cst.$ ).

La charge totale de la distribution est  $q = 4/3 \pi R^3 \rho$ .

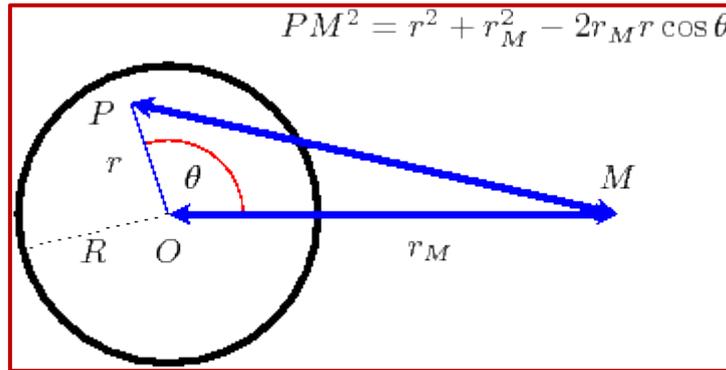
Étude des symétries :

La distribution admet une symétrie sphérique.

Tout plan contenant le centre de la boule  $B$  est plan de symétrie.

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r = - \frac{dV}{dr}(r) \vec{u}_r$$

Calcul du potentiel électrique :



**Fig II.33:** Boule chargée

$$V(M) = V(r) = \frac{\rho}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_B \frac{dV}{PM}$$

Si la boule est de centre  $O$ , le point  $P$  est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$V(r_M) = \frac{\rho}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{\sqrt{r^2 - r_M^2 - 2r_M r \cos \theta}} = \frac{\rho}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{r^2 - r_M^2 - 2r_M r \cos \theta}} r^2 \, dr \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} d\varphi$$

$$V(r_M) = \frac{2 \pi \rho}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{r^2 - r_M^2 - 2r_M r \cos \theta}} r^2 \, dr = \frac{2 \pi \rho}{4 \pi \epsilon_0 r_M} \int_{r=0}^R (r - r_M - |r - r_M|) r \, dr$$

Il faut alors considérer deux cas :

$$\begin{aligned} V(r_M \leq R) &= \frac{2 \pi \rho}{4 \pi \epsilon_0 r_M} \left( \int_{r=0}^{r_M} 2 r^2 \, dr - \int_{r=r_M}^R 2 r_M r \, dr \right) = \frac{2 \pi \rho}{4 \pi \epsilon_0 r_M} \left( \frac{2}{3} r_M^2 - r_M (R^2 - r_M^2) \right) \\ &= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r_M^2}{2 R^2} \right) \end{aligned}$$

$$V(r_M \geq R) = \frac{2 \pi \rho}{4 \pi \epsilon_0 r_M} \int_{r=0}^R 2 r^2 \, dr = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_M}$$

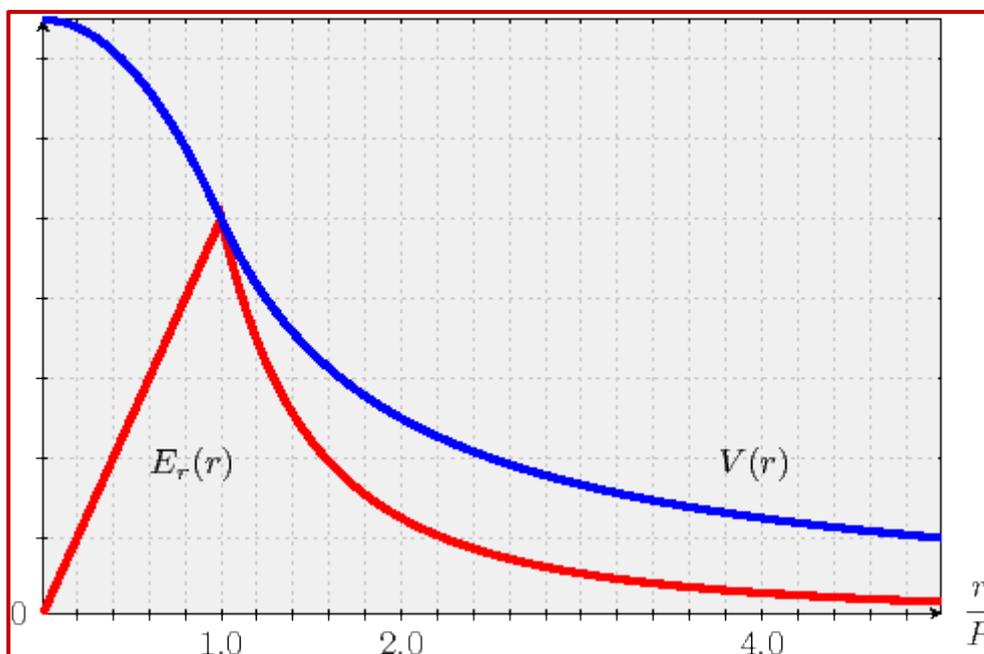
Calcul du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r = - \frac{dV}{dr}(r) \vec{u}_r$$

Il faut encore considérer deux cas :

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} r \vec{u}_r = \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

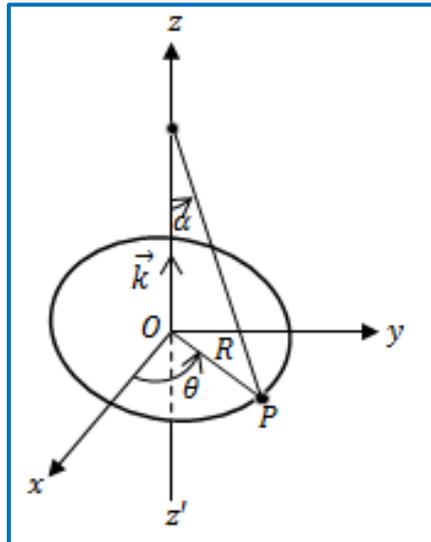


**Fig II.34:** Boule uniformément chargée ( $\rho > 0$ )

A l'extérieur de la distribution à symétrie sphérique, champ et potentiel sont ceux d'une charge ponctuelle qui serait centrée sur la distribution et qui porterait sa charge totale  $q = 4/3 \pi R^3 \rho$ .

**Exercices corrigés****Exercice 1**

Soit une boucle circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$ , uniformément chargée avec une densité linéique  $\lambda_0 = \lambda(\text{cste})$  (figure -1). Calculer le champ  $\vec{E}$  créée par cette distribution de charges, en un point  $M$  de l'axe  $\vec{z}$  de la boucle à partir du potentiel électrostatique

**Solution:**

a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel  $dV(M)$  créé en un point  $M(0, 0, z)$  par la charge  $dq = \lambda dl$  portée par un élément  $dl$  de la boucle entourant  $P$  (la figure ci-dessous) est:

La charge  $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$  crée en  $M$  le potentiel  $V(M)$ :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl}{\|\vec{PM}\|}$$

Avec,  $dl = R d\theta$  et  $\|\vec{PM}\| = (R^2 + z^2)^{1/2}$

Le potentiel  $V(M)$  est obtenu par intégration sur le contour  $C$  de la boucle :

$$V(M) = \oint_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Ce qui donne :

$$V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = V(0, 0, z) = V(0, 0, -z)$$

Le champ  $\vec{E}(M)$  est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k} = \vec{E}(0, 0, z) = -\vec{E}(0, 0, -z)$$

### Exercice 2

Considérons un segment de droite de longueur  $L = 2a$  disposé suivant l'axe  $(Ox)$ , comme le montre la figure.

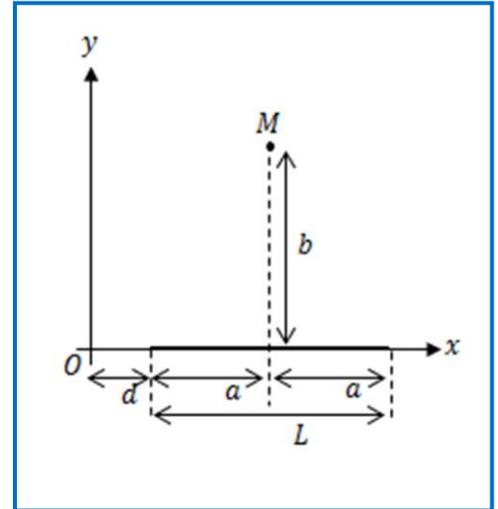
Sa densité linéaire

de charge  $\lambda$  varie en fonction de  $x$  suivant la loi:  $\lambda = \beta \cdot x$

$\beta$  est une constante positive.

1. Quelle est l'unité de la constante  $\beta$  dans le système [MKSA]?
2. Calculer le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}(O)$  au point  $O$ .
3. Calculer le potentiel électrostatique  $V(O)$  au point  $O$ .
4. Calculer le potentiel électrostatique  $V(M)$  au point  $M$ .

On donne : 
$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + c^2}} = \ln(z + \sqrt{z^2 + c^2})$$



### Solution:

1) Unité de la constante  $\beta$ :

$$\lambda = \beta \cdot x \Rightarrow \beta = \frac{\lambda}{x} \Rightarrow [\beta] = \frac{[\lambda]}{[x]}$$

$$[\lambda] = \frac{C}{m} \text{ et } [x] = m \Rightarrow [\beta] = \frac{C}{m^2}$$

2) Champ électrostatique.

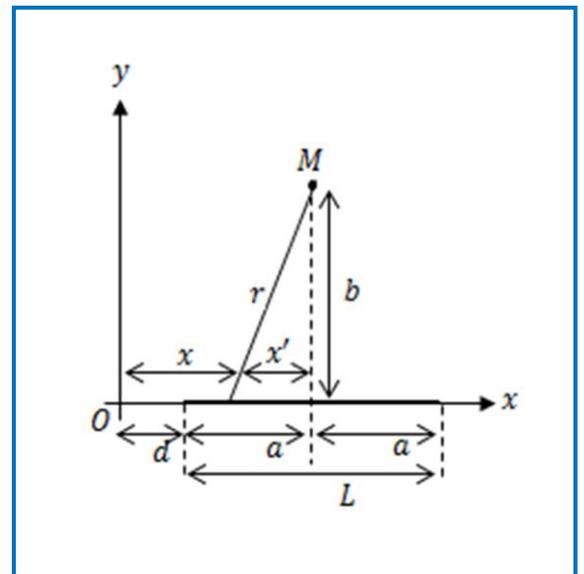
Distribution linéaire:  $dq = \lambda \cdot dl$

$$d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r = K \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u}_r$$

L'axe de symétrie passant par  $O$  est l'axe  $(OX)$   $\vec{E} = -E_x \vec{e}_x$

$$dE = dE_x = K \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \Rightarrow E_x = K \int_a^{2a+d} \frac{\lambda \cdot dl}{r^2}$$

Paramétrisation:



$$\begin{cases} r = x \\ dl = dx \\ \lambda = \beta x \end{cases} \Rightarrow E_x = K\beta \int_d^{2a+d} \frac{1}{x} dx$$

Donc :

$$\boxed{\vec{E}(O) = -K\beta \cdot \ln\left(\frac{2a}{d} + 1\right) \vec{e}_x}$$

3) Potentiel électrostatique  $V(O)$  au point  $O$ :

Potentiel crée par la charge  $dq$ :

$$dV = K \frac{dq}{r} = K \frac{\lambda \cdot dl}{r}$$

Potentiel crée par le segment de droite:

$$V = \int dV = K \int \frac{\lambda \cdot dl}{r} = K\beta \int_d^{2a+d} dx \Rightarrow \boxed{V(O) = 2K\beta a}$$

4) Potentiel électrostatique  $V(M)$  au point  $M$

Potentiel crée par la charge  $dq$ :

$$dV = K \frac{dq}{r} = K \frac{\lambda \cdot dl}{r}$$

Potentiel crée par le segment de droite :

$$V = \int dV = K \int \frac{\lambda \cdot dl}{r}$$

Paramétrisation:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x'^2 + b^2} \\ dl = dx' \\ \lambda = \beta x = \beta(a + d + x') \end{cases} \Rightarrow V = K \int \frac{\lambda \cdot dl}{r} = K\beta \int_{-a}^{+a} \frac{a + d + x'}{\sqrt{x'^2 + b^2}} dx'$$

$$V = K\beta \left[ \int_{-a}^{+a} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + b^2}} dx' + (a + d) \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + b^2}} dx' \right]$$

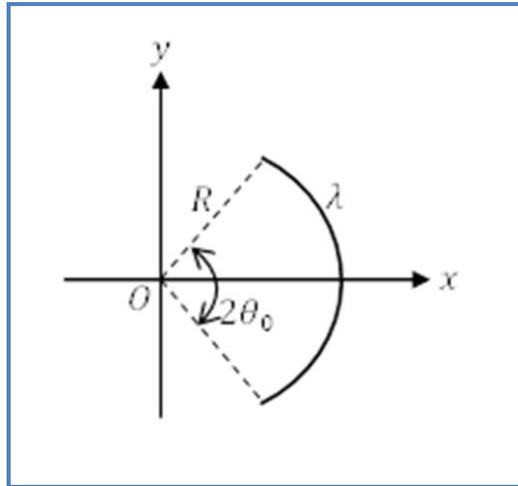
$$V = K\beta \left[ \sqrt{x'^2 + b^2} \right]_{-a}^{+a} + K\beta(a + d) \left[ \ln(x' + \sqrt{x'^2 + b^2}) \right]_{-a}^{+a}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = K\beta(a + d) \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a}\right)}$$

### Exercice 3

Une tige ayant la forme d'un arc de cercle de rayon  $R$  est contenue dans le plan  $(xOy)$  comme le montre la figure.

La densité de charge de la tige en fonction de  $\theta$  est donnée par la relation  $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$  tel que  $\lambda_0 =$  constante.  $\theta$  est l'angle polaire (par rapport à l'axe  $Ox$ ) et l'angle  $2\theta_0$  formé par la tige est centré sur l'axe  $Ox$ .



1. Montrez que la densité de charge  $\lambda$  est symétrique par rapport à l'axe  $Ox$ .
2. Calculez le vecteur champ électrique  $\vec{E}(O)$  créé par cette distribution au point d'origine  $O$ .
3. Calculez le potentiel électrostatique  $V(O)$  créée par cette distribution au point d'origine  $O$ .

On donne :  $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$

**Solution:**

1. Symétrie de la distribution.

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta \text{ donc } \lambda(-\theta) = \lambda_0 \cos(-\theta) = \lambda_0 \cos\theta = \lambda(\theta)$$

D'où la distribution est symétrique par rapport à l'axe  $(OX)$ .

2. Champ électrostatique  $\vec{E}(O)$ :

Distribution linéaire:  $dq = \lambda \cdot dl$

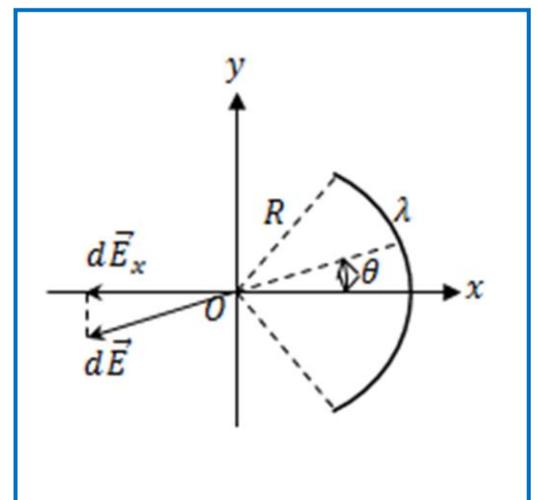
$$d\vec{E} = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r = K \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u}_r$$

L'axe de symétrie passant par  $O$  est l'axe  $(Ox)$   $\vec{E} = -E_x \vec{e}_x$

$$dE = dE_x \cos\theta = K \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \cos\theta \Rightarrow E_x = K \int \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \cos\theta$$

Paramétrisation:

$$\begin{cases} r = R \\ dl = R d\theta \\ \lambda = \lambda_0 \cos\theta \end{cases} \Rightarrow E_x = K \frac{\lambda_0}{R} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos^2\theta d\theta$$



$$\Rightarrow E_x = K \frac{\lambda_0}{R} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$\Rightarrow E_x = K \frac{\lambda_0}{R} (2\theta_0 + \sin 2\theta_0)$$

Donc :

$$\vec{E} = -K \frac{\lambda_0}{R} (2\theta_0 + \sin 2\theta_0) \vec{e}_x$$

3. Potentiel électrostatique  $V(O)$  :

Potentiel crée par la charge  $dq$  :

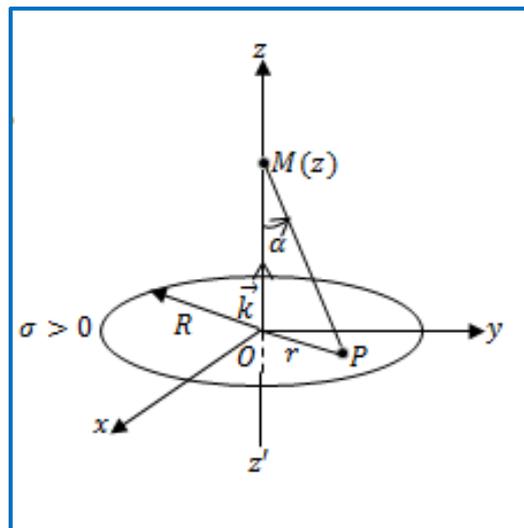
$$dV = K \frac{dq}{r} = K \frac{\lambda \cdot dl}{r}$$

Potentiel crée par l'arc de cercle (en gardant la même paramétrisation précédente) :

$$V = \int dV = K \int \frac{\lambda \cdot dl}{r} = K \lambda_0 \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos \theta d\theta \Rightarrow \boxed{V(O) = 2K \lambda_0 \sin \theta_0}$$

#### Exercice 4

Soit un disque centre  $O$ , de rayon  $R$ , uniformément chargé avec une densité surfacique de charge  $\sigma > 0$  comme dans la figure.

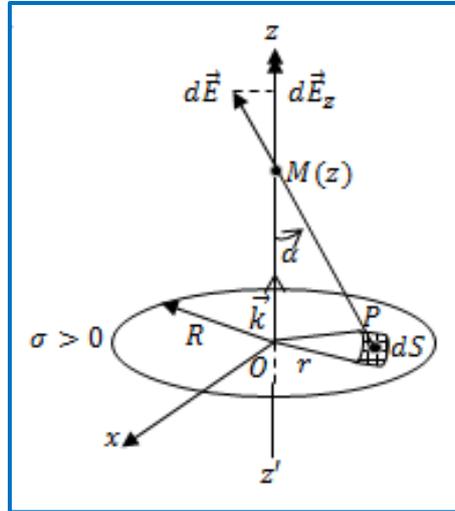


Calculer le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution de charges en un point  $M$  de l'axe du disque à partir Du potentiel électrostatique.

**Solution**

a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel  $dV(M)$  créée en un point  $M(0, 0, z)$  par la charge  $dq = \sigma dS$  entourant le point  $P$  (Comme le montre la figure) est :



La charge  $dq = \sigma dS$  crée en  $M$  le potentiel  $V(M)$  s'écrit :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{\|\vec{PM}\|}$$

Avec,  $dS = r dr d\theta$  et  $\|\vec{PM}\| = (r^2 + z^2)^{1/2}$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

Le potentiel  $V(M)$  est obtenu par intégration sur la surface du disque :

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr d\theta}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (r^2 + z^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=R}$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (R^2 + z^2)^{1/2} - |z| \right] = V(0, 0, z) = V(0, 0, -z)$$

Le champ  $\vec{E}(M)$  est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{k}$$

Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \vec{k} = \vec{E}(0, 0, z) = -\vec{E}(0, 0, -z)$$

**Exercice 5**

1) On creuse dans une sphère de centre  $O_1$  et de rayon  $R$  une cavité sphérique de même centre  $O_1$  et de rayon  $\frac{R}{4}$ . Il n'y a pas de charge dans la cavité.

Dans le volume sphérique restant, la densité volumique de charges est  $\rho_0 = cte > 0$ .

En utilisant le principe de superposition, déterminé

l'expression du champ électrique  $\vec{E}(r)$  et le potentiel  $V(r)$

qui en résulte (en prenant  $V(\infty) = 0$ ) dans les trois cas suivants :

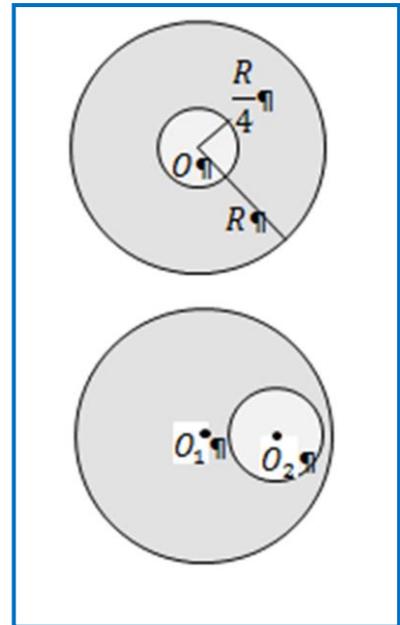
a)  $r \leq \frac{R}{4}$

b)  $\frac{R}{4} \leq r \leq R$

c)  $r \geq R$

Donner l'allure des courbes  $E(r)$  et  $V(r)$ .

2) La cavité est centrée en  $O_2$  tel que  $O_1O_2 = \frac{R}{2}$



Exprimer :

a) le champ en un point  $M$  intérieur à la cavité en fonction de  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1M}$  et  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2M}$ .

Que peut-on en conclure ?

b) Le champ en un point  $N$  extérieur à la sphère de rayon  $R$  en fonction de  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1N}$  et  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2N}$ .

**Solution:**

Principe de superposition :

En tout point  $M$ , le champ est la somme des champs créés l'un par la sphère  $(O_1, R)$  portant la charge volumique  $\rho_0$ , l'autre par la sphère  $(O_1, \frac{R}{4})$  portant la charge volumique  $-\rho_0$ . En utilisant les

résultats du cours et en posant  $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{\|\overrightarrow{O_1M}\|}$  on obtient :

$r$	$\vec{E}_1$	$\vec{E}_2$	$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$
a) $r \leq \frac{R}{4}$	$\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$	$-\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$	$\vec{0}$
b) $\frac{R}{4} \leq r \leq R$	$\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$	$-\frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \left(\frac{R}{4}\right)^3 \vec{e}_r$	$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R^3}{64r^2}\right) \vec{e}_r$
c) $r \geq R$	$\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$-\frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \left(\frac{R}{4}\right)^3 \vec{e}_r$	$\frac{21 \rho_0 R^3}{64 \epsilon_0 r^2}$

On obtient alors  $V(r)$  en utilisant la relation :

$$V(r) = - \int E_r dr$$

Pour  $r \geq R$ : 
$$V(r) = \frac{21 \rho_0 R^3}{64 \epsilon_0 r} + C_1$$

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Pour  $\frac{R}{4} \leq r \leq R$ : 
$$V(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho_0 R^3}{192\epsilon_0 r} + C_2$$

La continuité de  $V(r)$  en  $r = R$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{21 \rho_0 R^2}{64 \epsilon_0} &= \frac{33 \rho_0 R^2}{192 \epsilon_0} + C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

D'où:

$$V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{96} \left(\frac{R}{r}\right) - 1 \right]$$

Pour  $r \leq \frac{R}{4}$ : 
$$V(r) = C_3$$

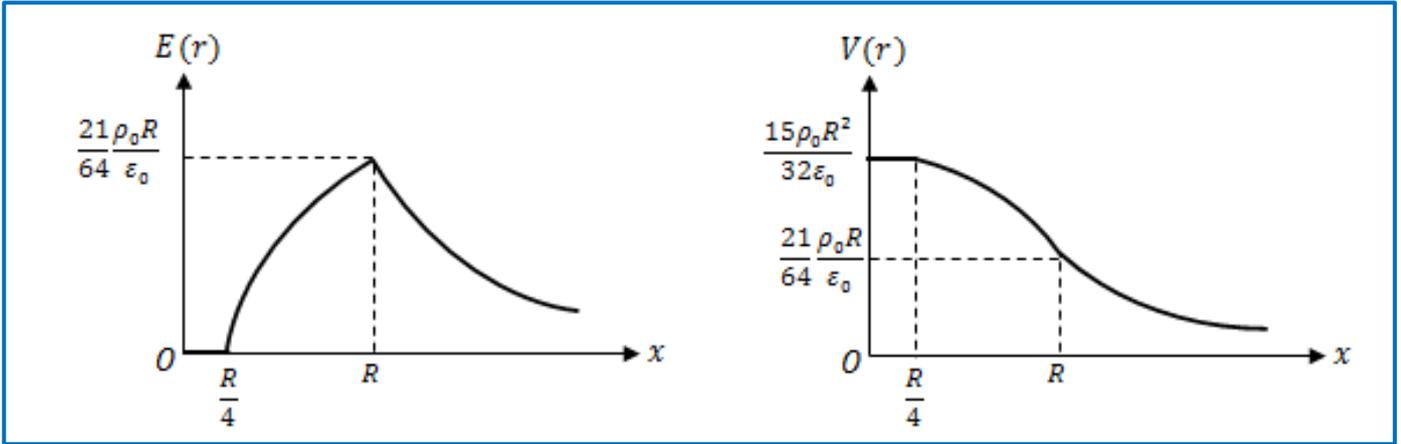
La continuité de  $V(r)$  en  $r = \frac{R}{4}$ :

$$C_3 = -\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{48} + \frac{1}{24} - 1 \right]$$

D'où :

$$V(r) = \frac{15 \rho_0 R^2}{32 \epsilon_0}$$

Allure des courbes:



2) En appliquant toujours le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

a)

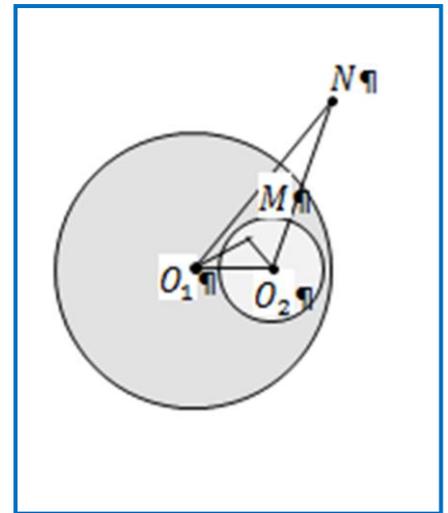
$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1M} \text{ et } \vec{E}_2(M) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2M}$$

D'où :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M})$$

Soit :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1O_2}}$$



Le champ électrique est uniforme.

b) En utilisant les résultats de la première question (cas c).

$$\vec{E}_1(N) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{r_1}\right)^3 \overrightarrow{O_1N} \text{ et } \vec{E}_2(N) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{4r_2}\right)^3 \overrightarrow{O_2N}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{E}(N) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{O_1N}}{r_1^3} - \frac{\overrightarrow{O_2N}}{64r_2^3} \right)}$$

## 6. Le dipôle électrique

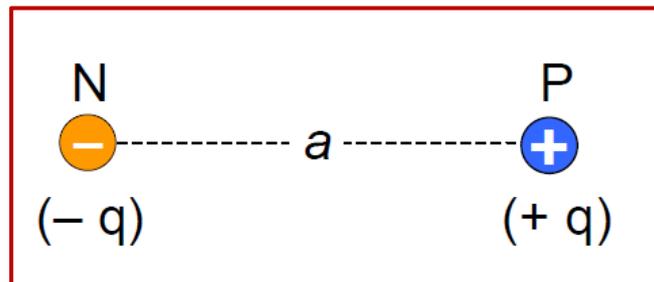
### 6.1 Définition

Un dipôle électrostatique est défini par ensemble de charges distinctes disposées de telle sorte que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.

