Université des **S**ciences et de la **T**echnologie d'**O**ran

"**M**ohamed **B**oudiaf"

FACULTE DE GENIE MECANIQUE

SUPPORT DE COURS

MATIERE

Méthodes numériques et techniques de programmation
« Propriétés des matrices et systèmes d'équations linéaires »

PRESENTE PAR

Mr : BOUHAMIDA Bachir

2014-2015

Email : bachir.bouhamida@univ-usto.dz

Sommaire

I. Introduction 2

II. Propriétés des matrices et des déterminants 3

III. Définition de la matrice 3

1 Matrice vecteur 3
2 Matrice carrée 4
3 Matrice diagonale 4
4 Matrice scalaire 6
5 Matrice identité 7
6 Matrice nulle 8
7 Matrice triangulaire 8
8 Propriétés matrice triangulaire 9
9 Matrice transposée 10

IV Opérations sur les matrices 11

1 Somme et différence 11
2 Produit d'un scalaire par une matrice 12
3 Produit de deux matrices 13
4 Puissance 16
5 Inverse d'une matrice carrée 17
6 Déterminant 20

V Systèmes d'équations linéaires algébriques 24

VI Méthodes d'éliminations directes 26

1 La règle de Cramer 26
2 Méthode d'élimination 28
3 Opérations sur les lignes 28
4 Exemple d'élimination 29
5 Elimination simple 31
6 Pivotement 32
7 Mise à l'échelle 33
8 Elimination de Gauss 36
9 Elimination de Gauss-Jordan 37
10 Inversion d'une matrice 38
11 Méthode de factorisation 40

I. Introduction

Ce document n'a pas pour but d'être un cours de toutes les méthodes numériques, encore moins un cours uniquement sur les matrices. L'idée en est plutôt de donner tout au début de ce document l'essentiel sur les matrices. Pour traiter par la suite les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires. Certes, dans la littérature de nombreuses méthodes existent, on trouve des méthodes directes et des méthodes itératives. Nous aborderons dans ce support uniquement les méthodes directes qui nous permettrons de résoudre les systèmes d'équations algébriques linéaires.

Les méthodes directes les plus utilisées sont l'élimination directe, la règle de Cramer, élimination de Gauss, élimination de Gauss-Jordan, inversion de la matrice et la factorisation de la matrice. Au début, ce cours destiné à la troisième année licence avait pour objectif d'inculquer aux étudiants des techniques de programmation notamment le langage de programmation FORTRAN et MATLAB. Constatant d'énormes lacunes chez les étudiants en opérations matricielles et les méthodes numériques, le contenu de ce cours a été amélioré et adapté pour des besoins de formation de ce parcours. Afin de mettre à la disposition de l'étudiant des supports de cours, ce polycopié a été réalisé et principalement traduit de l'anglais du livre « Numerical Methods for Engineers and Scientists » de l'auteur Joe D. Hoffman. Ce dernier est consacré uniquement à la partie opérations matricielles et les méthodes numériques pour la résolution des systèmes d'équations linéaires.

II. Propriétés des matrices et des déterminants

Les systèmes d'équations linéaires algébriques peuvent être bien exprimés en termes de notation matricielle. Les méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires algébriques peuvent être développées de façon très compacte en utilisant l'algèbre matricielle. Par conséquent, les propriétés élémentaires de matrices et déterminants sont présentées dans cette section.

III. Définition de la matrice

Une matrice est un tableau rectangulaire d'éléments (des nombres ou des symboles), qui sont disposés en lignes et colonnes ordonnées. Chaque élément de la matrice est distinct avec séparation. L'emplacement d'un élément dans la matrice est important. Les éléments d'une matrice sont généralement identifiés par une double lettre minuscule indicée, par exemple, a_{ij}, tel que le premier indice i, identifie la ligne de la matrice et le second indice j identifie la colonne de la matrice. La taille de la matrice est indiquée par le produit du nombre de lignes par le nombre de colonnes. Une matrice à n lignes et m colonnes est dite n par m ou nxm matrice.

Les matrices sont généralement représentées soit par une lettre majuscule en caractères gras, par exemple, $\boldsymbol{A}$, ou l'élément entre crochets, par exemple, $[a_{ij}]$, ou la gamme complète des éléments, comme illustré dans l'équation :

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2, \dots \dots, n\,; j = 1,2, \dots \dots, m) \qquad (1)$$

Cette notation est utilisée le long de ce polycopié pour une apparence plus simple. Lorsque l'élément général $a_{i,j}$ est considéré, les indices i et j sont séparés par une virgule. Quand un élément spécifique est utilisé, par exemple, a_{14}, l'indice 1 et 4, qui dénotent l'élément de la ligne 1 et la colonne 4, ne seront pas séparés par une virgule, sauf pour i ou j supérieur à 9. Par exemple, un a_{68} désigne l'élément dans la ligne 6 et de la colonne 8, alors que $a_{14,5}$ désigne l'élément de la ligne 14 et la colonne 5.

1) Matrice vecteur

Les vecteurs sont un type particulier de matrice qui ne dispose que d'une colonne ou une ligne. Les vecteurs sont représentés soit par une lettre en gras et en minuscule, par exemple, **x** ou **y**, l'élément entre crochets [x_i] ou [y_i] désigne la colonne complète ou la ligne complète d'éléments. Le vecteur colonne est une matrice de n × 1 :

$$X = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (i = 1,2, \ldots \ldots, n) \tag{2}$$

Le vecteur ligne est une matrice de 1× n:

$$Y = [y_i] = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \quad (j = 1,2, \ldots \ldots, n) \tag{3}$$

Vecteurs unitaires, **i**, sont des vecteurs spéciaux qui ont une grandeur d'unité :

$$\|i\| = (i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_n^2)^{1/2} = 1 \tag{4}$$

où la notation $\|i\|$ désigne la longueur du vecteur *i*. Système orthogonal pour vecteur unité, dans lequel tous les éléments sont nul, sauf un, et qui sont utilisés pour définir les systèmes de coordonnées.

2) Matrice carrée

Il existe plusieurs types de matrices spéciales. Une matrice carrée ***S*** est une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes (m = n) :

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Est une matrice carrée n x n. Notre intérêt sera entièrement consacré à des matrices carrées. La ligne de gauche à droite décroissante d'éléments de a_{11} à a_{nn} est appelée la diagonale de la matrice.

3) Matrice diagonale

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls. Toute matrice diagonale est aussi une matrice symétrique. Par exemple ***D*** est une matrice diagonale de 4 x 4.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

D est une matrice diagonale si et seulement si elle vérifie :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \ \Rightarrow \ d_{i,j} = 0$$

Comme une matrice diagonale est entièrement déterminée par la liste de ses éléments diagonaux, la notation suivante plus concise est souvent adoptée :

$$diag(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

Les matrices diagonales apparaissent dans presque tous les domaines de l'algèbre linéaire. La multiplication de matrices diagonales est très simple ; aussi, si une matrice intéressante peut d'une certaine façon être remplacée par une matrice diagonale, alors les calculs qui l'impliquent seront plus rapides et la matrice plus facile à stocker en mémoire. Un procédé permettant de rendre certaines matrices diagonales est la diagonalisation.

Une matrice diagonale d'ordre *n* possède de manière naturelle des colonnes propres qui sont des coordonnées de *n* vecteurs orthonormés et ses coefficients diagonaux sont exactement les valeurs propres associées.
Voir aussi la décomposition en valeurs singulières, d'après laquelle toute matrice est unitairement équivalente à une matrice diagonale positive bordée par zéros.

En d'autres termes, pour toutes les matrices diagonales $D = diag((d_i)_{1 \leq i \leq n})$ et $E = diag((e_i)_{1 \leq i \leq n})$ on a :

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \Re^2$, $\lambda D + \mu E = F$ avec $F = diag((\lambda d_i + \mu e_i)_{1\leq i\leq n})$
- $DE = ED = G$ avec $G = diag((d_i e_i)_{1\leq i\leq n})$

Une conséquence de cela est le fait d'élever une matrice diagonale D à une certaine puissance revient à élever les coefficients de la diagonale de D à cette puissance :

$$D^k = diag(d_{i,j})^k = diag(d_{i,j}^k)$$

4) Matrice scalaire

Ce sont les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \tag{8}$$

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(diag(a_1, a_2, ..., a_n)) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_k \tag{9}$$

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si **son déterminant est non nul**, c'est-à-dire si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, l'inverse d'une matrice diagonale est une matrice diagonale où les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de la matrice de départ.

