République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Faculté de Physique
Département de Physique Energétique

Cours et Exercices
Mécanique du point matériel

Réalisé par :
Dr Torrichi Mohamed
Dr Belfar Abbas

2017-2018

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Introduction

Ce polycopie regroupe un recueil de cours et exercices sur la mécanique du point matériel, il est destiné aux étudiants de la première année LMD des sciences et matériaux (SM), et sciences et techniques (ST), il peut servir comme un support de cours aux étudiants. Le module de mécanique du point matériel est un cours que nous assurons depuis une vingtaines d'années à la faculté de Physique de l'université d'Oran des sciences et de la technologie (Mohamed Boudiaf). Il comprend Trois grandes parties : un rappel mathématique, la cinématique du point Matériel, la dynamique du point matériel et, travail et énergie.

La première partie traite un calcul dimensionnel, un calcul d'incertitude et une analyse vectorielle sur les grandeurs vectorielles, les opérateurs vectoriels. La deuxième partie traite La cinématique du point matériel (une étude sur les vecteurs positions, les vecteurs vitesses et les vecteurs accélérations en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et les mouvements relatifs). Elle comprend aussi. La deuxième partie est consacrée à la dynamique du point matériel. Elle traite le principe d'inertie, les référentiels galiléens, la notion de masse, de la quantité de mouvement et de force, les forces fondamentales et enfin le théorème du moment cinétique. La troisième partie est consacrée à l'étude des notions de travail et énergie (l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique). A la fin de chaque partie se trouve une évaluation regroupant plusieurs exercices proposés et corrigés.

Auteurs :

Dr Mohamed TORRICHI
Maitre de conférences
Email : torrichi@yahoo.fr
Dr Abbas BELFAR
Maitres de conférences

Département de Physiques Energétiques

Faculté de Physique
Université d'Oran des sciences et de la technologie
Mohamed Boudiaf
(U.S.T.O)

Première partie

Rappels mathématiques

Chapitre 1

Calcul dimensionnel

1.1 Grandeur physique

Une grandeur physique est un paramètre mesurable qui sert à définir un état, un objet. Par exemple, la longueur, la température, l'énergie, la vitesse, la pression, une force comme le poids), l'inertie (masse), la quantité de matière (nombre de moles) sont des grandeurs physiques. Une mesure physique exprime la valeur d'une grandeur physique par son rapport avec une grandeur constante de même espèce prise comme unité de mesure de référence (étalon ou unité).

1.2 Système de mesure

On distingue deux systèmes de mesures :

- Le système international d'unité (SI ou MKSA) ou la longueur (l) se mesure en metre, la masse (m) en kilogramme, le temps (t) en seconde et l'intensité du courant (i) en en ampere.
- Le système d'unité CGSA. ou la longueur (l) se mesure en centimetre, la masse (m) en gramme, le temps (t) en seconde et l'intensité du courant (i) en en ampere.

Le Système International d'unités a pour objet une meilleure uniformité, donc une meilleure compréhension mutuelle dans l'usage général. Quelles que soient ces unités, il est important de respecter les symboles et leur représentation conformes aux recommandations internationales en vigueur. Le système SI est un système cohérent d'unités qui comporte sept unités de base. Elles doivent être considérées comme indépendantes au point de vue dimensionnel. Les grandeurs physiques et leurs unités de base dans le système international (SI) sont données par les tableaux suivant :

1.3 Dimension

L'analyse dimensionnelle est une méthode pratique permettant de vérifier l'homogénéité d'une formule physique à travers ses équations aux dimensions, c'est-à-dire la décomposition des grandeurs physiques qu'elle met en jeu en un produit de grandeurs de

TABLE 1.1 – Unites de bases du SI

Grandeur	Nom	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Température thermodynamique	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

base : longueur, durée, masse, intensité électrique, etc., irréductibles les unes aux autres.

L'analyse dimensionnelle repose sur les règles suivantes :

– On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.
– Dans une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente), le nombre est forcement sans dimension.
– La dimension du produit de deux grandeurs est égale au produit de leurs dimensions.
– On ne peut comparer ou ajouter que des grandeurs ayant la même dimension, on peut ajouter une longueur à une autre, mais on ne peut pas dire qu'elle est supérieure, ou inférieure, à une masse.

En physique fondamentale, l'analyse dimensionnelle permet de déterminer a priori la forme d'une équation à partir d'hypothèses sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique, avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses. Dans une formule physique, les variables présentes ne sont pas que des nombres, mais représentent des grandeurs physiques.

Analyse dimensionnelle permet de :
– Trouver les unités des grandeurs physiques dans le système international (MKSA) ou dans le système CGSA. Vérifier l'homogénéité des équations physiques. Une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension.
– Trouver les relations physiques exactes.

LŠéquation aux dimensions d'une formule physique est une équation de grandeurs, qui a la même forme que la formule physique initiale, mais où ne sont pris en compte ni les nombres, ni les constantes numériques sans dimension : uniquement les grandeurs. Nous représentons la dimension d'une grandeur physique par L, M et T. en effet pour les quatre grandeurs physiques importantes, nous avons :

– La longueur crochet $[l]$=L
– La masse crochet $[m]$=M
– Le temps crochet [t]=T
– La température $[\theta]$=K
– Le courant électrique $[i]$=I

A partir des dimensions citées plus haut, nous pourons trouver les dimensions de toutes les autres grandeurs physiques, en voici quelques exemples.

TABLE 1.2 – Dimension des grandeurs physiques

Grandeur physique	Symbole	Formule	Dimension	Unité en MKSA	Unité en CGSA
La fréquence	f	$\frac{1}{t}$	T^{-1}	s^{-1} ou Hertz	s^{-1} ou Hertz
La vitesse	v	$\frac{x}{t}$	$L.T^{-1}$	$m.s^{-1}$	$cm.s^{-1}$
L'accélération	γ	$\frac{v}{t}$	$L.T^{-2}$	$m.s^{-2}$	$cm.s^{-2}$
La force	F	$m\gamma$	$M.L.T^{-2}$	$Kg.m.s^{-2}$ ou Newton	$g.cm.s^{-2}$
Le travail	W	Fd	$M.L^2.T^{-2}$	$Kg.m^2.s^{-2}$ ou Joule	$g.cm^2.s^{-2}$

1.4 Exercices

Exercice 1

Vérifiez la cohérence dimensionnelle des équations suivantes :

1. La Relation d'Einstein
$$E = mc^2$$
2. L'énergie potentielle
$$E = mgh$$
Où E, m, g et h sont respectivement une énergie, une masse, une acceleration et une hauteur.

Exercice 2

Déterminez la dimension physique des constantes physiques intervenant dans les relations suivantes :

1. Loi d'attraction gravitationnelle
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
2. La période des oscillations d'un pendule simples
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
Où F, r, m et k sont respectivement une force, une distance et une masse.

Exercice 3

La pression exercée sur une surface solide est donnée par

$$P = \frac{\mid \overrightarrow{F} \mid}{S}$$

Où $\mid \overrightarrow{F} \mid$ est le module de la force et S la surface du solide. Par une analyse dimensionnelle, trouver la dimension de la pression.

Exercice 4

1. La pression exercée sur une surface solide est donnée par

$$P = \frac{F}{S}$$

   Où F est la force et S la surface du solide. Par une analyse dimensionnelle, trouver la dimension de la pression.

2. La pression hydrostatique sous une colonne de fluide de hauteur h et de masse volumique ρ est donnée par :

$$P = \rho^{\alpha} g^{\beta} h^{\gamma}$$

   Trouver les valeurs de α, β et γ par une analyse dimensionnelle. En déduire lŠex-pression exacte de la pression.

Exercice 5

On donne la masse volumique ρ dŠun cylindre de masse m, de rayon R et de longueur l par la relation :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi . l^y . R^2}$$

1. En utilisant les dimensions, trouvez les valeurs des constantes x et y.
2. En déduire lŠexpression exacte de la masse volumique.

Exercice 6

L'analyse dimensionnelle a permis à Geoffrey Ingram Taylor d'estimer en 1950 l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique, alors que cette information était classée top secret. Il lui a suffit pour cela d'observer sur un film d'explosion, imprudemment rendu public par les militaires américains, que la dilatation du champignon atomique suivait la loi expérimentale de proportionnalité :

$$r = K.E^a.\rho^b.t^c$$

Où K est une constant sans dimensions. Le physicien Taylor suppose alors a priori que le processus d'expansion de la sphère de gaz dépend au minimum des paramètres suivants : Le temps t, l'énergie E dégagée par l'explosion, la masse volumique de l'air ρ et le rayon atomique de la sphère r. L'analyse dimensionnelle le conduit alors au rayon de la sphère de gaz à l'instant t. Retrouver la loi de Taylor qui donne lŠexpression exacte de E.

Exercice 7

On exprime la vitesse d'un corps par deux équations différentes.

1. $$v = A_1t^3 - B_1t$$
2. $$v = A_2t^2 - B_2t + \sqrt{C_2}$$

Où t représente le temps. Donnez les unités dans le système international (S.I) des coefficients A_1, B_1, A_2, B_2 et CA_2.

Exercice 8

L'équation de Vander-walls donne la pression dans un gaz reel par la relation suivante :

$$c = (P + \frac{a}{V^2})(V - b)$$

Où P est la pression et V est le volume. Que represente physiquement les constantes a, b et c.

Exercice 9

Par une analyse dimensionnelle, déterminer les constantes α et β de l'expression de la vitesse :

$$v = \sqrt{g^\alpha l^\beta}$$

Où g est une accélération et l une longueur.

Exercice 10

la force de viscosité $\mid \overrightarrow{F_f} \mid$ est :

$$\mid \overrightarrow{F_f} \mid = 6\pi R\eta \mid \overrightarrow{v} \mid$$

Où $\mid \overrightarrow{v} \mid$ et R sont respectivement le module de la vitesse et R est un rayon. Par une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension de la constante η et donner son unité dans S.I

1.5 Corrigés

Exercice 1

1. La Relation d'Einstein :
$$E = mc^2$$
se transforme en une équation dimensionnelle et ceci en lui introduisant les crochets comme suit :

$$[E] = [mc^2]$$

Ou encore,

$$[E] = [m][c]^2 \tag{1.1}$$

Le premier membre de l'équation 1-1 représente la dimension de l'énergie. A partir de la relation physique de l'énergie cinétique

$$E = E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

qui se transforme en une équation dimensionnelle comme,

$$[E_c] = [\frac{1}{2}][m][v]^2$$

Les dimensions de la masse m et de la vitesse v sont respectivement

$$\begin{cases} [\mathrm{m}] & = & M \\ [\mathrm{v}] & = & L.T^{-1} \end{cases}$$

D'ou, la dimension de l'énergie

$$[E] = M.L^2.T^{-2} \tag{1.2}$$

D'autre part, le deuxième membre de l'équation (1-1) s'écrit :

$$[m][c]^2 = M.(L.T)^2 = ML^2T^{-2} \tag{1.3}$$

Nous remarquons que les équations (1-2) et (1-3) présentent les mêmes dimensions, d'ou l'homogénéité de l'équation (1-1).

2. La relation de l'énergie potentielle :

$$E = mgh \tag{1.4}$$

s'écrtit en analyse dimensionnelle sous la forme :

$$[E] = [mgh]$$

et ceci en introduisant les crochets dans les deux membres de l'équation
Ou encore,

$$[E] = [m][g][h]$$

Les dimensions de la masse m, l'accélération de la pesanteur g et la hauteur h sont respectivement :

$$\begin{cases} [\mathrm{m}] & = & M \\ [\mathrm{g}] & = & L.T^{-2} \\ [\mathrm{h}] & = & L \end{cases}$$

Il vient,

$$[m][g][h] = M.L^{-2}.T^{-2} \tag{1.5}$$

D'après la première question, la dimension de l'énergie est identique à celui de l'équation (1-5). L'équation (1-4) est homogène.

Exercice 2

1. Nous tirons d'abord la constante G de l'équation suivante,

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.6}$$

il vient :

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2} \tag{1.7}$$

En introduisant les crochets dans les deux membres de l'équation (1-5)

$$[G] = \frac{[F][r]^2]}{[m_1][m_2]}$$

Nous obtenons la dimension de G :

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

2. Nous elevons d'abord au carrée les deux membres de l'équation suivante

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.8}$$

Il vient :

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \tag{1.9}$$

Nous tirons ensuite la constante k puis nous la transformons en une équation dimensionnelle, il vient :

$$[k] = [4][\pi]^2\frac{[m]}{[T]^2}$$

La dimension de k est donc,

$$[k] = MT^{-2}$$

Exercice 3

Transformant la relation de la pression P sur une surface solide S en une équation dimensionnelle et ceci en introduisant les crochets dans les deux membres son équation :

$$[P] = \frac{[F]}{[S]}$$

Sachant que les dimensions de la force F et de la surface S sont respectivement : :

$$[F] = M.L.T^{-2}$$

et

$$[S] = L^2$$

Nous obtenons la dimension de la pression :

$$[P] = M.L^{-1}.T^{-2}$$

Exercice 4

Nous supposons que l'équation qui donne la pression hydrostatique sous une colonne de fluide de hauteur h et de masse volumique

$$P = \rho^{\alpha} g^{\beta} h^{\gamma} \tag{1.10}$$

est homogène, c'est à dire :

$$[P] = [\rho^{\alpha} g^{\beta} h^{\gamma}] \tag{1.11}$$

Calculons séparément les dimensions des deux membres de l'équation (1-11)

$$[P] = ML^{-1}T^{-2} \tag{1.12}$$

$$[\rho^{\alpha} g^{\beta} h^{\gamma}] = M^{\alpha} L^{-3\alpha+\beta+\gamma} T^{-2\beta} \tag{1.13}$$

L'égalité des équations dimensionnelles impose

$$ML^{-1}T^{-2} = M^{\alpha} L^{-3\alpha+\beta+\gamma} T^{-2\beta}$$

Et par identification, nous obtenons un systeme d'équation qui admet pour solution :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$

L'expression exacte de la pression est donc,

$$P = \rho g h$$

Exercice 5

Soit la masse volumique ρ du cylindre de masse m, de rayon R et de longueur l donné par la relation :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi . l^y . R^2} \tag{1.14}$$

1. On supposera que l'équation (1-14) est homogène c'est à dire :

$$[\rho] = [\frac{m^x}{\pi . l^y . R^2}]$$

Les dimensions des deux membres de l'équation s'écrivent respectivement :

$$[\rho] = M.L^{-3}$$

$$[\frac{m^x}{\pi l^y . R^2}] = M^{-x}.L^{-y-2}$$

Légalité des équations aux dimensions entraine

$$[\frac{m^x}{\pi l^y.R^2}] = M^{-x}.L^{-y-2} \tag{1.15}$$

La résolution de ce système d'équation obtenu par identification des exposants des equations (1-15) conduit à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

L'expression exacte de la masse volumique est donc,

$$\rho = \frac{m}{\pi l R^2}$$

Exercice 6

L'analyse dimensionnelle réécrit l'équation de Geoffrey Ingram Taylor :

$$r = K.E^a.\rho^b.t^c$$

Et si nous tirons l'énergie E

$$E^a = \frac{r}{K.\rho^b.t^c}$$

il vient,

$$[E^a] = [\frac{r}{K.\rho^b.t^c}]$$

Les dimensions des deux membres de l'équation s'écrivent respectivement :

$$[E^a] = M^a.L^{-2a}.T^{-2a}$$

$$[\frac{r}{K.\rho^b.t^c}] = M^{-b}L^{3b+1}.T^{-c}$$

Donnant ainsi par identification des deux membres, le système d'équation suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -b \\ -2a & = & 3b+1 \\ -2a & = & -c \end{array}\right.$$

La résolution de ce système d'équation conduit à

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

La loi de Taylor qui donne l'expression exacte de E sera finalement :

$$E = \frac{r.\rho^b}{Kt^2}$$

Exercice 7

Soient les équations :

$$v = A_1 t^3 - B_1 t$$

$$v = A_2 t^2 - B_2 t + \sqrt{C_2}$$

Elles deviennent :

$$[v] = [A_1 t^3 - B_1 t] \tag{1.16}$$

$$[v] = [A_2 t^2 - B_2 t + \sqrt{C_2}] \tag{1.17}$$

L'analyse dimensionnelle repose sur la règle suivante : On ne peut additionner ou soustraire que des termes ayant la même dimension, c'est à dire :

$$[A + B] = [A] = [B] \tag{1.18}$$

$$[A - B] = [A] = [B] \tag{1.19}$$

Nous aurons donc,

$$[A_1 t^3 - B_1 t] = [A_1 t^3] = [B_1 t] \tag{1.20}$$

$$[A_2 t^2 - B_2 t + \sqrt{C_2}] = [A_2 t^2] = [B_2 t] = [\sqrt{C_2}] \tag{1.21}$$

Par comparaison entre les équations (1-17) et (1-19), il vient :

$$[v] = [A_1 t^3] = [B_1 t] \tag{1.22}$$

et entre les équations (1-18) et (1-20), il vient :

$$[v] = [A_2 t^2] = [B_2 t] = [\sqrt{C_2}] \tag{1.23}$$

Ou encore,

$$[A_1] = \frac{[v]}{[t^3]} = L.T^{-4}$$

$$[B_1] = \frac{[v]}{[t]} = LT^{-2}$$

$$[A_2] = \frac{[v]}{[t^2]} = LT^{-3}$$

$$[B_2] = \frac{[v]}{[t]} = LT^{-2}$$

$$[\sqrt{C_2}] = [v]$$

$$[C_2] = [v]^2 = L^2.T^{-2}$$

Les unités des coefficients sont alors, A_1 (m.s^{-4}), B_1 (m.s^{-2}), A_2 (m.s^{-3}), B_2 (m.s^{-2}) et C_2 (m^2.s^{-2})

Exercice 8

La pression dans un gaz réel est donnée par l'équation de Vander-walls :

$$c = (P + \frac{a}{V^2})(V - b)$$

qui s'écrit par l'analyse dimensionnelle,

$$[c] = [(P + \frac{a}{V^2})(V - b)]$$

D'après la règle de la somme dans l'analyse dimensionnelle definie par les conditions (1-19) et (1-20), nous écrivons :

$$[P + \frac{a}{V^2}] = [P] = [\frac{a}{V^2}]$$

et

$$[V - b] = [V] = [b]$$

Et qui donne :

$$[a] = [P][V^2] = ML^5T^{-2}$$

$$[b] = [V] = L^3$$

Nous pouvons réécrire la dimension de a comme :

$$[a] = ML^5T^{-2} = (ML^2T^{-2})L^3$$

Ce qui montre physiquement que la constante a est une énergie multiplie par un volume. Par contre le coefficient b présente un volume.