Le dipôle le plus simple consiste en un couple de charges opposées P (+ q) et N (- q) distantes de  $a$ .

Le dipôle le plus simple consiste en un couple de charges opposées P (+ q) et N (- q) distantes de  $a$

:



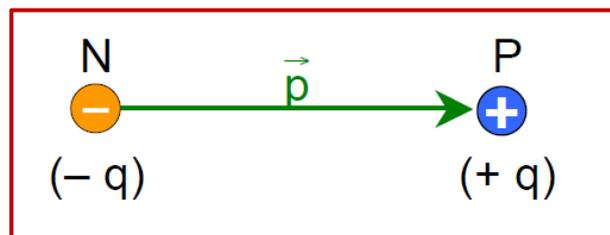
**Fig II.35:** Dipôle électrique

Le paramètre  $a$  est généralement très petit ( $10^{-10}$  m) devant les distances d'observation (1 m).

### 6.2. Moment dipolaire

Le moment dipolaire, noté  $\vec{p}$  est défini par :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$



**FigII.36:** Représentation du vecteur moment dipolaire.

Dans le cas d'un ensemble de  $N$  charges  $q_i$  repérées par leur position  $\vec{r}_i$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$$

**Unités :**

L'unité S.I. est le Coulomb-mètre.

Le debye (D) est parfois employé :

$$1 \text{ D} = 3.336 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

### 6.3. Potentiel créé par un dipôle

Le point M où l'on veut calculer le potentiel est repéré par ses coordonnées polaires :  $r = OM$ ,  $\theta = (\text{Ox}, OM)$ .

On suppose  $r \gg a = AB$ , O étant le milieu de AB.

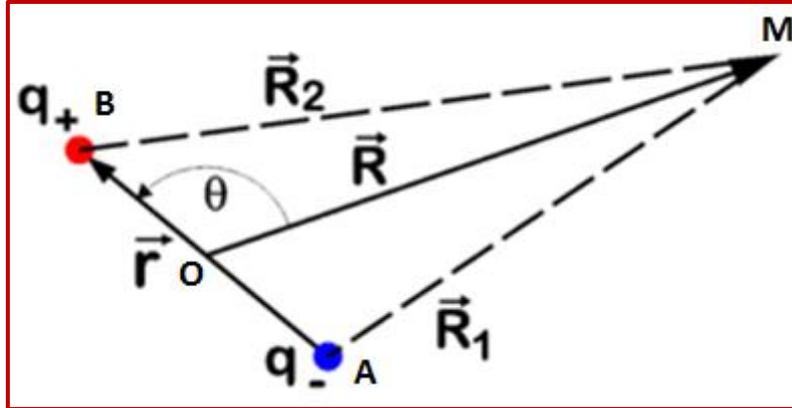


Fig II.37: Potentiel d'un dipôle crée en un point

Le potentiel V créé en M par le dipôle est:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{-q}{AM} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{+q}{BM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$$

Or:

$$BM^2 = (BO + OM)^2$$

$$BM^2 = (OM - OB)^2 = OM^2 + OB^2 - 2 OB \cdot OM \cos \theta$$

$$BM^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - 2 a \cdot r \cos \theta$$

Soit:

$$BM = r \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4 r^2}}$$

De même en changeant  $\theta$  en  $\pi - \theta$ , on obtient:

$$AM = r \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4 r^2}}$$

D'où:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( 1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4 r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4 r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$r \gg a$  d'où  $a/r \ll 1$ , on peut utiliser le développement limité au 1er ordre de la forme  $(1+x)^n$  ou  $(1-x)^n$  :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left(1 + \frac{a}{2r} \cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos\theta\right) \right]$$

Ou encore:

$$V = \frac{q a \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \quad \text{avec : } r = \overrightarrow{OM}$$

Pour  $\theta = \pi/2$ ,  $V=0$  pour tous les points du plan médiateur de AB. Ce plan est une surface équipotentielle

#### 6.4. Champ électrique créé par le dipôle

On déduit le champ électrique  $\vec{E}$  (M) créé au point M à partir de l'expression du potentiel.

On travaille en coordonnées sphériques.

Comme le problème a une symétrie axiale, les grandeurs physiques  $\vec{E}$  et V ne dépendent pas de  $\varphi$  mais seulement de r et  $\theta$ .

$$\vec{E}(M) = - \overrightarrow{grad}_M V = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin\theta} \times \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r - E_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

Le champ électrique n'a donc pas de composante selon  $\vec{e}_\varphi$

On a:

$$V(M) = \frac{P \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Donc:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\theta = \frac{-2 P \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_r = \frac{-P \sin\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Donc:

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r(r) = \frac{2 P \cos\theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta(\theta) = \frac{1}{r} \frac{P \sin\theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \\ E_\varphi(\varphi) = 0 \end{cases}$$

**Conclusion** : Le champ créé par un dipôle est proportionnel à  $1/r^3$  et le potentiel à  $1/r^2$ , alors que pour une charge ponctuelle,  $\vec{E}$  créé est proportionnel à  $1/r^2$  et  $V$  à  $1/r$ .

## 6.5. Les lignes de champ et équipotentiellles:

### 6.5.1. Les lignes de champ:

On cherche les lignes tangentes au champ électrostatique en tout point en utilisant la relation :

$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

Qu'on écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit:

$$r E_r d\theta = E_\theta dr$$

On obtient :

$$\frac{2 p \cos\theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} d\theta = \frac{p \sin\theta}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} dr$$

En séparant les variables, on en déduit :

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} = 2 \frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

Soit après intégration :

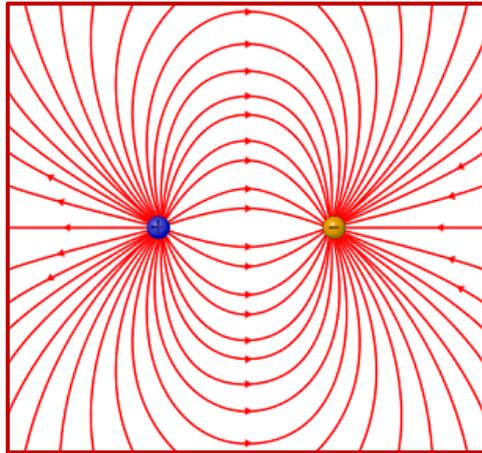
$$\ln r = 2 \ln |\sin\theta| + C$$

ou en prenant l'exponentielle :

$$r = \lambda \sin^2 \theta$$

Où  $\lambda$  est une constante.

D'où l'allure des lignes de champ :



**FigII.38:** Les lignes de champ d'un dipôle électrique..

**6.5.2. Les surfaces équipotentiellles:**

Elles sont définies par l'ensemble des points ayant le même potentiel soit

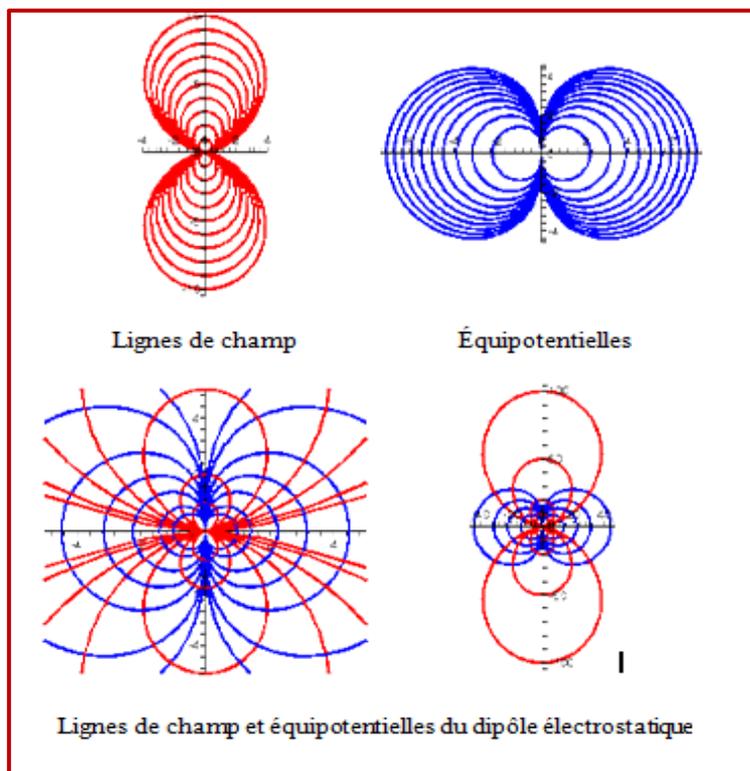
$$V = V_0 = \frac{P \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

Donc:

$$r = \mu \sqrt{|\cos \theta|}$$

Où  $\mu$  est une constante.

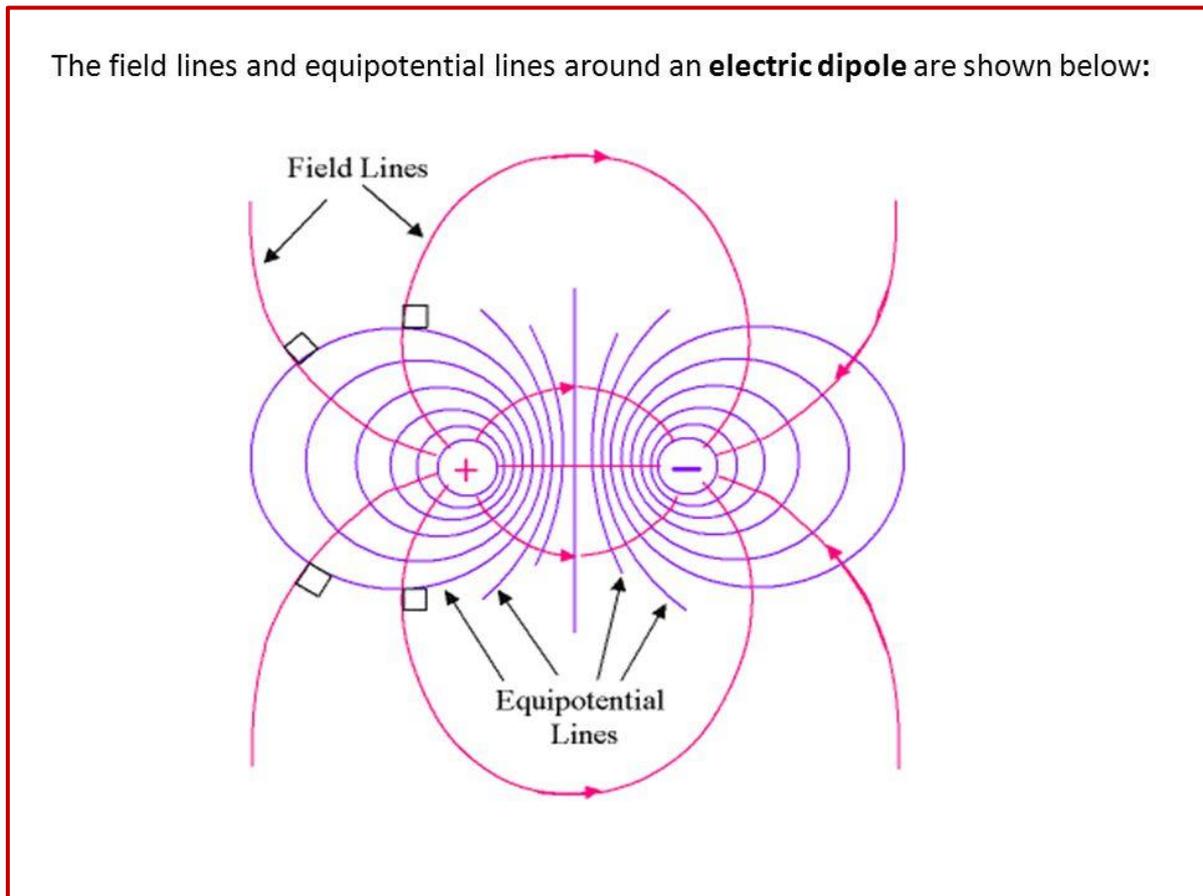
D'où l'allure des équipotentiellles :



**Fig II.39:** Allure (a) des équipotentiellles surfaces.

### 6.5.3. Tracé du diagramme électrique

On peut superposer les deux tracés précédents sur un même diagramme électrique



**Fig II.40:** Diagramme électrique

#### Remarque:

On peut formuler les remarques suivantes :

- Lignes de champ et équipotentielle sont en tout point de l'espace orthogonales.
- La zone où se trouve le dipôle est une zone où les calculs précédents ne sont pas valables, ils ne donnent pas l'allure des lignes de champ ou des équipotentielles : on n'est pas suffisamment « loin » de la distribution. Cette zone a été noircie sur la représentation.

### 6.6. L'énergie potentielle du dipôle

L'énergie potentielle d'un dipôle, placé dans un champ  $\vec{E}$ , est calculée en faisant la somme des énergies potentielles de chaque charge :

$$E_p = q(V_A - V_B)$$

Avec  $V_A - V_B = -\vec{E} \cdot \vec{a}$

L'expression devient:

$$E_p = -q\vec{E} \cdot \vec{a}$$

Sachant que :  $\vec{P} = q \vec{a}$

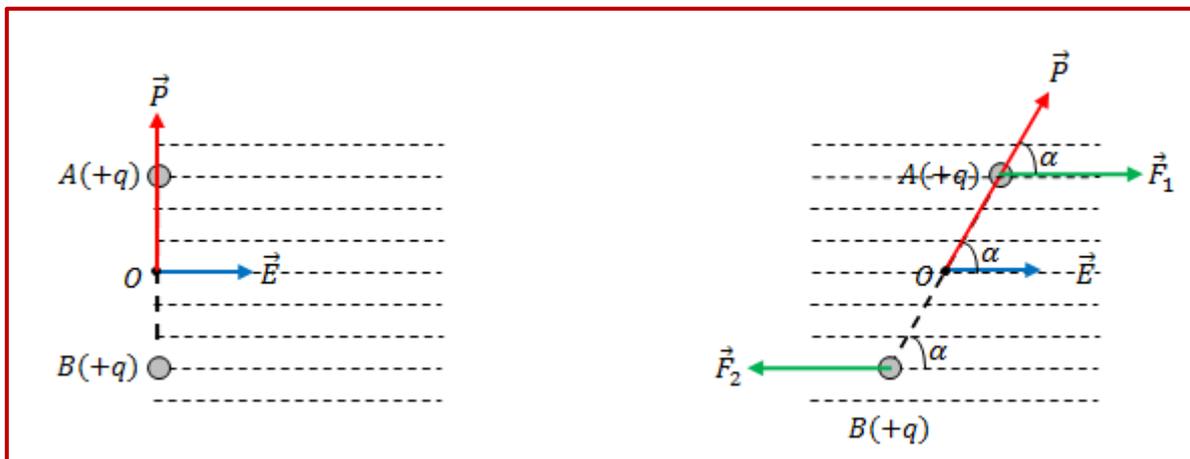
Alors l'énergie potentielle de ce dipôle, est donnée par :

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

### 6.7. Mouvement du dipôle dans un champ uniforme

Si on place un dipôle, de moment dipolaire  $\vec{P}$ , dans un champ extérieur  $\vec{E}$  uniforme, les charges qui le constituent sont soumises à des forces égales et opposées.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



**Fig.II.41:** Mouvement du dipôle dans un champ extérieur

Le moment du couple de force qui agit sur le dipôle s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}$$

Ce couple fait pivoter le dipôle pour l'aligner parallèlement au champ extérieur.

Dipôle en équilibre  $\Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow PE \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$

Si  $\alpha = 0$  : équilibre stable du dipôle

Si  $\alpha = \pi$  : équilibre instable du dipôle

**Exercices corrigés:****Exercice 1**

Un dipôle de moment dipolaire  $\vec{P}$  est maintenu fixe au point  $O$  (voir figure). on définit un point  $M$  repéré par son vecteur position  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$  et on suppose que  $r$  est très grand devant les dimensions du dipôle. Le potentiel créé par ce dipôle au point  $M$  est donné par l'expression suivante:

$$V(r, \theta) = \frac{Kp \cos \theta}{r^2}$$

1. Etablir l'expression des composantes radiale  $E_r$  et transversale  $E_\theta$  du champ électrique  $\vec{E}$  créé par le dipôle au point  $M$ .

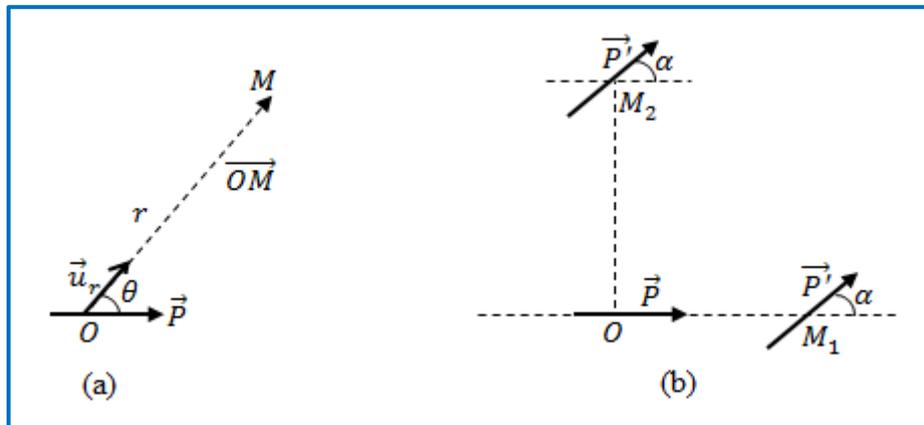
On place successivement aux points  $M_1$  et  $M_2$  un deuxième dipôle de moment dipolaire  $\vec{P}'$

Faisant un angle  $\alpha$  avec la direction du dipôle  $\vec{P}$  (voir figure -11-b).

2. Pour  $\alpha = 30^\circ$ , calculer l'énergie potentielle du dipôle  $\vec{P}'$  dans chacune des positions  $M_1$  et  $M_2$ .

3. Représenter le dipôle  $\vec{P}'$  dans sa position d'équilibre stable en  $M_1$ , puis en  $M_2$ . Justifier.

On donne :  $\|\vec{P}\| = 3,7 \cdot 10^{-31} \text{C.m}$ ,  $\|\vec{P}'\| = 5,3 \cdot 10^{-31} \text{C.m}$ ,  $\|\overrightarrow{OM_1}\| = \|\overrightarrow{OM_2}\| = 1 \text{Cm}$

**Solution:**

1) Expression des composantes  $E_r$  et  $E_\theta$  du champ électrique  $\vec{E}$  créé par le dipôle au point  $M$ .

$$E = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Kp \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp \sin \theta}{r^3}$$

2) En  $M_1$ :  $\theta_1 = 0 \text{ rad}$ ,

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} E_{r_1} = \frac{2Kp}{r^3} \\ E_{\theta_1} = 0 \end{cases}$$

$$E_{P_1} = -\vec{P}' \cdot \vec{E}_1 = -P' \cdot E_1 \cos \alpha = -\frac{Kpp'\sqrt{3}}{\|\vec{OM}_1\|^3}$$

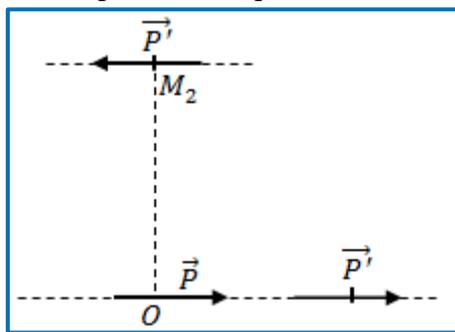
A.N:  $E_{P_1} = -3,05 \cdot 10^{-45} \text{ J}$

En  $M_2 : \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$   $\vec{E}_2 = \begin{cases} E_{r_2} = 0 \\ E_{\theta_2} = \frac{Kp}{r^3} \end{cases}$

$$E_{P_2} = -\vec{P}' \cdot \vec{E}_2 = -P' \cdot E_2 \cos(\pi - \alpha) = \frac{Kpp'\sqrt{3}}{2\|\vec{OM}_2\|^3}$$

A.N:  $E_{P_2} = -1,52 \cdot 10^{-45} \text{ J}$

3) Représentation du dipôle  $\vec{P}'$  dans sa position d'équilibre stable.



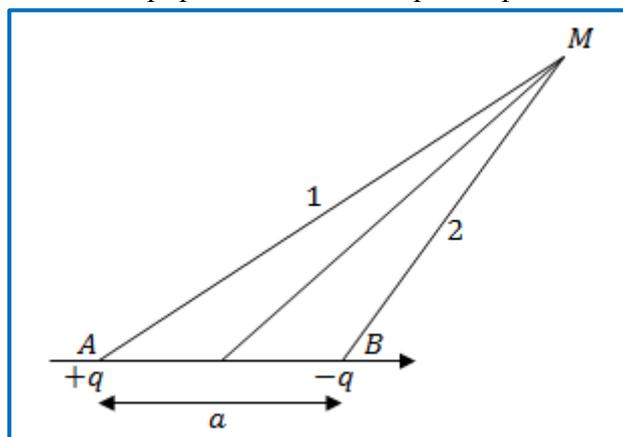
Justification : la position d'équilibre stable correspond à une énergie potentielle minimale.  
On trouve les valeurs  $\alpha_1 = 0 \text{ rad}$  et  $\alpha_2 = \pi \text{ rad}$ .

**Exercice 2**

Soit un dipôle  $D$ , son moment étant  $\vec{p}$  et  $a$  la distance entre ses deux charges  $-q$  et  $+q$  (figure ci-dessous).

1/ Calculer le champ et le potentiel électriques produits par le dipôle  $D$  au point  $M$  en fonction de  $p, \theta$  et  $r$ , sachant que  $a \ll r$ .

2/ Trouver l'équation des surfaces équipotentiels ainsi que l'équation des lignes de champ.



**Solution:**

1/ Le potentiel électrique produit au point  $M$  :

$$V_M = V_A + V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$\begin{cases} a \ll r \Rightarrow r_1 \approx r_2 \approx r \\ r_2 - r_1 = a \cos\theta \\ P = q.a \end{cases} \Rightarrow V_M = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

Dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , le champ possède deux composantes  $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$ . A partir de la formule  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ , on peut déterminer ces deux composantes polaires :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}$$

Donc le champ est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

2/ Equation des surfaces équipotentiellles :

a partir de l'équation du potentiel trouvée précédemment, on en déduit l'équation de ces surfaces :

$$V = C^{te} = V_0 \Rightarrow r^2 = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 V_0} \cos\theta$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 V_0} \cos\theta$$

A chaque valeur de  $V_0$  correspond une surface équipotentielle située à la distance de  $O$ .

Equation des lignes de champ :

La ligne du champ  $\vec{E}$  est définie comme étant colinéaire à  $\vec{dl}$ , donc  $\vec{E} = \lambda \vec{dl}$ , ( $\lambda = C^{te}$ ). On connaît les composantes de  $\vec{E}$  et les composantes de  $\vec{dl}$ . A partir de la relation entre les deux vecteurs on peut trouver l'équation des lignes de champ :

$$\vec{E} = \lambda \vec{dl}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix}, \vec{dl} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta$$

En intégrant cette l'équation, on obtient à une constante près, le résultat suivant :

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^3}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}} d\theta$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{2d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\int \frac{dr}{r} = 2 \int \frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} \Rightarrow \ln r = 2 \ln \theta + C$$

$$\ln r - 2 \ln(\sin^2\theta) = C \Rightarrow \ln \frac{r}{2\sin^2\theta} = C \Rightarrow \frac{r}{2\sin^2\theta} = e^C = K$$

De tout cela, on conclut que l'équation de la trajectoire est :  $r = 2K \sin^2\theta$

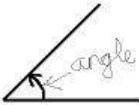
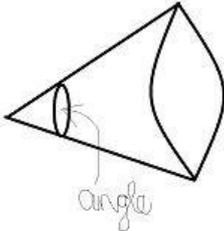
A chaque valeur de  $K$  correspond une ligne de champ située à la distance de  $O$  tel que:

$r = 2K \sin^2\theta$ . Les lignes de champs sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

## 7. Flux du champ électrique.

### 7.1. Notion d'angle solide

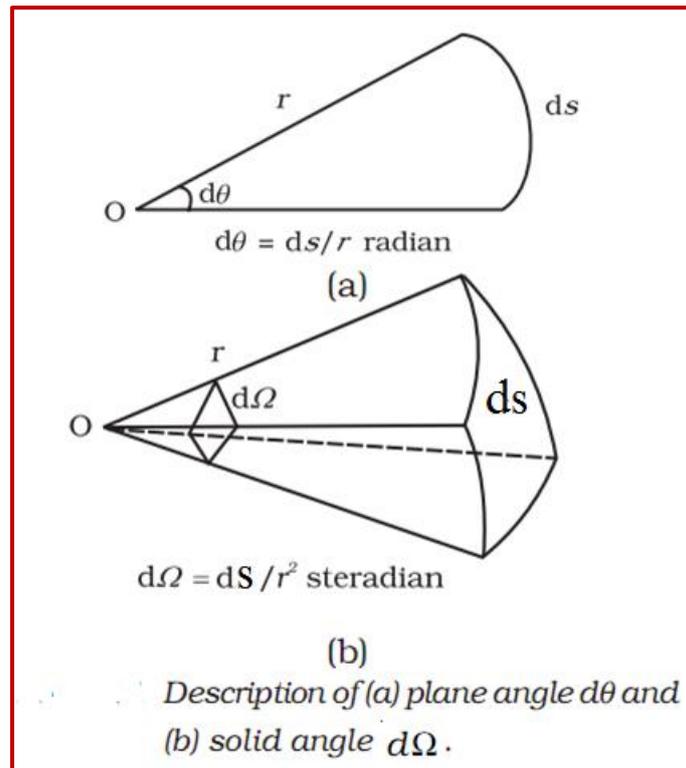
La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan. Par exemple, le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche est entièrement décrit par la donnée de deux grandeurs : la direction (une droite) et l'angle maximal d'ouverture des rayons autour de cette droite. On appelle cette droite la génératrice du cône et l'angle en question, l'angle au sommet.

