



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran «Mohamed Boudiaf»

FACULTE DE GENIE MECANIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

LABORATOIRE DE MECANIQUE APPLIQUEE

POLYCOPE

Modes de Transfert thermique

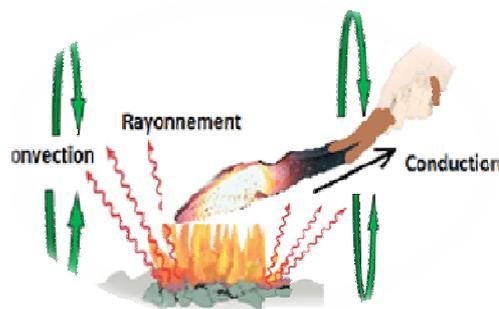
(Cours & Exercices corrigés)

(Ce polycope est destiné aux étudiants de Licence LMD, Energétique et Construction Mécanique)

PRESENTE PAR

M. Mustapha Bordjane

(Maître de Conférences B)



ANNEE 2017

Sommaire

	Page
Sommaire	
Avant-propos	
Chapitre I: Généralités sur les phénomènes du transfert thermique	1
I-1) Introduction	1
I-2) Modes du transfert thermique	2
I-3) Lois fondamentales du transfert de la chaleur	4
I-3-1) Loi fondamentale de la conduction-Loi de Fourier	4
I-3-2) Loi fondamentale de la convection-Loi de Newton	6
I-3-3) Loi fondamentale de rayonnement-Loi de Stefan-Boltzmann	6
Exemples	7
Exercices corrigés	8
Chapitre II: Conduction unidimensionnelle en régime permanent	11
II-1) Développement de l'équation différentielle générale de la conduction	11
II-2) Développement de l'équation différentielle générale de la conduction en coordonnées cylindriques	13
II-3) Développement de l'équation différentielle générale de la conduction en coordonnées sphériques	13
II-4) Conditions aux limites	14
II-5) Résolution de l'équation différentielle générale de la chaleur en régime permanent	14
II-5-1) géométrie plane (Mur simple)	14
II-5-2) géométrie cylindrique (Cylindre creux à surfaces latérales isothermes)	15
II-5-3) géométrie sphérique (Sphère creuse à surfaces isothermes)	16
II-6) Théorie des ailettes	18
II-6-1) Application des ailettes longues	18
II-6-2) Développement de l'équation générale pour une ailette unidimensionnelle	18
II-6-3) Solution de l'équation générale de conduction pour les ailettes unidimensionnelles	20
II-6-3-1) Flux total	21
II-6-3-2) Efficacité totale	21
Exercices corrigés	22
Chapitre III: Conduction bidimensionnelle en régime permanent	28
III-1) Concept de facteur de forme entre deux surfaces isothermes (surfaces équivalentes)	28
III-1-1) Facteur de forme pour une paroi prismatique (Mur, 3D)	28
III-1-2) Facteur de forme pour une paroi cylindrique	29
III-1-3) Facteur de forme pour une paroi sphérique	29
III-2) L'analogie électrique et ses limites	30
III-3) Méthodes numériques (différences finies)	31
III-4) Analyse mathématique de la conduction bidimensionnelle (Application de la méthode de séparation des variables)	33
Exercices corrigés	35

Sommaire (suite)

	Page
Chapitre IV: Conduction en régime transitoire	38
IV-1) Conduction avec températures limites imposées	38
IV-2) Méthodes numériques (différences finies) en régime transitoire	40
Exercices corrigés	41
Chapitre V: Transfert de la chaleur par convection	44
V-1) Introduction	44
V-2) Développement des équations générales de conservation	44
V-2-1) Equation de continuité	45
V-2-2) Equation de conservation de la quantité de mouvement	46
V-2-3) Equation de conservation de l'énergie	47
V-2-3-1) Hypothèses relatives au modèle thermique	50
V-3) Concept de couche limite	50
V-4) Développement de l'équation d'hydrodynamique sur une plaque plane verticale en convection naturelle	51
V-5) Solution analytique d'un écoulement de couche limite en régime laminaire sur une plaque plane en convection forcée	53
V-6) Nombres adimensionnels	56
V-7) Corrélations empiriques	57
V-7-1) Corrélations empiriques en convection libre	57
V-7-2) Corrélations empiriques en convection forcée	57
Exercices corrigés	58
Chapitre VI: Rayonnement thermique	61
VI-1) Principe de transfert de chaleur par rayonnement	61
VI-2) Définitions préliminaires	61
VI-3) Processus de réception d'un rayonnement par un corps	63
VI-4) Lois de rayonnement	64
VI-4-1) Loi de Lambert	64
VI-4-2) Loi de Kirchoff	64
VI-4-3) Loi de Planck	64
VI-4-4) Lois de Wien	65
VI-4-5) Loi de Stefan-Boltzmann	65
Exercices corrigés	66
Bibliographie	

Avant-propos

Le présent polycopé est constitué des cours de la deuxième partie du programme classique de Mécanique Appliquée, enseignée de 2002 à 2008 aux étudiants de troisième année ingénieur automatique au sein du département d'automatique de l'USTO. Donc, c'est le fruit de huit années d'enseignement. Cette partie du programme est consacrée aux trois modes du transfert de chaleur; conduction, convection et rayonnement thermique. Actuellement, il est adressé aux étudiants de Licence LMD (Energétique: pour le module de transfert de chaleur 1 et Construction Mécanique pour le module de transfert thermique). Nous espérons qu'il sera d'une grande utilité pour mieux comprendre les principes des trois phénomènes du transfert de la chaleur. Les cours sont enrichis par plusieurs exemples et exercices corrigés.

Le polycopé se limite à six chapitres, dans le premier chapitre on présentera les trois modes de transfert de chaleur de manière générale avec des exemples relatifs à chaque mode et dont le but est de présenter les modes de transfert thermique d'une manière simple et facile. Avant de passer aux cas plus difficiles, cela facilite la compréhension des considérations théoriques. Aussi, le but est de familiariser l'étudiant peu à peu avec ces phénomènes coexistant naturellement et pratiquement dans notre vie quotidienne.

Le deuxième chapitre est consacré à la conduction unidimensionnelle en régime permanent où l'équation différentielle générale de la conduction a été développée en détail, pour les différentes configurations rencontrées pratiquement (prismatique, cylindrique et sphérique). Aussi, le problème de la conduction unidimensionnelle avec déperdition à travers les surfaces latérales (le problème type de conduction dans un solide, refroidissement par ailettes) est présenté.

Le troisième chapitre est réservé à la conduction bidimensionnelle en régime permanent où le concept de facteur de forme pour les différentes configurations pratiques est présenté. En plus, l'analogie électrique, les méthodes numériques par différences finies, utilisées pour le traitement des équations différentielles et l'analyse mathématique de la conduction bidimensionnelle sont aussi présentés. Pour clôturer les notions relatives au mode de transfert de chaleur par conduction, le quatrième chapitre est consacré à la conduction en régime transitoire (variable).

Le cinquième chapitre constitue un bref rappel de la convection libre et forcée, le développement détaillé des équations de conservations (de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie) nécessaire pour connaître leurs applications aux cas particuliers. Les formules couramment utilisées en convection libre et forcée et les différents nombres sans dimensions sont aussi présentés.

Le sixième et le dernier chapitre, est consacré à la description du phénomène de rayonnement thermique, en commençant par les définitions préliminaires des différents paramètres relatifs à ce mode pour passer ensuite, aux lois régissant la transmission de la chaleur par rayonnement.

Pour chaque chapitre, nous citons des exemples numériques simples d'illustration. A la fin de chaque chapitre, nous proposons des exercices corrigés sélectionnés convenablement pour chaque problème traité. En fin, nous souhaitons que le lecteur profite largement de ce présent polycopé, en espérant qu'il sera bien satisfait.

Chapitre I: Généralités sur les phénomènes du transfert de la chaleur

I-1) Introduction

Les procédés utilisés dans l'industrie sont très souvent le siège d'échanges de chaleur (fours, échangeurs de chaleur, induction, refroidissement, chauffage). Les phénomènes de transfert thermique et en particulier de la chaleur, ont une importance décisive pour l'étude et le fonctionnement des appareils tels que ; les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs de chaleur, les condenseurs,etc. En raison de développement rapide de l'industrie et l'accroissement de la demande et du prix de l'énergie, l'utilisation efficace d'une installation (d'échange de chaleur) pour une dépense d'énergie minimale est le but recherché dans tous les cas.

Le transfert thermique est la science qui tente à prédire le transfert d'énergie entre les molécules ou les particules de la matière à différentes températures. Le but est d'expliquer la manière et de prédire le taux d'échange de la chaleur sous certaines conditions spécifiques. Il complète les deux premiers principes de la thermodynamique par des lois expérimentales additionnels afin d'établir les proportions de transfert d'énergie.

Le transfert de chaleur est une science qui contient plusieurs concepts pratiques de base utilisés dans de nombreuses applications industriels. Le transfert de chaleur peut s'effectuer au moyen de trois mécanismes différents, la conduction, la convection et le rayonnement. Les connaissances de base dans ce domaine, sont donc indispensables pour comprendre et maîtriser l'utilisation pratique de ces phénomènes.

Le transfert de chaleur peut être défini comme étant la transmission de l'énergie d'une région à une autre une fois la différence de température entre elles établie. Il est régi par une combinaison de lois physiques et de relations empiriques déduites de l'expérimentation. Dans la littérature relative à cette discipline, on reconnaît généralement trois modes distincts de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

I-2) Modes du transfert de la chaleur

a) La conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur au sein d'un milieu opaque (solide, liquide ou gazeux), sans déplacement de la matière, en présence d'un gradient de température. Elle s'effectue selon deux mécanismes différents: une transmission par vibration des molécules ou atomes et une transmission par les électrons libres. Ce mode se produit au sein d'une même phase au repos ou mobile, en présence d'un gradient de température. Dans ce cas, le transfert de chaleur résulte d'un transfert d'énergie cinétique d'une molécule à une autre molécule adjacente. Ce mode de transfert est le seul à exister dans un solide opaque (qui absorbe tous les rayons). Pour les solides transparents, une partie de l'énergie peut être transmise par rayonnement. Avec les fluides (gaz ou liquides), la convection et le rayonnement peuvent se superposer à la conduction.

b) La convection

La convection consiste essentiellement en la transmission de l'énergie par le mouvement ou le déplacement macroscopique d'une parcelle (grand nombre de molécules), généralement d'un fluide d'une région à autre. Ce mécanisme est accompagné toujours par le transfert d'énergie dû au mouvement moléculaire et qui représente le côté conductif de ce mode. On distingue deux types de convection ; la **convection naturelle (convection libre)** où le mouvement des particules est dû aux différences de température qui sont imposées au fluide. La différence de température implique une différence de masses volumiques (déplacement des particules, dilatation), exemple (chauffage de l'air pour une montgolfière, chauffage de l'eau dans un récipient). La convection forcée où le mouvement des particules résulte de la pression appliquée au fluide par l'intermédiaire des moyens mécaniques, (d'une pompe par exemple). Le transfert de la chaleur par convection, se produit entre deux phases dont l'une est généralement au repos et l'autre en mouvement, en présence d'un gradient de température. Le mouvement du fluide peut résulter de la différence de masses volumiques (ρ) due aux différences de températures.

c) Le rayonnement

Le rayonnement est le transfert d'énergie électromagnétique d'un milieu à haute température vers un autre milieu à basse température sans aucun support matériel (il peut s'effectuer dans le vide). En général, tout corps opaque ou partiellement opaque porté à une température supérieure à zéro Kelvin rayonne de l'énergie dans toutes les directions. Cette énergie est transportée sous forme d'une onde électromagnétique dont la propagation n'exige pas du

support matériel. Ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de la lumière et il ne nécessite aucun support matériel, contrairement aux écoulements. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d'émettre et d'absorber les rayonnements thermiques.

Remarques

- Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de la chaleur coexistent mais, généralement, au moins une des trois formes pourra être négligée, ce qui simplifiera le traitement mathématique du processus de transfert ;
- Considérons le cas de forgeage d'un outil par le feu, où peut être visualiser les trois modes de transfert de chaleur en même temps.

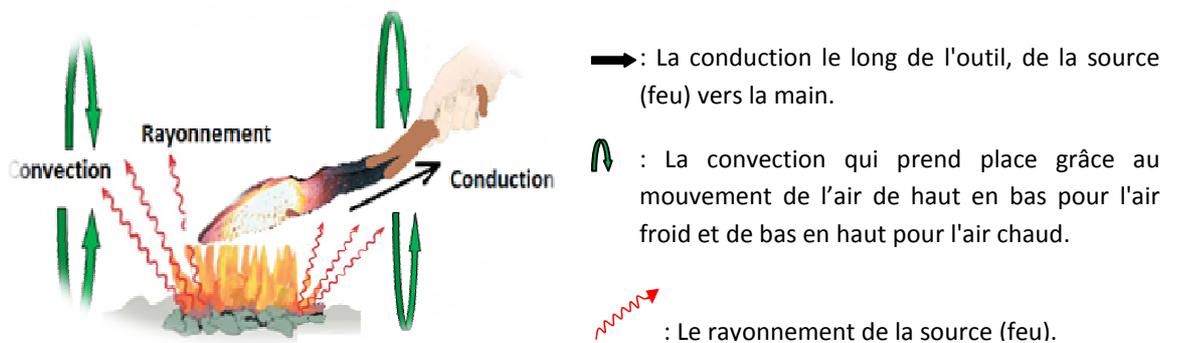


Figure.1-1: illustration des trois modes du transfert de la chaleur

I-3) Lois fondamentales du transfert de la chaleur

I-3-1) Loi fondamentale de la conduction (loi de J.Fourier)

La loi fondamentale de la transmission de la chaleur par conduction, a été proposée par le mathématicien et physicien Français, **Jean Baptiste Joseph Fourier** en 1822.

- Considérons une plaque plane (D), de surface (S) et d'épaisseur (e) (**voir Fig.1-2**);
- Soit dQ, la quantité de chaleur échangée entre la plaque et l'air ambiant pendant le temps dt ;
- On définit le flux de chaleur (flux thermique, ϕ) comme la puissance échangée entre la surface S de la plaque et le milieu extérieur.

$$\phi = \frac{dQ [J]}{dt [s]}; [W] \quad (1-1)$$

- On définit la densité de flux thermique comme la puissance échangée par unité de surface de la plaque:

$$\varphi = \frac{dQ [J]}{S dt [m^2.s]}; \left[\frac{W}{m^2}\right] \quad (1-2)$$

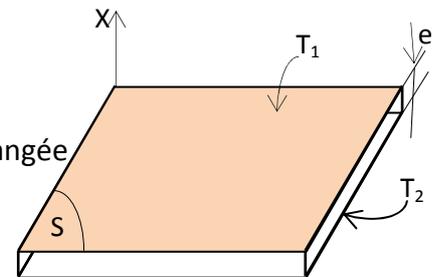


Fig.1-2: Plaque plane

- Les principes fondamentaux de la thermodynamique nous font savoir que :
 - ✓ L'énergie est conservée en l'absence d'une source de chaleur ;
 - ✓ La chaleur transmise passe toujours du corps chaud vers le corps froid (dans notre cas : $T_1 > T_2$).
- On peut vérifier expérimentalement que :

$$Q = K \cdot \frac{S}{e} \cdot (T_1 - T_2) \quad (1-3)$$

Tels que ;

Q : la quantité de chaleur échangée à travers la surface (S);

K : le facteur de proportionnalité appelé conductivité thermique qui est une caractéristique du matériau, son unité de mesure est [W/m.K] ou [kcal/h.m.C];

Pour un élément infinitésimal, ds, la relation (1-3) s'écrit:

$$dQ = d\phi = -K \cdot ds \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1-4)$$

Le signe (-) : pour tenir compte du sens de flux thermique, le gradient qui va de la plus grande grandeur à la plus petite est négative (**voir interprétation mathématique ci-après**).

L'équation (1-4) est attribuée au mathématicien et physicien Français J. B. Fourier qui en 1822 énonça sa loi et qui peut se traduire comme suit : « **En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantané, est proportionnelle à la conductivité thermique du milieu et au gradient de température** »

La forme vectorielle de cette loi qui exprime la densité de flux thermique est définie comme étant la quantité de chaleur transmise par unité de surface, soit :

$$\vec{\varphi} = -K \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (1-5)$$

Remarque

Par convention, $\vec{\varphi}$ est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur, c'est-à-dire vers les températures décroissantes. $\overrightarrow{\text{grad}T}$ est un vecteur porté par le même axe mais de sens contraire à $\vec{\varphi}$ (de petites valeurs vers les grandes valeurs) d'où le signe négatif de la loi de Fourier.

Interprétation mathématique

La densité de flux thermique est donnée par :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = \frac{K}{e} (T_1 - T_2)$$

Pour un élément infinitésimal (ds), cette dernière relation s'écrit :

$$\varphi = K \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Pour écrire l'équation de la conduction de la chaleur sous une forme mathématique nous devons adopter un signe conventionnel selon le sens du flux thermique (par exemple : $T_1 > T_2$, $T_1 \rightarrow T_2$).

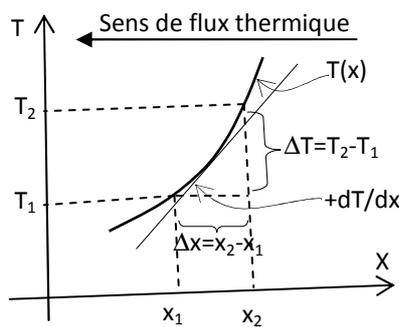


Fig.1-3a

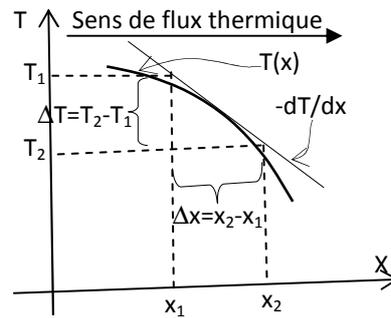


Fig.1-3b

Fig.1-3: Interprétation mathématique de la densité de flux thermique

- Comme le deuxième principe de la thermodynamique implique nécessairement, que la chaleur s'écoule des points les plus chauds vers les points les plus froids, le flux thermique serait donc, positif lorsque le gradient de température ($\partial T / \partial x$) est négatif.
- On remarque de la figure (Fig.1-3b) que : $\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = -\frac{dT}{dx}$; $T_1 > T_2$, pour que le flux soit positif, l'équation (1-4) s'écrit avec un signe négatif : $q = -K \cdot S \cdot \frac{dT}{dx}$
- $\frac{dT}{dx}$: le gradient de la température dans la section, c'est-à-dire, le rapport de la variation de température à la distance parcouru par le flux thermique.
- De l'équation (1-5):

$$\varphi = -K \cdot \frac{dT}{dx} \Leftrightarrow - \int_{T_1}^{T_2} K \cdot dT = \int_{x_1}^{x_2} \varphi dx \Leftrightarrow \varphi \cdot (x_2 - x_1) = -K \cdot (T_2 - T_1) = K \cdot (T_1 - T_2)$$

I-3-2) Loi fondamentale de la convection (loi de I. Newton)

La loi fondamentale de la convection est la loi d'**Isaac Newton (1643-1727)**, traduite par la relation expérimentale de flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide.

$$\phi = h \cdot S \cdot (T_{chaud} - T_{froid}) \quad (1-6)$$

$$h = K_{fluide} / \delta$$

Tels que ;

δ : représente l'épaisseur d'un film mince du fluide adhérent à la paroi solide;

K_{fluide} : la conductivité thermique du fluide

h : représente le coefficient du transfert de chaleur par convection ; [W/m².K] ou [kcal/h.m².C]

I-3-3) Loi fondamentale du rayonnement (loi de Stefan-Boltzmann)

Le flux de chaleur rayonné par un milieu de surface (S) et de température (T) s'exprime grâce à la loi de **Joseph Stefan (1835-1893) et Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906)**.

$$\phi_{emis} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 \quad (1-7)$$

Tels que ;

σ : Constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 4.92 \cdot 10^{-8}$ kcal/h.m².K

ε : l'émissivité de la surface sans unité et T en [K]

Remarques générales

– L'équation (1-3) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{K \cdot S}},$$

Tel que ;

$R_{th} = \frac{e}{K \cdot S}$, représente la **résistance thermique** que le matériau oppose à l'écoulement de la chaleur par conduction.

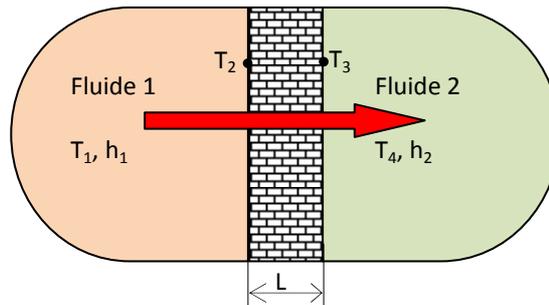
– L'inverse de la résistance thermique représente la **conductance thermique** et désignée par : $K_{th} = \frac{K \cdot S}{e}$

– $\frac{K}{e}$: représente la conductance thermique par unité de surface et est appelé l'unité de conductance thermique pour l'écoulement de la chaleur par conduction.

- En convection, la résistance thermique de transfert de chaleur, et qui représente l'inverse de la conductance thermique par convection est donnée par : $R_{th} = \frac{1}{h.S}$
- h : représente aussi, l'unité de conductance thermique moyenne de convection, le coefficient superficiel de transmission de la chaleur par convection ou le coefficient d'échange de chaleur par convection.

Exemple 1 : Convection et conduction en série

(Transfert de chaleur entre deux fluides séparés par un mur simple)



Soient, K et L : la conductivité thermique et l'épaisseur du mur respectivement.