En effet, si :

$$D = diag(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

Alors

$$D^{-1} = diag(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}) = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

Du fait que

$$D.D^{-1} = D^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n \tag{12}$$

Soit la matrice identité

5) Matrice identité

La **matrice identité** ou **matrice unité** est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Elle peut s'écrire *diag*(1, 1, …, 1).
Puisque les matrices peuvent être multipliées à la seule condition que leurs types soient compatibles, il y a des matrices unité de tout ordre. I_n est la matrice unité d'ordre n et est donc définie comme une matrice diagonale avec 1 sur chaque entrée de sa diagonale principale. Ainsi :

$$I_1 = [1],\ \ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ ...,\ \ I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Concernant le produit des matrices, les matrices unités vérifient que pour tous p, n entiers naturels non nuls et pour toute matrice A à n lignes et p colonnes,

$$I_nA = AI_p = A,$$

Ce qui montre que le produit par une matrice unité n'a aucun effet sur une matrice donnée. On peut le démontrer par calcul direct ou en remarquant que l'application identité (qu'elle représente dans n'importe quelle base) n'a aucun effet par composition avec une application linéaire donnée.
En particulier, I_n est l'élément neutre pour le produit des matrices carrées d'ordre n.

Il est possible aussi de noter les coefficients de la matrice unité d'ordre n avec le symbole de Kronecker ; le coefficient de la $i^{\text{-ème}}$ ligne et $j^{\text{-ème}}$ colonne s'écrit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

et donc la matrice unité I est égale à

$$I = (\delta_{ij})$$

Si l'ordre n'est pas précisé, ou qu'il est trivialement déterminé par le contexte, nous pouvons la noter simplement I.

6) La matrice nulle

C'est la matrice non nécessairement carrée dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n;p}$ ou $0_{n\,p}$ dans le cas ou elle possède n lignes et p colonnes. Par exemple :

$$0_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

7) Matrice triangulaire

Les **matrices triangulaires** sont des matrices carrées dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale, est nulle.
Par définition, une matrice triangulaire supérieure à coefficients réels est une matrice carrée dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles :

$$U = (a_{i\,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{15}$$

A est triangulaire supérieure "U" si et seulement si :

$$\forall i > j,\ \ a_{i,j} = 0$$

Par définition, une matrice triangulaire inférieure à coefficients réels est une matrice carrée dont les valeurs au-dessus de la diagonale principale sont nulles :

$$L=(a_{i,j})=\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad (16)$$

A est triangulaire inférieure "*L*" si et seulement si :

$$\forall i < j,\ \ a_{i,j} = 0$$

8) Propriétés des matrices triangulaires

- Une matrice triangulaire à la fois inférieure et supérieure est une matrice diagonale.
- La somme de deux matrices triangulaires inférieures (respectivement supérieures) et leurs opposées sont des matrices triangulaires inférieures (respectivement supérieures).
- Si l'on multiplie à gauche ou à droite une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure) par un scalaire, le résultat est encore une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure).
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures (respectivement supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure).
- La matrice identité est une matrice diagonale et donc une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure, et vice-versa.
- Si $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ sont des matrices triangulaires supérieures à *n* lignes et *n* colonnes à coefficients réels, le $i^{\text{-ième}}$ coefficient diagonal de AB est $a_{i,i}\ b_{i,i}$. Autrement dit, la diagonale du produit AB est le produit de composante par composante des diagonales de A et de B.
- Soit A est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) de taille *n*, si tous les coefficients diagonaux de A sont inversibles, la matrice A est inversible. Dans ce cas, son inverse est aussi une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure). Il résulte que les coefficients diagonaux de l'inverse de A sont alors les inverses des coefficients diagonaux de A.

9) Matrice transposée

La **matrice transposée** (on dit aussi la **transposée**) d'une matrice $A \in M_{m,n}(K)$ est la matrice notée A^T, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.
Si $B = {}^tA$ alors $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\}, b_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple :

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

- L'application « transposition » est linéaire :

  $${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB,$$

  $${}^t(\alpha A) = \alpha\,{}^tA$$

- La transposée de ${}^tA$ est A.
- La transposée du produit de deux matrices est égale au produit des transposées de ces deux matrices, mais dans l'ordre inverse :

  $${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

- Si une matrice carrée A est inversible, alors sa transposée l'est aussi, et la transposée de l'inverse de A est égale à l'inverse de sa transposée :

  $${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

- Si A désigne une matrice carrée de taille n et B sa transposée, alors A et B ont la même diagonale principale (et par conséquent la même trace) :

  $$b_{ii} = a_{ii}$$

- En particulier, toute matrice diagonale est symétrique, c'est-à-dire égale à sa transposée.
- Plus généralement, deux matrices carrées transposées l'une de l'autre ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres, même trace mais aussi même déterminant.

IV. Opérations sur les matrices

1) Somme et différence des matrices

La somme ou la différence entre deux matrices est une opération très simple. Elle est notée + ou – tout simplement et on a la définition suivante :
Soit A et B deux matrices ayant la même taille, alors si l'on a :

$$A = (a_{i\,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$B = (b_{i\,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

et bien

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Vous voyez que la définition est précise. L'addition de deux matrices n'est possible qu'à condition que les deux matrices aient la même taille c.à.d. le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Sinon, la somme n'est pas possible.

Exemple :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ces deux matrices aient toutes les deux la même taille. L'addition est donc possible et on a :

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+(-1) & 1+(-1) \\ 1+1 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vous voyez bien que la somme de deux matrices est commutative $A + B = B + A$, elle est aussi associative $(A + B) + C = A + (B + C)$
Par contre :

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Et

$$B - A = \begin{bmatrix} O & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Donc $A - B = -(B - A)$

2) **Produit d'un scalaire par une matrice**

On peut multiplier une matrice par un scalaire α c'est à dire un élément de l'ensemble des réels.

Soit une matrice A telle que $A = (a_{ij})$ et un scalaire α;

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & & \cdots & \alpha a_{1p} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & \alpha a_{ij} & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & & \cdots & \alpha a_{np} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Et α = 7 alors

$$7A = \begin{bmatrix} 7 \times 1 & 7 \times 2 \\ 7 \times 3 & 7 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{bmatrix}$$

Plusieurs remarques sur cette opération :

- On peut ne pas écrire le · de multiplication ; ainsi on écrit αA plutôt que $\alpha \cdot A$
- Le scalaire s'écrit toujours à la gauche, ainsi on écrit $7A$ mais surtout pas $A7$.
- De même on écrit $\frac{1}{7}A$ mais surtout pas $\frac{A}{7}$
- Le produit d'un scalaire par une matrice est une loi externe.
- $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha (\beta A) = (\alpha \beta)A$

3) Produit de deux matrices

a) Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit $A = (a_1, \dots, a_p)$ une matrice ligne et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne (noter que la matrice ligne et la matrice colonne ont le même nombre d'éléments). Le produit de A par B, noté AB est la matrice 1×1 qui est un scalaire C :

$$C = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p$$

Exemple :

Le produit de $A = (2 \quad 0 \quad 1)$ par $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est

$$C = A \times B = (2 \quad 0 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 = 4$$

b) Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soit A une matrice de n lignes et p colonnes et B une matrice colonne de p lignes ; à noter pour que le produit soit possible, il faut que la matrice A possède autant de colonnes que B a de lignes.

Le produit de A par B, noté AB est la matrice colonne $n \times 1$ dont la ligne numéro i est le scalaire résultant du produit de la ligne numéro i de A avec la colonne B et ce pour chaque numéro de ligne i entre 1 et n :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \ldots + a_{1p}b_p \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + \ldots + a_{ip}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \ldots + a_{np}b_p \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ à multiplier par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (3 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 0 \\ 3 \times 1 - 1 \times 3 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Produit d'une matrice par une matrice

Soit à multiplier deux matrices A et B, pour que cette opération devient réalisable : il est à noter que A possède d'autant de colonnes que B a de lignes.