<b>PLANE ANGLE</b>	<b>SOLID ANGLE</b>
<p><b>1. 2 dimensional</b></p> <p><b>2. analogical to a triangle, Square, circle</b></p>  <p>A diagram showing a plane angle formed by two rays meeting at a vertex. A small arc at the vertex is labeled 'angle'.</p>	<p><b>1. 3 dimensional</b></p> <p><b>2. analogical to a cone, cube, sphere</b></p>  <p>A diagram showing a solid angle represented by a cone. A small arc at the vertex is labeled 'angle'.</p>

**Fig II.42:** Analogie entre angle plan et angle solide

**Définition:** l'angle solide élémentaire  $d\Omega$ , délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire  $dS$  située à une distance  $r$  de son sommet  $O$  vaut

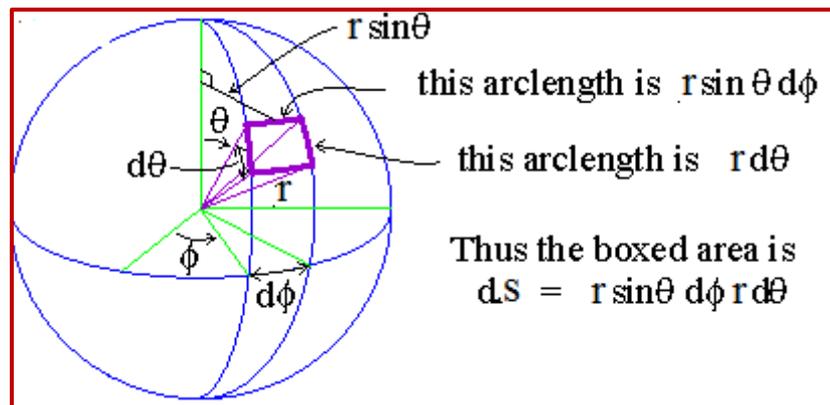
$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$



**Fig II.43:** Description d'un angle solide et un angle plan

Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance  $r$ . Son unité est le « stéradian » (symbole sr).

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à  $r$  constant vaut



**Fig II.44:** Element de surface en coordonnées sphériques.

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi .$$

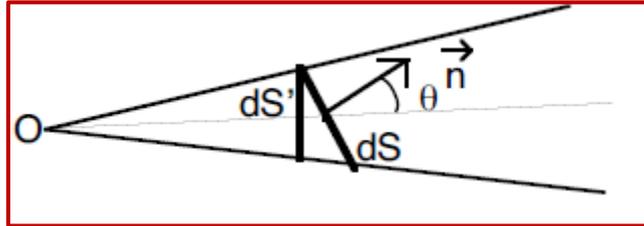
L'angle solide élémentaire s'écrit alors

$$\Omega = \sin \theta d\theta d\phi .$$

Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet  $\alpha$  vaut

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin\theta d\theta = 2\pi (1 - \cos\alpha)$$

Le demi-espace, engendré avec  $\alpha = \pi/2$  (radians), correspond donc à un angle solide de  $2\pi$  stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de  $4\pi$  ( $\alpha = \pi$ ).



**Fig II.45:** Angle solide élémentaire.

D'une façon générale, le cône (ou le faisceau lumineux de l'exemple ci-dessus) peut intercepter une surface quelconque, dont la normale  $n$  fait un angle  $\theta$  avec la génératrice de vecteur directeur  $u$ . L'angle solide élémentaire est alors défini par

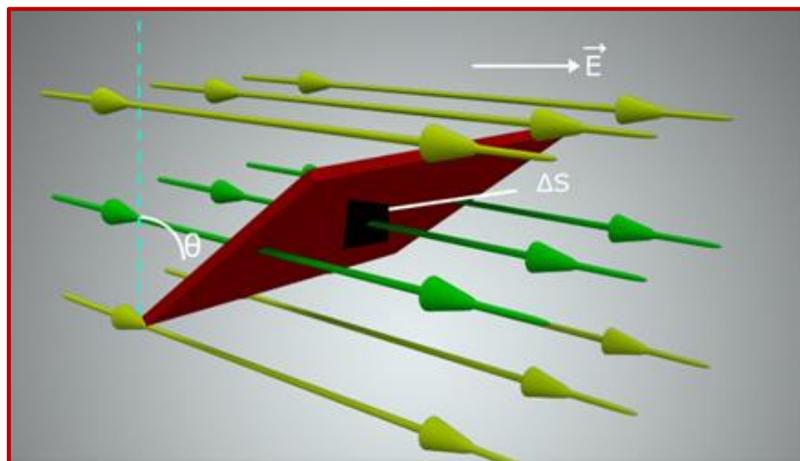
$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

où  $dS'$  est la surface effective (qui, par exemple, serait « vue » par un observateur situé en O).

## 7.2. Théorème de Gauss

On considère maintenant une charge ponctuelle  $q$  située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$ , créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$



**Fig II.46:** Flux du champ électrique.

Par convention, on oriente le vecteur unitaire  $\vec{n}$ , normal à la surface  $\vec{dS}$ , vers l'extérieur, c'est à dire dans la direction qui s'éloigne de la charge  $q$ . Ainsi, pour  $q > 0$ , le champ  $\vec{E}$  est dirigé dans le même sens que  $\vec{n}$  et l'on obtient un flux positif.

A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

c'est à dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance  $r$  (notez bien que  $d\Omega > 0$ ,  $q$  pouvant être positif ou négatif). Ce résultat est une simple conséquence de la décroissance du champ électrostatique en  $1/r^2$  : on aurait le même genre de résultat avec le champ gravitationnel.

En intégrant alors sur toutes les directions (c'est à dire sur les  $4\pi$  stéradians), on obtient un flux total:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

***Théorème de Gauss :*** le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à  $\frac{1}{\epsilon_0}$  fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface

**Remarque :**

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.
2. La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale, non démontrable (l'une des quatre équations de Maxwell).
3. Le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface  $S$  adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ».

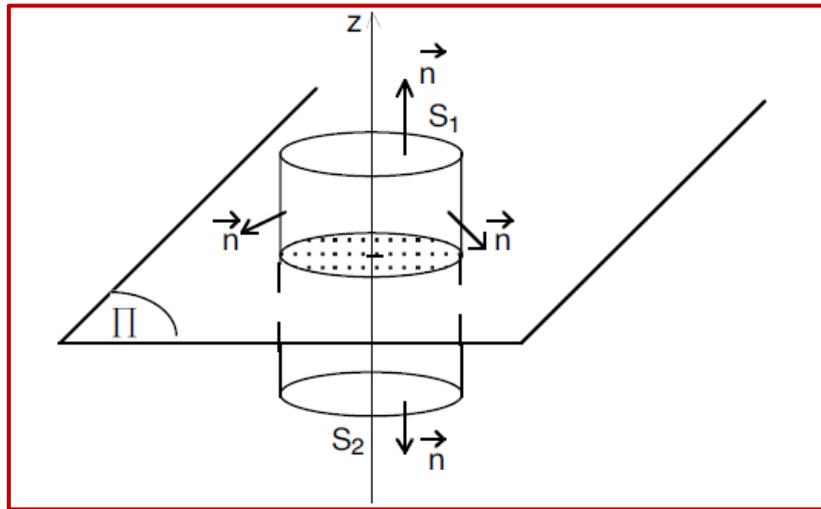
### 7.3. Applications

#### 7.3.1. Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

On considère un plan infini  $\Pi$  portant une charge électrique  $\sigma$  uniforme par unité de surface.

Pour utiliser Gauss, il nous faut d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ  $\vec{E}$ .

Tous les plans perpendiculaires au plan infini  $\Pi$  sont des plans de symétrie de celui-ci :  $\vec{E}$  appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à  $\Pi$ . Si ce plan est engendré par les vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j})$  alors  $\vec{E} = E_z(x, u, z)\vec{k}$ . Par ailleurs, l'invariance par translation selon  $x$  et  $y$  nous fournit  $\vec{E} = E_z(x, u, z)\vec{k}$ . Le plan  $\Pi$  est lui-même plan de symétrie, donc  $E(z)$  est impaire.



**Fig II.47:** Champ électrostatique créé par une unité de surface.

Etant donné ces propriétés de symétrie, la surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situées à des hauteurs symétriques.

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= E(z) S - E(-z) S + 0 = 2 E S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut:

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

#### Remarques :

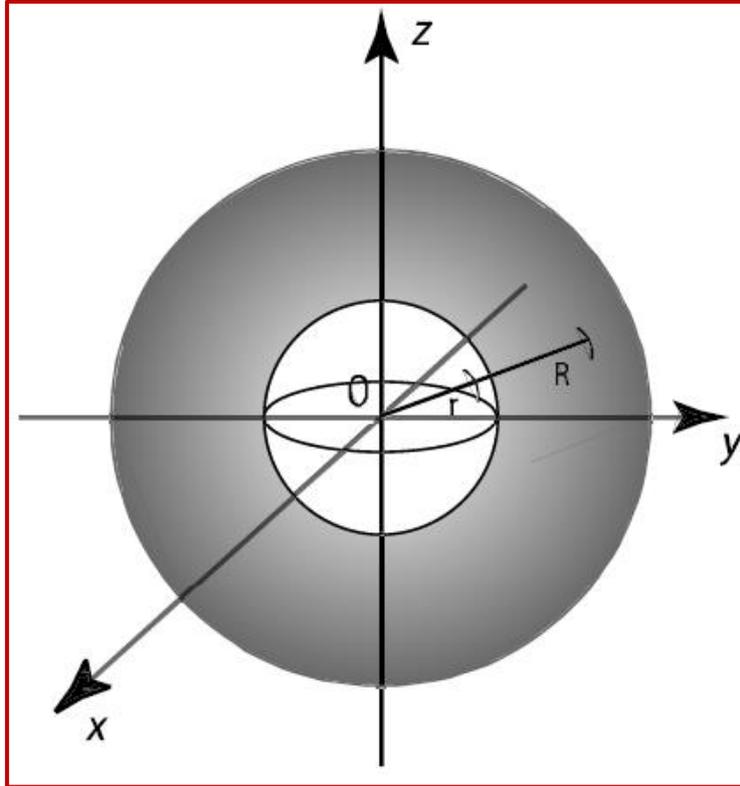
1. Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini.
2. On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément.

Il suffit alors d'interpréter  $E$  comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

### 7.3.2. Champ créé par une boule uniformément chargée

On considère une boule (sphère pleine) de centre O et rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges  $\rho$ . Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{u}(r)$$



**Fig II.48:** Champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée.

La surface de Gauss adaptée est simplement une sphère de rayon  $r$  et le théorème de Gauss nous fournit

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Lorsque  $r < R$ , on obtient un champ

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Lorsque  $r > R$ , la sphère de Gauss enferme un volume  $V$  supérieur à celui de la boule. Mais la distribution de charges n'est non nulle que jusqu'en  $r=R$ , ce qui fournit donc un champ

$$E = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{4 \pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \times \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}$$

où  $Q$  est la charge totale portée par la boule. On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle égale, située en  $O$ .

### Exercices corrigés:

#### **Exercice 1: Atome d'hydrogène.**

On considère une distribution de charge à symétrie sphérique de centre  $O$ . Le potentiel en un point  $M$  de l'espace est :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$$

1. Déterminer le champ électrostatique en ce point  $M$ .
2. Calculer le flux du champ à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Faire tendre successivement  $r$  vers 0, puis vers  $+\infty$ . Conclure.
3. Déterminer la densité volumique de charge  $\rho$ .
4. Étudier la fonction

$$z(r) = 4 \pi r^2 \rho(r)$$

Que représente cette fonction?

5. La distribution étudiée est en fait un atome d'hydrogène. Discuter

#### **Solution:**

1. Champ électrostatique.

Comme le vecteur champ électrostatique est l'opposé du gradient du potentiel  $V$  et qu'il ne dépend que  $r$  (la distribution étant à symétrie sphérique) on obtient :

$$E = E_r(r) \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}V} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

2. Flux du champ.

Le flux du champ électrostatique est défini par :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Comme la composante du champ est radiale et constante sur une sphère de rayon  $r$ :

$$\Phi = 4 \pi r^2 E_r = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

L'étude des limites donne :

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Pour  $r$  tendant vers 0

$\Phi = 0$  pour  $r$  tendant vers l'infini.

D'après le théorème de Gauss, la charge intérieure à une sphère de rayon  $r$  à pour expression:

$$Q(r) = \epsilon_0 \Phi$$

On peut donc conclure que la charge totale de la distribution est nulle et qu'au point  $O$  on a une charge ponctuelle positive  $q$ .

### 3. Densité volumique de charge.

La charge contenue entre les sphères de centre  $O$  et de rayon  $r$  et  $r + dr$  est:

$$dq = 4 \pi r^2 \rho(r) dr$$

On obtient alors :

$$\rho(r) = \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d\phi}{dr} = -\frac{q}{4\pi r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Cette densité de charges est négative et a une charge totale  $-q$ .

### 4. Fonction

La fonction étudiée est la densité radiale de charges et passe par un extremum en  $r = a$ .

### 5. Atome d'hydrogène.

La distance  $a$  est le rayon de Bohr qui est la distance au noyau pour laquelle la probabilité de présence de l'électron est maximale

## Exercice 2

On considère un cylindre de rayon  $R$  et de longueur infinie, uniformément chargé en volume avec une densité volumique  $\rho > 0$ .

1. Quelle est la direction du champ électrostatique en tout point  $M$  de l'espace ?
2. Montrer que la valeur du champ électrostatique ne dépend que de la distance  $r$  entre  $M$  et l'axe du cylindre.
3. En utilisant le théorème de Gauss et en précisant la surface utilisée, calculer le champ dans les deux cas :  $r > R$  et  $r < R$ .

On donnera  $E$  en fonction de  $r$

4. Calculer le potentiel électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre

On impose la condition  $V = 0$  pour  $r = 0$

5. La densité volumique de charge  $\rho$  du cylindre n'est plus uniforme mais à symétrie cylindrique ( $\rho$  est une fonction de  $r$ ).

On donne  $\rho = \rho_0 (r/R)$  pour  $r < R$  et avec  $\rho_0$  une constante.

Déterminer le champ électrostatique dans le cas où  $r < R$

### Solution:

#### 1. Direction du champ.

Les plans, contenant le point M, perpendiculaire et orthogonal à l'axe de la distribution de charges sont des plans de symétrie de cette distribution : le champ électrostatique doit donc avoir sa direction portée par l'intersection de ces deux plans.

Le champ est porté par le vecteur radial de la base cylindro-polaire.

#### 2- Invariance

La distribution est à symétrie cylindrique, il y a donc invariance par translation parallèlement à l'axe du cylindre et par rotation autour de cet axe.

#### 3. Vecteur champ électrostatique.

Les symétries et invariances permettent d'écrire le vecteur champ électrostatique sous la forme:

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r$$

On prend, dans les deux cas, pour surface de Gauss un cylindre fermé d'axe confondu avec celui de la distribution, de hauteur  $h$ , de rayon  $r$ .

Comme le vecteur champ et le vecteur  $d\vec{s}$  que la composante radiale du champ est constante sur la surface latérale du cylindre on peut écrire :

$$\Phi = \oiint_{\substack{\text{surface} \\ \text{cylindre}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\substack{\text{surface} \\ \text{cylindre}}} E_r dS = \iint_{\substack{\text{surface} \\ \text{latérale} \\ \text{cylindre}}} E_r dS = E_r \iint_{\substack{\text{surface} \\ \text{latérale} \\ \text{cylindre}}} dS = E_r 2 \pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

A l'extérieur de la distribution :

$$Q_{int} = \pi R^2 h \rho$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \frac{R^2}{r} \vec{u}_r$$

A l'intérieur de la distribution:

$$Q_{int} = \pi R^2 h r$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} r \vec{u}_r$$

## 4. Potentiel.

Comme le vecteur champ électrostatique est l'opposé du gradient du potentiel  $V$  et qu'il ne dépend que  $r$  (la distribution étant à symétrie cylindrique) on obtient :

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

On obtient par intégration le potentiel  $V$ . Les constantes d'intégration sont obtenues par la condition de potentiel nul en  $r = 0$  et par la continuité du potentiel en  $r = R$ .

A l'intérieur de la distribution:

$$V = -\frac{\rho r^2}{4 \varepsilon_0}$$

A l'extérieur de la distribution:

$$V = -\frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0} \text{Ln} \frac{R}{r} - \frac{\rho R^2}{4 \varepsilon_0}$$

## 5. Champ à l'intérieur.

Les propriétés de symétrie et d'invariance ne sont pas modifiées. En considérant une surface de Gauss identique à celle décrite en 3 et en prenant en compte la dépendance radiale de la distribution dans le calcul de la charge intérieure à cette surface de Gauss, on trouve:

$$\begin{aligned} \iiint \rho d\tau &= \iiint \rho_0 \frac{r}{R} r d\theta dr dz \\ Q_{int} &= \rho_0 \frac{h}{R} 2\pi \frac{r^3}{3} \end{aligned}$$

D'où:

$$E_r = \frac{\rho_0}{3 \varepsilon_0} \frac{r^2}{R}$$

## 8. Conducteur en équilibre

### 8.1. Définition:

Les corps électriquement neutres contiennent en grand nombre des charges électriques positives et négatives en quantité égale.

Dans un isolant, ces charges ne peuvent pas se déplacer : ni celles qui y sont au départ, ni celles que l'on y apporte.

Dans un conducteur, elles peuvent se déplacer. Elles le feront si elles sont soumises à des forces, en particulier sous l'effet d'un champ électrique.

### 8.2. Intérieur d'un conducteur en équilibre

Nous venons de voir qu'un conducteur contient des charges susceptibles de se déplacer. Il est dit en équilibre si ces charges restent immobiles.

L'état électrique est invariable. Cela prouve qu'elles ne subissent pas de forces, donc qu'il n'y a pas de champ électrique à l'intérieur du conducteur.

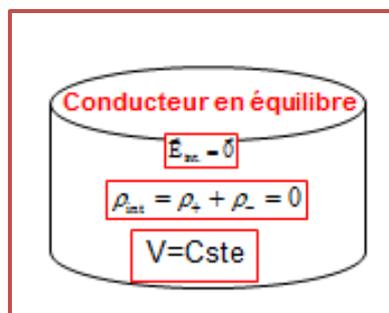
$$\vec{E}_{int} = \vec{0}$$

Dans ces conditions, si nous appliquons le théorème de Gauss à toute surface fermée contenue au sein du conducteur, le flux de  $\vec{E}$  est nul. Nous en déduisons que cette surface ne contient pas de charges ou, pour être plus précis, que la somme des charges qu'elle contient est nulle : sa densité volumique de charges  $\rho$  est nulle.

Dans tout élément de volume, il y a autant de charges positives que de charges négatives.

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$$

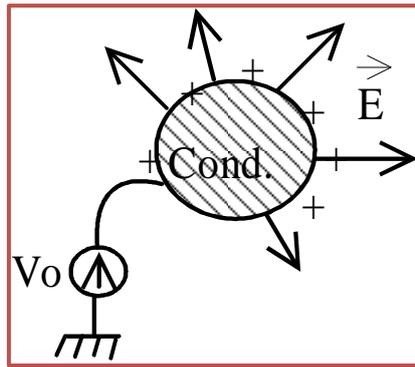
Comme,  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = 0$  cela prouve que  $V$  est constant dans tout le conducteur.



**Fig II.49:** conducteur en équilibre électrostatique

### Remarque:

Le conducteur en équilibre électrostatique peut être chargé (relié à une source T.H.T)



**FigII.50:** Charges surfaciques d'un conducteur en équilibre

**MAIS** Les charges portées par le conducteur en équilibre électrostatique sont **SURFACIQUES**

### 8.3. Surface d'un conducteur en équilibre

Puisque tout le conducteur est à un même potentiel, sa surface est une surface équipotentielle. Donc, le champ électrique à la surface est perpendiculaire à cette surface.

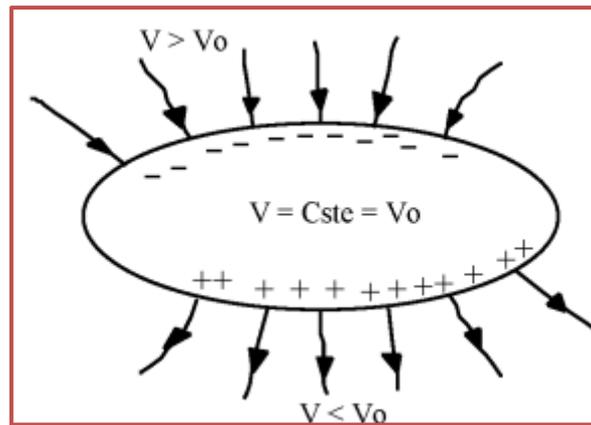
Nous avons dit précédemment que les charges sont immobiles parce qu'elles ne subissent pas de forces. Cela est vrai au milieu du conducteur. Il existe un endroit où les charges peuvent subir des forces sans pour autant se déplacer, c'est lorsque ces forces sont perpendiculaires à la surface et dirigées vers l'extérieur. Cela est donc conforme à l'existence d'un champ électrique à la surface du conducteur, orthogonal à la surface. Cela prouve également qu'à la surface du conducteur, il peut exister une densité de charges non nulle.

Les charges d'un conducteur en équilibre ne peuvent exister qu'à sa surface. On peut définir la densité surfacique de charges :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Puisque la seule force pouvant exister doit plaquer les charges sur la surface, il faut que le champ à la surface  $\vec{E}$  soit dirigé vers l'extérieur si les charges surfaciques sont positives, et vers l'intérieur si elles sont négatives.

Les lignes de champ sont donc perpendiculaires à la surface du conducteur.



**Fig II.51:** Surface d'un conducteur en équilibre

Là où les charges surfaciques sont positives, ces lignes de champ sortent. Dans le cas contraire, elles entrent.

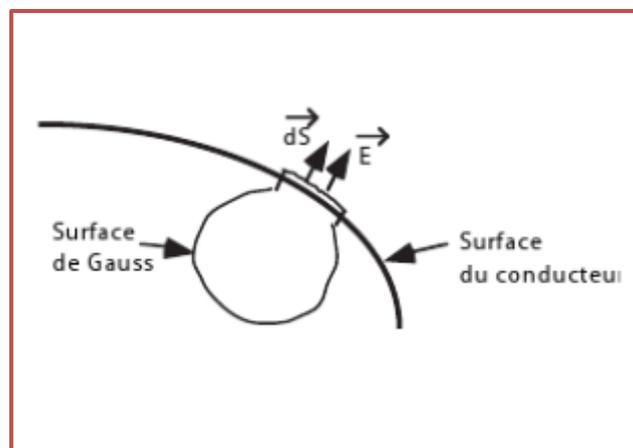
Une ligne de champ qui sort d'un conducteur en équilibre ne peut pas y revenir en un autre point, même si, en cet autre point, les charges surfaciques sont négatives. En effet, on sait que les lignes de champ se dirigent dans le sens des potentiels décroissants. Or tout le conducteur est équipotentiel.

## 8.4 Calcul du champ électrique à proximité immédiate d'un conducteur en équilibre

### 8.4.1. Théorème de Coulomb

Si le conducteur est chargé on a également  $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ , et la charge ne peut se répartir que sur la surface ( $\sigma \neq 0$ ). Les charges surfaciques sont à l'équilibre si la surface est une surface équipotentielle.

Pour cela, nous appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée  $S_G$  dont un côté serait un élément infiniment petit  $dS$  parallèle à la surface  $S_C$  du conducteur, le reste de  $S_G$  étant soit perpendiculaire à  $S_C$  soit à l'intérieur du conducteur.



**Fig II.52:** Calcul du champ électrique près de la surface d'un conducteur

Le flux de  $\vec{E}$  à travers  $S_C$  est donc égal à  $E \cdot dS$  puisqu'il n'y a que sur  $dS$  que  $\vec{E}$  est non nul et perpendiculaire à  $S_G$

D'après le théorème de Gauss, ce flux est égal à la somme des charges contenues par  $S_G$  divisée par  $\epsilon_0$ . Or les charges internes à  $S_G$  sont celles qui sont à la surface de  $C$ , soit  $\sigma dS$ .

Donc,

$$E \cdot dS = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon_0}$$

Soit

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ou plutôt

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$$

en désignant par  $\vec{u}$  le vecteur unitaire sortant perpendiculairement à la surface de  $C$

La relation

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$$

porte le nom de théorème de Coulomb.

On voit donc que ce sont les charges surfaciques qui créent le champ à proximité du conducteur.

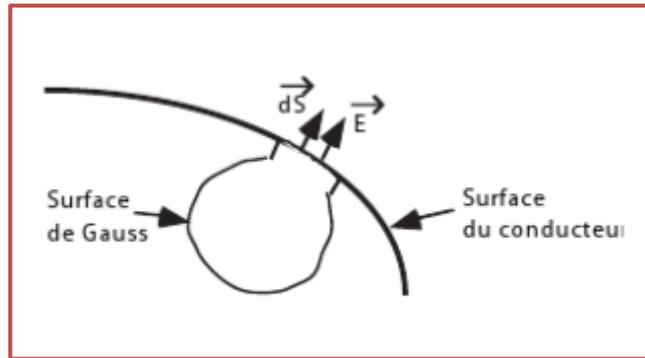
### En résumé:

La surface d'un conducteur à l'équilibre étant une surface équipotentielle, au voisinage de la surface le champ est normal à la surface même et vaut

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma \vec{u}}{\epsilon_0}$$

## 8.5. Calcul du champ électrique sur la surface même d'un conducteur en équilibre

Si nous modifions légèrement la surface de Gauss précédente en posant l'élément  $dS$  sur la surface de  $C$ , le flux de  $\vec{E}$  à travers  $S_C$  est toujours égal à  $E \cdot dS$ .



**Fig II.53:** Calcul du champ électrique sur la surface d'un conducteur

Mais, cette fois, les charges surfaciques de C sont aussi à la surface de  $S_G$ .

D'après le théorème de Gauss, le flux de  $\vec{E}$  est égal à la somme des charges surfaciques de  $S_G$  divisée par  $2 \epsilon_0$ .

Donc,

$$E \cdot dS = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}$$

**En résumé,**

- à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique  $\vec{E}$  est nul.

$$\vec{E}_{int} = \vec{0},$$

- sur la surface même règne un champ.

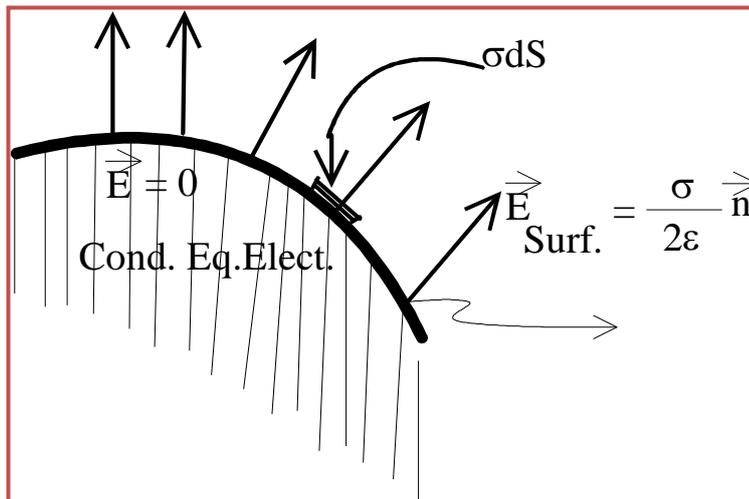
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$$

- à proximité immédiate du conducteur

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}$$

Le champ  $\vec{E}$  subit donc une discontinuité à la traversée de la surface. Ce n'est bien sûr pas le cas du potentiel, car pour que le potentiel soit discontinu, il faudrait que  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$  soit infini.

