Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf
-Oran-

Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département des Mathématiques

HAMDAOUI Abdenour

Polycopié

Séries et intégrales généralisées

Cours et exercices d'applications

Algérie 2016

Préface

Ce cours à destination des étudiants de deuxième année licence Mathématique LMD comporte le module d'analyse 3. Il contient l'essentiel du cours avec des exemples. Des exercices d'applications sont proposés avec des solutions en fin de chaque chapitre pour permettre à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux tests et aux examens finaux.

D'après mon expérience, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années, j'ai décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à ce module.

Vu le programme proposé par le ministère, j'ai partagé ce modeste travail en deux parties essentielles. La première partie contient les chapitres des séries numériques et la deuxième comporte le chapitre des intégrales généralisées. J'ai commencé la présentation de cet ouvrage par un rappel sur les suites numériques (module enseigné en L1).

Ensuite, j'ai présenté tous les autres chapitres qui sont programmés au module d'analyse 3, en respectant le contenu et l'ordre des chapitres suivant le canevas donné par le ministère.

Enfin, vu les erreurs répétées souvent dans les copies des examens de ce module, j'ai constaté que la majorité des étudiants ne donnent pas l'importance au cours et ils font des exercices en se basant directement sur les corrigés. Je conseille alors les étudiants de lire d'abord le cours attentivement, de faire tous les exemples cités après chaque résultat donné et enfin de passer à résoudre les exercices proposé sans retourner au corrigé. Les solutions des exercices sont utiles uniquement pour tester le niveau des efforts fournis par l'étudiant.

Finalement, j'espère que ce document peut aider les étudiants qui veulent maîtriser bien cette partie d'analyse mathématique.

Table des Matières

Chapitre 1

Rappels sur les suites numériques

Définition 1.1 *On appelle* ***suite numérique*** *(ou suite de nombres réels) toute application définie de* $\mathbb{N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *qui associe à tout entier naturel* n *le nombre réel* $u(n) = u_n$,

(i.e. $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ n \mapsto u(n) = u_n$*).*

On note par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique de terme général* u_n.

Exemple 1.2 ***1.*** $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite de termes :* $0, 1, 2, 3, 4, ...$

2. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite qui alterne :* $1, -1, 1, -1, ...$

3. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ *et la relation* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ *pour* $n \geq 2$ *(suite de Fibonacci). Les premiers termes sont* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ *chaque terme est la somme des deux précédents.*

1.1 Propriétés

1.1.1 La monotonie

Définition 1.3 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite numérique.*

i) La suite $(u_n)_n$ *est dite* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) si pour tout* $n : u_{n+1} \geq u_n$ *(resp.* $u_{n+1} > u_n$*).*

ii) La suite $(u_n)_n$ *est dite* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) si pour tout* n : $u_{n+1} \leq u_n$ *(resp.* $u_{n+1} < u_n$*).*

ii) La suite $(u_n)_n$ *est dite* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) si elle vérifie i) ou ii).*

Exemple 1.4 *La suite* $(u_n)_n$ *telle que* $u_n = 2n + 3$ *est strictement croissante, la suite* $(v_n)_n$ *tel que* $v_n = e^{-n^2}$ *est strictement décroissante et la suite* $(w_n)_n$ *telle que* $w_n = ne^{-n}$ *n'est ni croissante, ni décroissante.*

Remarque 1.5 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1.1.2 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 1.6 *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.*

i) On dit que $(u_n)_n$ est ***majorée*** *s'il existe un nombre réel M tel que pour tout $n : u_n \leq M$.*

ii) On dit que $(u_n)_n$ est ***minorée*** *s'il existe un nombre réel m tel que pour tout $n : u_n \geq m$.*

iii) On dit que $(u_n)_n$ est ***bornée*** *si elle est minorée et majorée.*

Proposition 1.7 *La suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement s'il existe un nombre réel $M \ (> 0)$, tel que pour tout $n : |u_n| \leq M$.*

Exemple 1.8 ***1.*** *La suite $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte pour $n = 0$), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.*

2. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $\dfrac{1}{2}$ (borne atteinte pour $n = 2$) et minorée par -1, borne atteinte en $n = 1$.*

Définition 1.9 *(**Suite Stationnaire**). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* ***stationnaire*** *s'il existe un rang $n_0 \, (\in \mathbb{N})$ tel que pour tout $n \geq n_0 : u_n = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$.*

Remarque 1.10 *i) Un cas particulier des suites stationnaires est les suites* ***constantes*** *($u_n = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).*

ii) Toute suite stationnaire est bornée.

1.2 Limite d'une suite

1.2.1 Limite finie

Définition 1.11 *On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ tend vers $l \ (l \in \mathbb{R})$ quand n tend vers l'infini et on note $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de l, à partir d'un certain rang.

1.2.2 Limite infinie

Définition 1.12 *i) On dit qu'une suite numérique* $(u_n)_n$ *tend vers* $+\infty$ *quand* n *tend vers l'infini et on note* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ *si :*

$$\forall A > 0,\ \exists n_0(A) \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0(A) \Rightarrow u_n > A).$$

ii) On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ *tend vers* $-\infty$ *quand* n *tend vers l'infini et on note* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$ *si :*

$$\forall A > 0,\ \exists n_0(A) \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0(A) \Rightarrow u_n < -A).$$

1.2.3 Propriétés

Proposition 1.13 *Soit la suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, alors on a*

i) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0.$

ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{|u_n|} = +\infty.$

iii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n + v_n) = +\infty.$

iv) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n + v_n) = -\infty.$

v) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n + v_n) = +\infty - \infty$ *(est une forme indéterminée).*

Proposition 1.14 *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites tel que* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty.$

i) Si $(u_n)_n$ *est minorée, alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n + v_n) = +\infty.$

ii) Si $(u_n)_n$ *est minorée par un nombre* $\lambda > 0$*, alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n v_n) = +\infty.$

iii) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$ *et* $u_n > 0$ *pour* n *assez grand, alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty.$

1.2.4 Convergence d'une suite

Définition 1.15 *Si* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$ $(\neq \pm\infty)$ *alors la suite* $(u_n)_n$ *est dite **convergente** vers* l*. C'est-à-dire, la suite de terme général* u_n *converge si et seulement si* u_n *tend vers une limite finie* l *lorsque l'entier* n *tend vers* $+\infty$*.*

*Une suite qui ne converge pas, est dite **divergente**.*

Autrement dit : une suite $(u_n)_n$ *est **convergente** si elle admet une limite finie. Elle est **divergente** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers* $\pm\infty$*, soit elle n'admet pas de limite).*

Exemple 1.16 ***1.*** *La suite de terme général* $u_n = n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$*, converge vers* π*, car pour* n *assez grand on a :* $n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} n\,\dfrac{\pi}{n}.$

2. Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = q^n$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si \;\; q > 1 \\ 1 & si \;\; q = 1 \\ 0 & si \;\; -1 < q < 1 \\ \nexists & si \;\; q \leq -1 \end{cases},$$

ainsi la suite de terme général $u_n = q^n$ est convergente si et seulement si $q \in]-1, 1]$.

Proposition 1.17 *Toute suite convergente admet une limite finie et unique.*

Proposition 1.18 *Toute suite convergente est bornée.*

Théorème 1.19 *i) Toute suite croissante et majorée est convergente.*

ii) Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple 1.20 *La suite de terme général*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2},$$

est convergente.

En effet : a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, alors $(u_n)_n$ est croissante.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

Pour $n = 1$, on a $u_n = 1 \leq 2 - \dfrac{1}{1} = 1$. Fixons n pour lequel on suppose $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$, alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2},$$

et comme $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1},$$

ce qui montre que la propriété $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$ est vraie pour $n+1$. Ainsi la proposition "pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$" est vraie. D'où la suite $(u_n)_n$ est majorée par 2.

D'après a) et b) la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Remarque 1.21 *i) Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.*

ii) Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Proposition 1.22 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite qui converge vers* l_1 *et* $(v_n)_n$ *une suite convergeant vers* l_2, *alors*

i) la suite $(|u_n|)_n$ *converge vers* $|l_1|$,

ii) la suite $(u_n + v_n)_n$ *converge vers* $l_1 + l_2$,

iii) la suite $(u_n v_n)_n$ *converge vers* $l_1 l_2$,

iv) pour tout $k \in \mathbb{R}$, *la suite* $(k u_n)_n$ *converge vers* $k l_1$,

v) si $l_1 \neq 0$, *alors la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ *converge vers* $\frac{1}{l_1}$.

Exemple 1.23 *Si la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* l *alors la suite de terme général* $\frac{|5u_n - 1|}{u_n^2 + 3}$ *converge vers* $\frac{|5l - 1|}{l^2 + 3}$.

Proposition 1.24 *Si la suite* $(u_n)_n$ *est bornée et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0$, *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n v_n = 0$.

Exemple 1.25 *Si* $(u_n)_n$ *est la suite donnée par :* $u_n = \cos(n)$ *et* $(v_n)_n$ *est celle donnée par* $v_n = \frac{1}{n^2 - 2}$, *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n v_n = 0$.

Proposition 1.26 *i) Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites* ***convergentes*** *telles que :*

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n)$, *alors*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} v_n.$$

ii) Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites telles que :* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$ *et* $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n)$, *alors*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} v_n = \infty.$$

Théorème 1.27 *(**Théorème des gendarmes ou bien théorème de trois suites**). Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites numériques telles que*

$$i)\ \forall n \in \mathbb{N} : v_n \leq u_n \leq w_n$$

et

$$ii)\ \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} w_n = l \in \mathbb{R},$$

alors la suite $(u_n)_n$ *est convergente et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$.

Définition 1.28 *(**Suite de Cauchy**). La suite* $(u_n)_n$ *est dite de* ***Cauchy*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall p, q \in \mathbb{N} : (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon).$$

Remarque 1.29 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle, alors*

$$(u_n)_n \text{ est de Cauchy} \Leftrightarrow (u_n)_n \text{ converge.}$$

En général on utilise cette remarque pour étudier la convergence d'une suite numérique sans savoir aucune information sur sa limite.

Exemple 1.30 *La suite de terme général* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *n'est pas de Cauchy.*

En effet :

$$(S_n)_n \text{ n'est pas de cauchy} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \ / \ \exists p, q \in \mathbb{N} : (\ p > q \geq n \text{ et } |S_p - S_q| \geq \varepsilon).$$

Pour $p = 2n$, $q = n$ *on a*

$$|S_p - S_q| = |S_{2n} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

donc il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$*. Ainsi* $(S_n)_n$ *n'est pas de Cauchy et par conséquent n'est pas convergente.*

Définition 1.31 *(**Sous suite ou bien suite extraite**). Pour toute application* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante, la suite de terme général* $u_{\varphi(n)}$ *est appelée **sous suite** ou bien **suite extraite** de la suite* $(u_n)_n$.

Remarque 1.32 *D'après l'unicité de la limite d'une suite convergente, toute sous suite d'une suite convergente converge vers la même limite. Ainsi par la contraposée, s'il existe deux sous suites convergeant vers **deux limites différentes** alors la suite est divergente.*

Exemple 1.33 *Pour la suite de terme général* $u_n = (-1)^n$, *on a* $u_{2n} = 1 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ *et* $u_{2n+1} = -1 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -1$*. Ainsi* $(u_n)_n$ *diverge.*

Théorème 1.34 *(**Théorème de Bolzano-Weierstrass**). Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

1.2.5 Suite arithmétique et suite géométrique

Définition 1.35 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle.*

i) Si pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + a$ $(a \in \mathbb{R})$*, la suite* $(u_n)_n$ *est dite suite **arithmétique** de raison* a*. De plus la somme de ses* $n+1$ *premier termes est*

$$S_{nA} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n).$$

ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = qu_n$ $(q \in \mathbb{R}^*)$, la suite $(u_n)_n$ est dite suite ***géométrique*** *de raison q. De plus la somme de ses $n+1$ premier termes est*

$$S_{nG} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si \;\; q \neq 1 \\ (n+1)\, u_0 \quad si \;\; q = 1 \end{cases} .$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = q^n u_0$, ainsi la suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si $q \in \left]-1, 1\right]$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(S_{nG})_n$ soit convergente est $|q| < 1$.

1.2.6 Suites adjacentes

Définition 1.36 *(**Suites adjacentes**). Deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites* ***adjacentes*** *si :*

i) l'une est croissante et l'autre décroissante,

ii) la différence $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Proposition 1.37 *Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes, alors ces deux suites convergent vers la même limite.*

Exemple 1.38 *Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} \quad et \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}$$

sont adjacentes.

En effet : il est clair que la suite $(u_n)_n$ est croissante et la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

La différence $v_n - u_n = \dfrac{2}{n+1}$ tend vers 0. Donc, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes, elles convergent donc vers une même limite l finie (i.e. $l \in \mathbb{R}$).

1.2.7 Suite récurrente définie par une fonction

Définition 1.39 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une suite* ***récurrente*** *$(u_n)_n$ est définie par son premier terme u_0 et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :*

$$u_{n+1} = f(u_n) \;\; pour \; n \geq 0.$$

Une suite récurrente est donc définie par deux données : un terme initial u_0, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite s'écrit ainsi :

$$u_0\ ,\ u_1\ = f(u_0)\ ,\ u_2\ = f(u_1) = f(f(u_0))\ ,\ ...$$

Exemple 1.40 *Soit $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Fixons $u_0 = 2$ et définissons pour $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est-à-dire $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. Alors les premiers termes de la suite sont :*

$$2,\ 1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}, 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}},\ 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}},\ ...$$

La proposition suivante donne la règle essentielle pour calculer la limite d'une suite récurrente.

Proposition 1.41 *Si f est une fonction continue et la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$, converge vers l. Alors l est une solution de l'équation :*

$$f(l) = l.$$

Remarque 1.42 *Si on arrive à montrer que la limite d'une suite récurrente $(u_n)_n$ existe, alors la Proposition précédente permet de calculer les valeurs possible de cette limite.*

Proposition 1.43 *Si $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ est une fonction continue et croissante, alors quel que soit $u_0 \in [a,b]$, la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$, est croissante et converge vers $l \in [a,b]$, vérifiant $f(l) = l$.*

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Définitions et généralités

Définition 2.1 *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite réelle.*

L'expression $u_0 + u_1 + ... + u_n + ... = \sum_{n\geq 0} u_n$ *est appellée une serie numérique de terme général* u_n*, et l'on note* $\sum u_n$ *ou* $\sum_n u_n$.

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ *où* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ *, est appelée suite des sommes partielles de la série* $\sum u_n$.

Définition 2.2 *On dit que la série* $\sum u_n$ ***converge*** *(resp.* ***diverge****), si la suite de ses sommes partielles* $(S_n)_n$ *converge (resp. diverge). Si la série* $\sum u_n$ *converge, la limite de* $(S_n)_n$ *notée* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S$ *est appelée la somme de la série* $\sum u_n$.

Exemple 2.3 ***1.*** *La série* ***géométrique*** $\sum_{n\geq 0} q^n$ *est convergente si et seulement si* $|q| < 1$.

En effet : si $q = 1$*, alors* $S_n = n + 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

si $q \neq 1$*, alors* $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ *qui admet une limite finie si et seulement si* $|q| < 1$.

2. *Soit la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *où* $u_n = a_n - a_{n+1}$ *et la suite numérique* $(a_n)_n$ *converge vers* l*, alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge vers* $a_0 - l$.