Le produit de A[*n*,*p*] par B[*p*,*q*] est la matrice C[*n*,*q*] dont la colonne numéro *j* est le produit de A par la colonne numéro *j* de B et ce pour chaque numéro de colonne *j* compris entre 1 et *q* : d'une manière générale, si les deux matrices $A = (a_{i\,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{i\,j})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$

alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, q\}$; $C = A \times B$: $c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i\,k} b_{k\,j}$

Exemple :

On veut réaliser le produit de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ par $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Commençons par remarquer que *A* possède trois colonnes et que *B* a trois lignes : le produit peut être calculé. Par ailleurs, *A* compte 2 lignes et *B* 4 colonnes, la matrice produit *C* sera donc de taille [2, 4].

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (2\times 2+0\times(-1)+1\times 0) & (2\times 0+0\times 1+1\times 1) & (2\times 1+0\times 3+1\times 0) & (2\times 0+0\times 1+1\times 2) \\ (3\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 0) & (3\times 0+(-1)\times 1+2\times 1) & (3\times 1+(-1)\times 3+2\times 0) & (3\times 0+(-1)\times 1+2\times 2) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Le produit des matrices A et B n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Les propriétés suivantes peuvent être démontrées par calcul en utilisant l'expression $C = A\times B : c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i\,k} b_{k\,j}$ du produit.

Soit A, B et C telles que

- Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (de sorte qu'on peut calculer AB) ;
- Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de C (de sorte qu'on peut calculer BC).

Alors l'opération du produit matriciel est associative (AB)C = A(BC).

Le produit matriciel n'est pas commutatif. C'est évident lorsqu'on peut calculer AB mais pas BA (ce qui arrive si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B mais que le nombre de colonnes de B diffère du nombre de lignes de A) mais on peut aussi avoir AB≠BA lorsque A et B sont deux matrices carrées de même ordre. Ainsi, pour

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mais $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Si A est une matrice de *n* lignes et *p* colonnes, on a

$$AI_p = A \text{ et } I_nA = A.$$

Si A, B et C sont trois matrices telles que A et B ont même nombre de lignes et même nombre de colonnes et le nombre de lignes de C est égal au nombre de colonnes de A (et donc de B). Alors

$$(A+B)C = AC+BC.$$

Si A, B et C sont trois matrices telles que B et C ont même nombre de lignes et même nombre de colonnes et le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (et donc de C). Alors

$$A(B+C) = AB+AC.$$

Si A et B sont deux matrices telles que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et si λ est un coefficient réel, alors

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Le produit de deux matrices peut-être nul alors qu'aucune des matrices n'est nulle. Par exemple, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad et \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors AB=0 mais A≠0 et B≠0.

4) Puissance

On définit la puissance *k* de la matrice carrée A de taille *n* pour l'entier $k \geq 0$ de la façon suivante :

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si k=0} \\ A^{k-1}A = \underbrace{A...A}_{k \text{ fois}} & \text{si k} \geq 1 \end{cases}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$, alors

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 110 & 134 & 164 \\ 312 & 389 & 477 \\ 558 & 697 & 861 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3946 & 4920 & 6064 \\ 11456 & 14278 & 17588 \\ 20632 & 25700 & 31654 \end{bmatrix}$$

Soit A une matrice carrée, soit *k* et *l* deux entiers

- $A^k A^l = A^{k+l}$
- $(A^k)^l = A^{kl}$
- $(\alpha A)^k = \alpha^k A^k$

5) Inverse d'une matrice carrée

Si x est un réel non nul, il admet un inverse : c'est un réel $y = 1/x$ tel que $xy = 1$ et par commutativité, $yx = 1$. La multiplication n'étant pas commutative dans Mn(K), il faut *a priori* prendre des précautions.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Une matrice B carrée d'ordre n est appelée inverse à droite de A *si* $AB = I_n$ et inverse à gauche de A si $BA = I_n$.

Si une matrice A admet un inverse à droite B et un inverse à gauche C alors $B = C$ et on peut donc dire que B est un inverse de A sans ambigüité. Montrons le en calculant CAB de deux façons grâce à l'associativité du produit matriciel : $(CA)B = C(AB)$ donc $I_nB = CI_n$ puis $B = C$.

Par ailleurs, si une matrice A admet un inverse à droite et à gauche, cet inverse est unique. Supposons que B et C sont deux inverses à droite et à gauche : $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$. Alors $B = C$ car

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

Une matrice carrée est dite inversible si elle admet un inverse à droite et à gauche. Son inverse est alors unique. On note A^{-1} l'inverse de la matrice inversible A.

Si A une matrice carrée d'ordre n, on a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Soit A une matrice inversible et λ un coefficient quelconque.

- La matrice A^{-1} est inversible d'inverse A.
- La matrice λA est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Soit A et B deux matrices carrées inversibles de même taille. Alors le produit AB est inversible et son inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Il faut prendre garde au changement de l'ordre de la multiplication lorsqu'on prend l'inverse d'un produit.
Si une matrice carrée admet une inverse à gauche, et admet une inverse à droite, elle est donc inversible. Etant donné une matrice carrée A, si on trouve une matrice de même taille B telle que $AB = \mathrm{I}$ alors $BA = \mathrm{I}$ et $B = A^{-1}$.
On peut alors parler de puissances négatives d'une matrice inversible. Si A est inversible alors A^k est inversible pour tout entier $k \geq 0$ d'inverse $(A^{-1})^k$.
On pose alors $A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$.
Soit A une matrice carrée de taille n. On construit une matrice à n lignes et $2n$ colonnes $(A \mid \mathrm{I})$ en écrivant la matrice identité d'ordre n à droite de A. En appliquant des opérations élémentaires, on transforme la matrice A en la matrice en identité. On applique les mêmes opérations à I. On transforme A en I, Les mêmes opérations élémentaires transforment I en A^{-1}.

Exemple :

On cherche à inverser la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. On travaille donc sur

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow -\dfrac{2}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \dfrac{1}{3}L_3 \end{cases} \quad : \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{3} & \vdots & {}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & {}^{1}/_{3} & 0 & {}^{1}/_{3} \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{3} & \vdots & {}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} & 0 \\ 0 & 0 & -{}^{1}/_{3} & \vdots & -{}^{1}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{1}/_{3} \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow -3L_3 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{3} & \vdots & {}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & {}^{2}/_{3} & \vdots & {}^{1}/_{3} & {}^{1}/_{3} & 0 \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{3} & \vdots & {}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & -{}^{1}/_{3} & 1 & {}^{2}/_{3} \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{3} & \vdots & {}^{2}/_{3} & -{}^{1}/_{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \quad : \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & -{}^{1}/_{3} & 1 & {}^{2}/_{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & {}^{1}/_{3} & 0 & {}^{1}/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] = (I \,\vdots\, A^{-1})$$

On a donc

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple :

On cherche à inverser la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$. On travaille donc sur

$$[A \;\; \vdots \;\; I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & \vdots & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avant d'arriver à la matrice identité, la dernière ligne de la matrice est nulle, donc la matrice A n'est pas inversible. Chaque matrice carrée est associé un nombre afin de nous permettre de déterminer si la matrice est inversible, ce nombre est appelé déterminant.

6) Déterminant

On associe à chaque matrice carrée un nombre permettant de déterminer si elle est inversible : le déterminant. Le déterminant d'une matrice n'est défini que si la matrice est carrée.

Soit A une matrice carrée de taille n. Le déterminant de A, noté det(A), est un nombre réel définit par « descente » de la façon suivante :

a) si $n = 1$ alors $A = (a_{11})$ et $\det(A) = a_{11}$;

b) si $n \geq 2$, alors $A = (a_{ij})_{1\leq i;\, j\leq n}$ et

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} - \ \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}\Delta_{n1}$$

où Δ_{i1} est le déterminant de la matrice de taille $n-1$ obtenue en enlevant à A la ligne numéro i et la première colonne.

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on calcule le déterminant de A :

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\det((d)) - c\det((b)) = ad - bc$$

La matrice A est inversible si et seulement si la quantité $ad - bc$ est non nulle.