### 8.6. Pression électrostatique:



**FigII.54:** Pression électrostatique d'un conducteur en équilibre

L'ensemble des forces subies par les charges  $dq$  d'un élément de surface  $dS$  vaut:

$$\vec{F} = d \cdot \vec{E} = \sigma \cdot dS \cdot \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u} = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} \cdot dS \vec{u}$$

On peut donc calculer la pression

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

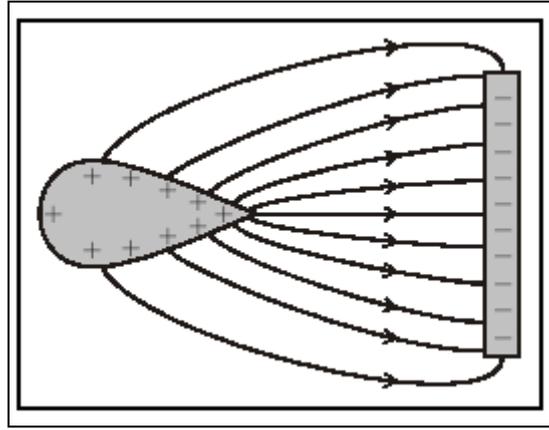
Un conducteur en équilibre subit donc une pression de dilatation

$$P = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

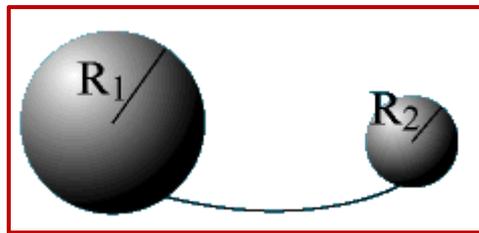
en tout point de sa surface.

### 8.7 Propriétés des pointes

Si un conducteur est chargé et que sa surface n'est pas uniforme la distribution de charge est plus dense là où le rayon de courbure est plus faible.



FigII.55: Effet de pointe

**Justification qualitative**

FigII.56: Densité superficielle à la surface de deux sphères

Considérons un conducteur sphérique de rayon  $R_1$  chargé d'une charge  $Q$ . Ce conducteur se trouve donc au potentiel

$$V_1 = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R_1}$$

On relie ce conducteur à un second conducteur sphérique de rayon  $R_2 < R_1$  initialement neutre par un fil conducteur supposé très long (influence négligeable).

Les deux sphères se trouvent alors au même potentiel puisqu'elles forment un conducteur d'un seul tenant. La charge  $Q$  se répartit en  $Q_1$  et  $Q_2$  de façon à ce que :

$$V = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

Soit  $\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$

Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les densités superficielles de charge sur les sphères:

$$Q_1 = 4 \pi R_1^2 \sigma_1 \text{ et } Q_2 = 4 \pi R_2^2 \sigma_2$$

Soit:  $\frac{4 \pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = \frac{4 \pi R_2^2 \sigma_2}{R_2}$

$$\sigma_2 = \frac{R_1}{R_2} \sigma_1$$

Et puisque  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (théorème de Coulomb)

$$E_2 = \frac{R_1}{R_2} E_1$$

Puisque  $\frac{R_1}{R_2} > 1$  le champ au voisinage du second conducteur est plus intense que le champ au voisinage du premier conducteur. C'est ce qu'on appelle le pouvoir des pointes : le champ est plus important dans les régions du conducteur de plus forte courbure.

### 8.8. - Phénomènes d'influence entre conducteurs

Soit deux conducteurs (A) et (B) dont au moins un chargé (B). La distribution de charge sur (A) devient inhomogène à cause du champ produit par la charge sur le conducteur (B).

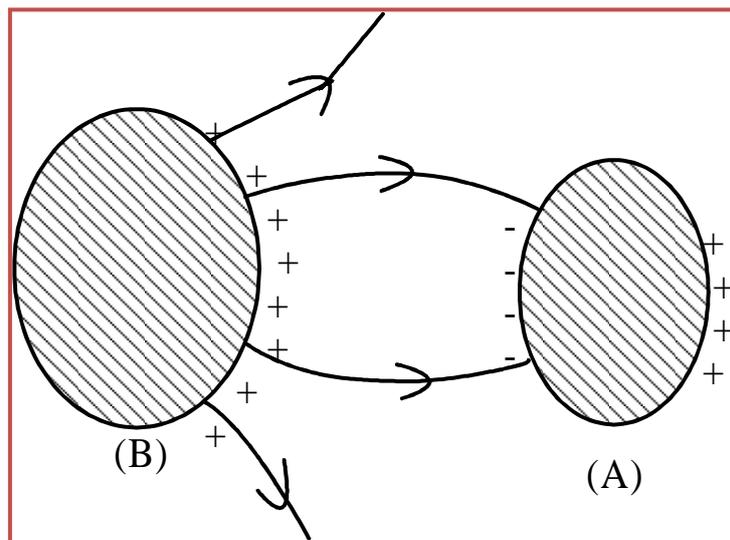
#### 8.8.1. Influence partielle

Conducteur (A) initialement neutre et isolé électriquement

$$Q_A = 0, \vec{E} = \vec{0}; \quad V_A = 0$$

Conducteur (B) chargé et en équilibre électrostatique

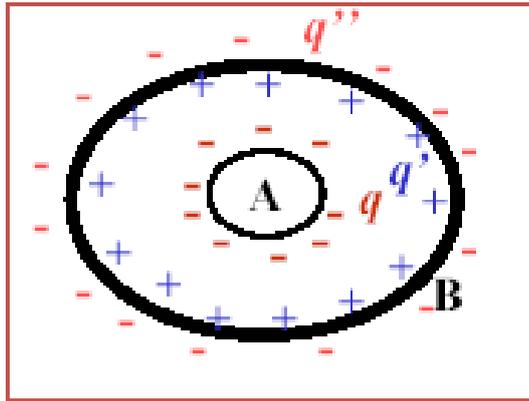
$$Q_B \neq 0, \vec{E}_{int} = \vec{0}, \quad V_B = V_0$$



**FigII.57:** Influence électrique partielle de (A) par (B)

- Des lignes de champ issu de (B) aboutissent en (A)
- A l'équilibre de (A), le champ intérieur est nul  $\Rightarrow$  Nouvelle répartition de charges sur (A).
- La neutralité électrique de (A) demeure (car absence de contact).

## 8.8.2. Influence totale



FigII.58: Influence électrique totale de (A) par (B)

\* Si un conducteur creux est porté à un potentiel positif par rapport au sol, il n'y aurait pas de charges à l'intérieur de la cavité.

\* Les charges se répartissent uniquement sur la surface extérieure du conducteur.

$$Q_B^{ext} = -Q_B^{int} = Q_A$$

## 8.9. Capacité d'un conducteur seul

Un conducteur isolé dans l'espace portant une charge  $Q$  se trouve à un potentiel absolu  $V$ .

D'après le théorème de superposition des états d'équilibre, si la charge est multipliée par une constante  $k$ , le potentiel sera multiplié par la même constante  $k$ .

Donc  $Q$  et  $V$  sont proportionnels.

Par définition, le coefficient de proportionnalité  $\frac{Q}{V}$  est appelé la capacité du conducteur, noté  $C$  et exprimé en Farad.

$$Q = C.V$$

**Exemple:**

Calculons la capacité d'une sphère. Nous avons déjà vu que par application du théorème de Gauss, on calculait aisément le champ électrique en tout point. En particulier, nous avons trouvé à l'extérieur un champ  $\vec{E}$  radial et de module

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

A la surface  $x = R$ , ce qui donne le potentiel du conducteur :

$$V(x) = \int_x^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_x^{\infty} E \cdot dr = \int_x^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{r} \right]_x^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{x}$$

A la surface  $x = R$ , ce qui donne le potentiel du conducteur :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

Donc,

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Ordre de grandeur : Capacité de la terre ! Son rayon vaut 6400 Km .

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot 6,4 \cdot 10^6 = \frac{6,4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} = 710 \mu F$$

### 8.10. Énergie potentielle d'un conducteur chargé

L'énergie potentielle du conducteur isolé portant une charge  $Q$  est simplement l'énergie d'interaction de la distribution de charge qu'il porte en surface. Il s'agit donc de

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_s \sigma \cdot V dS \quad (47)$$

Puisque le conducteur est équipotentiel, cette énergie se calcule facilement :

$$E_p = \frac{1}{2} V \iint_s \sigma dS = \frac{1}{2} QV \quad (48)$$

On peut exprimer cette grandeur en fonction de la capacité de manière à ne faire intervenir que la charge, ou le potentiel:

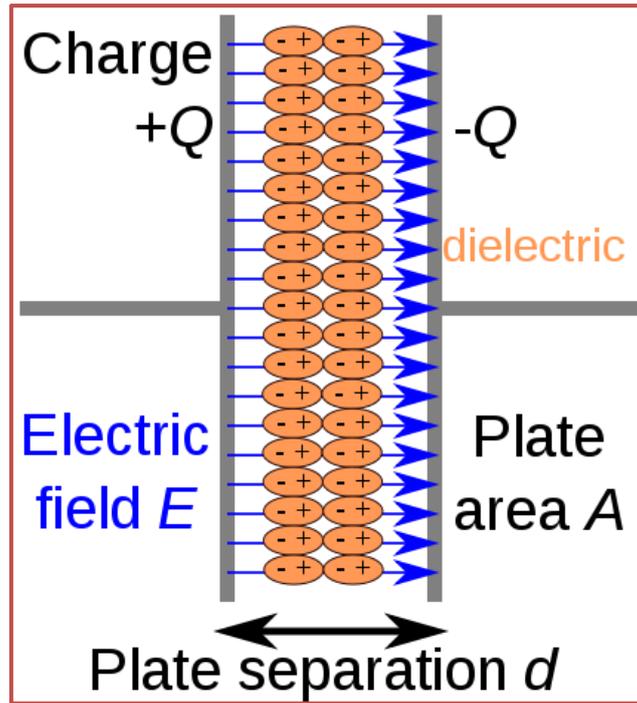
$$E_p = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (49)$$

## 8.11. Condensateurs:

### 8.11.1. Introduction:

Le condensateur est un composant en électronique qui a la particularité de pouvoir stocker de l'énergie lorsqu'il est soumis à une tension. Ce composant est primordial dans le domaine de l'électricité, il est presque aussi fréquent que la résistance.

Le condensateur se charge d'une quantité d'électricité ( $Q$ ) lorsqu'il est soumis à une tension. Cette charge  $Q$  dépend de la tension et de la durée auquel il a été soumis à cette tension. L'énergie emmagasinée sera restituée lors de la décharge du condensateur.

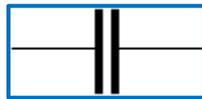


FigII.59: Un condensateur plan

Ce composant est un dipôle (consistué de 2 pôles) composé de 2 armatures conductrices séparées par un isolant dit "diélectrique". Il existe plusieurs sortes de condensateurs qui diffèrent selon la nature des plaques conductrices et de l'isolant (air, céramique, mica ...).

### 8.11.2. Schéma électrique

Sur un schéma électrique, le symbole du condensateur est reconnaissable par 2 traits parallèles qui représentent les 2 armatures conductrices:



FigII.60: Symbole électrique d'un condensateur

### 8.11.3. Capacité d'un condensateur

La charge d'un conducteur unique est proportionnelle au potentiel  $V$ . Le coefficient de proportionnalité entre la charge et le potentiel est la capacité :

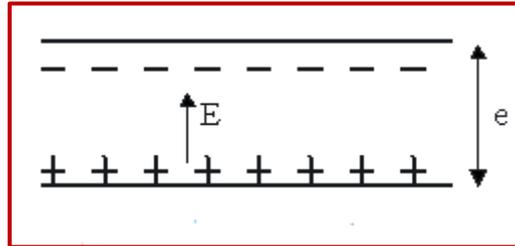
$$C = \frac{q}{V}$$

La capacité se mesure en *farad* (F) :

$$\text{Farad} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Joule}}$$

**a. Capacité d'un condensateur plan:**

Considérons deux portions de plans parallèles distants de  $e$  et de surface  $S$ , en regard l'une de l'autre. Ce système constitue un condensateur plan.



**Fig II.61:** Condensateur plan

Si nous négligeons les effets de bord, nous pouvons supposer que la charge  $Q$  est uniformément répartie sur chaque armature avec la densité superficielle

$$\sigma = \frac{Q}{S}.$$

Le champ électrostatique est alors uniforme entre les armatures et donné par le théorème de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{n}$$

La relation locale  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ , nous permet d'écrire  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dl$

La circulation du champ électrostatique est :  $V_1 - V_2 = \frac{Q e}{\epsilon_0 S}$

D'où l'expression de la capacité :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Dans la pratique, on interpose souvent un diélectrique entre les armatures; dans le cas fréquent d'un diélectrique linéaire homogène et isotrope, la capacité  $C$  du condensateur est :

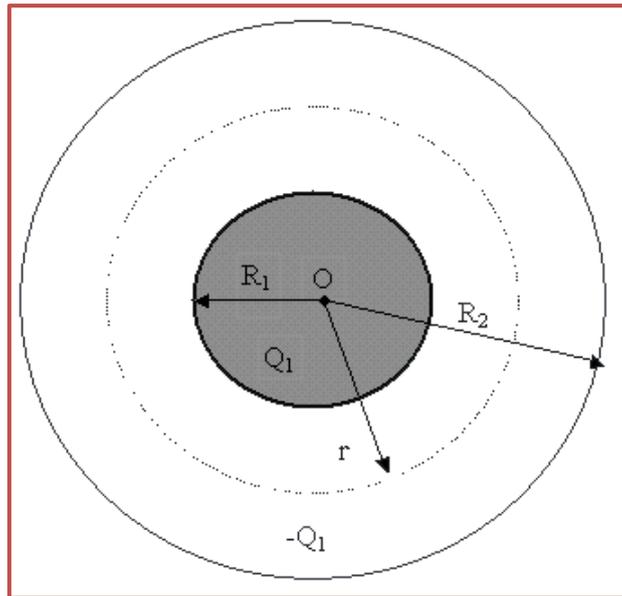
$$C = \frac{\epsilon S}{e} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{e}$$

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ : permittivité absolue du diélectrique, avec:

$\epsilon_r$ : permittivité relative du diélectrique et  $\epsilon_0$ : permittivité du vide.

**b. Capacité d'un condensateur sphérique:**

On considère un condensateur formé par deux sphères concentriques minces de rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_1 < R_2$ . Soit  $Q_1$  la charge de l'armature interne. L'expression du champ électrostatique qui est radial à une distance  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) du centre est déterminée à partir du théorème de Gauss.



**FigII.62:** Condensateur sphérique

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0}$$

Ce qui donne:

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Calculons  $(V_1 - V_2)$  en faisant circuler  $\vec{E}$  le long d'un rayon, d'une armature à

$$V_1 - V_2 = - \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Soit:  $Q_1 = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2)$

L'autre:  $(V_1 - V_2) > 0$

D'où l'expression de la capacité :

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

**Remarque :**

Si  $R_2 = R_1 + e$  ( $e \ll R_1 R_2$ )

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 (R_1 + e)}{e}$$

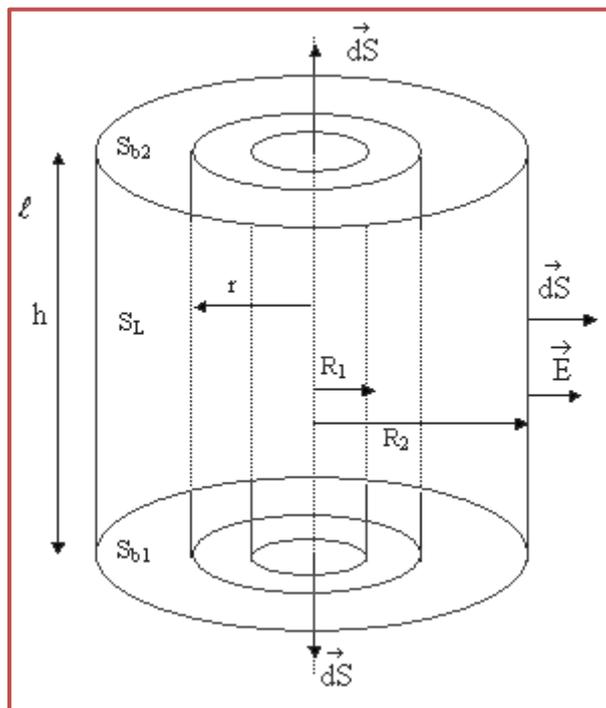
Avec  $e R_1 \cong 0$  et  $4 \pi R_1^2 = S$

On obtient:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

### c. Capacité d'un condensateur cylindrique:

On considère deux cylindres « infinis » coaxiaux, de rayon  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_1 < R_2$ , on veut calculer la capacité d'une tranche de longueur  $h$  de ce système; on désigne par  $Q_1$  la charge portée par l'armature interne sur la longueur  $h$ . Le calcul de  $\vec{E}$  (qui est radial) à une distance  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) de l'axe, se fait par application immédiate du théorème de Gauss à un cylindre de rayon  $r$  fermé à ses deux extrémités. ( $\Sigma = S_L + S_{b1} + S_{b2}$ )



**FigII.63:** Condensateur cylindrique

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_{b1}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{b2}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

On a:

$$\iint_{S_{b1}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{b2}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \text{ car } \vec{E} \perp \vec{dS}$$

$$\vec{E} \parallel \vec{dS}$$

Donc

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E S_L = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{avec } S_L = 2 \pi r h$$

Ce qui donne

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{2 \pi \epsilon_0 r h} \vec{u}_r$$

La relation:  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$  permet de déterminer  $(V_1 - V_2)$  avec  $(V_1 - V_2) > 0$ .

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2 \pi \epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2 \pi \epsilon_0 h} \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = 2 \pi \epsilon_0 h \frac{1}{\text{Log} \frac{R_2}{R_1}}$$

Remarque Si:  $R_2 = R_1 + e$

$$C = 2 \pi \epsilon_0 h \frac{1}{\text{Log} \frac{R_1 + e}{R_1}} = 2 \pi \epsilon_0 h \frac{1}{\text{Log} 1 + \frac{e}{R_1}} =$$

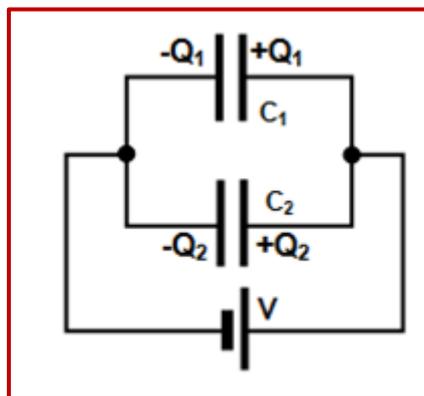
Comme:  $\frac{e}{R_1} \cong 0$  et  $\text{Log} \left( 1 + \frac{e}{R_1} \right) \cong \frac{e}{R_1}$

L'expression de C devient :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

## 8.12. Associations de condensateurs

**Rappel:** Condensateurs en série et en parallèle



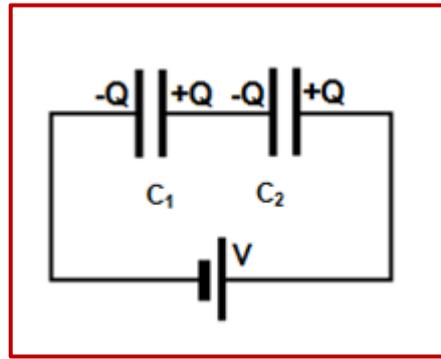
**Fig II.64:** Deux condensateurs connectés en parallèle

La capacité équivalente  $C_{eq}$  De la paire de condensateurs est simplement le rapport  $Q/V$  ;  
où  $Q = Q_1 + Q_2$  Est la charge totale mémorisée. Il s'ensuit que:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} =$$

Donnant

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$



**Fig II.65:** Deux condensateurs connectés en série

La capacité équivalente de la paire de condensateurs est à nouveau

$$C_{eq} = \frac{Q}{V}$$

Ainsi,

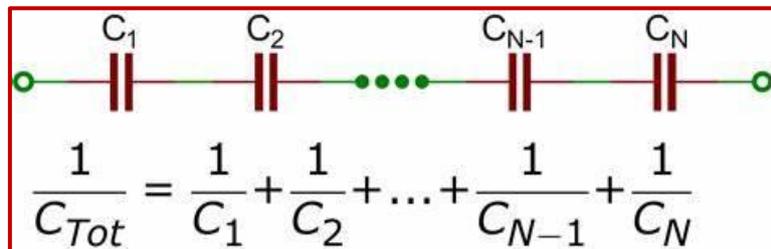
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{V_1 + V_2}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q}$$

Donnant

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

**En général:**

Condensateurs en série :  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N$



**Fig II.66:** Groupement de condensateur en série.

Condensateurs en parallèle :  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$

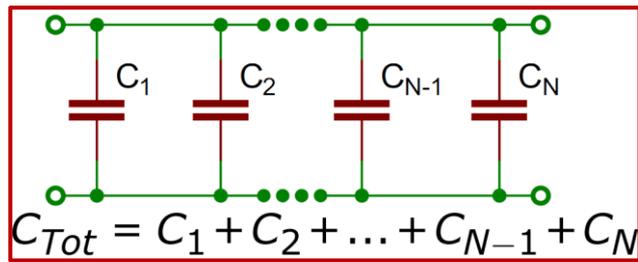


Fig II.67 : Groupement de condensateur en parallèle.

### 8.13. Energie électrique emmagasinée par un condensateur

Un condensateur chargé à emmagasiné de l'énergie électrique. Cette énergie exprimée en fonction de la tension appliquée aux bornes du condensateur et de sa capacité. Elle vaut:

$$W = \frac{1}{2}CU^2$$

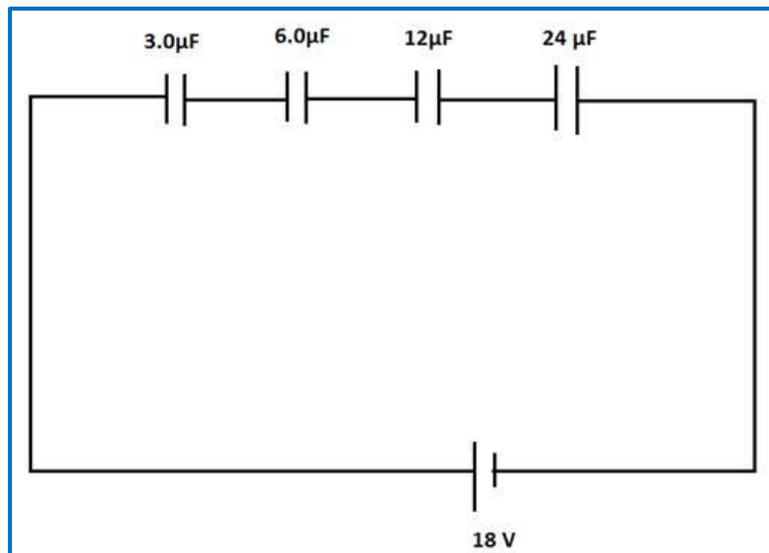
De même :

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2}QV \\ W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \end{cases}$$

### Exercices corrigés

#### Exercice 1:

Quatre condensateurs sont connectés en série avec une batterie, comme dans la figure ci-dessous:



- 1) Calculer la capacité du condensateur équivalent.
- 2) Calculer la charge sur le condensateur de  $12\mu\text{F}$ .
- 3) Trouver la chute de tension à travers le condensateur de  $12\mu\text{F}$ .

**Solution:**

1) Calculer la capacité du condensateur équivalent.

Appliquer l'équation de la capacité équivalente de la combinaison en série:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{3.0 \mu F} + \frac{1}{6.0 \mu F} + \frac{1}{12 \mu F} + \frac{1}{24 \mu F}$$

$$C_{eq} = 1.6 \mu F$$

2) Calculer la charge sur le condensateur de  $12 \mu F$ .

La charge désirée est égale à la charge du condensateur équivalent:

$$Q = C_{eq} \Delta V = (1.6 \times 10^{-6} F) (18 V) = 29 \mu C$$

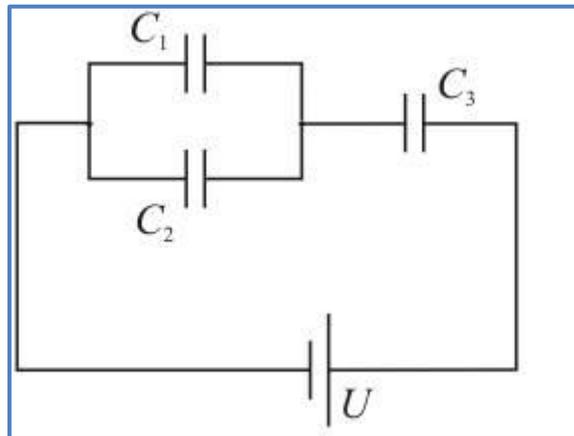
3) Trouver la chute de tension à travers le condensateur de  $12 \mu F$ .

En appliquant l'équation basique du condensateur on obtient:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{29 \mu F}{12 \mu F} = 2.4 V$$

**Exercice 2: Condensateurs en série et en parallèle**

Trois condensateurs (avec des capacités  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ) et une alimentation ( $U$ ) sont connectés dans le circuit, comme indiqué sur le schéma.

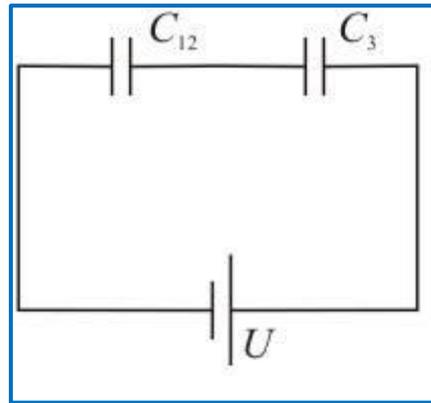


1) Trouver la capacité totale des condensateurs du circuit et la charge totale  $Q$  des condensateurs.

2) Trouver la tension sur chacun des condensateurs.

**Solution:****1) la capacité totale des condensateurs du circuit et la charge totale  $Q$** 

Des condensateurs  $C_1$  et  $C_2$  branchés en parallèle peuvent être substitués par un condensateur  $C_{12}$  avec une capacité égale à la somme de plusieurs capacitances:  $C_{12} = C_1 + C_2$ .