En effet :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1},$$

d'où $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = a_0 - l$*. Ainsi la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente et sa somme est* $S = a_0 - l$*. Par exemple* *la série* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente et sa somme* $S = 1 - \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n+1} = 1.$

2.1.1 Critères générals de convergence

Définition 2.4 ***(Critère de Cauchy).*** *Une série numérique* $\sum u_n$ *est dite de* ***Cauchy*** *si sa suite* $(S_n)_n$ *des sommes partielles est de Cauchy i.e :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\ \forall p, q \in \mathbb{N} : (p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |S_p - S_q| < \varepsilon)$$

ou encore

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\ \forall p, m \in \mathbb{N} : (p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=p+1}^{p+m} u_k\right| < \varepsilon).$$

Exemple 2.5 ***Série harmonique :*** *le terme général d'une série harmonique est* $u_n = \frac{1}{n},\ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Comme la suite $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *n'est pas de Cauchy (voir l'Exemple 1.30) , alors la série harmonique* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *n'est pas de Cauchy. Ainsi elle est divergente.*

Une condition nécessaire pour qu'une série numérique soit convergente est donnée par la Proposition suivante.

Proposition 2.6 *Soit la série numérique* $\sum u_n$*, alors*

$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

Démonstration. En effet : si $\sum u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_n$ converge vers une limite S. Comme

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_{n-1} = S,$$

alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

■

Remarque 2.7 *i) Par contraposé on déduit que si le terme général d'une série* $\sum u_n$ *ne tend pas vers* 0*, alors la série est divergente.*

ii) La réciproque de la Proposition précédente est fausse.

Exemple 2.8 *La série harmonique* $\sum\frac{1}{n}$ *diverge, mais* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n} = 0.$

2.1.2 Opérations sur les séries

Définition 2.9 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques, et soit λ un réel.*

La série $\sum (u_n + v_n)$ est appellée, ***la série somme*** *des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.*

La série $\sum \lambda u_n$ est appellée, ***la série produit*** *de la série $\sum u_n$ par le scalair λ.*

Remarque 2.10 *L'ensembles des séries numériques est un espace véctoriel sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.11 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques, alors*

i) si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge,

ii) si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge,

iii) si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, alors on ne peut rien conclure pour la nature de la série $\sum (u_n + v_n)$.

Démonstration. *i) et ii)* sont évidentes.

Pour *iii)* voici deux exemples :

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$ et $v_n = -1$, alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes mais la série $\sum (u_n + v_n)$ est une série de terme général la constante 0, ainsi elle est convergente.

2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 1$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes et la série $\sum (u_n + v_n)$ est la série de terme général $\frac{1}{n} + 1$ qui ne tend pas vers 0, ainsi elle est divergente. ■

Corollaire 2.12 *L'espace des séries convergentes est un s.e.v de l'espace des séries numériques, i.e. si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Définition 2.13 *Soit $\sum u_n$ une série numérique et soit $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geq n+1} u_k = R_n$ est appellée* ***le reste d'ordre*** *n de la série $\sum u_n$.*

Proposition 2.14 *La série $\sum u_n$ converge, si et seulement si la suite $(R_n)_n$ converge vers 0.*

Remarque 2.15 *i) Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les deux séries sont de même nature. En cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.*

ii) On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.

iii) La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

2.2 Séries à termes positifs

Définition 2.16 *La série* $\sum u_n$ *est dite à termes positifs si pour tout* $n \geq 0 : u_n \geq 0$.

Remarquons que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est croissante, donc on a

Proposition 2.17 *Une série à termes positifs* $\sum u_n$ *converge si et seulement si sa suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *est majorée.*

De plus, dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

On note aussi $\sum u_n < +\infty$ *pour dire que la série* $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration. $(\Leftarrow)$ Il est clair que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante, alors si S_n majorée, donc S_n est convergente, ainsi la série $\sum u_n$ converge.

$(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned}
\sum u_n \text{ converge} &\Leftrightarrow (S_n)_n \text{ converge} \\
&\Rightarrow (S_n)_n \text{ bornée} \\
&\Rightarrow (S_n)_n \text{ majorée.}
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.18 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels positifs. Si* $(S_n)_n$ *n'est pas majorée, alors* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$, *donc*

$$\text{la série } \sum u_n \text{ diverge} \Leftrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

On écrit alors dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

2.2.1 Critères de comparaison

• Convergence par comparaison directe

Théorème 2.19 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que,*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n,$$

alors

i) la série $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow$ *la série* $\sum u_n$ *converge,*

ii) la série $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow$ *la série* $\sum v_n$ *diverge.*

Démonstration. On pose $S_n^{u_n} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n^{v_n} = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

$i)$ Si la série $\sum v_n$ converge, alors la suite des sommes partielles $(S_n^{v_n})_n$ majorée par certain $M > 0$. Donc la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)_n$ est majorée par $M\,(>0)$. D'où

$$S_n^{u_n} = u_0 + u_1 + ... + u_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq u_0 + u_1 + ... + u_{n_0-1} + M.$$

Ainsi la suite de termes positifs $(S_n^{u_n})_n$ est majorée par $M_1 = u_0 + u_1 + ... + u_{n_0+1} + M$. Par conséquent la série $\sum u_n$ converge.

ii) Par contraposé de i). ■

Exemple 2.20 *Considérons les séries* $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ *et* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$. *Il est clair que les deux séries sont à termes positifs, de plus on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ *est une série géométrique convergente, alors la série* $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ *est convergente.*

Corollaire 2.21 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que* $u_n = O(v_n)$, *pour* $n \longrightarrow +\infty$. *Alors*

i) la série $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow$ *la série* $\sum u_n$ *converge,*

ii) la série $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow$ *la série* $\sum v_n$ *diverge.*

Démonstration. On a

$$u_n = O(v_n) \text{ au voisinage de l'infini} \Leftrightarrow \exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow u_n \leq M v_n),$$

donc il est clair d'après le Théorème 2.19 que : *i)* et *ii)* sont vérifiés. ■

Corollaire 2.22 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que,* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ $(l \in \mathbb{R}_+)$.

i) Si $l = 0$ *(i.e :* $u_n = o(v_n)$*), alors,*

$$a)\ \textit{la série } \sum v_n \textit{ converge} \quad \Rightarrow \quad \textit{la série } \sum u_n \textit{ converge,}$$
$$b)\ \textit{la série } \sum u_n \textit{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \textit{la série } \sum v_n \textit{ diverge.}$$

ii) Si $l \neq 0$, alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. En particulier pour $l = 1$ les deux séries sont dites équivalentes (i.e : $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$).

Démonstration. *i)*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = o \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} < \varepsilon,$$

pour $\varepsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq N : u_n \leq v_n$. Donc $a)$ et $b)$ découlent du Théorème 2.19.

ii)

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l\,(\neq 0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N} : \left(n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \right).$$

Pour $\varepsilon = \alpha < l$, $\exists N \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq N : l - \alpha < \dfrac{u_n}{v_n} < l + \alpha$, donc

$\exists N \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq N : \begin{cases} u_n \leq (l+\alpha)\, v_n & (2.1) \\ (l-\alpha)\, v_n \leq u_n & (2.2) \end{cases}$, ainsi en appliquant le Théorème 2.19 on trouve,

si $\sum u_n$ converge, alors d'aprés (2.2) la série $\sum v_n$ converge,
si $\sum u_n$ diverge, alors d'aprés (2.1) la série $\sum v_n$ diverge.

D'où les deux séries sont de même nature. ■

Exemple 2.23 ***1.*** *Soient les séries $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ telles que :*

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad et \quad v_n = \frac{3}{2^n}.$$

On a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{3}$, et comme $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ l'est aussi.

2. *Soient les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(1 + \ln(n))}\right)$.*

On a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(1 + \ln(n))}\right)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(n)}{\sqrt{n}} = 0,$$

car

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,(1 + \ln(n))}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}\,(1 + \ln(n))}.$$

Comme la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ est divergente, donc il en est de même de la série $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$.

• **Critère d'intégrale**

Proposition 2.24 *Soit* $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue et décroissante. Alors*

$$\text{la série } \sum f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge (i.e. } \int_1^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty\text{)}$$

Démonstration. Posons $f(n) = u_n$.

Puisque f est décroissante, alors pour $n \geq 2$, on a

$$f(t) \leq f(n) = u_n, \forall t \in [n, n+1]$$

et

$$f(n) \leq f(t), \forall t \in [n-1, n],$$

d'où

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_n^{n+1} u_n dt = u_n$$

et

$$u_n = \int_{n-1}^{n} u_n dt \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt.$$

c'est-à-dire

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt.$$

On pose $v_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$. Alors pour tout $n \geq 2$:

$$v_{n+1} \leq u_n \leq v_n,$$

ainsi les séries de terme généraux u_n et v_n sont de même nature.

Comme

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + ... + \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = \int_1^n f(t)\,dt,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_1^n f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt,$$

c'est-a-dire la série $\sum v_n$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature, et par suite la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. ■

Exemple 2.25 ***(Série de Riemann)****. Soit la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $(\alpha > 0)$.

Posons $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. *Il est facile de voir que la fonction* f *est continue et décroissante sur* $[1, +\infty[$, *et on a :*

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha = 1 \\ +\infty & si\ \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & si\ \alpha > 1 \end{cases},$$

d'où la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$: *la série* $\sum \frac{1}{n}$ *est appelé série harmonique. En utilisant le Critère de Cauchy on peut démontré que la série* $\sum \frac{1}{n}$ *est divergente.*

- *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *est* $\begin{cases} convergente\ si\ \alpha > 1 \\ divergente\ si\ \alpha \leq 1 \end{cases}$.

- *Pour* $\alpha \leq 0$, *la série diverge car* $\frac{1}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

- **Convergence par Comparaison avec Riemann**

Proposition 2.26 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs.*

i) Si pour $\alpha > 1$: $\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0 \Rightarrow$ *la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

ii) Si pour $\alpha \leq 1$: $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha u_n} = 0 \Rightarrow$ *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Démonstration. Découlant immédiatement du Corollaire 2.22. ■

Proposition 2.27 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*

S'il existe $l > 0$ *tel que* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ *(i.e.* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = l$*), on a :*

i) si $\alpha > 1$, *la série* $\sum u_n$ *est convergente,*

ii) si $\alpha \leq 1$, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Démonstration. Découlant immédiatement du Corollaire 2.22. ■

- **Convergence par comparaison logarithmique**

Proposition 2.28 *Supposons qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0$: $u_n > 0$, $v_n > 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. *Alors,*

i) la série $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow$ *La série* $\sum u_n$ *converge,*

ii) la série $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow$ *La série* $\sum v_n$ *diverge.*

Démonstration. On a pour tout $n \geq n_0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, donc $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$, c'est-à-dire la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est décroissante à partir du rang n_0. Ainsi

$$\text{pour tout } n \geq n_0 : \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}},$$

d'où

$$\text{pour tout } n \geq n_0 : u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$$

et par conséquent d'après le Théorème 2.19, on trouve le résultat. ■

Exemple 2.29 *Étudier la convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{3^n}$ *en utilisant la règle de comparaison logarithmique avec la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$.

Posons $u_n = \frac{n+2}{3^n}$ *et* $v_n = \frac{1}{2^n}$, *alors : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{3(n+2)} \leq \frac{1}{2} = \frac{v_{n+1}}{v_n}, \ \textit{car } 2n+6 \leq 3n+6, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{3^n}$ *est convergente car* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ *l'est (*$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ *est une série géométrique de raison* $\frac{1}{2} < 1$*).*

- **Critère de D'Alembert**

Proposition 2.30 ***(Règle de D'Alembert)****. Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs.*

i) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que,* $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

ii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *et* $0 < \lambda < 1$ *tels que,* $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration. *i)* Il est immédiat car u_n ne tend pas vers 0. En effet :

Pour $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n,$$

c'est-à-dire à partir du rang n_0, la suite $(u_n)_n$ est croissante. Ainsi

$$\forall n \geq n_0 : u_n \geq u_{n_0} > 0,$$

en passant à la limite, on trouve que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n \geq u_{n_0} \text{ qui est strictement positif,}$$

ainsi la série $\sum u_n$ est divergente.

ii) Il suffit de prendre $v_n = \lambda^n$, et appliquer la Proposition 2.28. ■

Corollaire 2.31 ***(Critère de D'Alembert usuel (1768))****. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.*

i) Si $\lambda < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

ii) Si $\lambda > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

iii) Si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire pour la nature de la série $\sum u_n$.

Démonstration.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \lambda - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \varepsilon.$$

i) Pour $\lambda < 1$, il est clair qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\lambda + \varepsilon_0 < 1$ (par exemple $\varepsilon_0 = \frac{1-\lambda}{2}$) et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \varepsilon_0 < 1$ à partir d'un certain rang n_0. Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ est convergente.

ii) Pour $\lambda > 1$, il est clair qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\lambda - \varepsilon_1 > 1$ (par exemple $\varepsilon_1 = \frac{\lambda - 1}{2}$) et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \lambda - \varepsilon_1 > 1$ à partir d'un certain rang n_1. Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ est divergente.

iii) Pour $\lambda = 1$, on ne peut rien conclure. Par exemple si on prend la série divergente $\sum \frac{1}{n}$ et la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ et } \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

■

Exemple 2.32 *Étudier la nature de la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$. *On a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=e^{-1}<1.$$

Ainsi d'après le Critère de D'Alembert la série $\sum\frac{n!}{n^n}$ *converge.*

• **Règle de Cauchy**

Proposition 2.33 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*

i) S'il existe $M\in\mathbb{R}$, $0<M<1$ *tel que* $\sqrt[n]{u_n}\leq M$ *pour n assez grand, alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

ii) Si $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$ *pour* n *assez grand, alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration. *i)* D'aprés la croissance de la fonction x^n sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt[n]{u_n}\leq M\Rightarrow u_n\leq M^n,$$

or $\sum M^n$ étant une série géométrique convergente $(0<M<1)$, donc d'après le Théorème 2.19, la série $\sum u_n$ converge.

ii) On a $\sqrt[n]{u_n}\geq 1\Rightarrow u_n\geq 1$, car la fonction x^n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n\geq 1$, ainsi la série $\sum u_n$ diverge. ■

Corollaire 2.34 ***(Règle de Cauchy usuelle (1821)).*** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs, posons* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda$.

i) Si $\lambda<1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

ii) Si $\lambda>1$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

iii) Si $\lambda=1$, *on ne peut rien dire pour la nature de la série* $\sum u_n$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{u_n} &= \lambda\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N}:(\ n\geq N_\varepsilon\Rightarrow|\sqrt[n]{u_n}-\lambda|<\varepsilon)\\ &\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N}:(\ n\geq N_\varepsilon\Rightarrow\lambda-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<\lambda+\varepsilon).\end{aligned}$$

i) Pour $\lambda < 1$, il est clair qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $0 < \lambda + \varepsilon_0 < 1$ (par exemple $\varepsilon_0 = \dfrac{1-\lambda}{2}$) et $\sqrt[n]{u_n} < \lambda + \varepsilon_0 < 1$ à partir d'un certain rang n_0. Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ est convergente.

ii) Pour $\lambda > 1$, il est clair qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\lambda - \varepsilon_1 > 1$ (par exemple $\varepsilon_1 = \dfrac{\lambda - 1}{2}$) et $\sqrt[n]{u_n} > \lambda - \varepsilon_1 > 1$ à partir d'un certain rang n_1. Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ est divergente.

iii) Pour $\lambda = 1$, on ne peut rien dire, par exemple si on prend les deux séries $\sum \dfrac{1}{n}$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} e^{\dfrac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} e^{-\dfrac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} e^{\frac{1}{n^2}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} e^{-\dfrac{\ln n}{n^2}} = 1.$$

Or la première série est divergente et la deuxième série est convergente. ■

Exemple 2.35 *Soit la série* $\sum u_n$ *de terme général* $u_n = \left(a + \dfrac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p > 0$.

