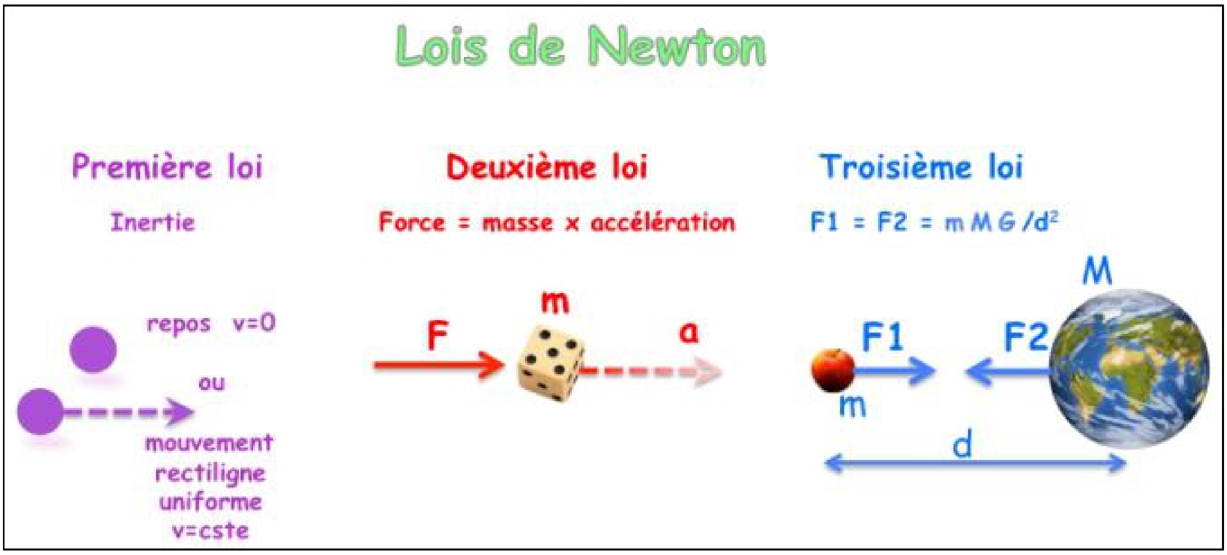
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran
FACULTÉ DE PHYSIQUE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE

Polycopié

PHYSIQUE 1 : MÉCANIQUE DU POINT
Rappels de cours & Exercices résolus



Elaboré par : **Dr. Larbi KAHAL**
Maître de conférences B, USTO

Année Universitaire : 2016/2017

Table des matières

AVANT-PROPOS

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année du système Licence-Master-Doctorat (L.M.D), spécialité : Sciences de la Matière (SM) et Sciences et Technologie (S.T). Il comporte un rappel de cours et des exercices résolus sur les différents chapitres du module de Physique 1 (Mécanique du point). Les sujets des examens finaux, qui ont été faits entre 2007 et 2013 à l'Université des Sciences et de la Technologie (USTO) avec les corrections respectives, sont disposés.

Le rappel de cours a été introduit afin de mettre en exergue les notions de base de la Mécanique du Point permettant ainsi la compréhension des exercices de Travaux Dirigés. Tous les exercices de mécanique du point qui sont abordés en Travaux Dirigés le long d'une dizaine d'années sont regroupés dans ce fascicule. En plus des exercices avec solutions détaillées, d'autres exercices sans solution sont également proposés.

Les exercices proposés couvrent les quatre chapitres de cours de la mécanique du point (*programme enseigné*) :

- Chap. 1 : Rappels mathématiques,
- Chap. 2 : Cinématique du point,
- Chap. 3 : Dynamique du point,
- Chap. 4 : Travail et énergie dans le cas d'un point matériel.

L'ensemble des exercices et examens résolus devrait permettre aux étudiants un entrainement efficace afin de faciliter la compréhension de cours et de consolider leurs connaissances. Comme pour tous les exercices autocorrectifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel.

Je souhaite que ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du point matériel puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

Tout commentaire, proposition ou critique constructive permettant l'amélioration des textes ainsi élaborés sera recueillie avec grand intérêt.

L. KAHAL

1 Rappels mathématiques

1.1 Rappel

1.1.1 Les unités

L'étude des phénomènes physiques consiste à leurs associer des grandeurs. L'attribution à chaque valeur d'une grandeur un nombre est faite par la technique de la mesure. Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une quantité de référence de même nature prise pour unité. D'une manière générale, on admet un système composé de six unités fondamentales (système SI) comme le résume le tableau suivant :

Grandeur	Masse	Longueur	Temps	Intensité électrique	Température	Intensité lumineuse
Symbole de la grandeur	M	L	T	I	θ	J
Nom de l'unité	kilogramme	mètre	seconde	ampère	degré Kelvin	Candela
Symbole de l'unité	kg	m	s	A	$^\circ K$	Cd

Les quatre premières unités forment le système international MKSA. A l'aide de ces unités fondamentales, on peut construire les unités dérivées : surface (m^2), vitesse ($m.s^{-1}$), force ($kg.m.s^{-2}$), etc.

<u>Remarque</u> : Dans le système CGS, les unités fondamentales sont le centimètre, le gramme et la seconde.

1.1.2 Les équations aux dimensions

Une fois les unités fondamentales choisies, on détermine chaque unité dérivée par une relation.
Si une quantité physique A est mesurée en $(kg)^\alpha (m)^\beta (s)^\gamma$, sa dimension est : $[A] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$
où M : Masse, L : Longueur et T : Temps
Cette équation constitue l'équation aux dimensions de la grandeur A.

<u>Remarque</u> : une quantite physique est sans dimension si $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Grandeur	Formule de base	Equations aux dimensions
Surface	Ll	L^2
Volume	$V = Llh$	L^3
Vitesse	$v = l/t$	LT^{-1}
Accélération	$\gamma = v/t$	LT^{-2}
Force	$f = m\gamma$	ML^2T^{-2}
Quantité de mouvement	$p = mv$	MLT^{-1}

1.1.3 Calcul d'erreurs

Toute mesure est entachée d'une certaine incertitude qui peut être due :

- ▷ aux erreurs de manipulation de l'expérimentateur,
- ▷ aux imperfections de l'instrument de mesure,
- ▷ aux perturbations causées au système par la mesure, etc.

La mesure exacte est inaccessible. Le résultat d'une mesure est donné par un nombre déterminé de chiffres. La confiance dans le dernier chiffre significatif est précisée par un nombre : l'incertitude absolue Δx. Ainsi, écrire $x = x_0 \pm \Delta x$ équivaut à : $x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x$.

L'incertitude relative $\frac{\Delta x}{x_0}$ d'une mesure est le rapport de l'incertitude absolue Δx à la mesure x_0. C'est un nombre sans dimension.

Dans une manipulation, il s'agit d'apprécier les erreurs absolues commises sur chaque grandeur mesurée et ensuite, à l'aide d'un calcul, de déterminer l'erreur absolue et relative globale.

1.1.3.1 Cas d'une addition

On calcule l'erreur absolue : c'est le principe d'une dérivée simple :

$$\begin{cases} \triangleright\ si \quad X = A + B \Rightarrow dX = dA + dB \\ \triangleright\ si \quad X = A - B \Rightarrow dX = dA - dB \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta X = \Delta A + \Delta B}$$, *les erreurs s'ajoutent au pire des cas.*

1.1.3.2 Cas d'une multiplication

On calcule l'erreur relative : c'est le principe d'une dérivée logarithmique :
(dérivée de $\ln X = \frac{dX}{X}$)

▷ si $X = A.B \Rightarrow \ln X = \ln A + \ln B \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{dA}{A} + \frac{dB}{B}$

Alors : $\boxed{\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}}$.

▷ si $X = \frac{A.B}{C} \Rightarrow \ln X = \ln A + \ln B - \ln C \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{dA}{A} + \frac{dB}{B} - \frac{dC}{C}$

Alors : $\boxed{\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}}$, *les erreurs s'ajoutent au pire des cas.*

REMARQUE : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme :

$$Z = (Z_0 \pm \Delta Z)\, u$$

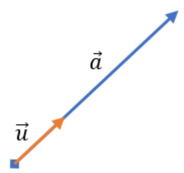
Z_0 : valeur exacte ; Z : valeur approchée ; ΔZ : incertitude absolue ; u : unité de la grandeur.

1.1.4 Les vecteurs

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.
Exemple : *le volume, la masse, l'énergie, etc.*

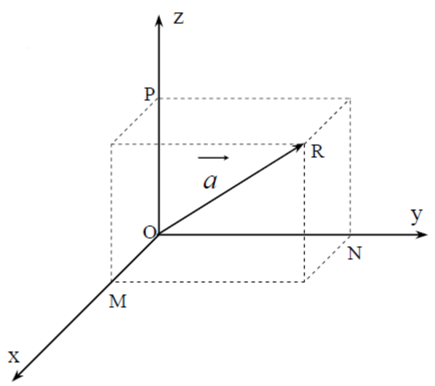
On appelle grandeur vectorielle tout grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.
Exemple : *le déplacement, la vitesse, la force, etc.*

1.1.4.1 Représentation graphique d'un vecteur et vecteur unitaire



Un vecteur est représenté par un segment orienté. $\vec{a}$: représente le vecteur (*avec ses quatre caractéristiques*). $\|\vec{a}\| = |\vec{a}| = a$: représente le module ou l'intensité du vecteur.
Le vecteur unitaire $\vec{u}$ est un vecteur de module égal à l'unité (*le nombre un*). On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme : $\vec{a} = \vec{u}\, a = a\, \vec{u}$.

1.1.4.2 Composantes d'un vecteur



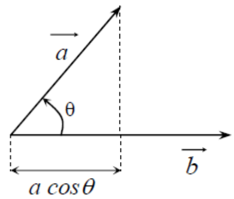
Les trois projections OM, ON, OP d'un vecteur $\vec{a}$ sur les trois axes de coordonnées Oxyz peuvent être considérées comme trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ portés respectivement par ces trois axes, dont le sens et les grandeurs sont définis par les trois nombres algébriques X, Y et Z. On montre facilement que le vecteur $\vec{a}$ est la somme des trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$.

$$\vec{a} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$$

Les trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ s'appellent les 3 composantes du vecteur $\vec{a}$.

1.1.4.3 Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, faisant entre eux l'angle θ, et représenté par la relation $m = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ (*scalaire*), la quantité :

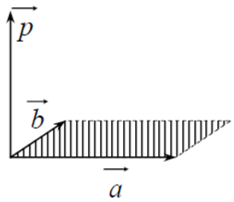


$$m = a.b.\cos\theta = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|.\cos\theta$$

Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}.\overrightarrow{a}$. On conçoit facilement d'après la définition que $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}^2 = a^2$.

1.1.4.4 Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel d'un vecteur libre $\overrightarrow{a}$ par un vecteur libre $\overrightarrow{b}$ et qu'on note : $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$, un vecteur libre $\overrightarrow{p}$, perpendiculaire au plan des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, de sens tel que le trièdre $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{p}$ soit direct et dont la grandeur est donnée par : $p = a.b.\sin\theta$.
Le module de $\overrightarrow{p}$ correspond donc à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



1.2 Exercices résolus

1.2.1 Exercice 1

Donner la dimension et les unités dans le Système International (SI) des grandeurs suivantes : 1. Longueur, 2. Temps, 3. Masse, 4. Vitesse, 5. Accélération, 6. Force, 7. Quantité du mouvement, 8. Energie (Travail), 9. Puissance, 10. Masse volumique, 11. Pression, 12. Charge électrique, 13. constante de raideur k, 14. Champ électrique E.

CORRIGÉ :

GRANDEUR	DIMENSION	UNITÉ
Longueur	L	mètre (m)
Temps	T	seconde (s)
Masse	M	kilogramme (kg)
Vitesse	$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow [v] = LT^{-1}$	m/s
Accélération	$\gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow [\gamma] = LT^{-2}$	m/s^2
Force	$F = m\gamma \Rightarrow [F] = MLT^{-2}$	Newton (N)
Quantité du mouvement	$p = mv \Rightarrow [p] = MLT^{-1}$	$kg.m/s$

Energie (Travail)	$E = FL \Rightarrow [E] = ML^2T^{-2}$	Joule (J)
Puissance	$P = \frac{E}{t} \Rightarrow [P] = ML^2T^{-3}$	Watt (w)
Masse volumique	$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = ML^{-3}$	kg/m^3
Pression	$P_r = \frac{F}{S} \Rightarrow [P_r] = ML^{-1}T^{-2}$	Pascal (Pa)
Charge électrique	$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow [q] = IT$	Coulomb (C)
Constante de raideur k	$F = kx \Rightarrow [k] = MT^{-2}$	N/m
Champ électrique E	$F = qE \Rightarrow [E] = MLI^{-1}T^{-3}$	Volt/mètre (V/m)

1.2.2 Exercice 2

⊗ La période du pendule simple est donnée par la relation suivante :

$$T = 2\pi l^{\alpha} g^{\beta}$$

l : la longueur du pendule, g : la gravitation.

1. Déterminer les constantes α, β.
2. On donne $T = (2.002 \pm 0.001)$ s, $l = (1.00 \pm 0.02)$ m. Donner l'expression de g, puis sa valeur numérique.
3. Donner l'expression de l'incertitude absolue sur g, puis sa valeur numérique.

CORRIGÉ :

1) $T = 2\pi l^{\alpha} g^{\beta} \Rightarrow [T] = [l]^{\alpha}[g]^{\beta} \Rightarrow [T] = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$

   Par superposition : $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$

   Donc : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2) $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

   A.N. : $g = 9.85 m/s^2$

3) On utilise la méthode de différentiel logarithmique :

   i) On prend le logarithme népérien de l'expression de g :

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln l - 2\ln T$$

   ii) On prend la différentielle de l'expression précédente

$$d(\ln g) = d(\ln 4\pi^2) + d(\ln l) - 2d(\ln T)$$

On trouve : $\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T}$

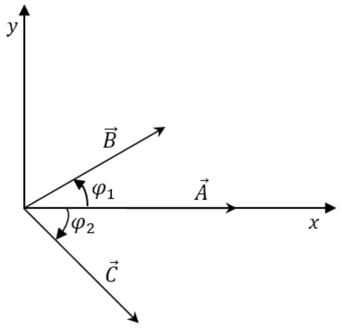
iii) On remplace par d par Δ et on prend les valeurs absolues des coefficients de Δl et ΔT car cela correspond à la valeur maximale que l'on peut avoir sur l'incertitude.

$$\Delta g = g(\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T})$$

A.N. : $\Delta g = 0.21 m/s^2$

1.2.3 Exercice 3

Soit trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ tel que $\|\vec{A}\| = 3$, $\|\vec{B}\| = \|\vec{C}\| = 2$, $\varphi_1 = (\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\varphi_2 = (\widehat{\vec{A}, \vec{C}}) = \frac{\pi}{4}$



1) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$.
2) Déterminer $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$ et $\vec{B} + \vec{C}$, en donnant les composantes, le module et la représentation graphique.
3) Déterminer de deux façons $\vec{A}.\vec{B}$.
4) Déterminer $\vec{A}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}\wedge\vec{C}$, $\vec{C}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$, $\vec{B}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{C})$.
5) Déterminer l'aire formée par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

<u>CORRIGÉ :</u>

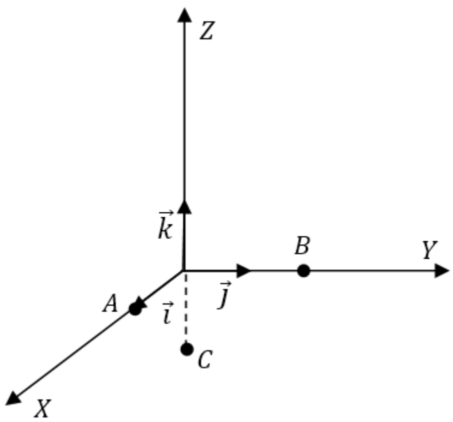
1) Les composantes : $\vec{A} = 3\vec{i}$, $\vec{B} = \|\vec{B}\|(\cos\varphi_1 \vec{i} + \sin\varphi_1 \vec{j}) = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$
$\vec{C} = \|\vec{C}\|(\cos\varphi_2 \vec{i} - \sin\varphi_2 \vec{j}) = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$
2) $\vec{A} + \vec{B} = 4\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$, $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{19}$; $\vec{A} - \vec{B} = 2\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$, $\|\vec{A} - \vec{B}\| = \sqrt{7}$
$\vec{B} + \vec{C} = (1 + \sqrt{2})\vec{i} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\vec{j}$; $\|\vec{B} + \vec{C}\| = \sqrt{8 + 2\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}$
3) Première méthode : $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\varphi_1 = 3$
Deuxième méthode : $\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 3$
4) $\vec{A}\wedge\vec{B} == \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{3}\vec{k}$. Suivant la même procédure, on obtient : $\vec{A}\wedge\vec{C} = -3\sqrt{2}\vec{k}$
$\vec{B}\wedge\vec{C} = -(\sqrt{2} + \sqrt{6})\vec{k}$, $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 0$, $\vec{B}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{C}) = -3\sqrt{6}\vec{i} + 3\sqrt{2}\vec{j}$
5) L'aire formée par $\vec{A}$ et $\vec{B}$: $Air = \frac{|\vec{A}\wedge\vec{B}|}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

1.2.4 Exercice 4

On donne les points $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,-1)$

1) Représenter les pointes A, B et C.
2) Déterminer les composantes du vecteur $(\overrightarrow{AB})$, en déduire son module.
3) Déterminer les cosinus directeurs de vecteur $\overrightarrow{AB}$, quelle relation importantes vérifiant ils ?
4) Déterminer les composantes du vecteur unitaire porté par le vecteur $(\overrightarrow{AB})$, quelles sont ses particularités ?
5) Déterminer les composantes du vecteur $(\overrightarrow{BC})$, en déduire son module.
6) Déterminer l'angle formé entre les vecteurs $(\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{BC})$.

<u>CORRIGÉ :</u>



1) Représentation des pointes A, B et C
2) Le vecteur $(\overrightarrow{AB})$ et son module
   $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$
   $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5}$
3) Les cosinus directeurs de $(\overrightarrow{AB})$
   $$\begin{cases} \cos\theta_x = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{i}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta_y = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{j}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta_z = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{k}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 0 \end{cases}$$
   La relation entre les cosinus directeurs est :
   $$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$
4) Le vecteur unitaire porté par $(\overrightarrow{AB})$
   $$\overrightarrow{U}_{\overrightarrow{AB}} + \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}}{\sqrt{5}}$$
   Les particularités de $\overrightarrow{U}_{\overrightarrow{AB}}$:
   $$\begin{cases} \|\overrightarrow{U}_{\overrightarrow{AB}}\| = 1 \\ \overrightarrow{U}_{\overrightarrow{AB}} \text{ a le même sens et direction que } (\overrightarrow{AB}) \end{cases}$$
5) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$; $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{5}$

6) L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{-4}{5}$$

1.3 Exercices supplémentaires sans solution

1.3.1 Exercice 5

On donne :

$$L = F[\frac{1}{k} - \frac{1}{M\omega^2}]$$

où L désigne une longueur, k une constante de raideur, M une masse et ω une pulsation.