Exemple :

On calcule

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1\times\det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\times\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + 7\times\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= (5\times 9 - 6\times 8) - 4\times(2\times 9 - 3\times 8) + 7\times(2\times 6 - 3\times 5) = 0$$

On peut calculer le déterminant d'une autre manière surtout pour le cas de matrice de taille de $n \geq 3$, on ajoutant des colonnes supplémentaires à notre matrice plus exactement n–1 colonnes. Les colonnes ajoutées sont juste les colonnes de notre matrice, en commençant par la première colonne jusqu'à la colonne n–1, en les plaçant après la dernière colonne, en sorte que la nouvelle matrice devient rectangulaire de n lignes et $2n$–1 colonnes.

Pour le cas d'une matrice A carrée de taille n=3, en ajoutant les 2 colonnes on trouve une matrice de taille 3×5 de manière à avoir 3 diagonales qui sont relié en trait bleu et 3 anti-diagonales qui sont relié par des tirets en rouge :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Exemple :

Calculons le déterminant de la matrice carrée suivante par la méthode de la diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{bmatrix}$$

En ajoutant les deux premières colonnes, en augmente notre matrice comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{bmatrix} \begin{matrix} 80 & -20 \\ -20 & 40 \\ -20 & -20 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (80)(40)(130) + (-20)(-20)(-20) + (-20)(-20)(-20) \\ &\quad - (-20)(40)(-20) - (-20)(-20)(80) - (130)(-20)(-20) \\ &= 416000 - 8000 - 8000 - 16000 - 32000 - 52000 \\ &= 300000 \end{aligned}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire à coefficients dans R est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{ou } A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\det((a_{i,j})_{i,j\in\{1,n\}}) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Exemple :

On calcule le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1 \times 4 \times 6 = 24$$

La matrice identité I_n son déterminant égal à 1, si une matrice quelconque possède une ligne (respectivement une colonne) formée d'éléments nuls alors son déterminant est nul.

La méthode de la diagonale de l'évaluation des déterminants s'applique uniquement à des matrices de taille 2x2 et 3x3. Elle n'est plus valable pour les matrices de taille 4x4 ou plus. En général, l'expansion d'un facteur de nxn est la somme de tous les produits possibles formés par le choix d'un et un seul élément de chaque ligne et chaque colonne de la matrice, avec un signe plus ou moins déterminé par le nombre de permutations de la ligne et des éléments de colonne.

Une procédure formelle d'évaluation de déterminants est appelé extension par des mineurs, ou la méthode de cofacteurs. Dans cette procédure, il existe "n!" produits pour les additionner, où chaque produit à n éléments. Ainsi, l'expansion d'un facteur de 10 x 10 nécessite l'addition de "10!" produits (10! = 3628800), où chaque produit implique 9 multiplications (le produit de 10 éléments). C'est un total de 32.659.000 multiplications et de 3627999 additions, sans compter le travail nécessaire pour garder la trace des signes.

Par conséquent, l'évaluation des déterminants par le procédé de cofacteurs n'est pas possible, sauf pour des matrices de très petite taille. Bien que la méthode de cofacteurs ne soit pas recommandée pour tout type de matrice de taille supérieur à 4x4, il est utile de comprendre les concepts. Le mineur $M_{i\,j}$ est le déterminant de la sous-matrice (n - 1).(n - 1) de la matrice nxn A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j, Le cofacteur $A_{i\,j}$ associé avec le mineur $M_{i\,j}$ est défini comme :

$$A_{i\,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i\,j}$$

En utilisant des cofacteurs, le déterminant de la matrice A est la somme des produits des éléments d'une ligne ou une colonne, multipliée par leurs cofacteurs correspondants. Ainsi, en développant selon toute ligne fixe i

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} A_{i\,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} M_{i\,j}$$

Alternativement, le développement des calculs vers le bas des colonnes fixes j

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} A_{i\,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} M_{i\,j}$$

Chaque extension de cofacteur réduit l'ordre du déterminant par un, il y a donc n matrices d'ordre n-1 pour évaluer leurs déterminants. Par application répétée, les cofacteurs sont finalement réduits à 3 × 3 déterminants qui peuvent être évaluées par la méthode de la diagonale. Le volume de travail peut être réduit en choisissant la ligne ou colonne de développement avec autant de zéros que possible.

Si la valeur du déterminant de la matrice est égale à zéro, la matrice est dite singulière. La matrice non singulière ou inversible possède un déterminant qui a une valeur différente de zéro. Si une ligne ou une colonne d'une matrice se compose d'éléments nuls, cette matrice est singulière.

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure est le produit des éléments de la diagonale principale. Il est possible de transformer n'importe quelle matrice inversible en une matrice triangulaire, de manière à ce que la valeur du déterminant reste inchangée, peu importe le nombre d'opérations nécessaires pour cette transformation. Cette méthode consiste à transformer la matrice en matrice triangulaire supérieure ou en matrice triangulaire inférieure. La valeur du déterminant de la matrice triangulaire peut alors être évaluée assez facilement par le produit des éléments de la diagonale principale.

V. Systèmes d'équations linéaires algébriques

Les systèmes d'équations se posent dans toutes les branches de l'ingénierie et de la science. Cette partie est consacrée à la solution de systèmes d'équations linéaires algébriques de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{19}$$

où x_j (j = 1, 2 ..... n) dénote les variables inconnues à déterminer, $a_{i,j}$ (i, j = 1, 2 ..... n) désigne les coefficients constants des variables inconnues, et b_i (i = 1, 2 ..... n) la matrice colonne, dénote les termes non homogènes, s'appelle second membre du système. Pour les coefficients $a_{i,j}$, le premier indice, i, dénote équation i et le second indice, j, désigne variable x_j. Le nombre d'équations peut varier de deux à des centaines, des milliers, voire des millions.

Dans le cas général, le nombre de variables n'est pas tenu d'être le même que le nombre d'équations. Cependant, dans la plupart des problèmes d'ordre pratique, ils sont les mêmes, à savoir le cas considéré dans ce polycopié. Lorsque le nombre de variables est le même que le nombre d'équations, une solution unique peut existe, comme illustré par l'exemple de système de deux équations linéaires algébriques suivants :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (20)$$

Si le second membre du système (20) B = 0, on dit que le système est un système d'équations linéaires homogènes. Les systèmes d'équations linéaires homogènes admettent toujours au moins une solution : la matrice colonne nulle.

Il existe deux approches fondamentalement différentes pour la résolution des systèmes équations linéaires algébriques (19) :

- Méthodes d'élimination directes
- Méthodes itératives

Les méthodes d'élimination directes sont des procédures systématiques basées sur l'élimination algébrique, qui obtiennent la solution en un nombre fini d'opérations. Parmi les méthodes d'élimination directes on trouve : élimination de Gauss, élimination de Gauss-Jordane, la méthode de la matrice inverse et la factorisation LU. Par contre les méthodes itératives, obtiennent la solution asymptotiquement par une procédure itérative. Une solution d'essai est supposée, la solution d'essai est remplacée dans le système d'équations pour déterminer l'inadéquation ou l'erreur, dans la solution d'essai, et une solution améliorée est obtenue à partir des données inadéquates. Les méthodes itératives sont la méthode itérative de Jacobi, la méthode itérative de Gauss-Seidel et successive-sur-relaxation (SOR).

Bien qu'il n'y a pas absolument de règles d'applications rigides, les méthodes d'élimination directe sont généralement utilisée lorsque l'une ou plusieurs des conditions suivantes sont vérifiées :

a) Le nombre d'équations est petit (100 ou moins),
b) La plupart des coefficients dans les équations sont non nuls,
c) Lorsque le système d'équations n'est pas diagonalement dominant ou
d) Le système d'équations est mal conditionné.

Les méthodes itératives sont utilisées lorsque le nombre d'équations est grand et la plupart des coefficients sont nuls (c'est à dire, une matrice creuse). Les méthodes itératives divergent généralement à moins que le système d'équations est diagonalement dominant.

VI. Méthodes d'élimination directes

Il existe un certain nombre de procédés pour la résolution directe des systèmes d'équations linéaires. Une des méthodes les plus connues est la règle de Cramer, qui nécessite le calcul du déterminant. Des méthodes basées sur le concept d'élimination, sont aussi recommandées. Les règles et les méthodes d'élimination sont présentées dans cette section. Après la présentation de la règle de Cramer, élimination de Gauss, élimination de Gauss-Jordan et l'inversion de matrice ; Ces concepts sont étendus à la factorisation LU et les systèmes tri-diagonaux d'équations dans les sections suivantes.