- La conservation du flux thermique implique les égalités suivantes:

$$\Phi = h_1 \cdot S \cdot (T_1 - T_2) = \frac{K \cdot S}{L} \cdot (T_2 - T_3) = h_2 \cdot S \cdot (T_3 - T_4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{h_1 \cdot S}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{L}{K \cdot S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{1}{h_2 \cdot S}} = \frac{(T_1 - T_4)}{\frac{1}{h_1 \cdot S} + \frac{L}{K \cdot S} + \frac{1}{h_2 \cdot S}} = \frac{(T_1 - T_4)}{R_{CV1} + R_{CD} + R_{CV2}}$$

Analogiquement à la théorie électrique et en comparant les lois de **Fourier** et celle de **Newton** du côté thermique à la loi d'**Ohm** du côté électrique, on peut considérer que les termes: R_{CV1} , R_{CD} et R_{CV2} représentent dans ce cas, les résistances thermiques.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 - T_3 = \left(\frac{L}{K \cdot S} \right) \cdot \Phi : \text{loi de Fourier} \\ T_1 - T_2 = \left(\frac{1}{h_i \cdot S} \right) \cdot \Phi : \text{loi de Newton} \\ U_1 - U_2 = R \cdot I : \text{loi d'Ohm} \end{array} \right.$$

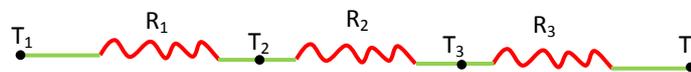


Schéma électrique équivalent

Exemple 2 : Mur composé

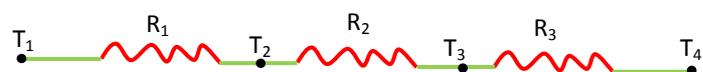
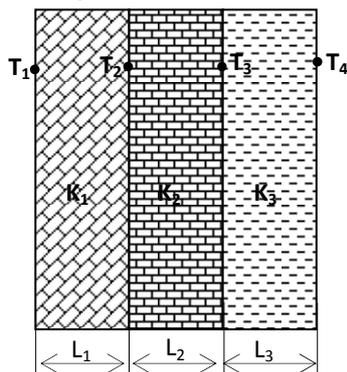


Schéma électrique équivalent

La conservation du flux thermique implique les égalités suivantes:

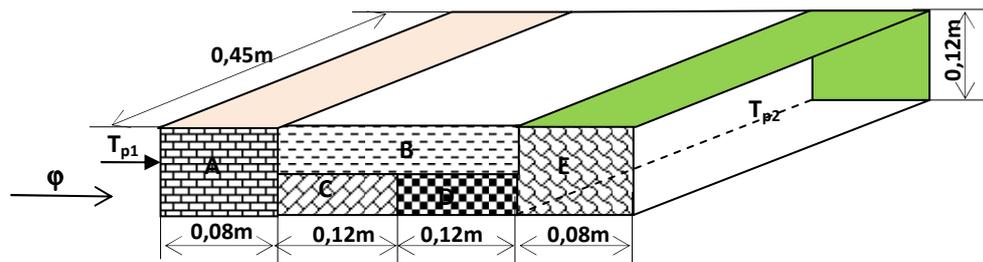
$$\begin{aligned} \phi &= K_1 \cdot \frac{S}{L_1} \cdot (T_1 - T_2) = K_2 \cdot \frac{S}{L_2} \cdot (T_2 - T_3) = K_3 \cdot \frac{S}{L_3} \cdot (T_3 - T_4) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L_1}{K_1 \cdot S}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{L_2}{K_2 \cdot S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{L_3}{K_3 \cdot S}} \\ &= \frac{(T_1 - T_4)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(T_1 - T_4)}{\sum_1^3 R_i} \end{aligned}$$

⇒ Le mur composé se comporte donc, comme un mur simple de résistance thermique équivalente $R_e = \sum_{i=1}^n R_i$

Exercice 1

Considérons le mur composé de plusieurs couches de différents matériaux illustré ci-dessous avec les dimensions dans les trois directions. Supposant une conduction unidimensionnelle et connaissant les températures des surfaces de gauche et celle de droite respectivement, T_{p1} et T_{p2} , de même que les conductivités thermiques de ces différentes couches, calculer le flux de chaleur par unité de surface à travers ce mur.

Données : $T_{p1}=200^\circ\text{C}$, $T_{p2}=50^\circ\text{C}$, $K_A=70 \text{ W/m.K}$, $K_B=60 \text{ W/m.K}$, $K_C=40 \text{ W/m.K}$, $K_D=30 \text{ W/m.K}$, $K_E=20 \text{ W/m.K}$



Solution

Pour simplifier le calcul, on doit représenter le schéma équivalent de mur considéré en se basant bien sûr sur l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques.

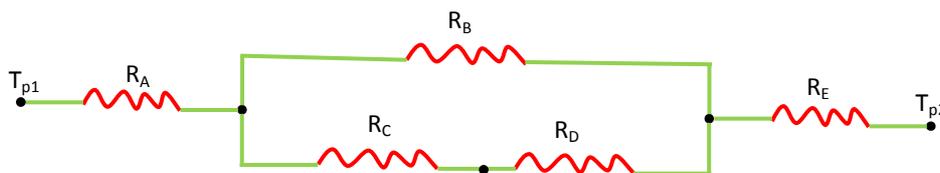


Schéma électrique équivalent

Le flux de chaleur est donné donc par : $\phi = \frac{(T_{p1} - T_{p2})}{R_A + R_{\text{éq}} + R_E}$

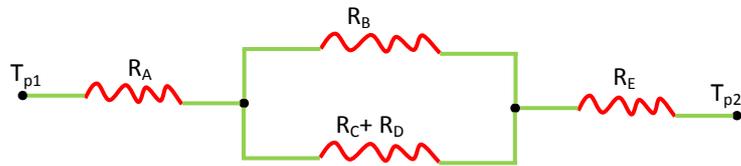
tels que;

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = \frac{L_A}{K_A \cdot S_A} = \frac{0.08m}{70 \frac{W}{m.K} \cdot 0.12m \cdot 0.45m} = 0.02116 \frac{K}{W} \\ R_B = \frac{L_B}{K_B \cdot B} = \frac{0.24m}{60 \frac{W}{m.K} \cdot 0.06m \cdot 0.45m} = 0.1481 \frac{K}{W} \\ R_C = \frac{L_C}{K_C \cdot S_C} = \frac{0.12m}{40 \frac{W}{m.K} \cdot 0.06m \cdot 0.45m} = 0.1111 \frac{K}{W} \\ R_D = \frac{L_D}{K_D \cdot S_D} = \frac{0.12m}{30 \frac{W}{m.K} \cdot 0.06m \cdot 0.45m} = 0.1481 \frac{K}{W} \\ R_E = \frac{L_E}{K_E \cdot S_E} = \frac{0.08m}{20 \frac{W}{m.K} \cdot 0.12m \cdot 0.45m} = 0.0740 \frac{K}{W} \end{array} \right.$$

– Pour les résistances en série : $R_{\acute{e}q} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$

– Pour les résistances en parallèles : $\frac{1}{R_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$

⇒ Le schéma équivalent :



$$\frac{1}{R_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C + R_D} = \frac{R_B + R_C + R_D}{R_B \cdot (R_C + R_D)} \Rightarrow R_{\acute{e}q} = \frac{R_B \cdot (R_C + R_D)}{R_B + R_C + R_D}$$

$$R_{\acute{e}q} = \frac{0,1481 \cdot (0,1111 + 0,1481)}{0,1481 + 0,1111 + 0,1481} = 0.09425 K/W$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{(T_{p1} - T_{p2})}{R_A + R_{\acute{e}q} + R_E} = \frac{(200 - 50)K}{(0.02116 + 0.09425 + 0.0740)K/W} = 791,94 W$$

Exercice 2

Considérant le mur plan d'épaisseur 60mm représenté sur la figure ci-dessous. Si la densité de flux thermique à travers ce mur est de $66.5 W/m^2$, calculer la différence de température aux surfaces et les valeurs numériques du gradient de température dans celui-ci si ce mur est en :

1. Laiton ($k=115 W/m.K$);
2. Granit ($k=3,5 W/m.K$);
3. Bois ($k=0,20 W/m.K$).

Interpréter les résultats obtenus pour les trois matériaux

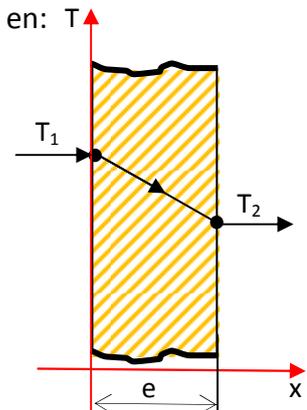
Solution

1. Mur en Laiton ($k=115 W/m.K$)

$$\phi = \frac{\dot{Q}}{S} = \frac{k}{e} \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\phi \cdot e}{k} = \frac{66.5 W/m^2 \cdot 0,06m}{115 W/m.K} = 0,0347K;$$

$$|\overrightarrow{GradT}| = \left| \frac{dT}{dx} \right| = \frac{\Delta T}{e} = \frac{0,0347K}{0,06m} = 0,578 K/m;$$

2. Mur en Granit ($k=3,5 W/m.K$)



$$\varphi = \frac{\phi}{S} = \frac{k}{e} \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\varphi \cdot e}{k} = \frac{66.5 \text{ W/m}^2 \cdot 0,06 \text{ m}}{3,5 \text{ W/m.K}} = 1,14 \text{ K};$$

$$|\overrightarrow{\text{Grad}T}| = \left| \frac{dT}{dx} \right| = \frac{\Delta T}{e} = \frac{1,14 \text{ K}}{0,06 \text{ m}} = 19 \text{ K/m};$$

3. Mur en Bois ($k=0,20 \text{ W/m.K}$)

$$\varphi = \frac{\phi}{S} = \frac{k}{e} \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\varphi \cdot e}{k} = \frac{66.5 \text{ W/m}^2 \cdot 0,06 \text{ m}}{0,20 \text{ W/m.K}} = 19,95 \text{ K};$$

$$|\overrightarrow{\text{Grad}T}| = \left| \frac{dT}{dx} \right| = \frac{\Delta T}{e} = \frac{19,95 \text{ K}}{0,06 \text{ m}} = 332,5 \text{ K/m};$$

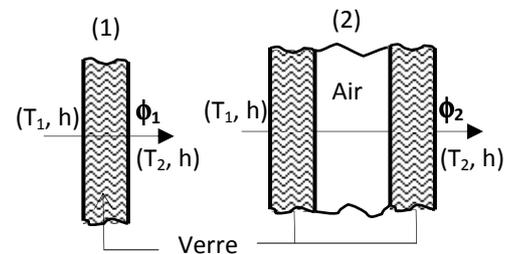
Interprétation

On remarque que le bois présente une grande capacité d'isolation suivi par le granit puis du Laiton. Ce dernier ne fait descendre la température que de (0,578 K) par mètre d'épaisseur, comparé aux (19K) et (332,5K) du granit et du bois respectivement. Donc, pratiquement, le bois est le plus utilisé comme isolant thermique dans tous les domaines construction bâtiment, outils et appareils électroménagers...etc.

Exercice 3

Donner le schéma électrique équivalent et déterminer les déperditions thermiques (ϕ) au travers d'une surface vitrée de 1 m^2 dans les deux cas suivants:

1. Vitrage simple d'épaisseur, $e=3\text{mm}$;
2. Vitrage double, composé de deux couches de verre d'épaisseur ($e=3\text{mm}$) et d'une couche d'air intermédiaire de 5mm d'épaisseur. On néglige les effets de la convection dans la lame d'air.



On donne: $k_{\text{verre}}=1,2 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, $k_{\text{air}}=0,024 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, $h=12 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$, $T_1=20^{\circ}\text{C}$ et $T_2=0^{\circ}\text{C}$.

Solution

1. Premier cas:

Schéma électrique équivalent:

$$\phi_1 = \frac{\Delta T}{\sum_1^3 R_i} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h \cdot S} + \frac{e}{k \cdot S} + \frac{1}{h \cdot S}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{2}{h \cdot S} + \frac{e}{k \cdot S}} = \frac{(20 - 0) \text{ C}}{\frac{2}{12 \text{ W/m}^2 \text{ C} \cdot 1 \text{ m}^2} + \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,2 \text{ W/mC} \cdot 1 \text{ m}^2}} = 118,2266 \text{ W}$$

2. Deuxième cas:

Schéma électrique équivalent:

$$\phi_2 = \frac{\Delta T}{\sum_1^5 R_i} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h \cdot S} + \frac{e}{k \cdot S} + \frac{e'}{k' \cdot S} + \frac{e}{k \cdot S} + \frac{1}{h \cdot S}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{2}{h \cdot S} + \frac{e'}{k' \cdot S} + \frac{2 \cdot e}{k \cdot S}}$$

$$\phi_2 = \frac{(20 - 0) \text{ C}}{\frac{2}{12 \text{ W/m}^2 \text{ C} \cdot 1 \text{ m}^2} + \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,024 \text{ W/m}^2 \text{ C} \cdot 1 \text{ m}^2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,2 \text{ W/mC} \cdot 1 \text{ m}^2}} = 52,6315 \text{ W}$$

Chapitre II : Conduction unidimensionnelle en régime permanent

La conduction est la transmission de la chaleur à travers un corps sans déplacement de la matière. Le transfert de la chaleur comme l'énergie, est associée aux mouvements de vibration et de rotation des molécules et atomes, (énergie transformée en chaleur irréversiblement). Ce mode de transfert de chaleur peut être aisément modéliser et décrit mathématiquement.

II-1) Développement de l'équation différentielle générale de la conduction

Pour la description analytique ou mathématique, on doit premièrement développer l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes puis, avec le même principe, où en coordonnées cylindriques et sphériques, peuvent être déduites. Considérant un volume infinitésimal (dV) dans un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z ; voir Fig.2-1). Le principe de conservation de l'énergie pour le volume de contrôle de la figure (Fig.2-1) pendant le temps dt , peut être formulé comme suit:

L'utilisation de la loi de Fourier permet d'exprimer les quantités de chaleur relativement à la section perpendiculaire à l'axe des (x par exemple).

- La chaleur transportée à travers la surface de gauche de (dV) dans la direction (x) est donnée par :

$$dQ_x = -K \cdot dydz \cdot \frac{\partial T}{\partial x}; (ds = dy \cdot dz)$$

- La chaleur transportée (sortie) à travers la surface de droite de (dV) dans la direction (x) est donnée par :

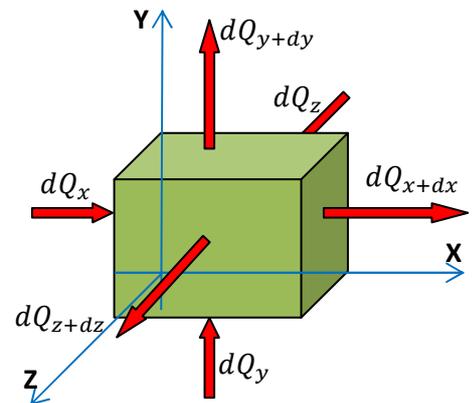


Fig.2-1: Modèle de volume infinitésimal

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}(dQ_x)dx + \dots; (\text{développement en série de Taylor})$$

$$dQ_{x+dx} = -K \cdot dydz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \cdot dydz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx$$

$$dQ_{x+dx} = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] dydz$$

Le bilan énergétique sur l'élément (dV) implique que la chaleur transportée à travers la surface à gauche de (dV) dans la direction (x) plus la quantité de chaleur générée dans (dV) est égale à la chaleur transportée à travers la surface à droite de (dV) dans la direction (x) plus le changement en énergie interne.

Le bilan thermique relativement à l'axe des (X) est donnée par:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -K \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dydz + K \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dydz + K \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz$$

$$\Rightarrow dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz \quad (2-1)$$

– suivant l'axe des (y) :

$$\Rightarrow dQ_y - dQ_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial T}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (2-2)$$

– suivant l'axe des (Z) :

$$\Rightarrow dQ_z - dQ_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2-3)$$

Suivant les trois directions, le bilan des quantités de chaleur transmises par conduction à travers le volume (dV) est donné par :

$$\begin{aligned} & dQ_x - dQ_{x+dx} + dQ_y - dQ_{y+dy} + dQ_z - dQ_{z+dz} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (2-3')$$

– Soit la quantité $Q'(x, y, z, t)$ est défini comme étant, le taux de génération de l'énergie par unité de volume à l'intérieur du volume de contrôle.

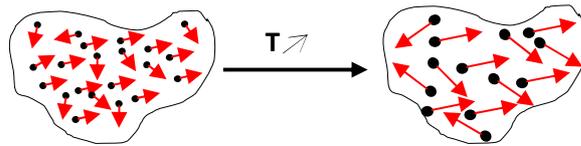
$$Q'(x, y, z, t) \quad (2-4)$$

⇒ L'ensemble de la chaleur transmise par conduction et celle générée à l'intérieur du (VC), s'accouplent pour augmenter l'énergie interne de l'élément de volume (dV), avec la quantité (dQ) donnée par:

$$dQ = m \cdot C_p dT = \rho \cdot dV \cdot C_p dT = \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-5)$$

($C_p=c$) : la chaleur spécifique du matériau.

d'où l'énergie interne provient du mouvement aléatoire des molécules dans le système de (volume, dv), le mouvement des molécules est fonction de la température donc, l'énergie interne est équivalente à une énergie thermique.



Le bilan énergétique final implique que :

La chaleur entrée par conduction (1) + La chaleur générée dans l'élément (dV) (2) = la chaleur dissipée par conduction (3) + le changement en énergie interne (4), (voir schéma ci-dessous).

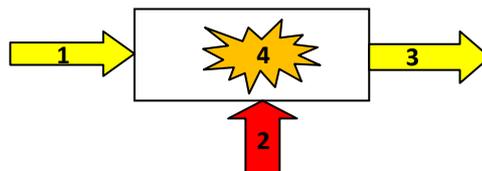


Fig.2-2: Schéma de bilan énergétique

- Le bilan énergétique final est donné par [(2-5) = (2-3') + (2-4)] :

$$\rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz + Q'(x, y, z, t) dx dy dz$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q' \quad (2-6)$$

- Puisque les propriétés des matériaux (K, ρ et C) sont des variables dépendantes des coordonnées (x, y et z) ainsi que le temps (t), cette équation générale de conduction (2-6) est valable même pour les milieux hétérogènes anisotropes.

- Pour les corps isotropes et homogènes, cette équation peut être arrangée sous formes suivantes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q'}{\rho c} \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \nabla^2 T + \frac{Q'}{\rho c} \quad (2-8)$$

Où $\alpha = (K/\rho c)$ est le coefficient de diffusivité thermique.

II-2) Equation différentielle générale de la conduction en coordonnées cylindriques

$$\text{Soient : } \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

⇒ L'équation générale de la chaleur (2-7) en coordonnées

cylindriques s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q'}{\rho c} \quad (2-9)$$

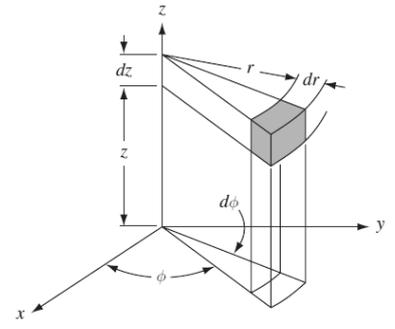


Fig.2-3: Système de coordonnées cylindriques

II-3) Equation différentielle générale de la conduction en coordonnées sphériques

$$\text{Soient } \begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

⇒ L'équation générale de la chaleur (2-7) en coordonnées

sphériques s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right\} + \frac{Q'}{\rho c} \quad (2-10)$$

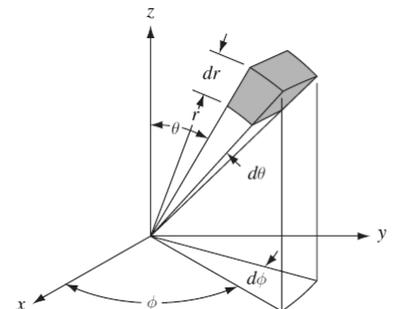


Fig.2-4: Système de coordonnées sphériques

II-4) Conditions aux limites

La formulation mathématique du problème de conduction par l'équation générale aux dérivées partielles (2-6, 2-9 et 2-10), n'a de sens physique que pour des conditions aux limites définies préalablement et qui reflètent l'évolution réel du phénomène.

II-5) Résolution de l'équation différentielle générale de la chaleur en régime permanent (conduction stationnaire) :

- En régime permanent ; $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$
- Sans source de chaleur ; $Q' \rightarrow 0$

II-5-1) géométrie prismatique (le mur plan)

En plus des hypothèses précédentes, on suppose que :

- Le mur est considéré comme un milieu homogène et conducteur de l'énergie thermique.
- Le mur est limité par deux plans parallèles infinis, maintenus à une température uniforme sur chaque plan extrême.
- Une conduction unidimensionnelle ; $(\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0), (\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0)$

⇒ L'équation (2-7) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$\int \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx = \frac{dT}{dx} = C_1$$

$$\int \frac{d}{dx} (T) dx = T(x) = C_1 x + C_2$$

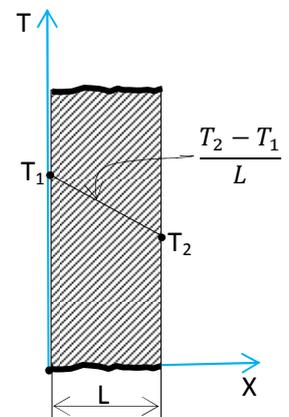


Fig.2-5: Mur plan

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 , sont déterminées à partir des conditions aux limites ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } x = 0; \quad T(0) = T_1 = C_2 \\ \text{à } x = L; \quad T(L) = T_2 = C_1 L + C_2 = C_1 L + T_1 \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

La loi de Fourier permet d'exprimer le flux de chaleur par:

$$\Phi = -K \cdot S \cdot \frac{dT}{dx}; \quad \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}, \Rightarrow \Phi = K \cdot S \cdot \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Le rapport: $\frac{\Delta T}{\Delta x}$, représente la pente de la droite sur la figure (Fig.2-5) ci-dessus.

II-5-2) géométrie cylindrique (cylindre creux à surfaces latérales isothermes)

Le transfert de chaleur se fait dans une seule direction (r) ;

L'équation (2-9) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr = r \frac{dT}{dr} = C_1$$

$$\int dT = C_1 \int \frac{dr}{r} \Rightarrow T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

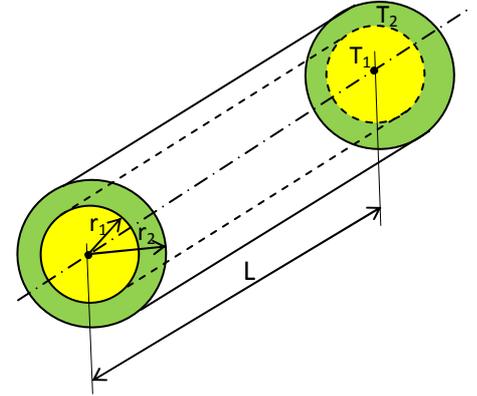


Fig.2-6: Cylindre creux

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 , sont déterminées à partir des conditions aux limites ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } r = r_1: T(r_1) = T_1 = C_1 \ln(r_1) + C_2 \quad (a) \\ \text{à } r = r_2: T(r_2) = T_2 = C_1 \ln(r_2) + C_2 \quad (b) \end{array} \right.$$

$$(a)-(b) : T_1 - T_2 = C_1 (\ln(r_1) - \ln(r_2)) = C_1 \cdot \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \Rightarrow C_1 = (T_1 - T_2) / \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (a), nous obtenons C_2 par:

$$C_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \ln(r_1) / \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (b), nous obtenons C_2 par:

$$C_2 = T_2 - (T_1 - T_2) \cdot \ln(r_2) / \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \ln(r) + T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln(r_1)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \cdot \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + T_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \cdot \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \quad (2 - 12)$$

– L'expression de la densité de flux thermique est donnée par:

$$\varphi = -K \frac{dT}{dr} = -K \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \cdot \frac{1}{r} = -K \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \cdot \frac{1}{r}$$

– L'expression de flux thermique est donnée par:

$$\Phi = \varphi \cdot S = -K \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi r \cdot L = 2\pi K L \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)}$$

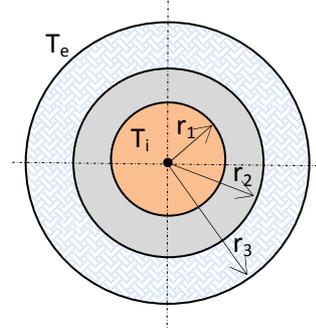
– L'expression de la résistance thermique est donnée par: $R = \frac{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{2\pi K L}$

Exemple1

Calculer le flux de chaleur perdu par unité de longueur d'un tuyau en acier ($K_{ac}=38\text{Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$), de 48mm de diamètre intérieur et 56mm de diamètre extérieur, recouvert d'un isolant en amiante($K_{am}=0,15\text{Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$), de 75mm de diamètre extérieur. De la vapeur à 145°C s'écoule dans le tuyau. La résistance thermique totale à la paroi intérieure est $0,2 \frac{^\circ\text{C.m}}{\text{kcal/h}}$ et la température ambiante est de 21°C .