1) Vérifier l'homogénéité de l'expression précédente.
2) On donne ΔF, Δk, ΔM et $\Delta\omega$ en déduire l'incertitude absolue ΔL.

1.3.2 Exercice 6

La masse volumique ρ d'un cylindre de masse m, de rayon R et de longueur l est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

1) En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes x et y.
2) En déduire l'expression exacte de la masse volumique ρ.

1.3.3 Exercice 7

On donne : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, en déduire l'angle θ formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \Lambda \overrightarrow{v}$, en déduire l'angle β formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
3) Déterminer l'aire formée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1.3.4 Exercice 8

On donne les vecteurs suivants : $\overrightarrow{w} = \frac{3\overrightarrow{k}}{t^2+9}$, $\overrightarrow{v} = \frac{t\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$ et $\overrightarrow{u} = \frac{3\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$.

1) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires.
2) Calculer $\frac{d\vec{u}}{dt}$, $\frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{w}\Lambda\vec{u}$ et $\vec{w}\Lambda\vec{v}$.

2 Cinématique du point

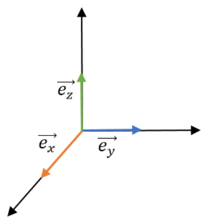
2.1 Rappel

La cinématique est l'étude des mouvements sans se préoccuper des causes responsables de ces mouvements (*comme les forces par exemple, etc.*). Le point matériel est tout corps matériel dont les dimensions son théoriquement nulles et pratiquement négligeables par rapport à la distance parcourue. L'état de mouvement ou de repos d'un corps sont deux notions essentiellement relatives : par exemple une montagne est au repos par rapport à la terre mais en mouvement par rapport à un observateur qui regarde la terre de loin et pour lequel le globe terrestre est en perpétuel mouvement.

Le mouvement ne peut se définir que par rapport à un référentiel (*ou un repère*).

L'étude du mouvement s'effectue selon l'une des deux formes :

- vectorielle–en utilisant les vecteurs : position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\overrightarrow{v}$, et accélération $\overrightarrow{a}$.
- algébrique–en définissant l'équation du mouvement suivant une trajectoire donnée.



⇝ *Référentiel*–solide par rapport auquel on décrit le mouvement d'un objet.

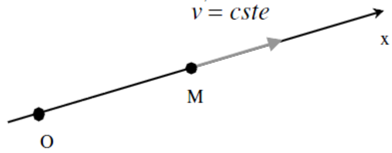
⇝ *Repère*–base orthonormée directe qui définit trois directions et une origine du repère. Le repère peut être cartésien $(O; \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$, polaire, cylindrique, et sphériques. Le temps s'écoule de la même façon dans tout le référentiel.

2.1.1 Mouvement rectiligne

2.1.1.1 Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement d'un point matériel est dit rectiligne uniforme si le point matériel se déplace à vecteur vitesse constant.

$\boxed{\text{Mouvement rectiligne uniforme} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}}$



Le vecteur vitesse étant constant, le mouvement est rectiligne car la vitesse est tangente à la trajectoire. La droite sur laquelle le point se déplace est assimilée à l'axe des x.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x = C\vec{u}_x \Rightarrow \dot{x} = C$$

ce qui conduit à l'équation horaire suivante :

$$x = Ct + x_0$$

2.1.1.2 Mouvement uniformément varié

Un mouvement est dit rectiligne uniformément varié si le vecteur accélération est constant et la trajectoire rectiligne.

$\boxed{\text{Mouvement rectiligne uniformément varié} \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{cste} \text{ et trajectoire rectiligne.}}$

Si le mouvement est rectiligne, il est commode de se fixer comme axe du mouvement l'axe des x. On aura donc :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$$

et

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x = C\vec{u}_x$$

Par intégration de cette équation nous obtenons la vitesse du point M :

$$v = \dot{x} = Ct + B$$

ce qui, par une nouvelle intégration, conduit à l'équation horaire du mouvement :

$$x = \frac{1}{2}Ct^2 + Bt + D$$

Les constantes B et D qui sont apparues dans les deux intégrations successives, sont déterminées par les conditions initiales du mouvement du point M. Ainsi, si le point M à une vitesse nulle et est en $x = x_0$ à $t = 0$, les constantes B et D deviennent $B = 0$ et $D = x_0$ et l'équation horaire du mouvement s'écrit alors :

$$x = \frac{1}{2}Ct^2 + x_0$$

Remarques. Le mouvement est uniformément accéléré si la norme du vecteur vitesse est une fonction croissante de t, soit v^2 fonction croissante. La dérivée de v^2 doit donc être positive. La condition sera :

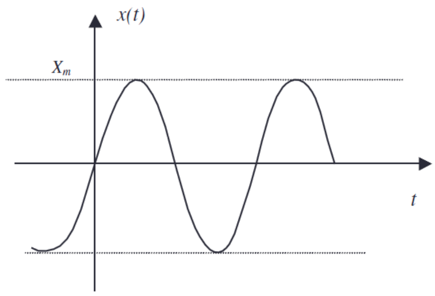
$$\frac{dv^2}{dt^2} > 0 \Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} > 0$$

L'étude du signe du produit de la vitesse par l'accélération permettra de préciser si le mouvement est *accéléré* ($\dot{x}.\ddot{x} > 0$) ou *retardé* ($\dot{x}.\ddot{x} < 0$).

Avoir un vecteur accélération constant ne suffit pas pour dire que le mouvement est rectiligne. Il faut aussi que le vecteur vitesse ait la même direction que le vecteur accélération. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement parabolique.

2.1.1.3 Mouvement rectiligne sinusoïdal

Le mouvement d'un point M est dit rectiligne sinusoïdal si, se produisant sur un axe Ox, l'abscisse x du point M s'écrit :



$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Le terme $\omega t+\varphi$ est appelé phase à l'instant t avec φ la phase à l'origine des dates ($t = 0$). Le terme X_m correspond à l'amplitude du mouvement, x variant sinusoïdalement de $-X_m$ à X_m comme le montre la figure ci-dessus. La vitesse a pour expression :

$$v = \dot{x} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

et l'accélération :

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

L'équation différentielle du mouvement est donc :

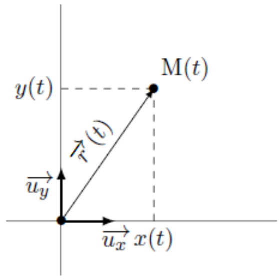
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Cette équation correspond à l'équation différentielle du second ordre d'un oscillateur harmonique.

2.1.2 Mouvement dans le plan

2.1.2.1 Coordonnées cartésiennes

Considérons un point M en mouvement dans un plan muni d'un repère cartésien d'origine O et de base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont fixes par rapport au référentiel d'étude $\Re$.



Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$

Les vecteurs unitaires étant fixes dans $\Re$:

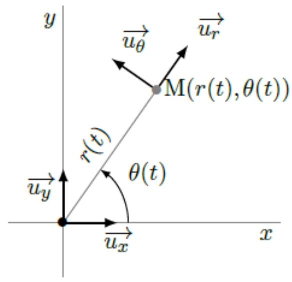
$$\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \frac{d\vec{u}_y}{dt} = 0$$

Finalement, les composantes de la vitesse sont simplement les dérivées temporelles des coordonnées de M. Si l'on note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ on a :

$$\vec{v}_M = \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = v_x \\ \dot{y}(t) = v_y \end{array} \right.$$

2.1.2.2 Coordonnées polaires

Dans le plan on peut aussi repérer un point à l'aide d'une distance et d'un angle. Dans le système polaire on définit :



$$r(t) = OM \ et \ \theta(t) = \widehat{\vec{u}_x, \vec{r}}$$

On associe à ces coordonnées deux vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$. Ces deux vecteurs forment une base orthonomée. Ainsi le vecteur position s'écrit dans la base polaire :

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t) \Rightarrow \vec{v}_M = \dot{r}(t)\vec{u}_r(t) + r(t)\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt}$$

La base cartésienne étant fixe dans $\Re$, la base polaire ne l'est donc pas. Or la direction $\vec{u}_r$ dépend du temps par l'intermédiaire de l'angle $\theta(t)$. Par conséquent, on a :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

La dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle qui définit sa direction s'obtient en utilisant la règle suivante :

À savoir
La dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle qui définit sa direction, est le vecteur unitaire qui lui est **directement** perpendiculaire.

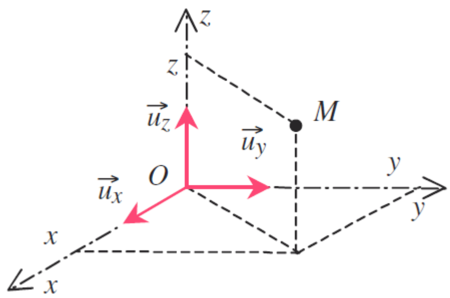
Lorsque l'on effectue une rotation dans le sens direct de $\pi/2$ du vecteur $\vec{u}_r$, on obtient $\vec{u}_\theta$. Ainsi

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \Rightarrow \vec{v}_M = \left| \begin{array}{l} \dot{r}(t) = v_r \\ r(t)\dot{\theta}(t) = v_\theta \end{array} \right.$$

2.1.3 Mouvement dans l'espace

2.1.3.1 Coordonnées cartésiennes

L'étude du mouvement dans l'espace nécessite 3 axes (Ox, Oy, Oz). À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée.



Il est pratique de positionner le point M en se donnant le vecteur position $(\overrightarrow{OM})$. Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ correspondent alors aux coordonnées du point M :

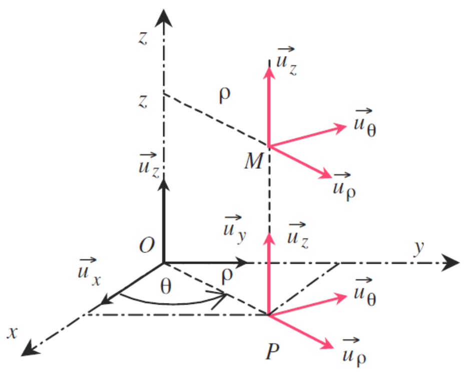
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

(x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du point M.
(x, y, z) sont aussi les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

2.1.3.2 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques correspondent aux coordonnées polaires dans le plan (O, x, y) auxquelles on ajoute une coordonnée z suivant un axe perpendiculaire au plan. La base associée est donc composée de la base tournante $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ et du vecteur $\vec{u}_z$ (3ème vecteur de la base cartésienne) qui est un vecteur "fixe" dans le référentiel d'étude.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit sous la forme :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho \vec{u}_\rho + z\vec{u}_z \\ ||\overrightarrow{OM}|| = OM &= \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

Les coordonnées cylindriques de M sont donc (ρ, θ, z). Le point M est situé sur un cylindre d'axe Oz, de rayon ρ d'où le terme coordonnées cylindriques. Pour positionner un point sur le cylindre, il suffit de préciser la cote z et la coordonnée angulaire θ.
Le vecteur vitesse s'écrit :

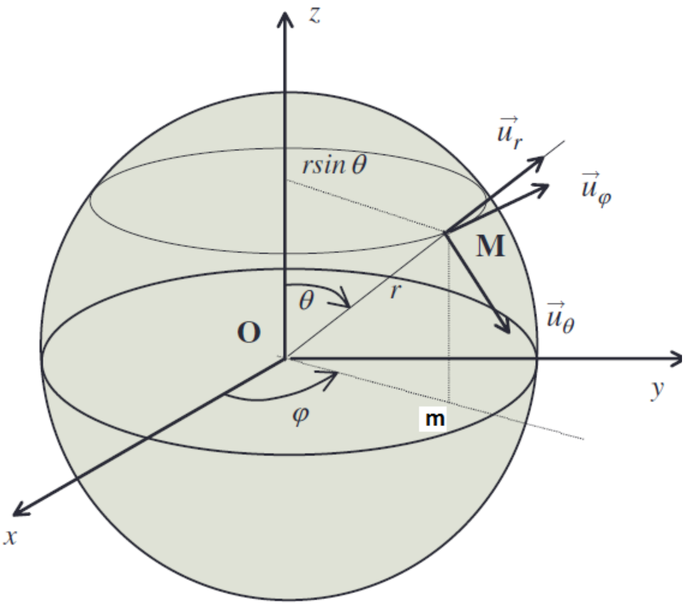
$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

La valeur v de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur :

$$||\vec{v}|| = v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

2.1.3.3 Coordonnées sphériques

Les coordonnées cylindriques ne sont pas très pratiques pour caractériser un point sur une sphère qui est le lieu où tous les points sont à égale distance d'un centre C. Pour cela, on préférera utiliser les coordonnées sphériques.



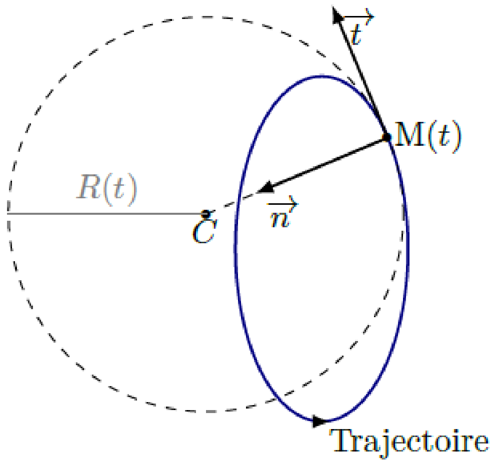
Les coordonnées sphériques du point M sont r, θ, φ tel que : $r = ||\overrightarrow{OM}||$, $\theta = (\widehat{\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}})$, et $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}})$.
Le vecteur position est : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. On note $\vec{u}_\varphi$ le vecteur unitaire formant un angle de $+\frac{\pi}{2}$ avec $(\overrightarrow{Om})$. Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et tel que le repère $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est orthonormé direct. Par convention, les deux angles θ et φ ont des intervalles de variation précis : $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Le vecteur vitesse s'écrit sous la forme : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$.

2.1.3.4 Base de Frenet

Le repère de Frenet a pour origine le point $M(t)$ et pour base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$. Cette base mobile est construite de la façon suivante :

1. on définit arbitrairement, un sens positif le long de la trajectoire ;
2. le vecteur unitaire $\vec{t}$, dit vecteur *tangent* est, comme son nom l'indique, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens positif ;
3. le vecteur unitaire $\vec{n}$, dit *vecteur normal*, est quant à lui perpendiculaire à $\vec{t}$ et orienté vers le centre du cercle localement tangent à la trajectoire dit *cercle osculateur* représenté en tiret sur la figure ci-contre.



M est la position du point matériel à l'instant t et M$'$ celle pour l'instant $t + \Delta t$. Quand $\Delta t \to 0$, la corde qui relie les points M et M$'$ tend vers la longueur d'arc $\widehat{MM'}$ de sorte que

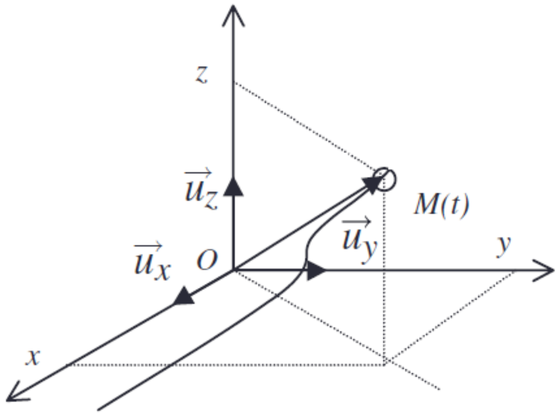
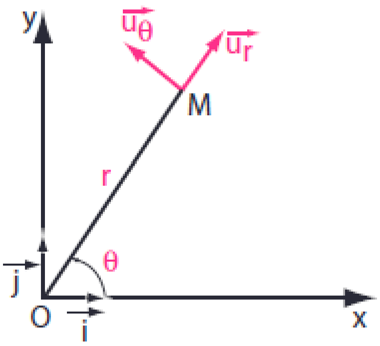
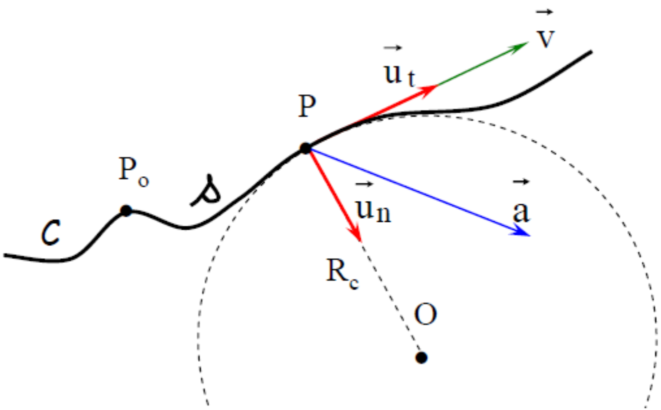
$$\vec{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t}\vec{t}$$

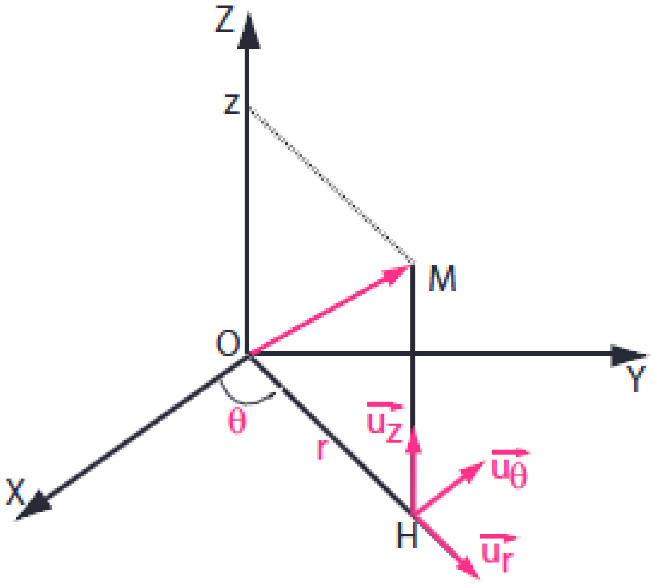
On retiendra que la donnée de l'abscisse curviligne $s(t)$ ainsi que la trajectoire permet de connaitre la position du point M, la direction du vecteur tangent ainsi que le vecteur vitesse *via*

$$\vec{v}_M = \frac{ds}{dt}\vec{t}$$

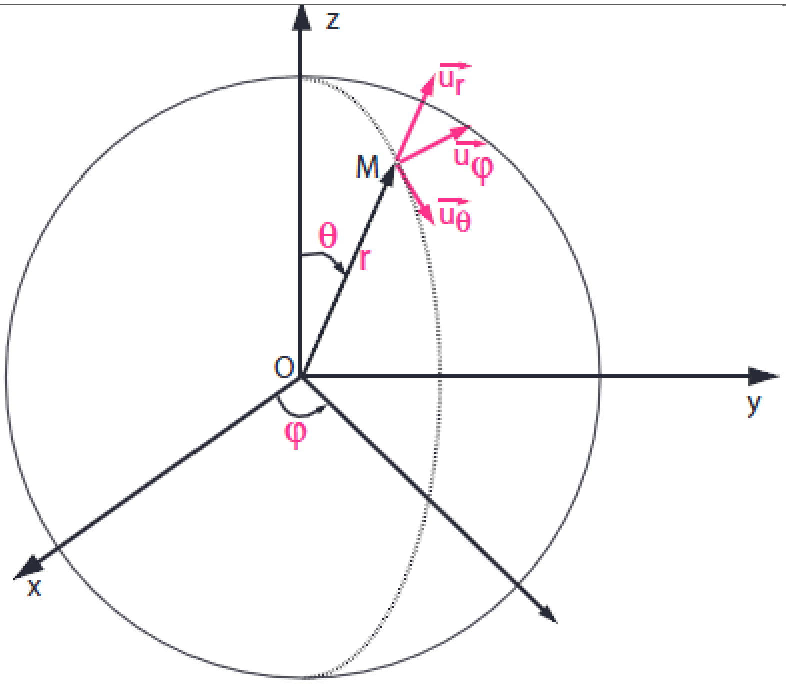
2.1.4 Etude du mouvement dans différents systèmes

Dans un repère donné, les mêmes vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ peuvent s'exprimer différemment suivant le choix du système de coordonnées et de la base. Nous présentons dans le tableau suivant le récapitulatif des expressions que nous avons introduites précédemment.