Après cette substitution, il y a 2 condensateurs dans le circuit -  $C_{12}$  et  $C_3$  branchés en série.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C = \frac{C_{12} C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(C_1 + C_2) C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Charge totale  $Q$  peut être évaluée en utilisant  $Q = UC$

$$Q = U \cdot C = \frac{U (C_1 + C_2) C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

2) Tension sur chacun des condensateurs

La charge et la tension sur le troisième condensateur:

Les charges sur les condensateurs  $C_{12}$  et  $C_3$  sont égaux et sont égaux à la charge  $Q$  totale

$$Q = Q_{12} = Q_3$$

Donc la tension sur le troisième condensateur est:

$$U_3 = Q_3 C_3 = Q C_3$$

Nous avons déjà évalué la charge  $Q$  dans la section précédente, nous pouvons donc les remplacer dans l'équation:

$$U_3 = U (C_1 + C_2) C_3 / (C_1 + C_2 + C_3) C_3 = U (C_1 + C_2) / (C_1 + C_2 + C_3)$$

Tensions des condensateurs connectés en parallèle:

La tension  $U$  totale est répartie entre les condensateurs  $C_{12}$  et  $C_3$ .

$$U = U_{12} + U_3$$

Nous pouvons évaluer la tension  $U_{12}$ :

$$U_{12} = U - U_3$$

Nous pouvons remplacer la tension  $U_3$ :

$$U_{12} = U - \frac{U (C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Transformons-le en un dénominateur commun et simplifions en combinant des termes semblables..

$$U_{12} = \frac{U(C_1 + C_2 + C_3) - U(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{U C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Tensions sur les condensateurs  $C_1$  et  $C_2$  montés en parallèle sont les mêmes:

$$U_1 = U_2 = U_{12}$$

Charge des condensateurs connectés en parallèle:

Nous pouvons simplement évaluer les charges sur les condensateurs connectés en parallèle:

$$Q_1 = U_1 C_1$$

$$Q_2 = U_2 C_2$$

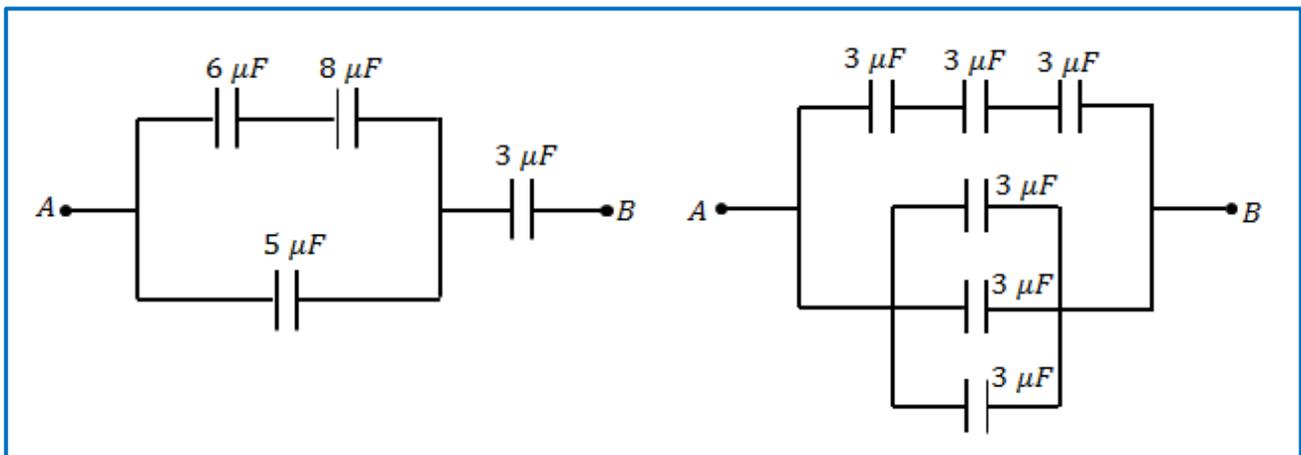
$$Q_1 = \frac{U C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$Q_2 = \frac{U C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

### Exercice 3

Soient deux associations de condensateurs représentées sur la figure ci-dessous.

1. Calculer les capacités équivalentes aux deux associations.
2. Dans chacun des cas, on applique entre A et B une d.d.p. de 1000V puis on débranche la source et on réalise un court-circuit entre A et B. Calculer la quantité de charge qui a circulé et l'énergie libérée durant cette opération.



**Solution**

- Schéma de gauche :

$$C_1 = \frac{6 \times 8}{6 + 8} + 5 = \frac{59}{7} \mu F = 8,43 \mu F$$

$$C_{eq} = \frac{\frac{59}{7} \times 3}{\frac{59}{7} + 3} = \frac{177}{80} \mu F = 2,21 \mu F$$

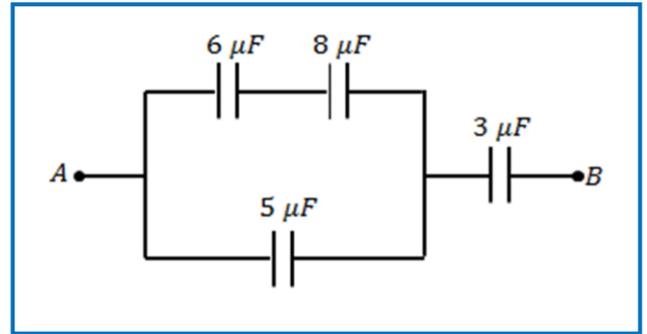
- La quantité de charge qui a circulé :  $Q = C_{eq} \cdot V$

A.N :  $Q = 2,21 \cdot 10^{-6} \times 1000 = 2,21 \cdot 10^{-3} C = 2,21 mC$

- L'énergie libérée :

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2$$

A.N :  $U = \frac{1}{2} \times 2,21 \cdot 10^{-6} \cdot (1000)^2 = 1,105 J$



- Schéma de droite :

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = 1 \mu F$$

$$C_2 = 3 + 3 + 3 = 9 \mu F$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 1 + 9 = 10 \mu F$$

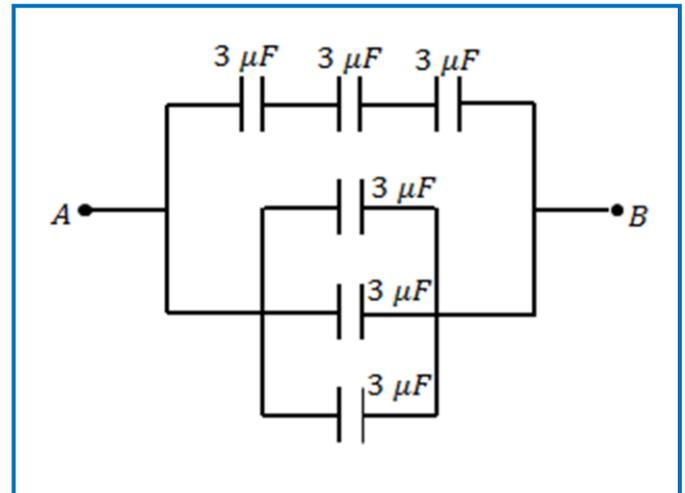
- La quantité de charge qui a circulé :  $Q = C_{eq} \cdot V$

A.N :  $Q = 10 \cdot 10^{-6} \times 1000 = 10^{-2} C = 10 mC$

- L'énergie libérée :

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2$$

A.N :  $U = \frac{1}{2} \times 10 \cdot 10^{-6} \cdot (1000)^2 = 5 J$

**Exercice 4**

Un condensateur plan est constitué de deux armatures parallèles de surface  $S = 400 mm^2$  chacune, séparées par une couche isolante d'épaisseur  $e = 0,17 \mu m$  et de permittivité  $\epsilon$ .

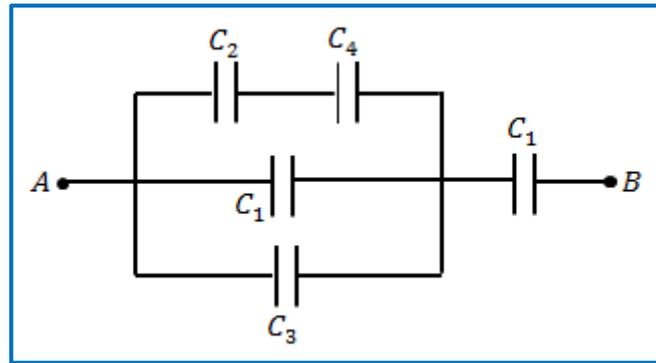
Calculer la valeur de  $\epsilon$  et de la permittivité relative  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ , pour que la capacité du condensateur soit égale à  $C_1 = 50 nF$ .

Dans la figure ci-dessous. La capacité équivalente du montage est égale à  $C_{eq} = 5 \mu F$ .

Calculer  $C_1$  si  $C_2 = 3 \mu F$  ;  $C_3 = 4 \mu F$  et  $C_4 = 6 \mu F$ .

Calculer la différence de potentiel  $V_i$  entre les armatures de chaque condensateur, ainsi que la charge  $Q_i$  de chaque condensateur, sachant que  $V_{AB} = 90V$ .

Quelle est l'énergie potentielle électrostatique  $U$  emmagasinée dans les cinq condensateurs?

**Solution**

1. Permittivité:

Condensateur plan  $\Rightarrow C = \frac{\epsilon \cdot S}{e} \Rightarrow \epsilon = \frac{C \cdot e}{S}$  avec  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$

A.N. :  $\epsilon = 21,25 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$  et  $\epsilon_r = 2,4$

2. Capacité  $C_1$  :

$$C = \frac{C_2 \cdot C_4}{C_2 + C_4} = 2 \mu F$$

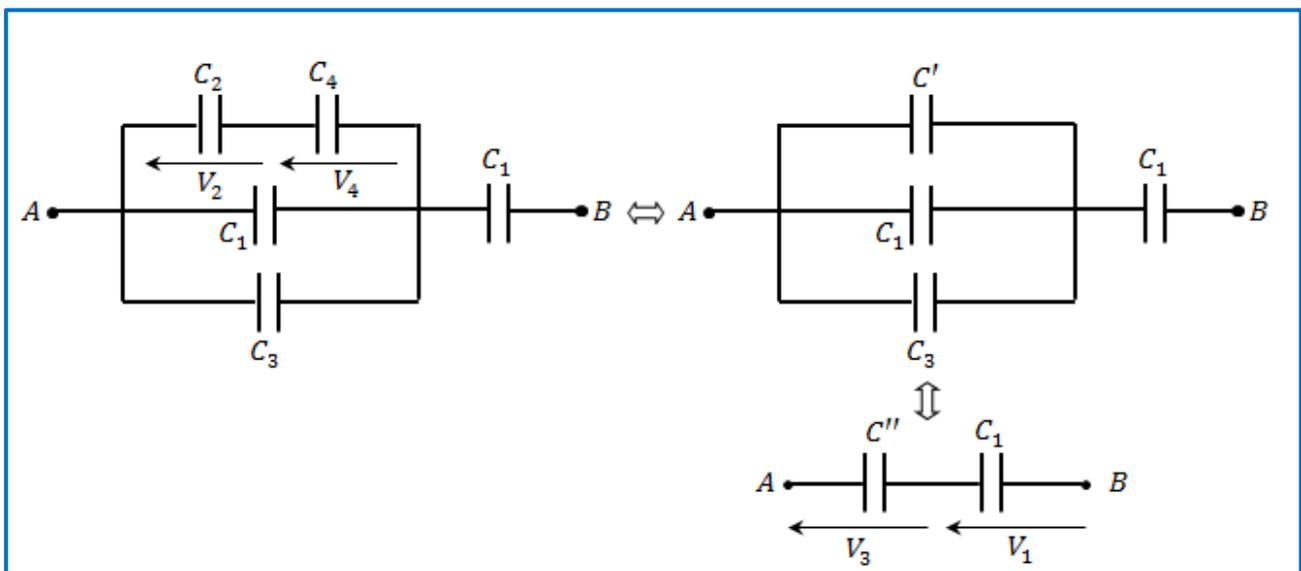
$$C'' = C' + C_1 + C_3 = 6 + C_1$$

$$C_{\text{éq}} = \frac{C' \cdot C_1}{C' + C_1} \quad \text{d'où : } C_{\text{éq}} = 5 = \frac{(6 + C_1) \cdot C_1}{6 + 2C_1}$$

On obtient enfin une équation du deuxième ordre :  $C_1^2 - 4C_1 - 30 = 0$

Dont les solutions sont:  $C_1 = \frac{4 \pm \sqrt{136}}{2}$

Seule la solution positive est physiquement acceptable, alors:  $C_1 = 2 + \sqrt{34} = 7,83 \mu F$



3. d.d.p. et charges:

$$\begin{cases} V_1 + V_3 = V_{AB} \\ C_1 \cdot V_1 = C'' \cdot V_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_3 = 90 \\ 7,83V_1 = 13,83V_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_1 = 57,46V \\ V_3 = 32,54V \end{cases}}$$

$$\begin{cases} V_2 + V_4 = V_3 \\ C_2 \cdot V_2 = C_4 \cdot V_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 + V_4 = 32,54 \\ 3V_2 = 6V_4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_2 = 21,69V \\ V_4 = 10,85V \end{cases}}$$

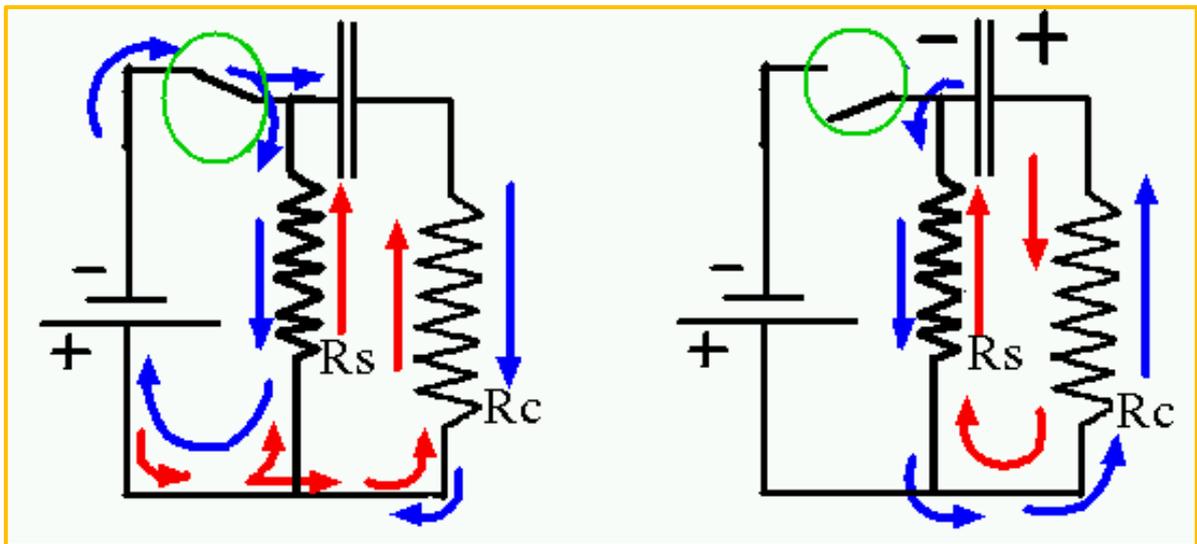
$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C \cdot V \Rightarrow \boxed{\begin{cases} Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 449,91 \mu C \\ Q'_1 = C_1 \cdot V_3 = 254,79 \mu C \\ Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 65,01 \mu C \\ Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 130,16 \mu C \\ Q_4 = C_4 \cdot V_4 = 65,01 \mu C \end{cases}}$$

4. Energie potentielle :

$$U_S = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C_{\acute{e}q} \cdot V^2$$

A.N :  $\boxed{U_S = 20250 \mu J = 0,02025 J}$

# Electrocinétique



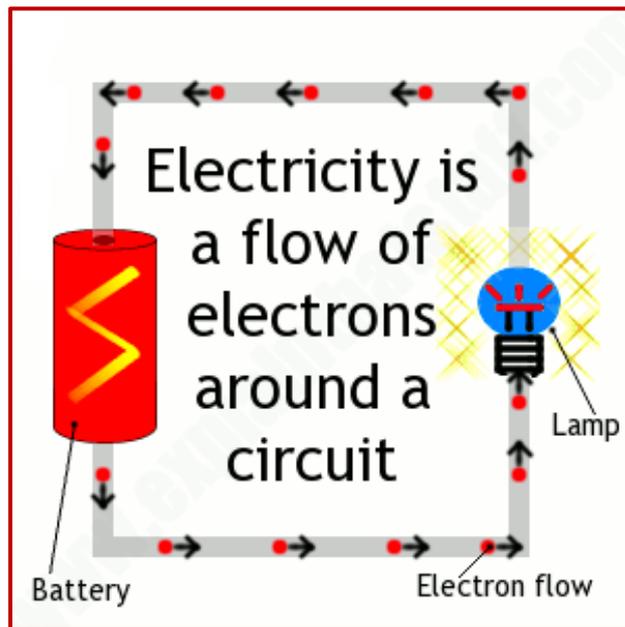
## 1. Introduction

L'Electrocinétique est la branche de l' 'Electromagnétisme qui étudie le transport des charges électriques dans les circuits conducteurs. Elle a envahi tous les secteurs de l'économie et de la vie quotidienne.

L'électrocinétique est l'étude du mouvement d'ensemble des porteurs de charges dans un circuit électrique assez simple composé de sources, résistance, bobine, condensateur, etc.

## 2. Courant électrique continu

Le courant électrique est un déplacement collectif et organisé des porteurs de charges (électrons ou ions).



**Fig III.1:** Mouvement des électrons dans un circuit

Un courant électrique apparaît dans un conducteur quand une différence de potentiel est établie entre les bornes de ce dernier.

### Sens du courant:

Le courant électrique circule dans le sens décroissant des potentiels, c'est-à-dire dans le sens du champ électrique. Ainsi, le sens choisi **conventionnellement** est contraire au sens des charges négatives.

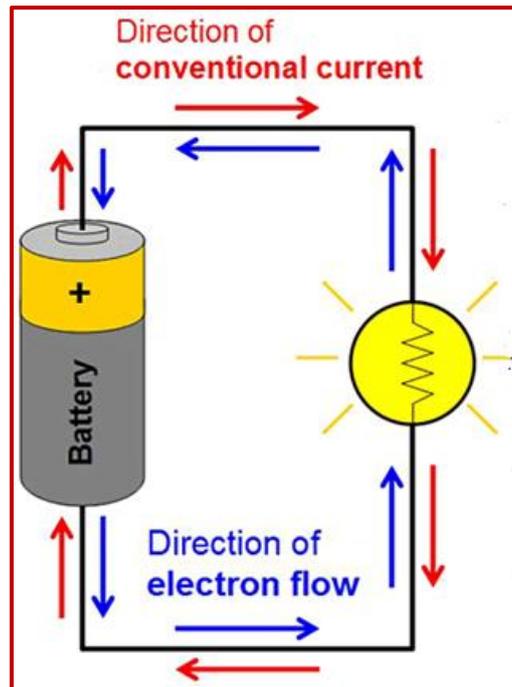


Fig III.2: Direction du courant dans un circuit

## 2.1 Vecteur densité de courant

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges dans un circuit électrique:

$$\vec{j} = \mu \cdot \vec{v}$$

$\vec{j}$ : densité de courant ( $A \cdot m^{-2}$ )

$\mu$ : densité volumique de charges mobiles ( $C \cdot m^{-3}$ )

$\vec{v}$ : vitesse moyenne des porteurs ( $m \cdot s^{-1}$ )

Si  $n$  est le nombre d'électrons mobiles par unité de volume :  $\mu = -ne$ , donc :

$$\vec{j} = -ne \cdot \vec{v}$$

## 2.2. Intensité de courant

On définit l'intensité du courant électrique  $I$  à travers une section ( $S$ ) de conducteur, la quantité de charge  $dQ$  pendant un intervalle de temps  $dt$  :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La quantité de charge  $dq$ , qui traverse la section  $dS$  perpendiculaire à l'axe du tube de courant, occupe, pendant un temps  $dt$ , un volume cylindrique :

$$dq = \mu dV = \mu v dt \cdot dS$$

$$dq = \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} dt$$

$$\frac{dq}{dt} = \mu \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

$$\frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

La charge totale qui traverse la section ( $S$ ) du conducteur est :

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

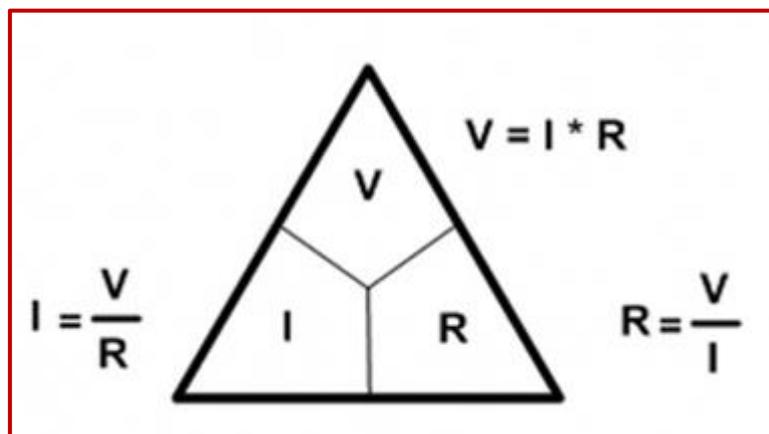
Ainsi, l'intensité du courant électrique :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

$$\boxed{I = \vec{j} \cdot \vec{dS}}$$

### 2.3. La loi d'ohm:

Le rapport entre la tension ( $t$ ) aux bornes de la résistance  $R$  métallique (conducteur) et le courant qui le traverse ( $t$ ), est constant ( la température de la salle est maintenue constante). La constante  $R$  est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms  $\Omega$ .



**Fig III.3:** Triangle représentant la loi d'Ohm

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}$$

C'est la Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.

**À l'échelle microscopique:**

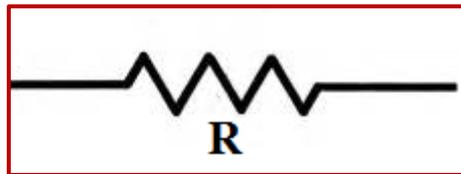
En tout point M d'un conducteur de conductivité  $\sigma$ , il existe un champ  $\vec{E}$  qui entraîne l'apparition d'une densité de courant  $\vec{J}$  :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Cette expression est générale, elle constitue la forme locale de la loi d'Ohm.

La constante  $\sigma$ , dépend de la nature du matériau.

Pour un conducteur de longueur  $L$ , de section constante  $S$ , on définit la résistance  $R$  par :



**Fig III.4:** Représentation d'une résistance

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

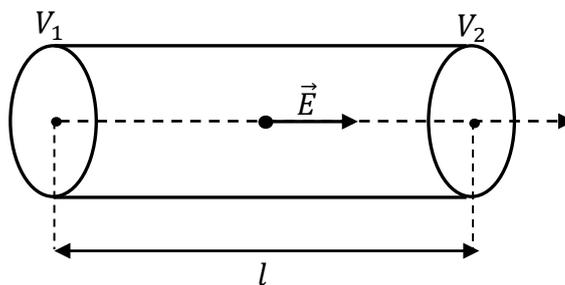
Si  $V_A - V_B$  désignent les potentiels entre deux points A et B distant de  $L$  dans le conducteur, la norme du champ électrique est égale aussi à

$$V_A - V_B = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ainsi, La loi d'Ohm traduit l'effet du déplacement des charges au champ électrique  $E$  auquel correspond une différence de potentiel en fonction du matériau caractérisé par sa résistance.

**2.4. Résistance d'un fil conducteur cylindrique**

On considérons un conducteur cylindrique, de longueur  $l$  et de section  $S$ , est parcourue par un courant  $I$ . S'il existe un courant, cela signifie qu'il y a différence de potentiel et soumis à une tension électrique  $U$ .



**Fig III.5:** Un conducteur cylindrique

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E \int_0^l dl$$

$$\Rightarrow U = V_2 - V_1 = E \cdot l$$

On définit alors la résistance de ce conducteur par:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E \cdot l}{J \cdot S} = \frac{E \cdot l}{\sigma \cdot E \cdot S} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{l}{R \cdot S}}$$

$\sigma$  est la conductivité du conducteur. Elle ne dépend que de la nature du matériau, elle est exprimée en  $(\Omega^{-1} \cdot m^{-1})$  ou en siemens par mètre  $(S \cdot m^{-1})$ .

L'inverse de la conductivité appelé résistivité électrique:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{R \cdot S}{l}}$$

Ainsi, peut être écrit la résistance d'un conducteur sous la forme :

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{S}}$$

## 2.5 .Effet de Joule.

Nous savons que :

$$W = q(V(A) - V(B)) .$$

Si un élément de charge  $dq$  passe d'un point A à un point B à travers une résistance  $R$ , le travail des forces électriques est :

$$dW = dq (V(A) - V(B)).$$

Nous remplaçons

$$dq = i dt \text{ et } V(A) - V(B) = u$$

D'où

$$dW = R i^2 dt$$

Ce travail est l'énergie dissipée sous forme de chaleur : c'est l'effet Joule

A l'état stationnaire. Elle correspond à une puissance

$$P = \frac{dW}{dt} = R i^2$$

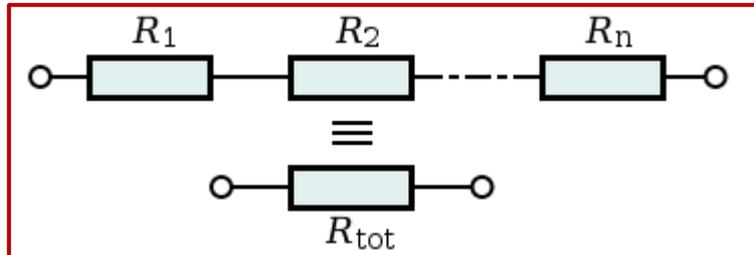
$$P = \frac{u^2}{R} \quad , \quad P = u i$$

Une puissance s'exprime généralement en watts, ou en joules par seconde.

## 2.6. Groupement de résistances.

### 2.6.1. Association en série de résistances

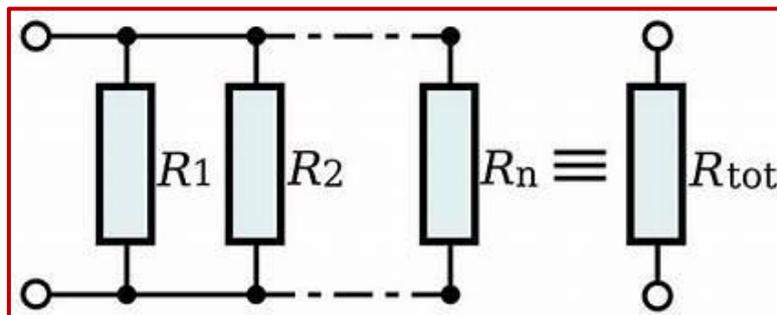
Chaque résistance est traversée par la même intensité et la tension aux bornes de la résistance équivalente est égale à la somme des tensions partielles



**Fig III.6:** Association en série de résistances

$$u = \sum_k^N u_k \text{ où } u = Ri$$

### 2.6.2. Association en parallèle de résistances



**Fig III.7:** Association en parallèle de résistances

Les résistances sont soumises à la même tension. Le courant total qui traverse l'ensemble des résistances est égal à la somme des courants individuels

$$i = \sum_k^N i_k$$

## 2.7. Les Circuits électriques.

### Définitions

- Un **circuit électrique** est constitué d'un ensemble de conducteurs et de composants électriques ou électroniques parcourus par un courant électrique.

Un circuit électronique simple est constitué d'un générateur qui fournit l'énergie électrique, un récepteur qui reçoit l'énergie du générateur et interrupteur qui permet de commander le passage du courant dans le circuit.

On distingue deux types de circuit.

- **Un circuit électrique passif** est un circuit composé de (résistance, bobine, condensateur ....). Un circuit passif consomme de l'énergie.