Solution

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{\acute{e}q}} = \frac{T_i - T_e}{\sum R_i} = \frac{T_i - T_e}{R_{ac} + R_{am} + R_{vap}}$$



1. Résistance thermique du tube d'acier : $R_{ac} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \cdot K_{ac} \cdot L}$

2. Résistance thermique de l'isolant d'amiante : $R_{am} = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi \cdot K_{am} \cdot L}$

3. Résistance thermique de la vapeur d'eau : $R_{vap} = 0,2 \frac{^\circ\text{C.m}}{\text{kcal/h}}$ (par unité de longueur)

$$\Rightarrow \frac{\Phi}{L} = \frac{T_i - T_e}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \cdot K_{ac}} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi \cdot K_{am}} + R_{vap}} = \frac{(145 - 21)^\circ\text{C}}{\frac{\ln \frac{28}{24}}{2\pi \cdot 38 \cdot 1,16 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C.m}}} + \frac{\ln \frac{37,5}{28}}{2\pi \cdot 0,15 \cdot 1,16 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C.m}}} + \frac{0,2 \cdot ^\circ\text{C.m}}{1,16 \text{ W}}} = 281,7183 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

II-5-3) Géométrie sphérique (Sphère creuse à surfaces isothermes)

Avec les hypothèses précédentes et en supposant que le transfert de chaleur se fait dans une seule direction (r), l'équation (2-10) se réduit à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr}(rT) \right] = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[T + r \frac{dT}{dr} \right] = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dr} + r \frac{d^2T}{dr^2} \right] = 0$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

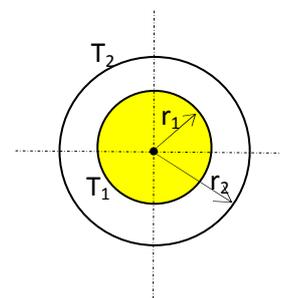


Fig.2-7: Sphère creuse

On peut déterminer la solution par changement de variables:

$$u = \frac{dT}{dr} \Rightarrow u' = \frac{d^2T}{dr^2}$$

$$ru' + 2u = 0$$

$$r \frac{du}{dr} + 2u = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2 \int \frac{dr}{r} \Leftrightarrow \ln(u) = -2 \ln(r) + \ln C_1 = -\ln(r^2) + \ln C_1 = \ln\left(\frac{C_1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{C_1}{r^2} = \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow dT = C_1 \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Pour déterminer les constantes C_1 et C_2 , on doit utiliser les conditions aux limites relatives au cas considéré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } r = r_1: T(r_1) = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 = T_1 \quad (a) \\ \text{à } r = r_2: T(r_2) = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 = T_2 \quad (b) \end{array} \right.$$

$$(a)-(b) = T_1 - T_2 = -\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_1}{r_2} = -C_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow C_1 = -\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (a), on trouve l'expression de C_2 :

$$T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot r_1}$$

– L'expression finale de la température est donnée par :

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r} + T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot r_1} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right] + T_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + (T_1 - T_2) \cdot \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

– L'expression de la densité de flux thermique est donnée par :

$$\varphi = -K \frac{dT}{dr} = K \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r^2} ; \frac{dT}{dr} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)$$

– L'expression de flux thermique est donnée par :

$$\Phi = \varphi \cdot S = -KS \frac{dT}{dr} ; \frac{dT}{dr} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) ; S = 4\pi r^2$$

$$\Phi = -K \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 4\pi K \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{4\pi K} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

– L'expression de la résistance thermique est donnée par: $R = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi K}$

II-6) Théorie des ailettes

L'évacuation de la chaleur par le transfert conducto-convectif à partir des corps solides peut être potentiellement amélioré par extension des surfaces d'échange. La procédure d'extension de ces surfaces a une large application industriel (ailettes attachées aux équipements de transfert de chaleur, afin d'augmenter le taux de chauffage ou de refroidissement). Il existe dans les corps généralement longs (où l'une des dimensions est très supérieure par rapport aux deux autres) et où le transfert se réalise dans ce cas aussi par les surfaces latérales.

II-6-1) Application des ailettes longues

Le flux de chaleur évacué d'un système par transfert *conducto-convectif*, dépend du type de fluide utilisé (eau ou air) et du type de convection considérée (forcée ou libre). Pour augmenter ce flux, on doit augmenter artificiellement la surface d'échange entre le système et ce fluide. On dispose ainsi, des ailettes sur la surface de la pièce nue. Par exemple (ailettes des radiateurs de chauffage central, les ailettes destinées à refroidir un thyristor, composant électronique de puissance).

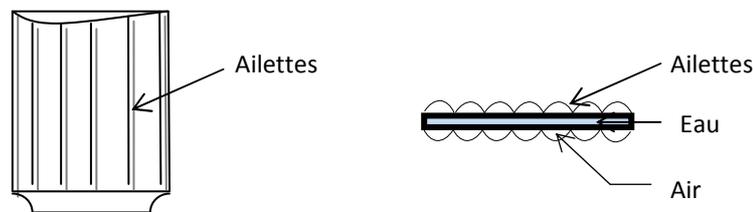


Fig.2-9: Exemples d'application des ailettes

II-6-2) Développement de l'équation générale pour une ailette unidimensionnelle

- Considérons une tige attaché à un mur de température (T_0) comme le montre la figure ci-dessous (Fig.2-8). La base de la tige est chauffée en permanence par une source de chaleur (Q' par unité de volume). Dans ce cas, deux processus se manifestent avec le temps, une diffusion de l'énergie (chaleur) le long de la tige et une déperdition de chaleur à travers la surface latérale dans le milieu environnant à la température ambiante (T_a).

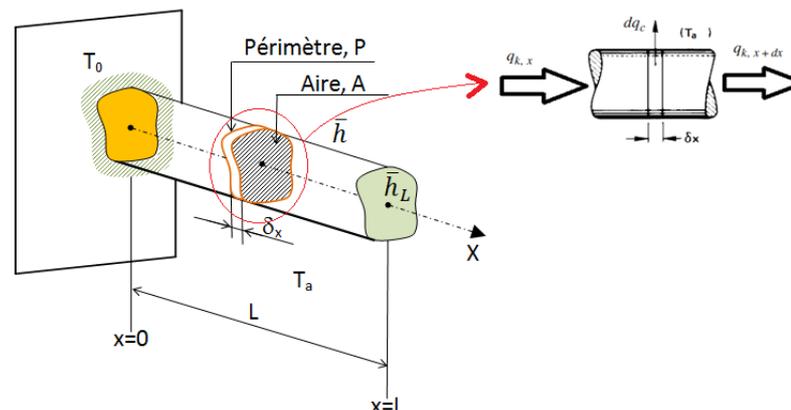


Fig.2-8: Analyse unidimensionnelle de bilan thermique à travers une tige longue à extrémité chauffée

- Admettons les paramètres ci-dessous relatifs au problème considéré:
 - o p : le périmètre de la section droite de la tige, ($p=\pi.d$) ;
 - o k : la conductivité thermique [W/m.K] ;
 - o h : le coefficient d'échange convectif [W/m².K] ;
 - o T_a : la température ambiante [K] ;
 - o S : la surface de la section droite de la tige, ($S=\pi.d^2/4$).

En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour écrire le bilan énergétique sur un élément de volume ($S.dx$) :

$$\Phi_x - \Phi_{x+dx} - \Phi_L + \dot{Q}.S. dx = 0 \quad (2-11)$$

$$-k.S. \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + k.S. \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - h.p. dx. [T(x) - T_a] + \dot{Q}.S. dx = 0$$

$$-k.S. \frac{dT}{dx} + k.S. \frac{dT}{dx} + k.S. \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx}\right) dx - h.p. dx [T(x) - T_a] + \dot{Q}.S. dx = 0$$

Après développement, simplification et arrangement:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx}\right) - \frac{hp}{kS} [T(x) - T_a] + \frac{\dot{Q}}{k} = 0 \quad (2-12)$$

Dans le cas où, $Q'=0$, en mettant : $m^2 = \frac{hp}{kS}$, l'équation (2-12) devient:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2 [T(x) - T_a] = 0 \quad (2-13)$$

Mathématiquement, (2-13) est une équation différentielle linéaire et homogène de deuxième ordre à coefficients constants, par conséquent, la solution générale peut être exprimée sous les deux formes d'expressions suivantes:

$$T(x) - T_a = Ach(mx) + Bsh(mx) \quad (2-14)$$

Ou

$$T(x) - T_a = Ce^{-mx} + De^{mx} = 0 \quad (2-15)$$

Pour évaluer les constantes (A, B, C et D), il est nécessaire de spécifier les conditions aux limites appropriées.

II-6-3) Solution de l'équation générale de conduction pour les ailettes unidimensionnelles

La recherche d'une solution élémentaire pour ce phénomène dépend des conditions aux limites relatives à cet élément. La base de l'ailette est supposée maintenue à la température de la paroi fixe (mur), (T_0). Cependant, et selon les conditions aux limites relatives à l'extrémité libre, plusieurs cas peuvent se présenter:

1. Dans le cas où l'ailette (la tige) est très longue, la température de l'extrémité approche celle du milieu environnant;
2. L'extrémité de l'ailette peut être isolée;
3. L'extrémité de l'ailette peut être maintenue à une température fixe ou imposée;
4. L'extrémité de l'ailette peut être le siège d'un transfert convectif de chaleur.

Considérons ce dernier cas: Le flux dans ce cas est dissipé par la surface latérale de la section droite extrême (flux convectif).

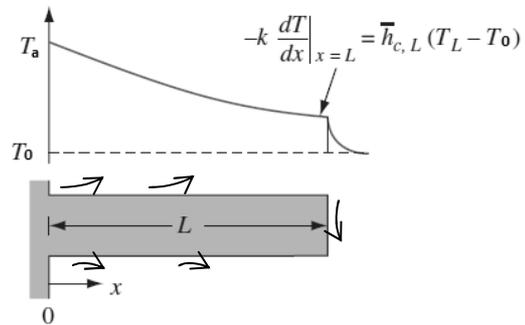


Fig.2-10: Représentation schématique du transfert conducto-convectif par ailette unidimensionnelle

A partir de l'équation (2-13), la solution peut être donnée par:

$$T(x) - T_a = Ach(mx) + Bsh(mx) \quad (2-14')$$

Les conditions aux limites relatives au cas considéré, sont données dans ce cas par:

- à $x=0$, $T(0)=T_0$, remplacées dans (2-14'), donne:

$$T_0 - T_a = Ach(m \cdot 0) + Bsh(m \cdot 0)$$

$$\Rightarrow A = T_0 - T_a$$

- à $x=L$, le flux convectif ($h \cdot S \cdot (T(L) - T_a)$) est égal au flux transmis par conduction à travers la section droite extrême ($-k \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}$)

$$hS(T_L - T_a) = -k \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}$$

$$h(T_L - T_a) = -k \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}$$

$$T(x) - T_a = Ach(mx) + Bsh(mx)$$

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a)ch(mx) + Bsh(mx)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = m(T_0 - T_a)sh(mx) + Bmch(mx)$$

$$\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)_{x=L} = m(T_0 - T_a)sh(mL) + Bmch(mL)$$

$$\Rightarrow h(T_L - T_a) = -k.m(T_0 - T_a)sh(mL) - k.Bmch(mL)$$

Et puisque (à partir de (2-14')) : $(T_L - T_a) = (T_0 - T_a)ch(mL) + Bsh(mL)$

$$h((T_0 - T_a)ch(mL) + Bsh(mL)) = -k.m(T_0 - T_a)sh(mL) - k.Bmch(mL)$$

$$B(hsh(mL) + kmch(mL)) = -(T_0 - T_a)[hch(mL) + kmsh(mL)]$$

$$\Rightarrow B = \frac{-(T_0 - T_a)[hch(mL) + kmsh(mL)]}{hsh(mL) + kmch(mL)}$$

La solution dans ce cas est donnée par:

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \left[ch(mx) - \frac{\frac{h}{km}ch(mL) + sh(mL)}{\frac{h}{km}sh(mL) + ch(mL)} \cdot sh(mx) \right]$$

$$\text{Soit, } G = \frac{h}{km}$$

$$\begin{aligned} \frac{T(x) - T_a}{(T_0 - T_a)} &= \left[ch(mx) - \frac{Gch(mL) + sh(mL)}{Gsh(mL) + ch(mL)} \cdot sh(mx) \right] \\ &= \left[\frac{Gsh(mL)ch(mx) + ch(mx)ch(mL) - Gch(mL)sh(mx) - sh(mL)sh(mx)}{Gsh(mL) + ch(mL)} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{T(x) - T_a}{(T_0 - T_a)} = \left[\frac{Gsh[m(L-x)] + ch[m(L-x)]}{ch(mL) + Gsh(mL)} \right]$$

II-6-3-1) Flux total

Le flux de chaleur réalisé ou diffusé par conduction le long de la tige à partir de la base, doit être dans ce cas, égal à celui dissipé par convection à travers la surface latérale et la section droite extrême de l'ailette.

$$\phi_{tcd} = \phi_{tcv}$$

$$-ks \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = kms(T_0 - T_a) \cdot \frac{sh(mL) + Gch(mL)}{ch(mL) + Gsh(mL)} = \int_0^L hp(T(x) - T_a)dx + hs[T(L) - T_a]$$

Après développement, simplification et arrangement, le flux de chaleur est donné par:

$$\phi = kms(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + Gth(mL)} \quad (2-16)$$

II-6-3-2) L'efficacité de l'ailette

Par définition, l'efficacité de l'ailette est donnée par: $\varepsilon = \frac{\phi_{\text{échangé}}}{\phi_{\text{max}}}$, $\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\text{max}} = hpL(T_0 - T_a) \\ \phi_{\text{échangé}} = \phi_t \end{array} \right\}$

\Rightarrow Après certaines arrangements mathématiques de simplification, l'expression finale de l'efficacité est donnée par:

$$\varepsilon = \frac{th(mL) + G}{mL + Gth(mL)} \quad (2-17)$$

Exercice 1

Trois ailettes en aluminium ($k_{Al}=200 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$), ayant des diamètres différents (4, 6 et 8) mm avec une longueur de 6cm sont exposées à un environnement convectif de ($T_a=18^\circ\text{C}$ et $h=40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$). La température de base pour chacune des ailettes est de 192°C .

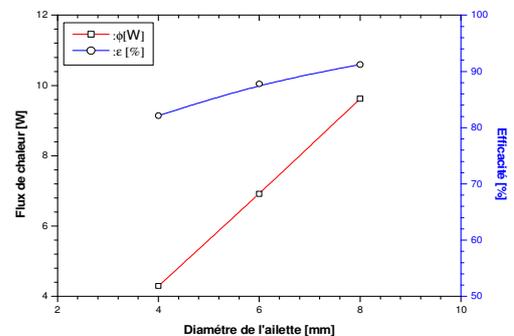
1. Calculer le flux de chaleur (ϕ) pour chaque ailette;
2. Calculer l'efficacité de chaque ailette;
3. Expliquer la variation de (ϕ) en fonction de diamètre pour ces trois ailettes.

Solution

$k_{al}=200 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$; $h=40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$; $T_0=192^\circ\text{C}$; $T_a=18^\circ\text{C}$; $L=6 \text{ cm}=0,06 \text{ m}$; $P=\pi \cdot d$; $S=\pi \cdot d^2/4$.

$$\phi = k \cdot m \cdot S (T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + G \cdot th(mL)}; \varepsilon = \frac{th(mL) + G}{m \cdot L + G \cdot th(mL)}; m = \sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot S}}; G = \frac{h}{k \cdot m}$$

$d[\text{mm}]$	4	6	8
$S[\text{m}^2]$	$1,256 \cdot 10^{-5}$	$2,827 \cdot 10^{-5}$	$5,026 \cdot 10^{-5}$
$P[\text{m}]$	0,0125	0,0188	0,0251
$m[\text{m}^{-1}]$	14,11	11,53	9,99
G	0,0142	0,0173	0,0200
$m \cdot L$	0,8466	0,6918	0,5994
$\phi[\text{W}]$	4,2966	6,915	9,62
$\varepsilon[\%]$	82,14%	87,79%	91,23%

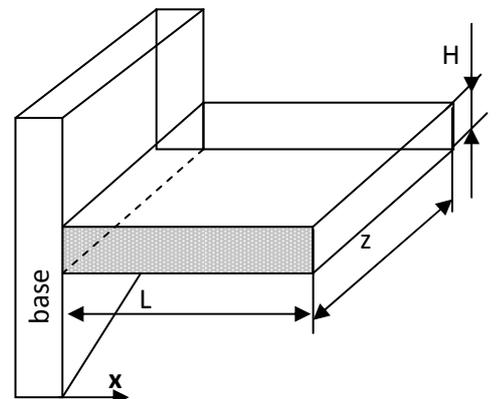


On remarque que le flux thermique varie linéairement en fonction du diamètre de l'ailette (relation proportionnelle).

L'efficacité varie en fonction du diamètre selon une loi logarithmique.

Exercice 2

Une ailette en aluminium ($K_{Al}=200 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$) avec 4mm d'épaisseur et 8 cm de longueur (voir figure ci-contre), sa base est maintenue à 250°C , la température ambiante est 45°C avec $h=10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$. Calculer le flux de chaleur échangé entre cette ailette et le milieu environnant (par unité de largeur, $Z=1 \text{ m}$, cas de: $Z \gg H$).



Solution

$$\phi = k.m.S(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + G.th(mL)};$$

$$m = \sqrt{\frac{h.P}{k.S}} = \sqrt{\frac{h.2(Z+H)}{k.Z.H}} = \sqrt{\frac{2.h}{k.H}} = \sqrt{\frac{2.10}{200.4.10^{-3}}} = 5,00 m^{-1}, (H \ll Z)$$

$$G = \frac{h}{k.m} = \frac{10}{200.5,00} = 0,01$$

$$\phi = k.m.S(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + G.th(mL)} = k.m.Z.H.(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + G.th(mL)}$$

$$\frac{\phi}{Z} = k.m.H.(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + G.th(mL)} = 200.5,00.4.10^{-3}(250 - 45) \cdot \frac{th(5,00.8.10^{-2}) + 0,01}{1 + 0,01.th(5,00.8.10^{-2})}$$

$$\frac{\phi}{Z} = 318,55 W / m$$

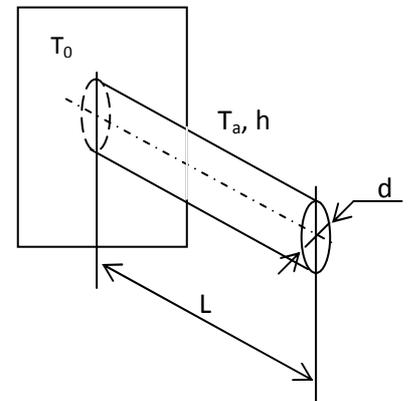
Exercice 3

Une tige en aluminium ($k_{al}=200W/m.^{\circ}C$) de 4 cm de diamètre et 13 cm de longueur implantée dans un mur maintenu à une température de $238^{\circ}C$ (voir figure ci-contre).

La tige est exposée à un environnement de $21^{\circ}C$.

Le coefficient de transfert de chaleur par convection est $14W/m^2.^{\circ}C$.

Calculez le flux de chaleur perdu par cette tige.



Solution

$$\phi = k.m.S(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + G.th(mL)}$$

$$k_{al}=200 W/m.^{\circ}C; h=14W/m^2.^{\circ}C$$

$$T_0=238^{\circ}C; T_a=21^{\circ}C; L=13cm=0,13m; d=4 cm=0,04m; P=\pi.d=\pi.0,04 m$$

$$S=\pi.d^2/4=\pi.(0,04)^2/4=0.001256 m^2$$

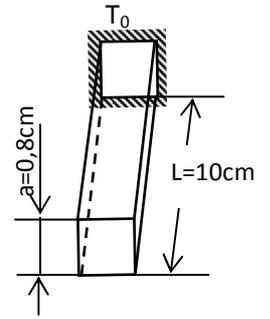
$$m = \sqrt{\frac{h.P}{k.S}} = \sqrt{\frac{14.0,04.\pi}{200.0,001256}} = 2,6464 m^{-1}$$

$$G = \frac{h}{k.m} = \frac{14}{200.2,6464} = 0,02645$$

$$\phi = 200.2,6464.0,001256.(238 - 21) \cdot \frac{th(2,6464.0,13) + 0,02645}{1 + 0,02645.th(2,6464.0,13)} = 51,1243W = 51,1243J / s$$

Exercice 4

Une ailette en acier de conductivité thermique ($k=18\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$), de section carrée ($8\text{mm}\times 8\text{mm}$) et de longueur ($L=10\text{ cm}$) est exposée à un environnement de température $T_a=45^\circ\text{C}$ et de coefficient d'échange par convection $h=43\text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$. Sa base est maintenue à une température de 256°C .



Calculer l'efficacité et le flux de chaleur perdu par cette ailette.

Solution

$$\phi = k \cdot m \cdot S \cdot (T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + Gth(mL)}$$

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot S}}; \quad P = 4 \cdot a = 4 \cdot 0,008\text{m} = 0,032\text{m}; \quad S = a \cdot a = 0,008 \cdot 0,008 = 0,000064\text{m}^2$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot S}} = \sqrt{\frac{43 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}} \right] \cdot 0,032\text{m}}{18 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}} \right] \cdot 0,000064\text{m}^2}} = 34,56 \text{ m}^{-1}$$

$$G = \frac{h}{k \cdot m} = \frac{43 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}} \right]}{18 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}} \right] \cdot 34,56\text{m}^{-1}} = 0,069123$$

$$\phi = 18 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}} \right] \cdot 34,56 \text{ m}^{-1} \cdot 0,000064\text{m}^2 \cdot (256 - 45) \cdot \frac{th(34,56 \text{ m}^{-1} \cdot 0,1\text{m}) + 0,069123}{1 + 0,069123th(34,56 \text{ m}^{-1} \cdot 0,1\text{m})} = 8,386 \text{ W}; \quad \varepsilon = 32,27\%$$

Exercice 5

Une ailette de section rectangulaire (voir figure ci-dessous) avec 3 cm de longueur, 80 cm de largeur et 0,25 cm de hauteur. Vous avez le choix de deux matériaux avec les propriétés suivantes:

	Aluminium (Al)	Magnésium (Mg)
Conductivité thermique k [$\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$]	200	154
Densité ρ [kg/m^3], Poids	2710	1750

Comparer le flux de chaleur, l'efficacité et le poids des deux ailettes avec cette configuration pour $h=45$ [$\text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$] et une différence de température $\Delta T = T_0 - T_a = 90^\circ\text{C}$, entre la base de chaque ailette et le milieu ambiant.