<table>
<tr><th>Coordonnées</th><th>Position $\overrightarrow{OM}$</th><th>Vitesse $\vec{v}_M$</th><th>Accélération $\vec{a}_M$</th></tr>
<tr><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td>Cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$</td><td>$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$</td><td>$\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$</td><td>$\ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$</td></tr>
<tr><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td>Polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$</td><td>$r\vec{u}_r$</td><td>$\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$</td><td>$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$</td></tr>
<tr><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td>Base de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$</td><td>$s = \widehat{P_0P}$</td><td>$\dot{s}\vec{u}_t = v\vec{u}_t$</td><td>$\frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R_c}\vec{u}_n$</td></tr>
</table>



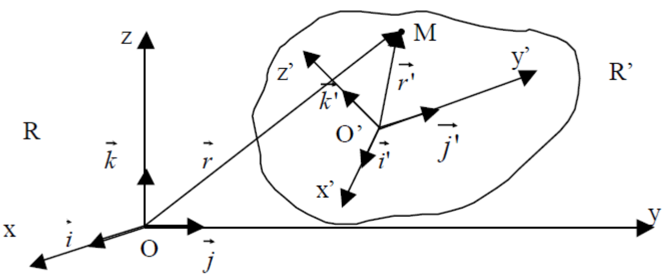
Cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	$r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$	$\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$



Sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	$r\vec{u}_r$	$\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2)\vec{u}_\theta + (2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\vec{u}_\varphi$

2.1.5 Mouvement relatif

Soient $R(O,x,y,z)$ un repère absolu et $R'(O',x',y',z')$ un repère relatif.
Les vecteurs position de la particule M dans les repères R et R' sont, respectivement $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et $\overrightarrow{O'M} = \vec{r}'$.
On peut écrire :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$



2.1.5.1 Les vitesses

Soit $\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_R$ la vitesse absolue et $\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|_{R'}$ la vitesse relative.
La relation entre les deux vitesses : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ vitesse d'entrainement. Ω est le vecteur rotation du repère R' par rapport au repère R.

2.1.5.2 Les accélérations

Soit $\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}|_R$ l'accélération absolue et $\vec{a}_r = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}|_{R'}$ l'accélération relative, on a :
$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ avec :

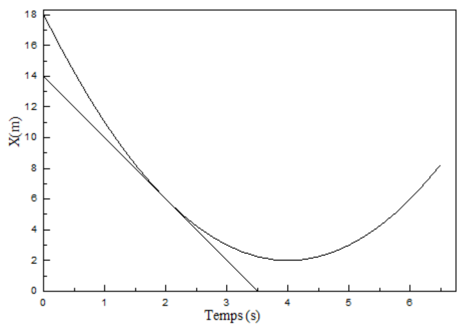
$$\begin{cases} \vec{a}_e = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) & \looparrowright \text{accélération d'entrainement} \\ \\ \vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r & \rightsquigarrow \text{accélération de Coriolis} \end{cases}$$

2.2 Exercices résolus

2.2.1 Exercice 1

Le diagramme position-temps d'un mobile se déplaçant le long d'un axe est donné sur le schéma ci-contre.

1) Trouver la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $t = 1$ s et $t = 2$ s.
2) Déterminer la vitesse à l'instant $t = 2$ s en calculant la ponte de la droite indiqué sur le schéma.
3) A quel instant la vitesse s'annule, décrire le mouvement du mobile à cet instant.



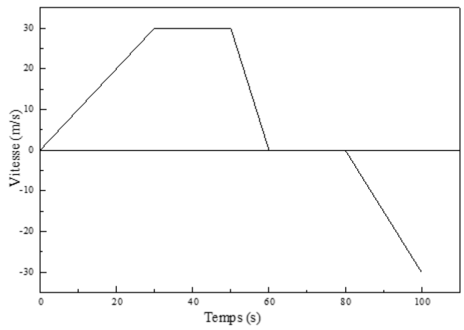
CORRIGÉ :

1) La vitesse moyenne entre les instants 1 s et 2 s :
$$\begin{cases} t_1 = 1\,\text{s}, x_1 = 11\,\text{m} \\ t_2 = 2\,\text{s}, x_2 = 6\,\text{m} \end{cases} \Rightarrow v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = -5\,\text{m/s}$$
2) La vitesse instantanée à l'instant t=2 s : $v_{inst} = \tan\alpha = \frac{0-11}{3.5-0} = -3.14\,\text{m/s}$
3) La vitesse s'annule à t=4 s. A cet instant, le mobile s'arrête, puis il change sa direction.

2.2.2 Exercice 2

Un véhicule se déplace sur un trajet rectiligne. Sa vitesse est caractérisée par le diagramme ci-contre.
Indiquer sur les cinq intervalles du temps :

1) La valeur algébrique de l'accélération a.
2) L'expression de la vitesse $v(t)$, on utilise au début de chaque phase, un repère du temps.
3) La nature du mouvement.

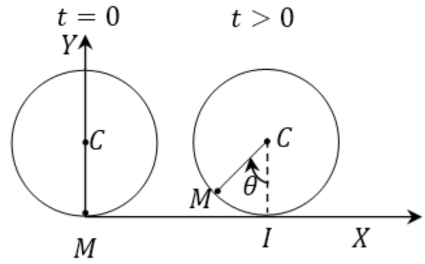


CORRIGÉ :

1) $0 < t < 30$ s, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1\,\text{m/s}^2$, $v = at + v_0$
A t=0 s, v=0 m/s $\Rightarrow v_0 = 0$. Donc : $v = t$. Le mouvement est uniformiment accéléré.
2) $30 < t < 50$ s, $a = 0\,\text{m/s}^2$, $v = 30\,\text{m/s}$. Le mouvement est uniforme.
3) $50 < t < 60$ s, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3 m/s^2$, $v = at + v_0$
A t=0 s, v = 30 m/s $\Rightarrow v_0 = 30$. Donc : $v = -3t + 30$. Le mouvement est uniformiment retardé.
4) $60 < t < 80$ s, a=0 m/s^2, $v = 0$ m/s. Le mobile est au repos.
5) $80 < t < 100$ s, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-3}{2}\,\text{m/s}^2$, $v = at + v_0$
A t=0 s, v=0 m/s $\Rightarrow v_0 = 0$. Donc : $v = \frac{-3}{2} t$. Le mouvement est uniformiment accéléré.

2.2.3 Exercice 3

Une roue de rayon R roule sans glisser sur un axe horizontale ox. Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle θ que fait un rayon fixé de la roue avec sa position initiale à $t = 0$ s.



1) Quelle sont, à l'instant t, les coordonnés cartésiennes du point M de la roue qui était initialement en contact avec le sol ?
2) Calculer en fonction de R et θ les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{\gamma}$ du point M.
3) Donner les valeurs de $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ au moment où M retouche le sol.
4) On suppose maintenant que le mouvement du centre de la roue est rectiligne uniforme à la vitesse v_0. Montrer que $\vec{\gamma}$ est centripète vers O et calculer son module en fonction de v_0 et R.

<u>AN</u> : Calculer cette accélération dans le cas d'un point périphérique d'un pneu d'une voiture roulant à 130 km/h sur une autoroute (R=35 cm), interpréter ce résultat.

<u>CORRIGÉ :</u>

1) Les coordonnés cartésiennes du point M :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CM}=R\theta\,\vec{i}+R\,\vec{j}+R(-\sin\theta\,\vec{i}-\cos\theta\,\vec{j})=R(\theta-\sin\theta)\,\vec{i}+R(1-\cos\theta)\,\vec{j}$$

2) Les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{\gamma}$ du point M :

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=R\dot{\theta}[(1-\cos\theta)\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}]$$

$$\gamma=\frac{d\vec{v}}{dt}=[R\ddot{\theta}(1-\cos\theta)+R\dot{\theta}^2\sin\theta]\,\vec{i}+[R\ddot{\theta}\sin\theta+R\dot{\theta}^2\cos\theta]\,\vec{j}$$

3) M retouche le sol pour y=0 $\Rightarrow \theta=2k\pi$. $\vec{v}=\vec{0}$ et $\gamma=R\dot{\theta}^2\,\vec{j}$
4) Mouvement de centre du roue est uniforme : $\dot{\theta}=\frac{v_0}{R}\Rightarrow\ddot{\theta}=0$

$$\gamma=R\dot{\theta}^2[\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}]=\frac{v_0^2}{R}[\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}]$$

$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{CM}}{\|CM}\|=-(\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j})$. Donc : $\vec{\gamma}=-\frac{v_0^2}{R}\vec{u}\Rightarrow\vec{\gamma}$ est centripète vers C. $\|\vec{\gamma}\|=\frac{v_0^2}{R}$
A.N. : v_0=130 km/h=36.1 m/s. $\|\vec{\gamma}\|$=3725.5 m/s^2. *A grande vitesse, les pneus d'un véhicule sont soumis à une grande force, donc à une forte pression.*

2.2.4 Exercice 4

Un point matériel M, décrit une trajectoire suivant : $r = 2a\cos\theta$ avec $\theta = \omega t$ (a, ω étant constants).

1) Déterminer la vitesse et l'accélération de M, dans le système des coordonnés polaires. Dé-terminer leurs normes.
2) Déterminer le rayon de courbure ρ. Quelle est la nature de la trajectoire de M.
3) Déterminer la vitesse et l'accélération de M dans le système de Frenet, ainsi que leurs normes.
4) Monter que le centre de courbure C est donnée par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}.\frac{d}{dt}(\frac{\vec{v}}{v})$. Déterminer alors C.
5) Déterminer la vitesse et l'accélération de M, dans le système des coordonné cartésiennes, ainsi que leurs normes.
6) Représenter la vitesse et l'accélération de M dans le système de Frenet et dans système des coordonnés polaires.

CORRIGÉ :

1) La vitesse et l'accélération de M, dans le système des coordonnés polaires :
$\overrightarrow{OM} = 2a\cos\theta\vec{u}_r$
$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = 2a\omega(-\sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta)$, $\|\vec{v}\| = 2a\omega$
$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -4a\omega^2(\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta)$, $\|\vec{\gamma}\| = 4a\omega^2$
2) Le rayon de courbure : $\rho = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v}\wedge\vec{\gamma}\|} = a = const$. Donc, la trajectoire de M est un cercle.
3) La vitesse et l'accélération dans le système de Frenet :
$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}_t = 2a\omega\vec{u}_t$
$\vec{\gamma} = \gamma_t\vec{u}_t + \gamma_n\vec{u}_n$, $\gamma_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$, $\gamma_n = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho} = 4a\omega^2$. Donc : $\vec{\gamma} = 4a\omega^2\vec{u}_n$
4) Le centre de courbure :

$$\overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d}{dt}(\frac{\vec{v}}{v}) = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\left[\frac{v\vec{\gamma} - v\vec{u}_t\frac{dv}{dt}}{v^2}\right]$$
$$= \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\left[\frac{v.(\frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n) - v\vec{u}_t\frac{dv}{dt}}{v^2}\right]$$

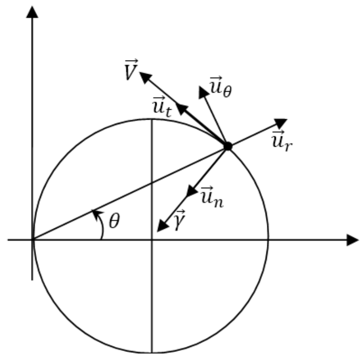
$$\overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d}{dt}(\frac{\vec{v}}{v}) = \overrightarrow{OM} + \rho\vec{u}_n = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d}{dt}(\frac{\overrightarrow{v}}{v}) = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\left[\frac{d}{dt}(-\sin\theta\overrightarrow{u}_r + \cos\theta\overrightarrow{u}_\theta)\right] = a\left[\cos\theta\overrightarrow{u}_r - \sin\theta\overrightarrow{u}_\theta\right]$

$\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{i} \Rightarrow C(a,0)$

5) La vitesse et l'accélération de M, dans le système des coordonné cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 2a\cos^2\theta \\ y = r\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$



$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{i} + \dot{y}\overrightarrow{j} = 2a\omega[-\sin 2\theta\overrightarrow{i} + \cos 2\theta\overrightarrow{i}],\ \|\overrightarrow{v}\| = 2a\omega$

$\overrightarrow{\gamma} = \ddot{x}\overrightarrow{i} + \ddot{y}\overrightarrow{j} = -4a\omega^2[\cos 2\theta\overrightarrow{i} + \sin 2\theta\overrightarrow{i}],\ \|\overrightarrow{\gamma}\| = 4a\omega^2$

6) Représentation de la vitesse et de l'accélération :

2.2.5 Exercice 5

Le mouvement d'un point matériel est décrit dans le système de coordonnées cylindriques par $r = R$, $\theta = \omega t$, $z = at$ avec R, ω, a sont des constants.

$\rightsquigarrow$ Déterminer le vecteur vitesse, le vecteur accélération et le rayon de courbure.

<u>CORRIGÉ :</u>

Dans le le système de coordonnées cylindriques, la vitesse et l'accélération sont données par les relation suivantes :

$\twoheadrightarrow$ $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{k} = R\omega\overrightarrow{u}_\theta + a\overrightarrow{k}$

$\rightarrowtail$ $\overrightarrow{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{k} = -R\omega^2\overrightarrow{u}_r$

$\looparrowright$ $\rho = \frac{\|\overrightarrow{v}\|^3}{\overrightarrow{\gamma}\wedge\overrightarrow{v}} = \frac{(R^2\omega^2+a^2)^{3/2}}{\sqrt{R^4\omega^6+a^2R^2\omega^4}}$

2.2.6 Exercice 6

Dans le système des coordonnées sphériques $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$, un point M se déplace sur la surface d'une sphère de rayon R. Ses deux coordonnées sphériques sont :

$$\theta = (\widehat{\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{6},\ \varphi = \omega t^2, \qquad \omega \text{ constante positive.}$$

1) Trouver la vitesse et l'accélération de M dans la base sphérique. Calculer les modules de la vitesse et de l'accélération, en déduire l'accélération normale.

2) Trouver la vitesse et l'accélération de M dans le système coordonnées cartésiennes. Vérifier leurs normes.

CORRIGÉ :

1) Dans le système des coordonnées sphériques, la vitesse est donnée par la relation suivante :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{u}_\varphi$$

$$\begin{cases} r = R \Rightarrow \dot{r} = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \\ \varphi = \omega t^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = 2\omega t \end{cases} \looparrowright \vec{v} = R\omega t\vec{u}_\varphi, \ \|\vec{v}\| = R\omega t$$

Le vecteur accélération :

$$\begin{cases} \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega\vec{u}_\varphi + R\omega t\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}[\sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta] \end{cases} \looparrowright \vec{\gamma} = R\omega\vec{u}_\varphi - R\omega t\dot{\varphi}[\sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta]$$

$$\vec{\gamma} = -R\omega^2 t^2\vec{u}_r - \sqrt{3}R\omega^2 t^2\vec{u}_\theta + R\omega\vec{u}_\varphi$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{R^2\omega^4 t^4 + 3R^2\omega^4 t^4 + R^2\omega^2} = R\omega\sqrt{4\omega^2 t^4 + 1}$$

L'accélération normale :

$$\begin{cases} \gamma_n = \sqrt{\|\vec{\gamma}\|^2 - \gamma_t^2} \\ \gamma_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = R\omega \end{cases} \Rightarrow \gamma_n = 2R\omega^2 t^2$$

2) Dans le système des coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}R\cos\omega t^2\vec{i} + \frac{1}{2}R\sin\omega t^2\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}R\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = -R\omega t\sin\omega t^2\vec{i} + R\omega t\cos\omega t^2\vec{j}$$

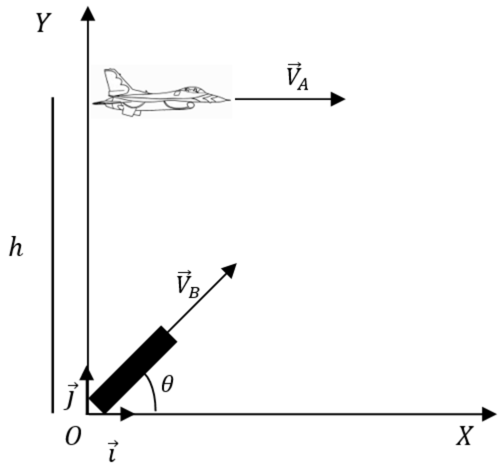
$$\vec{\gamma} = \dot{\vec{v}} = [-R\omega\sin\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\cos\omega t^2]\vec{i} + [R\omega\cos\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\sin\omega t^2]\vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = R\omega t, \ \|\vec{\gamma}\| = R\omega\sqrt{4\omega^4 t^4 + 1}$$

2.2.7 Exercice 7

Un avion vole avec une vitesse $\vec{v}_A$(vA parallèle à Ox) et dans le même temps, un missile est tiré de O, avec une vitesse $\vec{v}_B$ et $\theta = (\widehat{\vec{v}_B, \vec{i}})$. On considère qu'au temps t=0, les coordonnées de l'avion sont x_A=0 et $y_A = h$.

1) Déterminer la vitesse relative de l'avion par rapport au missile ($\overrightarrow{v}_{AB}$).
2) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{v}_{AB}$. En déduire la position de l'avion par rapport au missile.
3) Quelle doit être la relation entre v_A et v_B pour que le missile atteigne sa cible ?



CORRIGÉ :

1) A partir de l'énoncé, on distingue : Avion : point matériel, Missile : repère mobile, Terre : repère fixe.