Il est clair que la série $\sum u_n$ *est à termes positifs et*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = a.$$

Alors, la série $\sum u_n$ *est convergente pour* $a < 1$ *et divergente pour* $a > 1$.

Si $a = 1$, *on ne peut rien conclure en utilisant la règle de Cauchy. Mais on a :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^n \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)} \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{n^{p-1}}} = \begin{cases} 1 & si \quad p > 1 \\ e & si \quad p = 1 \\ +\infty & si \quad 0 < p < 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le terme général ne tend pas vers zéro, ainsi la série est divergente.

Une question se pose maintenant, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux Critères, de D'Alembert et celui de Cauchy?

La réponse est donnée par la Proposition suivante.

Proposition 2.36 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs.*

i) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, *alors* $l_1 = l_2$.

ii) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $(l \in \mathbb{R}_+)$, *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

iii) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$.

Remarque 2.37 *La réciproque de ii) est fausse.*

En effet, il suffit de considérer la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *où*

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases},$$

alors, la suite numérique $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ *n'admet pas une limite, donc le Critère de D'Alembert ne s'applique pas.*

Cependant, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{3} < 1$, *donc le Critère de Cauchy s'applique et la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

En particulier si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *il est unitile d'essayer la règle de Cauchy.*

Remarque 2.38 *Les Critères de Cauchy et de D'Alembert ne sont valides que si* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *existent. En revanche, la quantité* $l = \overline{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sup \sqrt[n]{u_n}$ *est toujours définie. Alors on a,*

i) si $l < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

ii) Si $l > 1$, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

iii) Si $l = 1$, *on ne peut rien conclure pour la nature de la série* $\sum u_n$.

Pour la suite nous donnons des règles permettant d'explorer le cas où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, dans le Critère de D'Alembert.

- **Critères de Raabe et Duhamel**

Proposition 2.39 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs.*

i) Si $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq \lambda > 1$ *pour* n *assez grand, alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

ii) Si $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq \lambda < 1$ *pour* n *assez grand, alors la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Corollaire 2.40 ***(Critère de Raabe (1832)).*** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs, telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu.$$

i) Si $\mu > 1$*, alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

ii) Si $\mu < 1$*, alors la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

iii) Si $\mu = 1$*, on ne peut rien conclure pour la nature de la série* $\sum u_n$*.*

Démonstration.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} : \left(n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} : \left(\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \mu - \varepsilon < n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < \mu + \varepsilon\right).$$

i) Pour $\mu > 1$, il est clair qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mu - \varepsilon_0 > 1$ (par exemple $\varepsilon_0 = \frac{\mu - 1}{2}$) et $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > \mu - \varepsilon_0 > 1$ à partir d'un certain rang n_0. Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ est convergente.

ii) Pour $\mu < 1$, il est clair qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\mu + \varepsilon_1 < 1$ (par exemple $\varepsilon_1 = \frac{1 - \mu}{2}$) et $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < \mu + \varepsilon_1 < 1$ à partir d'un certain rang n_1. Ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum u_n$ est divergente.

iii) Pour $\mu = 1$, on ne peut rien conclure car par exemple si on prend les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n\ \ln^2 n}$, la première elle est divergente et la deuxième (série de Bertrand) elle est convergente, alors que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n \ln^2 n}}{\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}} - 1\right) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\frac{(n+1)}{n}\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n} - 1\right) \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(\frac{(n+1)}{n} - 1\right) = 1.\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.41 ***(Critère de Duhamel usuel (1839))****. Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs, telle que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ pour } n \longrightarrow +\infty.$$

i) Si $\mu > 1$*, alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

ii) Si $\mu < 1$*, alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

iii) Si $\mu = 1$*, on ne peut rien conclure pour la nature de la série* $\sum u_n$*.*

Exemple 2.42 ***1.*** *Étudier la nature de la série* $\sum \frac{n!e^n}{n^{n+1}}$*. On a*

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = ee^{-1} = 1. \end{aligned}$$

On applique le Critère de Duhamel, par le developpement, on a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = ee^{\left[(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Dans ce cas $\mu = \frac{1}{2} < 1$*, ainsi la série* $\sum \frac{n!e^n}{n^{n+1}}$ *est divergente.*

- **Critères de Gauss**

Proposition 2.43 ***(Critère de Gauss (1812))****. Soit* $\sum u_n$*. une série à termes strictement positifs telle que :*

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times\,]1, +\infty[\,, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Alors,

$$\exists k \in \mathbb{R}_+^*, u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha},$$

et par conséquent la série $\sum u_n$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge si* $\alpha \leq 1$*.*

Exemple 2.44 *Étudier la nature de la série*

$$\sum \left(\frac{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n+1} 2k} \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

mais on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

ainsi d'après la Proposition précédente, la série $\sum \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} . \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ *est divergente.*

2.3 Séries à termes quelconques

2.3.1 Séries alternées

Définition 2.45 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes quelconques.*

La série $\sum u_n$ *est dite* ***alternée*** *si pour tout* $n \in \mathbb{N} : u_n u_{n+1} < 0$.

Remarque 2.46 *Toute série alternée peut être écrite sous la forme* $\sum (-1)^n u_n$, *où* u_n *est de signe constant.*

Théorème 2.47 ***(Théorème de Leibniz (1682)).*** *Soit* $\sum (-1)^n u_n$ *une série alternée, si* $(u_n)_n$ *est décroissante et tend vers* 0, *alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

De plus sa somme S est toujours comprise entre deux termes consécutifs S_n et S_{n+1} de la suite de ses sommes partielles.

et le reste :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemple 2.48 *La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ est alternée et vérifie les hypothèses du Théorème précédent, et donc elle converge. Elle est dite séries de* ***Riemann alternée.***

2.3.2 Critère d'Abel pour les séries de la forme $\sum u_n v_n$

Théorème 2.49 ***(Critère d'Abel (1826))****. Soit la série $\sum u_n v_n$ tel que,*

i) la suite $(v_n)_n$ décroissante et converge vers 0,

ii) il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$.

Alors, la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$. Soit $\varepsilon > 0$ et soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors

$$|T_{p+q} - T_p| = \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} u_k v_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} (S_k - S_{k-1}) v_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p+1}^{p+q} S_{k-1} v_k\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p}^{p+q-1} S_k v_{k+1}\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_k + S_{p+q} v_{p+q} - S_p v_{p+1} - \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_{k+1}\right| \\
&= \left|S_{p+q} v_{p+q} - S_p v_{p+1} + \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k (v_k - v_{k+1})\right| \\
&\leq |S_{p+q}| |v_{p+q}| + |S_p| |v_{p+1}| + \sum_{k=p+1}^{p+q-1} |S_k| (|v_k - v_{k+1}|) \leq M |v_{p+q}| + M |v_{p+1}| + M \sum_{k=p+1}^{p+q-1} |v_k - v_{k+1}|.
\end{aligned}$$

Puisque la suite $(v_n)_n$ est décroissante, et alors

$$|T_{p+q} - T_p| \leq M v_{p+q} + M v_{p+1} + M (v_{p+1} - v_{p+q}) \leq 2M v_{p+1},$$

et comme la suite $(v_n)_n$ converge vers 0, alors il existe $N_\varepsilon > 0$, tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a $v_n \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \in \mathbb{N}^* : (p \geq N_\varepsilon \Rightarrow |T_{p+q} - T_p| < \varepsilon).$$

et par suite la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy et donc convergente. D'où la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

■

Exemple 2.50 *1. Étudier la nature de la série* $\sum \dfrac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$.

Posons : $v_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$*, alors on a :*

la suite à termes positifs $(v_n)_n$ *est décroissante vers* 0.

Dautre part considérons la suite $w_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$. *On a*

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-e^{in\frac{\pi}{2}}}{1-e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = e^{in\frac{\pi}{2}}.$$

d'où

$$|w_1 + w_2 + ... + w_n| \leq \frac{2}{\left|1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right|} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi la série $\sum \dfrac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$ *est convergente.*

2.3.3 Série absolument convergente

Définition 2.51 *La série* $\sum u_n$ *est dite* ***absolument convergente****, si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Proposition 2.52 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } S_n^A = \sum_{k=0}^{n} |u_k|,$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} u_n \text{ est une série absolument convergente} &\Leftrightarrow \text{ la série } \sum_{n\geq 0} |u_n| \text{ est convergente}\\ &\Leftrightarrow \text{ la suite } \left(S_n^A\right)_n \text{ est convergente}\\ &\Leftrightarrow \text{ la suite } \left(S_n^A\right)_n \text{ est de Cauchy.}\end{aligned}$$

$$\text{La suite } \left(S_n^A\right)_n \text{ est de Cauchy} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n, p : \left(p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|S_{n+p}^A - S_p^A\right| < \varepsilon\right).$$

Or on a

$$\left|S_{n+p}-S_p\right|=\left|\sum_{k=p+1}^{n+p}u_k\right|\leq\sum_{k=p+1}^{n+p}|u_k|=\left|S_{n+p}^A-S_p^A\right|<\varepsilon,$$

ainsi la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy, et donc elle est convergente et par suite la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ est convergente. ■

Remarque 2.53 *La réciproque de cette Proposition et en général fausse, par exemple : la série* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$, *elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.*

• **Série semi-convergente**

Définition 2.54 *Une série* $\sum u_n$ *est dite* ***semi-convergente*** *si elle est convergente et la série* $\sum |u_n|$ *diverge.*

Exemple 2.55 *La série* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $(0<\alpha\leq 1)$ *est semi-convergente.*

Définition 2.56 *(**Série commutativement convergente**). On dit qu'une série* $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ *est* ***commutativement converge****, si pour toute bijection* $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 0}u_{\varphi(n)}$ *est convergente.*

Proposition 2.57 *Toute série absolument convergente est commutativement convergente. Autrement dit : une série absolument convergente, converge toujours même si on change l'ordre de ses termes, et la somme ne dépend pas de l'ordre des termes.*

Remarque 2.58 *La propriété cité à la Proposition précédente n'est pas vraie si la série est semi-convergente, c'est-à-dire on ne peut pas changer l'ordre des termes.*

Exemple 2.59 *On a* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$ *puisque* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$. *D'autre part on a*

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+...\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\frac{1}{14}+...\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+...=\frac{S}{2},\end{aligned}$$

ainsi $S=0\neq\ln(2)$.

2.4 Produit des séries

Définition 2.60 *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries numériques.*

La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ *avec* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *est dite* ***produit des séries*** $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Exemple 2.61 *Soient* $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ *et* $\sum_{n\geq 0} \frac{b^n}{n!}$ *deux séries numériques, alors le terme général de la série produit* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *est*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Théorème 2.62 ***(Théorème de Cauchy (1821)).*** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries absolument convergentes, alors leur série produit* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *est absolument convergente et a pour somme le produit des sommes, c'est-à-dire*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Théorème 2.63 ***(Mertens (1875)).*** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série numérique absolument convergente et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *une série numérique convergente, alors la série* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *produit des* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$*, est convergente et a pour somme le produit des somme; c'est-à-dire*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

2.5 Exercices

Exercice 2.1. En utilisant la limite des suites des sommes partielles, déterminer la nature des séries numériques suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad ; \quad 2.\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1} \quad ; \quad 3.\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

Exercice 2.2. En utilisant la limite des suites des sommes partielles, déterminer la nature des séries numériques suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \quad ; \quad 2.\ \sum_{n\geq 3} \ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \quad ; \quad 3.\ \sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2.3. Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 0}\frac{n}{n+2} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0}e^{-n^2} \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 0}n^2e^{-n}.$$

Exercice 2.4. Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1}\sin^3\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2.5. Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1}\cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 1}\frac{2+\cos n}{n^3} \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\left(n+\ln\left(n\right)\right)}.$$

Exercice 2.6. Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1}\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 1}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{2n^3-1}.$$

Exercice 2.7. Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1}e^{\sin\left(\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right)} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 1}\frac{5^n-1}{2^n-1} \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n+1}.$$

Exercice 2.8. Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^n\sqrt{n}}{n!\ e^n} \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Exercice 2.9. Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln\left(n\right)} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0}\frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)}.$$

Exercice 2.10. Étudier la nature des séries à terme positifs suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1}\frac{1\times 3\times 5\times ...\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times ...\times 2n} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 1}\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)...\left(2n\right)}{\left(2n\right)^n}.$$

Exercice 2.11. Étudier la nature de la série suivante

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln^{\beta} n} \qquad (\beta \in \mathbb{R})\,.$$

Exercice 2.12. Étudier la nature de la série de **Bertrand** suivante

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})\,.$$

Exercice 2.13. Étudier la nature des séries (à termes quelconques) suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1} \frac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0} \frac{\arctan\left((-1)^n\right)}{n^3+5} \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Exercice 2.14. Étudier la nature des séries (à termes quelconques) suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^n}{n^3} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} \sin\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right).$$

Exercice 2.15. Étudier la nature des séries (à termes quelconques) suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n)}{n+1} \qquad ; \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 2.16. Étudier la nature des séries (à termes quelconques) suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{1+n^{\alpha}},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.17. Étudier selon les valeures du paramètre a, la convergence de la série $\sum u_n$ donnée par

$$u_n = (-1)^n \left(\frac{a}{a-1}\right)^n, \quad n \geq 1 \text{ et } a \neq 1.$$

Exercice 2.18. Former le produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ définie ci-dessous et étudier sa nature

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Exercices suplémentaires.

Exercice 2.19. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs, telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.

2. Notons $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles associée à $\sum \sqrt{u_n}$.

a - Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq K\sqrt{n}$.

Indication : on pourra utiliser, pour des a_k et b_k réels positifs, l'inégalité suivante

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

b - Montre que si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.

3. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ positive telle que $\sum u_n$ converge et $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge.

• **Solutions des exercices**

Solution de l'exercice 2.1.

1. La suite de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right),$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 3,$$

ainsi la série $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente et sa somme est

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 3.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1},$$

alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

d'où
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2},$$
ainsi la série $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ est convergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)},$$
donc
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right).$$
Or
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+2)} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$
et
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{(n+1)},$$
d'où
$$S_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}\right] - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)},$$
donc
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4},$$
ainsi la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1},$$
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \\ &= \sqrt{n+2}-1, \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty,$$

ainsi la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$ est divergente.

2. Pour tout $n \geq 3$, on a

$$\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) = \ln(n-2) - \ln(n),$$

alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{n} \ln\left(1-\frac{2}{k}\right) = \sum_{k=3}^{n} \left(\ln(k-2) - \ln(k)\right) = \sum_{k=3}^{n} \ln(k-2) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \ln(k) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k) \\ &= \ln(2) - \ln(n-1) - \ln(n) = \ln(2) - \ln(n(n-1)), \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = -\infty,$$

ainsi la série $\sum \ln\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ est divergente.

3. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \left(\ln(n-1) - \ln(n)\right) + \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right),$$

alors

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) - \ln(k)\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right),$$

or

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) - \ln(k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = -\ln(n)$$

et

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(2),$$

donc

$$S_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2),$$

d'où

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = -\ln(2),$$

ainsi la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.3.

1. Comme

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0,$$

alors la série $\sum \frac{n}{n+2}$ est divergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$e^{-n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Théorème 2.19, la série $\sum e^{-n^2}$ est convergente.

3. En appliquant le Théorème de l'Hôpital, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2 e^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^4}{e^n} = 0,$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum n^2 e^{-n}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.4.

1. On a

$$\frac{1}{4n^2 - 1} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2},$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum \frac{1}{4n^2 - 1}$ est convergente.

2. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 + 1} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2n^3\left(1 + \frac{1}{2n^3}\right)} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi la série $\sum \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 + 1}$ est convergente.

3. On a :

$$\sin^3\left(\frac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3},$$

et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.5.

1. On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, alors la série $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{2+\cos(n)}{n^3} \leq \frac{3}{n^3},$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente, ainsi d'aprés le Théorème 2.19, la série $\sum \frac{2+\cos(n)}{n^3}$ est convergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n(n+\ln(n))} \leq \frac{1}{n^2},$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Théorème 2.19, la série $\sum \frac{1}{n(n+\ln(n))}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.6.

1. On a

$$\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ est convergente.

2. Comme

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

alors

$$\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}},$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

3. On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{2n^3-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(n)}{2n-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(n)}{2n} = 0,$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum \frac{\ln(n)}{2n^3-1}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.7.

1. Comme
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\sin\left(\dfrac{1}{n\,(n+1)}\right)} = 1 \neq 0,$$
alors la série $\sum e^{\sin\left(\dfrac{1}{n\,(n+1)}\right)}$ est divergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{5^n-1}{2^n-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^n \left(\frac{1-\dfrac{1}{5^n}}{1-\dfrac{1}{2^n}}\right),$$
alors
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{5^n-1}{2^n-1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty,$$
ainsi la série $\sum \dfrac{5^n-1}{2^n-1}$ est divergente.

3. Il est clair que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\dfrac{n^2}{2^n+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n^4}{2^n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n^4}{e^{n\ln(2)}} = 0,$$
or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum \dfrac{n^2}{2^n+1}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.8.

1. On pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, alors on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n},$$
donc
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1,$$
d'où d'après le Critère de D'Alembert (Corollaire 2.31), la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ est convergente.

Pour vérifier que la limite du terme général $\dfrac{n!}{n^n}$ vaut 0, nous utilisons la formule de Stirling suivante
$$n! \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n},$$

en effet :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}{e^n} = 0.$$

2. On pose $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}$, alors en utilisant la formule de Stirling, on trouve

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^n\sqrt{n}}{n!\ e^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

ainsi la série $\sum \dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}$ est divergente.

3. On a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

alors la série $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ est divergente.

Solution de l'exercice 2.9.

1. La fonction

$$f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$

est continue et décroissante alors, d'aprés la Proposition 2.24, la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ sont de même nature. Or

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{y \longrightarrow +\infty} \int_2^{y} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{y \longrightarrow +\infty} \int_{\ln(2)}^{y} \frac{1}{u}du = \lim_{y \longrightarrow +\infty} (\ln(y) - \ln(\ln(2))) = +\infty,$$

ainsi la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

2. Il est clair que le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)}$, sont de la forme d'une somme des termes des suites arithmétiques, alors

$$\frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)} = \frac{2\left(\dfrac{n}{2}\right)(1+n)}{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)(1+(2n+1))} = \frac{n}{n+1},$$

donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)} = 1 \neq 0,$$

d'où, la série $\sum \dfrac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)}$ est divergente.

Solution de l'exercice 2.10.

1. On pose $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}$, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \ ,$$

donc le Critère de D'Alembert ne donne aucune information sur la nature de la série $\sum \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}$. Mais on peut donner un développement limité de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où d'après le Critère de Duhamel (Corollaire 2.41, la série $\sum \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}$ est divergente.

2. On pose $u_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n}$, alors on a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)(n+2)...(2n)(2n+1)(2n+2)}{(2(n+1))^{n+1}} \times \frac{(2n)^n}{n(n+1)(n+2)...(2n)} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(n+1)} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1,$$

car $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Ainsi d'après le Critère de D'Alembert, la série $\sum \dfrac{n(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.11. Étude de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^\beta n} \quad (\beta \in \mathbb{R}).$$

En effet : comme

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^\beta n} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \beta < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \beta = 0 \\ 0 & \text{si} \quad \beta > 0 \end{cases} ,$$

alors la série $\sum \dfrac{1}{\ln^\beta n}$ est divergente pour $\beta \leq 0$.

Pour $\beta > 0$: on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln^{\beta} n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln^{\beta} n}{n} = 0,$$

or la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, ainsi d'aprés le Corollaire 2.22, la série $\sum \frac{1}{\ln^{\beta} n}$ est divergente.

D'où la série $\sum \frac{1}{\ln^{\beta} n}$ est divergente pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2.12. Étude de la série de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

On pose $u_n = \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$. Premièrement nous donnons un tableau qui montre la limite du terme général $\frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ suivant les valeurs de α, β.

	$\alpha > 0$	$\alpha = 0$	$\alpha < 0$
$\beta > 0$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$
$\beta = 0$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$
$\beta < 0$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$

D'après le tableau précédent, il est clair que pour $\alpha < 0$ et ($\alpha = 0$ et $\beta \leq 0$), la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ est divergente.

- Pour $\alpha = 0$ et $\beta > 0$ la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ est divergente. (cette étape déja fait dans l'Exercice précédent).

- Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, en effet :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = 0,$$

alors pour $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente et donc d'après le Corollaire 2.22, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ est convergente.

Pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln^{\beta} n}{n^{1-\alpha}} = 0,$$

et comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, donc d'aprés le Corollaire 2.22, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ est divergente.

Pour $\alpha = 1$, la fonction $\dfrac{1}{x\ln^\beta x}$ positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^\beta x}dx$ et la série $\sum \dfrac{1}{n\ln^\beta n}$ sont de même nature. Or si $\beta \neq 1$ on a

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^\beta x}dx = \int_{\ln(2)}^{+\infty} u^{-\beta}du = \lim_{t\longrightarrow+\infty} \int_{\ln(2)}^{t} u^{-\beta}du = \lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{1-\beta}u^{1-\beta}\Big]_{\ln(2)}^{t} = \begin{cases} \dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{si} \quad \beta > 1 \\ +\infty & \text{si} \quad \beta < 1 \end{cases},$$

alors dans ce cas, si $\beta > 1$ la série $\sum \dfrac{1}{n\ln^\beta n}$ est convergente et si $\beta < 1$ la série $\sum \dfrac{1}{n\ln^\beta n}$ est divergente.

Si $\beta = 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ est divergente (voir l'Exercice 2.9).

Ainsi si $\alpha > 1$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente.

• Pour $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, la série de Bertrand devient une série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

• Pour $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, en effet : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}}{\dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^\varepsilon \ln^\beta n} = 0.$$

Il est clair que pour $\alpha - \varepsilon > 1$ (i.e. $\alpha > 1 + \varepsilon$), la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ est convergente.

Si $\alpha > 1$, alors il existe un $\varepsilon_1 > 0$ (par exemple $\varepsilon_1 = \dfrac{\alpha-1}{2}$) tel que $\alpha > 1 + \varepsilon_1$, donc la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente.

Si $\alpha \leq 1$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^\alpha}}{\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln^\beta n = 0,$$

et comme la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \leq 1)$ est divergente, alors d'après le Corollaire 2.22, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est divergente.

Comme un résumé des résultats obtenu ci-dessus la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Solution de l'exercice 2.13.

1. On a

$$\left| \frac{\cos(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

or la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, alors la série $\sum \frac{\cos\left(\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente, ainsi elle est convergente.

2. On a

$$\left|\frac{\arctan\left((-1)^n\right)}{n^3+5}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^3+1} \underset{\sim}{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n^3},$$

or la série $\sum \frac{\frac{\pi}{2}}{n^3}$ est convergente, alors la série $\sum \frac{\arctan\left((-1)^n\right)}{n^3+5}$ est absolument convergente, ainsi elle est convergente.

3. En appliquant le Théorème d'Abel (Théorème 2.49), en effet : d'une part, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right| = |1-1+1-1+...+(-1)^n| \leq 2.$$

D'autre part, la suite $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à termes positifs, décroissante et tend vers zéro. Ainsi, la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.14.

1. On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^3} = \pm\infty,$$

alors la série $\sum (-1)^n \frac{e^n}{n^3}$ est divergente.

2. On a

$$\left|(-1)^n \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} \sin\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)\right| \leq \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} \underset{\sim}{+\infty} \frac{1}{2n^2},$$

et la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ est convergente, alors la série $\sum (-1)^n \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} \sin\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)$ est absolument convergente. Ainsi elle est convergente.

Solution de l'exercice 2.15.

1. Comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right),$$

alors les deux séries $\sum\ (-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et $\sum\ (-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ sont de même nature.

Or

$$(-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

et on applique le Théorème d'Abel. En effet : d'une part, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right|\leq 2.$$

D'autre part, la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, décroissante et tend vers 0 . Donc la série $\sum(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ est convergente.

2. En appliquant le Théorème d'Abel, en effet : d'une part, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sin k\right|=\left|0+\sin(1)+\sin(2)+...+\sin(n)\right|,$$

et

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}e^{ik}\right| &= \left|1+e^{i}+e^{2i}+...+e^{ni}\right|=|(1+\cos(1)+\cos(2)+...+\cos(n))\\ &\quad +i\left(0+\sin(1)+\sin(2)+...+\sin(n)\right)|,\end{aligned}$$

alors il est clair que

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sin k\right|\leq\left|\sum_{k=0}^{n}e^{ik}\right|=\frac{\left|1-e^{(n+1)i}\right|}{\left|1-e^{i}\right|}\leq\frac{2}{\left|(1-\cos(1))-i\sin(1)\right|}=\frac{2}{\sqrt{(1-\cos(1))^2+\sin^2(1)}}=M.$$

D'autre part, il est facile de montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, décroissante et tend vers zéro.

D'où la série $\sum\dfrac{\sin(n)}{n+1}$ est convergente.

3. En appliquant le Théorème d'Abel, en effet : d'une part on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos k\right|\leq\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{ik}\right|$$

car $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos k$, représente la partie réelle de nombre complexe $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{ik}$. Or

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{ik}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(-e^{i}\right)^k\right|=\left|\frac{1-\left(-e^{i}\right)^{n+1}}{1+e^{i}}\right|\leq\frac{|1|+\left|\left(-e^{i}\right)^{n+1}\right|}{\left|1+e^{i}\right|}\\ &\leq \frac{2}{\sqrt{(1+\cos(1))^2+\sin^2(1)}}=M.\end{aligned}$$

D'autre part, il est facile de montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à termes positifs, décroissante et tend vers zéro.

D'où la série $\sum (-1)^n \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.16.

1. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ et en multipliant le numérateur et le dénominateur par $n-(-1)^n\sqrt{n}$, on trouve

$$u_n = \frac{(-1)^n n - \sqrt{n}}{n^2-n} = \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}-\sqrt{n}}.$$

D'une part, d'après le Théorème d'Abel, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n-1}$ est convergente.

D'autre part on a

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}-\sqrt{n}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

et comme la série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, alors la série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}-\sqrt{n}}$ à termes positifs est convergente. Ainsi la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est la somme de deux séries convergentes, donc elle est convergente.

2. On pose $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha>0 \\ \pm\dfrac{1}{2} & \text{si } \alpha=0 \\ \pm 1 & \text{si } \alpha<0 \end{cases}.$$

Donc, pour $\alpha\le 0$, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{1+n^\alpha}$ est divergente.

Si $\alpha>0$: en appliquant le Théorème d'Abel, en effet : $\left|\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k\right| \le 2$, et la suite $\left(\dfrac{1}{1+n^\alpha}\right)_{n\ge 2}$ est à termes positifs, décroissante et tend vers 0. Ainsi la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{1+n^\alpha}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2.17. Soit $u_n = (-1)^n\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^n$, on étudie tout d'abord la convergence absolue de la série $\sum u_n$.

On pose $v_n = |u_n| = \left|\dfrac{a}{a-1}\right|^n$, alors la série $\sum v_n$ est géométrique de raison $q=\left|\dfrac{a}{a-1}\right|$, donc il suffit de comparer sa raison q à 1.

Si $a\le 0$: $\left|\dfrac{a}{a-1}\right| = \dfrac{|a|}{|a-1|} = \dfrac{|a|}{|a|+1} < 1$, ainsi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Si $a>1$: $\left|\dfrac{a}{a-1}\right| = \dfrac{a}{a-1} > 1$, ainsi la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente et n'est pas convergente car

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{a-1}\right)^n = \pm\infty.$$

Si $0 < a < 1$: $\left|\frac{a}{a-1}\right| = \frac{|a|}{|a-1|} = \frac{a}{1-a}$, alors on distingue les cas suivants :

Si $\frac{a}{1-a} < 1$, ou encore $0 < a < \frac{1}{2}$, ainsi la série $\sum u_n$ converge absolument.

Si $\frac{a}{1-a} > 1$, ou encore $\frac{1}{2} < a < 1$, ainsi la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente et n'est pas convergente car

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{a-1}\right)^n = \pm\infty.$$

Si $\frac{a}{1-a} = 1$, ou encore $a = \frac{1}{2}$, alors $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\not\rightarrow} 0$, ainsi la série $\sum u_n$ diverge.

En conclusion $\begin{cases} \text{Si } a < \frac{1}{2}, \text{ la série } \sum u_n \text{ converge} \\ \text{Si } \frac{1}{2} \le a < 1 \text{ ou } a > 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$.

Solution de l'exercice 2.18. Comme les séries données sont définies pour $n \geq 1$ et que la définition générale du produit de deux séries est exprimée pour $n \geq 0$, on peut poser, sans changer la nature des séries, $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$. Le produit des deux séries $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ est donc la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \frac{1}{2^{n-k-1}}.$$

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs convergentes, en effet :

$\sum u_n$ c'est la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$, donc converge et la série $\sum v_n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} < 1$, donc converge.

En appliquant le Théorème 2.62, la série produit $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Chapitre 3

Suites de fonctions

On considère l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, de toutes les fonctions définies sur I (I intervalle de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$; à savoir :

$$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}) = \{f \;/ f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ f \textit{ fonction}\}.$$

Définition 3.1 *On appelle **suite de fonctions** sur I toute application*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \\ & n & \mapsto & f(n) \end{array}$$

On note $f(n)$ par f_n et on note la suite par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1 Convergence simple (ponctuelle) d'une suite de fonctions

Définition 3.2 *On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur I vers une fonction f (ou bien converge point par point sur I) si*

$$\textit{pour tout } x \in I,\ \textit{la suite numérique } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge vers } f(x),$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x).$$

*f est appelée **limite simple** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; et on écrit*

$f_n \overset{\textbf{converge simplement}}{\longrightarrow} f$ sur I ou bien $f_n \overset{\textbf{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I.

Ceci se traduit par

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Exemple 3.3 ***1.*** *Soit la suite de fonctions* $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sin(x)$. *Alors la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement vers la fonction* $f(x) = \sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

2. *La suite de fonctions* $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$, *car*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = 0 \\ 1 & si \;\; x > 0 \end{cases},$$

et alors : $f_n \overset{CS}{\longrightarrow} f$ *sur* $\mathbb{R}_+$, *où* $f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = 0 \\ 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$.