1) La règle de Cramer

Bien qu'elle ne soit pas une méthode d'élimination ; la règle de Cramer est une méthode directe pour la résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques. Considérons le système d'équations, Ax = b, qui représente *n* équations A matrice carrée de taille *n*. La règle de Cramer affirme que la solution pour x_j (j = 1 ..... n) est donnée par

$$x_j = \frac{\det(A^j)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{21}$$

où A^j est la matrice de taille *n* obtenu en remplaçant la colonne j de la matrice *A* par la colonne b. Par exemple, considérons le système de deux équations (20), en appliquant la règle de Cramer :

$$x_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

Les déterminants peuvent être évalués par la méthode de la diagonale décrite auparavant. Pour des systèmes contenant plus de trois équations c.à.d. des matrices de taille $n \geq 4$, l'évaluation du déterminant nécessite une autre méthode de calcul appelée procédé de cofacteurs, décrite aussi auparavant.

Le nombre d'opérations requises par cette méthode est phénoménal (Pour un système relativement faible contenant 10 équations, le nombre d'opérations s'élève à 360 000 000, ce qui est un nombre énorme de calculs). Ce qui est évidemment ridicule d'utiliser la méthode de la diagonale pour des systèmes d'équations de $n \geq 4$.

La méthode privilégiée pour l'évaluation des déterminants, des matrices de taille importante, est la méthode d'élimination afin de transformer la matrice en matrice triangulaire supérieure ou inférieure, ce qui réduit considérablement le nombre d'opérations.

Le nombre d'opérations requises par la méthode d'élimination ou la méthode de transformation de matrice quelconque en matrice triangulaire est d'environ 1090 pour $n = 10$. Il est évident que la méthode d'élimination est une méthode moins couteuse, et donc la préférée.

Illustrons maintenant les étapes de la règle de Cramer en résolvant le système à trois équations :

$$\begin{cases} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 + 40x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 = 20 \end{cases} \tag{22}$$

Tout d'abord, calculant le déterminant de A :

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{bmatrix} = 300\,000$$

Par la suite, calculant les déterminants des matrices A^1, A^2 et A^3, ces matrices sont obtenues en changeant les colonnes de *A* par les valeurs de *b*:

$$\det(A^1) = \det\begin{bmatrix} 20 & -20 & -20 \\ 20 & 40 & -20 \\ 20 & -20 & 130 \end{bmatrix} = 180\,000$$

$$\det(A^2) = \det\begin{bmatrix} 80 & 20 & -20 \\ -20 & 20 & -20 \\ -20 & 20 & 130 \end{bmatrix} = 300\,000$$

$$\det(A^3) = \det\begin{bmatrix} 80 & -20 & 20 \\ -20 & 40 & 20 \\ -20 & -20 & 20 \end{bmatrix} = 120\,000$$

Ce qui permet de trouver les valeurs des trois inconnues de façon très simple par la règle de Cramer

$$x_1 = \frac{\det(A^1)}{\det(A)} = \frac{180\,000}{300\,000} = 0{,}60$$

$$x_2 = \frac{\det(A^2)}{\det(A)} = \frac{300\,000}{300\,000} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det(A^3)}{\det(A)} = \frac{120\,000}{300\,000} = 0{,}40$$

2) Méthode d'élimination

Les méthodes d'élimination ont pour but de résoudre un système d'équations linéaires en résolvant une équation, qui est la première équation, pour l'une des inconnues, qui est x_1, en termes des inconnues restantes, x_2 à x_n, puis en remplaçant l'expression de x_1 dans les (n-1) équations pour déterminer les n - 1 équations impliquant x_2 à x_n. Cette procédure d'élimination est effectuée n - 1 fois jusqu'à ce que la dernière étape aboutit à une équation impliquant seulement x_n. Ce processus est appelé élimination.
La valeur de x_n peut être calculée à partir de l'équation finale de la procédure d'élimination. Ensuite, x_{n-1} peut être calculé à partir de l'équation modifiée n - 1, qui contient que x_n, et x_{n-1}. Ensuite, x_{n-2} peut être calculée à partir de l'équation modifiée n-2, qui ne contient que x_n, x_{n-1}, x_{n-2}. Cette procédure est exécutée n - 1 fois pour le calcul de x_{n-1}, à x_1. Ce processus est appelé la substitution par retour.

3) Opérations sur les lignes

Le processus d'élimination emploie les opérations à répétition, qui sont :

1. Toute ligne peut être multipliée par une constante.
2. L'ordre des lignes peut être modifié (pivotement).
3. Toute ligne peut être remplacée par une combinaison linéaire pondérée de cette ligne avec l'une des lignes.

Ces opérations sur les lignes, qui changent les valeurs des éléments de la matrice A et b, ne changent pas la solution x pour le système d'équations.

La première opération de ligne est utilisée à l'échelle des lignes, si nécessaire. La deuxième opération de ligne est utilisée pour éviter les divisions par zéro et de réduire les erreurs d'arrondi. La troisième opération de ligne est utilisée pour mettre en œuvre le processus d'élimination.

4) Exemple d'élimination

Illustrons la méthode d'élimination par la résolution du système d'équation (22) :
Résoudre la première équation pour x_1 ainsi :

$$x_1 = (20 - (-20)x_2 - (-20)x_3)/80$$

En remplaçant la valeur de x_1 dans la deuxième équation du système, on trouve

$$-20[(20 - (-20)x_2 - (-20)x_3)/80] + 40x_2 - 20x_3 = 20$$

Qui peut être simplifié pour donner

$$35x_2 - 25x_3 = 25$$

De manière identique, en remplaçant la valeur de x_1 dans la troisième équation du système, on trouve

$$-20[(20 - (-20)x_2 - (-20)x_3)/80] - 20x_2 + 130x_3 = 20$$

Qui peut être simplifié pour donner

$$-25x_2 + 125x_3 = 25$$

En répétant les mêmes opérations pour la deuxième inconnue x_2:

$$x_2 = (25 - (-25)x_3)/35$$

En remplaçant la valeur de x_2 dans la dernière équation, on trouve

$$-25[(25 - (-25)x_3)/35] + 125x_3 = 25$$

En final, on trouve la dernière équation qui achève le processus d'élimination.

$$\frac{750}{7}x_3 = \frac{300}{7}$$

Cette équation qui nous permet de trouver facilement la valeur de x_3.
En procédant à des remplacements par retour de la valeur de x_3, la valeur de x_2 est déterminée puis celle de x_1.

$x_3 = 300/750 = 0.40$

$x_2 = [25 – (–25)(0.40)]/35 = 1.00$

$x_1 = [20 – (–20)(1.00) – (–20)(0.40)]/80 = 0.60$

Essayant maintenant de résoudre le même système d'équation (22) d'une manière normalisée. L'idée est d'éliminer les coefficients de x_1 pour les équations deux et trois en gardant celui de la première équation qui est appelé pivot. Un multiplicateur est choisi pour éliminer les coefficients en dessous du pivot.

$$\begin{bmatrix} 80x_1 - 20x_2 \ - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 + 40x_2 \ - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 = 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - (-20/80)\,L_1 \\ L_3 - (-20/80)\,L_1 \end{matrix}$$

Notre système devient après la première élimination, ensuite éliminer le nouveau coefficient de x_2 de la troisième équation.

$$\begin{bmatrix} 80x_1 - 20x_2 \ - 20x_3 = 20 \\ 0x_1 + 35x_2 \ - 25x_3 = 25 \\ 0x_1 - 25x_2 + 125x_3 = 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - (-25/35)\,L_2 \end{matrix}$$

Ainsi le résultat obtenu après la deuxième élimination est :

$$\begin{bmatrix} 80x_1 - 20x_2 \ - \ 20x_3 = \ 20 \\ 0x_1 + 35x_2 \ - \ 25x_3 = \ 25 \\ 0x_1 + \ 0x_2 + 750/7x_3 = 300/7 \end{bmatrix}$$

Ce processus se poursuit jusqu'à ce que tous les coefficients en dessous de la diagonale principale soient éliminés. Dans notre exemple avec trois équations, ce processus est maintenant terminé, le dernier système est le résultat final. C'est le processus d'élimination.
A ce moment, la dernière équation ne contient qu'une seule inconnue, x_3, qui peut être résolue. En utilisant ce résultat, l'avant-dernière équation peut être résolue pour x_2. En utilisant les résultats de x_3 et x_2, la première équation peut être résolue pour x_1.