- **Un circuit électrique actif** comporte des (diode, circuit intégré.....). Un circuit actif fournit de l'énergie au circuit dans lequel il est connecté.

- **Dipôle** : un dipôle est un élément électrique qui possède une borne d'entrée et une borne de sortie. Il est qualifié d'actif lorsqu'il fournit de l'énergie (cas d'un générateur) et de passif lorsqu'il en consomme.
- **Réseau électrique**: c'est un circuit constitué d'un ensemble de dipôles (générateurs, récepteurs ou résistances) reliés entre eux par des fils conducteurs.
- **Nœud**: On appelle nœud un point du circuit relié à deux dipôles ou plus
- **Branche** de réseau est la partie de circuit comprise entre deux nœuds.
- **Maille** : est un parcours fermé de branches passant au plus une seule fois par un nœud donné.

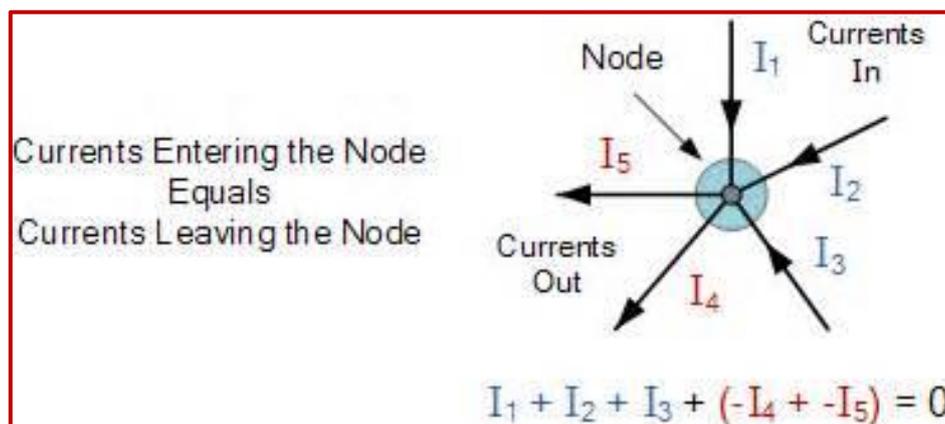
## 2.7. Lois de Kirchhoff

### 2.7.1 Loi des nœuds (conservation de la charge)

En tout nœud d'un circuit, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui sortent. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de la charge électrique.

$$\sum i_{entrant} = \sum i_{sortant}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$



**Fig III.8:** Courant entrant et sortant d'un nœud

2.7.2. Loi des mailles

Le long de toute maille d'un circuit électrique, à tout instant, la somme algébrique des tensions est nulle.

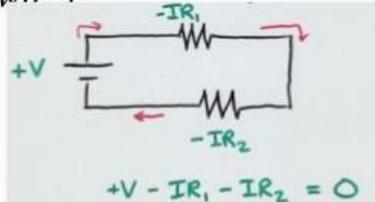
## Kirchhoff's Voltage Law

- In any complete path in an electrical circuit, the sum of the potential increases equals the sum of the potential drops.
- (“What goes up must come down ”)

$$\sum_{m=1}^M V = 0$$

Where M is the total number of branches in the loop.

$$\sum V_{\text{drops}} = \sum V_{\text{rises}}$$



**Fig III.9:** La loi des tensions

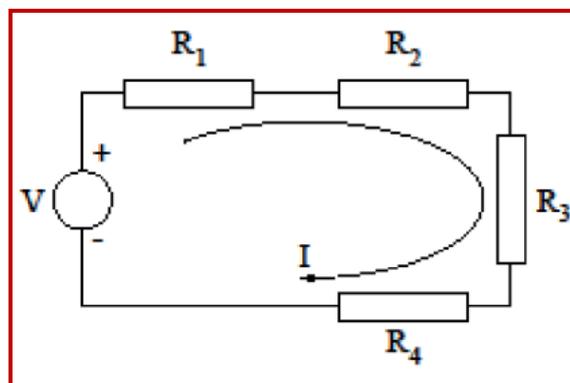
$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + \dots + (V_N - V_A) = 0$$

Les deux lois de Kirchhoff permettent l'analyse des réseaux électriques.

**Résumé**

Soit un circuit fermé comportant un générateur de tension et N résistances en série. Selon la loi des mailles nous pouvons écrire

$$-V + \sum_k^N R_k i = 0$$



**Fig III.10:** Circuit électrique fermé

Par définition la résistance équivalente est telle que :  $V=R i$ , donc :

$$R = \sum_k^N R_k$$

Nous supposons N résistances en parallèle, elles sont soumises à la même tension, chacune est parcourue par un courant

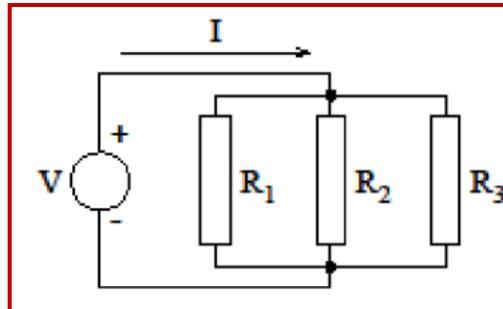


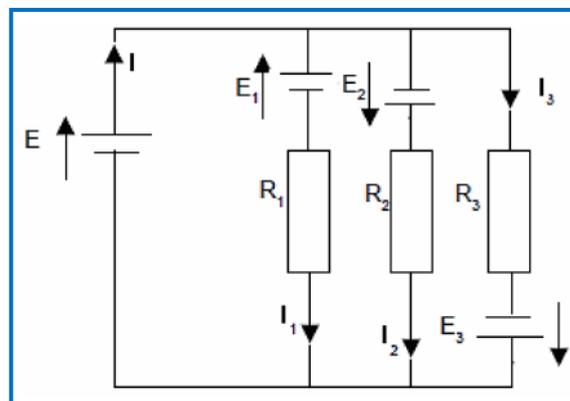
Fig III.11: Association en parallèle

$$i_1 = \frac{V}{R_1}$$

La loi des nœuds nous donne:  $I = \sum_k^N V/R_k$

### Exercices corrigés

#### Exercice 1 :



Calculer le courant principal  $I$ .

On donne :  $E = 10 V$ ,  $E_1 = 5V$ ,  $E_2 = 3V$ ,  $E_3 = 6V$ ,  $R_1 = 1k\Omega$ ,  $R_2 = 2,2k\Omega$ ,  $R_3 = 3,3k\Omega$ .

**Solution :**

La loi des nœuds  $I = I_1 + I_2 + I_3$

La tension est la même (groupement parallèle) :

$$E = + R_1 I_1 = -E_2 + R_2 I_2 = -E_3 + R_3 I_3$$

Dans la 1<sup>ère</sup> branche

$$I_1 = (E - E_1) / R_1 = (10V - 5V) / 1k\Omega = 5mA$$

Dans la 2<sup>ème</sup> branche

$$I_2 = (E + E_2) / R_2 = (10V + 3V) / 2,2k\Omega = 5,91mA$$

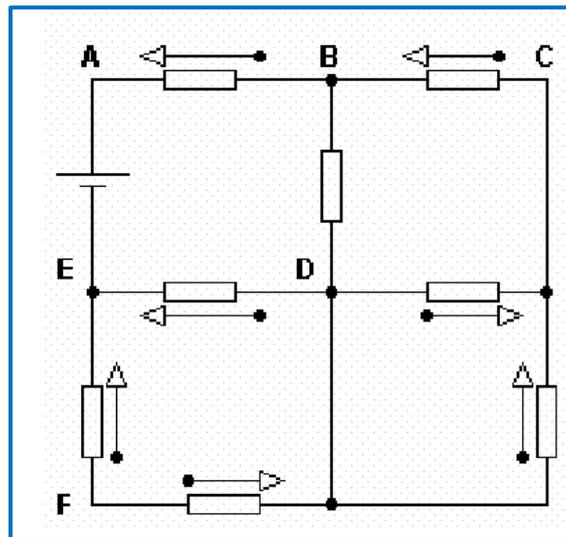
La 3<sup>ème</sup> branche

$$I_3 = (E + E_3) / R_3 = (10V + 6V) / 3,3k\Omega = 4,85mA$$

Nous obtenons

$$I = 5mA + 5,91mA + 4,85mA = 15,76mA.$$

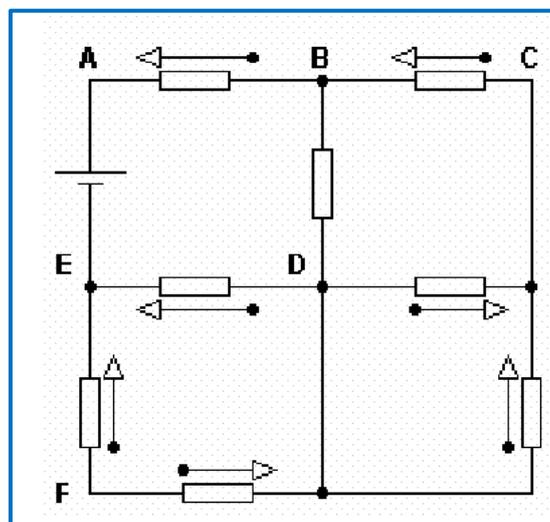
## Exercice 2



On donne  $U_{AB} = 8V$ ,  $U_{BD} = 10V$ ,  $U_{ED} = -6V$ ,  $U_{BC} = 6V$  et  $U_{DF} = 2V$

1. Calculer les valeurs de toutes les autres tensions représentées.
2. Si  $U_E = 0$ , calculer les potentiels de tous les autres points.

## Solution



On donne

$$U_{AB} = 8V, U_{BD} = 10V, U_{ED} = -6V, U_{BC} = 6V \text{ et } U_{DF} = 2V$$

$$1) U_{CD} = U_C - U_D = (U_C - U_B) + (U_B - U_D) = -U_{BC} + U_{BD} = -6V + 10V = 4V$$

$$U_{EF} = U_E - U_F = (U_E - U_D) + (U_D - U_D) = U_{ED} + U_{DF} = -6V + 2V = -4V$$

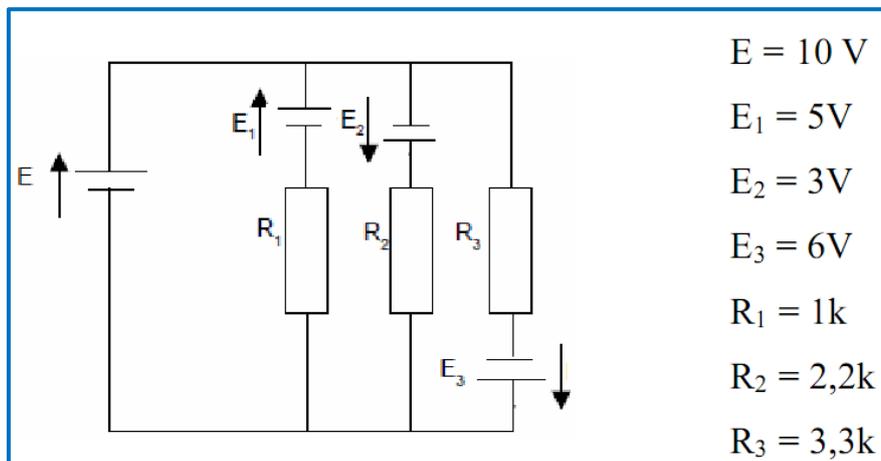
$$U_{AE} = U_A - U_E = (U_A - U_B) + (U_B - U_D) + (U_D - U_E) = U_{AB} + U_{BD} + U_{DE} = 8V + 10V + 6V = 24V$$

$$2) \text{ Si } U_E = 0, U_{AE} = U_A - U_E = U_A - 0V = 24V \Rightarrow U_A = 24V \quad U_{AB} = U_A - U_B = 24V - U_B = 8V \Rightarrow U_B =$$

$$24V - 8V = 16V \quad U_{BC} = U_B - U_C = 16V - U_C = 6V \Rightarrow U_C = 16V - 6V = 10V, U_{ED} = U_E - U_D = 0V -$$

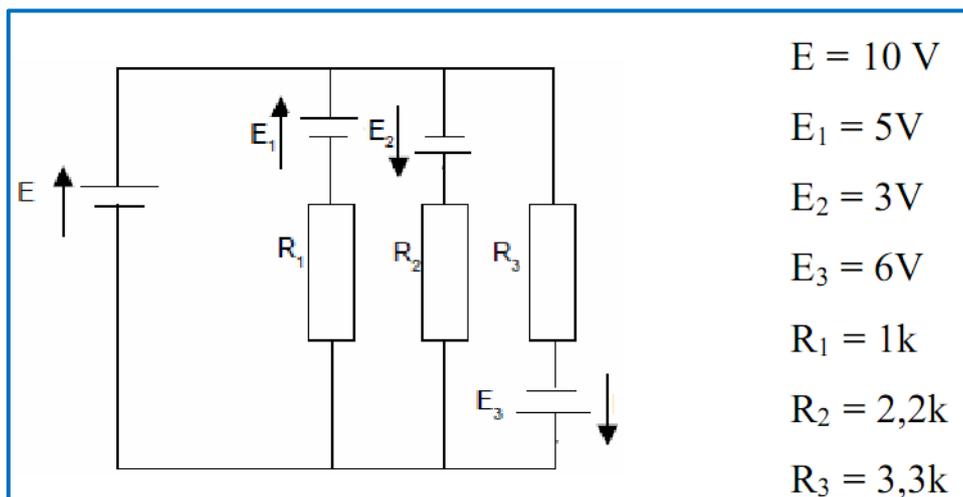
$$U_D = -6V \Rightarrow U_D = 0V - (-6V) = 6V \quad U_{DF} = U_D - U_F = 6V - U_F = 2V \Rightarrow U_F = 6V - 2V = 4V$$

### Exercice 3



Calculer le courant  $I$  débité par la source de tension  $E$ .

**Solution:**



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$E = +R_1 I_1 - E_2 + R_2 I_2 - E_3 + R_3 I_3$$

$$I_1 = (E - E_1) / R_1 = (10V - 5V) / 1k = 5mA$$

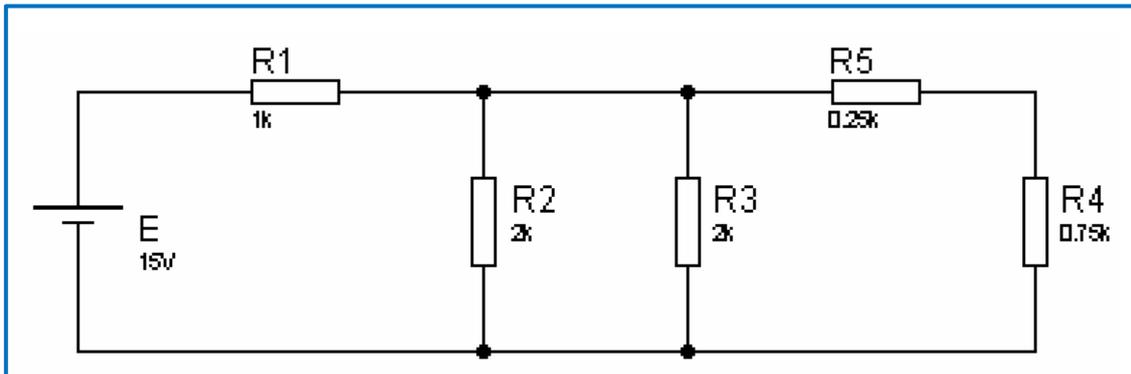
$$I_2 = (E + E_2) / R_2 = (10V + 3V) / 2,2k = 5,91mA$$

$$I_3 = (E + E_3) / R_3 = (10V + 6V) / 3,3k = 4,85mA$$

$$I = 5mA + 5,91mA + 4,85mA = 15,76mA$$

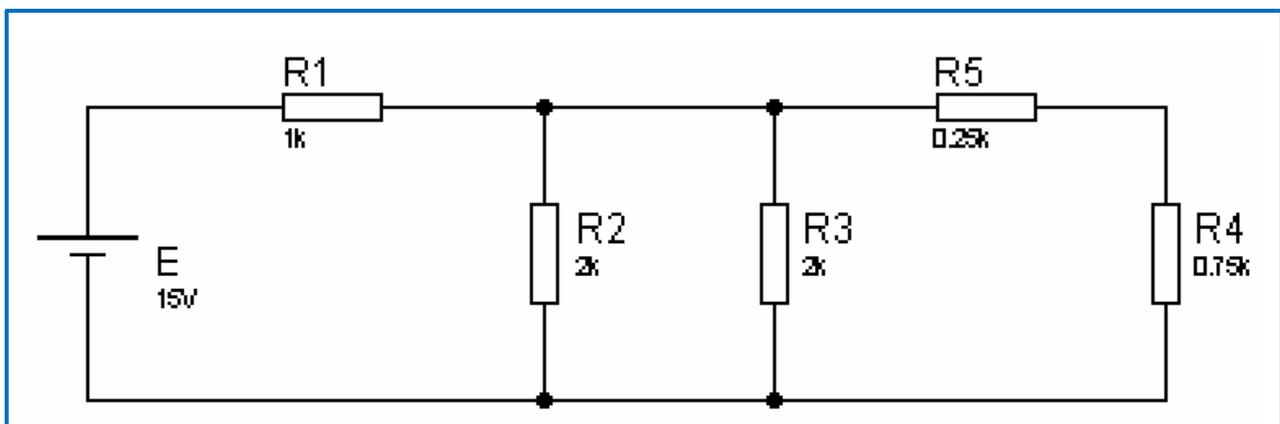
#### Exercice 4

Soit le circuit suivant:



1. Calculer la résistance totale  $R_T$  vue par la source E.
2. Calculer l'intensité du courant I fourni par la source E.
3. Calculer la tension  $U_3$  aux bornes de  $R_3$ .
4. Calculer la tension  $U_4$  aux bornes de  $R_4$ .
5. Calculer la tension  $U_5$  aux bornes de  $R_5$ .
6. Calculer les courants qui circulent dans chaque branche.
7. Calculer la puissance dissipée par chaque résistance.
8. Calculer la puissance totale  $P_T$  dissipée par toutes les résistances et calculer la puissance P fournie par la source E. Conclure

#### Solution



$$1. R_T = R_1 + R_2 // R_3 // (R_4 + R_5) = 0,5k\Omega \quad R_T = 1k\Omega + 0,5k\Omega = 1,5k\Omega$$

$$2. E = I R_T \Rightarrow I = E / R_T = 15V / 1,5k = 10mA$$

$$3. U_3 = R_3 I_3 = R I = 0,5k \times 10mA = 5V$$

$$4. U_4 = U_3 \times R_4 / (R_4 + R_5) = 5V \times 1,5k / 2k = 3,25V$$

$$5. U_5 = U_3 - U_4 = 5V - 3,25V = 1,75V$$

$$6. R I = R_2 I_2 = R_3 I_3 = I_4 (R_4 + R_5) \quad I_2 = I_3 = 5V / 2k = 2,5mA$$

$$\text{Et } I_4 = 5V / 1k = 5mA = I - I_2 - I_3$$

$$7. P_1 = R_1 I^2 = 1k \times (10mA)^2 = 100mW \quad P_2 = P_3 = 2k \times (2,5mA)^2 = 12,5mW$$

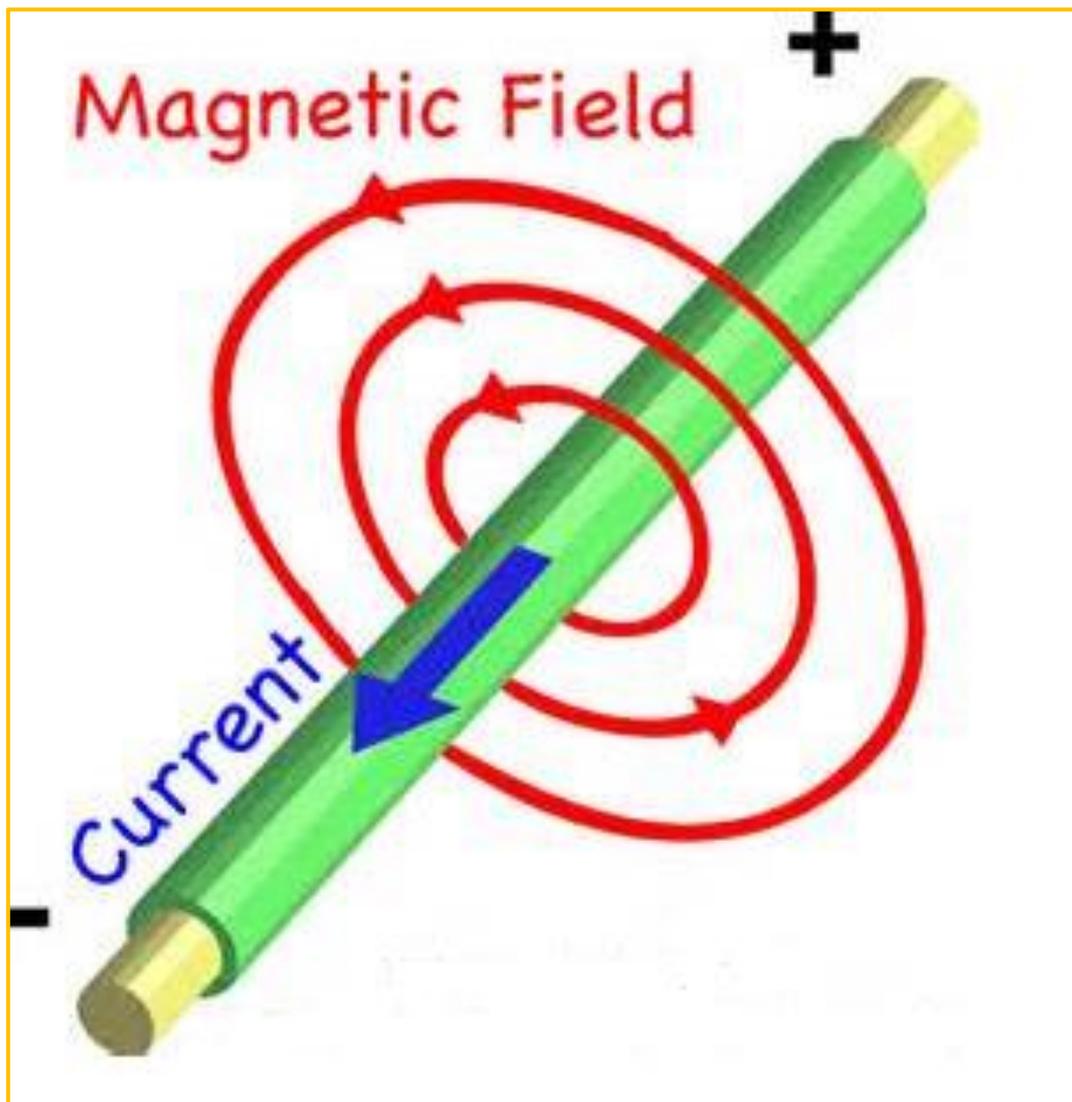
$$8. P_4 = 0,75k \times (5mA)^2 = 18,75mW \quad P_5 = 0,25k \times (5mA)^2 = 6,25mW$$

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 150mW \quad P = EI = 15V \times 10mA = 150mW$$

Conclusion :  $P_T = P$

9. Puisque  $R_4 + R_5 = R_5 \Rightarrow$  diminution de la résistance  $R_T \Rightarrow$  augmentation de  $I \Rightarrow$  augmentation de  $P_T$ .

# Electromagnétisme



## 1. Introduction

- Dès l'antiquité : observation de forces d'interaction entre matériaux dits aimantés.
- Utilisation de la boussole dès le 12<sup>ème</sup> siècle.
- En 1820, observation par OERSTED (1777-1851) de l'action d'un courant électrique sur un petit aimant.
- Étude des phénomènes par AMPÈRE (1775-1836), LAPLACE (1749-1827), BIOT (1774,1862), SAVART (1791-1841). Mise en évidence de l'action sur un aimant sur un circuit.
- Mise en évidence de l'action d'un aimant ou d'un courant sur un faisceau de particules : THOMPSON (1856-1940).

### En conclusion:

- Le magnétisme décrit les interactions entre charges en mouvement. (Aimantation de la matière interprétée par l'existence de courants microscopiques).

## 2. Phénomènes fondamentaux:

### 2.1. Aimants naturels

Ce sont des oxydes de fer qui ont la propriété naturelle d'attirer le fer et d'autres substances,



Fig IV.1: Aimant naturel

### 2.2. Aimants artificiels

En frottant un barreau d'acier avec un aimant naturel, on obtient un aimant artificiel,

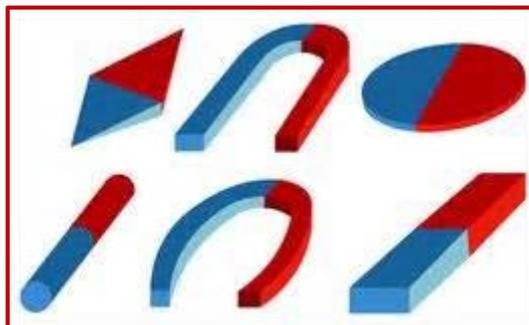
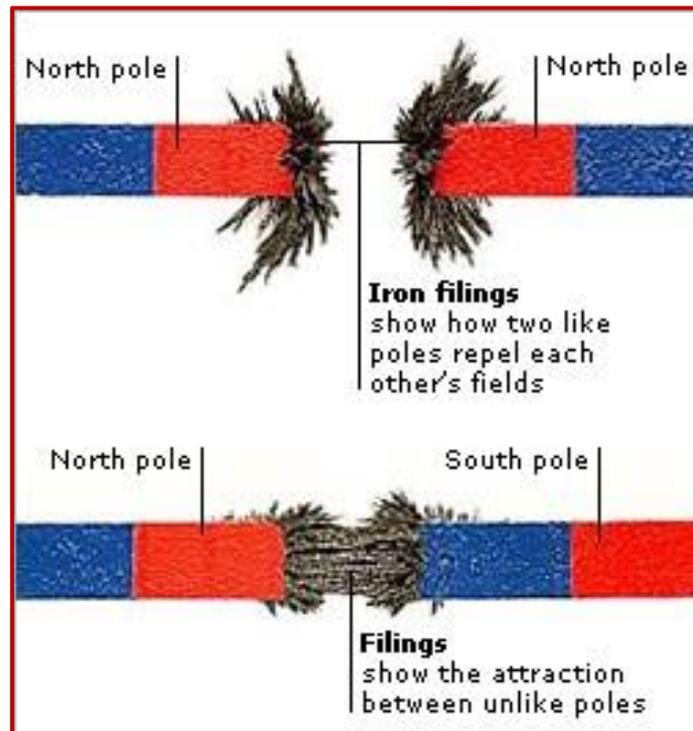


Fig IV.2: Aimants artificiels

### 2.3. Propriétés magnétiques des substances

- Substances paramagnétiques: faiblement attirées par un aimant (oxygène, air, ...),
- Substances diamagnétiques : faiblement repoussés (tout les gazes, le plomb, le zinc, l'or, ...),
- Substances ferromagnétiques : fortement attirés (fer, acier, fonte, ...),

### 2.4. Actions naturelles des pôles



**Fig IV.3: Actions entre aimants**

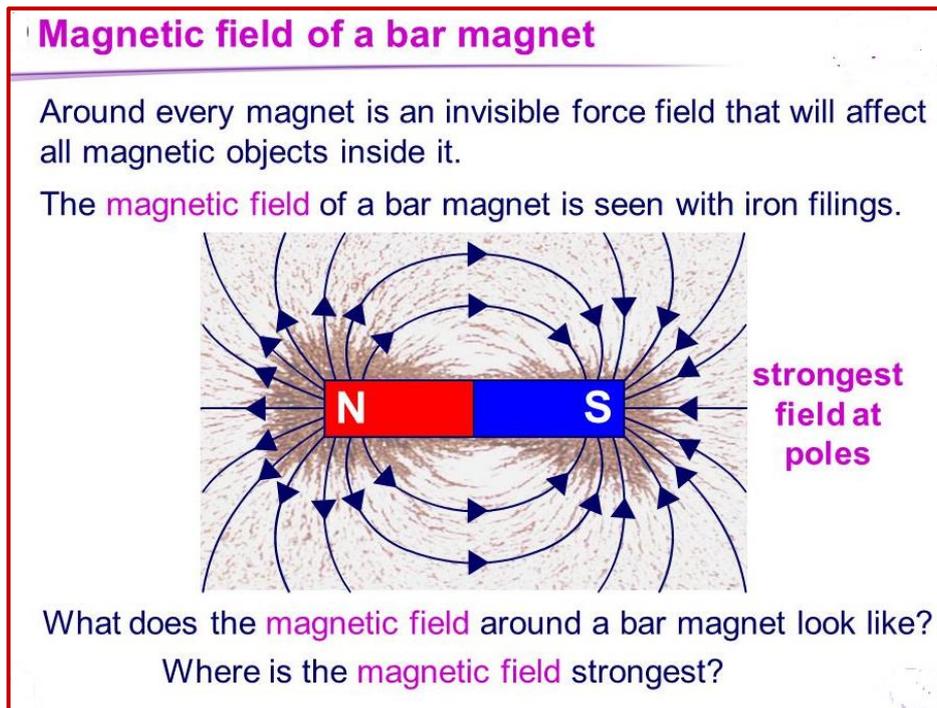
- Les pôles de mêmes noms se repoussent,
- Les pôles de noms contraires s'attirent,
- Les actions magnétiques décroissent très vite lorsque la distance croît,

### 3. Définition d'un champ magnétique.

Dans toute la suite de ce cours, le champ magnétique sera indépendant du temps, donc créé par une distribution de courants indépendante du temps : Magnétostatique.