Solution

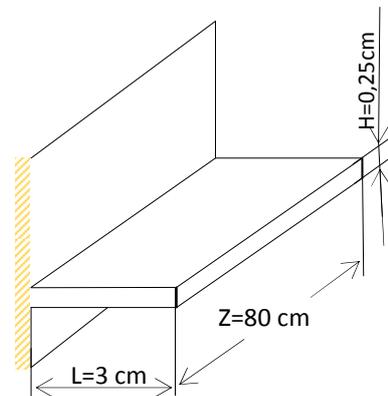
$$\phi = k \cdot m \cdot S \cdot (T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + Gth(mL)}$$

$$\varepsilon = \frac{th(mL) + G}{mL + Gth(mL)}$$

$$P_e = 2 \cdot (Z + H) = 2 \cdot (0,8 + 0,0025) = 1,605\text{m};$$

$$S = Z \cdot H = 0,8\text{m} \cdot 0,0025\text{m} = 0,002\text{m}^2;$$

$$P = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot L, \quad L = 0,03\text{m};$$



$$m = \sqrt{\frac{h.P_e}{k.S}}; G = \frac{h}{k.m}, h=45 \text{ W/m}^2.\text{°C}.$$

Pour les résultats de calcul, voir tableau ci-dessous:

	Aluminium (Al)	Magnésium (Mg)
$m[\text{m}^{-1}]$	13,4373	15,3133
G	0,01674	0,01908
m.L	0,4031	0,4594
$k[\text{W/m}.\text{°C}]$	200	154
$\rho[\text{kg/m}^3]$	2710	1750
P[kg]	0,1626	0,105
$\phi[\text{W}]$	191,930	188,875
ε	0,9750	0,9593

Comparaison

On remarque que le poids de l'ailette en (Al) est supérieur de (54.85%) à celui de (Mg) et puisque, le flux et l'efficacité de la première (Al) sont légèrement supérieurs à cette dernière (Mg), l'utilisation d'une ailette en (Mg) est recommandée malgré que le prix de revient de l'aluminium est moins chère devant celui du magnésium.

Exercice 6

Considérons une ailette droite de section circulaire, de diamètre 3cm et de longueur 8cm exposée à un écoulement convectif avec $h = 28 \text{ [W/m.K]}$. Il est demandé de comparer la distribution de la température dans cette ailette, ainsi que l'écoulement de la chaleur et les efficacités pour trois matériaux différents:

1. L'aluminium avec ($k=200 \text{ W/m.K}$);
2. l'acier inoxydable avec ($k=16 \text{ W/m.K}$);
3. Le verre avec ($k=1,2 \text{ W/m.K}$);

Solution

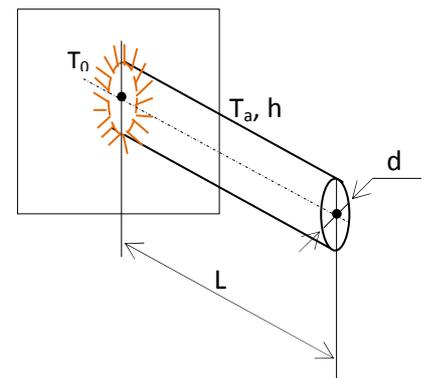
1. La distribution de la température

$$\frac{T(x)-T_a}{(T_0-T_a)} = \left[\frac{Gsh[m(L-x)]+ch[m(L-x)]}{ch(mL)+Gsh(mL)} \right];$$

T_0 : température de la base (de la source de chaleur);

T_a : température du milieu environnant

$$\text{Avec, } = \sqrt{\frac{h.P}{k_i.S}}, P=2\pi r=\pi d \Rightarrow m = \sqrt{\frac{h.P}{k_i.S}} = \sqrt{\frac{28 \text{ W/m}^2 \text{ K} \cdot 0,03\pi m}{\pi(0,015)^2 m^2 k_i}} = \sqrt{\frac{3733,33 \text{ W/m}^3 \text{ K}}{k_i}};$$



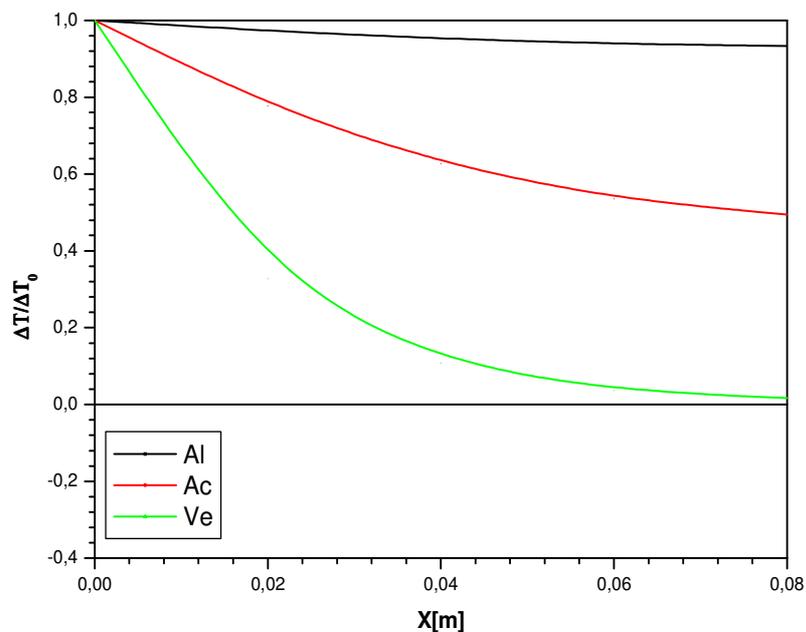
$$G_i = \frac{h}{k_i \cdot m} = \frac{28W/m^2K}{k_i m_i}$$

Pour les valeurs numériques de ces paramètres, voir tableau ci-dessous:

	m_i	$m_i L$	G_i
Aluminium	4,3205	0,3456	0,0324
Acier	15,2752	1,2220	0,1145
Verre	55,7773	4,4622	0,4183

La distribution de la température ($\Delta T/\Delta x$), peut être calculée en fonction de (x), pour un intervalle de longueur de (0,02m) et les résultats de calcul sont résumés dans le tableau ci-dessous;

X(m)	Aluminium	Acier	Verre
0	1	1	1
0,02	0,9725	0,77679	0,32788
0,04	0,95227	0,62665	0,10791
0,06	0,93915	0,53545	0,03675
0,08	0,93305	0,49462	0,01627



Interprétation

On remarque que la distribution de la température dans une ailette en Aluminium est plus rapide, moins rapide pour l'acier et lente pour une ailette en Verre. Ce dernier a une pente rapide à la base mais la valeur basse de sa conductivité produit un taux bas de transfert de chaleur.

2. Flux de chaleur dissipé et l'efficacité

$$\phi = kms(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL)+G}{1+Gth(mL)}$$

$$\varepsilon = \frac{th(mL)+G}{mL+Gth(mL)}$$

Si on considère que le flux dissipé par l'ailette en Aluminium est égale à l'unité (100%), on peut déterminer les flux dissipés par les deux ailettes en Acier et en Verre à partir des efficacités.

	Efficacité	Flux [%]
Aluminium	1.00	100
Acier	0,7242	72.42
Verre	0,2905	29.05

Interprétation

On remarque que l'efficacité de l'ailette en Aluminium est la plus importante suivie par celle de l'Acier, tandis que celle du verre est la plus faible.

Chapitre III: Conduction bidimensionnelle en régime permanent

III-1) Concept de facteur de forme entre deux surfaces isothermes (surfaces équivalentes)

Dans un système bidimensionnel, où seulement deux températures limites sont imposées, on peut exprimer le facteur de forme en conduction (f_t) tel que:

$$\phi = k \cdot f_t \cdot \Delta T \quad (3-1)$$

Les valeurs de (f_t), peuvent être déterminées pour différentes géométries.

III-1-1) Facteur de forme pour une paroi prismatique (Mur 3D)

➤ Pour un mur plan, le flux thermique (ϕ) est donné par:

$$\phi = k \cdot \frac{S}{e} (T_1 - T_2) = k \cdot f_t \cdot (T_1 - T_2) \quad (3-2)$$

$\Rightarrow f_t = \frac{S}{e}$, S: surface de mur, e: l'épaisseur de mur.

➤ Pour un mur tridimensionnel (Four par exemple), différents facteurs de forme sont utilisés pour calculer le flux thermique à travers les sections des coins et des bordures, dans le cas où toutes les dimensions intérieures sont supérieures à (1/15) de l'épaisseur de mur.

$$\begin{cases} f_p = \frac{S}{e}; \\ f_b = 0.54 D_i; \\ f_c = 0.15 e; \\ D_i: \text{longueur de bordure} \end{cases}$$

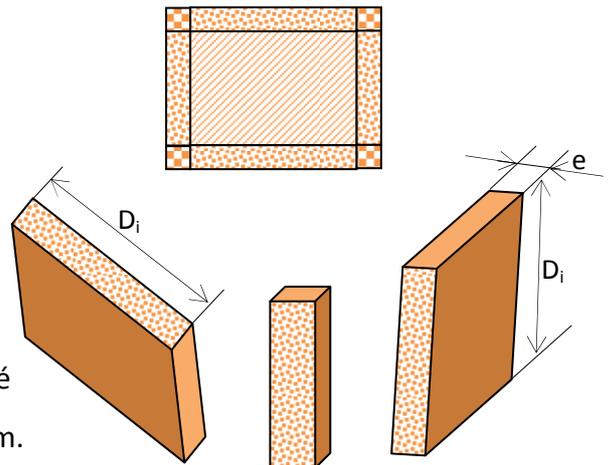


Fig. 3-1: Représentation schématique pour le calcul des facteurs de formes 3D

Exemple 1

Un four de forme cubique, de dimensions intérieures (48×48×48) cm est construit de briques de conductivité thermique ($k=1.04 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$), avec une épaisseur de 8cm.

La température à l'intérieur du four est de 478°C , à l'extérieur est de 42°C . Calculer le flux thermique dissipé à travers les murs de four.

Solution

On calcule le facteur de forme total par addition des facteurs de parois, de bordures et des coins.

- $f_p = \frac{S}{e} = \frac{0.48 \times 0.48}{0.08} = 2.88 \text{ m}$
- $f_b = 0.54 D = 0.54 \times 0.48 = 0.2592 \text{ m}$
- $f_c = 0.15 e = 0.15 \times 0.08 = 0.012 \text{ m}$

Il y a: six sections de parois, douze bordures et huit coins.

$$\Rightarrow f_t = 6 \cdot (2.88) + 12 \cdot (0.2592) + 8 \cdot (0.012) = 20.4864 \text{ m}.$$

$$\Rightarrow \phi = k \cdot f_t \cdot \Delta T = 1.04 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}} \right] \times 20.4864 [\text{m}] \times (478 - 42)[\text{C}] = 9289,35 \text{ W}$$

III-1-2) Facteur de forme pour une paroi cylindrique

On peut exprimer les flux thermiques pour une paroi cylindrique ou une paroi sphérique avec une méthode analogue à celle de mur plan. Donc, pour une paroi cylindrique:

$$\phi = k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) \quad (3-3)$$

Avec; $e=r_1-r_2$, pour un cylindre creux (voir figure: **Fig.2-6**)

$$\begin{aligned} \phi &= k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\acute{e}q}}} = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L}} \\ \frac{S_{\acute{e}q}}{e} &= \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \Rightarrow S_{\acute{e}q} = \frac{2\pi L \cdot e}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi L(r_2 - r_1)}{\ln(2\pi L r_2 / 2\pi L r_1)} = \frac{S_2 - S_1}{\ln(S_2/S_1)}; f = \frac{S_{\acute{e}q}}{e} \\ \Rightarrow \phi &= k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\acute{e}q} \cdot k}} \end{aligned}$$

Avec $(\frac{e}{S_{\acute{e}q} \cdot k})$, exprime aussi la résistance thermique de la couche cylindrique.

Remarque: S varie entre S_1 et S_2 , selon la loi: $S = 2\pi L \cdot r = K \cdot r$; donc S est proportionnelle au rayon r c'est à dire, lorsque $(r \uparrow \Rightarrow S \uparrow)$.

III-1-3) Facteur de forme pour une paroi sphérique

$$\begin{aligned} \phi &= k \cdot \frac{S_{\acute{e}q}}{e} (T_1 - T_2) = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\acute{e}q}}} = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})/4\pi}{S_{\acute{e}q}}} \Rightarrow \frac{S_{\acute{e}q}}{e} = \frac{4\pi}{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} \Leftrightarrow S_{\acute{e}q} = \frac{4\pi e}{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} = \frac{4\pi(r_2 - r_1)}{\frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}} = 4\pi r_1 r_2; \\ \Rightarrow S_{\acute{e}q} &= 4\pi r_1 r_2 = (2\sqrt{\pi} r_1)(2\sqrt{\pi} r_2) = \sqrt{4\pi r_1^2} \times \sqrt{4\pi r_2^2} = \sqrt{(4\pi r_1^2)(4\pi r_2^2)} = \sqrt{S_1 \times S_2}; \\ S_{\acute{e}q} &= \sqrt{S_1 \times S_2}; f = \frac{S_{\acute{e}q}}{e}, \text{ (voir figure: Fig.2-7).} \end{aligned}$$

Remarque: $(\frac{e}{S_{\acute{e}q} \cdot k})$, représente aussi dans ce cas, la résistance thermique de la couche sphérique. S, varie entre (S_1) et (S_2) selon la loi: $S = 4\pi r^2 = K \cdot r^2$; S est proportionnelle à (r^2) , c'est à dire: lorsque $(r^2 \uparrow \Rightarrow S \uparrow)$.

Exemple 2

Un cône en fer de conductivité thermique, $k=45$ [kcal/h.m.C].

A $x=0$, $T_1=70^\circ\text{C}$, $D_1=38\text{mm}$. A $x=H=78\text{mm}$, $T_2=35^\circ\text{C}$, $D_2=88\text{mm}$.

Calculer le flux thermique ϕ .

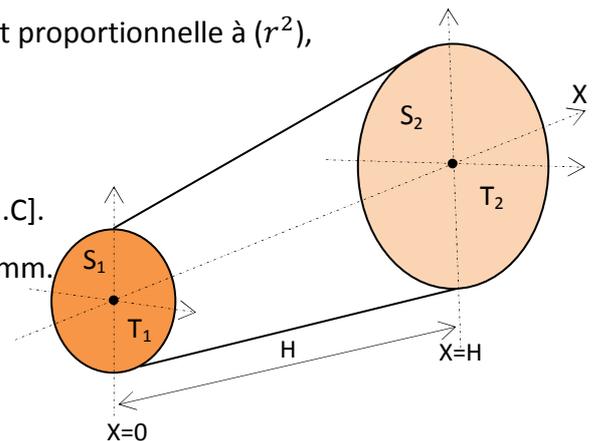
Solution

Il faut connaitre comment évolue la surface du cône entre S_1 et S_2 .

$S_1 = \pi \cdot r_1^2$, $S_2 = \pi \cdot r_2^2 \Rightarrow S$, varie en r^2 , on applique la loi d'une surface équivalente pour une paroi sphérique.

$$\Rightarrow S_{\acute{e}q} = \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \sqrt{(\pi r_1^2) \cdot (\pi r_2^2)} = \sqrt{(\pi \cdot (19 \cdot 10^{-3})^2) \cdot (\pi \cdot (44 \cdot 10^{-3})^2)} = 2.6263 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$$

$$e=H=78 \cdot 10^{-3} \text{m}$$



$$\phi = 45 \frac{kcal}{h.m.C} . 2.6263 \cdot 10^{-3} m^2 (70 - 35) C = 4.1365 kcal/h$$

III-2) L'analogie électrique et ses limites

– L'expression de la densité de flux conductif donné par la loi de Fourier: $\varphi = -k(T) \cdot \nabla T$ est analogue à la loi d'ohm: $\vec{I} = \sigma(T) \cdot \vec{E} \Leftrightarrow I = \sigma(T) \cdot \nabla U$, tels que:

\vec{I} : le vecteur densité de courant;

\vec{E} : le champ électrique;

$\sigma(T)$: la conductivité électrique;

U: le potentiel électrique.

⇒ Donc, les correspondances évidentes entre les grandeurs électriques et thermiques sont:

– Conductivité: $\sigma(T) \Leftrightarrow k(T)$;

– Potentiel U \Leftrightarrow température T;

– Intensité de courant I \Leftrightarrow densité de flux conductif.

Dans les deux cas, les isothermes (équipotentiels) sont normales aux lignes et aux tubes de flux (lignes et tubes de courant).

L'intérêt en régime stationnaire de l'analogie électrique est:

– L'application des lois de mouvement (les techniques simples de l'électrocinétique linéaire et stationnaire);

– L'introduction des notions de résistance et de conductivité dans le cas thermique;

– L'usage des relations d'association en série et en parallèle dans le cas thermique;

– L'application des théorèmes de Thévenin et de Norton et les lois de réseau...etc.

Cependant, l'usage de ces méthodes (pour simplifier les schémas des circuits), n'est plus limité (ou valable) qu'en électrocinétique pour deux raisons:

1. les conductivités électriques et thermiques dépendent en général, de la température (T), ceci ne présente que peu d'inconvénient dans le cas de la conduction électrique, mais cette propriété rend les problèmes non linéaires en (T) dans le cas de la conduction thermique. Donc, la conductivité (k), doit être supposée homogène, isotrope et indépendante de la température (T);

2. Le transfert conductif se produit souvent en concurrence avec le transfert radiatif, qui est assez rarement linéarisable. Quand le rayonnement thermique n'est pas linéaire, l'analogie électrique ne peut être utilisée.

III-3) Méthodes numériques (différences finies)

- Sont des méthodes approximatives basées sur la technique appelée différences finies;
- Le but étant d'approximer l'équation différentielle et les conditions aux limites par un système d'équations algébriques;
- Ceci est accompli en subdivisant le domaine étudié en une série d'éléments finis;
- Le plan (x, y) est découpé en un réseau de mailles, chaque élément de réseau est sous l'influence des éléments qui l'entourent;
- Les points nodaux sont désignés par les indices (m: dans la direction x, n: dans la direction y).

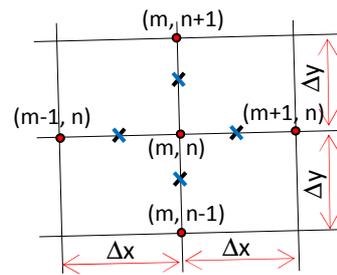


Fig.3-2: Volume de contrôle typique du maillage

Soit l'équation différentielle:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3-4)$$

On utilise la technique (méthode) de différences finies pour approximer les gradients de température.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{m,n} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{m,n} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

L'approximation par différences finies de l'équation différentielle devient:

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$$\text{Si } \Delta x = \Delta y, \text{ donc: } T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \quad (3-5)$$

Exemple 4

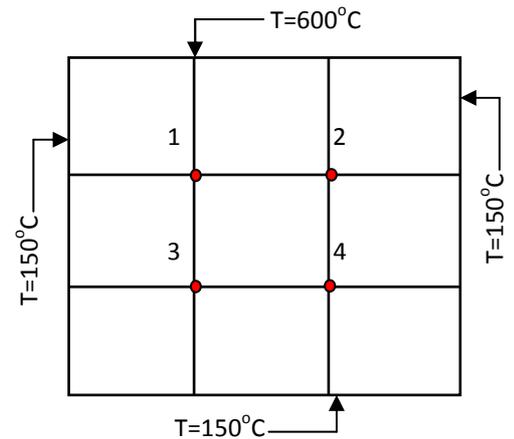
Soit l'exemple illustré sur la figure ci-contre.

Déterminer les températures des quatre nœuds (1,2,3 et 4)

En utilisant l'équation (3-5), nous aurons quatre équations pour chaque nœuds (1, 2, 3 et 4).

Solution

Le nœud (1) est influencé par quatre nœuds adjacents (2,3, 150°C et 600°C).



$$T_{m+1,n}=T_2, T_{m-1,n}=150^\circ\text{C}, T_{m,n+1}=600^\circ\text{C}, T_{m,n-1}=T_3, T_{m,n}=T_1.$$

$$T_2+150+600+T_3-4T_1=0 \quad (1)$$

De la même manière pour le nœud (2):

$$T_1+T_4+150+600-4T_2=0 \quad (2)$$

De la même manière pour le nœud (3):

$$T_1+T_4+150+150-4T_3=0 \quad (3)$$

De la même manière pour le nœud (4):

$$T_3+T_2+150+150-4T_4=0 \quad (4)$$

$$(1)-(4) \Rightarrow T_1=112,5+T_4 \quad (5)$$

$$(2)-(3) \Rightarrow T_2=112,5+T_3 \quad (6)$$

$$(5) \rightarrow (2) \Rightarrow T_4=2T_2-431,25 \quad (7)$$

$$(6) \rightarrow (4) \Rightarrow T_3=2T_4-206,25 \quad (8)$$

$$(8) \rightarrow (6) \Rightarrow T_2=2T_4-93,75 \quad (9)$$

$$(9) \rightarrow (7) \Rightarrow T_4=206,25^\circ\text{C}, T_2=318,75^\circ\text{C}, T_1=318,75^\circ\text{C}, T_3=206,25^\circ\text{C}.$$

III-4) Analyse mathématique de la conduction bidimensionnelle

Le but de chaque procédure d'analyse du phénomène de transfert thermique est la détermination de la distribution de la température et le flux de chaleur. Dans un système bidimensionnel et sans source de la chaleur, l'équation générale de conduction gouvernant la distribution de la température en régime permanent (2-7) se simplifié à:

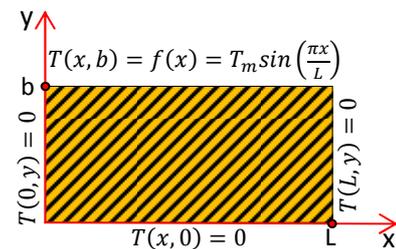
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3-6)$$

La solution analytique d'un problème de conduction thermique doit satisfaire l'équation gouvernante régissant le phénomène ainsi que les conditions aux limites relatives au problème physique considéré. L'approche traditionnel de recherche d'une solution exacte pour l'équation de Fourier, est la méthode de séparation de variables. Donc, Pour la solution (l'intégration) mathématique de cette équation, on utilise la méthode de séparation de variables, qui est basée sur l'idée de supposer la solution sous forme de produit de deux fonctions:

$$X(x) \text{ et } Y(y) \text{ tel que; } T = X.Y \quad (3-7)$$

Considérons une plaque rectangulaire mince, sans sources de chaleur et isolée de deux cotés, les deux surfaces de bas et de haut (inférieure et supérieure) (**Fig.3-3**). Comme montré sur la figure, les conditions aux limites pour ce domaine sont spécifiées comme suit:

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y = 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ 0 & \text{pour } x = L \\ f(x) = T_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \text{pour } y = b \end{cases}$$



T_m , c'est l'amplitude de la fonction sinus de $f(x)=T(x, b)$.

$$T(x, y) = X(x).Y(y)$$

Fig.3-3: Spécification des C.L sur le domaine de calcul

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dX}{dx} \cdot Y(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Y \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{dY}{dy} \cdot X(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = X \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

$$Y \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + X \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (3-8)$$

On remarque que chaque coté de l'équation (3-8) est indépendant de l'autre, (x et y sont des variables indépendantes). Par conséquent, l'ensemble des deux cotés doit être égal à une constante désignée par ($C^{te}=\lambda^2$).

$$\Rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2 = C^{te}$$

On aura par suite les deux équations différentielles ordinaires:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (3-9)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (3-10)$$

Les solutions générales des équations (3-9) et (3-10) sont données par:

$$\begin{cases} X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \end{cases} \quad (3-11)$$

$$\begin{cases} Y = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y} \end{cases} \quad (3-12)$$

Par suite;

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \cdot (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})$$

Les constantes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont déterminées à partir des conditions aux limites spécifiées sur la figure (**Fig.3-3**).