   Donc : $\overrightarrow{v}_A$ est la vitesse absolue, $\overrightarrow{v}_B$ est la vitesse d'entrainement. La vitesse de l'avion par apport au missile est la vitesse relative :

$$\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{v}_A - \overrightarrow{v}_B = (v_A - v_B \cos\theta)\,\overrightarrow{i} - v_B \sin\theta\,\overrightarrow{j}$$

2) La position de l'avion par apport au missile :

   $\overrightarrow{v}_r = \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{r'} = \int \overrightarrow{v}_r dt$

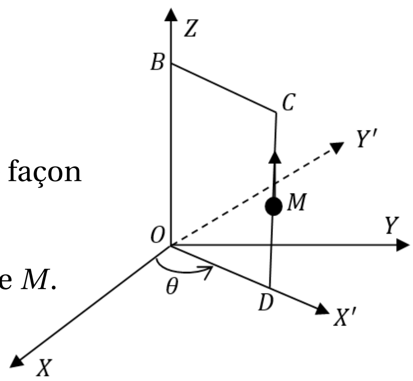
   $\overrightarrow{r'} = [(v_A - v_B \cos\theta)\,t + c_x]\,\overrightarrow{i} + [-v_B \sin\theta\, t + c_y]\,\overrightarrow{j}$

   A t=0, on a : x'=0, $y' = h$. On trouve : $\overrightarrow{r'} = [(v_A - v_B \cos\theta)\,t]\,\overrightarrow{i} + [-v_B \sin\theta\, t + h]\,\overrightarrow{j}$

3) Le missile atteigne sa cible si $\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{0}$: $(v_A - v_B \cos\theta) = 0 \Rightarrow v_A = v_B \cos\theta$

2.2.8 Exercice 8

Un carrée $OBCD$ de coté a tourne autour de son coté OB à la vitesse angulaire ω constante. Un point matériel M se déplace suivant DC à partir de D avec une vitesse constante v.



1) Calculer la vitesse absolu et l'accélération absolu de M de façon directe.
2) Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entraînement de M. En déduire sa vitesse absolue.
3) Déterminer la l'accélération relative, l'accélération d'entraînement, l'accélération de Coriolis M. En déduire son accélération absolue.

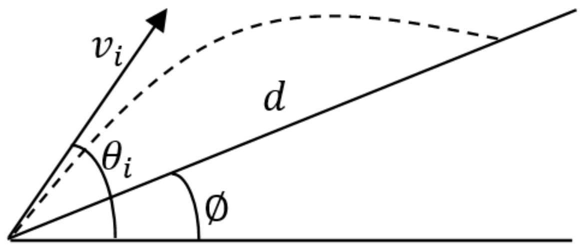
CORRIGÉ :

1) Calcul de $\overrightarrow{v}_a$, $\overrightarrow{\gamma}_a$ de façon directe :
   Le vecteur de position par rapport au repère absolu : $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{i'} + vt\overrightarrow{k'}$
   $\overrightarrow{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a\omega\overrightarrow{j'} + v\overrightarrow{k'}$, $\quad \overrightarrow{\gamma}_a = \frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt} = -a\omega^2\overrightarrow{i'}$
2) Calcul de $\overrightarrow{v}_r$, $\overrightarrow{v}_e$, puis $\overrightarrow{v}_a$:
   $\overrightarrow{O'M} = a\overrightarrow{i'} + vt\overrightarrow{k'}$, $\overrightarrow{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = v\overrightarrow{k'}$
   $\overrightarrow{v}_e = \dot{\overrightarrow{OO'}} + \overrightarrow{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \omega\overrightarrow{k'}\Lambda(a\overrightarrow{i'} + vt\overrightarrow{k'}) = a\omega\overrightarrow{j'}$
3) Calcul de $\overrightarrow{\gamma}_r$, $\overrightarrow{\gamma}_e$, puis $\overrightarrow{\gamma}_a$
   $\overrightarrow{\gamma}_r = \frac{d\overrightarrow{v}_r}{dt} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{\gamma}_e = \ddot{\overrightarrow{OO'}} + \overrightarrow{\omega}\Lambda(\overrightarrow{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \dot{\overrightarrow{\omega}}\Lambda\overrightarrow{O'M} = -a\omega^2\overrightarrow{i'}$
   $\overrightarrow{\gamma}_c = 2\overrightarrow{\omega}\Lambda\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{\gamma}_a = \overrightarrow{\gamma}_e = -a\omega^2\overrightarrow{i'}$

2.3 Exercices supplémentaires sans solution

2.3.1 Exercice 9

Un projectile est lancé sur un plan incliné d'un angle Ø avec une vitesse initiale v_i faisant un angle θ_i avec l'horizon.



1) Monter que le projectile parcourt une distance d sur le plan incliné donné par :

$$d = \frac{2v_i^2\cos\theta_i\sin(\theta_i - Ø)}{a\cos^2(Ø)}$$

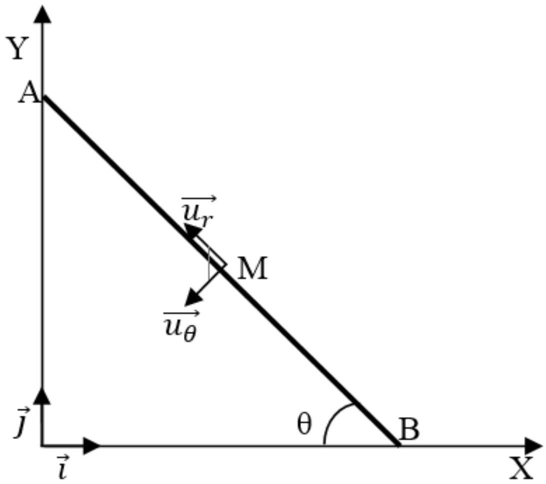
2) Pour quelle valeur θ_i, la distance d est-elle maximale ? quelle est cette valeur de d.

2.3.2 Exercice 10

Une échelle homogène $(A\mathrm{B})$ de longueur $2a$ s'appuie en A sur un mur vertical et en B sur le sol horizontal. Le pied B de l'échelle s'éloigne du mur et on considère le point M milieu de l'échelle.

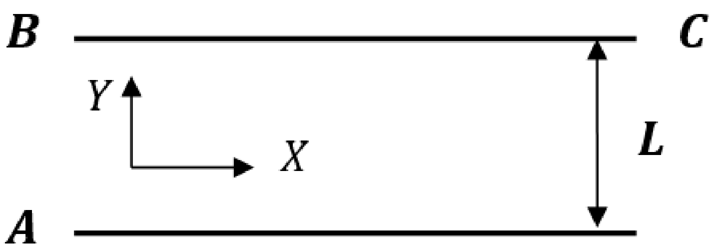
1) Monter que les coordonnées de M sont : $x_m = a\cos\theta$, $y_m = a\sin\theta$.
2) Déterminer la trajectoire de M.

3) Déterminer la vitesse et l'accélération de M dans le système des coordonnes cartésiennes (OXY). Déterminer leurs normes.
4) Déterminer la vitesse et l'accélération de M dans le système des coordonnes polaires d'origine $B(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Vérifier leurs normes.
5) En déduire le rayon de courbure.
6) Déterminer la vitesse et l'accélération de M dans le système de coordonnes intrinsèques (repère de Frenet). Vérifier leurs normes.



2.3.3 Exercice 11

Un nageur se propose de traverser une rivière de 100 m de largeur L. Sa vitesse dans l'eau est de 1.2 m/s. Le flux d'eau qui est parallèle à BC a une vitesse de 1 m/s. Soit θ l'angle entre sa vitesse dans l'eau et la vitesse du courant. Le nageur a le choix entre :



i) nager de manière que sa vitesse absolue soit parallèle à AB.

ii) nager perpendiculairement au courant.

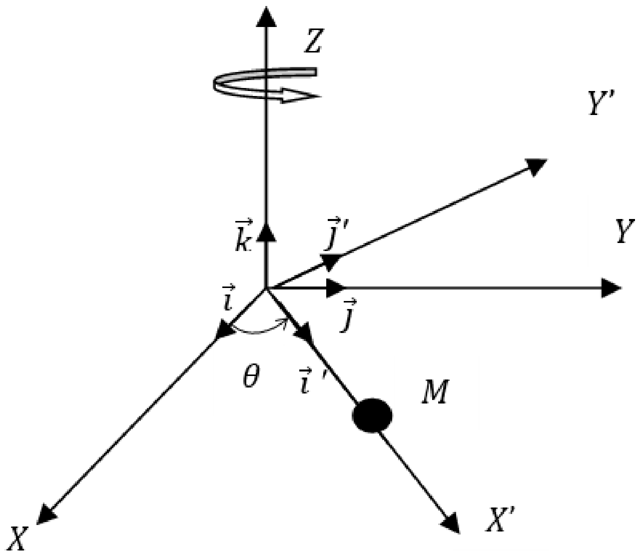
Exprimer dans les deux cas :

1) Les composantes de sa vitesse absolue.
2) Les coordonnées de M par rapport à un repère lié au sol (On donne à t=0, x=0, y=0).
3) Le temps du trajet (dans le premier cas si $\|\vec{v}_e\| > \|\vec{v}_r\|$ le nageur peut il traverser la rivière).
4) Déterminer la position d'arrivée.

2.3.4 Exercice 12

Soit un référentiel $R(Oxy)$ fixe et un référentiel $R'(Ox'y')$ mobile de bases respectives $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i'}, \vec{j'})$. R' tourne par rapport à R autour de l'axe OZ perpendiculairement au plan Oxy avec une vitesse angulaire ω constante. Un point M est mobile sur l'axe Ox' suivant la loi $\overrightarrow{OM} = ae^{\theta}\,\overrightarrow{i'}$ avec a constante et $\theta = \omega t$.

1) Déterminer la vitesse absolue et l'accélération absolue de M de façon directe.
2) Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entrainement de M. En déduire sa vitesse absolue.
3) Déterminer l'accélération relative et l'accélération de d'entrainement et l'accélération de Coriolis. En déduire son accélération absolue.



3 Dynamique du point

3.1 Rappel

La dynamique relie le mouvement d'un point matériel à ses causes. Les causes du mouvement d'un corps sont appelées les efforts mécaniques ou actions ou **forces**. La force est une grandeur vectorielle.

3.1.1 Le principe d'inertie et les référentiels galiléens

Le principe d'inertie fut énoncé par Isaac Newton et on l'appelle aussi première loi de Newton : Lorsqu'un corps est soumis à des forces qui se compensent ou à aucune force alors il est soit au repos soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Réciproquement si un corps est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme alors il n'est soumis à aucune force ou à des forces qui se compensent.

Le principe d'inertie n'est vérifié que dans des référentiels dits galiléens. Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour des mouvements de courte durée par rapport à la rotation terrestre. Tout autre référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre peut aussi être considéré comme galiléen.

3.1.2 Le principe de conservation de la quantité de mouvement

La quantité du mouvement d'un point matériel est définie par : $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$.

La conservation de la quantité de mouvement désigne, dans un référentiel inertiel, l'absence de variation de la quantité de mouvement du centre d'inertie d'un système dans certaines situations physiques : *on parle alors d'un système isolé.*
Exemple : dans un référentiel inertiel, et en l'absence de frottement, un système de corps soumis à aucune force extérieure mais entrant en collision les uns avec les autres. Mathématiquement, la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ est conservée lorsque sa variation instantanée est nulle :

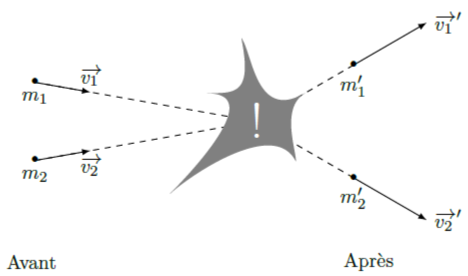
$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{0}$$

Ce principe est équivalent au principe d'inertie, mais fait intervenir la masse des corps (par définition $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$), ce qui permet d'introduire la notion de force (par définition $\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = m.\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$) dans le cas où le mouvement n'est pas rectiligne uniforme.

La conservation de la quantité de mouvement peut intervenir lors d'une collision entre deux ou plusieurs objets ou particules. Lorsqu'il y a conservation, l'addition vectorielle des quantités de mouvement de chaque corps faisant partie du milieu conserve la même valeur avant et après la collision. En ayant recours à ce principe, il n'est pas nécessaire de connaitre les forces qui ont lieu lors de la collision.

3.1.3 Définition, applications : choc élastique, choc inélastique

On dit qu'il y a collision ou choc entre deux ou plusieurs particules quand ces objets subissent une interaction mutuelle de courte durée et de courte portée. Le choc est localisé dans le temps et l'espace. En règle générale, les forces d'interaction sont négligeables quand les particules sont suffisamment éloignées. On peut donc distinguer un *avant* et un *après* la collision.



3.1.3.1 Collisions élastiques

Une collision élastique est une collision qui prend place lorsque la somme des énergies cinétiques après la collision est égale à la somme des énergies cinétiques avant la collision. C'est une collision qui respecte le principe de conservation de l'énergie.

3.1.3.2 Collisions inélastiques

Une collision inélastique est une collision qui prend place lorsque la somme des énergies cinétiques après la collision est différente de la somme des énergies cinétiques avant la collision. Ceci pourrait prendre place avec des balles de tennis. Une partie de l'énergie cinétique initiale sera transformée en énergie potentielle lors de la déformation de la balle, ce qui explique la variation négative de l'énergie cinétique du système.

3.1.4 Définition newtonienne de la force (3 lois de Newton)

Les trois principes de la dynamique (les lois de Newton) sont :

3.1.4.1 Principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen, un corps isolé (*qui n'est soumis à aucune force*), est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme. Ce qui est équivalent au principe de conservation de la quantité de mouvement en absence de force : $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{cte}$.

3.1.4.2 Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces qui s'exercent sur un corps est égale au produit de sa masse par son vecteur accélération.

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$$

ou en introduisant la quantité de mouvement :

$$\sum \overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

3.1.4.3 Principe d'action et de réaction

La force exercée par un premier corps sur un deuxième corps est égale et opposée à la force exercée par le deuxième sur le premier :

$$\overrightarrow{F}_{AB} = -\overrightarrow{F}_{BA}$$

Ce qui est équivalent au principe de conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\overrightarrow{p}_A + \overrightarrow{p}_B = \overrightarrow{cte}$$

Moment cinétique d'un point matériel

Le moment cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$, par rapport au point O est défini par :

$$\overrightarrow{L}_0 = \overrightarrow{OM} \Lambda m\overrightarrow{v}$$

Moment d'une force

Le moment d'une force appliquée à un point matériel situé au point M, par rapport au point fixe O est défini par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Théorème de la variation du moment cinétique

La variation du moment cinétique est égale au moment de la résultante des forces par rapport au point fixe O.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\vec{F})$$

Dans le cas d'une force centrale : $\overrightarrow{OM} // \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0}$ d'où : $\vec{L}_0 = \overrightarrow{cte}$

3.1.5 Quelques lois de force

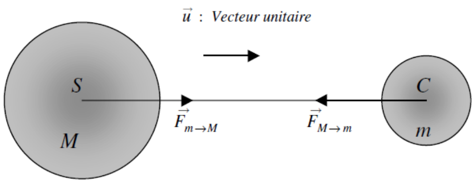
3.1.5.1 Loi de force

La loi de force (*ou loi des influences mutuelles*) : cette loi montre clairement l'expression de la force (la résultante) appliquée à un point matériel dans une situation bien définie. Par exemple, l'expression $\vec{p} = m\vec{g}$ est la loi de force qui définit le poids d'un corps au voisinage de la terre et qui nous permet de prédire le mouvement de n'importe quel corps dans le champ de pesanteur terrestre.

3.1.5.2 Les forces

3.1.5.2.1 Force de gravitation newtonienne On appelle force de gravitation ou force d'interaction gravitationnelle, la force exercée par une masse M sur une autre masse m. Cette force est de la forme :

$$\vec{F}_{M\to m} = -G\frac{mM}{SC^2}\vec{u}$$



G appelée constante d'interaction gravitationnelle. Cette constante est universelle et vaut $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.

Un cas important est celui où la masse M est la masse de la Terre et où m est la masse d'un corps au voisinage de la surface de la Terre, la force de Newton représente le poids de la masse m au voisinage de la Terre. Cette force peut s'écrire :

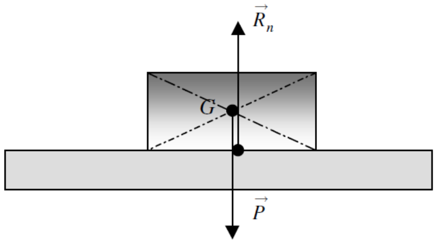
$$\overrightarrow{F}_{M\rightarrow m} = m\overrightarrow{g}$$

Par conséquent, l'intensité du champ de pesanteur g_0 vaut alors :

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

$M = 5.98 \times 10^{24}$ kg étant la masse de la terre. R étant le rayon terrestre (6.37×10^6 m). L'application numérique donne : g_0=9.8 m/s^2.

3.1.5.2.2 Réaction du support La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance du support s'appelle réaction du support.



La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette action par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.

L'objet subit, de la part de l'extérieur, deux forces : son poids $\overrightarrow{P}$, appliqué au centre d'inertie G, et la réaction du support $\overrightarrow{R}_n$. L'objet étant en équilibre, on a :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_n = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{p} = -\overrightarrow{R}_n$$

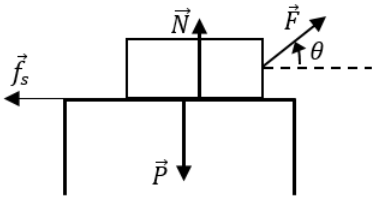
3.1.5.2.3 Force de frottement Chaque fois qu'il y a contact entre deux surfaces rugueuses de deux corps solides, une résistance apparait alors et s'oppose au mouvement relatif des deux corps. Il existe plusieurs types de frottements :

- ⊕ Les frottements entre les corps solides qui peuvent être statique et dynamique.
- ⊖ Les frottements dans les fluides.

FORCE DE FROTTEMENT STATIQUE : La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en état de repos même en présence d'une force extérieure.

Cas d'un corps posé sur un plan horizontal : Le corps de la figure ci-après est soumis à quatre forces.

Soit $\vec{f}_s$ la force de frottement statique. $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont respectivement le poids et la force de réaction. Pour que le corps posé sur la table se met en mouvement il faut lui appliquée une force minimale $\vec{F}$. Le corps est au repos : $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$. En projetant sur les deux axes horizontal et vertical, on obtient :



$$\begin{cases} N + F.\sin\theta - P & = 0 \\ F.\cos\theta - f_s & = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f_s = F.\cos\theta}$$

FORCE DE FROTTEMENT CINÉTIQUE : La force de frottement cinétique est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface rugueuse. Son intensité est donnée par la formule :

$$f_s = \mu_c.N$$

où μ_c est le coefficient de frottement cinétique.

LES FROTTEMENTS DANS LES FLUIDES : Quand un corps solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide) avec une faible vitesse relative, une force de frottement apparaît. Elle se calcule par la formule :

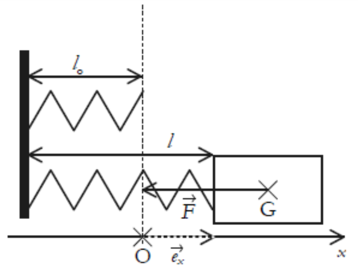
$$\vec{f}_f = -K\eta.\vec{v}$$

K est un coefficient qui dépend de la force du corps solide en mouvement dans le fluide. η est un coefficient qui dépend des frottements internes dans le fluide (*c'est-à-dire les frottements entre les différentes couches qui sont en mouvement avec différentes vitesses*). Le frottement interne au fluide s'appelle la viscosité, et c'est pour cette raison que η s'appelle le coefficient de viscosité.