3. *Soit la suite de fonctions* $\psi_n(x) = n\exp(-nx)$; $x \in \mathbb{R}^*$.

Il est clair que pour x *réel strictement positif,* $\psi_n(x) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. *Donc la suite de fonctions* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers la fonction identiquement nulle, sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x < 0$, *alors* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \psi_n(x) = -\infty$, *ainsi* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas simplement sur* $]-\infty, 0[$.

Remarque 3.4 *L'Exemple précédent montre que la continuité des fonctions* f_n *n'entraîne pas forcément la continuité de la fonction limite* f *et l'intégrale de la limite* f *n'est pas forcément égale à la limite des intégrales des fonctions* f_n.

Existe-il une notion de convergence de suites de fonctions qui permet d'assurer que :

a - La fonction limite f est continue sur l'intervalle I si toutes les fonctions f_n le sont.

b - La permutation entre la limite et l'intégrale est correcte?

Nous allons étudier cette question dans le paragraphe qui suit.

3.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 3.5 *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformément*** *vers la fonction* f *sur* I *si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0, \tag{3.1}$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E : (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

En posant $\|f_n - f\| = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, *alors (3.1) se traduit par*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon).$$

On dit aussi que f_n *converge vers* f *pour la norme de la convergence uniforme et que* f *est la* ***limite uniforme*** *sur* I *de la suite* $(f_n)_n$.

Et on note : $f_n \overset{\textbf{\textit{converge uniformément}}}{\longrightarrow} f$ *sur* I *ou bien* $f_n \overset{\textbf{\textit{CU}}}{\longrightarrow} f$ *sur* I *ou bien* $f_n \rightrightarrows f$.

Exemple 3.6 ***1.*** *Pour tout entier* n, *soit*

$$\begin{array}{llll} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n(1-x). \end{array}$$

La suite de fonctions $(f_n)_n$ *converge simplement sur* $[0,1]$, *vers la fonction nulle.*

Calculons $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ *sur* $[0,1]$. *Par étude des variations de la fonction* $|f_n(x) - f(x)| = x^n(1-x)$ *sur* $[0,1]$, *on trouve que*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Or

$$\forall n \geq 0, \ 0 \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leq 1 - \frac{n}{n+1},$$

d'où, d'après le Théorème de trois suites, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\| = 0$, *ainsi* $f_n \overset{\textbf{\textit{CU}}}{\longrightarrow} 0$ *sur* $[0,1]$.

2. *La suite de fonctions définie sur* $[0,1]$, *par* $f_n(x) = x^n$ *n'est pas uniformément convergente sur* $[0,1]$.

En effet : il est clair que la suite $(f_n)_n$ *converge simplement vers la fonction* f *sur* $[0,1]$ *telle que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x \in [0,1[\\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases},$$

mais

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n - 0| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n - 0| = \sup_{x\in[0,1[} x^n,$$

car $f_n(1) - f(1) = 0$. *Et comme* $\sup_{x\in[0,1]} x^n = 1$ *(la fonction* $x \mapsto x^n$ *est croissante sur* $[0,1[$*). Alors* $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ *ne tend pas vers* 0. *Ainsi la suite* $(f_n)_n$ *n'est pas uniformément convergente sur* $[0,1]$.

La proposition suivante assure la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un intervalle I, sans connaître la fonction limite f.

Théorème 3.7 ***(Théorème de Cauchy pour la convergence uniforme)***. *Une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformément*** *sur* I *si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ \forall p,q\in\mathbb{N}:(p>q\geq N_\varepsilon\Rightarrow\|f_p-f_q\|<\varepsilon)$$

où

$$\|f_p-f_q\|=\sup_{x\in I}|f_p(x)-f_q(x)|.$$

Proposition 3.8 ***(Condition suffisante de la convergence uniforme)***. *Pour qu'une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* f*, il suffit qu'il existe une suite numérique* $(u_n)_n$ *telle que :*

$$|f_n(x)-f(x)|\leq u_n,\ \forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I\ \textit{et}\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n=0.$$

Démonstration. on a

$$|f_n(x)-f(x)|\leq u_n,\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I\Rightarrow 0\leq\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

alors

$$0\leq\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n=0.$$

D'où d'après le Théorème de trois suites, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0,$$

ainsi $f_n\overset{\mathbf{CU}}{\longrightarrow}f$. ■

Exemple 3.9 ***1.*** *Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions* $(f_n)_n$*, sur* $[0,1]$ *telle que*

$$f_n(x)=\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}.$$

En effet : pour tout $x\in[0,1]$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}f_n(x)=e^{-x}$ *(i.e.* $f_n\overset{CS}{\longrightarrow}e^{-x}$ *sur* $[0,1]$*).*

Pour la convergence uniforme : on a pour tout $x\in[0,1]$,

$$\left|\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}-e^{-x}\right|=|x|\left|\frac{x-e^{-x}}{n+x}\right|\leq\frac{|x|+|e^{-x}|}{n+x}\leq\frac{2}{n}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0,$$

donc d'après la Proposition précédente, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* e^{-x} *sur* $[0,1]$.

• **Quelques opérations**

Proposition 3.10 *Soient* $(f_n)_n$ *et* $(g_n)_n$ *deux suites de fonctions définies sur* I *convergeant uniformément respectivement vers* f *et* g*. Si* λ *et* μ *deux nombres réels, alors la suite de fonctions* $(\lambda f_n + \mu g_n)_n$ *converge uniformément vers la fonction* $\lambda f + \mu g$ *sur* I.

Proposition 3.11 *Soient* $(f_n)_n$ *et* $(g_n)_n$ *deux suites de fonctions définies sur* I *convergeant uniformément respectivement vers* f *et* g *sur* I.

Si les fonctions limites f *et* g *sont bornées sur* I*, alors la suite de fonctions* $(f_n g_n)_n$ *converge uniformément vers* fg *sur* I.

Proposition 3.12 ***(La convergence uniforme entraîne la convergence simple).***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définie sur* I*. Alors*

$$f_n \xrightarrow{\boldsymbol{CU}} f \text{ sur } I \Rightarrow f_n \xrightarrow{\boldsymbol{CS}} f \text{ sur } I.$$

Démonstration. Pour tout $x \in I$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

or

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } f_n \xrightarrow{\mathbf{CU}} f \text{ sur } I,$$

alors $\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)|$ converge vers 0, d'où la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction f sur I. ■

Remarque 3.13 *La réciproque de la Proposition précédente est en général fausse.*

En effet : reprenons la suite de fonctions $(f_n)_n$ *définie sur* $[0,1]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$*, par* $f_n(x) = x^n$*. Il est clair que* $(f_n)_n$ *converge simplement sur* $[0,1]$ *vers la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x \in [0,1[\\ 1 & si \ \ x = 1 \end{cases},$$

mais la suite $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$*, puisque*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\not\rightarrow} 0.$$

3.3 Propriétés des suites de fonctions uniformément convergentes

3.3.1 Continuité

Théorème 3.14 ***(Continuité Seidel (1847)).*** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$, si*

i) pour tout entier n, la fonction f_n est continue en a,

ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction f.

Alors f est continue en a.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, alors on a

$$f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } I \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \left(n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \right),$$

en particulier pour $n = N_\varepsilon$, on a

$$|f_{N_\varepsilon}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ , \ \forall x \in I.$$

Comme la fonction f_{N_ε} est continue en a, alors

$$\exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x \in I : \left(|x - a| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Donc $\exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x \in I : |x - a| \leq \eta_\varepsilon :$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x) + f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a) + f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| + |f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)|) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction f est continue en a. ■

On déduit immédiatement le Corollaire suivant.

Corollaire 3.15 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si,*

i) pour tout entier n, la fonction f_n est continue sur I ,

ii) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction f.

Alors f est continue sur I.

Une des méthodes pour démontrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple f sur un domaine I, est la contraposée du Corollaire précédent, plus précisement on a.

Proposition 3.16 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions qui converge simplement sur* I *vers* f.

Si pour tout entier n, *la fonction* f_n *est continue sur* I , *Alors*

$$f \text{ est discontinue en } x_0 \, (\in I) \Rightarrow f_n \overset{\boldsymbol{CU}}{\nrightarrow} f \text{ sur } I.$$

Exemple 3.17 *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *définie sur* $[0, +\infty[$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$, *par* $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$.

Nous remarquons que pour tout entier n, *la fonction* f_n *est continue sur* $[0, +\infty[$.

De plus il est facile de voir que $f_n \xrightarrow{CS} f$ *sur* $[0, +\infty[$ *avec*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x > 0 \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}.$$

La fonction f *n'est pas continue en* $x_0 = 0$, *d'où d'après la Proposition précédente la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément sur* $[0, +\infty[$.

On a vu que la convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme, cependent sous certaines conditions nous avons cette implication.

Théorème 3.18 ***(Théorème de Dini (1878))****.* *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions qui converge simplement sur* $[a, b]$ $(\subset \mathbb{R})$ *vers une fonction* f *continue sur* $[a, b]$. *Si la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *est monotone sur* $[a, b]$, *alors* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$.

3.3.2 Intégration

Théorème 3.19 ***(Théorème d'intégration)****.* *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$: *la fonction* f_n *est intégrable sur* $[a, b]$.

Si $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$, *alors, la fonction* f *est intégrable sur* $[a, b]$. *De plus*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Démonstration. Pour montrer que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ il suffit de montrer que $\int_a^b |f(x)|\, dx$ est finie. On a

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b |f(x) - f_n(x) + f_n(x)|\, dx \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx + \int_a^b |f_n(x)|\, dx$$

$$\leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)|\, dx + \int_a^b |f_n(x)|\, dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |(f_n(x) - f(x))| + \int_a^b |f_n(x)|\, dx$$
$$\leq (b-a) M_1 + M_2 < +\infty.$$

Les deux derniers inégalités découlent du fait que la suite $\left(\sup_{x\in[a,b]} |(f_n(x) - f(x))|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc elle est bornée par un nombre réel M_1, et de l'intégrabilité de la fonction f_n sur $[a,b]$ c'est-à-dire on peut majorer $\int_a^b |f_n(x)|\, dx$ par un nombre réel M_2. D'où la fonction f est intégrable sur $[a,b]$.

- Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\, dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |(f_n(x) - f(x))|\, dx \leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |(f_n(x) - f(x))|\, dx = (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |(f_n(x) - f(x))|,$$

et comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon : \sup_{x\in[a,b]} |(f_n(x) - f(x))| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

et par suite

$$\left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\right| \leq (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

ainsi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

■

Corollaire 3.20 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $[a,b]$.*

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors, pour tout $\alpha \in [a,b]$, la suite de fonctions $(F_n)_n$ telle que $F_n(x) = \int_\alpha^x f_n(t)\, dt$, converge uniformément vers la fonction $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt$ sur $[a,b]$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} F_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\alpha^x f_n(t)\, dt = \int_\alpha^x \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t)\, dt = \int_\alpha^x f(t)\, dt = F(x).$$

3.3.3 Dérivation

Théorème 3.21 ***(Théorème de dérivation).*** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: la fonction f_n est continument dérivable sur I (i.e. $f_n \in C^1$ sur I) et converge simplement vers une fonction f sur I. Si la suite de fonction $\left(f_n'\right)_n$ converge uniformément vers une fonction g sur I. Alors, la fonction f est continument dérivable sur I (i.e. $f \in C^1$ sur I) et*

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in I,$$

c'est-à-dire

$$\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in I.$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in I^2$, comme I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $[a,b] \subset I$.

On a

$$f_n \in C^1([a,b]) \Rightarrow f_n' \text{ est continue sur } [a,b],$$

et d'après le Théorème de continuité, on conclut que la fonction g est continue sur $[a,b]$.

Pour tout $x \in [a,b]$ on pose :

$$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt,$$

alors d'après le Corollaire d'intégration on a $F_n \xrightarrow{CU} F$ sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt + f_n(x_0) - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \ , \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|, \end{aligned}$$

et comme $f_n \xrightarrow{CS} f$ et $F_n \xrightarrow{CU} F$ sur $[a,b]$, alors la suite de terme général $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ est convergente vers 0. Ainsi $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[a,b]$.

De plus on a,

$$\left.\begin{array}{c} f'(x) = g(x) \text{ sur } [a,b] \\ g \text{ continue sur } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow f \in C^1([a,b]). \blacksquare$$

3.4 Exercices

Exercice 3.1. Étudier la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_n$ suivantes

$$1.\ f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+n^2x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad ; \quad 2.\ f_n(x) = e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R} \quad ; \quad 3.\ f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.2. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_n$ suivantes

$$1.\ f_n(x) = \frac{2nx^3}{1+nx^2}, \text{ sur } \mathbb{R} \ ; \ 2.\ f_n(x) = xe^{-nx}, \text{ sur } \mathbb{R}_+ \ ; \ 3.\ f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}.$$

Exercice 3.3. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n\left(x^3+x\right)e^{-x}}{nx+1}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f sur $[0,1]$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle $[a,1]$ où $a>0$.
3. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniforme vers f sur $[0,1]$?

Exercice 3.4. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n^2x^2}$$

1. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $\mathbb{R}$ en fonction de α.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

   a - Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$

   b - Pour quelles valeurs de α a-t-on

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exercice 3.5. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$, et la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini.
3. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 3.6. Soit la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge uniformément sur $[-1,1]$, vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n'(x) = f'(x)$, dans tout intervalle de la forme suivante : $[-1,b]$, $b<0$ ou $[a,1]$, $a>0$.

3. Montrer que cette dernière propriété n'est pas vraie sur $[-1,1]$ (le Théorème sur la dérivation des suites de fonctions terme à terme ne s'applique pas ici sur $[-1,1]$).

• **Solutions des exercices**

Solution de l'exercice 3.1.

1. $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+n^2x}$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x=0: \; f_n(0) = 0 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{Si } x\neq 0: \; \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{x\sqrt{n}}{1+n^2x} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; \forall x\in\mathbb{R} : f_n(x) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \; f_n \overset{CS}{\longrightarrow} 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

2. $f_n(x) = e^{-nx}$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x=0: \; f_n(0) = 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1 \\ \text{Si } x>0: \; \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{-nx} = 0 \\ \text{Si } x<0: \; \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{-nx} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \; \forall x\in\mathbb{R}_+ : f_n(x) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ où } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; f_n \overset{CS}{\longrightarrow} f \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

3. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } -1 \leq x \leq 1 : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n} = 0 \\ \text{Si } x > 1 : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left| \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \right| = +\infty \\ \text{Si } x < -1 : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{CS} 0 \text{ sur } [-1,1].$$

Solution de l'exercice 3.2.