Exercice 9

Soit

$$v = \sqrt{g^{\alpha} l^{\beta}}$$

son élévation au carrée donne :

$$v^2 = g^{\alpha}.l^{\beta}$$

Elle se transforme ensuite par analyse dimensionnelle respectivement en,

$$[v^2] = [g^{\alpha}.[l^{\beta}]$$

et

$$L^2.T^{-2} = L^{\alpha+\beta}.T^{-2\alpha}$$

L'identification des deux membres de l'équation précédente conduit a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 2 \\ -2\alpha &= -2 \end{cases}$$

La resolution de ce systeme d'équation conduit aux valeurs de α et β :

$$\begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= 1 \end{cases}$$

Exercice 10

A partir de la force de viscosité $\mid \overrightarrow{F_f} \mid$:

$$\mid \overrightarrow{F_f} \mid = 6\pi R\eta \mid \overrightarrow{v} \mid$$

Nous obtenons la constante η :

$$\eta = \frac{\mid \overrightarrow{F_f} \mid}{6\pi R \mid \overrightarrow{v} \mid}$$

Et sa relation dimensionnelle,

$$[\eta] = [\frac{\mid \overrightarrow{F_f} \mid}{6\pi R \mid \overrightarrow{v} \mid}]$$

Enfin,

$$[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$$

L'unité de la constante η dans le système international (S.I) est donc, $Kg.m^{-1}.s^{-1} = Poiseuille(Pi)$

Chapitre 2

Calcul d'incertitude

2.1 Incertitude absolue et relative

Les mesures réalisées en Physique sont toujours entachées d'erreurs. L'erreur de la mesure est la différence entre la valeur exacte recherchée et celle obtenue en réalité. On distingue différents types d'erreurs :

- Les erreurs systématiques : Elles proviennent soit du procédé de mesure, soit de l'appareil de mesure. L'erreur systématique est constante en grandeur et en signe. Il est ainsi possible d'apporter au résultat de la mesure une correction convenable.
- Les erreurs accidentelles :Ces erreurs sont essentiellement variables en grandeur et en signe. On peut réduire leurs conséquences en multipliant le nombre de mesures et en prenant comme valeur numérique de la grandeur, la moyenne arithmétique des différents résultats
- Les erreurs sur les constantes.

Les mesures X sont caractérisées par :
- Une incertitude absolue sur X notée (ΔX) qui est commise sur la mesure la grandeur X. Elle est la différence entre la valeur approchée $X_{approch}$ et la valeur exacte X_{exacte}, soit :
$$\Delta X = X_{approch} - X_{exacte} \tag{2.1}$$
Généralement elle est définie par la relation :
$$\Delta X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |X_i - X_{moy}| + \Delta X_{chronometre} \tag{2.2}$$
Où N est le nombre de mesure effectué pour une même valeur X et $\Delta X_{chronometre}$ est l'erreure commise sur la lecture ($\Delta X_{chronometre} = 10^{-4}$) .
- Une incertitude relative ($\frac{\Delta X}{X}$) est égale au quotient de incertitude absolue par la valeur exacte X.

L'incertitude relative ou absolue d'une grandeur physique X associé aux paramétres a, b et c ($X = f(a, b, c)$) aura les formes suivantes :
- $X = a + b + c$
$$\Delta X = \Delta a + \Delta b + \Delta c \tag{2.3}$$

– $X = a.b.c$

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \tag{2.4}$$

– $X = a.b/c$

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \tag{2.5}$$

– $X = \alpha a^{\beta}$

$$\frac{\Delta X}{X} = \beta \frac{\Delta a}{a} \tag{2.6}$$

Pour calculer l'incertitude relative ou absolue d'une grandeur physique X, nous utilisons une methode dite méthode du logarithme.

2.2 Différentielle d'une fonction

Considérons une fonction à plusieurs f variables x, y et z qu'on notera par f(x,y,z). Rappelons que la différentielle de cette fonction, notée $df(x, y, z)$, est donnée par la relation :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{2.7}$$

Où les ∂ dénotent les dérivées partielles de f par rapport à chacune des variables x, y et z, calculées en ces mêmes points. Par exemple si :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.8}$$

Nous avons alors,

$$df(x, y, z) = 2xdx + 2ydy + 2zdz \tag{2.9}$$

2.3 Méthode du logarithme

La méthode du logarithme permet de calculer facilement les incertitudes relatives. Elle comprend trois étapes.

- Première étape : Nous introduisons le logarithme népérien aux deux membres de l'équation physique.
- Deuxième étape : Nous différencions la relation logarithmique obtenue.
- Troisième étape : Nous remplaçons le symbole d par Δ et le signe négatif par le signe positif.

2.4 Exercices

Exercice 1

Calculer la différentielle de la fonction suivante :

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Exercice 2

On donne la masse volumique ρ d'un cylindre de masse m, de rayon R et de longueur l par la relation :

$$g(g_0, h, R) = \frac{g_0}{(1 + \frac{h}{R})^2}$$

Où g et g0 désignent une accélération. h et R sont des distances. Calculer l'incertitude relative sur g en fonction de Δg_0, ΔR et Δh.

Exercice 3

L'énergie d'un mobile en mécanique relativiste est donnée par la relation suivante :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

Où m_0 est la masse du mobile au repos, v sa vitesse et c la vitesse de la lumière. Sachant que : m_0= (1.000 $\pm$ 0.001)kg, c=(2997280$\pm$0.8)km/s et v=(200000$\pm$0.8)km/s. Calculer l'incertitude relative $\frac{\Delta E}{E}$.

Exercice 4

L'équation de Vander-walls donne la pression dans un gaz reel par la relation suivante :

$$c = (P + \frac{a}{V^2})(V - b)$$

Où P est la pression et V est le volume. Calculer l'incertitude relative sur c en fonction de ΔP, ΔV, Δa et Δb.

2.5 Corrigés

Exercice 1

Pour calculer la différentielle de la fonction suivante :

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2} \tag{2.10}$$

Nous utiliserons la loi :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Nous calculerons d'abord les dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

La différentielle de la fonction f(x,y) est donc,

$$df(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dx - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}dy$$

Exercice 2

Soit la relation :

$$g(g_0,h,R) = \frac{g_0}{(1+\frac{h}{R})^2}$$

La méthode du logarithme permet de calculer les incertitudes relatives l'incertitude relative sur g en fonction de Δg_0, ΔR et Δh. Elle comprend trois étapes.

- Première étape : Nous introduisons le logarithme népérien aux deux membres de l'équation précédente.

$$\ln g(g_0,h,R) = \ln\frac{g_0}{(1+\frac{h}{R})^2}$$

Les propriétés du logarithme réduit la dernière relation en :

$$\ln g = \ln g_0 - 2\ln(1+\frac{h}{R})$$

- Deuxième étape : Nous différencions la relation logarithmique obtenue, comme suit

$$\frac{dg}{g} = \frac{dg_0}{g_0} - 2\frac{d(1+\frac{h}{R})}{1+\frac{h}{R}} \qquad (2.11)$$

Nous posons :

$$f(h,R) = 1+\frac{h}{R}$$

La différentielle de f(h,R) donne :

$$df(h,R) = \frac{1}{R}dh - \frac{h}{R^2}dR \qquad (2.12)$$

Nous substituons la relation (2-12) dans (2-11), il vient :

$$\frac{dg}{g} = \frac{dg_0}{g_0} - 2\frac{dh}{R+h} + 2\frac{hdh}{R^2+Rh} \qquad (2.13)$$

- Troisième étape : Nous remplaçons le symbole d par Δ et le signe négatif par le signe positif dans la relation (2-13). Il vient :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta g_0}{g_0} + \frac{2h}{R+h}\frac{\Delta h}{h} + \frac{Rh}{R^2+Rh}\frac{\Delta R}{R} \qquad (2.14)$$

Exercice 3

L'énergie d'un mobile en mécanique relativiste est donnée par la relation suivante :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Nous introduisons le logarithme népérien aux deux membres de l'équation précédente et les propriétés du logarithme réduit la dernière relation en :

$$\ln E = \ln m_0 + 2 \ln c - \frac{1}{2}(1 + \frac{v^2}{c^2})$$

- Nous différencions la relation logarithmique obtenue, comme suit

$$\frac{dE}{E} = \frac{dm_0}{m_0} + 2\frac{dc}{c} - \frac{1}{2}\frac{d(1 + \frac{v^2}{c^2})}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tag{2.15}$$

Posons :

$$f(v, c) = 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

Et calculons la différentielle de f(v,c) :

$$df(v, c) = \frac{2v}{c^2}dv - \frac{2v^2}{c^3}dc \tag{2.16}$$

Nous substituons la relation (2-16) dans (2-15), il vient :

$$\frac{dE}{E} = \frac{dm_0}{m_0} + 2\frac{dc}{c} - \frac{1}{2}\frac{(\frac{2v}{c^2}dv) - \frac{2v^2}{c^3}dc)}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

- Nous remplaçons le symbole d par Δ et le signe négatif par le signe positif dans la relation xxx. Il vient :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m_0}{m_0} + 2\frac{\Delta c}{c} - \frac{1}{2}\frac{(\frac{2v}{c^2}\Delta v) - \frac{2v^2}{c^3}\Delta c)}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m_0}{m_0} + 2\frac{\Delta c}{c} + \frac{v^2}{c^2 + v^2}\frac{\Delta v}{v} + \frac{v^2}{c^3 + cv^2}\frac{\Delta c}{c}$$

Exercice 4

Soit l'équation de Vander-walls :

$$c = (P + \frac{a}{V^2})(V - b)$$

- Nous introduisons le logarithme népérien aux deux membres de l'équation précédente et les propriétés du logarithme réduit la dernière relation en :

$$\ln c = \ln(P + \frac{a}{V^2}) + \ln(V - b)$$

– Nous différencions la relation logarithmique obtenue, comme suit

$$\frac{dc}{c} = \frac{d(P + \frac{a}{V^2})}{P + \frac{a}{V^2}} + \frac{d(V - b)}{V - b} \tag{2.17}$$

– Posons :

$$f(P, a, v) = (P + \frac{a}{V^2})$$

et,

$$g(V, b) = V - b$$

Et calculons leurs différentielles :

$$df(P, a, v) = dP + \frac{1}{V^2}da - \frac{2a}{V^3}dV$$

$$dg(V, b) = dV - db$$

Nous substituons les différentielles precedentes dans (2-17), il vient :

$$\frac{dc}{c} = \frac{dP + \frac{1}{V^2}da - \frac{2a}{V^3}dV}{P + \frac{a}{V^2}} + \frac{dV - db}{V - b} \tag{2.18}$$

– Nous remplaçons le symbole d par Δ et le signe négatif par le signe positif dans la relation (2-18). Il vient :

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta P + \frac{1}{V^2}\Delta a + \frac{2a}{V^3}\Delta V}{P + \frac{a}{V^2}} + \frac{\Delta V + \Delta b}{\mid V - b \mid}$$

Chapitre 3

Calcul vectoriel

L'analyse vectorielle est une branche des mathématiques qui étudie les champs de scalaires et de vecteurs. Elle est très utilisée physique car plusieurs grandeurs telles que la longueur, la masse et le temps sont caractérises par un nombre et une unité, appelées scalaires. Par contre d'autre grandeurs telles que la vitesse, accélération et la force sont caractérises par une direction et un module, appelées vecteurs.

3.1 Vecteur

Le vecteur est une grandeur physique représenté par un segment de droite, une longueur et un sens. La longueur est caractérisé par le module $\mid \overrightarrow{A} \mid$. Dans un repère orthonormé de coordonné cartésienne, nous désignons par les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ comme vecteurs unitaires montrant la direction des axes du repère. Si A_x, A_y et A_z désignent les composantes du vecteur A, nous écrivons alors le vecteur $\overrightarrow{A}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{A} = A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k} \tag{3.1}$$

et son module est :

$$\mid \overrightarrow{A} \mid = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{3.2}$$

Sa direction est déterminée par les angles (α, β, γ) qu'il fait avec chacun des axes du repère

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{i}}{\mid A \mid} \tag{3.3}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{j}}{\mid A \mid} \tag{3.4}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{k}}{\mid A \mid} \tag{3.5}$$

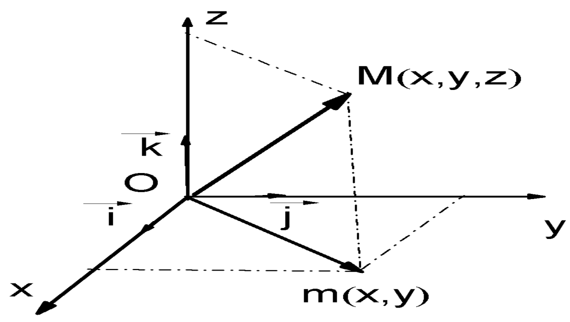

FIGURE 3.1 – La présentation d'un point dans l'espace

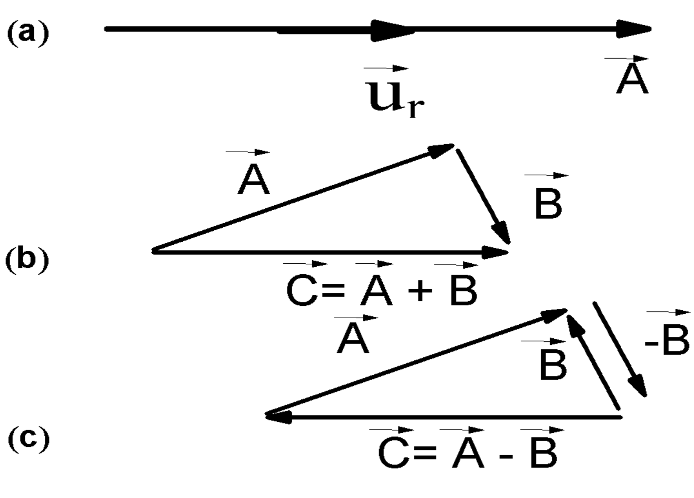

FIGURE 3.2 – Propriétées des vecteurs

3.1.1 Addition de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{A}(A_x,A_y,A_z)$ et $\overrightarrow{B}(B_x,B_y,B_z)$, leur somme $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ est obtenue en formant un triangle, le vecteur $\overrightarrow{C}(C_x,C_y,C_z)$ résultant de cette somme est un coté du triangle formé. $\overrightarrow{C}(C_x{=}A_x{+}B_y,C_y{=}A_y{+}B_y,C_z{=}A_z{+}B_z)$

3.1.2 Soustraction de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{A}(A_x,A_y,A_z)$ et $\overrightarrow{B}(B_x,B_y,B_z)$, leur soustraction $\overrightarrow{A}$-$\overrightarrow{B}$ est obtenue par leurs différences donnant ainsi un autre vecteur $\overrightarrow{C}(C_x{=}A_x\text{-}B_y,C_y{=}A_y\text{-}B_y,C_z{=}A_z\text{-}B_z)$

3.1.3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient un vecteur $\overrightarrow{A}$ et un scalaire s, leur multiplication noté $s\overrightarrow{A}$ de même direction que $\overrightarrow{A}$, son module est s multiplie par le module de $\overrightarrow{A}$.

3.2 Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ est un vecteur qui présente une grandeur égale a l'unité. La longueur de $\overrightarrow{u}$ est caractérisée par un module : $\mid \overrightarrow{u} \mid = 1$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire du vecteur $\overrightarrow{A}$:

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{A}}{\mid A \mid} \tag{3.6}$$

3.3 Le produit scalaire

Le produit scalaire est une multiplication de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$ donnant un scalaire s. On peut le calculer par deux méthodes :

– Méthode analytique :

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = \mid \overrightarrow{A} \mid\mid \overrightarrow{B} \mid \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \tag{3.7}$$

– Méthode cartésienne :

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{3.8}$$

3.3.1 Propriétés du produit scalaire

Si $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}{=}0$ alors $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont perpendiculaires

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{A} \tag{3.9}$$

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}.\overrightarrow{C} \tag{3.10}$$

$$s(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) = s\overrightarrow{A}+s\overrightarrow{B} \tag{3.11}$$

$$s(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}) = (s\overrightarrow{A}).\overrightarrow{B} \tag{3.12}$$

3.4 Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ ou $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B})$ est un vecteur.