3.1.5.2.4 Force élastique Un ressort de masse négligeable, de longueur à vide l_0 et de raideur k exerce sur un point matériel une force de rappel proportionnelle à son allongement l.

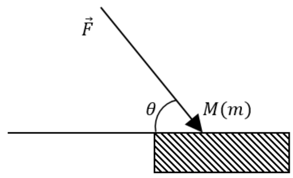
$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$$

F est la force de rappel (N), l_0 la longueur à vide (m), k la raideur du ressort (N.m^{-1}), l l'allongement du ressort (m).



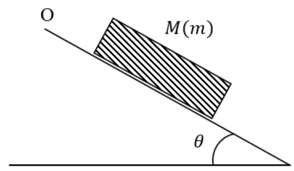
3.2 Exercices résolus

3.2.1 Exercice 1



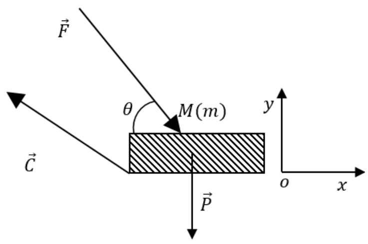
Un corps M de masse m de 25 kg est poussée par une force F de 400 N initialement au repos, le corps atteint une vitesse de 2 m/s après 4 s $[\theta = 50°]$.

1) Déterminer la force de frottement.
2) Déterminer la force de contact corps-sol.
3) Déterminer le coefficient de glissement du corps sur le sol.
4) Le corps M de masse m glisse maintenant sur un plan incliné (d'inclinaison θ), M commence son mouvement de O, et on considère qu'il n'existe pas de frottement. Déterminer l'accélération de M.



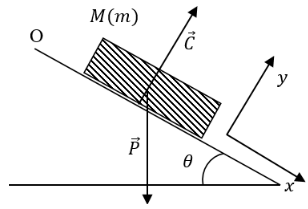
5) Même question que 4, mais maintenant on considère qu'il y a des frottements, on donne le coefficient de frottement μ. En déduire l'expression de la force de contact entre M et le sol.
6) On considère maintenant qu'il n'existe pas de frottement mais une résistance de l'air s'exerce sur M d'expression $f = mkv$, où k est une constante et v désigne la vitesse de M. Déterminer la vitesse de M. On suppose que à t=0 , v=0 et x=0.

<u>CORRIGÉ :</u>



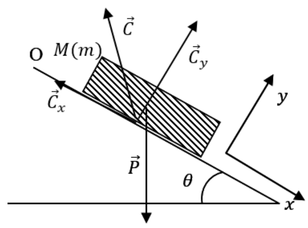
1) La force de frottement
   L'accélération est donnée par la formule suivante : $\gamma = \frac{v}{t} = 0.5$ m/s
   On applique le principe fondamental sur la masse M : $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma} \Rightarrow \overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{C} = m\overrightarrow{\gamma}$
   Projection sur ox : $F\cos\theta - C_x = m\gamma$
   Projection sur oy : $-F\sin\theta + C_y - mg = 0$
   On aura donc :

$$\begin{cases} C_x = F\cos\theta - m\gamma = 244.6 \text{ N} \\ C_y = F\sin\theta + mg = 556.4 \text{ N} \end{cases}$$

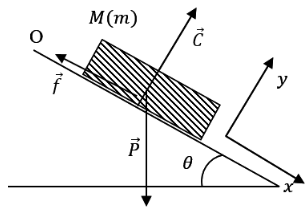


2) La force de contact : $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 607.8$ N
3) Le coefficient de glissement : $\mu = \frac{C_x}{C_y} = 0.44$
4) L'accélération de M : $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma} \Rightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{C} = m\overrightarrow{\gamma}$
   Projection sur ox : $mg\sin\theta = m\gamma \Rightarrow \gamma = g\sin\theta$
5) La force de contact : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{C} = m\overrightarrow{\gamma}$

Projection sur ox : $mg\sin\theta - C_x = m\gamma$
Projection sur oy : $C_y - mg\cos\theta = 0$
on a : $\mu = \frac{C_x}{C_y} \Rightarrow \gamma = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$
$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = mg\cos\theta\sqrt{1+\mu^2}$

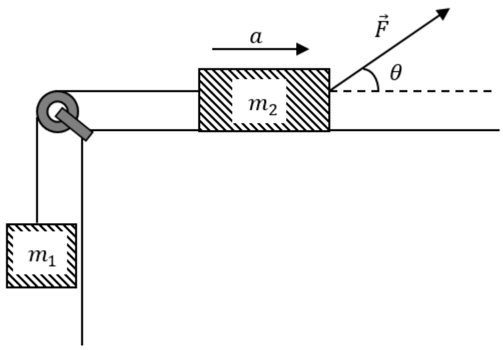


6) La vitesse de M :
$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma} \Rightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{f} = m\overrightarrow{\gamma}$
Projection sur ox : $mg\sin\theta - f = m\gamma$
$mg\sin\theta - mkv = m\gamma \Rightarrow \frac{dv}{-kv + g\sin\theta} = dt$
Alors : $v = \frac{g\sin\theta}{k}(1 - e^{-kt})$



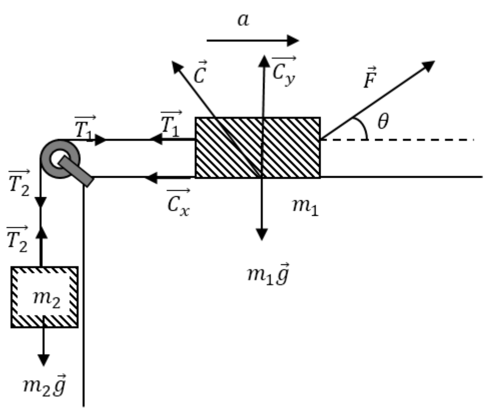
3.2.2 Exercice 2

Un bloc de masse m_1 assimilé à un point matériel peut glisser sur une surface horizontale avec un coefficient de frottement cinétique μ_C une de ces extrémités est reliée par un fil inextensible et de masse négligeable passant à travers une poulie de masse négligeable reliée à une deuxième masse m_2. On applique une force de module F et faisant un angle θ avec l'horizontale. Trouver les accélérations des deux masses.



<u>CORRIGÉ :</u>

On applique le principe fondamental de la dynamique sur les masses m_1 et m_2 :



$$\sum \overrightarrow{F} = m_1 \overrightarrow{\gamma} \Rightarrow m_1 \overrightarrow{g} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{T}_1 = m_1 \overrightarrow{\gamma} \tag{3.1}$$

$$\sum \overrightarrow{F} = m_2 \overrightarrow{\gamma} \Rightarrow m_2 \overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}_2 = m_2 \overrightarrow{\gamma} \tag{3.2}$$

La poulie de masse négligeable $\Rightarrow \overrightarrow{T}_1 = \overrightarrow{T}_2$

La projection des équations (3.1) et (3.2) sur la direction de mouvement donne :

$$-C_x + F\cos\theta - T_1 = m_1\gamma \tag{3.3}$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 \gamma \tag{3.4}$$

La projection de l'équation (3.1) sur direction perpendiculaire au mouvement donne :

$C_y = m_1 g$

$$\mu_C = \frac{C_x}{C_y} \Rightarrow C_x = \mu_C m_1 g \tag{3.5}$$

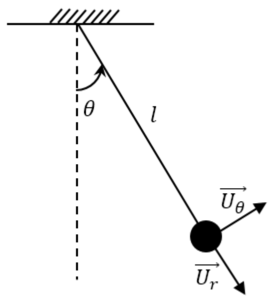
Sommons les équations (3.3) et (3.4) en considérant que $T_1 = T_2$ et l'équation (3.5), on obtient :

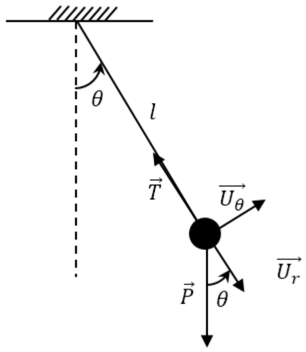
$$\gamma = \frac{F\cos\theta - g(m_2 + \mu_C m_1)}{m_1 + m_2}$$

3.2.3 Exercice 3

On écarte de sa position d'équilibre une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur l. On repère la position de la masse m par l'angle θ entre la verticale et la direction du fil. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant :

1) Le principe fondamental de la dynamique (utiliser le système des coordonnées polaires).
2) Le théorème du moment cinétique.





<u>CORRIGÉ :</u>

1) La masse est soumise à la tension du fil $\overrightarrow{T}$ et à son poids $\overrightarrow{P}$
   L'accélération en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta$$

$$r = l = cste \Rightarrow \dot{r} = 0 \text{ et } \ddot{r} = 0$$

$$\overrightarrow{\gamma} = l\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + l\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

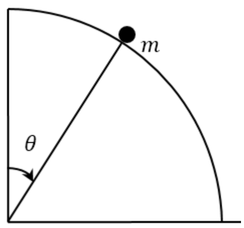
On applique le principe fondamental de la dynamique dans le système de coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{\gamma}$$

Projection sur $\overrightarrow{u}_r$: $-T + mg\cos\theta = -ml\dot{\theta}^2$
Projection sur $\overrightarrow{u}_\theta$: $-mgl\sin\theta = ml\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

2) Théorème du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}}$
Le moment cinétique : $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v}$
La vitesse en coordonnées polaires : $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$, $r = l = cte \Rightarrow \overrightarrow{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$. On trouve : $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{u}_r + ml\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{k}$. Alors : $\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{k}$
La somme des moments des forces : $\sum\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{T}}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\overrightarrow{P} = l\overrightarrow{u}_r\Lambda(P\cos\theta)\overrightarrow{u}_r - P\sin\theta\overrightarrow{u}_\theta) = -mlg\sin\theta\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{T}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\overrightarrow{T} = l\overrightarrow{u}_r\Lambda(-r\overrightarrow{u}_r) = \overrightarrow{0}$
On applique le théorème du moment cinétique, on trouve :
$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{T}} \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

3.2.4 Exercice 4



Un corps de masse m glisse sans frottement sur une surface circulaire de rayon a, le corps m est lancée sans vitesse initiale du point A.

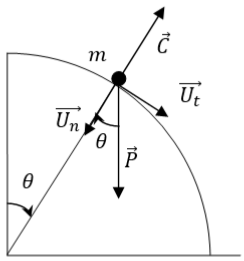
1) On utilise le principe fondamental, monter que :

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta\ (i)\ \ ;\ \ \frac{v^2}{a} = -\frac{C}{m} + g\cos\theta\ (ii)$$

où v désigne la vitesse de m, et C la force de contact entre m et la surface.

2) On utilise le théorème de moment cinétique, retrouver (i).
3) Déterminer l'expression de v et de C.
4) La masse m peut-elle quitter la surface ?

CORRIGÉ :



1) L'accélération dans le système de Frenet : $\overrightarrow{\gamma} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u}_t + \frac{v^2}{a}\overrightarrow{u}_n$

On applique le principe fondamental de la dynamique dans le système de Frenet :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{C} = m\overrightarrow{\gamma}$$

La projection sur $\overrightarrow{u}_t$ donne :

$$mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

La projection sur $\overrightarrow{u}_n$ donne :

$$-C + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{a} \Rightarrow \frac{v^2}{a} = -\frac{C}{m} + g\cos\theta$$

2) Théorème du moment cinétique :

$$\overrightarrow{OM} = -a\overrightarrow{u}_n \Rightarrow \overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v} = -amv\overrightarrow{k} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = -am\frac{dv}{dt}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\overrightarrow{P}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\overrightarrow{P} = -amg\sin\theta\overrightarrow{k}\ ;\ \overrightarrow{\mathscr{M}}_{\overrightarrow{C}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\overrightarrow{C} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_{\overrightarrow{P}} + \overrightarrow{\mathscr{M}}_{\overrightarrow{C}} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

3) v et de C en fonction de θ, m, g :

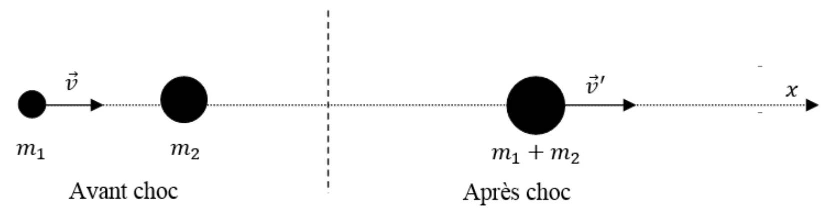
$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta \Rightarrow v\frac{dv}{dt} = vg\sin\theta \Rightarrow v = \sqrt{2ag(1-\cos\theta)}$. Ce qui donne ensuite :

$C = mg(3\cos\theta - 2)$

4) m quitte la surface si $C = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.19°$

3.2.5 Exercice 5

Supposons qu'une particule de masse m_1 se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$, heurte une cible immobile de masse m_2, puis qu'elle se lie à elle. On parle alors de choc inélastique. Après la collision, l'ensemble se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v'}$. Quelle est alors la perte d'énergie ?



CORRIGÉ :

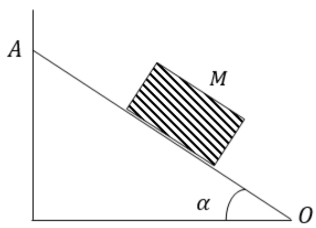
Les lois de conservation s'écrivent :

$$m_1 \overrightarrow{v} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v'} \;\; et \;\; \frac{1}{2} m v^2 + Q = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2$$

On trouve alors : $v' = \frac{m_1}{m_1+m_2} v$, $Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} v^2$

3.3 Exercices supplémentaires sans solution

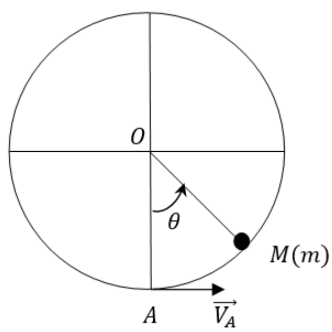
3.3.1 Exercice 6



1) a) Un point matériel M de masse m glisse sans rouler le long d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale.
   On suppose qu'il n'y a pas de frottements. A t=0, M est immobile au sommet A du plan incliné.
   b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) à la masse m.
   c) Déterminer la vitesse de M.
   d) Déterminer la distance parcourue par M après un temps t.
2) On considère maintenant que, en plus des forces déterminées dans la partie (1), M est soumis à une force de frottement solide avec coefficient constant μ. Répondre aux questions a, b et c de la partie (1) précédente.

3.3.2 Exercice 7

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur une surface circulaire de rayon a, de centre O, la masse m est lancé de A avec une vitesse initiale v_A.



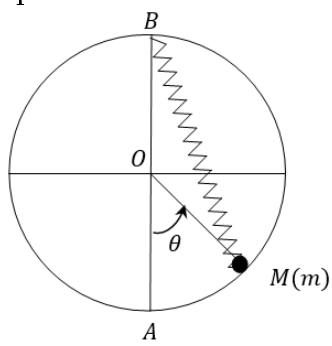
1) En utilisons le principe fondamental de la dynamique. Montrer qu'au point M :

$$a\ddot{\theta} = -g \sin\theta \;\; (i) \;\; \text{et} \;\; ma\dot{\theta}^2 = C - mg\cos\theta \;\; (ii)$$

   C étant la force de contact masse-surface.
2) Retrouver (i) en utilisant le théorème du moment cinétique.
3) Déduire le caractère sinusoïdal des petites oscillations de m au voisinage de A et donner l'expression de leur période.

4) Déterminer l'expression de la vitesse et la force de contact C au point M.

5) On désigne par θ_v l'angle annulant la vitesse et θ_C l'angle annulant la force de contact C, déterminer $\cos\theta_v$ et $\cos\theta_C$.
Tracer sur le même graphe $\cos\theta_v = f(v_A^2)$ et $\cos\theta_C = f(v_A^2)$.
En déduire les différents mouvements possibles de M.



6) La masse m, toujours mobile sans frottement sur la surface circulaire de rayon a, est attaché à un ressort de raideur k au point B, de longueur à vide l. Déterminer la tension du ressort, en déduire que le mouvement de m obéit à l'équation différentielle suivante :

$$ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + k\sin(\frac{\theta}{2})[2a\cos\frac{\theta}{2} - l]$$

4 Travail et énergie dans le cas d'un point matériel

4.1 Rappel

4.1.1 Travail d'une force

Le travail élémentaire d'une force appliquée à un point matériel dans son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ est :

$$dW = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}$$

Le travail totale d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point matériel pour un déplacement entre deux points A et B est :

$$W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}$$

4.1.2 Force conservative

Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend pas de chemin suivi.

Toute force conservative dérive d'une énergie potentielle E_p : [1]

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$$

Si une force dérive d'une énergie potentielle, son travail est égal et opposé à la variation de l'énergie potentielle pendant le trajet :

$$W_{AB} = -\Delta E_p$$

1. L'opérateur $\overrightarrow{grad}$ (noté aussi $\overrightarrow{\nabla}$) associe à la fonction scalaire f un vecteur :

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

4.1.3 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

4.1.4 Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux positions A et B est égal au travail de la force qui lui est appliquée entre ces deux positions.

$$W_{AB} = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)$$

4.1.5 Energie potentielle

⊠ Energie potentielle élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

⊟ Energie potentielle de pesanteur :

$$E_p = +mgz$$

si l'axe Oz est orienté vers le haut.

⊡ Energie potentielle gravitationnelle de la masse m dans le champ créé par une masse M :

$$E_p = \frac{-GMm}{r}$$

Toutes ces quantités sont définies à une constante près.

4.1.6 Energie mécanique (totale)

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme des énergies cinétique et potentielle.

$$E_m = E_C + E_p$$

4.1.7 Théorème de l'énergie potentielle

Si une force dérive d'une énergie potentielle (*force conservative*), son travail entre deux positions A et B est égal et opposé à la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions.

$$W_{AB} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

4.1.8 Principe de conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique (*totale*) d'un point matériel soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle, est conservée.

$$\begin{cases} (E_C + E_p)_{\text{au point } A} & = (E_C + E_p)_{\text{au point } B} = cte \\ ou & \Delta E_m = 0 \end{cases}$$

4.1.9 Forces non conservatives

Si un système comporte au moins une force ne dérivant pas d'une énergie potentielle (une force non conservative), l'énergie mécanique n'est pas conservée. Dans ce cas :

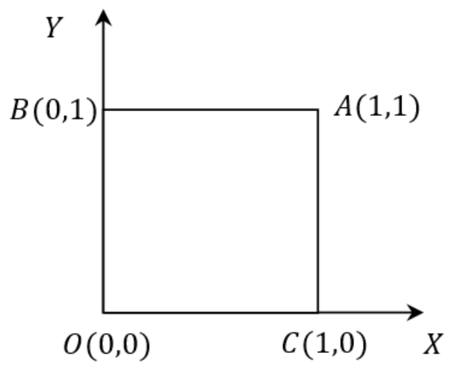
$$\Delta E_m = W_{\text{(forces non conservatives)}}$$

4.2 Exercices résolus

4.2.1 Exercice 1

Soit la force $\vec{F}$ donnée par $\vec{F} = \left(x^2 + y\right)\vec{i} + \left(x - y\right)\vec{j}$

1) Calculer le travail de $\vec{F}$ suivant les chemins suivants.
   a) $O(0,0) \to B(0,1) \to A(1,1)$
   b) La droite $O(0,0) \to A(1,1)$
   c) La parabole $\left(y = x^2\right)$ $O(0,0) \to A(1,1)$
   d) Chemin fermé $O(0,0) \to B(0,1) \to A(1,1) \to C(1,0) \to O(0,0)$



2) Calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}$.
3) Conclure.
4) Déterminer l'énergie potentiel E_P. On donne $E_P(0,0) = 0$.
5) Déterminer le travail de $\vec{F}$ de $O(0,0) \to A(1,1)$ de façon directe.