#### 3.1. Description du champ magnétique:

Un aimant produit un champ vectoriel c'est le champ magnétique  $\vec{B}$ . Un aimant est une pierre noire qui a la propriété d'attirer des objets en fer. Il est constitué de deux types de pôles différents. Par exemple, l'extrémité d'une aiguille aimantée qui pointe vers le Nord est appelée pôle nord et l'autre extrémité pôle sud.



**Fig IV.4:** Champ magnétique créé par un aimant droit

- ✚ Le champ magnétique de l'aimant c'est l'espace autour de l'aimant et dans lequel se manifeste son influence,
- ✚ Le champ est une région de l'espace où il existe un état magnétique susceptible de se manifester par des forces,
- ✚ Le champ magnétique est représenté par un vecteur.
- ✚

### 3.2. Caractérisation du champ magnétostatique :

Le vecteur champ magnétique en chaque point de l'espace est défini par l'action subie par une petite aiguille aimantée (boussole) placée en ce point. (Équivalent de la charge d'essai pour le champ électrostatique) :  $\mathbf{B}$  a la direction et le sens de l'axe Sud-Nord de la petite aiguille aimantée. (Remarque : Le pôle nord terrestre géographique est proche du pôle sud magnétique.)

Les éléments du vecteur champ magnétique en un point :

- ✓ Son origine est le point considéré,
- ✓ Sa direction est tangente à la ligne de champ qui passe par le point,
- ✓ Son sens est celui dans lequel cette ligne de champ est orientée,
- ✓ Sa valeur (module ou norme du vecteur) dépend de la distance du point à la source de magnétisme et des caractéristiques de celle-ci,

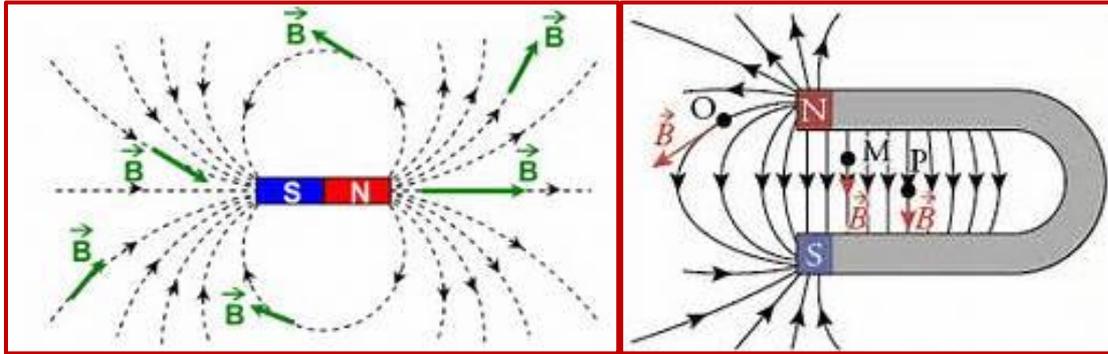


Fig IV.5: Représentation du champ magnétique pour aimant droit et aimant en U.

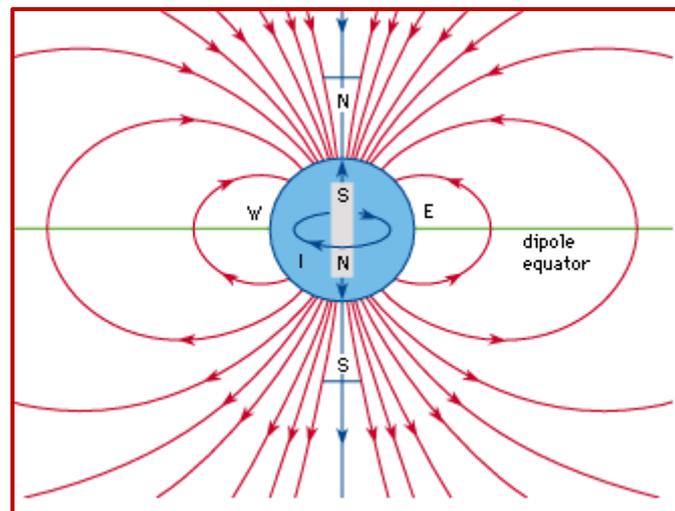


Fig IV.6. Représentation du champ magnétique terrestre.

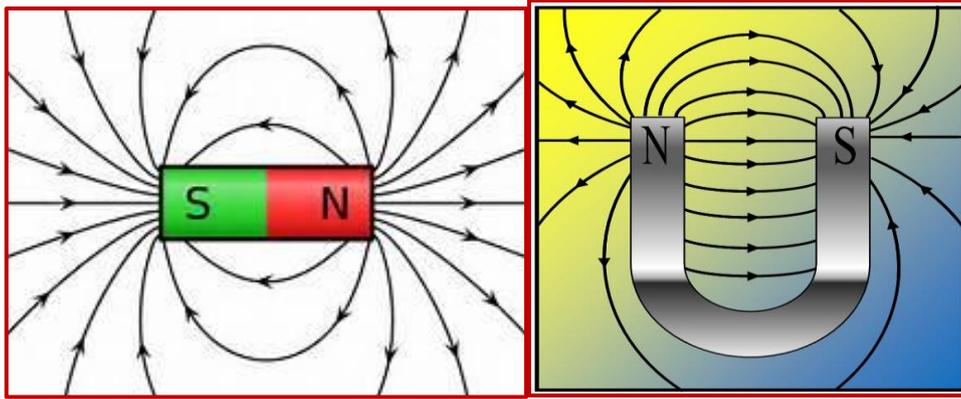
### 3.3. Ordres de grandeur

- Unité du champ magnétique : Le tesla T.
- Champ magnétique terrestre : environ  $10^{-5}$  T.
- Champ magnétique usuel au labo : environ  $10^{-4}$ T.
- Champ magnétique maximal jamais atteint: quelques dizaines de teslas.

### 3.4. Spectre magnétique d'un aimant

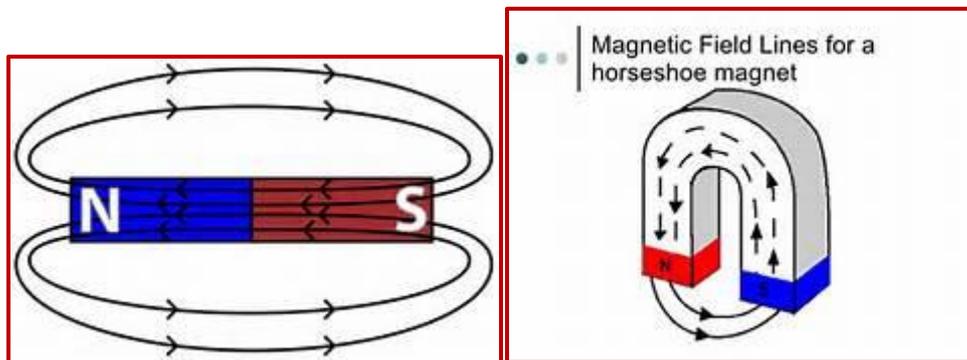
Les lignes d'induction sont dirigées :

- A l'extérieur : du pôle Nord au pôle Sud,



**Fig IV.7.** Spectre d'aimant droit et aimant en U à l'extérieur

- A l'intérieur : du pôle Sud au pôle Nord,



**Fig IV.8.** Spectre d'aimant droit et aimant en U à l'intérieur

#### 4. Le champ magnétique créé par un courant:

##### 4.1. Champ magnétique créé au voisinage d'un fil rectiligne

###### 4.1.1. Spectre magnétique

Plaçons un peu de limaille de fer sur une plaque en plexiglas posée perpendiculairement à un fil électrique rectiligne. Lorsqu'aucun courant ne circule dans le fil, la limaille ne prend pas de direction particulière. **Lorsqu'un courant circule dans le fil, la limaille s'aimante** et se dispose en lignes fermées, appelées lignes de champ.

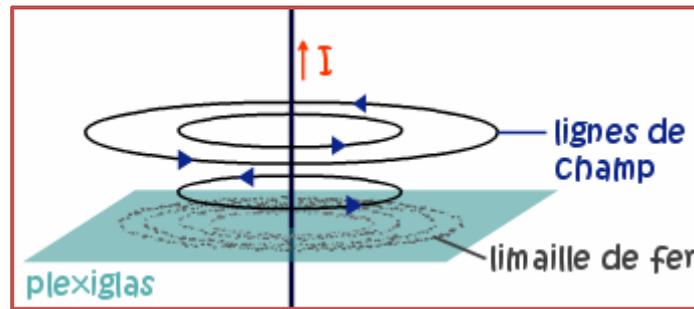


Fig IV.9. Spectre magnétique d'une tige rectiligne

**Les lignes de champ sont des cercles concentriques.**

**Le sens du vecteur champ magnétique.**

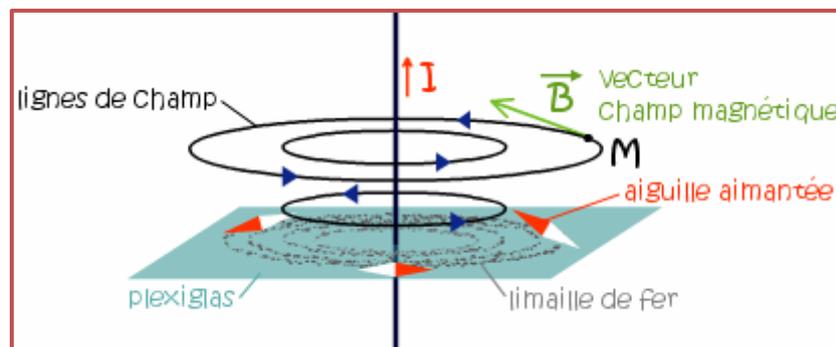


Fig IV.10. Orientation des lignes de champ magnétique

Le vecteur champ magnétique est contenu dans un plan perpendiculaire au fil. Les boussoles nous indiquent que **le sens du champ magnétique est déterminé par le sens du courant qui traverse le fil rectiligne.**

Le sens du champ magnétique peut être déterminé, sans boussole, par la règle de la main droite. Si le courant est orienté pour sortir du pouce, le vecteur champ magnétique est dirigé de la paume de la main vers le bout des doigts.

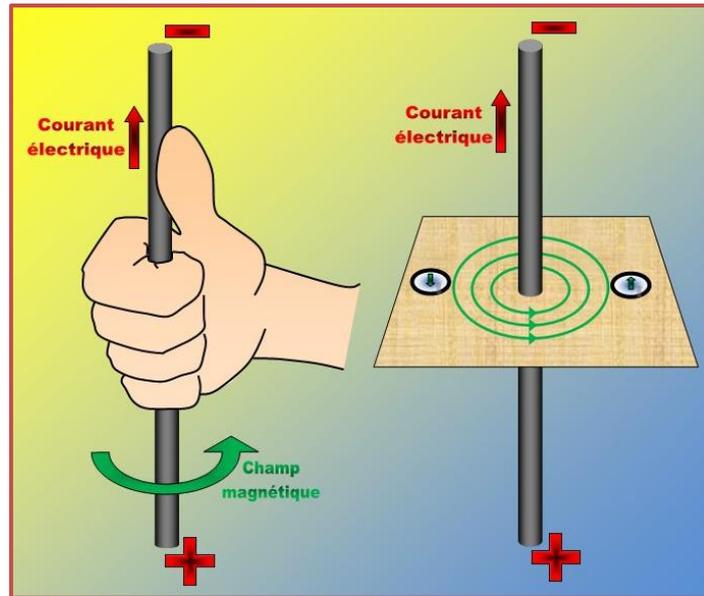


Fig IV.11.: Règle de la main droite

### c. Valeur du champ magnétique

La valeur du champ magnétique est mesurée à l'aide d'un téslamètre. A intensité constante, la valeur du champ magnétique est d'autant plus faible que l'on est loin du fil électrique. A une distance donnée du fil, la valeur du champ magnétique est d'autant plus élevée que l'intensité du courant qui traverse le fil est élevée.

### 4.2. Champ magnétique créé au voisinage d'une bobine

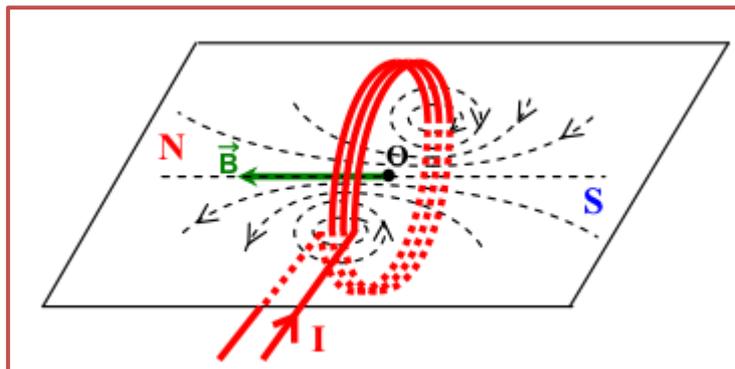


Fig IV.12: champ magnétique au voisinage d'une bobine

### 4.3. Champ magnétique créé au voisinage d'un solénoïde:

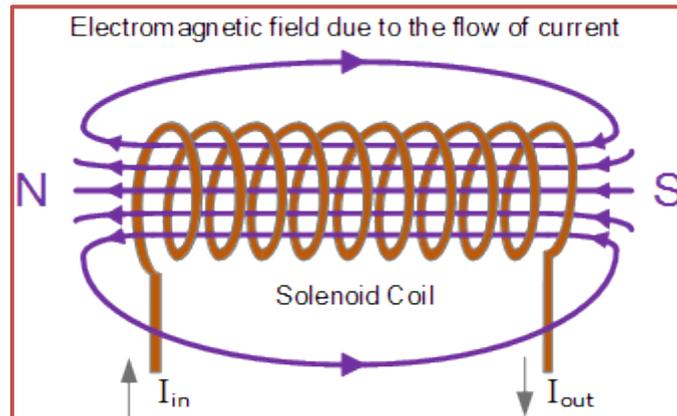


Fig IV.13. Champ magnétique au voisinage d'un solénoïde.

#### c. Valeur du champ magnétique

La valeur du champ magnétique est mesurée à l'aide d'un teslamètre. A l'intérieur du solénoïde, la valeur du champ magnétique est constante. On dit que le champ est uniforme.

### 5. Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge  $q$  située en un point P animée d'une vitesse  $v$  dans un référentiel galiléen est défini comme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

$\mu_0$  est la perméabilité du vide,  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$  (SI)



Fig IV.14. Champ magnétique créé par une charge mobile

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ magnétique. Si on considère deux particules  $q_1$  et  $q_2$  alors le champ magnétique créé en un point  $M$  quelconque de l'espace sera la somme vectorielle des champs créés par chaque particule est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume  $V$  donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules on utilisera une description continue comme nous l'avons fait en électrostatique.

## 6. Forces magnétiques:

Lorsqu'une particule chargée se déplace dans un champ magnétique on peut déterminer expérimentalement si une force provenant du champ agit sur cette particule. Dans ce chapitre, nous étudierons la relation entre cette force et le champ magnétique.

### 6.1. Force de Lorentz.

En 1820, Oersted plaça un fil conducteur au-dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est déviée, prouvant l'existence d'une relation entre le courant électrique et le champ magnétique. Par ailleurs, il observa que si on inverse le sens du courant, la déviation changera de sens. Cette force qui dévie l'aiguille est non radiale.

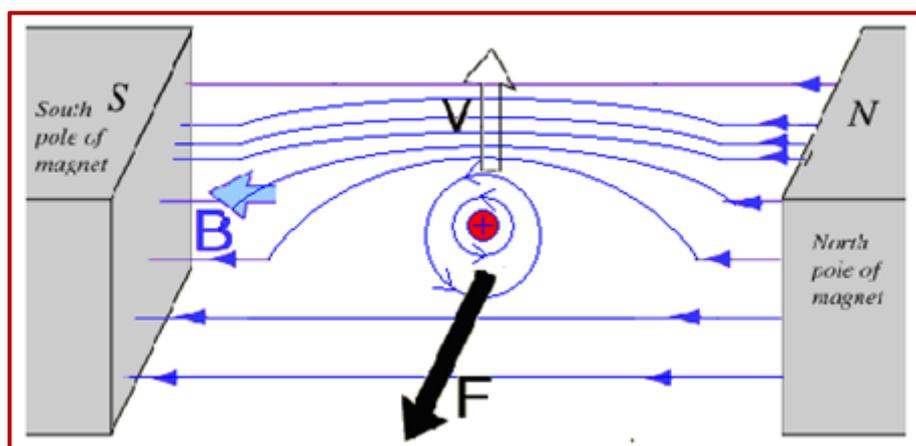


Fig IV.15. Force de Lorentz.

En résumé on obtient l'équation vectorielle suivante :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On peut écrire la grandeur de  $F_m$  comme suit :

$$F_m = |q|v B \sin\alpha$$

Où  $\alpha$  est l'angle entre les directions de la vitesse  $v$  et du champ magnétique  $\vec{B}$

Cette équation indique que la force  $F_m$  sur une particule dans un champ magnétique est proportionnelle à la charge  $q$  et à la vitesse  $v$  de la particule. Si  $q=0$  ou si la particule est immobile donc :  $F_m=0$ .

L'équation indique aussi que  $\vec{v} \parallel \vec{B}$  ( $\alpha=0$  ou  $\alpha=\pi$ ) alors  $F_m=0$ . Et que la force est maximale lorsque  $\vec{v} \perp \vec{B}$ .

## 6.2. Représentation vectoriel de la force de Lorentz.

On a déjà vu dans le chapitre cinématique que le produit vectoriel  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  est un vecteur  $\perp$  au plan formé par ces deux vecteurs. Par ailleurs le produit vectoriel  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  donnera un vecteur qui sera  $\perp$  au plan  $(\vec{v}, \vec{B})$ . La règle de la main droite montre que le pouce de la main droite pointe dans la direction  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  quand les autres deux doigts forment la surface entre  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  en partant de  $\vec{v}$ .

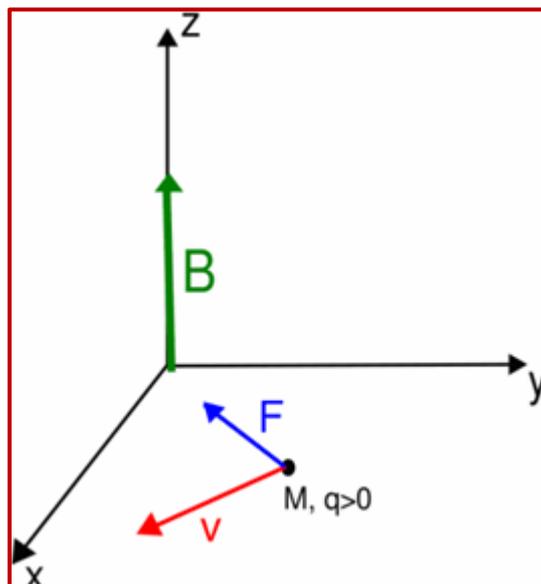


Fig IV.16: Force de Lorentz

### En résumé

Une particule de charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel où règne un champ magnétique  $\vec{B}$ , est soumise à la force

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Avec  $\vec{F}$  la force de Lorentz en Newton,

$\vec{v}$  la vitesse de la particule en (m/s),

$\vec{B}$  le champ magnétique en Tesla (T).

### 7. Loi de Laplace.

Nous supposons un élément de circuit de longueur  $dL$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , contient des charges mobiles de densité volumique  $\rho$ .

Un volume élémentaire  $dV$  autour d'un point M du conducteur contient une charge :

$dq = \rho dV$  avec  $dV = SdL$  où  $S$  est la section du conducteur et  $dL$  un élément de longueur de ce conducteur. Chacune de ces charges élémentaires  $dq$  subit une force.

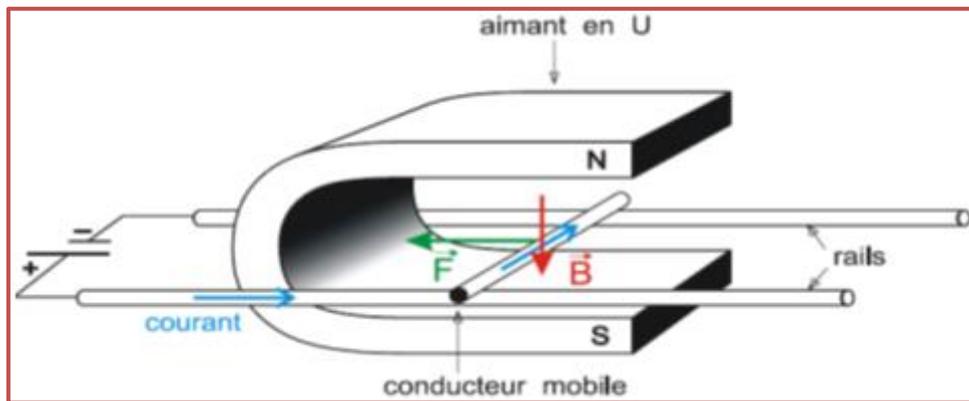


Fig IV.17. Expérience des rails de Laplace

La force subit par un élément de circuit de longueur  $dL$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est appelée force de Laplace.

$$\vec{dF} = I \vec{dL} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{dL}$  est parallèle à l'élément de circuit et dans le sens du courant.

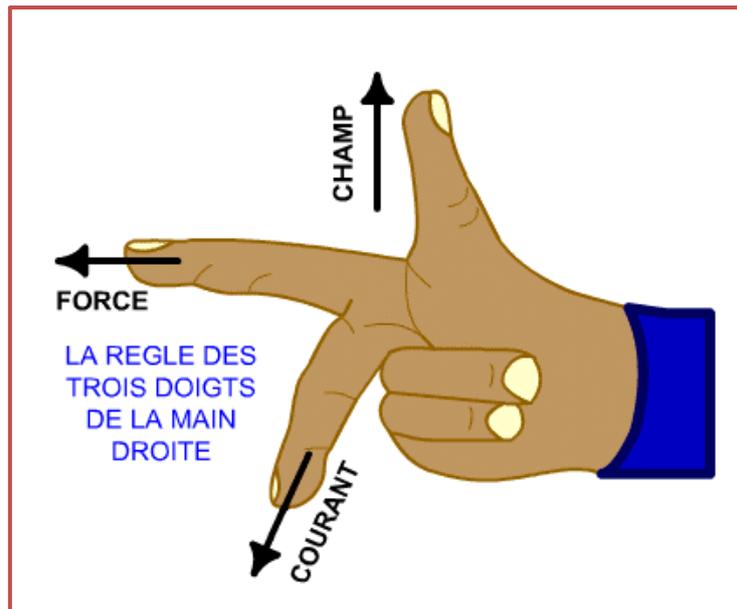


Fig IV.18. Règle des trois doigts de la main droite

## 8. Loi de Faraday.

### 8.1. Flux magnétique

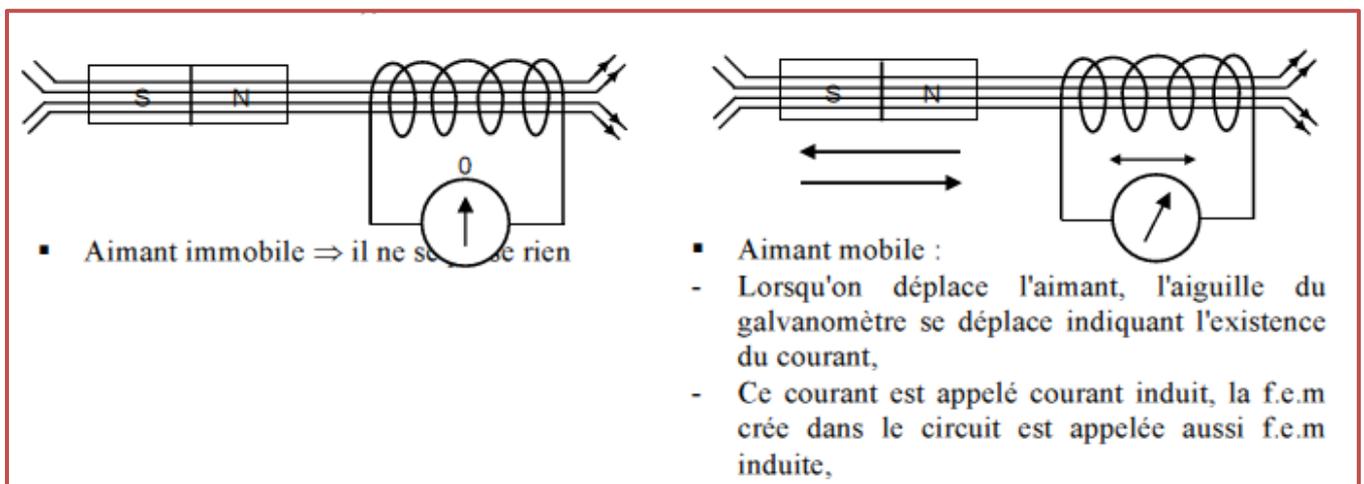


Fig IV.19. Fem créée par le déplacement d'un aimant

Soit un circuit fermé  $C$ , placé dans un champ magnétique.