– Méthode analytique :

$$\mid \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} \mid = \mid \overrightarrow{A} \mid \mid \overrightarrow{B} \mid \sin(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) \tag{3.13}$$

– Méthode cartésienne :

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \overrightarrow{j} - \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

Le calcul des determinants 2 fois 2 conduit a :

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\overrightarrow{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\overrightarrow{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\overrightarrow{k} \tag{3.14}$$

3.4.1 Propriétées du produit vectoriel

1. $$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{A} \tag{3.15}$$
2. Si
$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \tag{3.16}$$
Alors $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèle.
3. La surface du triangle formée par les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est donnée par la moitie du module du produit vectoriel de ces deux vecteurs.
$$S = \frac{\mid \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} \mid}{2} \tag{3.17}$$

3.5 Operateurs différentiels

Les operateurs différentiels sont des combinaisons de dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace. Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux operateurs différentiels linéaires du premier ordre. Cela signifie qu'ils ne font intervenir que des dérivées partielles (ou différentielles) premières des champs, a la différence, par exemple, du Laplacien qui fait intervenir des dérivées partielles du second ordre.

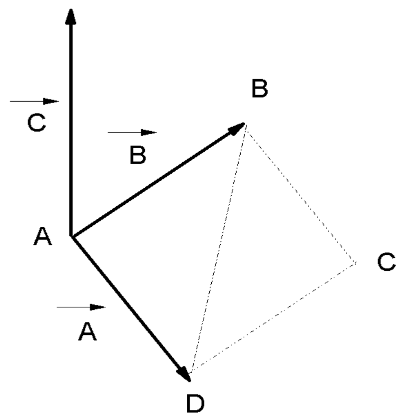

FIGURE 3.3 – La surface du triangle formée par le produit vectoriel

3.5.1 Operateur nabla

C'est un vecteur symbolique, noté $\vec{\nabla}$, qui permet de noter commodément les différents operateurs différentiels. Le vecteur nabla a ainsi pour coordonnées.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{3.18}$$

3.5.2 Gradient

Le gradient est un operateur linéaire qui s'applique à un champ de scalaires et décrit un champ de vecteurs qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace. Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire, et l'intensité de cette variation.

$$\overrightarrow{Grad}f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{3.19}$$

3.5.3 Divergence

La divergence s'applique àăun champ de vecteurs et le transforme en un champ scalaire. La divergence d'un champ de vecteurs exprime sa tendance àăfluer localement hors d'un petit volume entourant le point M est calculée la divergence.

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.20}$$

3.5.4 Rotationnel

Le rotationnel transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs.

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_z \end{vmatrix} \overrightarrow{j} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

Le calcul des determinants 2 fois 2 conduit a :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\overrightarrow{i} - (\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\overrightarrow{k} \tag{3.21}$$

3.5.5 Laplacien

Le plus utilisè des operateurs d'ordre 2 est le Laplacien (deux fois nabala). Le Laplacien d'un champ est égal à la somme des dérivées secondes de ce champ par rapport a chacune des variables. Ainsi, il est défini par

– Le Laplacien vectoriel s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ vectoriel.

$$\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\overrightarrow{i} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\overrightarrow{j} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\overrightarrow{k} \tag{3.22}$$

– Le Laplacien scalaire s'applique àăun champ scalaire et renvoie un champ scalaire.

$$\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.23}$$

Notons enfin que ces différents operateurs (gradient, divergence, rotationnel, Laplacien) changent d'expression en fonction du système de coordonnées employées.

3.6 Exercices

Exercice 1

Soient les vecteurs suivants

$$\overrightarrow{r_1} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r_2} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r_3} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$$

1. Calculer leurs modules.
2. Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}$$

3. Déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ porté par le vecteur

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{r_1} + 2\overrightarrow{r_2}$$

4. Calculer le produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$
5. Calculer les produits $\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})$ et $\overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})$
6. Calculer l'angle compris entre les vecteurs $\overrightarrow{r_2}$ et $\overrightarrow{r_3}$.

Exercice 2

On donne les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A} = 2t\,\overrightarrow{i} + 3t^2\,\overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{B} = e^{2t}\,\overrightarrow{i}$$

Calculer les dérivées, par deux méthode, les produits suivants :

1. $$\frac{d\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}}{dt}$$
2. $$\frac{d\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}}{dt}$$

Exercice 3

On donne les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{v} = \frac{t\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{3\,\overrightarrow{i} - t\,\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$$

Monter que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs unitaires.

Exercice 4

Soit la fonction vectorielle :

$$\vec{r} = \cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j} + e^{-\theta(t)}\,\vec{k}$$

Calculer les vecteurs dérivés :

1. $$\frac{d\vec{r}}{dt}$$
2. $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Exercice 5

Un point M est repéré par le vecteur $\vec{r}$ de module :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Calculer

1. Le module du vecteur $\vec{r}$ ($|\,\vec{r}\,|$).
2. Le gradient du module du vecteur $\vec{r}$ ($\overrightarrow{Grad}\,|\,\vec{r}\,|$).
3. La divergence du vecteur $\vec{r}$ ($div\,\vec{r}$).
4. Le rotationnel du vecteur $\vec{r}$ ($\overrightarrow{rot}\,\vec{r}$)

3.7 Corrigés

Exercice 1

1. Le calcul des modules.

$$\vec{r_1} = \sqrt{14}$$
$$\vec{r_2} = \sqrt{17}$$
$$\vec{r_3} = \sqrt{22}$$

2. Le calcul des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$$\vec{A} = 9\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + 8\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

3. Trouvons le vecteur $\overrightarrow{C}$,

$$\overrightarrow{C} = 8\,\overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j} - 5\,\overrightarrow{k}$$

Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire du vecteur $\overrightarrow{C}$ alors,

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{C}}{\mid \overrightarrow{C} \mid}$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{8}{\sqrt{138}}\overrightarrow{i} + \frac{7}{\sqrt{138}}\overrightarrow{j} - \frac{5}{\sqrt{138}}\overrightarrow{k}$$

4. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ est :

$$\overrightarrow{r_1}.\overrightarrow{r_2} = 6 + 8 + 3 = 17$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ est :
Nous trouvons :

$$\overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{r_2} = 2\,\overrightarrow{i} - 43\,\overrightarrow{j} - 57\,\overrightarrow{k}$$

5. Pour calculer le produit $\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})$, calculons dabord le produit $(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})$. Il vient

$$\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C} = 2\,\overrightarrow{i} - 43\,\overrightarrow{j} - 57\,\overrightarrow{k}$$

Nous calculons ensuite le $\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})$. Nous trouvons :

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}) = -68$$

Pour calculer le produit $\overrightarrow{A}\wedge(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})$, calculons dabord le produit $(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{C})$. Il vient

$$\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}) = -114\,\overrightarrow{i} + 513\,\overrightarrow{j} - 391\,\overrightarrow{k}$$

6. L'angle compris entre les vecteurs $\overrightarrow{r_2}$ et $\overrightarrow{r_3}$ sera calculer par le produit scalaire :

$$\overrightarrow{r_2}.\overrightarrow{r_3} = \mid \overrightarrow{r_2} \mid\mid \overrightarrow{r_3} \mid \cos(\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3})$$

Nous trouverons :

$$\cos(\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3}) =$$

Exercice 2

Soient les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A} = 2t\,\overrightarrow{i} + 3t^2\,\overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{B} = e^{2t}\,\overrightarrow{i}$$

1. calcul de la dérivée du produit $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$. Il y'a deux méthodes pour calculer ces dérivées.

– Nous calculons directement le produit $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 2te^{2t}$$

Puis nous derivons

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 2e^{2t} + 4te^{2t}$$

– Nous utilisons la loi de la derivée :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = \frac{d\overrightarrow{A}}{dt}.\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 2e^{2t} + 4te^{2t}$$

2. calcul de la dérivée du produit $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$. Il y'a deux méthodes pour calculer ces dérivées.
   – Nous calculons directement le produit $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$

$$\frac{d\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}}{dt} = -4e^{2t}\overrightarrow{j} - (6te^{2t} + 6t^2e^{2t})\overrightarrow{k}$$

   – Nous utilisons la loi de la derivée :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} \wedge \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \wedge \frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$$

   Nous trouverons :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = -4e^{2t}\overrightarrow{j} - (6te^{2t} + 6t^2e^{2t})\overrightarrow{k}$$

Exercice 3

Soient les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{v} = \frac{t\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{3\,\overrightarrow{i} - t\,\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$$

Pour monter que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs unitaires, il faut calculer leurs modules

$$\mid \overrightarrow{v} \mid = 1$$

$$\mid \overrightarrow{u} \mid = 1$$

Le module de ces vecteurs est egal a l'unité, donc ce sont des vecteurs unitaires.

Exercice 4

Soit la fonction vectorielle :

$$\vec{r} = \cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j} + e^{-\theta(t)}\,\vec{k}$$

Derivons l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Si nous dérivons, nous trouvons facilement :

1. $$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin\theta(t)\,\vec{i} + \cos\theta(t)\,\vec{j} - e^{-\theta(t)}\vec{k})\frac{d\theta(t)}{dt}$$

2. $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-\cos\theta(t)\,\vec{i} - \sin\theta(t)\,\vec{j} + e^{-\theta(t)}\vec{k})\frac{d\theta(t)}{dt} + (-\sin\theta(t)\,\vec{i} + \cos\theta(t)\,\vec{j} - e^{-\theta(t)}\vec{k})\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Exercice 5

Soit le vecteur suivant :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

1. Le module du vecteur $\vec{r}$ est :

$$|\,\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. Nous appliquons la formule :

$$\overrightarrow{Grad}\,|\,\vec{r}\,| = \frac{\partial\,|\,\vec{r}\,|}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\,|\,\vec{r}\,|}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\,|\,\vec{r}\,|}{\partial z}\vec{k}$$

nous trouvons alors :

$$\overrightarrow{Grad}\,|\,\vec{r}\,| = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$$

3. La divergence est donnée par la formule :

$$div\,\vec{r} = \vec{\nabla}.\vec{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}$$

Nous trouvons :

$$div\,\vec{r} = \vec{\nabla}.\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

4. Pour calculer le rotationnel du vecteur $\vec{r}$ nous utilisons :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{0}$$

Deuxième partie

Cinématique du point matériel

Chapitre 4

La cinématique

La mécanique est une partie de la physique, elle se divise en deux parties :
- La cinématique
- La dynamique

La cinématique consiste à décrire le mouvement d'un corps qui se déplace dans l'espace en fonction du temps sans tenir compte des causes qui provoque ce mouvement. Par contre, la dynamique, s'intéresse aux causes du mouvement. La cinématique permet d'étudier les relations entre les paramètres permettant de décrire le mouvement (position, vitesse, accélération) et leurs expressions dans divers systèmes de coordonnées ou en cas de changement de référentiel

4.1 Point matériel

Nous assimilerons le corps étudie comme un point matériel. Par définition un point matériel est une particule de dimension négligeable auquel on associe une masse m et repéré par un ensemble de trois coordonnées. Le référentiel Par définition, un référentiel d'étude est un système de coordonnées lié au point matériel. Le mouvement de ce dernier a un caractère relatif, il faut donc préciser par rapport à quoi il se déplace le point matériel. Il existe plusieurs types de référentiel, parmi eux :
- Le référentiel terrestre : C'est un référentiel lié à un point quelconque de la Terre.
- Le référentiel géocentrique : C'est un référentiel lié au centre d'inertie de la Terre.
- Le référentiel de Kepler : C'est un référentiel lié au centre d'inertie du Soleil.
- Le référentiel de Copernic : C'est un référentiel lié au centre de masse du système solaire.

4.2 Repère

Un repère, noté (R), est un système d'un point et de trois axes permettant de repérer un point matériel.

4.3 Vecteur position

Étant donné un référentiel d'origine le point O et dans lequel on étudie le mouvement du point matériel M, la position de ce point à un instant t quelconque est donnée par le vecteur position noté : $\overrightarrow{OM}$.

4.4 Trajectoire

Le vecteur position varie au cours du mouvement et l'ensemble des positions successives au cours du temps de son extrémité M forme une courbe appelée trajectoire du point matériel M. La forme de la trajectoire dépend du référentiel d'étude.

4.5 Vecteur vitesse

Soit un point matériel M qui se déplace suivant une trajectoire quelconque. Sa position est repérée en tout point de l'espace par un vecteur de position OM et sa vitesse a pour expression :

1. Le vecteur vitesse moyenne entre deux vecteurs positions successives $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ du point matériel se définit comme le rapport entre la distance M_1M_2 parcourue et la différence de leurs durées successives t_2 -t_1.

$$\overrightarrow{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} \tag{4.1}$$

2. Le vecteur vitesse instantanée ou simplement le vecteur vitesse est la dérivé du vecteur position par apport au temps.

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \tag{4.2}$$

4.6 Vecteur Accélération

1. Le vecteur accélération moyenne correspond à une augmentation de la valeur du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\overrightarrow{\gamma}_{moy} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t2 - t1} \tag{4.3}$$

2. Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \tag{4.4}$$

Chapitre 5

Systèmes de coordonnées

Chaque point matériel est repéré par un système de coordonné, comportant une base et des composantes du vecteur de position. On définit alors trois systèmes de coordonnées :
- Un système de coordonné dans le plan.
- Un système de coordonné dans l'espace.

5.1 Systèmes de coordonnées dans le plan

5.1.1 Coordonnées cartésiennes

Le système de coordonnée cartésienne dans le plan est definie par :
- La base : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
- Les coordonnées : (x,y)
- Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \tag{5.1}$$

- Le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} \tag{5.2}$$

- Le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{j} \tag{5.3}$$

5.1.2 Coordonnées polaires

Le système des coordonnées polaires est definie par : La base : $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$
- $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \mid \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{u_r} \tag{5.4}$$

- Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$.

Les coordonnées :(r,θ)
- r est le module du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$r = \mid \overrightarrow{OM} \mid \tag{5.5}$$

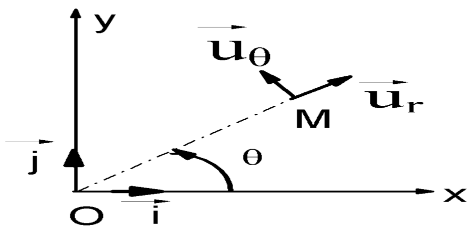

FIGURE 5.1 – Les coordonnées polaires

– θ est l'angle compris entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur $\vec{i}$.
– $\vec{u_\theta}$ est toujours orienté dans la direction de θ.
Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} \tag{5.6}$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \tag{5.7}$$

Avant de calculer la vitesse en fonction des vecteurs de base $\vec{u_r}$ et $\vec{u}$, nous allons déterminer les expressions des vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ du système de coordonnée cartésienne. D'après la figure (5-1), la projection de $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ sur les axes ox et oy conduit respectivement aux deux relations :

$$\vec{u_r} = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} \tag{5.8}$$

$$\vec{u_\theta} = -cos\alpha\,\vec{i} + sin\alpha\,\vec{j} \tag{5.9}$$

A partir de la relation qui lie les angles θ et α, donnée par

$$\theta + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$$

D'après les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta = -\sin\theta$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta = \cos\theta$$

Nous obtenons $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et qui sont :

$$\vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \tag{5.10}$$

$$\vec{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \tag{5.11}$$

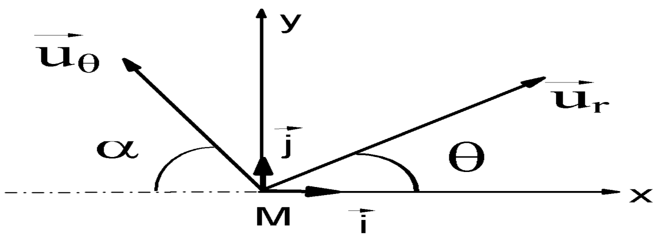

FIGURE 5.2 – Les coordonnées polaires

Nous pouvons aussi deduire les expressions des vecteurs de base $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ du système de coordonnée cartésienne en fonction des vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$. Si nous multiplions les deux membres des equations (5-10) et (5-11) respectivement par $\cos\theta$ et par -$\sin\theta$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{u_r}\cos\theta = \cos\theta\cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\cos\theta\overrightarrow{j}$$

$$-\overrightarrow{u_\theta}\sin\theta = \sin\theta\overrightarrow{i}\sin\theta - \cos\theta\overrightarrow{j} - \sin\theta$$

La somme des deux expressions ci-dessus membre à membre, conduit à :

$$\overrightarrow{i} = \cos\theta\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\overrightarrow{u_\theta} \tag{5.12}$$

et cela après avoir utilisée la relation trigonométrique :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Et si nous multiplions les deux membres des equations (5-10) et (5-11) respectivement par $\sin\theta$ et par $\cos\theta$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{u_r}\sin\theta = \cos\theta\sin\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\sin\theta\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{u_\theta}cos\theta = -\sin\theta\overrightarrow{i}cos\theta + \cos\theta\overrightarrow{j}cos\theta$$

La somme des deux expressions ci-dessus membre à membre, conduit à :

$$\overrightarrow{j} = \sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \tag{5.13}$$

Calculons maintenant les derivees des vecteurs de bases $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ par rapport a θ.