1. $f_n(x) = \dfrac{2nx^3}{1+nx^2}$,

• La convergence simple sur $\mathbb{R}$: on a

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 : f_n(0) = 0 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{Si } x \neq 0 : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{2nx^3}{1+nx^2} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{2nx^3}{nx^2} = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{CS} 2x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

• La convergence uniforme sur $\mathbb{R}$: on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 2x| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{2nx^3}{1+nx^2} - \frac{2x\left(1+nx^2\right)}{1+nx^2} \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{2x}{1+nx^2} \right|.$$

Étude de la variation de la fonction $h_n(x) = \dfrac{2x}{1+nx^2}$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$h_n^{'}(x) = \frac{2\left(1-nx^2\right)}{\left(1+nx^2\right)^2} \Rightarrow \left(h_n^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

on déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$h_n^{'}(x)$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$h_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

,

d'où $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi la suite de fonction $\dfrac{nx^2}{1+n^3x^3}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

2. $f_n(x) = xe^{-nx}$,

• La convergence simple sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } x=0 : f_n(0) = 0 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{si } x>0 : \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} xe^{-nx} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{x}{e^{nx}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{CS} 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

• La convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$: on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|xe^{-nx}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} xe^{-nx}$$

Étude de la variation de la fonction $f_n(x) = xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$: on a

$$f_n'(x) = e^{-nx}(1-nx) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n},$$

de plus $f_n(x) \nearrow$si $x \leq \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) \searrow$si $x \geq \dfrac{1}{n}$, d'où $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{en} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi la suite de fonctions xe^{-nx} est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.

3. • $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$,

• La convergence simple sur $[0,1]$:

Si $x=0$, $f_n(0) = 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Soit $x > 0$, alors il existe un certain $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $x > \dfrac{1}{n}$, donc $f_n(x) = 0 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi la suite de fonctions $(f_n(x))_n$ converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}.$$

• La convergence uniforme sur $[0,1]$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, mais la fonction limite n'est pas continue sur $[0,1]$, alors d'après la Proposition 3.16, la suite de fonctions $(f_n(x))_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Nous remarquons que la suite de fonctions $(f_n(x))_n$ converge uniformément sur $[a,1]$ pour tout $a > 0$. En effet : Soit $x \in [a,1]$, alors

$$x \geq a, \text{ donc } \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} < \underbrace{\left[\frac{1}{a}\right] + 1}_{=N},$$

ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < x \leq 1$, et par suite $f_n(x) = 0 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\sup_{x \in [a,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [a,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a,1]} |0| = 0 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où la convergence uniforme sur $[a, 1]$ où $a > 0$.

Solution de l'exercice 3.3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Si $x = 0$: $f_n(0) = 0 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $x \in \left]0, 1\right]$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n\left(x^3 + x\right)e^{-x}}{nx} = \left(x^2 + 1\right)e^{-x},$$

car $x \neq 0$ sur $\left]0, 1\right]$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$, vers la fonction f tel que

$$f(x) = \begin{cases} \left(x^2 + 1\right)e^{-x} & \text{si } x \in \left]0, 1\right] \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}.$$

2. Soit $a > 0$ et $x \in [a, 1]$, alors

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n\left(x^3 + x\right)e^{-x}}{nx + 1} - \left(x^2 + 1\right)e^{-x} \right| = \frac{\left(x^2 + 1\right)e^{-x}}{nx + 1} \leq \frac{2}{na + 1} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, d'aprés la Proposition 3.8, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, 1]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, 1]$, mais la fonction limite f est discontinue sur $[0, 1]$, donc d'après la Proposition 3.16, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Solution de l'exercice 3.4.

1. Soit $\alpha > 0$, alors,

si $x = 0$: $f_n(0) = 0 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $x \neq 0$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\alpha x e^{-n^2 x^2} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x \frac{n^\alpha}{e^{n^2 x^2}} = 0,$$

alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement, vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha \leq 0$, il est facile de voir que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\alpha x e^{-n^2 x^2} = 0.$$

2. Remarquons que les fonctions f_n sont impaires et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f_n'(x) = n^\alpha e^{-n^2x^2}\left(1-2n^2x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}n},$$

d'où

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} n^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}},$$

ainsi $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha < 1$.

3. a. On a

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = -\frac{n^\alpha}{2n^2}\int_0^{+\infty} -2n^2x\ e^{-n^2x^2}dx = -\frac{1}{2}n^{\alpha-2}\left(\left.e^{-n^2x^2}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{2}n^{\alpha-2}.$$

b. On a $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ car $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha < 2.$$

Nous remarquons que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ pour $\alpha \in [1,2[$ alors qu'il n'y a pas de convergence uniforme de f_n sur cette zone.

Solution de l'exercice 3.5.

1. La convergence simple sur $[0,1]$.

Si $x = 0$: $f_n(0) = 0 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $x \in]0,1]$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2^nx}{1+2^nnx^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2^nx}{2^nx\left(\frac{1}{2^nx}+nx\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2^nx}+nx} = 0,$$

d'où, $f_n(x) \overset{CS}{\longrightarrow} 0$ sur $[0,1]$.

2.

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2^nx}{1+2^nnx^2}dx = \frac{1}{2n}\ \ln\left(1+2^nnx^2\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{2n}\ln\left(1+2^nn\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2n}\ln\left(1+2^n n\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2n}\ln\left[2^n n\left(\frac{1}{2^n n}+1\right)\right] \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n\ln(2)}{2n} + \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\ln(n)}{2n} + \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{2^n n}+1\right)}{2n} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2^{n+1}n^2} = \frac{\ln(2)}{2}.
\end{aligned}$$

3. Comme

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n = \frac{\ln(2)}{2}$$

et

$$\int_0^1 \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0dx = 0 \neq \frac{\ln(2)}{2},$$

alors, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Solution de l'exercice 3.6.

1. Il est clair que, pour tout $x \in [-1,1]$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{x}{1+n^2x^2} = 0,$$

donc la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers la fonction nulle.

D'autre part $f_n'(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ s'annule pour $x = \pm\dfrac{1}{n}$, et le tableau de variation montre qu'en ces points la fonction présente des extremums.

Donc

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $f(x) = x$.

2. Il s'agit de montrer que le Théorème de dérivation sur les suites de fonctions (Théorème 3.21), s'applique sur des intervalle de la forme $[-1,b]$, $b<0$ ou $[a,1]$, $a>0$.

Les fonction f_n sont impaires, on peut donc se limiter à l'étude sur des intervalles de deuxième forme (i.e. $[a,1]$, $a>0$).

Les fonction f_n sont de classe C^1 sur $[-1,1]$,

La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[a,1]$, vers la fonction nulle.

Montrons la convergence uniforme de $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[a,1]$, vers la fonction nulle. En effet :

On a pour tout $x \in [a,1] : f^{'}(x) = 0$, alors

$$\left|f_n^{'}(x) - f^{'}(x)\right| = \left|\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\right| \leq \frac{1+n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{1+n^2x^2},$$

d'où

$$\sup_{x\in[a,1]}\left|f_n^{'}(x)\right| \leq \sup_{x\in[a,1]} \frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{1+n^2a^2} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[a,1]$, vers la fonction nulle.

Donc d'après le Théorème de dérivation sur les suites de fonctions (Théorème 3.21), on trouve

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n^{'}(x) = \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)^{'}.$$

3. Sur l'intervalle $[-1,1]$, on a $f_n^{'}(0) = 1$. On en déduit que la convergence de la suite des dérivées n'est pas uniforme. En effet :

$$\left|f_n^{'}(0) - f^{'}(0)\right| = 1,$$

donc

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|f_n^{'}(x) - f^{'}(x)\right| \geq \left|f_n^{'}(0) - f^{'}(0)\right| = 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\nrightarrow} 0,$$

d'où le Théorème 3.21 ne s'applique pas sur $[-1,1]$.

Chapitre 4

Séries de fonctions

Définition 4.1 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définie sur* $I \subset \mathbb{R}$*. Alors la série* $\sum f_n(x)$ *est appelée série de fonctions.*

4.1 Convergence simple ou ponctuelle

Définition 4.2 *(**Convergence simple**). La série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *est dite **simplement convergente** sur* I*, si la suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *(à savoir* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$*) converge simplement vers une fonction* S *sur* I*.*

Remarque 4.3 *i) Étudier la convergence simple sur* I*, d'une série de fonctions revient à fixer* $x \in I$*, et étudier la série numérique* $\sum f_n(x)$*.*

ii) Si la série de fonctions $\sum f_n(x)$ *converge simplement vers une fonction* S *sur un domaine* D*, alors*

a) l'ensemble D *est appelé le domaine de convergence de la série de fonctions* $\sum f_n(x)$*,*

b) la fonction limite S *est appelé la somme de la série* $\sum f_n(x)$*.*

4.2 Convergence absolue, normale et uniforme

4.2.1 Convergence absolue

Définition 4.4 *La série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *est dite **absolument convergente** sur* I*, si la série de terme général* $|f_n(x)|$ *est converge simplement sur* I*.*

Remarque 4.5 *Tous les critères de convergence étudiés pour les séries numériques à termes positifs restent valables pour l'étude de la convergence des séries de fonctions à termes positifs, en particulier l'étude de la convergence absolue des séries de fonctions.*

Exemple 4.6 ***1.*** *Soit* $\sum f_n(x)$ *telle que* $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *est convergente. Ainsi, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *est convergente, c'est-à-dire elle est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$, *d'où le domaine de convergence simple est* $\mathbb{R}$.

2. *Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *telle que* $f_n(x) = n!\,(x+1)^n$.

On a

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = (n+1)\,|x+1|,$$

qui tend vers $+\infty$ *si* $x \neq -1$, *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(-1) = 0$, *ainsi la série numérique* $\sum f_n(-1)$ *converge vers* 0. *D'où le domaine de convergence de la série de fonctions* $\sum n!\,(x+1)^n$ *est l'ensemble* $\{-1\}$.

4.2.2 Convergence normale

Définition 4.7 *La série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *est dite* ***normalement convergente*** *sur* I, *si la série numérique de terme général* $\|f_n\|$ *(où* $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$*) est convergente.*

Exemple 4.8 *Soit la série* $\sum f_n(x)$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}.$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* f_n *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+$. *Donc*

$$\|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2},$$

or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *est convergente, ainsi la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}_+$.

• Condition suffisante de la convergence normale

Théorème 4.9 *(**Weierstrass (1861)**). Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *définie sur* I. *S'il existe une suite numérique* $(u_n)_n$ *tel que*

$$|f_n(x)| \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$

et la série $\sum u_n$ *converge alors, la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *est normalement convergente sur* I.

Exemple 4.10 *On reprend l'Exemple précédent, à savoir*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge, ainsi d'aprés le Théorème précédent, la série* $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2}$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}_+$.

4.2.3 Convergence uniforme

Définition 4.11 *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ ***converge uniformément*** *vers la fonction* S *sur* I, *si sa suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *converge uniformément vers la fonction* S *sur* I. *C'est-à-dire la suite numérique de terme général*

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - S(x) \right|$$

converge vers 0.

Remarque 4.12 *Une série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *simplement convergente sur* I *vers une fonction* S, *converge uniformément sur* I *si et seulement si, la suite* $(R_n)_n$ *de reste d'ordre* n *(i.e.* $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$*) converge uniformément vers* 0.

Proposition 4.13 *Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Si la série de fonctions $\sum f_n(x)$ *converge uniformément sur* I, *alors la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers la fonction nulle sur* I.

Remarque 4.14 *La Proposition précédente est utile par sa contraposé : si* $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément vers* 0 *sur* I, *alors la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *ne converge pas uniformément sur* I.

Exemple 4.15 *Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

- *Étude de la convergence simple de la série* $\sum f_n(x)$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

Si $x = 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(0) = 0$ *donc la série* $\sum f_n(0)$ *converge vers* 0.

Si $x>0$: on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{nx^2e^{-x\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}x^2\frac{n^3}{e^{x\sqrt{n}}}=0,$$

or la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, et par conséquent pour tout $x>0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. Ainsi la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

- *Étude de la convergence uniforme de la série $\sum f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$:*

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$f_n'(x)=nx\left(2-x\sqrt{n}\right)e^{-x\sqrt{n}},$$

alors on déduit que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|nx^2e^{-x\sqrt{n}}\right|=f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\frac{4}{e^2}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\nrightarrow}0,$$

d'où la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\sum f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Parfois il n'est pas facile de calculer la fonction limite $S(x)$ d'une telle série de fonctions $\sum f_n(x)$, alors pour étudier la convergence uniforme de cette série on peut utilisé le Théorème suivant.

Théorème 4.16 ***(Critère de Cauchy)****. La série de fonctions $\sum f_n(x)$* ***converge uniformément*** *sur I si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ \forall p,q\in\mathbb{N}:\left(p>q\geq N_\varepsilon,\ \forall x\in I\Rightarrow|S_p(x)-S_q(x)|=\left|\sum_{k=q+1}^{p}f_k(x)\right|<\varepsilon\right).\quad(4.1)$$

Autrement dit (4.1) est équivalent à la proposition logique suivante

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ /\ \forall p,q\in\mathbb{N}:\left(p>q\geq N_\varepsilon\Rightarrow\sup_{x\in I}|S_p(x)-S_q(x)|=\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=q+1}^{p}f_k(x)\right|<\varepsilon\right).$$

Théorème 4.17 ***(Théorème d'Abel pour la convergence uniforme)****. Soit la série $\sum f_n(x)g_n(x)$ vérifiant :*

i) $\exists M>0:\forall n\in\mathbb{N},\|f_0+f_1+...+f_n\|\leq M$, (i.e. les sommes partielles de la série $\sum f_n(x)$ sont uniforméments bornées),

ii) la série $\sum\|g_{n+1}-g_n\|$ est convergente,

iii) la suite de fonctions $(g_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I (i.e. $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|g_n\|=0$).

Alors, la série $\sum f_n(x)g_n(x)$ est uniformément convergente sur I.

Exemple 4.18 *Étudier la nature de la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$, $x \geq \alpha > 0$ *(i.e. sur* $[\alpha, +\infty[$ *avec* $\alpha > 0$*).*

En effet : on pose $f_n(x) = e^{-nx}$ *et* $g_n(x) = \frac{1}{n}$.

D'une part, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$|f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \left(e^{-x}\right)^k\right| = \left|\frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}\right| \leq \frac{\left|e^{-x} - e^{-(n+1)x}\right|}{|1 - e^{-x}|}$$

$$\leq \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}},$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x \in [\alpha, +\infty[$ *:* $e^{-x} - e^{-(n+1)x} \geq 0$ *et* $1 - e^{-x} \geq 0$ *(la fonction* e^{-x} *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+$*). Ainsi*

$$|f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = M.$$

La dernière inégalité vient de la décroissance de la fonction $\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ *sur la zone* $[\alpha, +\infty[$. *Ainsi* $\|f_1 + f_2 + ... + f_n\| \leq M$.

D'autre part, on a

- $$\|g_{n+1} - g_n\| = \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} |g_{n+1}(x) - g_n(x)| = \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

donc la la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \|g_{n+1} - g_n\|$ *est convergente,*

et

- $$\|g_n\| = \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} |g_n(x)| = \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où d'après le Théorème précédent, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ *est uniformément convergente sur* $[\alpha, +\infty[$, *(*$\alpha > 0$*).*

Proposition 4.19 *Soit la série* $\sum f_n(x) g_n(x)$ *vérifiant :*

i) $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \|f_0 + f_1 + ... + f_n\| \leq M$, *(i.e. les somme partielle de la série* $\sum f_n(x)$ *sont uniforméments bornées),*

ii) pour tout $x \in I$, *la suite de fonctions* $(g_n(x))_n$ *est monotone,*

iii) la suite de fonctions $(g_n(x))_n$ *converge uniformément vers* 0 *sur* I.

Alors la série $\sum f_n(x) g_n(x)$ *est uniformément convergente sur* I.

Exemple 4.20 *Étudier la nature de la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$, $|x| \leq \alpha < 1$.