CORRIGÉ :

1) Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ est donnée par la formule suivante :
$W_{\overrightarrow{F}} = \int \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{dl}$, $\overrightarrow{dl} = dx\ \overrightarrow{i} + dy\ \overrightarrow{j}$

$$W_{\overrightarrow{F}} = \int F_x dx + \int F_y dy = \int (x^2+y)dx + \int (x-y)dy \quad (1)$$

a) Suivant le chemin $O \longrightarrow B \longrightarrow A$: $W_{O\longrightarrow B\longrightarrow A} = W_{O\longrightarrow B} + W_{B\longrightarrow A}$
De O vers B on a $x = 0 \Longrightarrow dx = 0$ et $0 < y < 1$. On remplace dans (1) :
$W_{O\longrightarrow B} = \int_0^1 -y\ dy = -\frac{1}{2}$
De B vers A on a $0 < x < 1$ et $y = 1 \Longrightarrow dy = 0$. On remplace dans (1) :
$W_{B\longrightarrow A} = \int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{4}{3}$

$$W_{O\longrightarrow B\longrightarrow A} = W_{O\longrightarrow B} + W_{B\longrightarrow A} = \frac{5}{6}$$

b) Suivant la droit $O(0,0) \longrightarrow A(1,1)$: L'équation de la droite est $y = x \Longrightarrow dy = dx$. On remplace dans (1) :

$$W_{O\longrightarrow A} = \int_0^1 (x^2+x)dx = \frac{5}{6}$$

c) Suivant la parabole $y = x^2 \Longrightarrow dy = 2\ x\ dx$. On remplace dans (1) :

$$W_{O\longrightarrow A} = \int_0^1 (4x^2 - 2x^3)dx = \frac{5}{6}$$

d) Suivant le chemin fermé $O \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$:

$$W_{O\longrightarrow B\longrightarrow A\longrightarrow C\longrightarrow 0} = W_{O\longrightarrow B} + W_{B\longrightarrow A} + W_{A\longrightarrow C} + W_{C\longrightarrow O} = 0$$

2) $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y & x-y & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$

3) $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{F}$ est conservative

4)

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p : \begin{cases} F_x = -\frac{dE_p}{dx} & (2) \\ F_y = -\frac{dE_p}{dy} & (3) \end{cases}$$

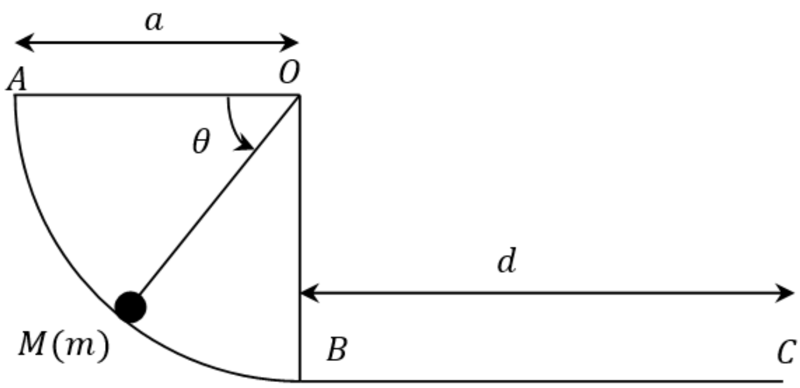
De (2) $E_p = -\int F_x dx = -\int (x^2+y)dx \Rightarrow E_p = -\frac{x^3}{3} - yx + c\left(y\right) \quad (4)$
On remplace dans (3), on trouve : $c\left(y\right) = \frac{y^2}{2} + c$
Donc : $E_p = -\frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^2}{2} + c$. On a : $E_P(0,0) = 0 \Longrightarrow c = 0$

$$E_p = -\frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^2}{2}$$

5) $W_{O \longrightarrow A} = E_p(O) - E_p(A) = \frac{5}{6}$

4.2.2 Exercice 2

Une particule de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire AOB de rayon a.



1) Déterminer le travail du poids de A à M.
2) Déterminer le travail de la force de contacte surface-particule m.
3) Déterminer l'énergie potentielle E_p de m au point M ($E_p(B) = 0$).
4) Utiliser le théorème de l'énergie cinétique, pour déterminer la vitesse de m au point M, en déduire son énergie cinétique E_c.
5) Calculer l'énergie mécanique E_m.
6) Représenter E_c, E_p et E_m ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$). Discuter
7) La surface circulaire AOB est raccordée à une partie horizontale BC, il existe des frottements entre B et C, la particule s'arrête a une distance d de B. Déterminer le coefficient de frottement cinétique. On donne $d = 3a = 3m$.

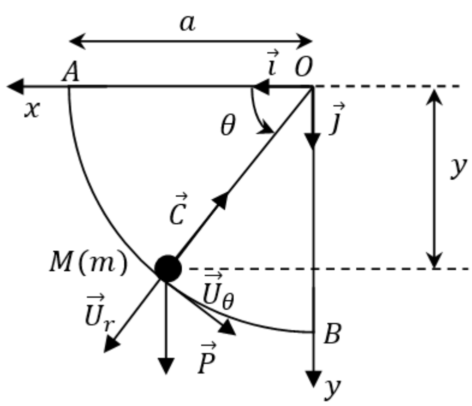
CORRIGÉ :

1) Le travail de $\overrightarrow{P}$ de A à M : $W_{\overrightarrow{P}} = \int \overrightarrow{P}.d\overrightarrow{r}$

$$W_{\overrightarrow{P}} = \int mg\,\overrightarrow{j}\,(dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j}) \Rightarrow W_{\overrightarrow{P}} = \int_0^y mg dy = mga\sin\theta$$

2) Le travail de la force de contact C :

$$W_{\vec{C}} = \int \vec{C}.d\vec{r} = \int -C\vec{U}_r\,(a\,d\theta\,\vec{U}_\theta) = 0$$

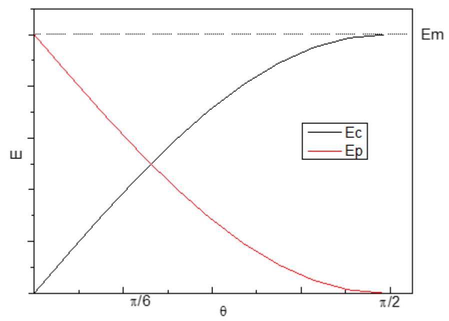


3) L'énergie potentielle :
$dE_p = -dW \Longrightarrow E_p = -mga\sin\theta + c$

$$E_p(B) = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow c = mga \Rightarrow E_p = mga\,(1 - \sin\theta)$$

4) $\Delta E_c = W \Longrightarrow \frac{1}{2} m\, v_M^2 = mga\sin\theta$

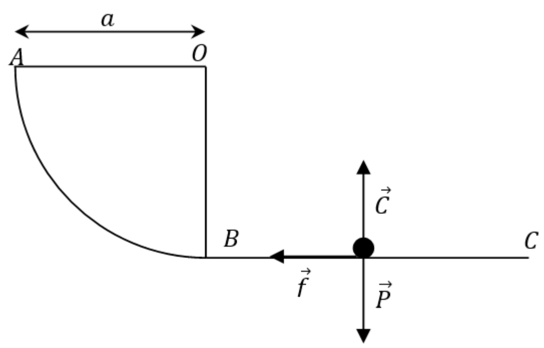
$$v_M = \sqrt{2ag\sin\theta}\ \ ;\ \ E_c = \frac{1}{2} m\, v_M^2 = mga\sin\theta$$



5) $E_m = E_c + E_P = mga$ =cste

6) Lorsque E_P diminue E_c augmente alors que E_m reste constante.

7)
$$\mu = \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{P}} \Longrightarrow \boldsymbol{f} = \mu mg$$

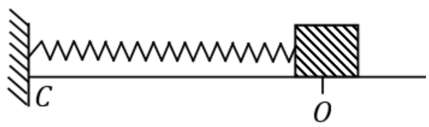


$$\Delta E_c = W_f,\ \ W_{\vec{f}} = \int_B^C \vec{f}\,\vec{dl} = -\mu\, m\, g\, d$$

$-\frac{1}{2} m\, v_B^2 = -\mu\, m\, g\, d$
$v_B = \sqrt{2\,a\,g}$. Remplaçons $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la formule de v_M, on trouve : $\mu = \frac{1}{3}$

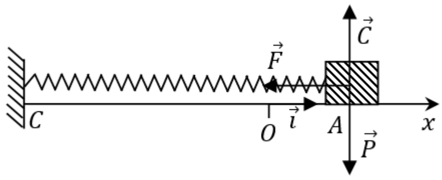
4.2.3 Exercice 3

Une masse m est liée à un ressort de raideur k, l'autre extrémité du ressort est lié au point C. La masse m peut glisser sur la surface horizontale. En premier lieu la masse est au repos au point O d'équilibre.



1) On suppose qu'il n'existe pas de frottement, on déplace la masse m du point O au point A, tel que $OA = a$, déterminer le travail de la force de rappel du ressort, quand m se déplace de O à A. Déterminer alors la vitesse de m au point O.

2) Mêmes questions que 1, mais maintenant on suppose qu'il existe des frottements, on donne le coefficient de frottement dynamique μ_c.

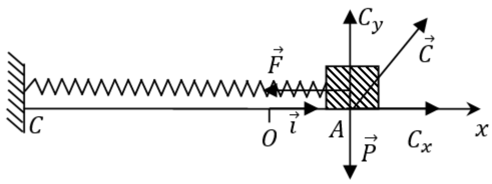


CORRIGÉ :

1) $W_{\vec{F}} = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int_a^0 (-kx\,\vec{i}).\left(\mathrm{dx}\ \vec{i}\right) = \frac{\mathrm{ka}^2}{2}$
$\Delta E_c = W_{\vec{F}} + W_{\vec{C}} + W_{\vec{P}}$

$$W_{\vec{C}} = W_{\vec{P}} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} m\, v_O^2 - \frac{1}{2} m\, v_A^2 = \frac{\mathrm{ka}^2}{2} \Longrightarrow v_O = a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) $W = W_{\vec{F}} + W_{\vec{C}}$
$W_{\vec{C}} = \int \vec{C}.d\vec{r} = \int_a^0 (C_x\,\vec{i} + C_y\,\vec{j}).\left(\mathrm{dx}\ \vec{i}\right) = -\mathrm{a}\,\mathrm{C_x}$
$\Rightarrow W = \frac{\mathrm{ka}^2}{2} - \mathrm{a}\,\mathrm{C_x}$ avec $C_x = \mu_c C_y = \mu_c mg$
Soit $W = \frac{ka^2}{2} - a\mu_c mg$ et $\Delta E_c = \sum W$
$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{ka^2}{2} - a\mu_c mg = a\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2\mu_c g}{a}}$

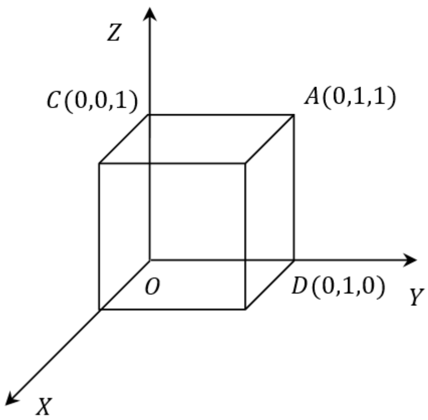


4.3 Exercices supplémentaires sans solution

4.3.1 Exercice 4

Soit la force $\vec{F}$ donnée par $\vec{F} = 2xz\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + (x^2 + \frac{y^2}{2})\,\vec{k}$.

1) Calculer le travail de $\vec{F}$ suivant les chemins suivants :
   a) La droite $O(0,0,0) \to A(0,1,1)$
   b) $O(0,0,0) \to C(0,0,1) \to A(0,1,1)$
   c) $O(0,0,0) \to D(0,1,0) \to A(0,1,1)$
   d) Chemin fermé $O \to C \to A \to D \to O$. Conclure.
2) Calculer $\overrightarrow{Rot}\ \vec{F}$, Conclure.
3) Déterminer l'énergie potentiel U.
   On donne $U(0,0,0) = 0$.



4) Déterminer le travail de $\vec{F}$ de $O(0,0,0) \to A(0,1,1)$ de façon directe.

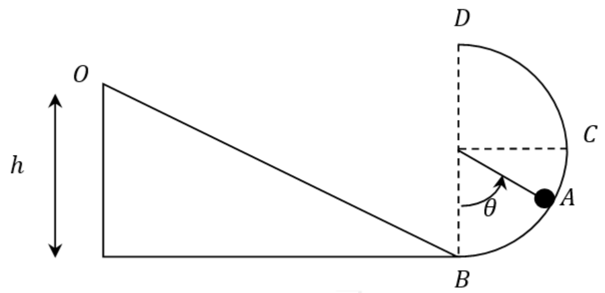
4.3.2 Exercice 5

Un point matériel M de masse m se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Le rail comporte une partie circulaire de rayon a, que le mobile parcours à l'intérieur du cercle. M est libéré sans vitesse initiale en 0 à la hauteur h et glisse sans frottement.

1) Déterminer la vitesse de M en B.

2) Déterminer la vitesse de M en A. (fonction de h, a et θ).

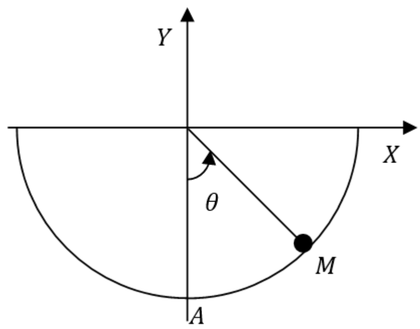
3) Applications : Calculer la vitesse de M en B, C et D pour $h = 3a$.



4.3.3 Exercice 6

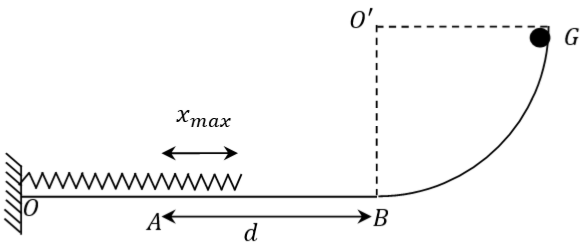
Une petite boule est assimilée à un point matériel de masse m, glisse sans frottements sur la surface d'un demi cerceau de rayon R.

1) Déterminer le travail du poids quand M se déplace de A au point M en fonction de Ret θ.
2) Déterminer l'énergie potentielle E_p. On donne $E_p(A) = 0$.
3) Déterminer la vitesse linéaire de M, et en déduire $E_c$en fonction de m, R et $\dot{\theta}$.
4) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, monter que l'énergie mécanique reste constante pendant le mouvement sachant qu'à $\theta = 0\ : \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$
5) Déterminer la hauteur maximale atteinte par M.
6) Déterminer l'équation de mouvement de M.



4.3.4 Exercice 7

On pose sur un plan horizontal OB (coefficient de frottement μ)un ressort de raideur K, dont l'une de ses extrémités est fixée au mur, et l'autre libre. On laisse glisser une bille de masse m à partir du point G sans vitesse initiale sur une trajectoire circulaire lisse de rayon R.



1) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, trouver la vitesse au point B.

2) La masse m s'arrête au point A, tel que $AB = d$. Calculer la compression maximale x_{max} du ressort en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

3) Quelle est la condition sur μ pour que le ressort se rétrécisse ?

5 Examens finaux

5.1 L1, LMD ST-SM, 2007-2008, Durée 2h

A. Partie Energétique $\boxed{\textbf{5 pts}}$

Un point matériel de masse m, est lâché du point A avec une vitesse V_A, il glisse sans frottement sur la surface circulaire ABC de rayon a.

1) Calculer le travail de la masse m du point A au point M.
2) En déduire l'énergie potentielle (E_p) de m au point M $(E_p(A) = 0)$.
3) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse de la masse m en M, en déduire son énergie cinétique (E_c) en M, et son énergie mécanique (E_m).
4) Pour $v_A = \sqrt{6ga}$, représenter E_c, E_p et Em pour $(0 < \theta < \pi)$.

B. Partie Cinématique et Mouvement relatif $\boxed{\textbf{7 pts}}$

Un point matériel M, décrit une trajectoire circulaire (ABC) de rayon a, avec $\theta = t^2$.

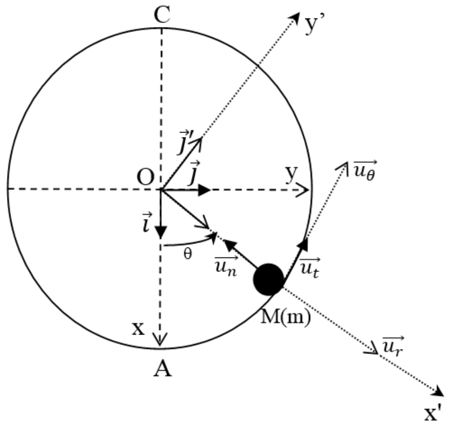
1) Calculer la vitesse et l'accélération de M, dans le système des coordonnées polaires, vérifier que le rayon de courbure est a.
2) En déduire l'expression de la vitesse et l'accélération de M, dans le système des coordonnées intrinsèques.
3) Représenter la vitesse et l'accélération de M.
4) On considère les référentiels $R(Oxy)$ fixe, $R'(Ox'y')$ mobile, de bases respectives $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$, R' tourne par rapport à R autour de l'axe Oz perpendiculairement au plan xOy avec $\theta = t^2$.
   Le point matériel M fixe sur Ox' est repéré par : $\overrightarrow{OM} = a\,\vec{i'}$.
   a) Déterminer la vitesse relative et d'entrainement de M, en déduire sa vitesse absolue.
   b) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement et de Coriolis de M, en déduire son accélération absolue.

C. Partie Dynamique $\boxed{\textbf{8 pts}}$

Le point matériel M de masse m, est lâché du point A avec une vitesse v_A, il glisse sans frottement sur la surface circulaire ABC de rayon a.