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta} \tag{5.14}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{u_r} \tag{5.15}$$

et leurs derivees par rapport au temps conduit a

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} \tag{5.16}$$

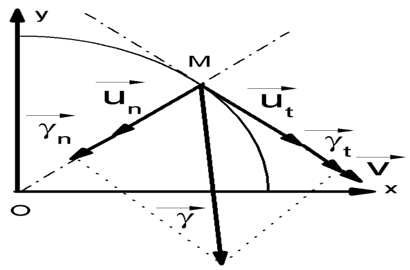

FIGURE 5.3 – Les coordonnées de Frenet

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} \tag{5.17}$$

L'expression de la vitesse s'obtient a partir de la dérivée du vecteur position, il est alors,

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} \tag{5.18}$$

se transforme alors en,

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} \tag{5.19}$$

Cherchons maintenant la relation du vecteur accélération en Coordonnée polaire. En effet si on dérive ll'équation (4-19) vecteur par rapport au temps, il vient

$$\overrightarrow{\gamma} = (\frac{d^2r}{dt^2} + r(\frac{d\theta}{dt})^2)\overrightarrow{u_r} + (2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2})\overrightarrow{u_\theta} \tag{5.20}$$

5.1.3 Coordonnées de Frenet

Le système de coordonnée de Frenet ou intrinsèque est definie par :

La base : $(\overrightarrow{u_n},\overrightarrow{u_t})$
- $\overrightarrow{u_n}$ est vecteur unitaire normal et orienté vers le centre du courbure.
- $\overrightarrow{u_t}$ est un vecteur unitaire tangent et orienté dans le sens du mouvement.
- $\overrightarrow{u_n}$ est toujours perpendiculaire a $\overrightarrow{u_t}$.

Les coordonnées : (x,y) ou (r,θ)

Le vecteur vitesse :
- Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et du même sens que le mouvement. il porte le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ il a donc pour expression,

$$\overrightarrow{v} = \mid \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u_t} \tag{5.21}$$

Le vecteur accélération : L'accélération présente deux composantes :
- Une composante tangentielle notée $\overrightarrow{\gamma_t}$ tangente à la courbe.

$$\mid \overrightarrow{\gamma_t} \mid = \frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt} \tag{5.22}$$

– Une composante normale notée $\overrightarrow{\gamma_n}$ orienté vers le centre de courbure

$$|\overrightarrow{\gamma_n}| = \frac{|\overrightarrow{v}|^2}{\rho} \tag{5.23}$$

ρ est le rayon de courbure qui peut être calculé par deux méthodes.

– Première méthode

$$\rho = \frac{|\overrightarrow{v}|^3}{|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\gamma}|} \tag{5.24}$$

– Deuxième méthode

$$\rho = \frac{|\overrightarrow{v}|^2}{|\overrightarrow{\gamma_n}|} \tag{5.25}$$

Le vecteur acceleration est donc,

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_t} + \overrightarrow{\gamma_n} \tag{5.26}$$

En élevant au carré la relation xxx, il vient :

$$|\overrightarrow{\gamma_n}| = \sqrt{|\overrightarrow{\gamma_t}|^2 + |\overrightarrow{\gamma_n}|^2} \tag{5.27}$$

5.2 Systèmes de coordonnées dans l'espace

5.2.1 Coordonnées cartésiennes

Le système de coordonnée cartésienne dans l'espace est definie par : La base : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Les coordonnées : (x,y,z)

Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \tag{5.28}$$

Le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k} \tag{5.29}$$

Le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{k} \tag{5.30}$$

5.2.2 Coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques est un système de coordonnées de l'espace. Il est constitue d'un système de coordonnées polaires à deux dimensions en y ajoutant un axe a une dimension noté oz. Un point M(x,y,z) de l'espace est repéré par deux distance et un angle. Ce système est definie par : La base : $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$

– $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire du vecteur position $\overrightarrow{Om}$: ou m(x,y)est la projection de M(x,y,z) dans le plan formée par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

$$\overrightarrow{Om} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} \tag{5.31}$$

$$\overrightarrow{Om} = |\overrightarrow{Om}|\,\overrightarrow{u_r} \tag{5.32}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$.

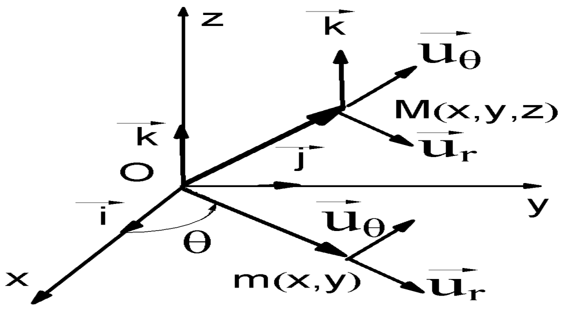

FIGURE 5.4 – Les coordonnées cylindriques

– Le vecteur $\overrightarrow{k}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs ($\overrightarrow{u_r}$,$\overrightarrow{u_\theta}$)
Les coordonnées :(r,θ,z)
– r est le module du vecteur position $\overrightarrow{Om}$:

$$r = \mid \overrightarrow{Om} \mid \tag{5.33}$$

– θ est l'angle compris entre le vecteur $\overrightarrow{Om}$ et le vecteur $\overrightarrow{i}$.
– $\overrightarrow{u_\theta}$ est toujours orienté dans la direction de θ.
Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{k} \tag{5.34}$$

Le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \tag{5.35}$$

L'expression de la vitesse en coordonnée cylindrique est une composition entre le vecteur vitesse en coordonnée polaire et celui de l'axe Oz, on aura alors

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k} \tag{5.36}$$

Le vecteur accélération : Cherchons maintenant la relation du vecteur accélération en coordonnée cylindrique. En effet si on dérive la relation de vecteur vitesse par rapport au temps définie par l'équation xxx, il vient

$$\overrightarrow{\gamma} = (\frac{d^2r}{dt^2} + r(\frac{d\theta}{dt})^2)\overrightarrow{u_r} + (2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2})\overrightarrow{u_\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{k} \tag{5.37}$$

5.3 Exercices

Exercice 1

Une particule se déplace sur une droite horizontale suivant la loi :

$$x = -t^2 + 2t \tag{5.38}$$

X se mesure en mètre et t en seconde. Calculer

1. La position de cette particule à l'instant t= 10s.
2. L'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle 0<t<2s.
3. L'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle t_0<t<t+t_0.
4. L'expression de la vitesse instantanée. Quelle est sa valeur à t=0s.
5. L'expression de l'accélération moyenne dans l'intervalle t_0<t< t+t_0.

Exercice 2

On donne les composantes du vecteur position d'une particule M par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+1 \\ y & = & t^2 - \frac{3}{2}t \end{array}\right.$$

Déterminer

1. Les expressions de la vitesse et l'accélération de M dans le système des coordonnées cartésiennes, ainsi que leurs modules.
2. Le rayon de courbure.

Exercice 3

Les équations du mouvement d'une particule M sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} r & = & a \\ \theta & = & 2t^3 \end{array}\right.$$

ou a est une constante

1. Donner les vecteurs position, la vitesse et l'accélération dans le système des coordonnées polaire.
2. Donner le vecteur position, la vitesse et l'accélération dans le système de coordonnées cartésiennes. Quelle est l'équation de la trajectoire de M.
3. Donner les vecteurs vitesse et accélération de M dans le système de coordonnées intrinsèque ou de Frenet.

Exercice 4

On donne le vecteur position d'une particule M par la relation :

$$\overrightarrow{r} = e^{2t}\overrightarrow{i} + 3t\overrightarrow{j}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de M.
2. L'expression de la vitesse et l'accélération de M dans le système de coordonnées intrinsèque ou de Frenet.
3. Le rayon de courbure ρ.

Exercice 5

Les équations du mouvement d'une particule M sont :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}at^2 \\ y &= bt \\ z &= \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

a et b sont des constantes.

1. Déterminer les expressions du vecteur position, de la vitesse et de l'accélération dans le système de coordonnée cartésienne.

Exercice 6

Les équations du mouvement d'une particule M sont :

$$\begin{cases} x &= R\cos\omega t \\ y &= R\sin\omega t \\ z &= ct \end{cases}$$

R, ω et c sont des constantes. Déterminer, dans le système de coordonnée cylindrique, les expressions de :

1. Le vecteur position.
2. Le vecteur vitesse.
3. Le vecteur accélération.

Exercice 7

On donne les composantes du vecteur position d'une particule M par le système suivant :

$$\begin{cases} x &= a\sin t\cos t \\ y &= a\sin t\sin t \end{cases}$$

ou a est une constante.

1. Déterminer les expressions de la vitesse et l'accélération de M dans le système des coordonnées cartésiennes, ainsi que leurs modules.
2. Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération dans le système des coordonnées polaire, vérifier leurs modules.
3. Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération dans le système des coordonnées intrinsèque ou de Frenet, vérifier leurs modules.
4. Déterminer le rayon de courbure.

Exercice 8

Les équations du mouvement d'une particule M sont :

$$\begin{cases} r &= 2a\sin\theta \\ \theta &= \omega t \end{cases}$$

Ou ω et a sont des constantes. Déterminer les expressions du vecteur position, de la vitesse et de l'accélération dans le système des coordonnées polaire.

5.4 Corrigés

exercice 1

Une particule se déplace sur une droite horizontale suivant la loi :

$$x = -t^2 + 2t$$

1. La position de cette particule à l'instant t= 10s.

$$x(10s) = -80m$$

2. L'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle 0<t<2s.

$$\overrightarrow{v}_{moy} = \frac{x(2) - x(0)}{2-0} = 0$$

3. L'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle t_0<t<t+t_0.

$$\overrightarrow{v}_{moy} = \frac{x(t+t_0) - x(t_0)}{2-0} = -2t_0 + 2$$

4. L'expression de la vitesse instantanée. Quelle est sa valeur à t=0s.

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+t_0) - x(t_0)}{2-0} = -2t + 2$$

5. L'expression de l'accélération moyenne dans l'intervalle t_0<t< t+t_0.

$$\overrightarrow{\gamma}_{moy} = \frac{v(t+t_0) - v(t_0)}{t2 - t1} =$$

exercice 2

On donne les composantes du vecteur position d'une particule M par le système suivant :

$$\begin{cases} x &= 2t+1 \\ y &= t^2 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

1. Le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + (2t - \frac{3}{2})\vec{j}$$

Le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = 2\vec{j}$$

Leurs modules.

$$\mid \vec{v} \mid = \sqrt{4 + (2t - \frac{3}{2})^2}$$

$$\mid \vec{\gamma} \mid = 2$$

2. Le rayon de courbure.

$$\rho = \frac{\mid \vec{v} \mid^3}{\mid \vec{v} \wedge \vec{\gamma} \mid}$$

$$\mid \vec{v} \mid^3 = (\sqrt{4 + (2t - \frac{3}{2})^2})^3$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2t + \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4\vec{k}$$

$$\mid \vec{v} \wedge \vec{\gamma} \mid = 4$$

$$\rho = \frac{(\sqrt{4 + (2t - \frac{3}{2})^2})^3}{4}$$

exercice 3

Les équations du mouvement d'une particule M sont :

$$\begin{cases} r &= a \\ \theta &= 2t^3 \end{cases}$$

1. Le vecteur position en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = a\overrightarrow{u_r} \tag{5.39}$$

Le vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta}{dt} &= 6t^2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v} = 6at^2\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\mid \overrightarrow{v} \mid = 6at^2$$

$$\mid \overrightarrow{v} \mid = 6at^2$$

Le vecteur accélération en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\gamma} = (\frac{d^2r}{dt^2} + r(\frac{d\theta}{dt})^2)\overrightarrow{u_r} + (2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2})\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2r}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= 12t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\gamma} = 36at^4\overrightarrow{u_r} + 12at\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\mid \overrightarrow{\gamma} \mid = \sqrt{144a^2t^2 + 1296a^2t^8}$$

2. Les relations de transformation du systéme de coordonnée polaire au systeme de coordonnée cartésienne sont :

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta = a\cos 2t^3 \\ y &= r\sin\theta = a\sin 2t^3 \end{cases}$$

Le vecteur position en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{OM} = a\cos 2t^3\overrightarrow{i} + a\sin 2t^3\overrightarrow{j}$$

Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -6at\sin 2t^3 \\ \frac{dy}{dt} &= 6at\cos 2t^3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v} = -6at \sin 2t^3 \overrightarrow{i} + 6at \cos 2t^3 \overrightarrow{j}$$

Le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{j}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} &= -12at \sin 2t^3 - 36at^4 \cos 2t^3 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 12at \cos 2t^3 - 36at^4 \sin 2t^3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\gamma} = (-12at \sin 2t^3 - 36at^4 \cos 2t^3)\overrightarrow{i} + (12at \cos 2t^3 - 36at^4 \sin 2t^3)\overrightarrow{j}$$

3. Le vecteur vitesse en coordonnées de Frenet.

$$\overrightarrow{v} = \mid \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u_t}$$

Le module de la vitesse calculée à partir du vecteur vitesse en coordonnée polaire

$$\mid \overrightarrow{v} \mid = 6at^2$$

$$\overrightarrow{v} = 6at^2\overrightarrow{u_t}$$

Le vecteur accélération en coordonnées de Frenet.

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_t} + \overrightarrow{\gamma_n}$$

Avec l'accélération tangentielle :

$$\mid \overrightarrow{\gamma_t} \mid = \frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt} = 12at$$

et l'accélération normale :

$$\mid \overrightarrow{\gamma_n} \mid = \frac{\mid \overrightarrow{v} \mid^2}{\rho}$$

Calculons d'abord le rayon de courbure.

$$\rho = \frac{\mid \overrightarrow{v} \mid^3}{\mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\gamma} \mid}$$

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 6at^2 & 0 \\ 36at^4 & 12at & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -216a^2t^6\overrightarrow{k}$$

$$|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\gamma}| = 216a^2t^6$$

$$\rho = a$$

$$|\overrightarrow{\gamma_n}| = 36at^4$$

$$\overrightarrow{\gamma} = 12at\overrightarrow{u_t} + 36at^4\overrightarrow{u_n}$$

$$|\overrightarrow{\gamma}| = \sqrt{144a^2t^2 + 1296a^2t^8}$$

Nous remarquons que les modules des vecteurs vitesse et de l'accélération calculée par les coordonne de Frenet sont identiques a ceux calculée par les coordonnées polaires

exercice 4

On donne le vecteur position d'une particule M par la relation :

$$\overrightarrow{r} = e^{2t}\overrightarrow{i} + 3t\overrightarrow{j}$$

1. Par comparaison entre les équations ci-dessus et ci-dessous,

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

nous obtenons :

$$\begin{cases} x &= e^{2t} \\ y &= 3t \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} t &= \frac{1}{2}\ln x \\ y &= 3t \end{cases}$$

l'équation de la trajectoire de M.

$$y = \frac{3}{2}\ln x$$

2. L'expression de la vitesse en coordonnées de Frenet

$$\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|\overrightarrow{u_t}$$

Nous calculons le module de la vitesse

$$\overrightarrow{v} = 2e^{2t}\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} \tag{5.40}$$

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4e^{4t}+9} \tag{5.41}$$

$$\overrightarrow{v} = \sqrt{4e^{4t}+9}\,\overrightarrow{u_t}$$

L'expression de l'accélération en coordonnées de Frenet

$$\overrightarrow{\gamma_t} = \frac{8e^{4t}}{\sqrt{4e^{4t}+9}}\overrightarrow{u_t}$$

$$\overrightarrow{\gamma_n} = \frac{|\overrightarrow{v}|^2}{\rho}\overrightarrow{u_n}$$

le rayon de courbure est alors :

$$\rho = \frac{(\sqrt{4e^{4t}+9})^3}{12e^{2t}}$$

$$|\overrightarrow{\gamma_n}| = \frac{12e^{2t}}{\sqrt{4e^{4t}+9}}$$

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{8e^{4t}}{\sqrt{4e^{4t}+9}}\overrightarrow{u_t} + \frac{12e^{2t}}{\sqrt{4e^{4t}+9}}\overrightarrow{u_n}$$

exercice 5

Les équations du mouvement de la particule M sont :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}at^2 \\ y &= bt \\ z &= \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

1. Le vecteur position en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}at^2\,\overrightarrow{i} + bt\,\overrightarrow{j} + \frac{1}{2}at^2\,\overrightarrow{k}$$

Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{v} = at\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + at\,\overrightarrow{k}$$

Le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{\gamma} = a\,\overrightarrow{i} + a\,\overrightarrow{k}$$

exercice 6

Les équations du mouvement de la particule M sont :

$$\begin{cases} x &= R\cos\omega t \\ y &= x = R\sin\omega t \\ z &= ct \end{cases}$$

1. Le vecteur position en coordonnées cylindriques.
   r est le module du vecteur position $\overrightarrow{Om}$:

$$\overrightarrow{Om} \mid= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

$$r = \mid \overrightarrow{Om} \mid = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(R\cos\omega t)^2 + (R\sin\omega t)^2} = R$$

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} + ct\overrightarrow{k} \tag{5.42}$$

2. Le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{dz}{dt} &= c \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u_r} + c\overrightarrow{k}$$

3. Le vecteur accélération en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{\gamma} = (\frac{d^2r}{dt^2} + r(\frac{d\theta}{dt})^2)\overrightarrow{u_r} + (2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2})\overrightarrow{u_\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{k}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2r}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\gamma} = R\omega^2\overrightarrow{u_r}$$

Chapitre 6

Mouvement relatif

6.1 Mouvement relatif

Dans un jour de pluie, une personne A est debout dans un arrêt de bus et une autre personne B est assise dans le bus en mouvement. Les deux personnes A et B ne voient pas de la même manière la tombée de la pluie. La personne debout la voit tombée en verticale avec une faible vitesse, par contre la personne B voit les gouttes de pluie tombée un peu inclinée par rapport à la verticale avec une forte vitesse. Nous attribuons à la personne A un repère fixe (ou repère absolu) qu'on notera R (Oxyz) et à la personne B un repère mobile (ou repère relatif) qu'on notera R'(O'x'y'z').