Il y'a apparition d'un courant induit dans  $C$  lorsque le flux magnétique dans le circuit varie au cours du temps ; nous rappelons la relation permettant de calculer le flux du champ magnétique à travers une surface  $S$  :

$$\phi = \iint \overline{B} \, d\overline{S}$$

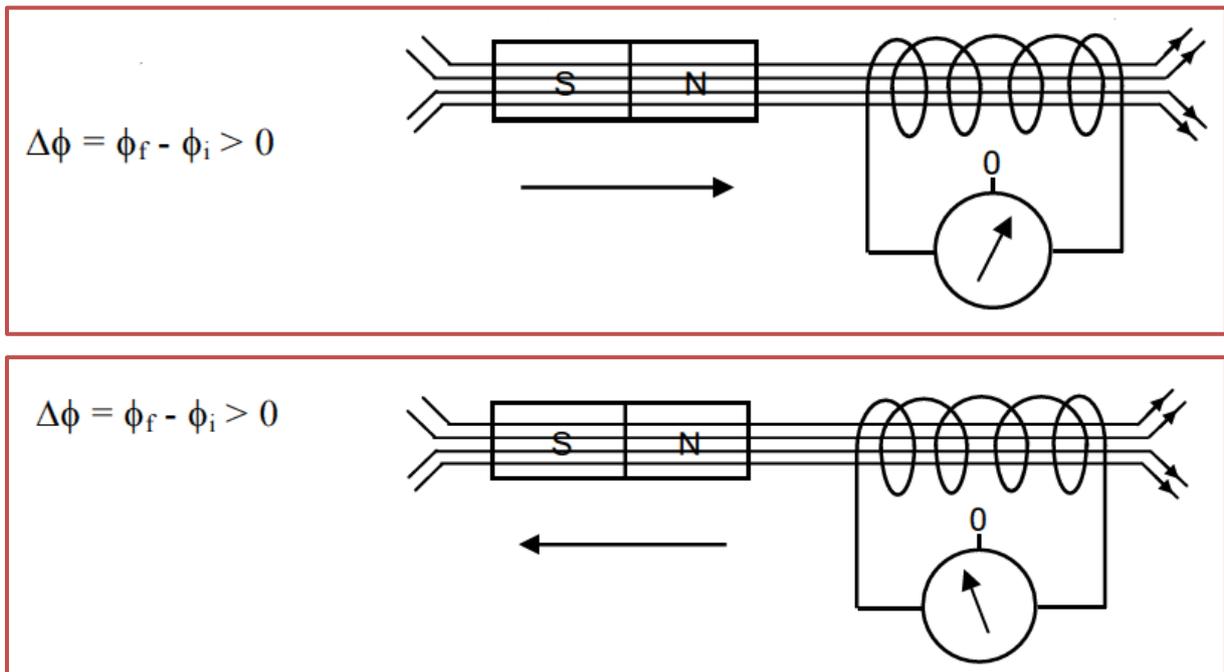
**On peut obtenir un flux magnétique variable dans les deux cas suivant :**

- Cas de Neumann : le champ magnétique varie au cours du temps
- Cas de Lorenz : le circuit C se déplace dans le champ  $\vec{B}$  constant et la surface S varie.

## 8.2. Induction magnétique

La création d'un courant induit est liée à une variation dans le temps du flux magnétique à travers le circuit. Nous pouvons faire une manipulation au laboratoire.

Le circuit de la figure est formé d'une bobine et un d'Ampèremètre ou plutôt un micro Ampèremètre car le courant est d'intensité très faible, et des fils qui les relient.



**Fig IV.20.** Loi de Lenz

Dans le 1<sup>er</sup> cas, nous rapprochons un aimant de telle façon que le pôle nord est approximatif de la bobine. Le champ magnétique crée par l'aimant à l'intérieur de la bobine est noté par  $\vec{B}_A$ . Le sens de  $\vec{B}_A$  est un vecteur qui sort du pôle nord.

Lorsque nous déplaçons l'aimant vers la bobine nous observons la déviation de l'aiguille de l'Ampère mètre indiquant le passage d'un courant. Ce courant induit dans le circuit va lui aussi crée un champ magnétique induit à l'intérieur de la bobine on le note par  $\vec{B}_I$ . Maintenant, pour voir le sens de par  $\vec{B}_I$ , il suffit de placer la main droite en bas :

*index* → sens du courant

*pouce* → sens du champ magnétique

Nous constatons que  $\vec{B}_I$  est de sens opposé de  $\vec{B}_A$ . Le champ résultant à l'intérieur de la bobine s'écrira :  $\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_A\| - \|\vec{B}_I\|$

Dans le 2<sup>ème</sup> cas, nous éloignons l'aimant de la bobine. La valeur de  $\vec{B}_A$  va diminuer.

Nous observons dans la manipulation que le courant change de sens par conséquent le champ magnétique induit  $\vec{B}_I$  change aussi.  $\vec{B}_I$  aura le même sens que  $\vec{B}_A$  d'après la règle de la main droite.

Le champ résultant à l'intérieur de la bobine s'écrira :

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_A\| + \|\vec{B}_I\|$$

Ce champ induit tend à augmenter la valeur de Ce champ induit tend à augmenter la valeur de

Ce champ induit tend à augmenter la valeur de  $\|\vec{B}_A\|$

### En résumé :

La cause d'existence de ce courant induit c'est parce que nous avons déplacé l'aimant.

Ce déplacement à l'origine de la variation du champ magnétique.

Cette variation du champ magnétique qui a créé le courant induit.

Le courant induit lui-même il a créé un champ magnétique qui s'oppose toujours à la cause.

## 9. Dipôle magnétique

### 9.1. Moment magnétique et dipôle magnétique

#### 9.1.1. Surface orientée

Soit une spire (boucle de courant filiforme) parcourue par un courant d'intensité  $I$ , on définit une surface orientée par l'intermédiaire d'un vecteur surface :

$$\vec{S} = \iint d\vec{S} = \iint d\vec{S} \vec{n}$$

#### 9.1.2. Moment magnétique

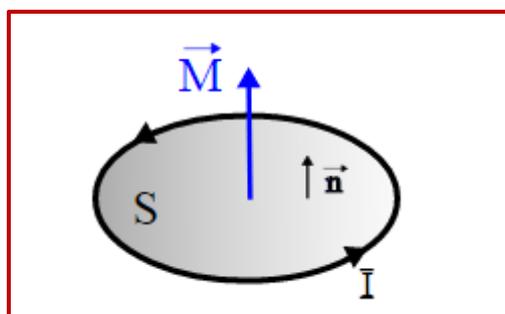


Fig IV.21. Spire magnétique, surface orientée et moment

Le moment magnétique d'une boucle de courant est donné par :

$$\vec{m} = I \vec{S} = I S \vec{n}$$

Ce moment s'exprime donc en  $A \times m^2$ .

### 9.1.3. Notion de dipôle et approximation dipolaire

On parle de dipôle magnétique lorsque la spire de courant satisfait aux conditions de l'approximation dipolaire : pour le dipôle actif (créateur de champ magnétique), il faut que la dimension de la spire soit petite devant la distance à laquelle on calcule le champ créé ( $r \gg R$  si  $R$  est le rayon de la spire).

Pour le dipôle passif, il faut que la dimension du dipôle soit petite devant la distance caractéristique de variation du champ dans lequel est placé le dipôle.

On appelle dipôle magnétique une distribution de courant de moment magnétique  $\mu$  non nul dont la taille caractéristique  $a$  est infiniment petite devant les autres longueurs du problème.

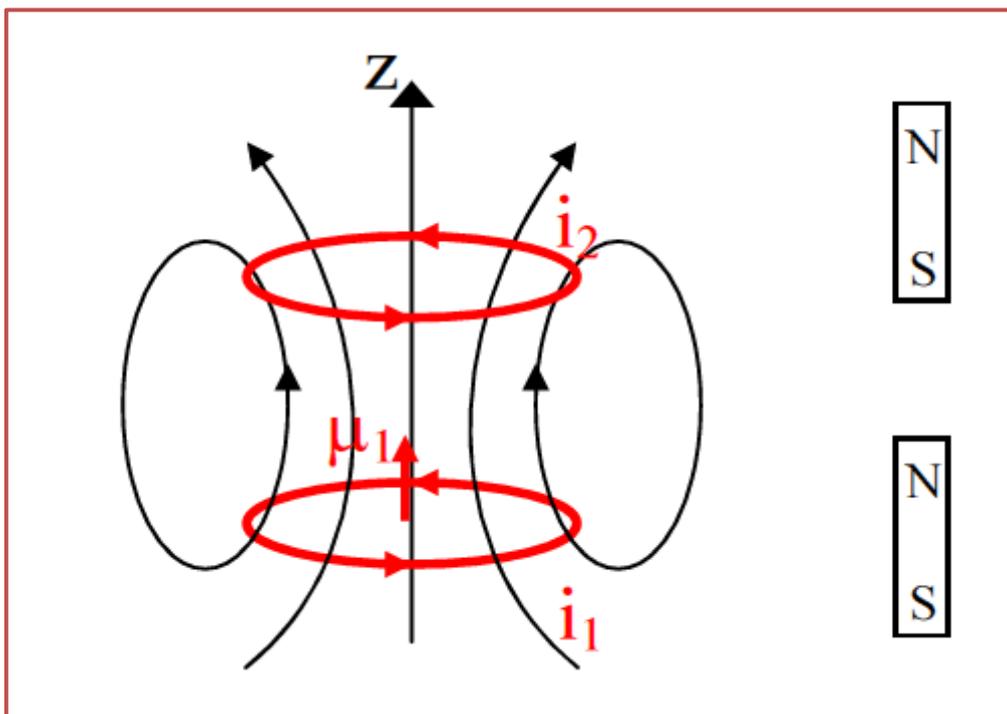


Fig IV.22. Moment magnétique d'un dipôle

### 9.1.4. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

On se place dans les mêmes conditions que pour le calcul du champ électrique créé par un dipôle électrique. Le champ dépendra donc de la distance au moment magnétique et de l'angle entre le moment magnétique du dipôle et le vecteur  $\vec{OM}$

On trouve alors, en coordonnées sphériques, le champ suivant :

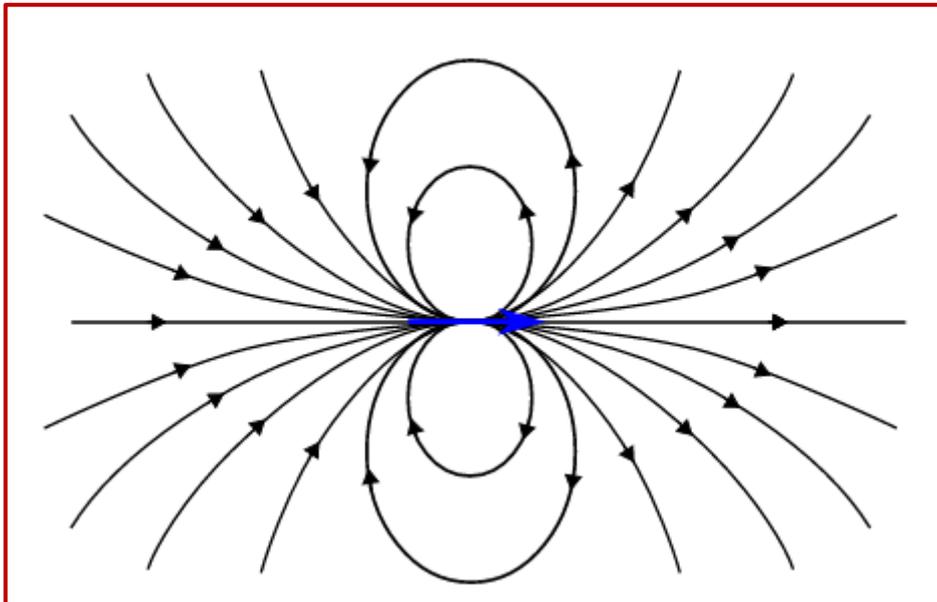
$$B_r = \frac{\mu_0 M \cos\theta}{2 \pi r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 M \sin\theta}{4 \pi r^3}$$

$$B_\phi = 0$$

Ainsi, si les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  créés par les dipôles électriques et magnétiques sont similaires, l'allure des lignes de champ doit également correspondre.

Le spectre magnétique autour d'un dipôle magnétique est représenté sur la figure ci-dessous, si on regarde "de loin" le dipôle.



**Fig IV.23.** Lignes de champ autour du dipôle magnétique

## 10. Aimantation de la matière

### 10.1. Le spin des électrons

L'origine magnétique de la matière, comme toute existence de magnétisme, est liée à des courants, donc à des déplacements de charges. Dans les atomes, il y a déplacement de charges lorsque l'électron tourne autour du noyau et même lorsque l'électron tourne autour de lui-même. Cette rotation de l'électron autour de lui-même (appelée spin) peut être modélisée par un dipôle magnétique possédant un certain moment magnétique.

## 10.2. Spins et magnétisme macroscopique

Dans certains matériaux, les spins des électrons sont orientés indifféremment dans l'espace. Ainsi globalement, la résultante des champs magnétiques est nulle, le matériau ne sera pas magnétique.

Dans d'autres, les spins des électrons créent des champs bien alignés les uns par rapport aux autres : des milliards d'électrons qui créent des petits champs magnétiques alignés donnent au final un champ magnétique non négligeable.

## 10.3. Trois types de matériaux

**10.3.1. Matériau diamagnétique** (Cuivre, Or) : il n'y a pas de moment magnétique permanent dans ces matériaux. Mais soumis à un champ extérieur, il y a création d'un champ magnétique induit qui s'oppose au champ magnétique extérieur. L'effet disparaît en même temps que le champ extérieur.

**10.3.2. Matériau paramagnétique** (Aluminium, Platine) : il existe dans ces matières des moments magnétiques permanents mais orientés indifféremment dans l'espace. Sous l'effet d'un champ extérieur, les moments s'orientent dans le sens de ce champ ce qui le renforce. Les matériaux paramagnétiques sont faits d'atomes qui ont des couches électroniques incomplètes.

L'effet disparaît en même temps que le champ extérieur.

**10.3.3. Matériau ferromagnétique** (Fer, Cobalt, Nickel) : dans des domaines restreints de ces matériaux existent des moments magnétiques permanents orientés dans le même sens : il existe donc une certaine aimantation naturelle.

De plus, à l'issue de l'exposition à un champ magnétique extérieur, ces matériaux peuvent conserver une aimantation rémanente, parfois très forte (aimants).

## Exercices corrigés

### Exercice 1

Deux charges ponctuelles de 4 et de 6  $\mu\text{C}$  sont situées à quelque distance l'une de l'autre. Elles exercent l'une sur l'autre des forces de 0.4 N.

Calculez le champ électrique produit par la première à l'endroit où se trouve la seconde.

Calculez le champ électrique produit par la seconde à l'endroit où se trouve la première.

**Rép.**  $23 \times 10^5 \text{ V/m}$ ,  $105 \times 10^5 \text{ V/m}$ .

**Exercice****2**

Un accélérateur de particules produit des protons, des deutons et des électrons de 4 MeV. Calculez la vitesse de ces particules au terme de l'accélération.

**Rép.**  $2.77 \times 10^7$  m/s,  $1.96 \times 10^7$  m/s,  $2.98 \times 10^7$  m/s.

**Exercice****3**

Une bobine plate comprend 50 spires de rayon  $R=10$  cm. Son plan est parallèle au méridien magnétique. Quel courant faut-il y faire circuler pour que l'intensité de l'induction magnétique créée au centre de la bobine vaille 100 fois celle de la composante horizontale de l'induction terrestre qui vaut  $0.2 \times 10^{-4}$  T? Et pour qu'une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical et placée au centre de la bobine, tourne de  $60^\circ$  quand on lance le courant dans la bobine?

**Rép.** 6.376 A,  $1.6 \times 10^{-21}$  A.

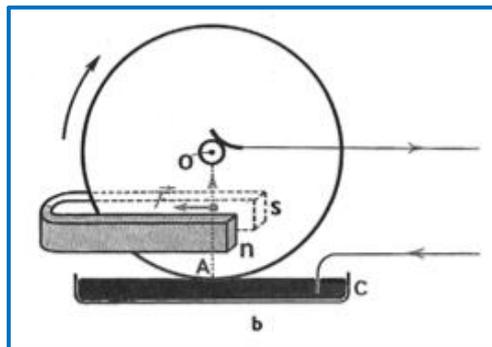
**Exercice 4**

Des électrons ont été accélérés par une tension de 1200 V et forment un faisceau. Sous l'influence d'un champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire à ce faisceau, leur trajectoire présente un rayon de courbure de 10 cm. Déterminez l'intensité  $B$  de l'induction magnétique.

**Rép.**  $1.17 \times 10^{-3}$  T.

**Exercice 5**

Le rayon AO d'une roue de Barlow vaut 10 cm. Il est supposé situé tout entier dans un champ magnétique uniforme, normal à ce rayon, et d'induction  $B=0.02$  T. Sachant que la roue fait 90 tours par minute et que la puissance développée par la force électromagnétique  $\vec{F}$  qui fait tourner la roue vaut  $2.4 \times 10^{-3}$  W, calculez l'intensité du courant qui alimente la roue et la grandeur  $F$  de la force électromagnétique appliquée au rayon AO.



**Rép.** 2.552 A,  $5.09 \times 10^{-3}$  N

# SOMMAIRE

## Chapitre I Rappels mathématiques

1. Introduction	1
2. Eléments de longueur, de surface, de volume dans des systèmes de coordonnées Cartésiennes, Cylindriques, Sphériques	3
2.1 Coordonnées cartésiennes	3
2.1.1. Élément de longueur	4
2.1.2. Élément de surface	4
2.1.3. Élément de volume.	5
2.2 Coordonnées cylindriques	5
2.2.1. Élément de longueur	6
2.2.2. Élément de surface	6
2.2.3. Élément de volume.	6
2.3. Coordonnées sphériques	6
2.3.1. Élément de longueur	6
2.3.2. Élément de surface	7
2.3.3. Élément de volume.	7
3- Dérivées	7
3.1 Coordonnées cartésiennes	8
3.2 Coordonnées cylindriques	8
3.3 Coordonnées sphériques	10
4. Intégrales multiples	10
4.1 Intégrale simple	10
4.1.1. Définition de l'intégrale	10
4.1.2. Calcul d'intégrales	11
4.1.3. Circulation d'un champ de vecteurs	11
4.2. Intégrales double	12
4.3. Intégrales triples	14
5. Champ scalaires et Champ vectoriel	14
5.1. Champ de scalaires	14
5.2. Champ vectoriel	14
6. Les principaux opérateurs et leurs propriétés	15
6.1. Gradient $\vec{\nabla} f(x, y, z)$	15
6.1.1. Expression en coordonnées cartésiennes:	15
6.1.2. Expression en coordonnées cylindriques	16
6.1.3. Expression en coordonnées sphériques	16
6.2. Divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	16
6.1.1. Expression en coordonnées cartésiennes	16
6.1.2. Expression en coordonnées cylindriques	17
6.1.3. Expression en coordonnées sphériques	17
6.3. Rotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$	17
6.1.1. Expression en coordonnées cartésiennes	17
6.1.2. Expression en coordonnées cylindriques	18
6.1.3. Expression en coordonnées sphériques	18
7. Théorèmes fondamentaux	18
7.1. Théorème de Stokes	18
7.2. Théorème de Green- Ostrogradsky	18

## Chapitre II Electrostatique

1. Introduction	20
2. Notions fondamentales	20
2.1. Expériences d'électrisation	20
2.1.1. Electrisation par frottement (triboélectricité)	20
2.1.2. Electrisation par contact	21
2.1.3. Electrisation par influence	22
2.2. Charges électriques	22
2.2.1. Les électrons	23
2.2.2. Les protons	23
2.2.3. Unité de charge électrique:	23
2.3. Quantification de la charge électrique.	23
2.4. Principe de la conservation de la charge électrique	23
2.5. Conducteurs et isolants	24
2.6. L'électrisation et la constitution de la matière	24
2.6.1. Atome	24
2.6.2. Molécule:	24
2.6.3. Corps pur	24
2.6.4. La matière	24
Exercices corrigés	24
3. La force électrique	26
3.1. Loi de Coulomb	26
3.2. Principe de la superposition	28
Exercices corrigés	30
4. Le champ électrostatique:	33
4.1. Notion de champ électrique	33
4.2. Définition du vecteur champ électrique	33
4.3. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	35
4.4. Champ électrique créé par un ensemble charges ponctuelles	35
4.5. Exemples	36
4.5.1. Champ électrique créé par deux charges ponctuelles	36
4.5.2. Champ électrique créé par quatre charges ponctuelles	36
4.6. Théorème de superposition	37
Exercice corrigés	37
4.7. Champ électrique créé par une distribution continue de charge	42
4.8. Lignes ou spectre de champ	43
4.8.1. Propriétés des lignes de champ	43
4.8.2. Exemples de spectres électriques	44
4.9. Champ créé par un condensateur chargé	47
Exercices corrigés	47
5. Potentiel électrique	54
5.1. Potentiel créé par un système de N charges	54
5.2. Relation entre potentiel et champ électrique	54
5.3. Potentiel créé par N charges ponctuelles:	54
5.4. Travail d'une force électrique	55
5.5. Energie potentielle	55
Exercices corrigés	55
5.6. Potentiel créé par une distribution continue:	65
5.7. Propriétés du champ et du potentiel électriques pour une distribution de charges continues	65

5.8. Circulation du champ électrique	66
5.9. Invariances et symétrie du champ électrostatique:	67
5.9.1. Invariances	67
5.9.2. Symétrie et antisymétrie plane:	68
5.10. Surface équipotentielle	68
5.11. Energie d'une distribution continue de charges	70
5.12. Applications	71
5.12.1. Distributions linéiques	71
5.12.1.1. Droite uniformément chargée	71
5.12.1.2. Segment uniformément chargé	73
5.12.1.3. Cercle uniformément chargé	75
5.9.3. Distributions surfaciques	77
5.9.3.1. Plan uniformément chargé	77
5.9.3.2. Disque uniformément chargé	78
5.9.3.3. Sphère uniformément chargée	81
5.9.4. Distributions volumiques	82
5.9.4.1. Boule uniformément chargée	82
Exercice corrigés	85
6. Le dipôle électrique	94
6.1 Définition	94
6.2. Moment dipolaire	94
6.3. Potentiel créé par un dipôle	95
6.4. Champ électrique créé par le dipôle	96
6.5. Les lignes de champ et équipotentiellés:	97
6.5.1. Les lignes de champ	97
6.5.2. Les surfaces équipotentiellés	98
6.5.3. Tracé du diagramme électrique	99
6.6. L'énergie potentielle du dipôle	99
6.7. Mouvement du dipôle dans un champ uniforme	100
Exercices corrigés	101
7. Flux du champ électrique.	105
7.1. Notion d'angle solide	105
7.2. Théorème de Gauss	107
7.3. Applications	109
7.3.1. Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé	109
7.3.2. Champ créé par une boule uniformément chargée	110
Exercices corrigés	111
8. Conducteur en équilibre	115
8.1. Définition	115
8.2. Intérieur d'un conducteur en équilibre	115
8.3. Surface d'un conducteur en équilibre	116
8.4 Calcul du champ électrique à proximité immédiate d'un conducteur en équilibre	117
8.4.1. Théorème de Coulomb	117
8.5. Calcul du champ électrique sur la surface même d'un conducteur en équilibre	118
8.6. Pression électrostatique	120
8.7 Propriétés des pointes	120
8.8. - Phénomènes d'influence entre conducteurs	122
8.8.1. Influence partielle	122
8.8.2. Influence totale	123
8.9. Capacité d'un conducteur seul	123

8.10. Énergie potentielle d'un conducteur chargé	124
8.11. Condensateurs	124
8.11.1. Introduction	124
8.11.2. Schéma électrique	125
8.11.3. Capacité d'un condensateur	125
8.12. Associations de condensateurs	129
8.13 Energie électrique emmagasinée par un condensateur	131
Exercices corrigés	131
<b>Chapitre III Electrocinétique</b>	
1. Introduction	139
2. Courant électrique continu	139
2.1 Vecteur densité de courant	140
2.2. Intensité de courant	140
3. La loi d'ohm	141
3.1. Résistance d'un fil conducteur cylindrique	142
4. Effet de Joule	143
5. Groupement de résistances	144
5.1. Association en série de résistances	144
5.2. Association en parallèle de résistances	144
6. Les Circuits électriques	144
6.1. Lois de Kirchhoff	145
6.1.1 Loi des nœuds (conservation de la charge)	145
6.1.2. Loi des mailles	146
Exercices corrigés	147
<b>Chapitre IV Electromagnétisme</b>	
1. Introduction	153
2. Phénomènes fondamentaux	153
2.1. Aimants naturels	153
2.2. Aimants artificiels	153
2.3. Propriétés magnétiques des substances	154
2.4. Actions naturelles des poles	154
3. Définition d'un champ magnétique	154
3.1. Description du champ magnétique	154
3.2. Caractérisation du champ magnétostatique	155
3.3. Ordres de grandeur	156
3.4. Spectre magnétique d'un aimant	156
4. Le champ magnétique crée par un courant:	157
4.1. Champ magnétique créé au voisinage d'un fil rectiligne	157
4.1.1. Spectre magnétique	157
4.2. Champ magnétique créé au voisinage d'une bobine	159
4.3. Champ magnétique créé au voisinage d'un solénoïde	160
5. Champ magnétique créé par une charge en mouvement	160
6. Forces magnétiques	161
6.1. Force de Lorentz	161
6.2. Représentation vectoriel de la force de Lorentz	162
7. Loi de Laplace	163
8. Loi de Faraday	164
8.1. Flux magnétique	164
8.2. Induction magnétique	165
9. Dipôle magnétique	166
9.1. Moment magnétique et dipôle magnétique	166

9.1.1. Surface orientée	166
9.1.2. Moment magnétique	166
9.1.3. Notion de dipôle et approximation dipolaire	167
9.1.4. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique	167
10. Aimantation de la matière	168
10.1. Le spin des électrons	168
10.2. Spins et magnétisme macroscopique	169
10.3. Trois types de matériaux	169
10.3.1. Matériau diamagnétique	169
10.3.2. Matériau paramagnétique	169
10.3.3. Matériau ferromagnétique	169
Exercices corrigés	169

## Référence:

- [1] Physique 2 Electricité et magnétisme, Harris Benson, éditions de Boeck
- [2] Physique Générale, Electricité et magnétisme, Douglas Giancoli, éditions de Boeck
- [3] Electrostatique et électrocinétique Émile Amzallag – Joseph Cipriani – Jocelyne Ben Aim– Norbert Piccoli Edition2
- [4] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli "La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique" 2ième Edition, Edi-Science, 2006.
- [5] A. Fizazi, " Electricité et Magnétisme", OPU, 2012.

-