1) En utilisant le principe fondamental de la dynamique et le système des coordonnées polaires, montrer alors qu'au point M (C désigne la force de contact masse-surface circulaire) :

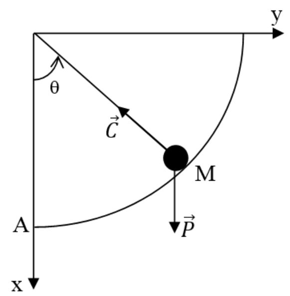
(i) $a\ddot{\theta} = -g\sin\theta$ et (ii) $C = m[a\dot{\theta}^2 + g\cos\theta]$



2) Retrouver (i) en utilisant le théorème du moment cinétique.
3) En déduire la vitesse de M (v_M) et la force de contact C.
4) On désigne par θ_v la valeur de θ qui annule v_M et par θ_C celle qui annule C, exprimer $\cos(\theta_v)$ et $\cos(\theta_C)$en fonction de v_A, g et a et tracer les courbes $\cos(\theta_v) = f(v_A^2)$ et $\cos(\theta_C) = f(v_A^2)$.
   En déduire la nature du mouvement du point matériel m suivant la valeur de v_A.
5) Applications : Calculer θ_v, θ_C, v_M et C pour : (i) $v_A = \sqrt{ag}$ et (ii) $v_A = \sqrt{6ag}$.

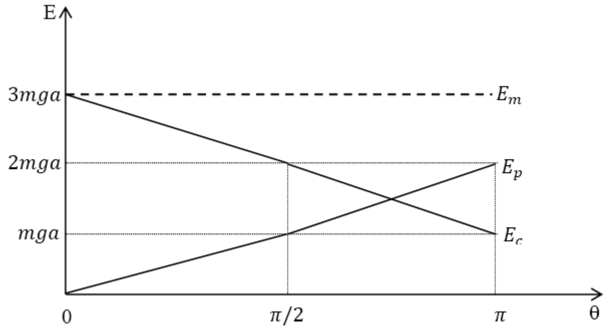
CORRIGÉ :

A. Partie Energétique $\boxed{\textbf{5 pts}}$



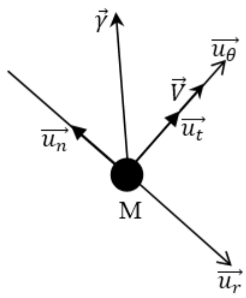
1) $W_{\vec{P}} = \int \vec{P}.\vec{dr} = \int mg\,\vec{i}\,.(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}\,) = mg\int_{x_A}^{x_M} dx$
   $W_{\vec{P}} = mg(x_M - x_A) = mga(\cos\theta - 1)$
2) $dE_p = -dW \Rightarrow E_p = -mga(\cos\theta - 1) + c$
   $E_p(A) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow E_p = -mga(\cos\theta - 1)$
3) $\Delta E_C = \sum W = W_{\vec{P}} + W_{\vec{C}}$
   $W_{\vec{P}} = mga(\cos\theta - 1)$; $W_{\vec{C}} = \int \vec{C}.\vec{dr} = \int(-C\vec{u}_r).(\vec{u}_\theta d\theta) = 0$
   $\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mga(\cos\theta - 1)$
   $\Rightarrow v_M = \sqrt{v_A^2 + 2ga(\cos\theta - 1)}$
   $E_C = \frac{1}{2}mv_M^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mga(\cos\theta - 1)$; $E_m = E_C + E_p = \frac{1}{2}mv_A^2$
4) Représentation de E_C, E_p et E_m :

$$v_A = \sqrt{6ag} \Rightarrow v_M = \sqrt{2ga(2+\cos\theta)} \Rightarrow \begin{cases} E_C = mga(2+\cos\theta) \\ E_m = 3mga \\ E_p = -mga(\cos\theta - 1) \end{cases}$$



B. Partie Cinématique et Mouvement relatif $\boxed{\textbf{7 pts}}$

1) $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta = 2at\vec{u}_\theta$
$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2a\vec{u}_\theta + 2at(-\dot{\theta}\vec{u}_r) = 2a\vec{u}_\theta + 2at(-2t\vec{u}_r)$
$\Rightarrow \vec{\gamma} = 2a[\vec{u}_\theta - 2t^2\vec{u}_r]$
$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v}\Lambda\vec{\gamma}\|}$, $v^3 = 8a^3t^3$, $\|\vec{v}\Lambda\vec{\gamma}\| = 8a^2t^3 \Rightarrow \rho = a$
2) $\vec{v} = v\vec{u}_t = 2at\vec{u}_t$
$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_\theta = 2a[\vec{u}_t + 2t^2\vec{u}_n]$
3) Représentation de la vitesse et l'accélération de M



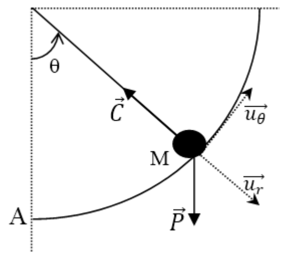
4) a) Les vitesses :

$$\begin{cases} \vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_{R'} = \vec{0}\,;\ \vec{v}_e = \vec{\Omega}\Lambda\overrightarrow{OM} = \dot{\theta}\vec{k}\Lambda\vec{i'} = 2at\vec{j'} \\ \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_e = 2at\vec{j'} \end{cases}$$

b) Les accélérations :

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}\Big|_{R'} = \vec{0}\,;\ \vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}\Lambda\vec{v}_r = \vec{0} \\ \vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{OM} + [\vec{\Omega}\Lambda(\vec{\Omega}\Lambda\overrightarrow{OM})] = \ddot{\theta}\vec{k}\Lambda a\vec{i'} + [\dot{\theta}\vec{k}\Lambda\vec{v}_e] = 2a\vec{j'} + [\dot{\theta}\vec{k}\Lambda 2at\vec{j'}] \\ \vec{\gamma}_e = 2a\vec{j'} - 4at^2\vec{i'} = 2a[\vec{j'} - 2t^2\vec{i'}] \\ \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = \vec{\gamma}_e \end{cases}$$

C. Partie Dynamique $\boxed{\textbf{8 pts}}$



1) $\sum\vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{C}$
$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{u}_r$
$\Rightarrow m(a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{u}_r) = -C\vec{u}_r + mg(-\sin\theta\vec{u}_\theta + \cos\theta\vec{u}_r)$

$$\begin{cases} ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \\ -ma\dot{\theta}^2 = -C + mg\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ddot{\theta} = -g\sin\theta \\ C = m[a\dot{\theta}^2 + g\cos\theta] \end{cases}$$

2) $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u}_r\Lambda ma\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta = ma^2\dot{\theta}\overrightarrow{k} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = ma^2\ddot{\theta}\overrightarrow{k}$

$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{C}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{C}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\overrightarrow{P} = a\overrightarrow{u}_r\Lambda mg(-\sin\theta\overrightarrow{u}_\theta + \cos\theta\overrightarrow{u}_r) \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} = -amg\sin\theta\overrightarrow{k}$

$\Rightarrow a\ddot{\theta} = -g\sin\theta$

3) $a\ddot{\theta} = -g\sin\theta \Rightarrow a\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow a\dot{\theta}d\dot{\theta} = -g\sin\theta d\theta$

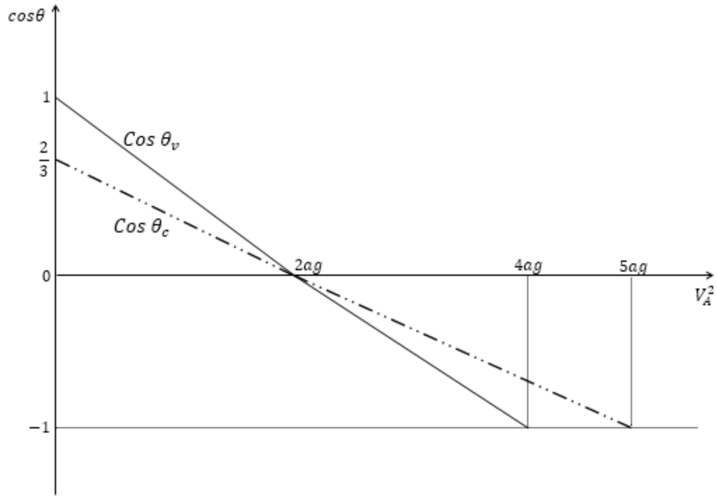
$v = a\dot{\theta} \Rightarrow dv = ad\dot{\theta} \Rightarrow \int_{v_A}^{v_M} v\frac{dv}{a} = -g\int_0^\theta \sin\theta d\theta \Rightarrow \frac{v_M^2 - v_A^2}{2a} = g[\cos\theta]_0^\theta$

$\Rightarrow v_M = \sqrt{v_A^2 + 2ag(\cos\theta - 1)}$

$C = m[a\dot{\theta}^2 + g\cos\theta] = m[a\frac{v_M^2}{a^2} + g\cos\theta] \Rightarrow C = m[\frac{1}{a}(v_A^2 + 2ag(\cos\theta - 1) + g\cos\theta]$

$\Rightarrow C = m[\frac{v_A^2}{a} + g(3\cos\theta - 2)]$

4) $v_M = 0 \Rightarrow \cos\theta_v = 1 - \frac{v_A^2}{2ag}$; $C = 0 \Rightarrow \cos\theta_C = \frac{1}{3}(2 - \frac{v_A^2}{ag})$



a) $0 < v_A^2 < 2ag \Rightarrow \cos\theta_v > \cos\theta_C \Rightarrow \theta_v < \theta_C$; v s'annule avant $C \Rightarrow$ mouvement périodique

b) $2ag < v_A^2 < 4ag \Rightarrow \cos\theta_v < \cos\theta_C \Rightarrow \theta_v > \theta_C$; C s'annule avant $v \Rightarrow$ la masse m décolle de la surface circulaire.

c) $v_A^2 > 5ag$: Il n'existe pas de valeur de θ pour que C ou v annulent (on a toujours $C \neq 0$ et $v \neq 0 \Rightarrow$ mouvement circulaire)

5) $\begin{cases} v_A^2 = ag \Rightarrow \cos\theta_v = \frac{1}{2} \; et \; \cos\theta_C = \frac{1}{3} \\ \text{(cas a)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_v = 60° \text{ et } \theta_C = 70° \\ v = 0 \text{ et } C = \frac{mg}{2} \text{ (pour } \theta = 60°) \end{cases}$

$$\begin{cases} v_A^2 = 6ag \Rightarrow \nexists \text{ de valeurs de } \theta \text{ pour que } \cos\theta_v = 0 \text{ et } \cos\theta_C = 0 \\ \qquad\qquad \text{(cas c)} \Rightarrow v_M = \sqrt{2ag(2+\cos\theta)} \text{ et } C = mg(4+3\cos\theta) \end{cases}$$

5.2 L1, LMD ST-CHIMIE, Février 2013, Durée 1h45

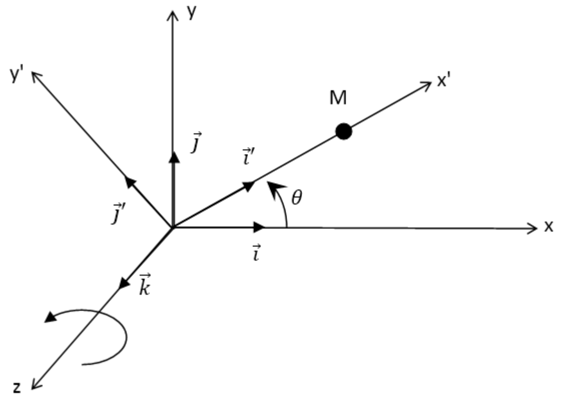
Exercice 1 **5 pts**

Un mobile se déplace dans le plan (O, x, y). Sa position a pour expression :

$$x(t) = t - 1 \text{ et } y(t) = \frac{t^2}{2}$$

1) Déterminer les composantes et les modules des vecteurs vitesse et accélération.
2) Déterminer l'expression de l'accélération tangentielle a_t, déduire l'accélération normale a_n.
3) Donner le rayon de courbure ρ de la trajectoire en fonction de t.

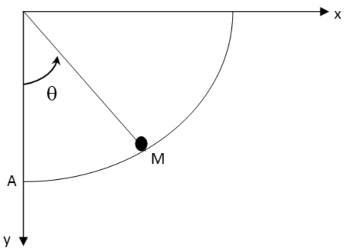
Exercice 2 **5 pts**



Un repère $R'(Ox'x')$ en rotation par rapport à un repère $R(Oxy)$ fixe, autour de l'axe $(Oz$, avec une vitesse de rotation ω constante. On considère l'angle θ entre l'axe (Ox) et (Ox') tel que $\theta = \omega t$. Soit un mobile M en mouvement suivant l'axe (Ox') et obéissant à la relation suivante : $OM = e^{-t}\overrightarrow{i'}$.

1) Déterminer la vitesse relative, d'entrainement et absolue.
2) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue.
3) Déterminer les coordonnées du mobile dans le repère R fixe.

Exercice 3 **5 pts**



Une masse m se déplace à partir d'un point A vers le haut suivant un quart de cercle de rayon $a$et de centre O. On négligera les frottements.

1) En utilisant les coordonnées polaires et le principe fondamental de la dynamique, montrer qu'à tout point M du trajet, le mouvement de la masse m est régit par les expressions

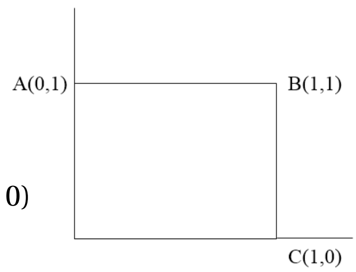
suivantes :

$$g\cos\theta - \frac{R}{m} = -a\dot{\theta}^2 \quad (1) \qquad g\sin\theta = -a\ddot{\theta} \quad (2)$$

2) En utilisant les coordonnées intrinsèques (Frenet) et le théorème du moment cinétique, retrouver l'expression (2) de la 1ère question.
3) Déduire l'expression de la vitesse.

Exercice 4 $\boxed{\textbf{5 pts}}$

Soit un champ de force :



$$\vec{F} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$

1) Calculer le travail de cette force du point A(0, 1) au point C(1, 0) en passant par le point B(1, 1).
2) Calculer le rotationnel de la force, que peut-on en conclure ?
3) Déterminer l'énergie potentielle $E_p(x, y)$ sachant que $Ep(0,0) = 0$.

CORRIGÉ :

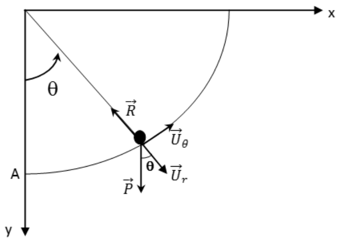
Exercice 1 $\boxed{\textbf{5 pts}}$

1) Les composantes et les modules des vecteurs vitesse et accélération
$\vec{v} = \vec{i} + t\,\vec{j}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+t^2}$
$\vec{\gamma} = \vec{j}$, $\|\vec{\gamma}\| = 1$
2) Les expressions des accélération tangentielle et normale
$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $a_n = \sqrt{\gamma^2 - a_t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
3) Le rayon de courbure
$\rho = \frac{v^2}{a_n} = (1+t^2)^{3/2}$

Exercice 2 $\boxed{\textbf{5 pts}}$

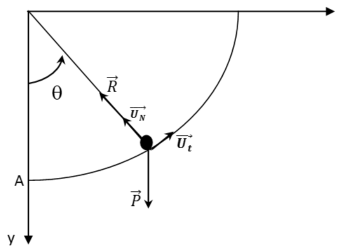
1) Les vitesses : $\vec{v}_r = -e^{-t}\,\vec{i'}$, $\vec{v}_e = \omega e^{-t}\,\vec{j'}$
$\vec{v}_a = e^{-t}(-\vec{i'} + \omega\,\vec{j'}) = e^{-t}[(-\cos\theta - \omega\sin\theta)\,\vec{i} + (-\sin\theta + \omega\cos\theta)\,\vec{j}\,]$
2) Les accélérations : $\vec{\gamma}_r = e^{-t}\,\vec{i'}$, $\vec{\gamma}_c = -2\omega e^{-t}\,\vec{j'}$, $\vec{\gamma}_e = -\omega^2 e^{-t}\,\vec{i'}$
$\vec{\gamma}_a = e^{-t}[(1-\omega^2)\,\vec{i'} - 2\omega\,\vec{j'}] = e^{-t}\{[(1-\omega^2)\cos\theta + 2\omega\sin\theta]\,\vec{i} + [(1-\omega^2)\sin\theta - 2\omega\cos\theta]\,\vec{j}$
3) Les coordonnées : $\frac{dx}{dt} = [-\cos\theta - \omega\sin\theta]e^{-t} \Rightarrow x = \int[-\cos\theta - \omega\sin\theta]e^{-t}dt$

$\frac{dy}{dt} = [-\sin\theta + \omega\cos\theta]e^{-t} \Rightarrow y = \int[-\sin\theta + \omega\cos\theta]e^{-t}dt$



Exercice 3 $\boxed{\textbf{5 pts}}$

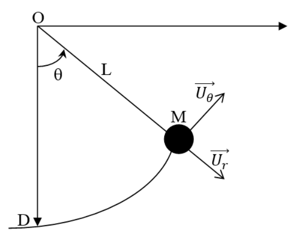
1) $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma} \Rightarrow \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = m\overrightarrow{\gamma}$
   $\overrightarrow{P} = mg\cos\theta\overrightarrow{u}_r - mg\sin\theta\overrightarrow{u}_\theta$; $\overrightarrow{R} = -R\overrightarrow{u}_r$
   $\overrightarrow{\gamma} = -a\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + a\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$
   $g\cos\theta - \frac{R}{m} = -a\dot{\theta}^2$, $g\sin\theta = -a\ddot{\theta}$
2) $\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{R}}$
   $\overrightarrow{L} = ma^2\dot{\theta}\overrightarrow{k} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = ma^2\ddot{\theta}\overrightarrow{k}$
   $\overrightarrow{P} = -mg\sin\theta\overrightarrow{u}_t - mg\cos\theta\overrightarrow{u}_n$, $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{u}_n$
   $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} = -amg\sin\theta\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{R}} = \overrightarrow{0} \Rightarrow a\ddot{\theta} = -g\sin\theta$
3) $|\overrightarrow{v}| = a\dot{\theta} \Rightarrow a\ddot{\theta}\dot{\theta} = -g\sin\theta\dot{\theta} \Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} a\dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} -g\sin\theta d\theta$
   $\Rightarrow \frac{a}{2}[\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2] = g(\cos\theta - 1) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(\cos\theta - 1) + \dot{\theta}_0^2$



Exercice 4 $\boxed{\textbf{5 pts}}$

1) $W = \int ydx + \int xdy$
   De $A \to B : 0 < x < 1$, $y = 1$, $W_1 = \int_0^1 dx = 1$
   De $B \to A : 1 < y < 0$, $x = 1$, $W_1 = -1$
   $W = W_1 + W_2 = 1 - 1 = 0$
2) $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel $\Rightarrow \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ [conservative].
3) $Fx = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow E_p = -yx + c(y)$
   $Fy = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \Rightarrow x = -[-x + c'(y)] \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c$
   $E_p(x, y) = -yx + c$, $E_p(0, 0) = 0 \Rightarrow c = 0$
   Donc : $E_p(x, y) = -yx$

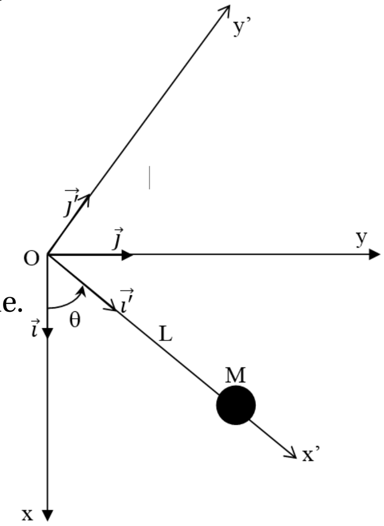
5.3 L1, LMD SM, 2013-2014, Durée 2h



A. Partie cinématique et mouvement relatif

Un pendule simple est constitué d'une bille de masse m (considérée comme ponctuelle), reliée à un point fixe O par un fil sans masse et de longueur L. Ecarté de sa position d'équilibre (point D), ce pendule oscille de part et d'autre de cette position, le fil faisant avec la verticale l'angle θ.