Considérons une goutte de pluie comme étant un point matériel M. Ce point matériel présente deux vecteurs positions :

– Dans le repère absolu, d'origine est O et de vecteurs de base $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$, les coordonnées du point M sont (x,y,z), son vecteur position est alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \tag{6.1}$$

– Dans le repère relatif, d'origine est O' et de vecteurs de base $\overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{j'}$ et $\overrightarrow{k'}$, et les coordonnées du point M sont (x',y',z'), son vecteur position est alors :

$$\overrightarrow{O'M} = x'\,\overrightarrow{i'} + y'\,\overrightarrow{j'} + z'\,\overrightarrow{k'} \tag{6.2}$$

Il existe une relation entre les vecteurs positions, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M}$, en effet la relation de Charles conduit a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{6.3}$$

La dérivée de la relation (6-3) par rapport au temps, donne :

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{dt}\,|_R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\,|_R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\,|_R \tag{6.4}$$

Le premier membre de l'équation (6-4) représente la vitesse du point M dans le repère absolu, cette vitesse est dite la vitesse absolu et notée $\overrightarrow{v_a}$.

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\,|_R \tag{6.5}$$

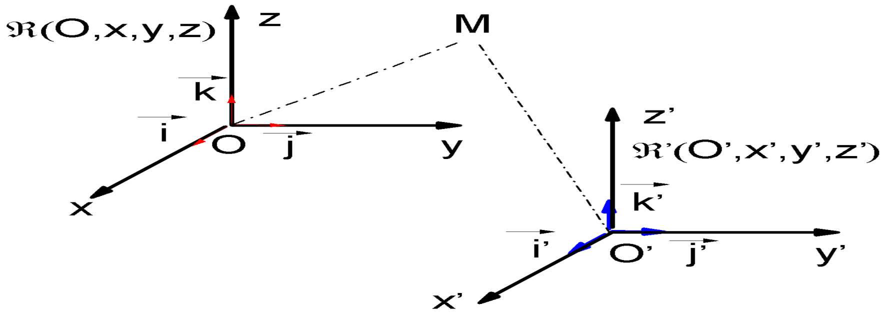

FIGURE 6.1 – Les mouvements relatifs

ou encore,

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k} \tag{6.6}$$

Le second terme du second membre de l'équation (6-4) représente la vitesse du point M dans le repère mobile, elle est dite la vitesse relative. Elle est notée : $\overrightarrow{v_r}$ est donnee par

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\mid_{R'} \tag{6.7}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'} \tag{6.8}$$

Soit un vecteur mobile $\overrightarrow{C}$, une propriété intéressante de la dérivée d'un tel vecteur par rapport a un repère fixe se caractérise par la relation suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{C}}{dt}\mid_R = \frac{d\overrightarrow{C}}{dt}\mid_{R'} + \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{C} \tag{6.9}$$

Si on applique cette definition sur le premier terme du second membre de l'équation (6-4), il vient

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\mid_R = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\mid_{R'} + \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \tag{6.10}$$

En notant par la vitesse relative du point M dans le repere mobile par la relation :

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\mid_{R'} \tag{6.11}$$

En injectant la relation (6-10) dans la relation (6-4), il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\mid_R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\mid_R + \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\mid_{R'} \tag{6.12}$$

Le repère mobile peut se déplacer par rapport au repère fixe suivant deux mouvements :

– Un mouvement rectiligne
– Un mouvement circulaire

La vitesse de déplacement de R'(O'x'y'z')par rapport à R(Oxyz)est dite la vitesse d'entrainement, notée $\overrightarrow{v_e}$. Les deux premiers termes du second membre de l'équation (6-12) correspond a la vitesse d'entrainement :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|_R + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \tag{6.13}$$

Nous obtenons une relation de la loi de composition des vitesses

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} \tag{6.14}$$

Le point matériel présente deux vecteurs accélérations :

– Le vecteur accélération absolu :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{k} \tag{6.15}$$

– Le vecteur accélération relatif :

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'} \tag{6.16}$$

La dérivée des deux membres de la loi de composition des vitesses donnée par la relation (6-14) donne :

$$\frac{d^2\overrightarrow{v_a}}{dt^2}|_R = \frac{d^2\overrightarrow{v_r}}{dt^2}|_R + \frac{d^2\overrightarrow{v_e}}{dt^2}|_R \tag{6.17}$$

Elle conduit en utilisant la condition (6-9) et les notations des relations (6-15) et (6-16) à :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}|_R + \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}|_{R'} \tag{6.18}$$

En identifiant les deux relations suivantes

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}|_{R'} + \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \tag{6.19}$$

et

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} \tag{6.20}$$

respectivement par l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis, nous obtenons la loi de composition des accélérations définie par :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_c} + \overrightarrow{\gamma_e} \tag{6.21}$$

6.2 Exercices

Exercice 1

On considère un référentiel R(Oxyz) fixe et un référentiel R'(O'x'y'z') mobile de bases respectives ($\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$) et ($\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}$. Nous considèrons que ces deux référentiel sont parallèles. Les vecteurs position de M dans le repère R(Oxyz)et R'(O'x'y'z') sont respectivement :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} &= (6t^2 - 4t)\overrightarrow{i} - 3t^3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{O'M} &= (6t^2 + 3t)\overrightarrow{i'} - 3t^3\overrightarrow{j'} + 3\overrightarrow{k'} \end{cases}$$

1. Déterminer la vitesse absolue et la vitesse relative de M. en déduire la vitesse d'entrainement et la nature du mouvement de R' par rapport à R.
2. Déterminer l'accélération absolue, l'accélération relative, conclure.

Exercice 2

On considère deux repères R(Oxyz) et R'(O'x'y'z') tel que R'se déplace avec une vitesse constante $\overrightarrow{v_0}$(-3,0,5) par rapport à R. Les coordonnées de M par rapport à R à l'instant t sont :

$$\begin{cases} x &= t^2 + 3t \\ y &= 2t \\ z &= -t^3 \end{cases}$$

Les coordonnées de M par rapport à R à l'instant t=0 sont x=0, y=1 et z=0

1. Déterminer la vitesse relative et absolue de M.
2. En déduire les coordonnées de M dans R'(O'x'y'z')
3. Déterminer l'accélération absolue et relative de M.

Exercice 3

On considère deux repères R(Oxyz) et R'(O'x'y'z') tel que tourne R' autour de l'axe Oz (Oz confondu avec O'z') avec une vitesse angulaire constante ω figure (5-2). Un point M se déplace sur l'axe Ox' avec une vitesse constante $|\overrightarrow{v}|$. Déterminer la vitesse absolue et l'accélération absolue de M par deux méthodes différentes

1. Déterminer la vitesse relative et l'accélération relative de M
2. Déterminer la vitesse d'entrainement.
3. Déterminer les accélérations d'entrainement et de Coriolis

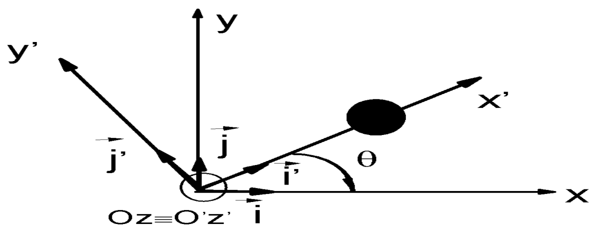

FIGURE 6.2 – Le mouvement relatif-1

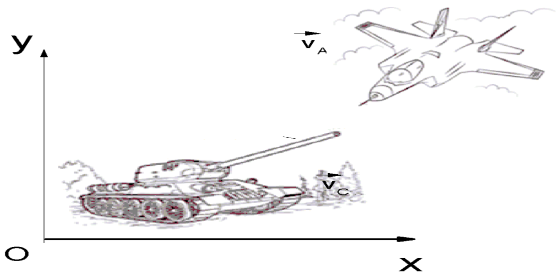

FIGURE 6.3 – Le mouvement relatif-2

Exercice 4

Un char ennemi se déplace avec une vitesse constante $\overrightarrow{v_C}$ suivant Ox, et dans le même temps un missile est tiré d'un avion de chasse avec une vitesse $\overrightarrow{v_A}$, d'une altitude h par rapport au sol (figure1). On considère que au temps t=0, le char est en O et que les coordonnées de l'avion sont $|\overrightarrow{x_A}|$=0 et $|\overrightarrow{y_A}|$=H

1. Déterminer la vitesse relative du missile par rapport au char $\overrightarrow{v_{C/A}}$ (module et direction).
2. Déterminer les composantes de la vitesse $\overrightarrow{v_{C/A}}$, en déduire le mouvement du missile par rapport au char.
3. Quelle doit être la relation entre $|\overrightarrow{v_A}|$ et $|\overrightarrow{v_C}|$ pour que le missile atteigne la voiture,
4. Déterminer le temps d'impact.

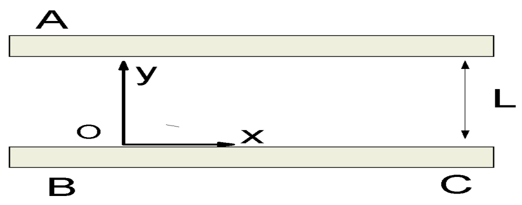

FIGURE 6.4 – Les mouvements relatifs

Exercice 5

Un nageur se propose de traverser une rivière de 100m de largeur L (figure 2). Sa vitesse relative dans l'eau est de 1.2m/s. le flux d'eau qui est parallèle a BC a une vitesse d'entrainement de 1m/s. soit θ l'angle entre sa vitesse dans l'eau et la vitesse du courant. Le nageur nage perpendiculairement au courant.

1. Exprimer les composantes de sa vitesse en fonction absolue $|\overrightarrow{v_e}|$ et $|\overrightarrow{v_r}|$.
2. Déterminer les coordonnes de M par rapport a un repère liée au sol. On donne à t=0, x=0, y=0
3. Calculer le temps du trajet et la position d'arrivée.

Exercice 6

Un nageur se propose de traverser une rivière de 100m de largeur L (figure 2). Sa vitesse relative dans l'eau est de 1.2m/s. le flux d'eau qui est parallèle a BC a une vitesse d'entrainement de 1m/s. soit θ l'angle entre sa vitesse dans l'eau et la vitesse du courant. Le nageur nage perpendiculairement au courant.

1. Exprimer les composantes de sa vitesse en fonction absolue $|\overrightarrow{v_e}|$ et $|\overrightarrow{v_r}|$.
2. Déterminer les coordonnes de M par rapport a un repère liée au sol. On donne à t=0, x=0, y=0
3. Calculer le temps du trajet et la position d'arrivée.

Exercice 7

Un carrée OBCD de coté a tourne autour de son coté OB à la vitesse angulaire ? constante. Un point matériel M se déplace suivant DC à partir de D avec une vitesse constante V(voir figure 1)

1. Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue de M de façon directe.

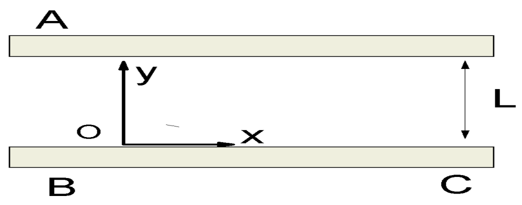

FIGURE 6.5 – Les mouvements relatifs

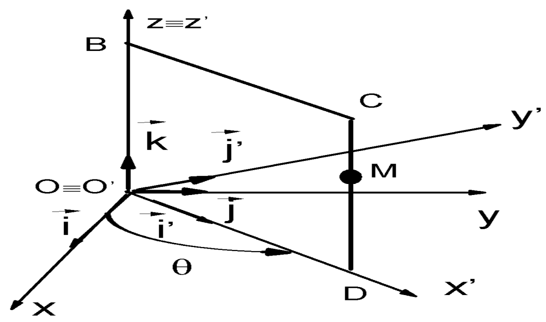

FIGURE 6.6 – Le mouvement relatif

2. Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entraînement de M. en déduire sa vitesse absolue.
3. Déterminer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement, l'accélération de Coriolis M. En déduire son accélération absolue.

Exercice 8

Deux trains A et B roulent sur des voies parallèles respectivement à 70 Km/h et 90 Km/h. Calculer la vitesse relative de B par rapport à A ($\overrightarrow{v_{B/A}}$) dans les deux cas suivants :

1. A et B se déplacent dans le même sens
2. A et B se déplacent dans le sens opposé

Les deux trains roulent maintenant dans le même sens sur des voies faisant entre elles un angle de 60 degré respectivement à 70Km/h et 90Km/h. Calculer la vitesse relative de B par rapport à A

6.3 Corrigés

Exercice 1

1. La vitesse absolu est :
$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} |_R$$
La dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps conduit a :
$$\overrightarrow{v_a} = (12t - 4)\overrightarrow{i} - 9t^2\overrightarrow{j}$$
La vitesse relative est :
$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} |_{R'} \tag{6.22}$$
La dérivée du vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps conduit a :
$$\overrightarrow{v_r} = (12t + 3)\overrightarrow{i'} - 9t^2\overrightarrow{j'}$$
La relation de la loi de composition des vitesses
$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$$
ou encore,
$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_a}$$
donne la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$
$$\overrightarrow{v_e} = (12t - 4)\overrightarrow{i} - 9t^2\overrightarrow{j} - (12t + 3)\overrightarrow{i'} + 9t^2\overrightarrow{j'}$$
Les référentiels R(Oxyz) et R'(O'x'y'z') sont parallèles :
$$\begin{cases} \overrightarrow{i} & = & \overrightarrow{i'} \\ \overrightarrow{j} & = & \overrightarrow{j'} \end{cases}$$
$$\overrightarrow{v_e} = 7\overrightarrow{i}$$
La vitesse d'entrainement est constante, le mouvement de R'(O'x'y'z') par rapport à R(Oxyz) est un mouvement rectiligne uniforme.
2. L'accélération absolue est :
$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt^2} |_R$$
ou encore,
$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d^2\overrightarrow{v_a}}{dt} |_R$$

La dérivée du vecteur position $\overrightarrow{v_a}$ par rapport au temps conduit a :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = 12\,\overrightarrow{i} - 18t\,\overrightarrow{j}$$

L'accélération relative est :

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\,|_{R'}$$

ou encore,

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\,|_{R'}$$

La dérivée du vecteur position $\overrightarrow{v_r}$ par rapport au temps conduit a :

$$\overrightarrow{\gamma_r} = 12\,\overrightarrow{i'} - 18t\,\overrightarrow{j'}$$

et comme,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{i} & = & \overrightarrow{i'}\\ \overrightarrow{j} & = & \overrightarrow{j'}\end{array}\right.$$

Nous aurons :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r}$$

Les vitesses d'entrainements sont egale, le mouvement de R'(O'x'y'z') par rapport à R(Oxyz) est un mouvement rectiligne uniforme.

Exercice 2

Les coordonnées de M par rapport à R(Oxyz) à l'instant t sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x & = & t^2+3t\\ y & = & 2t\\ z & = & -t^3\end{array}\right.$$

1. La vitesse absolue de M est :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{v_a} = (2t+3)\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} - 3t^2\,\overrightarrow{k}$$

La vitesse relative de M sera déduite à partir de la relation de la loi de composition des vitesses

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_e}$$

de plus, la vitesse d'entrainement est $\overrightarrow{v_0}$(-3,0,5) C'est à dire :

$$\overrightarrow{v_e} = -3\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{k}$$

En sachant que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{i} & = & \overrightarrow{i'} \\ \overrightarrow{j} & = & \overrightarrow{j'} \end{array}\right.$$

La vitesse relative est alors,

$$\overrightarrow{v_r} = (2t+6)\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} - (3t^2+5)\,\overrightarrow{k}$$

2. Les coordonnées de M dans R'(O'x'y'z') seront déduite à partir des composantes de la vitesse relative,

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_r^{x'} & = & \frac{dx'}{dt} \\ v_r^{y'} & = & \frac{dy'}{dt} \\ v_r^{z'} & = & \frac{dz'}{dt} \end{array}\right.$$

Le système d'équation peut se transformer en :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \int(2t+6)dt \\ y' & = & \int 2dt \\ z' & = & \int -(3t^2+5)dt \end{array}\right.$$

ou encore,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & t^2+6t+C_1 \\ y' & = & 2t+C_2 \\ z' & = & -t^3-5t+C_3 \end{array}\right.$$

Les constantes d'intégrations C_1, C_2 et C_3 seront déduites à partir des conditions initiales. En effet a t=0 sont x=0, y=1 et z=0, nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1 & = & 0 \\ C_2 & = & 1 \\ C_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

D'ou les composantes de M dans sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & t^3+6t+ \\ y' & = & 2t+1 \\ z' & = & -t^3-5t \end{array}\right.$$

3. Les accélérations absolue et relative seront respectivement :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = 2\,\overrightarrow{i}$$

et

$$\overrightarrow{\gamma_r} = 2\,\overrightarrow{i'}$$

$$\overrightarrow{v_a} = (2t+3)\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} - 3t^2\,\overrightarrow{k} \tag{6.23}$$

Troisième partie

Dynamique du point matériel

Chapitre 7

Lois de Newton

La cinématique consiste à décrire le mouvement d'un corps qui se déplace dans l'espace en fonction du temps sans tenir compte des causes qui provoque ce mouvement. Par contre, la dynamique, s'intéresse aux causes du mouvement

7.1 Principe d'inertie

Le principe d'inertie énonce que si un point matériel n'est soumis a aucune force extérieur, il conservera son état naturel. S'il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme ou il est au repos, il conservera son mouvement.