En effet : on pose $f_n(x) = x^n$ *et* $g_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

D'une part, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$|f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} x^k \right| = \left| \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \right| \leq \frac{|x| + |x|^{n+1}}{|1 - x|} \leq \frac{2\alpha}{1 - \alpha},$$

donc

$$\|f_1 + f_2 + ... + f_n\| \leq \frac{2\alpha}{1 - \alpha} = M.$$

D'autre part, la suite de fonctions g_n *est décroissante et converge uniformément vers* 0. *Ainsi d'après la Proposition précédente, la série de fonctions* $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$ *est converge uniformément sur* $[-\alpha, \alpha]$ $(\alpha < 1)$*.*

4.2.4 Lien entre les différents types de convergences

Théorème 4.21 *Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$. *Alors*

$$\sum f_n(x) \text{ converge normalement sur } I \Rightarrow \sum f_n(x) \text{ converge uniformément sur } I.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il est clair que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ $(p > q)$ et pour tout $x \in I$, on a

$$\left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x \in E} |f_k(x)| = \sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|.$$

Donc

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|.$$

Or la série $\sum \|f_k\|$ est convergente, d'où sa suite des sommes partielles $(T_n)_n$ (où $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \|f_k\|$) est convergente, et donc elle est de Cauchy; ainsi

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;/\; \forall p, q \in \mathbb{N} : \left(p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\| < \varepsilon \right),$$

et par conséquent

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;/\; \forall p, q \in \mathbb{N} : \left(p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ (où $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n(x)$) est uniformément de Cauchy sur

I et par suite, la série $\sum f_n(x)$ est uniformément convergente sur I. ■

Remarque 4.22 *La réciproque du Théorème précédent est fausse.*

Exemple 4.23 *La série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$ *car est une série de Leibniz, mais*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{n}$$

et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *est divergente, ainsi la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *n'est pas normalement convergente sur* $\mathbb{R}_+$.

Proposition 4.24 *Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$, *alors*

$$\sum f_n(x) \text{ converge normalement sur } I \Rightarrow \sum f_n(x) \text{ converge absolument sur } I.$$

Démonstration. On note par :

$$u_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|\,,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que

$$\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x)| = u_n,$$

or la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur I c'est-à-dire la série numérique $\sum u_n$ est convergente. Ainsi d'après le Théorème 2.19, la série de fonctions $\sum |f_n(x)|$ est convergente. ■

Le schéma suivant montre le lien entre les différents types de convergence pour les séries de fonctions

La convergence normale	$\Rightarrow$	**La convergence uniforme**
$\Downarrow$		$\Downarrow$
La convergence absolue	$\Rightarrow$	**La convergence simple**

Exemple 4.25 *1. On a déjà vu que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$. *Mais* $\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\forall x \geq 0$ *et la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *diverge, donc la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *ne converge pas absolument sur* $\mathbb{R}_+$.

D'autre part, $\sup_{x\geq 0}\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{n}$ *et* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *diverge, donc la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ *ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}_+$.

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x+n}$ *converge uniformément, mais pas normalement, ni absolument sur* $\mathbb{R}_+$.

2. *Soit la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}$, $(f_n(x)=\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n})$ *avec* $x\in\left]0,1\right]$.

On a

$$\left|\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}\right|=\frac{1}{x^2n^2+n}\leq\frac{1}{x^2n^2},\forall x\in\left]0,1\right].$$

Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2n^2}$ *converge sur* $\left]0,1\right]$ *(série de Riemann), donc la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}$ *converge absolument sur* $\left]0,1\right]$.

D'après le Théorème 2.47 (Théorème de Leibniz), on a

$$\forall x\in\left]0,1\right],\ |R_n(x)|\leq|f_{n+1}(x)|=\frac{1}{x^2(n+1)^2+n+1}\Rightarrow\forall x\in\left]0,1\right],|R_n(x)|\leq\frac{1}{n+1}.$$

D'où

$$0\leq\sup_{x\in]0,1]}|R_n(x)|\leq\frac{1}{n+1},$$

i.e: $R_n\overset{CU}{\longrightarrow}0$ *sur* $\left]0,1\right]$, *la série est donc uniformément convergente sur* $\left]0,1\right]$, *mais*

$$\sup_{x\in]0,1]}\left|\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}\right|=\sup_{x\in]0,1]}\frac{1}{x^2n^2+n}=\frac{1}{n},$$

ce qui signifie que la série ne converge pas normalement, bien qu'elle est absolument et uniformément convergente.

4.3 Séries de fonctions : continuité, intégration et dérivation.

4.3.1 Continuité

Théorème 4.26 *(**Continuité Seidel (1847)**). Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$, *qui converge uniformément sur* I *et* $a\in I$.

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$: *la fonction* f_n *continue en* a *(resp. sur* I*), alors la somme* $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ *de la série est continue en* a *(resp. sur* I*). C'est-à-dire*

$$\lim_{x\longrightarrow a}S(x)=\lim_{x\longrightarrow a}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow a}f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(a)=S(a).$$

$$\text{(resp. }\forall x_0\in I:\lim_{x\longrightarrow x_0}S(x)=\lim_{x\longrightarrow x_0}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow x_0}f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x_0)=S(x_0)\text{).}$$

Exemple 4.27 *Soit la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, *les fonctions* $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}_+$. *De plus on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2},$$

et comme $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{1+n^2}$ *est une série convergente, alors la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ *converge normalement et donc uniformément sur* $\mathbb{R}_+$.

Ainsi d'après le Théorème précédent, la fonction $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$, *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} = 0.$$

Proposition 4.28 *(**La contraposée du Théorème précédent**). Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *de somme* $S(x)$, *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est continue sur* I.

Si la somme S *de la série* $\sum f_n(x)$, *est discontinue en un point* $x_0 \in I$, *alors la série* $\sum f_n(x)$ *n'est pas uniformément convergente sur* I.

4.3.2 Intégration

Théorème 4.29 *(**Théorème d'intégration**). Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$, *qui converge uniformément vers* $S(x)$ *sur* $[a, b]$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est intégrable sur* $[a, b]$. *Alors,*

la somme S *de la série est intégrable sur* $[a, b]$, *et on a*

$$\int_a^b S(x) = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x).$$

Exemple 4.30 *Soit la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ *avec* $|x| \leq r < 1$.

On a : $|x|^n \leq r^n$, $\forall x \in [-r, r]$, *avec* $r < 1$, *ceci signifie que la série géométrique* $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ *converge normalement donc uniformément sur* $[-r, r]$.

De plus, les fonctions $f_n(x) = x^n$ *sont intégrables sur* $[-r, r]$ *(car continues sur* $[a, b]$*), d'où d'après* *le Théorème précédent, la fonction* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ *est intégrable sur* $[-r, r]$*, de plus on a :*

$$\forall x \in [-r, r], 0 < r < 1 : \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt.$$

Donc

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \forall x \in [-r, r], 0 < r < 1.$$

4.3.3 Dérivation

Théorème 4.31 *(**Théorème de dérivation**). Soit la série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *de somme* $S(x)$*, telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est continument dérivable sur* $[a, b]$*. Si*

i) $\exists x_0 \in [a, b]$ / $\sum f_n(x_0)$ *converge.*

ii) $\sum f_n'(x)$ *converge uniformément sur* $[a, b]$*.*

Alors la série $\sum f_n(x)$ *converge uniformément sur* $[a, b]$*, de plus la fonction* S *est dérivable sur* $[a, b]$ *et on a*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

4.4 Exercices

Exercice 4.1. Étudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale des séries de fonctions suivantes

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$; 2. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; 3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$, $x \in]2, +\infty[$.

Exercice 4.2. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ sur $[\alpha, +\infty[$ $(\alpha > 0)$, telle que

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)}.$$

Exercice 4.3. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$, puis sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$, telle que

$$f_n(x) = \frac{1}{n + (n(x-n))^2}.$$

Exercice 4.4. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par,

$$f_n(x) = ne^{-nx}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n(x)$.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$.

Exercice 4.5. Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

1. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série $\sum f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ est normalement convergente sur $[\alpha, +\infty[$ $(\forall \alpha > 0)$.
3. La série de fonctions $\sum f_n(x)$ est-elle converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 4.6. On pose

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \ln(x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 \quad \text{si} & x = 0 \ \text{ ou } x = 1 \end{cases}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n(x)$.
2. Calculer sa somme $S(x)$? Que peut-on conclure?

Exercice 4.7. Soit la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \alpha e^{-\alpha n x} - \beta e^{-\beta n x} \qquad \alpha, \beta > 0 \text{ et } \alpha \neq \beta.$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n(x)$.
2. Calculer sa somme $S(x)$.

Exercice 4.8. On considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme S $\left(S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)$, est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que
$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$
5. Montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 4.9. Soit la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}.$$

1. Trouver le domaine D de convergence de la série $\sum f_n(x)$.
2. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ est converge uniformément sur D.
3. En déduire que la somme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur D.
4. Montrer que la somme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercices suplémentaires.

Exercice 4.10. Soit la série de fonctions $\sum f_n(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montre que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \overset{0}{\sim} \ln(2).$$

• Solutions des exercices

Solution de l'exercice 4.1.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

C'est une série de Riemann, elle converge si et seulement si $x > 1$.

Pour $x > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est absolument convergente car est une série à termes positifs.

• Étude de la convergence normale sur $]1, +\infty[$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n^x} = \frac{1}{e^{x\ln(n)}} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\ln(n)\, e^{-x\ln(n)} \leq 0,$$

d'où $\sup_{x\in]1,+\infty[} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$, or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, ainsi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ n'est pas normalement convergente sur $]1, +\infty[$.

Nous remarquons que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est normalement convergente sur $[\alpha, +\infty[$ $(\alpha > 1)$ (et donc uniformément convergente), car $\sup_{x\in[\alpha,+\infty[} \left|\frac{1}{n^x}\right| = \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

• Étude de la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$: en utilisant le Critère de Cauchy, on a pour $p > q \geq 1$

$$\sup_{]1,+\infty[} \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k},$$

car la fonction $x \longmapsto \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k^x}$, est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Pour $p = 2n$ et $q = n$, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi
$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}\,(> 0)\,, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p = 2n,\ q = n : p > q \geq n \text{ et } \sup_{]1,+\infty[} \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x}\right| \geq \varepsilon,$$

c'est-à-dire la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne vérifie pas le Critère de Cauchy sur $]1, +\infty[$ et donc ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\left|\frac{\sin nx}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$
or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Théorème 4.9 (Théorème de Weierstrass), la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc elle converge simplement, absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$, $x \in \left]2,+\infty\right[$.

• Étude de la convergence simple sur $\left]2,+\infty\right[$: soit $x \in \left]2,+\infty\right[$, en utilisant le Théorème d'Abel pour les séries numériques,

d'une part, il est clair que $\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \leq 1$,

et d'autre part pour tout $x > 2$, la suite numérique $\left(\frac{1}{nx+(-1)^n}\right)_n$ (x joue le rôle d'un paramètre), est à termes positifs et tend vers 0.

Vérifions que la suite $\left(\frac{1}{nx+(-1)^n}\right)_n$ est décroissante pour tout $x > 2$:

pour $x > 2$ et $n \geq 1$: on a
$$\frac{1}{(n+1)\,x+(-1)^{n+1}} - \frac{1}{nx+(-1)^n} = \frac{2\,(-1)^n - x}{\left[(n+1)\,x+(-1)^{n+1}\right]\left[nx+(-1)^n\right]} < 0.$$

Ainsi d'après le Théorème d'Abel (Théorème 2.49), pour tout $x > 2$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$ est convergente (i.e. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$ converge simplement sur $\left]2,+\infty\right[$).

• Étude de la convergence normale sur $\left]2,+\infty\right[$: on a
$$\sup_{x\in\left]2,+\infty\right[} \left|\frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}\right| = \sup_{x\in\left]2,+\infty\right[} \frac{1}{nx+(-1)^n} = \frac{1}{2n+(-1)^n},$$
car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{nx+(-1)^n}$ est décroissante. Or
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+(-1)^n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2n}{n} = 2,$$
ainsi les deux séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+(-1)^n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ sont de même nature, d'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$ n'est pas normalement convergente sur $\left]2,+\infty\right[$.

• Étude de la convergence absolue sur $]2,+\infty[$: soit $x \in]2,+\infty[$, alors

$$\left|\frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}\right| = \frac{1}{nx+(-1)^n},$$

or on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{nx+(-1)^n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{nx}{n} = x,$$

ainsi les deux séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{nx+(-1)^n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ sont de même nature, d'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$ n'est pas absolument convergente sur $]2,+\infty[$.

• Étude de la convergence uniforme sur $]2,+\infty[$: en utilisant la Proposition 4.19,

d'une part, il est clair que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et d'autre part, pour tout $x > 2$, la suite numérique $\left(\frac{1}{nx+(-1)^n}\right)_n$ (x joue le rôle d'un paramètre), est à termes positifs et décroissante.

Reste la convergence uniforme de la suite de fonctions $\left(\frac{1}{nx+(-1)^n}\right)_n$ vers 0 sur $]2,+\infty[$. En effet :

$$\sup_{x\in]2,+\infty[} \frac{1}{nx+(-1)^n} = \frac{1}{2n+(-1)^n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la suite $\left(\frac{1}{nx+(-1)^n}\right)_n$ converge uniformément vers 0 sur $]2,+\infty[$. Ainsi d'après la Proposition 4.19, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$ converge uniformément sur $]2,+\infty[$.

Solution de l'exercice 4.2.

• Étude de la convergence normale sur $[\alpha,+\infty[$ ($\alpha > 0$).

Pour tout $x \in [\alpha,+\infty[$, et tout $n \geq 1$, on a :

$$\left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}\right| \leq \frac{e^{-nx}}{\ln(n+1)} \leq \frac{e^{-n\alpha}}{\ln(n+1)},$$

or

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{e^{-n\alpha}}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n^2}{e^{n\alpha}\ln(n+1)} = 0$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, d'où la série de fonctions $\sum \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ est normalement convergente sur $[\alpha,+\infty[$; ainsi elle est simplement, absolument et uniformément convergente sur $[\alpha,+\infty[$.

Solution de l'exercice 4.3.

• Étude de la convergence simple sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{n + (n(x-n))^2} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$$

et la série de fonctions $\sum \frac{1}{n^4}$ est convergente, donc la série $\sum \frac{1}{n + (n(x-n))^2}$ converge simplement et absolument sur $\mathbb{R}$.

• Étude de la convergence normale sur $[0, +\infty[$: on a

$$f_n^{'}(x) = \frac{-2n^2 (x-n)}{\left[n + (n(x-n))^2\right]^2},$$

alors

$$f_n^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x = n.$$

Donc d'aprés une étude simple de la fonction $f_n(x)$, on trouve

$$\sup_{x \in [0,+\infty[} f_n(x) = f_n(n) = \frac{1}{n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, alors la série $\sum \frac{1}{n + (n(x-n))^2}$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

• Étude de la convergence normale sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$: pour n assez grand, voici le tableau de variation de la suite de fonctions $f_n(x)$

x	0		a		n			$+\infty$
$f_n^{'}(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$-$	
$f_n(x)$	$\frac{1}{n^4+n}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	$\searrow$	0

,

d'où

$$\sup_{x \in [0,a]} f_n(x) = f_n(a) = \frac{1}{n + (n(a-n))^2} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4},$$

et comme la série numérique $\sum \frac{1}{n^4}$ est convergente, alors la série $\sum \frac{1}{n + (n(x-n))^2}$ est normalement convergente sur $[0, a]$.