1) a) Déterminer la vitesse et l'accélération de la bille dans le système des coordonnées polaires. En déduire le rayon de courbure.
   b) En déduire la vitesse et l'accélération de la bille dans le système de Frenet.
2) On considère les référentiels $R(Oxyz)$ fixe et $R'(Ox'y'z')$ mobile, de bases respectives $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$.
   On considère que le fil om est porté par l'axe $\overrightarrow{Ox'}$ et que R' tourne par rapport à R autour de l'axe $\overrightarrow{Oz'} = \overrightarrow{Oz}$ perpendiculairement au plan xOy avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta}$ varie en fonction du temps).
   a) Déterminer la vitesse relative et d'entrainement de la bille. En déduire sa vitesse absolue.
   b) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement et de Coriolis de m. En déduire son accélération absolue.



B. Partie dynamique

Le pendule étant toujours dans les mêmes hypothèses de la partie A, est lancé du point D avec une vitesse v_0.
On utilise le système des coordonnées polaires $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$.

1) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la bille (représenter les forces au point M) et :
   a) Montrer que l'équation du mouvement de m est donnée par :

$$g\sin\theta + L\ddot{\theta} = 0 \quad \multimap (1)$$

   b) Déterminer l'expression de la tension du fil T.
   c) En déduire la vitesse de la bille au point M et la tension du fil T.
2) Retrouver l'équation (1) en utilisant le théorème du moment cinétique.

C. Partie Energie

Toujours dans les mêmes hypothèses que la partie B, le pendule est lancé du point D avec une vitesse initiale v_0.

1) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse de la bille au point M.
   a) Déterminer son énergie cinétique E_C, ainsi que son énergie potentielle E_p. On donne $E_p(\theta = 0) = 0$.
   b) En déduire son énergie mécanique E_m.

2) Dériver E_m par rapport au temps et retrouver l'équation (1) du mouvement de la bille.

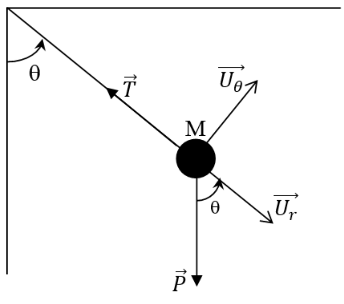
Questions de cours

1) Quelle est la dimension et l'unité du coefficient de frottement statique μ_s.
2) Ecrire l'expression d'une force conservative $\vec{F}$ qui dérive d'une énergie potentielle E_p. En déduire les propriétés de ce champ de force $\vec{F}$ en décrivant les équations correspondantes. Donner un exemple de force conservative.

CORRIGÉ :

A. Partie cinématique et mouvement relatif

1) a) $\overrightarrow{OM} = L\vec{u}_r$, $r = L$, $\dot{r} = 0$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
   $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$
   $\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\Lambda\vec{\gamma}|}$, $\vec{v}\Lambda\vec{\gamma} = -L^2\dot{\theta}^3\vec{k}$, $\rho = \frac{L^3\dot{\theta}^3}{L^2\dot{\theta}^3} = L$
   b) Système de Frenet : $\vec{v} = v\vec{u}_t = L\dot{\theta}\vec{u}_t$
   $\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n = L\ddot{\theta}\vec{u}_t + L\dot{\theta}^2\vec{u}_n$
2) a) $\overrightarrow{O'M} = L\vec{i'}$, $\vec{v}_r = \vec{0}$, $\vec{v}_e = \dot{\overrightarrow{OO'}} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{k}\Lambda L\vec{i'} = L\dot{\theta}\vec{j'}$
   $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_e = L\dot{\theta}\vec{j'}$
   b) $\vec{\gamma}_e = \ddot{\overrightarrow{OO'}} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \dot{\vec{\omega}}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \dot{\theta}\vec{k}\Lambda L\dot{\theta}\vec{j'} + \ddot{\theta}\vec{k}\Lambda L\vec{i'} = -L\dot{\theta}^2\vec{i'} + L\ddot{\theta}\vec{j'}$, $\vec{\gamma}_r = \vec{0}$
   $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}\Lambda\vec{v}_r = \vec{0}$, $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}_e$



B. Partie dynamique

1) $\sum\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$
   a) Projection sur $\vec{u}_\theta$: $-P\sin\theta = mL\ddot{\theta} \Rightarrow -g\sin\theta = L\ddot{\theta}$ —∘(1)
   b) Projection sur $\vec{u}_r$: $P\cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2$
   $\Rightarrow T = P\cos\theta + mL\dot{\theta}^2$ —∘ (4)
   c) (1)$\Rightarrow -g\sin\theta = L\ddot{\theta}$ —∘ (2)
   $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dv}{dt}$. On remplace dans (2) : $dv = -g\sin\theta$ —∘ (3)
   $v = \frac{d\theta}{dt}L \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{v}L$
   Remplaçant dans (3) : $vdv = -gL\sin\theta d\theta \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = -\int_0^\theta gL\sin\theta d\theta$
   Alors : $v^2 = v_0^2 + 2gL(\cos\theta - 1)$. On remplace dans (4), on obtient :

$$T = mg(3\cos\theta - 2) + \frac{m}{L}v_0^2$$

2) Théorème du moment cinétique : $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM} \Lambda m\overrightarrow{v} = L\overrightarrow{u}_r \Lambda mL\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta = mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{k}$

$$\dot{\overrightarrow{L}} = mL^2\ddot{\theta}\overrightarrow{k} \quad \text{(i)}$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} = L\overrightarrow{u}_r \Lambda (P\cos\theta\overrightarrow{u}_r - P\sin\theta\overrightarrow{u}_\theta) = -PL\sin\theta\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{T}} = \overrightarrow{OM} \Lambda \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$
$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{T}} = -PL\sin\theta\overrightarrow{k} \quad$ (ii)

$$\text{(i)} = \text{(ii)} \Rightarrow L\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

C. Partie Energie

1) a) Les énergies : $\Delta E_C = \sum W$, $E_C(M) - E_C(D) = W_{\overrightarrow{T}} + W_{\overrightarrow{P}} = -mgh$
$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgL(1-\cos\theta)$, $v^2 = v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta)$

$$\left| \begin{array}{l} E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta)] \\ E_p = mgh = mgL(1-\cos\theta) \end{array} \right.$$

b) L'énergie mécanique : $E_m = E_C + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2$

2)

$$E_m = E_C + E_p : \left| \begin{array}{l} E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \\ E_p = mgh = mgL(1-\cos\theta) \end{array} \right.$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL(\dot{\theta}\sin\theta) = 0 \Rightarrow L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

Questions de cours

1) La dimension et l'unité : $[\mu]$=1, sans unité.
2) L'expression d'une force conservative : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$
3) Exemple : Le poids

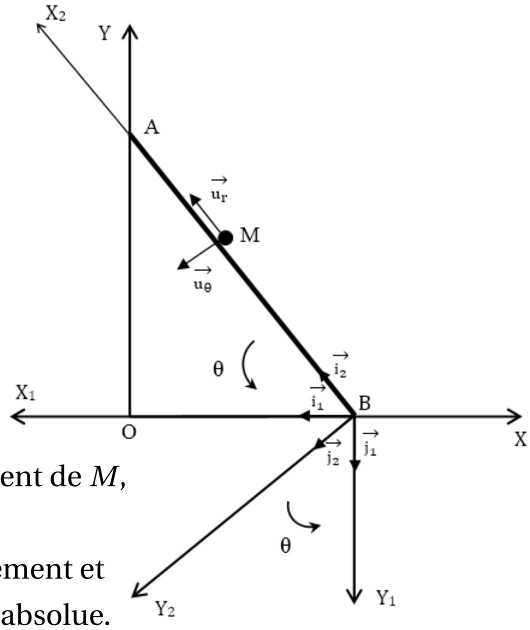
5.4 Examens finaux supplémentaires sans solution

5.4.1 L1, LMD ST-SM, 2008-2009, Durée 2h

Une échelle homogène (AB) de masse m et de longueur $2a$, d'épaisseur négligeable, est posée contre un mur. En A (B) le contact entre l'échelle et le mur (sol) se fait sans frottement.

A. Partie Cinématique et Mouvement relatif

1) Montrer que les coordonnées de M centre de gravité de l'échelle sont : $x_M = a\cos\theta$ et $y_M = a\sin\theta$. En déduire la trajectoire de M.
2) Déterminer la vitesse et l'accélération de M, ainsi que leurs modules par rapport au repère cartésien $R(O,x,y)$.
3) Déterminer la vitesse et l'accélération de M, ainsi que leurs modules par rapport au système des coordonnées polaires, d'origine $B(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
4) En déduire le rayon de courbure.
5) Déterminer la vitesse et l'accélération de M, ainsi que leurs modules par rapport au système des coordonnées intrinsèques (repère de Frenet).
6) On considère le repère $R_1(B,x_1,y_1)$ fixe, et le repère $R_2(B,x_2,y_2)$ mobile, de bases respectives $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ et $(\vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{k_2})$. R_2 tourne par rapport à R_1 autour de l'axe BZ, avec une vitesse angulaire variable ($\dot{\theta}$).
   a) Déterminer la vitesse relative, et d'entrainement de M, en déduire sa vitesse absolue.
   b) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement et de Coriolis de M, en déduire son accélération absolue.



B. Partie Dynamique

En utilisant le principe fondamental de la dynamique.

1) Déterminer les réactions en A (C_A) et en B (C_B).
2) On montrera en particulier que :

$$-C_A\sin\theta + C_B\cos\theta = mg\cos\theta + am\ddot{\theta} \tag{5.1}$$

3) Retrouver l'expression (5.1) en utilisant le théorème du moment cinétique.

C. Partie Energie

1) Déterminer l'énergie de M (on admettra une l'énergie cinétique est composé de deux parties, une partie à la translation (E_t) et une autre due à la rotation (E_r) avec $E_r = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ et $J = \frac{m}{3}a^2$

2) Déterminer l'énergie potentielle de M [on donne $E_p(\theta = 0) = 0$].
3) En déduire que l'énergie mécanique totale E_m est donnée par :

$$E_m = \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\sin\theta$$

4) On admettra que l'énergie mécanique étant constante et égale à mga. Montrer que l'équation du mouvement de M obéit à :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{4a}\cos\theta = 0$$

5) En déduire l'angle limite pour lequel le contact en A cesse.

5.4.2 L1, LMD SM-ST, 2010, Durée 1h45

CINEMATIQUE

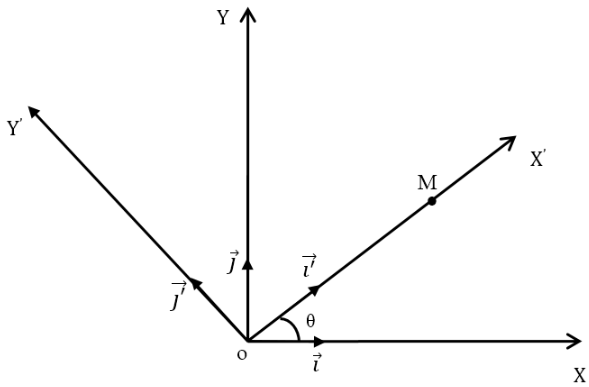
Partie A

Une particule M se déplace dans le plan XOY, tel que $OM = r = a\cos\theta$avec $\theta = \omega t$ (a et ω sont des constantes).

1) Déterminer la vitesse et l'accélération de M en coordonnées polaires (r,θ) ainsi que leurs normes.
2) Déterminer le rayon de courbure. En déduire la nature de la trajectoire.
3) Déterminer les coordonnées cartésiennes de M.
4) Déterminer la vitesse et l'accélération de M dans la base Frenet (coordonnées intrinsèques).

Partie B

On considère les référentiels $R'(O,X',Y')$ et $R(O,X,Y)$ de base respectives $(\vec{i'},\vec{j'})$ et $(\vec{i},\vec{j})$. R' tourne par rapport à R autour de l'axe OZ perpendiculairement au plan OXY avec une vitesse angulaire ω constante. La particule M est fixe sur l'axe OX'.



Rq : $OM = a =$ cste

1) Déterminer la vitesse relative et la vitesse d'entrainement de M, en déduire sa vitesse absolue.

2) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement et de Coriolis de M, en déduire son accélération absolue.

DYNAMIQUE

Partie A

Une particule M de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire AB de rayon R. Soit la force de contact entre la particule et la surface circulaire.

1) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique montrez que :

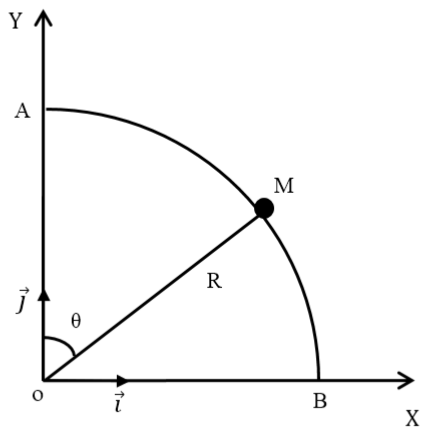
$$\text{a)} \quad \frac{v^2}{R} = \frac{-C}{m} + g\cos\theta \quad \text{et} \quad \text{b)} \quad \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

2) En utilisant le théorème de moment cinétique retrouver b.

Partie B

Une particule M de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire AB de rayon R.

1) Déterminer le travail du poids de A à M.
2) Déterminer le travail de la force de contact surface-particule.
3) Déterminer l'énergie potentielle E_p de m au point M [On donne $E_p(B) = 0$].
4) Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la vitesse de m au point M. En déduire son énergie cinétique E_C.
5) Exprimer l'énergie mécanique E_m.



5.4.3 L1, LMD ST, 2010-2011, Durée 1h45

CINEMATIQUE

Le mouvement d'un point matériel est décrit par la relation suivante : $r = 2a\cos\theta$ avec $\theta = \omega t$ (a et ω sont des constantes).

1) Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes dans le système de coordonnées polaires.
2) Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes dans le système de coordonnées intrinsèques (FRENET).

3) Déterminer le rayon de courbure.
4) Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes dans le système de coordonnées cartésiennes.

MOUVEMENT RELATIF

Soit un référentiel $R(Oxy)$ fixe et un référentiel $R'(Ox'y')$ mobile de bases respectives $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i'}, \vec{j'})$. R' tourne par rapport à R autour de l'axe Oz perpendiculairement au plan Oxy, avec une vitesse angulaire ω constante. Un point M est mobile sur l'axe Ox' suivant la loi $\overrightarrow{OM} = a\sin\theta\,\vec{i'}$, avec $\theta = \omega t$ (a et ω sont des constantes).

1) Déterminer la vitesse et l'accélération de M de façon directe.
2) Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entrainement de M. En déduire sa vitesse absolue.
3) Déterminer l'accélération relative, l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis. En déduire son accélération absolue.

DYNAMIQUE

Un corps de masse m glisse sans vitesse initiale et sans frottement sur une surface sphérique de rayon a.

1) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montre que

$$\frac{v^2}{R} = \frac{-C}{m} + g\cos\theta \quad (1) \qquad \frac{dv}{dt} = g\sin\theta \quad (2)$$

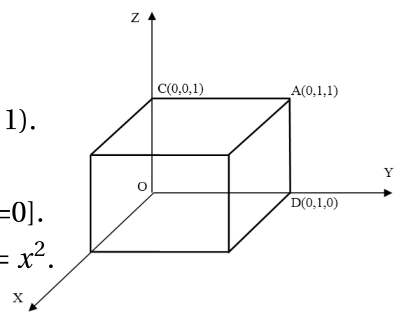
v est la vitesse de m, C est la force de contact entre m et la surface.

2) En utilisant le principe du moment cinétique montrer (1).
3) Trouver v et C en fonction de θ, g et m.
4) Est-il possible que m quitte la surface ?

TRAVAIL ET ENERGIE

Soit la force $\vec{F} = 2xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + (x^2 + \frac{y^2}{2})\,\vec{k}$.

1) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ suivant les chemins O→ A(0, 1, 1) [suivant une droite] et O→ C(0, 0, 1)→ A(0, 1, 1).
2) Calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}$
3) Déterminer l'énergie potentielle au point A, U_A [U(0, 0, 0)=0].
4) Déterminer le travail de $\vec{F}$ de O à A suivant la parabole $y = x^2$.



Bibliographie

[1] AHMED FIZAZI, *Cahier de la Mécanique du Point Matériel*, Office des Publications Universitaires, Algérie, 2013.

[2] LAMRIA BENALLEGUE, MOHAMMED DEBIANE, AZEDDINE GOURARI, ET AMMAR MAHAMDIA, *Physique I Mécanique du Point Matériel*, Edité par la Faculté de Physique U.S.T.H.B. B.P. N 32 El-Alia Alger, 2011.

[3] CLAUDE PASQUIER, *Cours de mécanique S2-PoPS et L1*, Universite d'Orsay, France, 2011–2012.

[4] JIMMY ROUSSEL, *Mécanique Newtonienne Cours*, http ://femto-physique.fr/mecanique/

[5] SALAH BELAZREG, *PACES Physique UE3, 4e édition*, EdiScience, Dunod Éditeur, France, 2014.

[6] JEAN-MARIE BRÉBEC, TANIA CHABOUD, THIERRY DESMARAIS, ALAIN FAVIER, MARC MÉNÉTRIER, ET RÉGINE NOËL, *Exercices et Problèmes 1re Année*, Physique MPSI/PCSI/PTSI, Hachette Livre, Paris, France, 2010.

[7] ALAIN GIBAUD ET MICHEL HENRY, *Cours de Physique Mécanique du Point*, Dunod, Paris, 1999, 2007 pour la Seconde Edition.

[8] MICHEL HENRY ET NICOLAS DELORME, m*ini Manuel Mécanique du point Cours + Exos*, Dunod, Paris, France, 2008.

[9] MARIE-NOËLLE SANZ, ANNE-EMMANUELLE BADEL ET FRANÇOIS CLAUSSET, *PHYSIQUE TOUT-EN-UN - 1re année, Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, France, 2002, 2003, 2008

[10] VINCENT DEMERY, P*hysique Résumé du cours en fiches MPSI-MP*, Dunod, Paris, France, 2010.