– A partir de la première condition:

$$(C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \cdot (C_3 + C_4) = 0$$

– A partir de la deuxième condition:

$$C_1 \cdot (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$$

– A partir de la troisième condition:

$$(C_1 \cos \lambda L + C_2 \sin \lambda L) \cdot (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$$

La première condition ne peut être satisfaite que si les constantes ($C_3 = -C_4$), par contre, la deuxième condition ne peut être satisfaite que dans le cas où; $C_1 = 0$. En utilisant ces constatations dans la troisième condition, on peut écrire:

$$2C_2 C_3 \sin \lambda L \operatorname{sh} \lambda y = 0$$

Pour satisfaire cette condition:

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \text{entiers}, \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$n=0$, est exclue puisque elle donne une solution triviale ($T(x, y)=0$).

Par conséquent, on aura pour chaque entier (n), une solution différente et chacune a une constante d'intégration (K_n) séparément de l'autre. La sommation de ces solutions donne:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

La quatrième condition implique que pour $y=b$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = T_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

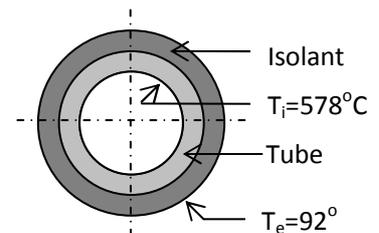
Donc, on ne peut retenir que le premier terme (avec, $K_1 = T_m / \operatorname{sh}(\pi b / L)$) à partir de la série des solutions, par suite, la solution finale pour ce cas particulier (problème illustré sur la figure, **Fig.3-3**) est donnée par:

$$T(x, y) = T_m \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi y}{L}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi b}{L}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Exercice 1

Un tube en acier inoxydable ($k=19\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$) avec 3cm de diamètre intérieur et 5cm de diamètre extérieur est isolé par une couche d'amiante ($k=0,2\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$) de 2,5cm d'épaisseur (voir figure ci-dessous). Sachant que la température de la paroi interne de tube est maintenue à 578°C et celle de la paroi externe de l'isolant est à 92°C .

1. Calculer le flux de chaleur perdu par mètre de longueur.
2. Donner le schéma électrique équivalent.
3. Quelle est l'importance de l'utilisation de l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques?.



Solution 1

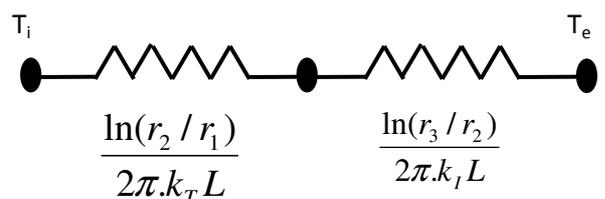
1. Le flux de chaleur perdu par mètre de longueur:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{\sum R_i} = \frac{T_i - T_e}{R_T + R_I}, \quad R_T = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi \cdot k_T \cdot L}, \quad R_I = \frac{\ln(r_3 / r_2)}{2\pi \cdot k_I \cdot L}$$

$$\Phi = \frac{2\pi \cdot L \cdot (T_i - T_e)}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{k_T} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{k_I}} \Rightarrow \frac{\Phi}{L} = \frac{2\pi(T_i - T_e)}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{k_T} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{k_I}}$$

$$\frac{\Phi}{L} = \frac{2\pi \cdot (578 - 92)}{\frac{\ln(2.5/1.5)}{19} + \frac{\ln(5/2.5)}{0,2}} = 874,3087 \text{ W / m}$$

2. Schéma électrique équivalent:



3. L'importance de l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques:

l'application des techniques simples de l'électrocinétique linéaire et stationnaire, l'introduction des notions de résistance et de conductance, l'association en série et en parallèle, théorèmes de Thévenin, de Norton, lois des réseaux ...etc. Pour simplifier les schémas des circuits thermiques.

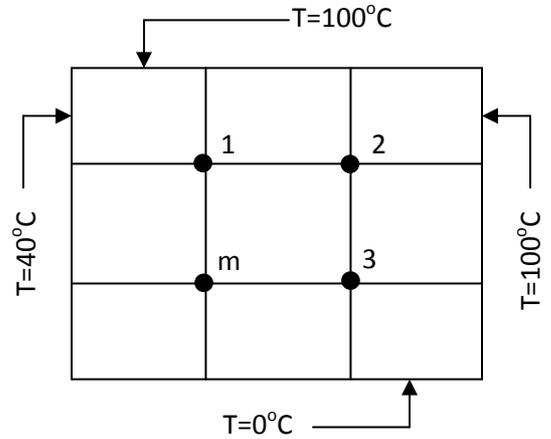
Exercice 2

Soit le réseau de nœuds illustré ci-contre appartenant à un solide de conductivité thermique ($k=10W/m.°C$).

Calculez grâce à une méthode numérique

les températures des nœuds (1, 2, 3) ;

($\Delta X=\Delta Y$; $T_m=40°C$).



$$\begin{cases} 40 + 100 + T_m + T_2 - 4T_1 = 0 \\ T_1 + 100 + T_3 + 100 - 4T_2 = 0 \\ T_2 + T_m + 0 + 100 - 4T_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4T_1 + T_2 + 0T_3 = -180 \\ T_1 - 4T_2 + T_3 = -200 \\ 0T_1 + T_2 - 4T_3 = -140 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180 \\ -200 \\ -140 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [A].[T] = [C] \Rightarrow [T] = [A]^{-1}].[C]$$

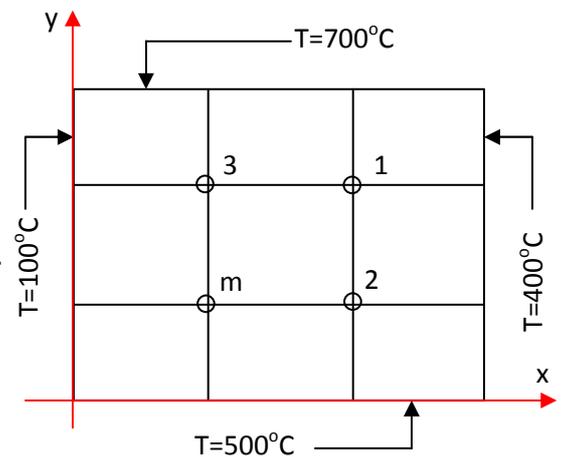
$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A} . A^{ct} ; \det A = -56 ; A^{ct} = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{56} \begin{bmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -180 \\ -200 \\ -140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 \\ 80 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

Soit le système bidimensionnel illustré ci-contre, avec les conditions aux limites indiquées sur la figure.

Calculer les températures des nœuds 1, 2, 3 si $T_m=346°C$

et ($\Delta x=\Delta y$), en utilisant la méthode numérique par différence.



Solution

Par application de l'équation (3-5)

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

$$\begin{cases} T_2 + T_3 + 700 + 400 - 4T_1 = 0 \\ T_1 + T_m + 500 + 400 - 4T_2 = 0 \\ T_1 + T_m + 100 + 700 - 4T_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4T_1 + T_2 + T_3 = -1100 \\ T_1 - 4T_2 + 0T_3 = -1246 \\ T_1 + 0T_2 - 4T_3 = -1146 \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$[A] \cdot [T] = [C]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1100 \\ -1246 \\ -1146 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [A]^{-1} \cdot [C], [A]^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{ct}, \det A = (-1)^{i+j} |A|_i, A^t = [M_{ij}] \Rightarrow A^{ct} = [M_{ji}]$$

$$\det A = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \dots = -56$$

$$A^t = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, A^{ct} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{12} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\dots = \dots \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots;$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix}, A^{ct} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-56} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1100 \\ -1246 \\ -1146 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{-56} [16 \cdot (-1100) + 4 \cdot (-1246) + 4 \cdot (-1146)] = 485,14 \text{ C} \\ T_2 = \frac{1}{-56} [4 \cdot (-1100) + 15 \cdot (-1246) + 1 \cdot (-1146)] = 432,78 \text{ C} \\ T_3 = \frac{1}{-56} [4 \cdot (-1100) + 1 \cdot (-1246) + 15 \cdot (-1146)] = 407,78 \text{ C} \end{cases}$$

Vérification

$$-4 \cdot (485,14) + 432,78 + 407,78 = -1100 \text{ C}$$

Chapitre IV: Conduction en régime transitoire

IV-1) Conduction avec températures limites imposées

Le problème de conduction en régime transitoire peut être traité de deux manières: soit en utilisant la méthode des capacités regroupées (lumped capacity) en considérant le temps comme variable indépendante unique, soit en résolvant l'équation différentielle partielle directement qui est dans ce cas, fonction du temps et des coordonnées spatiales. Cette deuxième méthode est possible uniquement pour des géométries de simples formes (plaques, cylindres sphères..etc.). Prenant le cas d'un bloc infini, sans sources internes de chaleur ($Q \rightarrow 0$) et où la température est uniforme sur deux directions (y et z). Donc, le problème est unidimensionnel (distribution suivant x seulement) et transitoire ($\partial/\partial t \neq 0$). Dans ce cas, l'équation d'énergie (de chaleur), peut être donnée par:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4-1)$$

En exprimant le coefficient de diffusivité thermique par $\alpha = (k/\rho c)$, l'équation (4-1) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4-2)$$

Supposant que le bloc infini d'épaisseur ($2e$) est initialement à la température uniforme (T_i).

A $t=0$, les surfaces sont brusquement refroidissent à $T=T_1$.

Introduisant la variable: $\theta = T - T_1$

L'équation (4-2) devient:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4-3)$$

Avec les conditions:

1. initiales: à $t=0$, $T=T_i$
2. aux limites: $0 < x < 2e$, $\theta = \theta_i = T_i - T_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} t > 0: \text{à } x = 0, \theta = T_i - T_1 = 0 \\ t > 0: \text{à } x = 2e, \theta = T_i - T_1 = 0 \end{array} \right.$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, la solution de l'équation (4-3), peut être donnée par le produit de deux fonctions: $\theta(x, t) = X(x) \cdot H(t)$.

Ce qui conduit aux équations différentielles suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \frac{dH}{dt} + \alpha \lambda^2 H = 0 \end{array} \right. \quad (4-4)$$

$$(4-5)$$

Tel que (λ^2) est la constante de séparation. Pour satisfaire les conditions aux limites, il est nécessaire que ($\lambda^2 > 0$).

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (4-6)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha \lambda^2 H \Leftrightarrow \int \frac{dH}{H} = -\alpha \lambda^2 \int dt$$

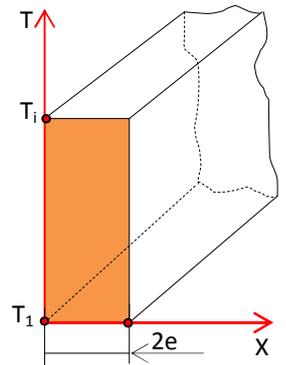


Fig.4-1: Plaque infinie

$$\ln H = -\alpha\lambda^2 t + \ln C_3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{H}{C_3}\right) = -\alpha\lambda^2 t$$

$$H = C_3 e^{-\alpha\lambda^2 t} \quad (4-7)$$

Remarque

Dans l'équation (4-6) si on prend ($\lambda^2 < 0$), $H = C_3 e^{\alpha\lambda^2 t}$, ce qui conduit pour ($t \rightarrow \infty$) à ($T \rightarrow \infty$), ce qui est impossible pratiquement. Donc, la solution finale est donnée par:

$$\theta(x, t) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \cdot C_3 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\Rightarrow \theta(x, t) = (C_4 \cos \lambda x + C_5 \sin \lambda x) \cdot e^{-\alpha\lambda^2 t} \quad (4-8)$$

➤ A $x=0, t>0$: $\theta(0, t) = (C_4 \overset{1}{\cancel{\cos \lambda \cdot 0}} + C_5 \overset{0}{\cancel{\sin \lambda \cdot 0}}) \cdot e^{-\alpha\lambda^2 t} = 0$; $e^{-\alpha\lambda^2 t} \neq 0 \Rightarrow C_4 = 0$
 $\Rightarrow \theta(x, t) = C_5 \sin(\lambda x) \cdot e^{-\alpha\lambda^2 t}$

➤ A $x=2e, t>0$: $\theta(2e, t) = (C_4 \cos \lambda 2e + C_5 \sin \lambda 2e) \cdot e^{-\alpha\lambda^2 t} = 0 = C_5 \sin(\lambda 2e) e^{-\alpha\lambda^2 t}$
 $e^{-\alpha\lambda^2 t} \neq 0, C_5 \neq 0 \Rightarrow \sin(\lambda 2e) = 0 \Leftrightarrow 2e\lambda = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2e}, n = 1, 2, 3, \dots$

Donc, suivant les valeurs de n , il existe une infinité de solution sous forme de:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) \quad (4-9)$$

L'équation (4-9) est sous forme d'une série (en sinus) de Fourier et les valeurs de la constante (C_n), peuvent être déterminées par développement de la différence de température ($\theta_i = T_i - T_1$), en série de Fourier sur l'intervalle ($0 < x < 2e$).

$$\theta_i = \theta_i \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) \quad (4-10)$$

De la condition initiale, ($\theta_i = T_i - T_1, t=0, 0 < x < 2e$):

$$\theta_i(0, x) = \theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) \quad (4-11)$$

Par identification entre (4-10) et (4-11):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta_i}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) \Leftrightarrow C_n = \frac{2\theta_i}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \right] = \frac{2\theta_i}{\pi} \cdot \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{4\theta_i}{n\pi}, (n = 1, 3, 5, \dots)$$

La forme finale de la solution est donnée par:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\theta_i}{n\pi} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) = \frac{4\theta_i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta_i}$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right)$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_1}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right), (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4-12)$$

IV-2) Méthodes numériques (différences finies) en régime transitoire

Dans un système bidimensionnel, l'équation de conduction de la chaleur en régime variable s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}; \quad \left(\alpha = \frac{k}{\rho c} \right) \quad (4-13)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} (T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}) \quad (4-14)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2} (T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}) \quad (4-15)$$

La dérivation par rapport au temps est approximée par:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (4-16)$$

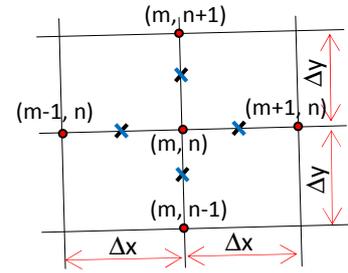


Fig.4-2: Volume de contrôle typique du maillage

L'indice (p) désigne l'intervalle du temps, le pas (dt).

Par combinaison des termes des équations (4-14), (4-15) et (4-16) dans l'équation (4-13):

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}) + \frac{1}{(\Delta y)^2} (T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (4-17)$$

Donc, si les températures des différents nœuds sont connues au temps (t), les températures après un intervalle du temps (Δt), peuvent être calculer en écrivant l'équation (4-17) pour chaque nœud et par suite, obtenir les valeurs de $(T_{m,n}^{p+1})$.

La procédure est répétitive pour obtenir la distribution après un nombre désiré de (Δt).

Si ($\Delta x = \Delta y$):

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + \left[1 - \frac{4\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_{m,n}^p \quad (4-18)$$

Si les intervalles du temps (Δt) et de distance (Δx) sont choisis de telle sorte que:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = 4 \quad (4-19)$$

On remarque que la température du nœud (m, n) après (Δt) est simplement la moyenne arithmétique des températures de quatre nœuds adjacents (au début de l'intervalle du temps, Δt).

$$\Rightarrow T_{m,n}^{p+1} = \frac{T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p}{4} \quad (4-20)$$

Dans le cas d'un système unidimensionnel:

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + \left[1 - \frac{2\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_m^p \quad (4-21)$$

$$\text{Si on choisit: } \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = 2 \quad (4-22)$$

\Rightarrow La température du nœud (m) après (Δt), est la moyenne arithmétique des températures des deux nœuds adjacents au début de (Δt).

$$\text{Soit } M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t}$$

1. $M \geq 2$: pour un système unidimensionnel;
2. $M \geq 4$: pour un système bidimensionnel.

Exercice 1

Une sphère en acier de 8cm de diamètre et initialement à la température uniforme de 288°C est soudainement plongée dans un milieu où règne une température de 92°C avec un coefficient de convection de 10 W/m² °C. Il est demandé de déterminer le temps nécessaire à la sphère d'atteindre une température de 144°C. Les caractéristiques de la sphère sont: $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$, $C=0,46 \text{ kJ/kg.}^\circ\text{C}$, $k=46 \text{ W/m}^\circ\text{C}$.

Solution

Dans ce cas, les pertes de chaleur par conduction sont négligeables, celles par convection seront manifestement représentées par une diminution de l'énergie interne de la sphère considérée.

Le flux de chaleur échangé par convection = diminution de l'énergie interne de la sphère.

$$\text{Fluide: } \phi_c = h.S.(T - T_1); \quad T_1 = 92^\circ \text{C}$$

$$\text{Sphère: } Q = -m.c.\frac{dT}{dt} = \rho.V.c.\frac{dT}{dt}$$

$$h.S.(T - T_1) = -\rho.V.c.\frac{dT}{dt} \Rightarrow \int \frac{dT}{T - T_1} = -\frac{h.S}{\rho.V.c} \int dt \Leftrightarrow \ln(T - T_1) = -\frac{h.S}{\rho.V.c}.t + \ln C_1$$

$$\Rightarrow T - T_1 = C_1.e^{-\frac{h.S}{\rho.V.c}.t}$$

- A $t=0$: $T=T_i=288^\circ\text{C}$; (de la sphère) : $T-T_i=C_1.e^0 \Rightarrow C_1=T_i-T$.

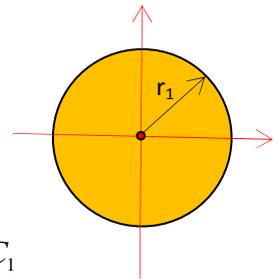
$$\frac{T - T_1}{T_i - T_1} = e^{-\frac{h.S}{\rho.V.c}.t} = e^{-\alpha.t}, \alpha = \frac{h.S}{\rho.V.c}, S = 4.\pi.r^2, V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$$

$$\alpha = \frac{h.4\pi.r^2}{\rho.(4/3)\pi.r^3.c} = \frac{3h}{\rho.r.c} = \frac{3.10\text{W/m}^2\text{C}}{7850\text{kg/m}^3.0.04\text{m}.460\text{J/kg.C}} = 2,077.10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{T - T_1}{T_i - T_1} = e^{-1,66.10^{-3}.t}, \text{ à } T = 144^\circ\text{C}; t = ?$$

$$e^{-2,077.10^{-4}.t} = \frac{144 - 92}{288 - 92} = 0,265 \Leftrightarrow -2,077.10^{-4}.t = \ln(0,265) \Rightarrow t = \frac{\ln(0,265)}{-2,077.10^{-4}}$$

$$t = 6394\text{s} \approx 106.567 \text{ min} \approx 1\text{h } 46,567 \text{ min}$$



Exercice 2

Une plaque de 3,2cm d'épaisseur, initialement à la température de 25°C est soumise sur chacune de ses faces à un incrément de température de 90°C. Déterminer au bout de combien de temps, la température au milieu de la plaque atteindra 100°C, si la plaque est en acier et si elle est en liège.

Quelle sera à cet instant, la densité de flux de chaleur pénétrant par chacune des deux faces?

Peut-on évaluer approximativement, la quantité de chaleur emmagasinée à cet instant-là par mètre carré de la plaque?