$x_3 = 300/750 = 0.40$

$x_2 = [25 - (-25)(0.40)]/35 = 1.00$

$x_1 = [20 - (-20)(1.00) - (-20)(0.40)]/80 = 0.60$

C'est le processus de substitution de retour. Ainsi, l'extension de la procédure d'élimination pour n équations est simple.

5) Élimination simple

La procédure d'élimination est illustré dans l'exemple précédent implique la manipulation de coefficient de la matrice A et le vecteur non homogène b. Les composantes du vecteur X sont fixés à leur emplacement dans l'ensemble d'équations. Tant que les colonnes ne sont pas interchangeables, colonne j correspond à x_j. Par conséquent, la notation x_j n'a pas besoin d'être effectuée tout au long des opérations. Seuls les éléments numériques de A et b doivent être considérés. Ainsi, la procédure d'élimination peut être simplifiée en augmentant la matrice A par le vecteur de b et d'effectuer les opérations sur les lignes des éléments de la matrice A augmentée pour accomplir le processus d'élimination, en effectuant ensuite le processus de substitution de retour pour déterminer le vecteur de solution. Cette procédure d'élimination simplifiée est illustrée par le même exemple.

$$[\mathrm{A} \,\vdots\, b] = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & \vdots & 20 \\ -20 & 40 & -20 & \vdots & 20 \\ -20 & -20 & 130 & \vdots & 20 \end{bmatrix}$$

Effectuer les opérations sur les lignes pour atteindre le processus d'élimination :

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & \vdots & 20 \\ -20 & 40 & -20 & \vdots & 20 \\ -20 & -20 & 130 & \vdots & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - (-20/80)L_1 \\ L_3 - (-20/80)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & \vdots & 20 \\ 0 & 35 & -25 & \vdots & 25 \\ 0 & -25 & 125 & \vdots & 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - (-25/35)L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & \vdots & 20 \\ 0 & 35 & -25 & \vdots & 25 \\ 0 & 0 & 750/7 & \vdots & 300/7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 0.60 \\ x_2 = 1.00 \\ x_3 = 0.40 \end{matrix}$$

L'étape de substitution de retour est présentée à côté de la matrice devenue triangulaire à la fin du processus d'élimination.

6) Pivotement

L'élément de la diagonale principale est appelé le pivot. La méthode de pivotement est nécessaire que si le premier pivot a_{11} est égal à zéro. La procédure échoue également si un pivot ultérieur $a_{i\,i}$ est nul. Même s'il peut n'y avoir aucun zéros sur la diagonale principale de la matrice d'origine, le processus d'élimination peut créer des zéros sur la diagonale principale. La procédure d'élimination simple décrite jusqu'ici doit être modifiée pour éviter des zéros sur la diagonale principale. Ce résultat peut être effectué en réarrangeant les équations, en permettant les équations (lignes) ou variables (colonnes), avant chaque étape d'élimination pour mettre l'élément de la plus grande valeur sur la diagonale. Ce processus est appelé pivotement ou basculement. En échangeant les lignes et les colonnes est appelée méthode de pivot. Le pivot total est assez compliqué, et donc il est rarement utilisé. En échangeant uniquement les lignes on définit pivotement partiel. Seulement le pivotement partiel est pris en compte dans ce polycopié.

La méthode du pivot élimine les zéros dans les endroits de pivot lors du processus d'élimination. Cette méthode réduit également les erreurs d'arrondi, car la valeur de pivot est un diviseur pendant le processus d'élimination, et la division par un grand nombre donne des petites erreurs d'arrondi que la division par un petit nombre. Lorsque la procédure est répétée, des erreurs d'arrondi peuvent être graves. Ce problème devient de plus en plus grave lorsque le nombre d'équations augmente.

Utilisons l'élimination par la méthode de pivot partiel pour résoudre le système d'équations linéaires suivant, Ax = b:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Appliquons la procédure d'élimination en augmentant A avec b. Le premier élément de pivot est égal à zéro, de sorte que le pivotement est nécessaire. La plus grande valeur dans la première colonne sous le pivot est celle de la deuxième ligne. Ainsi, en permettant la première et la deuxième ligne, ainsi que la nouvelle deuxième ligne possède déjà un zéro sous le pivot, le processus d'élimination se fait juste pour la troisième ligne.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ -2 & 3 & -3 & \vdots & 5 \end{bmatrix} L_3 - (-2/4)L_1$$

En effectuant les opérations d'élimination, on trouve :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 7/2 & -7/2 & \vdots & 7/2 \end{bmatrix}$$

Bien que le nouveau pivot dans la seconde ligne soit différent de zéro, mais ce n'est pas le plus grand élément de la deuxième colonne. Ainsi, un pivotement est effectué de nouveau. Notez que le pivotement est basé uniquement sur les lignes au-dessous le pivot. Les lignes au-dessus de pivot ont déjà été traitées par le processus d'élimination. L'utilisation d'une des lignes au-dessus du pivot détruirait l'élimination déjà accomplie. Inter-changeant la deuxième et la troisième ligne, en évaluant les nouvelles valeurs par le multiplicateur d'élimination.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 7/2 & -7/2 & \vdots & 7/2 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix} L_3 - (4/7)L_2$$

Effectuant les opérations d'élimination, on trouve :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 7/2 & -7/2 & \vdots & 7/2 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Les résultats obtenus par le remplacement de retour sont présentés à côté de la matrice triangulaire augmentée.

7) Mise à l'échelle

Le processus d'élimination décrit jusqu'ici peut attirer des erreurs d'arrondi importantes lorsque les valeurs des éléments de pivot sont plus petites que les valeurs des autres éléments dans les équations contenant les éléments de pivot. Dans de tels cas, la mise à l'échelle est utilisée pour sélectionner les éléments de pivot. Après pivotement, l'élimination est appliquée aux équations originales. La mise à l'échelle est utilisée seulement pour sélectionner les éléments de pivot.

Le pivotement à l'échelle est réalisé comme suit ; avant d'appliquer l'élimination sur la première colonne, tous les éléments de la première colonne sont mis à l'échelle (c.-à-d. normalisés) par les plus grands éléments dans les lignes correspondantes. Le pivotement est mis en œuvre sur la base des éléments mis à l'échelle dans la première colonne, et l'élimination est appliquée pour obtenir des éléments nuls dans la première colonne au-dessous de l'élément du pivot. Avant d'appliquer l'élimination à la seconde colonne, l'ensemble des éléments de 2 à n dans la deuxième colonne sont mis à l'échelle, le pivotement est réalisé, et l'élimination est appliquée pour obtenir des éléments nuls de la deuxième colonne au-dessous de l'élément de pivot. La procédure est appliquée sur les lignes restantes de 3 à n - 1. Le remplacement par retour est alors appliqué pour obtenir x.

Penchons-nous sur l'avantage de l'extension (la mantisse) en résolvant le système linéaire suivant:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 105 \\ 2 & -3 & 103 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 98 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Qui a pour solution exacte x_1 = -1.0, x_2 = 1,0, et x_3 = 1,0. Pour accentuer l'effet de l'arrondi, gardant seulement trois chiffres significatifs dans nos calculs. Pour la première colonne, le pivotement n'est pas nécessaire, la matrice A augmentée et le premier ensemble d'opérations sur les lignes sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 105 & : & 104 \\ 2 & -3 & 103 & : & 98 \\ 1 & 1 & 3 & : & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - (0.667)L_1 \\ L_3 - (0.333)L_1 \end{matrix}$$

Qui nous donne :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 105 & : & 104 \\ 0 & -4.33 & 33.0 & : & 28.6 \\ 0 & 0.334 & -32.0 & : & -31.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - (-0.077)L_2 \end{matrix}$$

Le pivotement n'est pas requis pour la deuxième colonne. Après de l'élimination indiquée, on obtient la matrice triangulaire

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 105 & : & 104 \\ 0 & -4.33 & 33.0 & : & 28.9 \\ 0 & 0 & -29.5 & : & -29.4 \end{bmatrix}$$

En exécutant le remplacement par retour, on trouve x_3 = 0.997, x_2 = 0.924, et x_1 = -0.844, qui ne sont pas en très bonne concordance avec la solution exacte x_3 = 1.0, x_2 = 1.0, et x_1 = -1.0. Les erreurs d'arrondi à cause de la précision de trois chiffres ont perturbé l'exactitude de la solution. Les effets de l'arrondi peuvent être réduits par la mise à l'échelle des équations avant le pivotement. La mise à l'échelle doit être utilisée uniquement pour déterminer si le pivotement est nécessaire. Tous les calculs doivent être effectués avant la mise à l'échelle.