7.2 Référentiels galiléens

Si le principe d'inertie est vérifié dans un référentiel, il est dit référentiel galiléen. Parmi ces référentiels galiléens, nous citerons :

- Le référentiel de Kepler : L'origine de ce référentiel est le centre d'inertie du Soleil et ses trois axes principaux sont orientés vers trois étoiles fixes.
- Le référentiel de Copernic : L'origine de ce référentiel est le centre d'inertie du système solaire.
- Le référentiel géocentrique : L'origine de ce référentiel est le centre d'inertie de la terre Et ses trois axes sont orientés vers trois étoiles fixes.

7.3 Notion de masse, de la quantité de mouvement et de force

Notion de masse

La masse est une grandeur scalaire caractérisant la résistance d'un coprs à subir une modification de son mouvement.

Notion de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement, notée $\overrightarrow{P}$, d'un point matériel est une grandeur vectorielle permettant de caractérisée son mouvement. Elle défini comme étant le produit de sa masse et de son vecteur vitesse.

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v} \tag{7.1}$$

Notion de force

La force, notée $\overrightarrow{F}$, est une grandeur vectorielle permettant de produire le mouvement d'un point matériel ou sa déformation. Elle traduit une variation de la quantité de mouvement. Le vecteur force s'écrit alors,

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} \tag{7.2}$$

La dérivée du vecteur de la quantité de mouvement donnée par la relation (7-2) s'écrit :

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \frac{dm}{dt}\overrightarrow{v} + m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \tag{7.3}$$

Dans la mécanique newtonienne, la masse est une grandeur scalaire constante ($\frac{dm}{dt}$=0). La relation (7-4) devient alors,

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \tag{7.4}$$

En identifiant la dérivée du vecteur de la vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport au temps comme étant le vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma}$, relation (7-3) s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{\gamma} \tag{7.5}$$

7.4 Lois de Newton

La mécanique newtonienne repose sur trois grandes lois :
- Première loi : Le principe d'inertie.
- Deuxième loi : Le principe fondamental de la dynamique. Si un point matériel de masse m possède une accélération $\overrightarrow{\gamma}$, il est soumis a une force proportionnelle a son accélération : $\overrightarrow{F}$=m$\overrightarrow{\gamma}$.
- Troisième loi : Le principe de l'action et de la réaction. A toute force de d'action lui correspond une force de réaction de même intensité et de sens opposés.

7.5 Forces fondamentales

Nous citerons quelques forces fondamentales :

7.5.1 Les forces à distance

Force gravitationnelle

La force gravitationnelle s'exerce entre deux masses, c'est une force à distance. Elle est de la forme :

$$\overrightarrow{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u} \tag{7.6}$$

Ou G est la constante de gravitation universelle (G=6,67.10^{-11} SI), m_1 et m_2 sont deux masses distante de r.

Force coulombienne

La force coulombienne s'exerce entre deux charges ponctuelles, c'est une force à distance. Elle est de la forme :

$$\overrightarrow{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u} \tag{7.7}$$

Ou k est une constante (k =9.10^{-6} SI), q_1 et q_2 sont deux charges ponctuelles distante de r.

Forces faibles et forces fortes

Les forces faibles et forces fortes sont des forces microscopiques. Le première types de force agissent à courte distance, elle s'observe dans les interactions entre la matière et neutrinos. Par contre, le deuxième types de forces sont des force de très courte portée, elle assure la stabilité du noyau.

7.5.2 Forces de contact

Les forces de contact sont des forces macroscopiques qui se manifestent lors du contact de deux corps. Nous citerons :
- Les forces de frottement solide,
- Les forces de frottement visqueux,

Forces de frottement solide

- La force de réaction, notèe $\overrightarrow{R}$ du support est une force de contact entre un objet posé sur un support solide. Cette force est répartie sur toute la surface de contact support-objet. En absence de glissement ou de frottement, la réaction est perpendiculaire au déplacement (figure 7-1a).
- Forces de frottement En presence de frottement, la réaction n'est pas perpendiculaire au déplacement (figure 7-1b). Cette réaction $\overrightarrow{R}$ se décompose en une composante $\overrightarrow{R_N}$ normale aux surfaces en contact, et une composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ appelée force de frottement. Cette force de frottement, est toujours opposée à celui du mouvement de la masse m.

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} \tag{7.8}$$

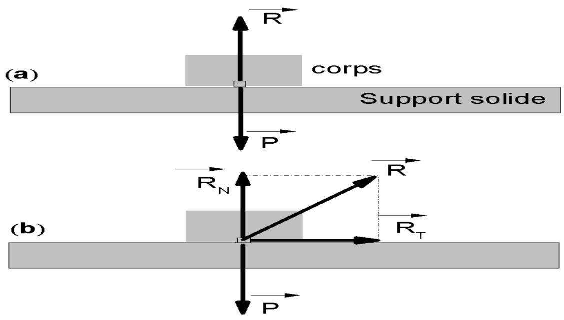

FIGURE 7.1 – Les forces de frottement solide

Les lois du frottement montrent qu'en absence de glissement (absence de frottement) que le rapport de la composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ à la composante normale $\overrightarrow{R_N}$ ne dépasse pas une certaine valeur appelée coefficient de frottement statique noté μ_s .

$$\frac{|\overrightarrow{R_T}|}{|\overrightarrow{R_T}|} < \mu_s \tag{7.9}$$

Lorsqu'il y a glissement (presence de frottement), un coefficient de frottement dynamique noté μ_d apparait comme etant le rapport de de la composante tangentielle et de la composante normale :

$$\frac{|\overrightarrow{R_T}|}{|\overrightarrow{R_N}|} = \mu_d \tag{7.10}$$

Notons que le coefficient de frottement dynamique est généralement inférieur au coefficient de frottement statique.

Forces de frottement visqueux

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide), il subit de la part du fluide des forces de frottements. Nous distinguons deux types de forces de frottements visqueux :

– Forces de frottements visqueux à faible vitesse de type :

$$\overrightarrow{F_f} = -k\eta\overrightarrow{v} \tag{7.11}$$

Où η est la viscosité du milieu, elle se mesure en Poiseuille et k une constante qui dépend de la géométrie du système. Dans le cas particulier d'une sphère de rayon R se déplaçant dans un milieu visqueux, la force de viscosité devient :

$$\overrightarrow{F_f} = -6\pi R\eta\overrightarrow{v} \tag{7.12}$$

– Forces de frottements visqueux à grande vitesse : Dans le cas ou un corps se déplace avec une grande vitesse dans un milieux fluide, la force de frottement prend la forme :

$$\overrightarrow{F_f} = -k\eta\overrightarrow{v^2} \tag{7.13}$$

Force de rappel

Ce type de force, notée $\overrightarrow{T}$, est observée lors de la déformation d'un ressort (compression ou allongement), elle est dite aussi la tension du ressort :

$$\overrightarrow{T} = -k\Delta l\overrightarrow{u} \tag{7.14}$$

Où Δl est l'allongement du ressort, elle est définie par Δl=l-l_0 avec l_0 la longueur du ressort a vide et l sa longueur chargée.

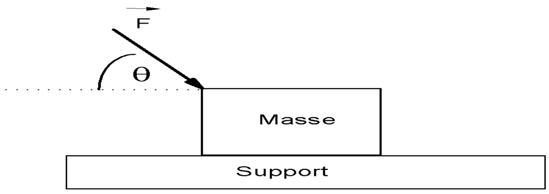

FIGURE 7.2 – Le plan horizontal

7.6 Exercices

Exercice 1

Un point matériel M de masse m est poussè, sur plan horizontal, avec une force $| \overrightarrow{F} |$ faisant un angle α avec le plan (figure 7-2). En appliquant le principe fondamental de la dynamique P.F.D sur la masse m.

Déterminer la accelerartion de M dans les deux cas suivants.

1. Le plan horizontale ne presente pas des frottement.
2. Le plan horizontale presente des frottement.

Exercice 2

Une masse ponctuelle m se déplace sans frottement sur un dôme sphérique de rayon a (figure 7-3).

1. En utilisant le principe fondamentale de la dynamique (P.F.D) et le système des coordonnées de Frenet (ou le système des coordonnées polaires), montrer que :

$$\frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt} = g \sin\theta \tag{7.15}$$

$$\frac{\mid \overrightarrow{v} \mid}{a} = -\frac{\mid \overrightarrow{R} \mid}{m} + g \cos\theta \tag{7.16}$$

   avec $| \overrightarrow{v} |$ est le module de la vitesse de m, $| \overrightarrow{R} |$ est le module la force de contact entre m est la surface.
2. Trouver $| \overrightarrow{v} |$ et $| \overrightarrow{R} |$ en fonction de θ, g et m.
3. Avec quel angle la petite boule quitte la surface circulaire.

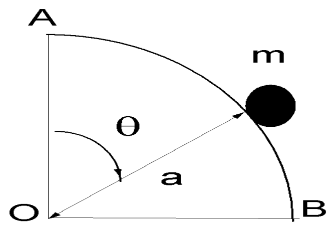

FIGURE 7.3 – Le dôme sphérique

Exercice 3

Un point matériel M, de masse m est attachée à un ressort de constante de raideur k. On écarte la masse m de sa position d'équilibre et on calcule le temps d'une seule oscillation T.

1. Représentez les forces appliquées sur la masse m.
2. En utilisant le principe fondamentale de la dynamique (P.F.D), montrez que l'équation du mouvement de la masse m est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

3. Trouver la période T en fonction de k et m.

Exercice 4

Un pendule simple est constitué d'une masse m accroché à un fil de longueur. On écarte le pendule de sa position d'équilibre avec un angle θ et on le lache sans vitesse initial (figure 7-4). Il aquiert un mouvement sinusoidale.

1. Représenter les forces appliquées sur la masse m
2. En appliquant le principe fondamentale de la dynamique, retrouver l'équation différentielle du mouvement pour de faibles oscillations.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Ou g est l'accélération de la pesanteur.

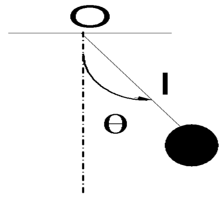

FIGURE 7.4 – Le pendule simple

Exercice 5

Un pendule de torsion est constitué d'un fil cylindrique dont une extrémité est maintenue fixe. En appliquant un moment de force sur ce fil, il se tord d'un certain angle. De fait de son élasticité, le fil s'oppose à cette torsion, en créant un ensemble de force dont le moment a méme intensité que le moment causant la torsion. Le moment du couple d'un ressort en spirale est donné par la relation :

$$M = -C.\theta \tag{7.17}$$

Ou M est le moment de force et C la constante de torsion. En partant d'une situation d'équilibre, on écarte le pendule de torsion de sa position d'équilibre puis on laisse le système oscillé librement.

1. En utilisant le PFD, montrez que l'équation du mouvement est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0 \tag{7.18}$$

   Ou J_Δ est le moment d'inertie par rapport a l'axe Δ.
2. Trouver la période T en fonction de C et m.

Exercice 6

Un corps de masse m, est accéléré depuis son état de repos dans un champ gravitationnel constant, est soumis a la force de gravitation. En appliquant le PFD et le système de coordonné cartésienne retrouver l'équation horaire du mouvement d'une bille en chute libre $z = f(t)$

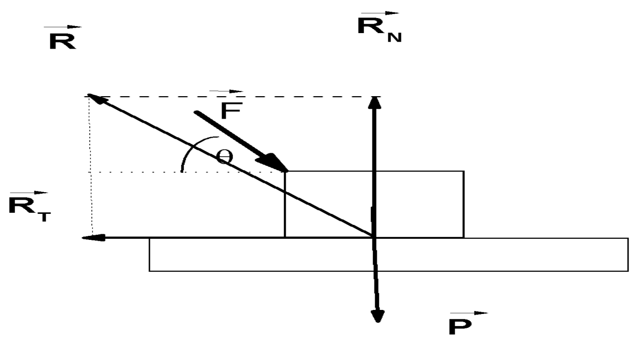

FIGURE 7.5 – Le plan horizontal

7.7 Corrigés

Exercice 1

1. La masse est soumise à trois forces le poids, la réaction et la force $|\overrightarrow{F}|$ (figure 7-6). Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{\gamma}$$
$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$$

Si on choisi la base des coordonnées cartésiennes, il faut projeter cette équation sur cette base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et de coordonnées (x,y), nous obtenons :

$$\mid \overrightarrow{F} \mid \cos\alpha = m \mid \overrightarrow{\gamma_x} \mid \tag{7.19}$$
$$-mg + \mid \overrightarrow{R} \mid - \mid \overrightarrow{F} \mid \sin\alpha = 0 \tag{7.20}$$

A partir de l'équation (7-19), nous déterminons l'accélération :

$$\mid \overrightarrow{\gamma_x} \mid = \frac{\mid \overrightarrow{F} \mid \cos\alpha}{m}$$

2. Le corps m est soumis maintenant à une force de frottement qu'on notera par $\mid \overrightarrow{R_T} \mid$. Nous aurons :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$$

et après projection :

$$- \mid \overrightarrow{R_T} \mid + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma} \tag{7.21}$$

$$-mg + \mid \overrightarrow{R_N} \mid - \mid \overrightarrow{F} \mid \sin\alpha = 0 \tag{7.22}$$

Sachant que les composantes $\mid \overrightarrow{R_T} \mid$ et $\mid \overrightarrow{R_N} \mid$ sont reliées par le coefficient de frottement dynamique μ_d :

$$\frac{\mid \overrightarrow{R_T} \mid}{\mid \overrightarrow{R_T} \mid} = \mu_d$$

Nous obtenons :

$$\mid \overrightarrow{R_T} \mid = \mu_d \mid \overrightarrow{R_N} \mid \tag{7.23}$$

A partir de la relation (7-20) nous tirons :

$$\mid \overrightarrow{R_N} \mid = mg + \mid \overrightarrow{F} \mid \sin\alpha \tag{7.24}$$

et si nous injectons la relation (6-24) dans (7-23), il vient :

$$\mid \overrightarrow{R_T} \mid = \mu_d (mg + \mid \overrightarrow{F} \mid \sin\alpha)$$

Puis nous substituons (7-) dans (7-), nous obtenons la relation de accélération demandée :

$$\mid \overrightarrow{\gamma_x} \mid = \frac{\mid \overrightarrow{F} \mid}{m} (\cos\alpha - \mu_d \sin\alpha - \mu_d mg)$$

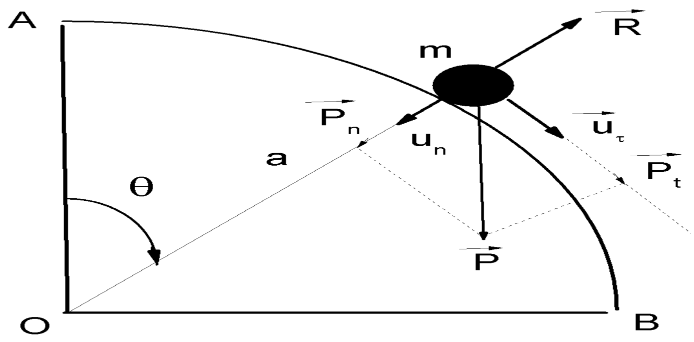

FIGURE 7.6 – Le dôme sphérique-frenet

Exercice 2

La masse ponctuelle m se déplace sans frottement sur un dôme sphérique de rayon a. La masse est soumise à deux forces son poids et la réaction du support (figure 7-7).