- Les propriétés thermiques de l'acier: $k=13$ [kcal/h m°C], $\alpha=(k/\rho C)=3,9.10^{-6}$ [m²/s]
- Les propriétés thermiques de liège: $k=0,037$ [kcal/h m°C], $\alpha=(k/\rho C)=1,56.10^{-7}$ [m²/s]

Solution

De l'équation (4-12) donnant la solution de l'équation de la chaleur en régime transitoire, on peut écrire:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_1}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right), (n = 1, 3, 5, \dots)$$

- Les conditions initiales et les conditions aux limites:

C.I: à $t=0$, $\theta=\theta_i=T_1-T_i=90^\circ\text{C}$; $0 < x < 2e$

C.L: à $x=0$, $\theta=T_1-T=0$ pour $T=T_1$, $t>0$

à $x=2e$, $\theta=T_1-T=0$ pour $T=T_1$, $t>0$

Pour $x=e$:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_i} = \frac{4}{\pi} \left[e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{9\pi^2}{4e^2} \alpha t} + \frac{1}{5} e^{-\frac{25\pi^2}{4e^2} \alpha t} - \frac{1}{7} e^{-\frac{49\pi^2}{4e^2} \alpha t} + \dots \right] \approx \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t};$$

- Réduction de la somme à son premier terme.

$$\Rightarrow \frac{T_1 - T}{T_1 - T_i} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t}$$

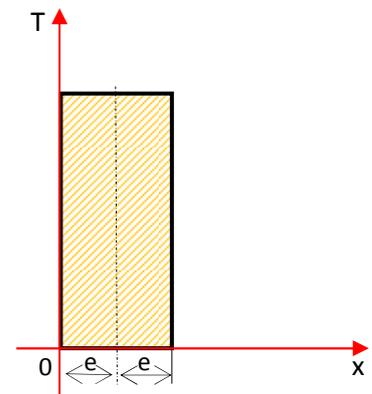
$$\Rightarrow \frac{T_1 - T}{T_1 - T_i} = \frac{T_1 - T_i + T_i - T}{T_1 - T_i} = 1 + \frac{T_i - T}{T_1 - T_i} = 1 + \frac{25 - 100}{90} = \frac{1}{6} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t} = \frac{\pi}{24} \Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t = \ln\left(\frac{\pi}{24}\right) \Rightarrow t = -\frac{4e^2}{\pi^2 \alpha} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$t = -\frac{4e^2}{\pi^2 \alpha} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

- Pour l'acier: $t = -\frac{4 \cdot (0,016)^2 m^2}{\pi^2 \cdot 3,9 \cdot 10^{-6} [m^2/s]} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{24}\right) = 54,10s$;

- Pour le liège: $t = -\frac{4 \cdot (0,016)^2 m^2}{\pi^2 \cdot 1,56 \cdot 10^{-7} [m^2/s]} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{24}\right) = 1352,33s \approx 22,54 \text{ min}$



- La densité de flux de chaleur pénétrant par chacune des deux faces est:

$$q(x, t) = \varphi(x, t) = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \frac{\partial(T_1 - \theta)}{\partial x} = +k \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2e} x\right);$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_i \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \frac{n\pi}{2e} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) = \frac{2\theta_i}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2e} x\right) \approx \frac{2\theta_i}{e} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t};$$

$$\varphi(e, t) = \frac{2k(T_1 - T_i)}{e} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t};$$

- ✓ Pour l'acier: $k=13$ [kcal/h m°C], $\alpha=(k/\rho C)=3,9 \cdot 10^{-6}$ [m²/s], $t=54,10s$

$$\varphi(e, t) = \frac{2k(T_1 - T_i)}{e} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t} = \frac{(2 \cdot 13 \text{ kcal/h m C} \cdot 90 \text{ C}) \cdot 1,16}{0,016 \text{ m}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4 \cdot (0,016)^2 \text{ m}^2} \cdot 3,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 54,10 \text{ s}};$$

$$\varphi(e, t) = 22,235 \text{ kW/m}^2$$

- ✓ Pour le liège: $k=0,037$ [kcal/h m°C], $\alpha=(k/\rho C)=1,56 \cdot 10^{-7}$ [m²/s], $t=1352,33s$

$$\varphi(e, t) = \frac{2k(T_1 - T_i)}{e} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4e^2} \alpha t} = \frac{(2 \cdot 0,037 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \text{ m C} \cdot 90 \text{ C}) \cdot 1,16}{0,016 \text{ m}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4 \cdot (0,016)^2 \text{ m}^2} \cdot 1,56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 1352,33 \text{ s}};$$

$$\varphi(e, t) = 63,28 \text{ W/m}^2$$

- La quantité de chaleur emmagasinée à cet instant par mètre carré de la plaque est:

$$Q = mC\Delta T = \rho VC\Delta T; S=1\text{m}^2, E=2e=2 \cdot 0,016 \text{ m}, V=2 \cdot 0,016 \text{ m}^3, C=(k/\rho\alpha)$$

$$\Rightarrow Q = \rho V \frac{k}{\rho\alpha} \cdot \Delta T = \frac{Vk}{\alpha} \cdot \Delta T;$$

- ✓ Pour l'acier: $k=13$ [kcal/h m°C], $\alpha=(k/\rho C)=3,9 \cdot 10^{-6}$ [m²/s]

$$Q = \frac{Vk}{\alpha} \cdot \Delta T = \frac{(2 \cdot 0,016 \text{ m}^3 \cdot 13 \text{ kcal/hmC}) \cdot 1,16}{3,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} \cdot 90 \text{ C} = 111,36 \cdot 10^5 \text{ J/m}^2$$

- ✓ Pour le liège: $k=0,037$ [kcal/h m°C], $\alpha=(k/\rho C)=1,56 \cdot 10^{-7}$ [m²/s]

$$Q = \frac{Vk}{\alpha} \cdot \Delta T = \frac{(2 \cdot 0,016 \text{ m}^3 \cdot 0,037 \text{ kcal/hmC}) \cdot 1,16}{1,56 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}} \cdot 90 \text{ C} = 7,92 \cdot 10^5 \text{ J/m}^2;$$

Chapitre V: Transfert de chaleur par convection

V-1) Introduction

La convection est un mécanisme du transfert de chaleur entre deux milieux de phases différentes ou entre deux régions du même milieu en présence d'un mouvement du fluide (gaz ou liquide). On distingue deux types principaux de convection, convection naturel et convection forcée. En **convection naturelle**, le mouvement du fluide est causé par les effets de flottabilité due au variation de la densité de fluide (qui nécessite une différence de température). Par contre, en **convection forcée**, un gradient de pression imposé provoque l'écoulement du fluide. Cependant, la force de flottabilité diminue lorsque la densité de fluide approche celle du fluide environnant. La vitesse du fluide atteint un maximum et ensuite, tend vers zéro loin de la surface chaude. Ce transfert de chaleur est caractérisé par un coefficient (h), dépendant de plusieurs paramètres; la densité, la viscosité, la vitesse du fluide ainsi que les propriétés thermiques.

L'objectif principal de l'étude de phénomène de la convection, consiste essentiellement à:

- a. La compréhension et la modélisation de ce phénomène pour la prédiction de ses effets dans les équipements relatifs et même dans l'environnement;
- b. Le dimensionnement et le choix de matériaux convenables des appareils, équipements et installations de chauffage et de refroidissement;
- c. L'amélioration de performances des systèmes de refroidissement des composants électroniques (processeurs par exemple, pour atteindre une vitesse optimale de traitement des données);
- d. Calcul du coefficient d'échange de chaleur par convection (h),
- e. L'établissement des corrélations empiriques utilisées pratiquement pour le calcul et le dimensionnement.

V-2) Développement des équations générales de conservation

L'écoulement de fluide est un phénomène complexe qui ne se prête pas toujours à une analyse mathématique rigoureuse. Par commodité, tout volume fluide peut être assimilé à un ensemble continu (continuum) de particules fluides. Leur étude en mouvement peut être abordée analogiquement à celle des points matériels intervenant en mécanique générale. Les équations gouvernantes pour un écoulement transitoire, tridimensionnel, compressible et visqueux (avec frottement et conduction thermique, sans diffusion de la matière (c.à.d., sans gradients de concentration)) où le phénomène est dissipatif (augmentation de l'entropie de l'écoulement), sont basés sur trois principes fondamentaux, à savoir:

- le principe de conservation de la masse, à partir duquel on établit l'équation de continuité;
- le principe de conservation de la quantité de mouvement, à partir duquel on établit les trois équations de Navier-Stokes;
- le principe de conservation de l'énergie, d'où découle l'équation d'énergie relative à l'écoulement.

V-2-1) Equation de continuité

L'accumulation en quantité de masse dans un volume de contrôle par unité de temps est égale à la quantité de masse qui entre moins celle qui sort du volume par unité du temps (ou, *le taux de variation de la masse de fluide contenue dans un volume de contrôle (CV) est égale au débit massique entrant moins le débit massique sortant du (CV)*). De ceci on extrait l'équation générale de la conservation de masse (voir **Fig.5-1**).

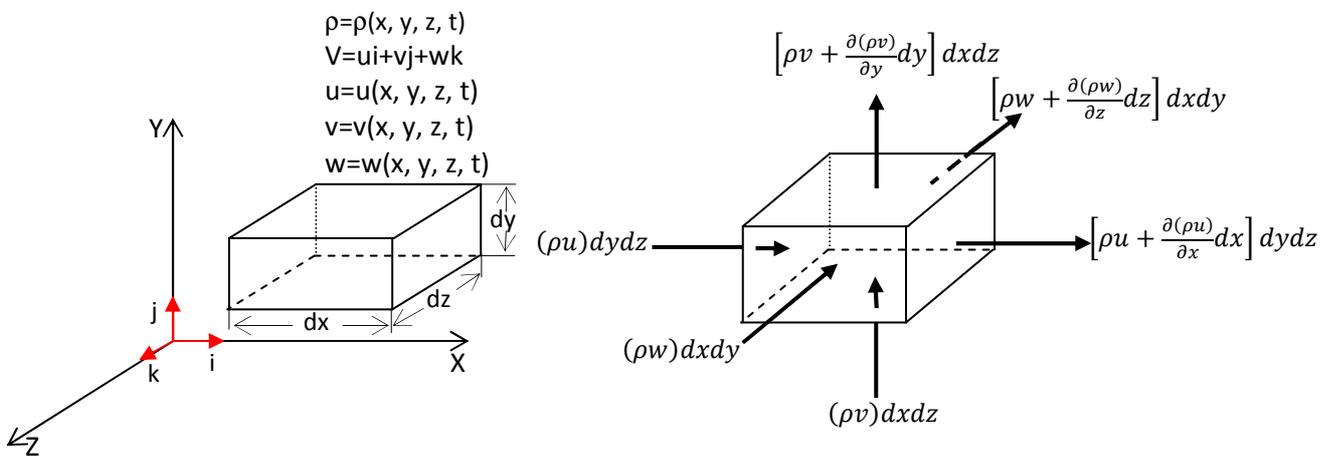


Fig.5-1: Volume infinitésimal d'un élément fixe du fluide
(Modèle utilisé pour la dérivation de l'équations de continuité)

Sous forme vectorielle, elle est donnée par:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5-1)$$

avec;

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$: taux de variation de la masse volumique par unité du temps;

$\nabla \cdot (\rho \vec{V})$: taux de convection de masse par unité de volume, $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

V-2-2) Equations de la conservation de la quantité de mouvement

La quantité du mouvement étant une quantité transportable, elle obéit aux lois de transport, par conséquent, elle est transporté par:

- **Convection**: où les particules entrent dans le volume de contrôle par leur propre vitesse;
- **Diffusion**: dans ce cas, chaque particule cède sa vitesse à la particule placée devant elle par choc, et ceci jusqu'à l'entrée de la quantité transportable (quantité de mouvement) dans le volume de contrôle ou sa sortie du volume. De ceci découlent les équations de Navier-Stokes.

L'application de la deuxième loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule fluide en mouvement mène aux équations de conservation de quantité de mouvement ou équations de Navier-Stokes.

Relativement à la figure (5-2), ci-dessous et sous forme conservative, elles peuvent être données par:

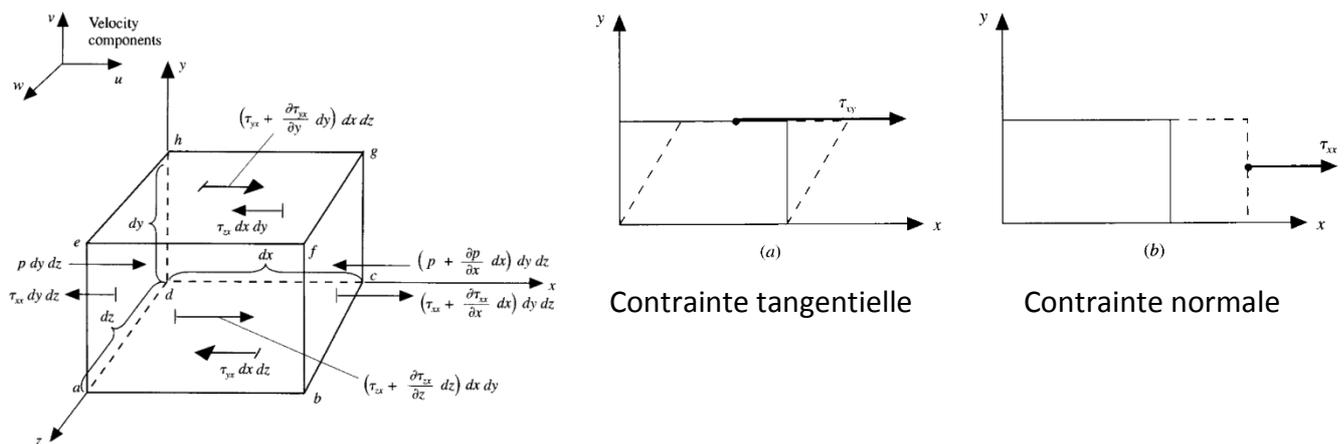


Fig.5-2: Volume infinitésimal d'un fluide en mouvement

(Modèle utilisé pour la dérivation des équations de quantité de mouvement)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (5-2a)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (5-2b)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (5-2c)$$

tels que;

f_x, f_y, f_z : composantes des forces de gravité par unité de masse;

$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$: forces de pression;

$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$: forces de surfaces;

Les contraintes ($\tau_{xx}, \dots, \tau_{zz}$), pour un fluide Newtonien sont liées linéairement aux taux de déformation par l'intermédiaire de la viscosité dynamique du fluide, par les expressions suivantes:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5-3)$$

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right); \tau_{yy} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right); \tau_{zz} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5-4)$$

Si les forces de gravité sont négligeable du système d'équations de quantité de mouvement, les termes à gauche représentent le taux de variation local de la quantité de mouvement et son transport par convection, et les termes à droite représentent le gradient de pression et le transport par diffusion.

V-2-3) Equation de conservation de l'énergie

L'équation d'énergie peut être obtenue par application du premier principe de la thermodynamique à un élément de fluide en mouvement: *le taux variation de l'énergie à l'intérieur de l'élément du fluide est égale au flux net de chaleur dans l'élément plus le taux du travail sur l'élément du fluide dû aux forces de gravité et les forces de surfaces.*

$$\frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{dw}{dt} \Leftrightarrow A = B + C$$

Considérons toutes les forces de surfaces (pression plus contraintes tangentielles et normales) montrées sur la figure (5-3) ci dessous.

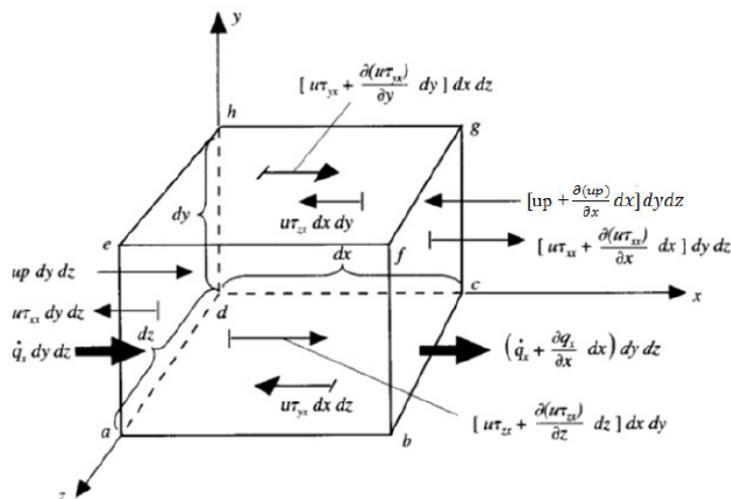


Fig.5-3: Flux d'énergie associés avec un élément de fluide en mouvement (Modèle utilisé pour la dérivation de l'équation d'énergie)

Le travail net sur l'élément de fluide est la somme des forces de surface dans toutes les directions (x, y et z) plus les forces de gravité. Ce dernier peut être donné par:

$$C = \left[\begin{array}{l} -\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \\ + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \\ + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \end{array} \right] dx dy dz + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dx dy dz \quad (5-5)$$

Le flux de chaleur net dans le l'élément de fluide est dû à deux sources, source de chaleur volumétrique telle que l'absorption ou l'émission du rayonnement et à un transfert de chaleur à travers les surfaces à cause des gradients de température (conduction thermique). Soient (\dot{q}) est la source volumétrique de chaleur par unité de masse et ($\dot{q}_{x,y,z}$), le flux de chaleur dû à la conduction thermique est donné par la loi de Fourier. Le flux net de chaleur dans l'élément de fluide est donné par:

$$B = \left[\rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (5-6)$$

Tel que; k représente la conductivité thermique [W/m.°C]

Considérons un milieu gazeux en mouvement. L'élément fluide dans ce cas a deux contribution d'énergie: l'énergie interne due au mouvement libre de ces molécules (e, par unité de masse) et une énergie cinétique due au mouvement de translation de l'élément fluide, l'énergie cinétique par unité de masse est donnée par ($V^2/2$). Donc, l'énergie totale est donnée par ($e + V^2/2$). Finalement, la variation temporelle de l'énergie totale par unité de masse est donnée par:

$$A = \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz \quad (5-7)$$

La forme conservative de l'équation d'énergie peut être donc donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] &= \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &- \left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z} \right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (5-8)$$

Sous une autre formulation, le bilan net d'énergie thermique par unité de volume du fluide est donné par:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\text{div} \vec{q} - \vec{\tau} \otimes \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} - p \text{div} \vec{V} \quad (5-9)$$

tels que;

– $\text{div} \vec{q}$: Représente le bilan net du flux de chaleur se propageant par conduction: $\text{div} \vec{q} = -k \nabla^2 T$;

$-\vec{\tau} \otimes \overrightarrow{grad}\vec{V}$: est la dissipation visqueuse qui représente la vitesse de transformation irréversible de l'énergie visqueuse (mécanique) en énergie thermique. Ce terme est toujours de signe (+) et peut être représenté par: $(-\vec{\tau} \otimes \overrightarrow{grad}\vec{V} = \mu \Phi)$; dans le cas d'un fluide newtonien, Φ est la fonction de dissipation donnée par:

$$\Phi = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right]^2$$

$-p.div\vec{V}$: est l'augmentation par unité de volume de l'énergie interne de élément par des forces de compression. Il représente la vitesse de transformation réversible de l'énergie de pression en énergie thermique. Ce terme peut être (-) ou (+), selon qu'il s'agit d'une compression ou d'une expansion. L'énergie interne (\bar{u}) peut être considérée comme une fonction du volume spécifique \hat{v} et de la température T. Ainsi, on peut écrire ($\hat{v} = 1/\rho$), donc:

$$d\bar{u} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{v}}\right)_T d\hat{v} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial T}\right)_{\hat{v}} dT$$

Tels que;

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial T}\right)_{\hat{v}} = C_v : \text{ est la chaleur spécifique à volume constant et comme : } \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{v}}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{v}} - p$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho C_v \frac{DT}{Dt} + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{v}} - p \right] \rho \frac{D\hat{v}}{Dt} \quad (5-10)$$

tel que;

$$\frac{D\hat{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \text{ et d'après l'équation de continuité, } div\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \frac{D\hat{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} div\vec{V}$$

L'équation du bilan thermique devient:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -div\vec{q} - \vec{\tau} \otimes grad\vec{V} - p div\vec{V} - \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{v}} - p \right] div\vec{V} \quad (5-11)$$

Après simplification:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -div\vec{q} - \vec{\tau} \otimes grad\vec{V} - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{v}} div\vec{V} \quad (5-12)$$

V-2-3-1) Hypothèses relatives au modèle thermique

Dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique à l'exception des transferts de chaleur dans les lubrifiants ou de l'extrusion des plastiques, le terme de dissipation visqueuse $\vec{\tau} \otimes \overrightarrow{\text{grad}}\vec{V}$ est négligeable.

- Par ailleurs, si l'on considère que la conductivité thermique (λ) est indépendante de la direction de l'écoulement et de la température, l'équation (5-12) se simplifie en:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \cdot \text{div} \vec{V} \quad (5-13)$$

- Pour un gaz parfait $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} = \frac{p}{T}$

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T - p \text{div} \vec{V} \quad (5-14)$$

V-3) Concept de la couche limite

La figure (5-4) montre la distribution de la vitesse aux différentes stations à partir du bord d'entrée d'une plaque plane horizontale. A partir de cette arrête, une région se développe dans l'écoulement et où les forces visqueuses ralentissent le mouvement du fluide.

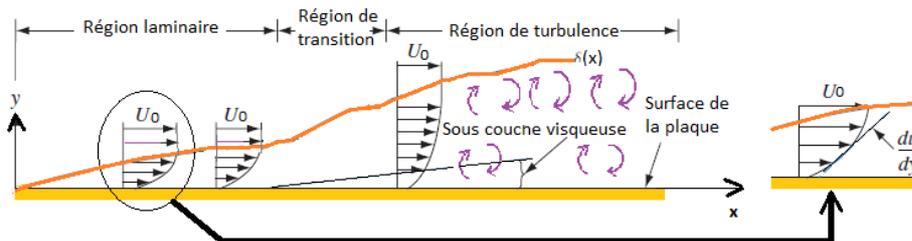


Fig.5-4: Ecoulement sur une plaque plane-Profiles de vitesse en couche limite (laminaire, de transition et de turbulence)

Les forces visqueuses dépendent de la contrainte tangentielle donnée par:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (5-15)$$

tels que;

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dy} : \text{le gradient de vitesse} \\ \mu : \text{la viscosité dynamique} \end{array} \right.$

La région de l'écoulement près de la paroi (surface de la plaque) où la vitesse du fluide diminue par les forces visqueuses est appelée **couche limite**, Ludwig Prandtl (1905). La distance verticale à partir de la surface de la plaque jusqu'à la vitesse atteint (99%) de celle du courant libre, désigne **l'épaisseur de la couche limite (δ)**.

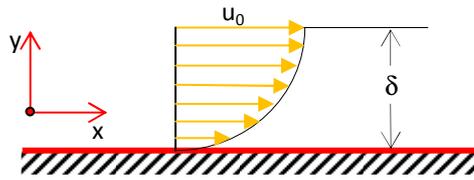


Fig.5-5: Couche limite au voisinage d'une paroi solide

Au début, le régime d'écoulement dans la couche limite est complètement laminaire. L'épaisseur de la couche limite augmente en fonction de la distance (x). A une **distance critique (x_c)**, les effets d'inertie deviennent suffisamment grands comparés aux forces visqueuses, une région de transition (du régime laminaire vers le régime turbulent), se développe. Dans la région de turbulence, des morceaux macroscopiques de fluide se déplacent avec les lignes de courant, en transportant efficacement l'énergie thermique et la quantité de mouvement.

Le paramètre adimensionnel qui relie quantitativement les forces visqueuses et inertielles et dont sa valeur détermine la transition du régime laminaire vers le régime turbulent est le nombre de Reynolds (Re_x) donné par:

$$Re_x = \frac{\rho U_0 x}{\mu} = \frac{U_0 x}{\nu} \quad (5-16)$$

tels que;

- U_0 : La vitesse du courant libre
- x : La distance à partir du bord
- $\nu = (\mu/\rho)$: La viscosité cinématique du fluide
- ρ : La densité du fluide

La distance (x_c) à partir du bord de la plaque jusqu'à l'apparition de la région de transition est donnée par:

$$x_c = \frac{Re_x \cdot \nu}{U_0} \quad (5-17)$$

V-4) Développement de l'équation d'hydrodynamique sur une plaque plane verticale en convection naturelle

La convection naturelle résulte du mouvement du fluide engendré par la variation de la densité. Par exemple, l'air en contact avec une surface chaude s'échauffe, sa densité diminue et en présence de la gravité, il monte vers le haut due à la flottabilité en laissant un vide. L'air froid du milieu environnant se déplace pour remplir ce vide et un courant d'air ascendant s'établit.