Essayons de reprendre le dernier système qui nécessite la mise à l'échelle pour déterminer si un pivotement est exigé. La première étape de la procédure d'élimination consiste à éliminer tous les éléments de la première colonne sous l'élément a_{11}. Pour rendre cette étape plus performante, divisant tous les éléments de la première colonne par l'élément le plus grand dans chaque ligne. Le résultat est :

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3/105 \\ 2/103 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0286 \\ 0.0194 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$$

Avec a_1 est la notation du vecteur qui contient la division des éléments de la première colonne de la matrice A. Le troisième élément du vecteur a_1 est le plus grand des éléments dans a_1, un changement entre la première ligne et la troisième ligne est nécessaire. Les opérations d'élimination indiquées sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 3 \\ 2 & -3 & 103 & \vdots & 98 \\ 3 & 2 & 105 & \vdots & 104 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - (2/1)L_1 \\ L_3 - (3/1)L_1 \end{matrix}$$

Les résultats obtenus sont indiqué comme suit avec la nouvelle opération d'élimination :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & -5 & 97 & \vdots & 92 \\ 0 & -1 & 96 & \vdots & 95 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - (1/5)L_2 \end{matrix}$$

En divisant le deuxième et le troisième éléments de la deuxième colonne comme suit :

$$a_2 = \begin{bmatrix} -5/97 \\ -1/96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0516 \\ -0.0104 \end{bmatrix}$$

Par consequent, le pivotement n'est pas indiqué, les résultats sont :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & -5 & 97 & \vdots & 92 \\ 0 & 0 & 76.6 & \vdots & 76.6 \end{bmatrix}$$

Ainsi en procédant au remplacement par retour, on trouve x1 = 1.00, x2 = 1.00 et x3 = -1.00, ce qui correspond à la solution exacte. En suivant cette procédure, l'effet des arrondis a été casiment évité.

8) Élimination de Gauss

La procédure d'élimination décrite dans la section précédente, y compris la mise à l'échelle de pivotement, est communément appelée élimination de Gauss. C'est la méthode d'élimination directe la plus importante et la plus utile pour la résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques. La méthode de Gauss-Jordan, la méthode matrice inverse et la méthode de factorisation LU sont toutes des modifications ou extensions de la méthode d'élimination de Gauss. Le pivot est un élément essentiel de l'élimination de Gauss. Dans les cas où tous les éléments de la matrice A sont du même ordre de grandeur, la mise à l'échelle n'est pas nécessaire. Cependant, la règle de pivotement pour éviter le pivot nul est nécessaire dans une procédure d'élimination.

La méthode de la mise à l'échelle pivotante est utilisée pour réduire les erreurs d'arrondi, bien que très souhaitable en général, elle peut être soumise à un risque pour la précision de la solution. Lors de l'élimination de Gauss à la main, les décisions concernant le pivotement peuvent être prises au cas par cas. Lors de l'écriture d'un programme informatique de la méthode d'élimination de Gauss à usage général pour des systèmes d'équations, cependant, la méthode de la mise à l'échelle pivotante est une nécessité absolue.

La procédure d'élimination de Gauss, dans un format adapté pour une programmation informatique, est résumée comme suit:

1. Définir une matrice de taille nxn constituée des coefficients du système d'équation linéaire.
2. A partir de la première colonne, on cherche l'élément le plus grand dans cette colonne et on met ce coefficient dans la position de pivot (pivotement ou permutation de lignes).
3. Pour la colonne k (k = 1, 2 ..... n - 1), on applique la procédure d'élimination de lignes i (i = k + 1, k + 2 ..... n) afin de créer des zéros dans la colonne au-dessous du pivot $a_{k,k}$, de sorte que notre matrice se transforme en matrice triangulaire ainsi :

$$a_{i,j} = a_{i,j} - \left(\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}\right) a_{k,j} \quad (i,j=k+1,\ k+2,\dots,n)$$

$$b_i = b_i - \left(\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}\right) b_k \quad (i=k+1,\ k+2,\dots,n)$$

4. Après que l'étape 3 soit appliquée à toutes les colonnes de k, (k = 1,2 ..... n - 1), la matrice d'entrée A l'originale est devenue une matrice triangulaire supérieure. La résolution de notre système se fait par une remontée. Ainsi on a :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \qquad (i = n-1, n-2, ..., 1)$$

9) Élimination de Gauss-Jordan

L'élimination de Gauss-Jordan est une variante de l'élimination de Gauss, dans laquelle les éléments en dessus de la diagonale principale sont éliminés (les rendre nuls) ainsi que les éléments en dessous de la diagonale principale. De manière que la matrice A est transformée en une matrice diagonale. Les lignes sont mises à l'échelle pour rendre les éléments diagonaux égaux à 1, ce qui transforme la matrice A à une matrice identité. Le vecteur b est transformé alors en vecteur solution x. Le nombre de multiplications et divisions pour l'élimination de Gauss-Jordan est d'environ 50 pour cent plus grande que pour l'élimination de Gauss. Par conséquent, l'élimination de Gauss est préférable.
Travaillons le même exemple traité auparavant, cet exemple ne nécessite pas un pivotement, ainsi la matrice augmentée est :

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & : & 20 \\ -20 & 40 & -20 & : & 20 \\ -20 & -20 & 130 & : & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1/80 \\ \\ \\ \end{array}$$

La division de la première ligne par 80 est réalisée pour rendre le pivot a_{11}=1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/4 & : & 1/4 \\ -20 & 40 & -20 & : & 20 \\ -20 & -20 & 130 & : & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - (-20)L_1 \\ L_3 - (-20)L_1 \end{array}$$

En appliquant les éliminations des deux éléments en dessous du pivot avec les modifications qui suit sur la deuxième ligne et la troisième ligne :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/4 & \vdots & 1/4 \\ 0 & 35 & -25 & \vdots & 25 \\ 0 & -25 & 125 & \vdots & 25 \end{bmatrix} L_2/35$$

Divisons la deuxième ligne par 35 pour rendre le nouveau pivot a_{22}=1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/4 & \vdots & 1/4 \\ 0 & 1 & -5/7 & \vdots & 5/7 \\ 0 & -25 & 125 & \vdots & 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1-(-1/4)L_2 \\ \\ L_3-(-25)L_2 \end{matrix}$$

Appliquons l'élimination à la fois en dessous et en dessus de la deuxième ligne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/7 & \vdots & 3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & \vdots & 5/7 \\ 0 & 0 & 750/7 & \vdots & 300/7 \end{bmatrix} L_3/(750/7)$$

Divisons la troisième ligne par 750/7 pour rendre le dernier pivot a_{33}=1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/7 & \vdots & 3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & \vdots & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1-(-3/7)L_3 \\ L_2-(-5/7)L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

En appliquant l'élimination en dessus de la troisième ligne, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0.60 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1.00 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.40 \end{bmatrix}$$

La matrice A est ainsi devenue une matrice identité et le vecteur b s'est transformé en vecteur solution : X = [0.60 1.00 0.40].

10) Inversion d'une matrice

L'inverse d'une matrice carrée A est la matrice A^{-1} tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. L'élimination de Gauss-Jordan peut être utilisée pour déterminer l'inverse d'une matrice A en augmentant A avec la matrice identité I. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, la matrice A est transformée à une matrice d'identité I, et la matrice d'identité est transformée en matrice inverse, A^{-1}. Ainsi, l'application de l'élimination de Gauss-Jordan permet d'écrire :

$$[A \quad \vdots \quad I] \rightarrow [I \quad \vdots \quad A^{-1}]$$

La procédure d'élimination Gauss-Jordan, dans un format adapté pour la programmation informatique, peut être développée, en modifiant la première étape. En augmentant la matrice A de nxn avec la matrice identité I de nxn. Les étapes 2 et 3 de la méthode sont les mêmes, en adaptant le pivot à l'unité en divisant tous les éléments dans la ligne par la valeur du pivot. L'élimination est effectuée en dessus, ainsi qu'en dessous du pivot. A la fin, la matrice A sera transformée en matrice identité, et la matrice d'identité d'entrée sera transformée en matrice inverse A^{-1}.