Si nous appliquons le principe fondamental de la dynamique et la base de coordonnée de Frenet :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m\overrightarrow{\gamma} \tag{7.25}$$

Nous choisissons la base $(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_t})$, il faut projeter cette équation sur cette base :

$$mg\cos\theta - \mid \overrightarrow{R} \mid = m \mid \overrightarrow{\gamma_n} \mid$$
$$mg\sin\theta = m \mid \overrightarrow{\gamma_t} \mid$$

De plus, les accélérations tangentielles et normales dans la base de Frenet sont respectivement :

$$\mid \overrightarrow{\gamma_t} \mid = \frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt}$$

$$\mid \overrightarrow{\gamma_n} \mid = \frac{\mid \overrightarrow{v} \mid^2}{\rho}$$

et comme le rayon de courbure est ρ=a

$$\begin{cases} \mid \overrightarrow{\gamma_t} \mid & = & \frac{d\mid\overrightarrow{v}\mid}{dt} \\ \mid \overrightarrow{\gamma_n} \mid & = & \frac{\mid\overrightarrow{v}\mid^2}{a} \end{cases}$$

Nous injectons ces deux dernieres relations dans les equations (6-35) et (6-36), il vient :

$$\frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt} = g \sin\theta$$

$$\frac{\mid \overrightarrow{v} \mid}{a} = -\frac{\mid \overrightarrow{R} \mid}{m} + g \cos\theta$$

Si nous appliquons le principe fondamental de la dynamique et la base de coordonnée polaire :

Nous choisissons la base ($\overrightarrow{u_r}$,$\overrightarrow{u_\theta}$), il faut projeter cette équation sur cette base :

$$-mg\cos\theta + \mid \overrightarrow{R} \mid = m \mid \overrightarrow{\gamma_r} \mid$$

$$mg \sin\theta = m \mid \overrightarrow{\gamma_\theta} \mid$$

De plus, les accélérations radiale et angulaire dans la base de coordonnée polaire sont respectivement

$$\mid \overrightarrow{\gamma_r} \mid = (\frac{d^2r}{dt^2} + r(\frac{d\theta}{dt})^2)\overrightarrow{u_r} = -a\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mid \overrightarrow{\gamma_\theta} \mid = (2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2})\overrightarrow{u_\theta} = a\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

car, $\frac{dr}{dt}$=0

Les équations (6-41) et (6-42) se transforment alors en :

$$-mg\cos\theta + \mid \overrightarrow{R} \mid = -ma\frac{d\theta}{dt}$$

$$mg \sin\theta = ma\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Et comme il existe une relation entre la vitesse linaire $\mid \overrightarrow{v} \mid$ et la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ donnée par la relation :

$$\mid \overrightarrow{v} \mid = a\frac{d\theta}{dt}$$

Qui devient après une dérivation par rapport au temps :

$$\frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt} = a\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Si nous remplaçons cette dernière équation dans l'équation (6-46), nous obtenons :

$$\frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt} = g \sin\theta$$

$$\frac{|\overrightarrow{v}|}{a} = -\frac{|\overrightarrow{R}|}{m} + g\cos\theta$$

Pour calculer le module de la vitesse $|\overrightarrow{v}|$, nous integrons lequation (6-49),

$$\frac{d|\overrightarrow{v}|}{dt} = g\sin\theta$$

D'après la relation liant la distance x a l'angle θ, donnée par :

$$x = a\theta$$

En plus sa dérivée par rapport au temps conduit a :

$$\frac{dx}{dt} = mid\overrightarrow{v}| = a\frac{d\theta}{dt}$$

Nous tirons dt de cette dernière expression, il vient :

$$dt = a\frac{d\theta}{|\overrightarrow{v}|}$$

Nous remplaçons maintenant l'expression de dt trouvée ci-dessus dans l'équation (6-54), nous obtenons :

$$|\overrightarrow{v}|\,d\,|\overrightarrow{v}| = ag\sin\theta d\theta$$

Son integration :

$$\int |\overrightarrow{v}|\,d\,|\overrightarrow{v}| = ag\int \sin\theta d\theta$$

conduit a :

$$\frac{|\overrightarrow{v}|^2}{2} = ag\cos\theta + C$$

Ou C est une constante qu'on déterminera par les conditions initiales. En effet a t=0, la masse m est lâchée du point A sans vitesse initiale (θ=0 et $|\overrightarrow{v}|$=0). La constante sera alors nulle, nous déduisons la vitesse demandée :

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{2ag(cos\theta - 1)}$$

et la reaction $|\overrightarrow{v}|$ sera :

$$|\overrightarrow{R}| = mg(1 - cos\theta)$$

Exercice 3

1. Les forces appliquées sur la masse m sont le poids et la force de rappel (figure 7-8).
2. En utilisant le principe fondamentale de la dynamique (P.F.D), Le ressort de longueur à vide l_0 s'allonge d'une quantité Δl sous l'effet de la masse m avec Δl=l-l_0 est l'allongement et l est la longueur du ressort chargée. A l'équilibre :

$$\sum \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_0} = \overrightarrow{0}$$

Par projection sur un axe vertical Oz :

$$mg - \mid \overrightarrow{T_0} \mid = \overrightarrow{0}$$

et comme,

$$\mid \overrightarrow{T_0} \mid = k\Delta l$$

$$mg - k\Delta l = 0$$

Nous écartons la masse m de sa position d'équilibre d'une grandeur z puis nous laissons le système oscillé librement. La relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{\gamma}$$

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$$

conduit, après une projection suivant un axe vertical Oz, à l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0$$

l'équation ci-dessus est une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

et qui admet une solution de la forme :

$$z(t) = z_0 \sin(\omega t + \phi)$$

où ω et ϕ sont respectivement la pulsation des oscillations en (rd/s) et la phase initiale en (rd). La periode des oscillations T(s) est donné par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

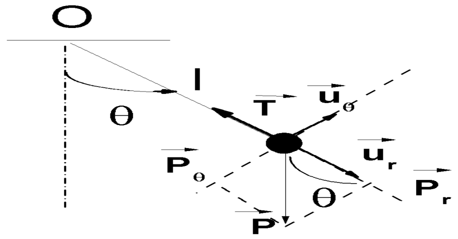

FIGURE 7.7 – Le pendule simple

Exercice 4

1. Les forces appliquées sur la masse m sont le poids et la tension du fil (figure 7-9).
2. Nous utilisons le principe fondamentale de la dynamique,

$$\sum \overrightarrow{M_i} = J_Z \frac{d^2 \overrightarrow{\theta}}{dt^2}$$

où
- J_Z est le moment d'inertie par rapport à un axe de rotation Z. Pour le pendule simple $J_Z = ml^2$
- θ est l'angle mesuré par rapport à la position d'équilibre.

Conduit, après une projection suivant un axe vertical Oz, à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (7.26)$$

l'équation ci-dessus est une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Et qui admet une solution de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

où ω et ϕ sont respectivement la pulsation des oscillations en (rd/s) et la phase initiale en (rd). La periode des oscillations T(s) est donné par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Exercice 5

En partant d'une situation d'équilibre, on écarte le pendule de torsion de sa position d'équilibre avec un angle θ puis on laisse le système oscille librement. La relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \overrightarrow{M_i} = J_Z \frac{d^2\overrightarrow{\theta}}{dt^2}$$

Avec, J_Z est le moment d'inertie par rapport à un axe de rotation Z. Après une projection suivant un axe vertical Oz, à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_Z}\theta = 0$$

l'équation ci-dessus est une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Et qui admet une solution de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \tag{7.27}$$

où ω et ϕ sont respectivement la pulsation des oscillations en (rd/s) et la phase initiale en (rd). La periode des oscillations T(s) est donné par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{C}{J_Z}}$$

Exercice 6

Le corps de masse m est accéléré depuis son état de repos dans un champ gravitationnel constant, il décrit un mouvement. En appliquant Le système de coordonné de telle façon que l'axe des z indique la direction du mouvement, et en résolvant l'équation du principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{g}$$

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$$

Par projection suivant l'axe du mouvement

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \tag{7.28}$$

Une première intégration de l'équation (7-22), donne,

$$\frac{dz}{dt} = gt + C_1 \tag{7.29}$$

Nous identifions le premier membre de l'équation (7-23) comme étant une vitesse :

$$\overrightarrow{v} = gt + C_1$$

Pour déterminer la constante C_1, nous supposerons que la masse m est lâchée a t=0 avec une vitesse initiale v_0. Nous obtenons :

$$C_1 = \overrightarrow{v_0}$$

Nous aurons,

$$\overrightarrow{v} = gt + \overrightarrow{v_0} \tag{7.30}$$

Puis après une autre intégration de l'équation (7-24) de la vitesse, conduit a :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$$

Nous introduisons une autre condition initiale pour determiner la constante C_2, en effet a t=0, l'abscisse z est z_0. Nous obtenons l'équation horaire du mouvement de la chute libre :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

Chapitre 8

Théorème du moment cinétique

8.1 Moment d'une force

Le moment d'une force par rapport à un point, noté $\overrightarrow{M}_{/O}$, est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point. Le moment d'une force par rapport à un point O est un produit vectoriel entre la force $\overrightarrow{F}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{M}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \tag{8.1}$$

8.2 Moment cinétique

Le moment cinétique, noté $\overrightarrow{L_{/O}}$, est une grandeur vectorielle conservée utilisée pour décrire l'état général de rotation d'un système physique autour d'un axe fixe. Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O est un produit vectoriel entre la force $\overrightarrow{F}$ le vecteur quantité de mouvement $m\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{L_{/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \tag{8.2}$$

8.3 Centre d'inertie

Le Centre d'inertie d'un système de points matériels est le centre de gravité, noté G, d'un système de points matériels M_i de masse m_i, c'est le barycentre des points m_i affectés des coefficients Mi, soit :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

Si O est l'origine du référentiel d'étude, alors

$$\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}$$

Ou encore,

$$\overrightarrow{GM_i} = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM_i}$$

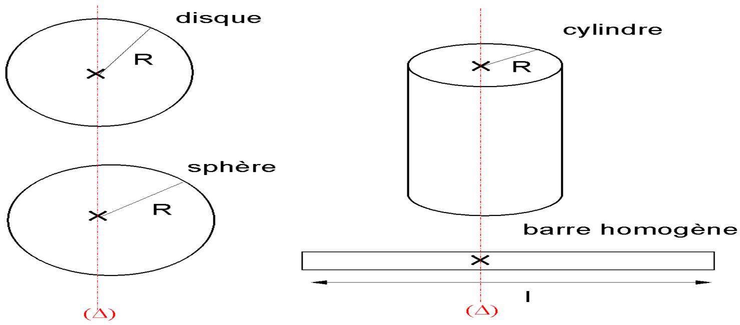

FIGURE 8.1 – Le moment d'inertie

D'où

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{8.3}$$

8.4 Moment d'inertie

Le moment d'inertie, noté $J_{/\Delta}$, est une grandeur physique qui caractérise la géométrie des masses d'un solide en rotation autour d'un axe Δ. Si cet axe de rotation passe par le centre de gravité des corps géométriques figure (7-2), leurs moments d'inerties sont :

– Un disque de masse m et de rayon R

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m R^2 \tag{8.4}$$

– Une sphére pleine de masse m et de rayon R

$$J_{/\Delta} = \frac{2}{5} m R^2 \tag{8.5}$$

– Un cynlindre plein de masse m et de rayon R

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m R^2 \tag{8.6}$$

– Un cynlindre creux de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2) \tag{8.7}$$

– Une barre homogène de masse m et de longueur l

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} m l^2 \tag{8.8}$$

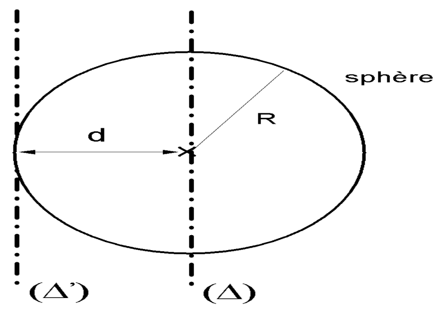

FIGURE 8.2 – Le moment d'inertie

Si l'axe de rotation ne passe pas par le centre de gravité des corps géométriques, on appliquera alors le théorème de Huygens (figure 8-2)

$$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + md^2 \tag{8.9}$$

Ou Δ' et δ sont respectivement les axes de rotation et l'axe passant par le centre de gravité du corps géométrique de masse m. La distance d sépare les deux axes. Prenons comme exemple le moment d'inertie d'une sphére pleine de masse m et de rayon R. L'axe de rotation ne passe pas par son centre de symétrie gravité, nous aurons :

$$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + md^2 \tag{8.10}$$

$$J_{/\Delta'} = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 \tag{8.11}$$

Ou $J_{/\Delta}$ est le moment d'inertie définie par la relation (8-5) avec $d = R$

8.5 Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique permet de résoudre un problème physique, comme le principe fondamental fondamental de la dynamique. Le PFD relie les forces appliquées au point matériel et la variation de sa quantité de mouvement, le théorème du moment cinétique relie la somme des moments de ces forces par rapport au temps à un point donné et la variation du moment cinétique par rapport à ce même point. Le théorème du moment cinétique montre que la dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport au temps est égale a la somme des moments des forces appliquées.

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_{/O}} \tag{8.12}$$

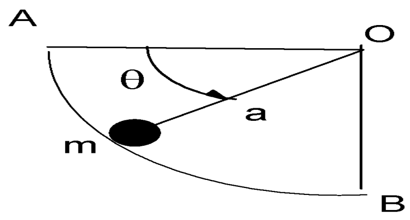

FIGURE 8.3 – Le moment cinétique

8.6 Exercice

Exercice 1

On considère le mouvement d'une particule de masse m, sur une piste lisse de rayon a. Cette masse est lâchée à partir d'un point A sans vitesse initiale figure(7-3). En utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet) trouver l'expression de l'équation qui permet de déterminer $|\overrightarrow{v}|$.

Exercice 2

Un pendule simple est constitué d'une masse m accroché à un fil de longueur l. On écarte le pendule de sa position d'équilibre avec un angle θ et on le lâche sans vitesse initial. Il aquiert un mouvement sinusoidale.

1. Représenter les forces appliquées sur la masse m
2. En appliquant le théorème du moment cinétique et les coordonnées polaires, retrouver l'équation différentielle du mouvement pour de faibles oscillations.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{8.13}$$

Ou g est l'accélération de la pesanteur.

8.7 Corrigés

Exercice 1

La masse est soumise à deux forces le poids $\overrightarrow{P}$ et la réaction $\overrightarrow{R}$ (figure 8-5). Il y'a donc deux moments de forces par rapport au point O, que nous notererons $M_{\overrightarrow{P}/O}$ et $M_{\overrightarrow{R}/O}$ qui sont donnés respectivement par :

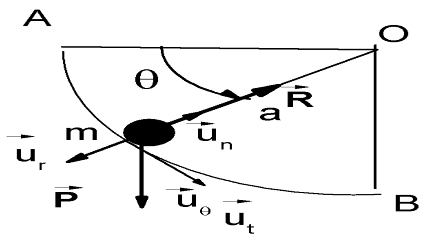

FIGURE 8.4 – Le moment cinétique

$$M_{\overrightarrow{P}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} \tag{8.14}$$

et,

$$M_{\overrightarrow{R}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{R} \tag{8.15}$$

et leurs calculs conduit à :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_n} & \overrightarrow{u_t} & \overrightarrow{k} \\ a & 0 & 0 \\ mg\sin\theta & mg\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= amg\cos\theta\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{R} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_n} & \overrightarrow{u_t} & \overrightarrow{k} \\ a & 0 & 0 \\ -\mid\overrightarrow{R}\mid & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{0}$$

Nous appliquons le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{/O} \tag{8.16}$$

Pour cela, nous calculons en premier lieu le moment cinetique $\overrightarrow{L}_{/O}$:

$$\overrightarrow{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \tag{8.17}$$

un calcul plus detaillé donne :

$$\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_n} & \overrightarrow{u_t} & \overrightarrow{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & m \mid \overrightarrow{v} \mid & 0 \end{vmatrix}$$

$$= am \mid \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{k}$$

La derivéé du moment cinetique par rapport au temps conduit à :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = am\frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt}\overrightarrow{k} \tag{8.18}$$

le deuxieme membre de l'equation (2-) traduit la somme des moments de forces :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_{/O} = \overrightarrow{M}_{P/O} + \overrightarrow{M}_{R/O} = amg\cos\theta\,\overrightarrow{k} \tag{8.19}$$

l'egalité des deux dernieres equations membre à membre conduit à l'equation du mouvement demandé :

$$\frac{d \mid \overrightarrow{v} \mid}{dt} = g\cos\theta \tag{8.20}$$

Exercice 2

1. La masse est soumise à deux forces le poids $\overrightarrow{P}$ et la tension du fil $\overrightarrow{T}$ figure(8-6). Il y'a donc deux moments de forces par rapport au point O, que nous noterons par $\mathrm{M}_{\overrightarrow{P}/O}$ et $\mathrm{M}_{\overrightarrow{T}/O}$ qui sont respectivement :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= mgl\sin\theta\,\overrightarrow{k}$$

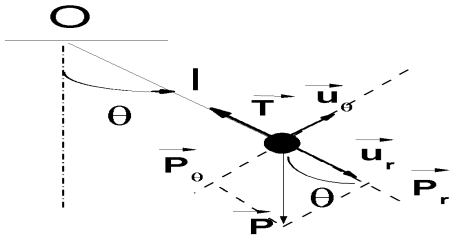

FIGURE 8.5 – Le pendule simple-solution

et,

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ -\mid \overrightarrow{T} \mid & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{0}$$

Nous appliquons le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = \overrightarrow{M}_{P/O} + \overrightarrow{M}_{T/O} \tag{8.21}$$

Le calcul du moment cinetique $\overrightarrow{L}_{/O}$ conduit à :

$$\overrightarrow{L}_{/O} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ m \mid \overrightarrow{v_r} \mid & m \mid \overrightarrow{v_\theta} \mid & 0 \end{vmatrix}$$

où les composantes du vecreur vitesse $\overrightarrow{v}$ en coordoonnés polaire sont :

$$\begin{cases} \mid \overrightarrow{v_r} \mid & = \frac{dr}{dt} \\ \mid \overrightarrow{v_\theta} \mid & = r\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

et comme

$$\begin{cases} r & = l \\ \frac{dr}{dt} & = 0 \end{cases}$$

le moment cinetique s'ecrit :

$$\overrightarrow{L}_{/O} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & ml\frac{d\theta}{dt} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= ml\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{k}$$

et sa derivéé sera :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{k} \tag{8.22}$$

et comme,

$$\overrightarrow{M}_{P/O} + \overrightarrow{M}_{T/O} = mgl\sin\theta\,\overrightarrow{k} \tag{8.23}$$

l'egalité des equations (8-22) et (8-23) conduit à l'équation différentielle du mouvement pour de faibles oscillations.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{8.24}$$

Quatrième partie

Travail et Energie

Chapitre 9

Travail

9.1 Travail d'une force

9.1.1 Travail d'une force constante

On définit le travail, noté $W_{\overrightarrow{F}}$, d'une force $\overrightarrow{F}$ constante en module soumis à un mouvement rectiligne, comme étant un produit scalaire entre la force $\overrightarrow{F}$ et son déplacement $\overrightarrow{l}$. L'unité du travail dans le système (S.I) est le joule.

$$W_{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{l} \tag{9.1}$$

$$W_F =\mid \overrightarrow{F} \mid . \mid \overrightarrow{l} \mid \cos\alpha \tag{9.2}$$

Ou α est l'angle compris entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{l}$. Selon la valeur de cet angle, on peut distinguer les cas suivants :

- Si $\alpha{=}\frac{\pi}{2}$, le travail est nul ($W_{\overrightarrow{F}}{=}0$).
- Si $0{<}\alpha{<}\frac{\pi}{2}$, le travail est moteur ($W_{\overrightarrow{F}}{>}0$).
- Si $\frac{\pi}{2}{<}\alpha{<}\pi$, le travail est résistant ($W_{\overrightarrow{F}}{<}0$).