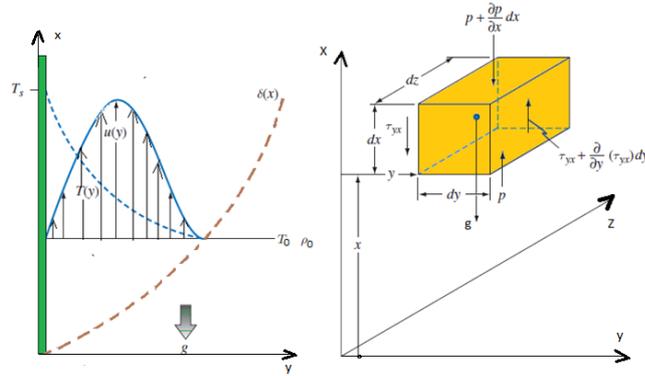


Fig.5-6: Plaque plane verticale: distribution de vitesse et de température

La force conductrice ou motrice en convection libre est l'action de la flottabilité ou la poussée d'Archimède. Considérons le panneau (de fluide) représenté sur la figure ci-dessus, parallèlement à la plaque plane verticale. Lorsque le fluide est en mouvement, en plus des forces de flottabilité (poussée d'Archimède), il y a les forces de pression et celles de frottement. En régime stationnaire (permanent), les forces totales agissant sur l'élément de volume ($dx dy dz$) sont données comme suit:

1. Les forces dûe au gradient de pression:

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

2. Le poids de l'élément de volume ($dx dy dz$):

$$dP = - \rho g dx dy dz$$

3. Les forces de cisaillement(de frottement) dûe au gradient de vitesse:

$$- \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dz, (\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y})$$

4. Le taux de variation de la quantité de mouvement de l'écoulement de fluide est donné par:

$$\rho dx dy dz \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

Par application de la seconde loi de Newton sur l'élément de fluide, il en résulte:

$$\rho dx dy dz \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dz - \rho g dx dy dz$$

$$\Rightarrow \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g$$

On suppose qu'à chaque hauteur la pression est uniforme et le fluide non chauffé loin de la paroi de plaque est en équilibre hydrostatique, par conséquent: $\frac{\partial p}{\partial x} = - \rho_0 g$ d'où, l'équation du mouvement devient:

$$\Rightarrow \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = g(\rho_0 - \rho) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Pour les fluides incompressibles, on suppose que la densité est seulement fonction de la température mais, pour les gaz, on suppose que la dimension verticale (dx) de l'élément considéré est petite de telle sorte que la densité hydrostatique (ρ_0) est constante (Hypothèse de Boussinesq). Avec ces hypothèses, le terme de flottabilité peut être écrit sous la forme suivante:

$$g(\rho_0 - \rho) = -g\rho\beta(T_0 - T)$$

tel que (β) est le coefficient de dilatation thermique défini par: $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p$, pour les gaz idéal,

$\beta=1/T_0$). Finalement, l'équation du mouvement pour la convection naturelle est donnée par:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_0) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5-18)$$

V-5) Solution analytique d'un écoulement de couche limite en régime laminaire sur une plaque plane en convection forcée

A partir des corrélations expérimentales de transfert de chaleur par convection forcée, il a été trouvé que le nombre de Nusselt dépend des deux nombres adimensionnels, le nombre de Reynolds et celui de Prandtl tel que:

$$Nu = \phi(Re) \cdot \psi(Pr) \quad (5-19)$$

Les relations fonctionnelles $\phi(Re)$ et $\psi(Pr)$, seront déterminées analytiquement. Premièrement, on doit considérer le cas de la couche limite laminaire qui est susceptible à des méthodes de solution exacte et approximative. Pour déterminer le coefficient d'échange de chaleur par convection (h) et le coefficient de frottement pour un écoulement incompressible sur une plaque plane, les équations de conservation (continuité, quantité de mouvement et d'énergie) doivent être satisfaisantes simultanément.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (5-20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (5-21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} & (5-22) \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, on suppose la fonction du courant $\psi(x, y)$ qui satisfera automatiquement l'équation de continuité, de telle sorte que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En introduisant une nouvelle variable (η), telle que:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$$

On peut exprimer la fonction $\psi(x, y)$ par:

$$\psi = \sqrt{v \cdot x U_0} \cdot f(\eta)$$

Telle que (η) , représente une fonction adimensionnelle de courant. Les composantes de vitesse deviennent:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_0 \cdot \frac{d[f(\eta)]}{d\eta} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v \cdot U_0}{x}} \cdot \left\{ \frac{d[f(\eta)]}{d\eta} \cdot \eta - f(\eta) \right\} \end{cases}$$

En exprimant $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en fonction de (η) et on les introduit dans l'équation de quantité de mouvement, on peut obtenir l'équation différentielle ordinaire non linéaire de 3^{ème} ordre suivante:

$$f(\eta) \cdot \frac{d^2[f(\eta)]}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3[f(\eta)]}{d\eta^3} = 0 \quad (5-23)$$

Cette équation peut être résolue relativement aux trois conditions aux limites suivantes:

$$\begin{cases} \text{à } \eta = 0: f(\eta) = 0 \\ \text{à } \eta = 0: \frac{d[f(\eta)]}{d\eta} = 0 \\ \text{à } \eta = 1: \frac{d[f(\eta)]}{d\eta} = 1 \end{cases}$$

Soit (δ) , l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique où $(u=99\%U_0)$:

$$\delta = \frac{5 \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \quad (5-24)$$

telle que; $(Re_x = \frac{\rho U_0 x}{\mu})$: le nombre local de Reynolds.

De la solution numérique de (5-23), $(u/U_0=f(y\sqrt{Re_x}/x))$, la force de cisaillement à la paroi $(y=0)$ peut être obtenue à partir du gradient de vitesse. Cette dernière, représente dans ce cas, la pente de la courbe $(u/U_0=f(y\sqrt{Re_x}/x))$, elle est donnée par:

$$\left. \frac{\partial(u/U_0)}{\partial(y/x\sqrt{Re_x})} \right|_{y=0} = 0.332$$

Par conséquent, le gradient de vitesse en fonction de (x) , est donné par:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.332 \frac{U_0}{x} Re_x$$

La contrainte tangentielle par unité de surface est donnée dans ce cas par:

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.332 \mu \frac{U_0}{x} Re_x \quad (5-25)$$

En divisant les deux membres de l'équation (5-25) par $(\frac{\rho U_0^2}{2})$, on peut obtenir le coefficient adimensionnel local de frottement:

$$C_{fx} = \frac{\tau_s}{\rho U_0^2 / 2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (5-26)$$

Le coefficient moyen de frottement est obtenu en intégrant l'équation (5-26) entre $x=0$ et $x=L$:

$$\bar{C}_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx = 1.33 \sqrt{\frac{\mu}{U_\infty \rho L}} \quad (5-27)$$

Remarques

On peut obtenir des résultats significatifs en comparant les deux équations, celle d'énergie (5-22) et celle de la quantité de mouvement (5-21). En effet, $u(x, y)$ est aussi une solution pour la distribution de la température $T(x, y)$ si ($\nu=\alpha$) et si la température de la plaque (T_s) est constante. Si on utilise la température de la surface (T_s) comme donnée de référence et en réécrivant la variable de gauche de (5-22) sous la forme de $(T-T_s)/(T_0-T_s)$, ensuite, les conditions aux limites sont données par:

$$\begin{cases} \text{à } y = 0: \frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 0 \text{ et } \frac{u}{U_0} = 0 \\ \text{à } y \rightarrow \infty: \frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 1 \text{ et } \frac{u}{U_0} = 1 \end{cases}$$

T_0 : est la température du courant libre (fluide environnant). La condition imposée ($\nu=\alpha$) correspond à un nombre de Prandtl égal à l'unité depuis que ($Pr = C_p \cdot \mu / k = \nu / \alpha$).

- Pour ($Pr=1$), la distribution de la vitesse est similaire à celle de la température. Physiquement, le transfert de quantité de mouvement est analogue au transfert thermique lorsque ($Pr=1$). Les propriétés physiques de la majorité des gaz correspondent au nombre de Prandtl; $Pr=(0,6\div 1)$ donc, l'analogie est satisfaisante.
- Selon les calculs de Pohlhausen, la relation entre les épaisseurs des couches limites hydrodynamique et thermique est approximativement: $(\delta / \delta_{th} = Pr^{1/3})$.
- Pour une plaque plane de largeur (b) et de longueur (L):

1. Le taux total de transfert de chaleur est donné par:

$$q = 0,664 R_{eL}^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} b (T_s - T_0)$$

2. Le coefficient local d'échange de chaleur par convection est donné par:

$$h_{cx} = 0,332 \frac{k}{x} R_{ex}^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

3. Le nombre local de Nusselt est donné par:

$$Nu_x = 0,332 R_{ex}^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

4. Le nombre moyen de Nusselt est donné par:

$$\bar{Nu}_L = 0,664 R_{eL}^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

V-6) Nombres adimensionnels

Le nombre de Nusselt

C'est un coefficient adimensionnel d'échange de chaleur, il représente le rapport du transfert de chaleur par convection à celui par conduction dans une couche de fluide d'épaisseur (L). La forme adimensionnelle appropriée de ce paramètre (h) est le nombre de Nusselt (Nu) défini par:

$$Nu = \frac{h_c \cdot L}{k_f} \quad (5-28)$$

A partir de la valeur locale de Nusselt, on peut premièrement, obtenir la valeur locale (h_c) et ensuite, la valeur moyenne du coefficient du transfert de chaleur par convection ($\overline{h_c}$) et une valeur moyenne du nombre de Nusselt ($\overline{Nu_L}$).

$$\overline{Nu_L} = \frac{\overline{h_c} \cdot L}{k_f} = f(R_{eL}, Pr) \quad (5-29)$$

Le nombre de Prandtl

Il représente le rapport de la diffusivité moléculaire due à la quantité de mouvement par la diffusivité thermique, il est donné par:

$$Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (5-30)$$

Le nombre de Reynolds

Il représente le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses, il est donné par:

$$R_{eL} = \frac{U_0 \cdot L}{\nu} \quad (5-31)$$

Le nombre de Grashof

Il représente le rapport des forces de flottabilité aux forces de viscosité, il est donné par:

$$Gr_L = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_s - T_0) \cdot L^3}{\nu^2} \quad (5-32)$$

V-7) Corrélations empiriques

V-7-1) Corrélations empiriques en convection libre

Les résultats expérimentaux relatifs au transfert de chaleur par convection naturelle, peuvent être corrélés par des expressions de type: $Nu = \phi(Gr) \cdot \psi(Pr) = C \cdot (Gr \cdot Pr)^m$. A titre d'exemples, on peut citer:

1. Plaques et cylindres verticales:
 - Pour $10^4 < (Gr \cdot Pr) < 10^9 \Rightarrow Nu = 0,59 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,25}$;
 - Pour $10^9 < (Gr \cdot Pr) < 10^{13} \Rightarrow Nu = 0,021 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,40}$
2. Cylindres horizontaux:
 - Pour $10^{-2} < (Gr \cdot Pr) < 10^2 \Rightarrow Nu = 1,02 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,148}$;
 - Pour $10^2 < (Gr \cdot Pr) < 10^4 \Rightarrow Nu = 0,85 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,188}$
3. Sphères de diamètre (D):
 - Pour $1 < (Gr < 10^5 \Rightarrow \overline{Nu}_D = 2 + 0,392 \cdot (Gr_D)^{0,25}$

V-7-2) Corrélations empiriques en convection forcée

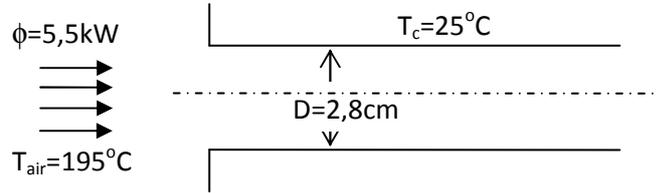
1. Ecoulement sur un plan
 - Ecoulement turbulent:
 $\overline{Nu}_L = 0,035 \cdot Re_L^{0,8} \cdot Pr^{1/3}$, pour $Re > 5 \cdot 10^5$ et $Pr \geq 0,5$
 - Ecoulement laminaire:
 $\overline{Nu}_L = 0,628 \cdot Re_L^{0,5} \cdot Pr^{1/3}$, pour $Re < 5 \cdot 10^5$ et $0,5 \leq Pr \leq 10$
2. Conduits et tubes
 $\overline{Nu}_D = 0,023 \cdot Re_D^{0,8} \cdot Pr^n$, pour $0,5 < Pr < 120$; $6000 < Re_D < 10^7$ et $(L/D) > 60$
 $n=0,4$ en cas de chauffage et $n=0,3$ en cas de refroidissement.
3. Conduits non circulaire

$$\overline{Nu}_{DH} = \overline{Nu}_c [1 + \{0,8 \cdot (D_i/D_0)^{-0,16}\}^{15}]^{1/15}$$

Exercice 1

Dans un cylindre de 2,8cm de diamètre et de 3m de long circule de l'air à la température de 195°C. Le cylindre maintenu à la température de 25°C, reçoit un flux de chaleur égal à 5500W.

- Déterminer le coefficient de l'échange de chaleur par convection (h).
- Déduire le nombre de Nusselt de l'écoulement sachant que: $k = 0,026 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$.
- Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement en admettant que: $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$; si le nombre de Prandtl est égal à 0,73.



Solution

- Le coefficient de l'échange de chaleur par convection (h):

$$\phi = h \cdot S \cdot (T_f - T_p) \Leftrightarrow h = \frac{\phi}{S \cdot (T_f - T_p)} ; S = \pi \cdot D \cdot L$$

$$h = \frac{\phi}{S \cdot (T_f - T_p)} = \frac{5500 \text{ W}}{\pi \cdot 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 3 \text{ m} \cdot (195 - 25) \text{ °C}} = 122,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°C}}$$

- Le nombre de Nusselt (Nu):

$$Nu = \frac{h \cdot d}{k} = \frac{122,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°C}} \cdot 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0,026 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{°C}}} = 132,03$$

Le nombre de Reynolds (Re):

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \Leftrightarrow Re = \sqrt[0,8]{\frac{Nu}{0,023 \cdot Pr^{0,4}}}$$

$$Re = \sqrt[0,8]{\frac{Nu}{0,023 \cdot Pr^{0,4}}} = \sqrt[0,8]{\frac{132,03}{0,023 \cdot (0,73)^{0,4}}} = 58481,64$$

Exercice 2

Le pare-brise ($e=4\text{mm}$, $k=1,38 \text{ W/m} \cdot \text{°K}$) d'une automobile est dégivré (en éliminant la glace accumulée à l'intérieur) en passant de l'air chaud ($T_i=40\text{°C}$, $h_i=30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°K}$). Les conditions extérieures sont telles que $T_e=-10\text{°C}$, $h_e=65 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°K}$. On demande de calculer les températures de surface de pare-brise (T_{pbi} et T_{pbe})?, ($0\text{°C}=273\text{K}$).

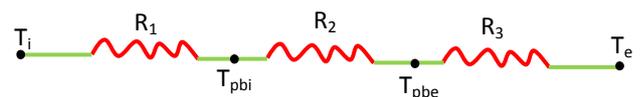
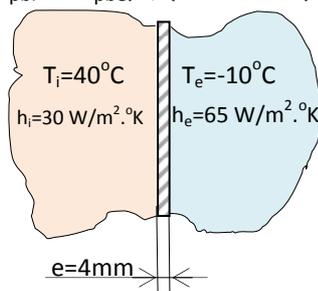
Solution

$$R_1 = \frac{1}{h_i \cdot S} ;$$

$$R_2 = \frac{e}{k \cdot S} ;$$

$$R_3 = \frac{1}{h_e \cdot S} ;$$

$$\phi = \frac{T_i - T_{pbi}}{R_1} = \frac{T_{pbi} - T_{pbe}}{R_2} = \frac{T_{pbe} - T_e}{R_3}$$



$$\varphi = \frac{\phi}{S} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e}} = \frac{(313 - 263)K}{\frac{1}{30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} + \frac{0,004\text{m}}{1,38 \text{ W/m} \cdot \text{K}} + \frac{1}{65 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}}} = 968,68 \text{ W/m}^2$$

$$\varphi = \frac{T_i - T_{pbi}}{\frac{1}{h_i}} \Rightarrow T_{pbi} = T_i - \frac{\varphi}{h_i} = 313K - \frac{968,68 \text{ W/m}^2}{30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} = 280,7K = 7,7^\circ\text{C}$$

$$\varphi = \frac{T_{pbe} - T_e}{\frac{1}{h_e}} \Rightarrow T_{pbe} = T_e + \frac{\varphi}{h_e} = 263K + \frac{968,68 \text{ W/m}^2}{65 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} = 277,9K = 4,9^\circ\text{C}$$

Exercice 3

Une plaque mince d'une longueur de 3m et d'une largeur de 1,5m est sous l'effet d'un écoulement d'air à la vitesse de 2,0m/s et de température de 20°C, dans la direction longitudinale. La température des surfaces de la plaque est de 84°C. Il est demandé de calculer:

1. Le coefficient d'échange de la chaleur par convection suivant la longueur (pour Pr=0,71);
2. Le flux de chaleur transmis par la plaque à l'air.

Les caractéristiques de l'air à 20°C sont:

$$\rho=1,175 \text{ kg/m}^3, \mu=1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, k=0,026 \text{ W/m} \cdot \text{K} \text{ et } C_p=1006 \text{ J/kg} \cdot \text{K}.$$

Solution

1. Le coefficient d'échange de chaleur par convection h:

– La nature de l'écoulement:

$$Re = \frac{\rho LU}{\mu} = \frac{1,175 \text{ kg/m}^3 \cdot 3\text{m} \cdot 2,0 \text{ m/s}}{1,80 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 391666,67 < 500.000$$

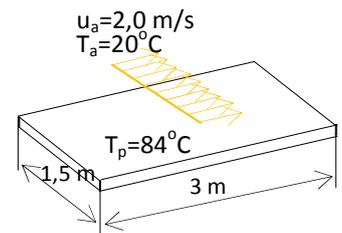
⇒ Le régime est donc laminaire, on applique dans ce cas:

$$Nu = \frac{hL}{k} = 0,66 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33} \Rightarrow h = \frac{0,66 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33} \cdot k}{L}$$

$$h = \frac{0,66 \cdot (391666,67)^{0,5} \cdot (0,71)^{0,33} \cdot 0,026 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{3 \text{ m}} = 3,1972 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

2. Le flux de chaleur transmis par la plaque (cette dernière possède deux parois, inférieure et supérieure) à l'air est donné par:

$$\phi = 2 \cdot h \cdot S \cdot (T_p - T_a) = 2 \cdot 3,1972 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \cdot (3 \cdot 1,5) \text{ m}^2 \cdot (357 - 293) \text{ K} = 1841,587 \text{ W}$$



Exercice 4

Il est demandé de calculer la quantité de chaleur transmise par le passage d'une eau qui se déplace d'une manière forcée dans un serpentín constitué d'un tube de 20mm de diamètre. Le débit de l'eau est de 0,28 kg/s et sa température est de 120°C. La température de la paroi interne de la conduite dont la longueur est de 4 m est considérée constante et égale à 95°C.

Les caractéristiques de l'eau à 120°C sont:

$$\rho=945,3 \text{ kg/m}^3, \mu=2,34 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, k=0,68 \text{ W/m} \cdot \text{K} \text{ et } C_p=4250 \text{ J/kg} \cdot \text{K}.$$

Solution

1. Le coefficient d'échange de chaleur par convection h:



– La nature de l'écoulement:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu};$$

$$Q = \rho \cdot S \cdot U \Rightarrow U = \frac{Q}{\rho \cdot S} = \frac{0,28 \text{ kg/s}}{945,3 \text{ kg/m}^3 \cdot \pi (0,01)^2 \text{ m}^2} = 0,943 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{945,3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,943 \text{ m/s} \cdot 0,02 \text{ m}}{2,34 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 76189,56 > 2300$$

⇒ Le régime d'écoulement est donc turbulent, pour calculer h, on doit appliquer la relation de

Colburn, mais pour cela on doit vérifier d'abord que: $\frac{L}{D} > 60$, $1000 < Re < 120000$ et $Pr > 0,7$

$$\checkmark 10000 < Re < 120000;$$

$$\checkmark \frac{L}{D} = \frac{4 \text{ m}}{0,02 \text{ m}} = 200 > 60;$$

$$\checkmark Pr = \frac{\mu \cdot Cp}{k} = \frac{2,34 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \cdot 4250 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}{0,685 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 1,45 > 0,7$$

$$Nu = \frac{hD}{k} = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,33} \Rightarrow h = \frac{0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,33} \cdot k}{D}$$

$$h = \frac{0,023 \cdot (76189,56)^{0,8} \cdot (1,45)^{0,33} \cdot 0,685 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{0,02 \text{ m}} = 7164,01 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

2. Le flux de chaleur transmis par l'eau (à la paroi intérieure de tube) est donné par:

$$\phi = h \cdot S \cdot (T_e - T_p) = h \cdot \pi D L \cdot (T_e - T_p) = 7164,01 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \cdot \pi \cdot (0,02 \cdot 4) \text{ m}^2 \cdot (393 - 368) \text{ K}$$

$$\phi = 45,012 \text{ kW}$$

Chapitre VI: Rayonnement thermique

VI-1) Principe de transfert de chaleur par rayonnement

C'est un mode d'échange de chaleur (d'énergie) sous forme d'ondes électromagnétiques selon la loi de Planck ($E=h.\nu$, tels que: ν est la fréquence d'onde associée et $h=6,62.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck). Donc, il ne nécessite aucun support matériel, il est analogue à la propagation de la lumière. Il se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière ($C=3.10^8$ m/s). Le rayonnement thermique émis par les corps, se situe entre des longueurs d'ondes de 0,1 μm à 100 μm . Pratiquement, les trois modes de transfert de chaleur coexisteront. Mais, ce mode de transfert devient prépondérant à des températures supérieures aux températures ordinaires. Généralement, tous les corps (solides, liquides et gazeux) émettent un rayonnement de nature électromagnétique. On peut citer que, le vide et les gaz simples comme (O_2 , H_2 et N_2) représentent des milieux parfaitement transparents mais, les gaz composés comme (CO_2 , H_2O , CO et CH_4) et certaines liquides et solides comme (les verres et les polymères) sont partiellement transparents. La majorité des solides et des liquides sont des corps opaques puisque ils stoppent la propagation du rayonnement juste au niveau de leur surfaces.

VI-2) Définitions préliminaires

Les grandeurs physiques seront désignées selon la composition spectrale ou la distribution spatiale du rayonnement:

- **Grandeur totale:** elle est relative à l'ensemble du spectre;
- **Grandeur monochromatique:** elle concerne seulement un intervalle spectral étroit ($d\lambda$), autour d'une longueur d'onde (λ);
- **Grandeur hémisphérique:** elle est relative à l'ensemble des directions de l'espace;
- **Grandeur directionnelle:** elle caractérise une direction donnée de la propagation.

Pendant l'étude de l'équilibre thermique d'un système, tout corps doit être considéré comme:

- **Emetteur:** s'il envoie un rayonnement lié à sa température (sauf s'il est parfaitement transparent);
- **Récepteur:** s'il reçoit des rayonnements émis ou réfléchis et diffusés par les corps qui l'entourent.
- **Corps opaque:** c'est un corps qui ne transmet aucun rayonnement à travers lui-même, il stoppe la propagation de tout rayonnement dès sa surface, il se réchauffe par l'absorption du rayonnement;
- **Corps transparent:** c'est un corps qui transmet tout le rayonnement incident;
- **Corps noir:** est celui qui absorbe toutes les radiations qu'il reçoit, il est caractérisé par un pouvoir absorbant ($\alpha_{\lambda,T}=1$). Tous les corps noirs rayonnent de la même manière à la même température, le corps noir rayonne plus qu'un corps non noir.