Evaluons la matrice inverse de la matrice A utilisée dans la section de l'élimination de Gauss-Jordan. Au début, augmentons la matrice A par la matrice identité I, de la manière suivante :

$$[A \quad \vdots \quad I] = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 40 & -20 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -20 & -20 & 130 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan, la matrice augmentée se transforme en la matrice augmentée suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2/125 & 1/100 & 1/250 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/100 & 1/30 & 1/150 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/250 & 1/150 & 7/750 \end{bmatrix} = [I \quad \vdots \quad A^{-1}]$$

Donc la matrice inverse de A est :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/125 & 1/100 & 1/250 \\ 1/100 & 1/30 & 1/150 \\ 1/250 & 1/150 & 7/750 \end{bmatrix}$$

Si on multiplie la matrice A avec la matrice inverse A^{-1} on trouve la matrice identité. Un système d'équation peut être résolu en utilisant la méthode d'inversion de matrice A^{-1}. Un système d'équation linéaire s'écrit :

$$A\,x = b$$

En multipliant les deux parties à gauche par A^{-1}, on a :

$$A^{-1} A\,x = A^{-1} b$$

$$I\,x = A^{-1}\,b$$

Ce qui nous donne :

$$x = A^{-1}\,b$$

Ainsi, lorsque la matrice inverse A^{-1} de la matrice A du système d'équation est connue, la solution (le vecteur x) est simplement le produit de la matrice inverse A^{-1} par le vecteur b. Les matrices carrées ne sont pas toutes inversibles. La matrice singulière, est une matrice dont le déterminant est nul, n'a pas donc une matrice inverse. Le système d'équations correspondant n'a pas de solution unique.

En utilisant la méthode de la matrice inverse, notre système d'équation est résolu en multipliant la matrice inverse obtenue par le vecteur b comme suit :

$$X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 2/125 & 1/100 & 1/250 \\ 1/100 & 1/30 & 1/150 \\ 1/250 & 1/150 & 7/750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2/125)(20) & + & (1/100)20) & + & (1/250)(20) \\ (1/100)(20) & + & (1/30)(20) + & & (1/150)(20) \\ (1/250)(20) & + & (1/150)(20) + & & (7/750)(20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 1.00 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

11) Méthode de factorisation

Une matrice (comme un scalaire) peut être factorisée en deux autres matrices de façon que leur produit donne la matrice originale, ainsi :

$$A = BC$$

Quand B et C sont des matrices triangulaire inférieure et triangulaire supérieure, respectivement, l'expression A devient

$$A = LU$$

En spécifiant les éléments de la diagonale de L ou de U, la factorisation devient unique. Deux procédés existent, le premier considère que les éléments de la diagonale principale de L sont tous égaux à un (le procédé est appelé la méthode Doolittle). Le deuxième considère que les

éléments de la diagonale principale de U égaux à un (le procédé est appelé la Méthode de Crout)
La méthode de factorisation d'une matrice est utilisée pour réduire le travail nécessaire pour la méthode d'élimination de Gauss quand plusieurs vecteurs b inconnues sont à considérer. Le procédé Doolittle LU est accompli en définissant les multiplicateurs d'élimination «em» déterminés dans l'étape d'élimination de la méthode d'élimination de Gauss comme les éléments de la matrice L. La matrice U est définie comme étant la matrice triangulaire supérieure déterminée par l'étape d'élimination de la méthode d'élimination de Gauss. De cette manière, de multiples vecteurs b peuvent être traités par le biais de l'étape d'élimination en utilisant la matrice L et à travers l'étape de substitution de retour à l'aide des éléments de la matrice U.
Considérons le système linéaire Ax = b. Soit la matrice A factorisée en produit de deux matrices LU. Le système linéaire devient :

$$LUx = b$$

En multipliant par L^{-1} l'égalité devienne :

$$L^{-1}LUx = L^{-1}b$$

$$Ux = L^{-1}b$$

Posant un nouveau vecteur b' tel que :

$$b' = L^{-1}b$$

$$\mathbf{Ux = b'}$$

En multipliant par L l'égalité devienne :

$$Lb' = LL^{-1}b$$

$$\mathbf{Lb' = b}$$

Pour résoudre notre système de départ Ax = b, on doit résoudre les deux sous systèmes : le premier Lb' = b, sachant que L est une matrice triangulaire inférieure. En procédant à la substitution par retour les éléments du vecteur b' seront déterminés, les inconnues du système peuvent être facilement calculées avec le deuxième système Ux = b'. La résolution de notre système de l'exemple précédent nous permettra de mieux comprendre la méthode de factorisation.
Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & \vdots & 20 \\ -20 & 40 & -20 & \vdots & 20 \\ -20 & -20 & 130 & \vdots & 20 \end{bmatrix}$$

Avec la factorisation, notre matrice A de départ est transformée en deux matrices comme suit :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad U = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix}$$

Déterminant d'abord **b'** par la résolution de :

Lb' = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$\begin{bmatrix} b'_1 = 20 \\ b'_2 = 20 - (-1/4)(20) = 25 \\ b'_3 = 20 - (-1/4)(20) - (-5/7)(25) = 300/7 \end{bmatrix}$$

Maintenant, avec le vecteur b' les inconnues du système Ux = b' se déterminent comme suit :

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 300/7 \end{bmatrix}$$

Par un remplacement par arrière le vecteur x est :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 1 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

La méthode de factorisation LU, dans un format approprié pour la programmation informatique est résumée comme suit :

1. Effectuer les mêmes étapes de la méthode d'élimination de Gauss présentée dans la section précédente. Stocker les informations de pivotement dans un vecteur d'ordre. Stocker les multiplicateurs d'élimination des lignes «em», à l'emplacement des éléments éliminés. Les résultats de cette étape sont les matrices L et U.

2. calculer le vecteur b' dans l'ordre des éléments du vecteur de commande en utilisant la substitution avant :

$$b'_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i\,k} b'_k \qquad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Avec $l_{i\,k}$ sont les éléments de matrice L.

3. calculer le vecteur x en utilisant la substitution arrière :

$$x_i = b'_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{i\,k} x_k \,/ u_{i\,i} \qquad (i = n-1, n-2, \dots, 1)$$

Avec $u_{i\,k}$ et $u_{i\,i}$ sont des éléments de la matrice U.

Finalement, la méthode de factorisation LU peut être utilisée pour la détermination de la matrice inverse. La matrice inverse est calculée colonne par colonne de manière à utiliser le vecteur unité à la place de b pour résoudre Lb' = b comme suit :
Pour un souci de comparaison, la même matrice est utilisée :

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{bmatrix}$$

Après la factorisation, on a :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad U = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix}$$

Déterminons d'abord b'_1 par la résolution de $Lb'_1 = b_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad b'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 3/7 \end{bmatrix}$$

Calculons $\mathrm{Ux} = b'_1$ afin de déterminer x_1 comme suit :

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 3/7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1 = \begin{bmatrix} 2/125 \\ 1/100 \\ 1/250 \end{bmatrix}$$

Le résultat obtenu qui est le vecteur x_1, représente la première colonne de la matrice A^{-1}. De manière identique, avec $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ donne $x_2 = \begin{bmatrix} 1/100 \\ 1/30 \\ 1/150 \end{bmatrix}$ et $b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ donne $x_3 = \begin{bmatrix} 1/250 \\ 1/150 \\ 7/750 \end{bmatrix}$

En final, A^{-1} est :

$$A^{-1} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = \begin{bmatrix} 2/125 & 1/100 & 1/250 \\ 1/100 & 1/30 & 1/150 \\ 1/250 & 1/150 & 7/750 \end{bmatrix}$$

C'est le même résultat obtenu par la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

Référence

[1] François Liret & Dominique Martinais, « Cours de mathématiques, Algèbre 1ère année », 2003, Dunod.

[2] Joe D. Hoffman, « Numerical Methods for Engineers and Scientists », New York, 1992, Marcel Dekker, Inc.