9.1.2 Travail d'une force variable

Le travail élémentaire pour un petit déplacement $\overrightarrow{dl}$ du point d'application de la force $\overrightarrow{F}$, variable en module sur une courbe quelconque entre deux points A et B est donné par la relation :

$$dW_{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{l} \tag{9.3}$$

Le travail total effectue du point A au point B par la force $\overrightarrow{F}$ est :

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int dW_{\overrightarrow{F}} = \int \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{l} \tag{9.4}$$

Nous pourrons expliciter l'expression xxx dans les systèmes de coordonné suivant :

- En coordonnée cartésienne, le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et le vecteur force $\overrightarrow{F}$ sont respectivement,

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k} \tag{9.5}$$

et

$$\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k} \tag{9.6}$$

Le travail devient :

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz \tag{9.7}$$

– En coordonnée cylindrique, le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et le vecteur force $\overrightarrow{F}$ sont respectivement,

$$dl = (dr)\overrightarrow{u_r} + (rd\theta)\overrightarrow{u_\theta} + (dz)\overrightarrow{u_z} \tag{9.8}$$

et,

$$\overrightarrow{F} = F_r\overrightarrow{u_r} + F_\theta\overrightarrow{\theta} + F_z\overrightarrow{k} \tag{9.9}$$

Le travail devient :

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int F_r dr + \int rF_\theta d\theta + \int F_z dz \tag{9.10}$$

Chapitre 10

Energie

10.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique, notée E_c, d'un point matériel est une quantité scalaire définie par :

– En mouvement rectiligne

$$E_c = \frac{1}{2}m \mid \overrightarrow{v} \mid^2 \tag{10.1}$$

Ou m et $\mid \overrightarrow{v} \mid$ sont respectivement la masse et le module de la vitesse.

– En mouvement circulaire

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \mid \overrightarrow{\omega} \mid^2 \tag{10.2}$$

Ou J_Δ et ω sont respectivement le moment d'inertie et la vitesse angulaire.

10.2 Energie potentielle

L'énergie potentielle, notée E_p, d'un point matériel est une quantité scalaire définie par :

– L'énergie potentielle de pesanteur

$$E_p = mgh \tag{10.3}$$

Ou g et h sont respectivement l'accélération de la pesanteur et la hauteur.

– L'énergie potentielle élastique

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{10.4}$$

Ou k et x sont respectivement la constante de raideur du ressort et son allongement.

– L'énergie potentielle de torsion

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 \tag{10.5}$$

Ou C et θ sont respectivement la constante de torsion du ressort et l'angle de torsion.

10.3 Energie mécanique

L'énergie mécanique ou totale, notée E_m, d'un point matériel est une quantité scalaire définie comme étant la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p \tag{10.6}$$

Rappelons que l'énergie mécanique se conserve dans le cas d'un système isolé, c'est à dire en absence de frottement, on écrit dans ce cas :

$$E_m = cte \tag{10.7}$$

10.4 Théorème de la variation de l'énergie cinétique

Ce théorème montre que la variation de l'énergie cinétique, notée ΔE_c, entre l'état final E_f et l'état initiale E_i est égale a la somme des travaux des force extérieurs. Ce théorème s'ennonce par :

$$\Delta E_c = \sum W_{\overrightarrow{F}_i} \tag{10.8}$$

10.5 Force conservative

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiales et finales W_i=W_f. Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivie c'est donc une force conservative. Les forces de frottements ne sont pas conservatives car leur travail dépend toujours du chemin suivi. Une autre conséquence importante des forces conservatives est que leur rotationnel est nul :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0} \tag{10.9}$$

Si la force f est conservative, elle derive d'un potentiel que nous noterons par $U(x, y, z)$ donné par la relation :

$$\overrightarrow{Grad}U(x, y) = \overrightarrow{F}(x, y) \tag{10.10}$$

En coordonnés cartesiennes, elle sexprime par :

$$\overrightarrow{Grad}U(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}\overrightarrow{k} \tag{10.11}$$

et comme la force sexprime aussi en coordonné cartesienne sous la forme :

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k} \tag{10.12}$$

nous aurons par identification :

$$\begin{cases} F_x &= -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

10.6 Exercices

Exercice 1

Soit le champ de force définie par :

$$\overrightarrow{F} = y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} \tag{10.13}$$

1. Calculer le travail de la force $\overrightarrow{F}$ du point $O(0,0)$ vers le point $A(1,1)$ suivant les chemins :
   – $O(0,0)$ vers le point $A(1,1)$ caractérisé par une droite
   – $O(0,0) \longrightarrow B(1,0) \longrightarrow A(1,1)$
   – $O(0,0) \longrightarrow C(0,1) \longrightarrow A(1,1)$
2. Calculer le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$.
3. Si la force est conservative, trouver le potentiel $U(x,y)$ duquel dérive ce champ. On prendra : $U(0,0)$=0.

Exercice 2

Soit le champ de force définie par :

$$\overrightarrow{F} = (x - ay)\,\overrightarrow{i} + (3y - 2x)\,\overrightarrow{j} \tag{10.14}$$

Où a est une constante.

1. Calculer le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$.
2. Calculer le travail de la force du point $O(0,0)$ vers le point $A(2,4)$ suivant les chemins :
   – OA caractérisé par une droite $y = 2x$.
   – OBA avec $B(0,4)$.
3. Sachant que la force $\overrightarrow{F}$ est conservative, trouver la valeur de a.
4. En déduire l'expression du potentiel $U(0,0)$ duquel dérive ce champ. On prendra : $U(0,0)$=0.

Exercice 3

Soit la force $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{F} = (2xz + yz)\,\overrightarrow{i} + (ax^2 + by^2 + cz^2)\,\overrightarrow{j} \tag{10.15}$$

Où a, b et c sont des constantes.

1. Trouver les constantes a,b et c pour que $\overrightarrow{F}$ soit conservative , sachant qu'au point (1,1,1) la force est $\overrightarrow{F}$ =2 $\overrightarrow{i}$ + $\overrightarrow{j}$ -3 $\overrightarrow{k}$

Exercice 4

Une particule de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire AOB de rayon a (figure xxx). On utilise le système de coordonnées polaires.

1. Déterminer le travail du poids et le travail de la force de réaction du point A à M.
2. Déterminer l'énergie potentielle Ep de m au point M. on donne Ep (B)=0.
3. Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la vitesse de m au point M.
4. Déduire son énergie cinétique E_c.
5. Calculer l'énergie mécanique E_m en ce pont M.
6. Représenter E_p, E_c et E_m. Discuter.

Exercice 5

Une masse m=1Kg est liée a un ressort de constante de raideur k=100N/m, l'autre extrémité du ressort est liée au point C. la masse m peut glisser sur la surface horizontale. En premier lieu, la masse est au repos au point O d'équilibre.

1. On suppose qu'il n'existe pas de frottement, on déplace la masse m du point O au point A tel que OA=a=5cm et on lâche a t=0 sans vitesse initiale.
   - déterminer le travail de la force de rappel du ressort quand m se déplace de A a O.
   - calculer la vitesse de m au point O.
2. On supposera maintenant qu'il existe des frottements. On donne le coefficient dynamique mud=0.2. Calculer la vitesse de m au point 0.

Exercice 6

On écarte de sa position d'équilibre une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur l. On repère la position de la masse m par l'angle θ entre la verticale et la direction du fil. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème de la variation de l'énergie cinétique.

10.7 Corrigés

Exercice 1

Soit le champ de force définie par :

$$\overrightarrow{F} = y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} \tag{10.16}$$

1. Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ peut etre calculer par la formule suivante :

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{l} \tag{10.17}$$

En coordonnée cartésienne, le travail est

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} \tag{10.18}$$

Si nous remplaçons l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ dans la relation ci-dessus, il vient :

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int ydx + xdy \tag{10.19}$$

– Le chemin du point $O(0,0)$ vers le point $A(1,1)$ est caractérisé par une droite de la forme : y=x. Si nous différencions y, nous aurons dy=dx et l'intégral (9-19) devient :

$$W_{\overrightarrow{F}} = 2\int xdx = [x^2]_0^1 = 1joule \tag{10.20}$$

– Le chemin du $O(0,0)$ vers le point $A(1,1)$ passant par le point $B(1,0)$ se divise en deux chemins :
le chemin OB d'équation y=0 ou encore dy=0, son travail est donc :

$$W_{\overrightarrow{F}}^{OB} = 0 \tag{10.21}$$

Le chemin BA d'équation x=1 ou encore dx=0, son travail est donc :

$$W_{\overrightarrow{F}}^{BA} = \int dy = [y^2]_0^1 = 1joule \tag{10.22}$$

Le travail total OA est donc

$$W_{\overrightarrow{F}}^{OA} = W_{\overrightarrow{F}}^{OB} + W_{\overrightarrow{F}}^{BA} = 1joule \tag{10.23}$$

– Le chemin $O(0,0) \longrightarrow C(0,1) \longrightarrow A(1,1)$ se divise en deux sous chemins OC et CA d'equations respectives x=0 (dx=0) et y=1 (dy=0).Nous aurons alors :

$$W_{\overrightarrow{F}}^{OC} = 0 \tag{10.24}$$

et,

$$W_{\overrightarrow{F}}^{CA} = \int dx = [x^2]_0^1 = 1joule \tag{10.25}$$

et enfin,

$$W_{\overrightarrow{F}}^{OA} = W_{\overrightarrow{F}}^{OC} + W_{\overrightarrow{F}}^{CA} = 1joule \tag{10.26}$$

Nous remarquons que quelque soit le chemin pris par la force, son travail ne change pas, il ne dépend pas du chemin suivi, elle est dite une force conservative

2. Le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$ se calcule à partir du :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Le calcul du determinant conduit à :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \tag{10.27}$$

Le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$ est nul c'est donc une force conservative

3. La force est conservative, elle dérive d'un potentiel$U(x, y)$

$$\overrightarrow{Grad}U(x, y) = \overrightarrow{F}(x, y) \tag{10.28}$$

Le potentiel $U(x, y)$ est donné en coordonnés cartésiennes par la relation :

$$\overrightarrow{Grad}U(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\overrightarrow{j} \tag{10.29}$$

Et comme la force s'exprime sous la forme :

$$\overrightarrow{F}(x, y) = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} \tag{10.30}$$

Nous aurons par identification :

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = y \tag{10.31}$$

$$F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = x \tag{10.32}$$

A partir de l'équation (9-31), nous tirons :

$$U(x, y) = -\int y dx \tag{10.33}$$

Et le calcul de cette intégrale conduit à :

$$U(x, y) = -yx + C_1(y) \tag{10.34}$$

Pour determiner la constante $C_1(y)$, nous derivons l'expression (9-34) par rapport à à y :

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -x + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} \tag{10.35}$$

L'identification des equations (9-32) et (9-35) conduit à :

$$-x + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} = -x \tag{10.36}$$

d'où la constante $C_1(y)$:

$$C_1(y) = C_2 \tag{10.37}$$

Si nous injectons $C_1(y)$ deduite par la relation (9-37) dans celle de l'equation (9-34), il vient :

$$U(x,y) = -yx + C_2 \tag{10.38}$$

On prendra la condition initiale $U(0,0)$=0 pour trouver la constante C_2. Il viendra : C_2=0 et enfin le potentiel cherché est :

$$U(x,y) = -yx \tag{10.39}$$

Exercice 2

Soit le champ de force définie par :

$$\overrightarrow{F} = (x - ay)\overrightarrow{i} + (3y - 2x)\overrightarrow{j} \tag{10.40}$$

Où a est une constante.

1. Le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$.

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - ay & 3y - 2x & 0 \end{vmatrix}$$

Le calcul du determinant conduit à :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = (-2 + a)\overrightarrow{k} \tag{10.41}$$

2. Le travail de la force du point $O(0,0)$ vers le point $A(2,4)$

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int (x - ay)dx + (3y - 2x)dy \tag{10.42}$$

– suivant le chemin OA caractérisé par la droite $y = 2x$ avec la differentielle $dy = 2dx$.

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int (9x - 2ax)dx == [\frac{9}{2}x^2 - ax^2]_0^2 = 18 - 4a \qquad (10.43)$$

– Le OBA avec $B(0, 4)$.
Le chemin du $O(0, 0)$ vers le point $A(2, 4)$ passant par le point $C(0, 4)$ se divise en deux chemins :
Le chemin OC d'équation x=0 ou encore dx=0, son travail est donc :

$$W_{\overrightarrow{F}}^{OC} = \int 3ydy = [\frac{3}{2}y^2]_0^2 = 6joule \qquad (10.44)$$

Le chemin CA d'équation x=4 ou encore dx=0, son travail est donc :

$$W_{\overrightarrow{F}}^{CA} = \int (3y - 8)dy = [\frac{3}{2}y^2 - 8y]_0^2 = -10joule \qquad (10.45)$$

Le travail total OCA est donc

$$W_{\overrightarrow{F}}^{OA} = W_{\overrightarrow{F}}^{OC} + W_{\overrightarrow{F}}^{CA} = -4joule \qquad (10.46)$$

3. Si la force $\overrightarrow{F}$ est conservative, nous aurons deux conditions :
Son travail ne depend pas du chemin suivi, nous ecrivons

$$W_{\overrightarrow{F}}^{OBA} = W_{\overrightarrow{F}}^{OCA} \qquad (10.47)$$

L'egalité des equations (9-43) et (9-46) donne :

$$18 - 4a = -4 \qquad (10.48)$$

D'où la constante a demandé : a=2 trouver la valeur de a.
Nous pouvons aussi deduire la valeur de la constante a à partir du rotationnel. En effet si la force est conservative alors

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \qquad (10.49)$$

Nous obtiendrons :

$$-2 + a = 0 \qquad (10.50)$$

Et enfin a=2

Bibliographie

[1] P. Benoist-Gueutal et M. Courbage, mathématique pour la physique, tome 1, 2, 3, édition Eyrolles, Paris (1992)

[2] Michel Henri et Nicolas Delorme Mini manuel de mécanique du point, édition Dunod (2008).

[3] Sylvie Pommier et Yves Berthaud, Mécanique Générale, édition DUNOD (2010).

[4] Horst Stocker, Francis Jundt et Georges Guillaume, Toute la physique, édition Dunod (1999). - http ://cours-examens.org/index.php/etudes-superieures/tronc-commun-technologie

[5] TRAN Minh Tâm , physique générale, polycopié , http ://lphe.epfl.ch/ mtran/ . - A. CHAFA, A.DIB , F.CHAFA, MEKIDECHE, A.DERBOUZ, FKAOUAH, Polycopié d'examens de mécanique du point, , USTHB, www.usthb.dz/fphy/IMG/pdf/examens.pdf

[6] Alonso M. et Finn E. , Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique, Dunod, (2004).

[7] Feynman R., Le cours de physique de Feynman, 5 volumes, Dunod, (2013).

[8] Stocker H., Jundt F. et Guillaume G., Toute la physique, Dunod, (2007

[9] ZianiI Nossair et Boutaous Ahmed. Mecanique du point materiel. Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algerie (2016)