- **Corps gris:** est celui dont le pouvoir absorbant ($\alpha_{\lambda T}$) est indépendant de la longueur d'onde (λ), il est caractérisé par ($\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$). Un corps gris à haute température pour ($\lambda < 3\mu\text{m}$, soleil), un corps gris à basse température pour ($\lambda > 3\mu\text{m}$, atmosphère).
- **Angle solide:** l'angle solide élémentaire ($d\Omega$) sous lequel est vu, d'un point (O), le contour d'une petite surface (ds, assimilé à une surface plane) est donné par:

$$d\Omega = ds \cos\alpha / r^2 \quad (6-1)$$

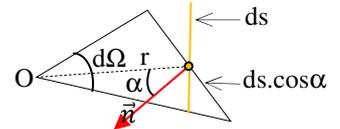


Fig.6-1: Représentation schématique d'un angle solide

- Le flux envoyé par une surface (s) sous un angle solide élémentaire ($d\Omega$), entourant la direction (Ox) est désigné par ($d\phi_x$).
- Le flux d'une source (ϕ), c'est la puissance rayonnée par une surface (s) dans tout l'espace qui l'entoure sur toutes les longueurs d'ondes et est donné par:

$$\phi = \int_s d\phi = \int_{\Omega} d\phi_x, [W] \quad (6-2)$$

- Le flux envoyé par un élément de surface (ds) sous un angle solide élémentaire ($d\Omega$) est désigné par ($d^2\phi$);
- Le flux envoyé dans tout l'espace par une surface élémentaire (ds) est désigné par ($d\phi$) et il est donné par:

$$d\phi = \int_{\Omega} d^2\phi \quad (6-3)$$

- **Emittance énergétique monochromatique:** l'émittance monochromatique d'une source à la température (T) est donnée par:

$$M_{\lambda T} = d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda} / ds d\lambda; [W/m^3] \quad (6-4)$$

Tels que; $d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}$: est le flux d'énergie émis entre les deux longueurs d'ondes (λ) et ($\lambda+d\lambda$)

- **Emittance énergétique totale:** c'est la densité de flux émise par la surface élémentaire (ds) sur tout le spectre des longueurs d'ondes, elle est donnée par:

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = d\phi / ds; [W/m^2] \quad (6-5)$$

- **Intensité énergétique dans une direction:** c'est le flux par unité d'angle solide émis par une surface (ds) sous un angle solide ($d\Omega$) entourant la direction (Ox), elle est donnée par:

$$I_x = d^2\phi_x / d\Omega \quad (6-6)$$

- **Luminance énergétique dans une direction:** c'est l'intensité énergétique dans la direction (Ox) par unité de surface émettrice apparente (la projection de la surface (s) sur le plan (\perp) à Ox), elle est donnée par:

$$L_x = I_x/ds_x = I_x/ds \cos \alpha = d^2 \varphi_x / d\Omega ds \cos \alpha \quad (6-7)$$

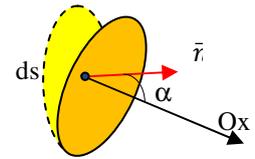


Fig.6-2: Schéma montrant la luminance d'un élément de surface ds.

- **Eclairement (relatif à un récepteur):**

C'est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions (\cong emittance).

VI-3) Processus de réception d'un rayonnement par un corps

Un point matériel chauffé émet un rayonnement électromagnétique dans toutes les directions situées d'un même côté du plan tangent au point matériel. Lorsque ce rayonnement frappe un corps quelconque, une partie de cette énergie peut être réfléchi, une autre transmise à travers le corps, et le reste est quantitativement absorbée sous forme de chaleur. (à mettre dans le chapitre correspondant).

Lorsque un rayonnement incident d'énergie (φ_λ) frappe un corps (C) à la température (T) (voir figure ci-contre), on remarque que:

- Une partie de l'énergie ($\varphi_\lambda \cdot \rho_{\lambda T}$) est réfléchi par la surface (S) du corps;
- Une partie de l'énergie ($\varphi_\lambda \cdot \alpha_{\lambda T}$) est absorbée par le corps en lui échauffant;

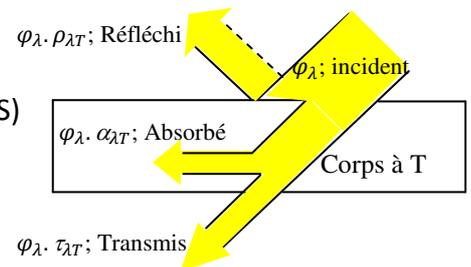


Fig.6-3: Processus de réception d'un rayonnement par un corps

- Le reste de l'énergie ($\varphi_\lambda \cdot \tau_{\lambda T}$) est transmise en continuant le chemin.

Tel que;

$$\varphi_\lambda = \varphi_\lambda \cdot \rho_{\lambda T} + \varphi_\lambda \cdot \alpha_{\lambda T} + \varphi_\lambda \cdot \tau_{\lambda T} \quad (6-8)$$

d'où

$$\rho_{\lambda T} + \alpha_{\lambda T} + \tau_{\lambda T} = 1 \quad (6-9)$$

qui représentent respectivement; le pouvoir monochromatique réfléchissant ($\rho_{\lambda T}$), le pouvoir monochromatique absorbant ($\alpha_{\lambda T}$) et le pouvoir monochromatique de transmittance ($\tau_{\lambda T}$). Ces pouvoirs sont fonctions de la nature du corps, son épaisseur, sa température (T), de la longueur d'onde (λ), du rayonnement incident et de l'angle d'incidence.

VI-4) Lois du rayonnement

VI-4-1) Loi de Lambert

L'intensité énergétique dans une direction (δ), est donnée par:

$$I_{\delta} = I_n \cdot \cos\delta \quad (6-10)$$

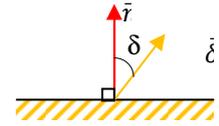


Fig.6-4: Schéma montrant l'intensité énergétique dans une direction donnée

Lorsque un corps suit la loi de Lambert, l'emittance est proportionnelle à la luminance:

$$M = \pi \cdot L; [W/m^2] \quad (6-11)$$

VI-4-2) Loi Kirchoff

- L'emittance monochromatique de tout corps est égale au produit de son pouvoir absorbant monochromatique ($\alpha_{\lambda T}$) par l'emittance monochromatique du corps noir à la même température:

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} \cdot M_{O\lambda T}; [W/m^3] \quad (6-12)$$

Tel que; $M_{O\lambda T}$: est l'emittance monochromatique du corps noir.

- L'emittance totale (M_T) d'un corps gris à la température (T) est égale au produit de son pouvoir absorbant (α_T) par l'emittance totale (M_{OT}) du corps noir à la même température.

VI-4-3) Loi de Planck

L'emittance monochromatique du corps noir dépend seulement de la longueur d'onde (λ) et de la température (T):

$$E_{\lambda} = \frac{d\varphi_{\lambda}}{ds} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}; [W/m^2 \cdot \mu m^{-1}] \quad (6-13)$$

Tels que;

$$\left\{ \begin{array}{l} T: \text{température en Kelvin;} \\ \lambda: \text{longueur d'onde en } \mu m \\ C_1 = 2\pi h c^2 = 3,74 \cdot 10^8 W \cdot \mu^4 \cdot m^{-2}, c' \text{ est la constante de Planck} \\ C_2 = hc/k = 14400 \mu \cdot K, \quad k: \text{ constante de stefan - Boltzmann} \\ c: \text{ vitesse de la lumière } (c = 3 \cdot 10^8 m/s) \end{array} \right.$$

Remarques

1. Dans le domaine visible (petites longueurs d'ondes)

$$e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \gg 1, \text{ d'où } E_{\lambda} = M_{\lambda, T}^0 = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$$

2. Dans le lointain domaine infrarouge (grandes longueurs d'ondes), le développement

de ($e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$), permet d'exprimer ($M_{\lambda, T}^0$) par:

$$E_{\lambda} = M_{\lambda, T}^0 = C_1 T / C_2 \lambda^4$$

VI-4-4) Lois de Wien

VI-4-4-1) Première loi de Wien

La première loi de Wien permet d'exprimer ou d'évaluer les longueurs d'ondes correspondantes à l'émittance monochromatique maximale (pour laquelle le rayonnement est maximal) en fonction de la température. Pour sa dérivation, il suffit d'annuler la dérivée de l'émittance:

$$\frac{dM_{\lambda T}^0}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda_m = \frac{2898}{T}; [\mu\text{m}] \quad (6-14)$$

Remarque

- A la température ambiante ($T=300\text{K}$, $\lambda_m=9,6\mu\text{m}$), un corps émet le rayonnement infrarouge de grandes longueurs d'ondes qui nous entoure mais non visible à notre œil $[(0,36\div 0,75) \mu\text{m}]$;
- A la température du soleil ($T=5790\text{K}$, $\lambda_m=0,5\mu\text{m}$, rayonnement maximal), c'est le jaune visible pour laquelle notre œil a une efficacité lumineuse maximale

VI-4-4-2) Deuxième loi de Wien

Cette loi exprime la valeur de l'émittance monochromatique maximale, il suffit qu'on remplace (λ_m) par sa valeur dans la loi de Planck pour obtenir:

$$M_{\lambda_m, T}^0 = B \cdot T^5 \quad (6-15)$$

Avec, $B=1,287 \cdot 10^{-5} \text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-5}$ et T en Kelvin

VI-4-5) Loi de Stefan-Boltzmann

Elle donne l'emittance totale du corps noir, avec la sommation de toutes les émittances monochromatiques pour toutes les longueurs d'ondes ou l'intégration de:

$$E = \frac{d\varphi}{ds} = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = M^0 = \int_0^\infty M_{\lambda, T}^0 d\lambda = \sigma \cdot T^4; [\text{W}/\text{m}^2] \quad (6-15)$$

Tel que : $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8} [\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4]$, la constante de Stefan-Boltzmann

Exercice 1

Dans un tube cylindrique en cuivre de 75cm de longueur, de 1,5cm de diamètre et de (1/8)mm d'épaisseur ($R_e - R_i = e$; $R_e + R_i \cong D$) circule un courant électrique de 140A. La résistivité du cuivre ($\rho = 1,7 \mu\Omega \text{cm}$).

1. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule?
2. Cette énergie est rayonnée par la surface extérieure du tube à la température de 683°K.

Calculer le facteur d'émission total hémisphérique du cuivre.

(La constante de **Stefan-Boltzmann**: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$)

Solution

1. La puissance dissipée par effet Joule:

$$P = R.I^2 ;$$

$$R = \rho \cdot \frac{L}{s} ;$$

$$s = \pi.R_e^2 - \pi.R_i^2 = \pi(R_e - R_i)(R_e + R_i) ;$$

$$R_e - R_i = e ; R_e + R_i \cong D$$

$$\Rightarrow s = \pi.D.e$$

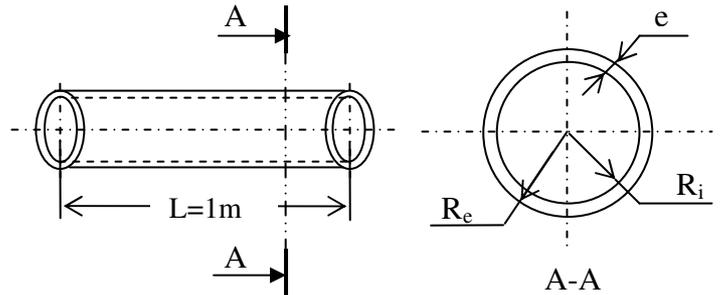
$$R = \rho \frac{L}{\pi.D.e} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m} \frac{0,75 \text{m}}{\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 1,25 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 2,16 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$P = 2,16 \cdot 10^{-3} \cdot (140)^2 = 42,336 \text{W}$$

2. Le facteur d'émission total hémisphérique du cuivre:

$$P = \Phi = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{P}{\sigma \cdot S \cdot T^4} ; S = \pi \cdot D \cdot L$$

$$\varepsilon = \frac{P}{\sigma \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot T^4} = \frac{42,336}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,75 \cdot 683^4} \approx 0,1$$



Exercice 2

Pour chauffer une pièce d'un appartement, on se sert d'un radiateur cylindrique de 2,5cm de diamètre et de 60cm de longueur. Ce radiateur rayonne comme un corps noir et émet une puissance de 1,5kW:

1. Calculer sa température;
2. Calculer la longueur d'onde pour laquelle sa luminance est maximale;
3. quelle devrait -être sa température pour que cette longueur d'onde soit 2,3μm?
4. Quelle serait alors sa puissance dégagée?

Solution

$d=0,025\text{m}; L=0,60\text{m}; P=\phi=1500\text{W}.$

1. Calcul de la température:

$$\phi = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\phi}{\varepsilon \cdot \sigma \cdot S}} = \sqrt[4]{\frac{1500}{1,5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 60 \cdot 10^{-2}}} = 865,6^\circ \text{K}$$

2. Longueur d'onde pour laquelle la luminance est maximale:

$$\phi = M \cdot S = \pi \cdot L \cdot S = \sigma \cdot T^4 \cdot S \Rightarrow L = \frac{\sigma}{\pi} \cdot T^4 = C^{te} \cdot T^4 = f(T^4);$$

$$\text{Pour que } L \text{ soit maximale} \Rightarrow \lambda_m \cdot T = 2898 \Leftrightarrow T = \frac{2898}{865,599} = 3,348 \mu\text{m}$$

3. λ_m se déplace avec la température, la 1^{ère} loi de Wien est aussi appelée loi de déplacement,

$$\text{pour } \lambda_m = 2 \mu\text{m}: \Rightarrow T = \frac{2898}{2,3} = 1260^\circ \text{K}$$

4. La puissance dégagée à cette température:

$$P = \phi = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 = 1,5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 60 \cdot 10^{-2} \cdot (1260)^4 = 6734,515 \text{W}.$$

Exercice 3

Une surface de 2 cm^2 rayonne comme un corps noir à la température de 1500°C .

Calculer :

1. La puissance totale rayonnée dans l'espace;
2. Sa luminance énergétique;
3. La longueur d'onde pour laquelle le rayonnement est maximal.

Solution

1. La puissance totale rayonnée dans l'espace:

$$\phi = M_T^0 \cdot S = \sigma \cdot T^4 \cdot S = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4 \cdot (1773)^4 \text{K}^4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 = 112,06 \text{W} = P$$

2. La luminance énergétique:

$$M_T^0 = \pi \cdot L_T^0 = \sigma \cdot T^4 \Rightarrow L_T^0 = \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4 \cdot (1773)^4 \text{K}^4}{\pi} = 1,78 \cdot 10^5 \text{W/m}^2 \text{sr}$$

3. La longueur d'onde (λ_m) pour laquelle, le rayonnement est maximale:

$$\lambda_m = 2898/T = 2898/1773 = 1,6345 \mu\text{m}$$

Exercice 4

Une lampe de 75W est alimentée sous 220V . Elle est constituée d'un filament de tungstène placé au centre d'une ampoule sphérique de 6cm de diamètre à l'intérieure de laquelle on fait le vide. Pour que la lumière soit assez blanche, il est nécessaire que la température du filament soit de 2500°K . Déterminer le diamètre et la longueur du filament si le facteur d'émission total hémisphérique du tungstène est de $0,3$, la résistivité du tungstène est $\rho=88\mu\Omega\text{cm}$.

Solution

- La puissance dissipée par rayonnement est donnée par:

$$\phi = M_T \cdot S = P, (P=75W)$$

- L'émittance M_T du filament est donnée par:

$$M_T = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

Tels que; ε est le facteur d'émission total hémisphérique ($\varepsilon=0,3$); σ est la constante de Boltzmann

$$(\sigma=5,67 \cdot 10^{-8} [W/m^2 \cdot K^4])$$

$$M_T = 0,3 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} [W/m^2 \cdot K^4] \cdot (2500)^4 K^4 = 6,6445 \cdot 10^5 W/m^2$$

- La surface extérieure (latérale) du filament est donnée par:

$$S = \pi DL$$

$$\Rightarrow P = M_T \cdot \pi DL \Leftrightarrow DL = \frac{P}{M_T \cdot \pi} = \frac{75W}{\pi \cdot 6,6445 \cdot 10^5 W/m^2} = 3,6 \cdot 10^{-5} m^2 \quad (1)$$

- D'autre part, la résistance électrique du filament est donnée par:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(220)^2}{75} = 645,33 \Omega$$

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} = \rho \cdot \frac{L}{\pi D^2/4} = \frac{4\rho L}{\pi D^2} \Leftrightarrow \frac{L}{D^2} = \frac{\pi R}{4\rho} = \frac{\pi \cdot 645,33 \Omega}{4 \cdot 4,88 \cdot 10^{-8} \Omega m} = 5,76 \cdot 10^8 m^{-1} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{DL}{L/D^2} = D^3 = \frac{3,6 \cdot 10^{-5} m^2}{5,76 \cdot 10^8 m^{-1}} = 0,625 \cdot 10^{-13} m^3 \Rightarrow D = \sqrt[3]{0,625 \cdot 10^{-13} m^3} = 3,97 \cdot 10^{-5} m$$

$$\text{De (1): } DL = 3,6 \cdot 10^{-5} m^2 \Rightarrow L = \frac{3,6 \cdot 10^{-5} m^2}{D} = \frac{3,6 \cdot 10^{-5} m^2}{3,97 \cdot 10^{-5} m} = 0,907 \approx \mathbf{0,90 m}$$

Exercice 5

Dans un tube en acier, de résistivité électrique $71 \mu\Omega$, de 85cm de longueur, de 1,5cm de diamètre extérieur et de 0,15mm d'épaisseur circule un courant électrique de 150 Ampères.

Ce tube est entouré d'un cylindre de verre ayant le même axe, de 5cm de diamètre et de faible épaisseur à l'intérieur duquel on fait le vide. La température de la surface de tube d'acier est de

$1389^\circ K$, la constante de **Stefan-Boltzmann** $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot ^\circ K^4$.

1. Toute la puissance dissipée par effet Joule étant rayonnée, quel est le facteur d'émission total hémisphérique de la surface de tube d'acier (ε_a).
2. La chaleur absorbée par le cylindre en verre est $P_v = 2312W$, un quart (1/3) de cette quantité est dissipée par rayonnement vers le milieu ambiant, quelle sera la température du tube en verre, en supposant que son facteur d'émission total hémisphérique dans ces conditions est de $\varepsilon_v = 0,85$.

Solution

- Facteur d'émission total hémisphérique de tube d'acier (ϵ_a):

$$P = \epsilon_a \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot S_L = R \cdot I^2; S_L = \pi \cdot d \cdot L$$

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S_T}; S_T = \pi \cdot (R_e^2 - R_i^2) = \pi \cdot (R_e - R_i) \cdot (R_e + R_i) \approx \pi \cdot e \cdot d$$

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S_T} = 71 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \frac{0,85m}{\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}m \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}m} = 0,085\Omega \approx 0,1\Omega$$

$$\Rightarrow \epsilon_a = \frac{R \cdot I^2}{\sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot d \cdot L} = \frac{0,1\Omega \cdot (150A)^2}{5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4 (1389)^4 \pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}m \cdot 0,85m} = 0,2661$$

- Température de cylindre en verre:

$$P_v = 4 \cdot \epsilon_v \cdot \sigma \cdot T_v^4 \cdot S_{Lcv}; S_{Lcv} = \pi \cdot D \cdot L$$

$$T_v = \sqrt[4]{\frac{P_v}{4 \cdot \epsilon_v \cdot \sigma \cdot \pi \cdot D \cdot L}} = \sqrt[4]{\frac{2312W}{4 \cdot 0,85 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4 \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}m \cdot 0,85m}} = 547,453K$$

Exercice 6

Considérons un disque placé dans le vide, sa surface est normale au rayonnement solaire. La température ambiante est de 35°C.

1. On suppose les deux faces du disque noircies. L'une d'elle exposée au soleil reçoit 3,5 cal/mn.cm² de chaleur rayonnée à partir du soleil. Quelle est la température du disque?
2. La face non exposée au rayonnement est parfaitement argentée (ϵ négligeable). Quelle est la nouvelle température?

Solution

- L'éclairement du disque est donc:

$$E = 3,5 \frac{cal}{min \cdot cm^2} = 3,5 \cdot \frac{4,185J}{60s \cdot 10^{-4}m^2} = 2,44 \cdot 10^3 W/m^2$$

⇒ Comme le disque rayonne par ses deux faces, nous avons à l'équilibre thermique:

$$E = 2 \cdot M_T^0 = 2 \cdot \sigma \cdot T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{E}{2 \cdot \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2,44 \cdot 10^3 W/m^2}{2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4}} = 383,045K$$

- Si la face opposée avait au contraire, un facteur d'émission très petit, le disque ne rayonnerait que par l'autre face donc:

$$T = \sqrt[4]{\frac{E}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2,44 \cdot 10^3 W/m^2}{5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4}} = 455,4615K$$

Exercice 7

Calculez l'émittance monochromatique d'un filament de tungstène à la température de 1403K et à la longueur d'onde où elle est maximale et à ($\lambda_m=4,5\mu\text{m}$). On assumera que le rayonnement se réalise dans le vide.

Solution

– D'après la première loi de Wien:

$$\lambda_m = 2898/T = 2898/1403 = 2,065\mu\text{m}$$

– D'après la deuxième loi de Wien:

$$M_{\lambda_m, T}^0 = B \cdot T^5 = 1,287 \cdot 10^{-5} \text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \mu^{-1} \cdot \text{K}^5 \cdot (1403)^5 \text{K}^5 \approx 7 \cdot 10^{10} \text{W} \cdot \text{m}^{-3}$$

– Pour ($\lambda_m=4,5\mu\text{m}$), on applique la loi de Planck:

$$M_{\lambda}^0 = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

$$\text{Tels que; } \begin{cases} T: \text{température en Kelvin;} \\ \lambda: \text{longueur d'onde en } \mu\text{m;} \\ C_1 = 374,15 \cdot 10^{-18} \text{W} \cdot \text{m}^2; \\ C_2 = 14,388 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}; \end{cases}$$

$$M_{\lambda}^0 = \frac{374,15 \cdot 10^{-18} \text{W} \cdot \text{m}^2}{(4,5 \cdot 10^{-6} \text{m})^5 \left(e^{\frac{14,388 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}}{4,5 \cdot 10^{-6} \text{m} \cdot 1403 \text{K}} - 1} \right)} = 2,3 \cdot 10^{10} \text{W/m}^3$$

Remarque

La deuxième loi de Wien s'applique seulement pour (λ_m), mais pour calculer l'émittance à (λ) quelconque, on applique la loi de Planck.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Frank Kreith, Raj M. Manglik et Mark S. Bohn**
Principles of Heat Transfer
Seventh edition
- [2] **JOHN H. LIENHARD IV et JOHN H. LIENHARD V**
A Heat Transfer Textbook
Third Edition, Cambridge Massachusetts, U.S.A
- [3] **Jack Philip Holman**
Heat Transfer, Tenth edition
McGraw-Hill Companies, 2010
- [4] **John, D. and Anderson, J.R.**
Computational Fluid Dynamics-The Basics with Applications.
McGraw-Hill, Inc. 1976.
- [5] **J. Crabol**
Transfert de chaleur, T1, T2, T3
Edition Masson, Paris, 1992
- [6] **José Ouin**
Transferts thermiques
(Rappels de cours et applications)
Editions Casteilla, 1998
- [7] **Donald Pitts et Leighton Sissom**
Heat transfer
Schaum's outline series
Second edition, McGraw-Hill, 1998