Solution de l'exercice 4.4.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

Si $x \leq 0$: $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} ne^{-nx} = +\infty$, donc la série $\sum ne^{-nx}$ est divergente.

Si $x > 0$: en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)\, e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-x} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-x} < 1,$$

d'où la série $\sum ne^{-nx}$ est convergente pour tout $x > 0$. Ainsi la série de fonctions $\sum ne^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme la série $\sum ne^{-nx}$ est à termes positifs, on déduit que la série de fonctions $\sum ne^{-nx}$ converge absolument sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $a > 0$,

Pour tout $x \in [a, +\infty[\,,\ f_n(x) \leq ne^{-na}$, or d'après **1),** la série $\sum ne^{-na}$ est convergente, ainsi la série de fonctions $\sum ne^{-nx}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et par suite elle est converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

3. Soit $(g_n)_n$ la suite de fonctions définie pour tout $x \in [a, +\infty[\ (a > 0)$, par $g_n(x) = e^{-nx}$.

Chaque g_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, $\sum g_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$ et $\sum g_n' = -\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Donc d'après le Théorème de dérivation (Théorème 4.31), la série de fonctions $\sum g_n$ est dérivable sur $[a, +\infty[\ (a > 0)$, et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)',$$

c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\right)' \\
&= -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n\right)' = -\left(\frac{1}{1 - e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.5.

1. Étude de la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$

Si $x = 0$, il est clair que $f_n(0) = 0$, ainsi la série $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge vers 0.

Si $x > 0$, la série de fonctions $\sum \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, alors elle est convergente.

Donc la série de fonctions $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

• Étude de la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f_n'(x) = \frac{\left(1+x^2\right)^{n-1}\left[1-(2n-1)\,x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^{2n}} = \frac{\left[1-(2n-1)\,x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

donc

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}, \text{ car } x \in \mathbb{R}_+.$$

D'aprés une étude simple de la variation de la fonction $f_n(x)$On déduit que :

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n(x)| &= f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

or la série numérique $\sum \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann), et par suite la série de fonctions $\sum \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

• Étude de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$

D'après **1),** la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, vers la fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$, ainsi d'après la Proposition 4.28, la série de fonctions $\sum \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. Étude de la convergence normale sur $[\alpha, +\infty[$ $(\forall \alpha > 0)$.

Pour n assez grand (i.e. $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} < \alpha$), voici le tableau de variation de $f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$		α		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)$	$\searrow$		$\searrow$	0

,

ainsi f_n est décroissante sur $[\alpha, +\infty[$ et alors

$$\sup_{[\alpha,+\infty[} f_n(x) = f_n(\alpha) = \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^n}.$$

Or la série $\sum \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^n} = \alpha \sum \frac{1}{(1+\alpha^2)^n}$ est convergente car $0 < \frac{1}{1+\alpha^2} < 1$. D'où la série de fonctions $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ est normalement convergente sur $[\alpha, +\infty[$ tel que $\alpha > 0$.

3. Étude de la convergence uniforme sur $[0,1]$.

On a

$$\begin{aligned} \sup_{[0,1]} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+x^2)^k} \right| &= \sup_{]0,1]} \left| \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1-\frac{1}{1+x^2}} \right| \\ &= \sup_{]0,1]} \frac{1}{x(1+x^2)^n} = +\infty, \end{aligned}$$

car la fonction $\frac{1}{x(1+x^2)^n}$ est décroissante. Ainsi la série de fonctions $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Solution de l'exercice 4.6.

1. Étude de la convergence simple.

Si $x = 0$ ou $x = 1$:

$$f_n(0) = f_n(1) = 0 \Rightarrow S_n(0) = S_n(1) = 0 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $x \in]0,1[$: la série géométrique $\sum (x^2)^n$ est convergente. Ainsi pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum f_n(x)$ est convergente, d'où la série $\sum f_n(x)$ est converge simplement sur $[0,1]$.

2. On a $S(0) = S(1) = 0$ et pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \ln(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln(x) \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)\left(1-(x^2)^{n+1}\right)}{1-x^2} = \frac{\ln(x)}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{1-x^2} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}.$$

Comme

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} S(x) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{\ln(x)}{1-x^2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} S(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} \frac{\ln(x)}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \neq S(1),$$

alors la fonction S n'est pas continue sur $[0,1]$, ainsi d'aprés la Proposition 4.28, la série $\sum f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, ni sur $[0,1[$, ni sur $]0,1]$.

Solution de l'exercice 4.7.

1. Si $x=0$: $f_n(0) = \alpha - \beta \Rightarrow S_n(0) = (n+1)(\alpha-\beta) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > \beta \\ -\infty & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$.

Si $x > 0$: les deux séries $\sum \alpha e^{-\alpha n x}$ et $\sum \beta e^{-\beta n x}$ sont convergentes et donc la série $\sum \left(\alpha e^{-\alpha n x} - \beta e^{-\beta n x}\right)$ est convergente car est une somme de deux séries convergent.

Si $x < 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\alpha e^{-\alpha n x} - \beta e^{-\beta n x}\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{-\alpha n x}\left(\alpha - \beta e^{(\alpha-\beta) n x}\right) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > \beta \\ -\infty & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}, \end{aligned}$$

et donc la série $\sum \left(\alpha e^{-\alpha n x} - \beta e^{-\beta n x}\right)$ est divergente.

Ainsi, la série $\sum \left(\alpha e^{-\alpha n x} - \beta e^{-\beta n x}\right)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha e^{-\alpha n x} - \beta e^{-\beta n x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha n x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \beta e^{-\beta n x}$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\alpha x}\right)^n - \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\beta x}\right)^n = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha x}} - \frac{\beta}{1-e^{-\beta x}}.$$

Solution de l'exercice 4.8.

1. Étude de la convergence simple sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ainsi elle converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, et comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors d'après le Théorème de continuité (Théorème 4.26), la somme

$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. En appliquant le Théorème d'intégration (Théorème 4.29), à la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ sur $[0,\pi]$, on a,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi S(x)\,dx &= \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\cos(nx)]_0^\pi\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}(\cos(n\pi)-1)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^4}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.\end{aligned}$$

4. En appliquant le Théorème de dérivabilité (Théorème 4.31) à la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ sur $\mathbb{R}$. En effet : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^3}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ est convergente d'aprés 1). De plus, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, et donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'où la fonction $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

5. On applique le Théorème d'intégration (Théorème 4.29), à la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ d'aprés 4) et donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, ainsi sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. D'où la fonction $T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(nx)}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sin(nx)]_0^{\pi/2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\left(\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos(n\pi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.9.

1. Si $x \geq 0$:

$$\left|\frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors la série $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Si $x < 0$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2} = +\infty,$$

et donc la série $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$ est divergente.

Ainsi la série $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ (i.e. $D = [0,+\infty[$).

2. On a pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\left|\frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

et la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$ est normalement convergente sur $[0,+\infty[$, ainsi elle est uniformément convergente sur $[0,+\infty[$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et d'après **2)**, la série $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$ est uniformément convergente sur $[0,+\infty[$, alors en utilisant le Théorème de continuité, la fonction $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $D = [0,+\infty[$.

4. On applique le Théorème de dérivation sur $[\alpha,\beta]$ $(\beta > \alpha > 0)$ à la série $\sum_{n\geq1} \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$.

La série $\sum_{n\geq1} \frac{e^{-n\alpha}}{n^2+\alpha^2}$ est convergente car $\left|\frac{e^{-n\alpha}}{n^2+\alpha^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

La série $\sum_{n\geq1} \frac{-e^{-nx}\left[n\left(n^2+x^2\right)+2x\right]}{\left(n^2+x^2\right)^2}$ est converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$, en effet :

On pose $S_m(x) = S_{m1}(x) + S_{m2}(x)$ où,

$$S_{m1}(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{ne^{-nx}}{n^2+x^2} \quad \text{et} \quad S_{m2}(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{xe^{-nx}}{\left(n^2+x^2\right)^2}.$$

Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$ $(\beta > \alpha > 0)$, on a

$$\frac{ne^{-nx}}{n^2+x^2} \leq \frac{ne^{-nx}}{n^2} \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{e^{-n\alpha}}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{e^{-n\alpha}}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} ne^{-n\alpha} = 0,$$

alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n\alpha}}{n}$ converge, ainsi $S_{m1}(x)$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

De même, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ $(\beta > \alpha > 0)$ on a

$$\frac{xe^{-nx}}{(n^2+x^2)^2} = \frac{xe^{-nx}}{n^4+x^4+2n^2x^2} \leq \frac{xe^{-nx}}{2n^2x^2} \leq \frac{e^{-nx}}{2n^2x} \leq \frac{e^{-n\alpha}}{2n^2\alpha} \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{e^{-n\alpha}}{2n^2\alpha}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{2\alpha} = 0.$$

car la fonction $\frac{e^{-nx}}{2n^2x}$ est décroissante. Alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n\alpha}}{2n^2\alpha}$ converge, ainsi $S_{m2}(x)$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

D'aprés la Proposition 3.10, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{-e^{-nx}\left[n\left(n^2+x^2\right)+2x\right]}{(n^2+x^2)^2}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ $(\beta > \alpha > 0)$. D'où la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ $(\beta > \alpha > 0)$, et par suite elle est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ $(\alpha > 0)$.

Chapitre 5

Séries entières et séries de Fourier

5.1 Séries entières

Définition 5.1 *On appelle **série entière** de variable réelle (resp. de variable complexe) toute série de fonctions de la forme* $\sum a_n x^n$ *(resp.*$\sum a_n z^n$*), où* $(a_n)_n$ *est une suite des nombres complexes.*

La suite $(a_n)_n$ *est appelée la suite des coefficients de la série entière.*

Remarque 5.2 *Toute série entière converge pour* $z = 0$.

Définition 5.3 *On désigne par* D *l'ensemble des nombres complexes* z *pour lesquels la série* $\sum a_n z^n$ *est convergente, on note* $f(z)$ *la somme de cette série, soit :*

$$\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

L'ensemble D *est appelé domaine de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$.

L'ensemble D est non vide puisqu'il contient toujours 0.

Exemple 5.4 *Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes*

$$1.\ \sum z^n \quad ; \quad 2.\ \sum \frac{z^n}{n!}.$$

1. *Il est clair que la série* $\sum z^n$ *est une série géométrique de raison* z*, alors elle est convergente si et seulement si* $|z| < 1$*, ainsi le domaine de de convergence de la série* $\sum z^n$ *est le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* 1.

2. En utilisant le Critère de D'Alembert on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{z^n}{n!}}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0,$$

d'où la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est convergente pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *ainsi le domaine de de convergence de la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est* $\mathbb{C}$ *tout entier.*

Pour la suite nous ne considérons que les séries entières réelles, c'est-à-dire les séries de la forme $\sum a_n x^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et $x \in \mathbb{R}$.

5.1.1 Convergence d'une série entière

Proposition 5.5 ***(Abel).*** *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$.

S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *tel que la suite* $(a_n x_0^n)_n$ *soit borné. Alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x| < |x_0|$, *la série numérique* $\sum a_n x^n$ *converge absolument.*

Démonstration. On a,

$$\text{la suite } (a_n x_0^n)_n \text{ borné} \Rightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n x_0^n| \leq M,$$

$$\Rightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \frac{M}{|x_0^n|},$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, on trouve

$$|a_n x^n| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

or la série géométrique $\sum M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ est convergente car $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Ainsi d'aprés le Théorème 2.19, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente. ■

Corollaire 5.6 *S'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *tel que la série* $\sum a_n x_0^n$ *est convergente, alors la série entière* $\sum a_n x^n$ *converge absolument en tout point* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x| < |x_0|$.

Démonstration. On a,

$$\text{la série} \sum a_n x_0^n \text{ est convergente} \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n x_0^n = 0,$$

c'est-à-dire la suite $(a_n x_0^n)_n$ est convergente, et donc elle est bornée. Ainsi d'aprés la Proposition précédente, la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$. ■

• **Rayon de convergence d'une série entière**

Définition 5.7 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$*. Le nombre réel positif*

$$R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \ \textit{la suite } (a_n r^n)_n \ \textit{est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$*.*

Exemple 5.8 *La série* $\sum x^n$ *a pour rayon de convergence* $R = 1$*, car la suite* $(r^n)_n$ *est bornée si et seulement si* $|r| \leq 1$*.*

Remarque 5.9 *Le rayon de convergence d'une série entière peut prendre la valeur* $+\infty$*, c'est le cas où le domaine de convergence est* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 5.10 *Reprenons l'Exemple de la série* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *, il est clair que le domaine de convergence est* $\mathbb{R}$ *tout entier. D'où le rayon de convergence est* $R = +\infty$*.*

Proposition 5.11 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$*, s'il existe deux réels strictement positifs* m *et* M *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ m \leq |a_n| \leq M,$$

alors le rayon de convergence de cette série vaut 1*.*

Démonstration. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}, \ m \leq |a_n| \leq M$ alors,

$$\sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \text{ la suite } (Mr^n)_n \text{ est bornée}\} \subset \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \text{ la suite } (|a_n| \, r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

et

$$\sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \text{ la suite } (|a_n| \, r^n)_n \text{ est bornée}\} \subset \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \text{ la suite } (mr^n)_n \text{ est bornée}\}.$$

Or

$$\sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \text{ la suite } (Mr^n)_n \text{ est bornée}\} = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \text{ la suite } (mr^n)_n \text{ est bornée}\}$$

$$= \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \text{ la suite } (r^n)_n \text{ est bornée}\} = 1.$$

Ainsi $R = 1$. ■

Exemple 5.12 *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \left(\sin^2 n + 1\right) x^n$.

En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \left(\sin^2 n + 1\right) \leq 2,$$

donc d'aprés la Proposition précédente, le rayon de convergence de la série $\sum \left(\sin^2 n + 1\right) x^n$ *égale* 1.

Proposition 5.13 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R*. Alors,*

i) la série entière $\sum a_n x^n$ *est absolument convergente pour tout* x*, telle que* $|x| < R$.

ii) Dans le cas où R *est fini, les séries* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum |a_n x^n|$ *sont divergentes pour tout* x *tel que* $|x| > R$.

Démonstration. Triviale. ■

Théorème 5.14 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$*, de rayon de convergence* R*. Alors la série* $\sum a_n x^n$ *est normalement convergente sur tout intervalle* $[-r, +r]$ *tel que* $r < R$.

• Technique de calcul de rayon de convergence

Théorème 5.15 *(**Règle d'Hadamard**). Soit la série entière* $\sum a_n x^n$*. Si* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ *une valeur dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *(*$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*), alors le rayon de convergence de cette série est* $R = \dfrac{1}{l}$.

Proposition 5.16 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$*. Si* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ *une valeur dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *(*$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*), alors le rayon de convergence de cette série est* $R = \dfrac{1}{l}$.

Remarque 5.17 *i) Dans le cas où les deux limites* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *n'existent pas, le rayon de convergence et alors donné par*

$$R = \frac{1}{l} \quad \text{où} \quad l = \overline{\lim_{n \longrightarrow +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \ \text{si}\ l \neq 0,$$

et si $l = 0$*, on a :* $R = +\infty$ *et si* $l = +\infty$ *on a :* $R = 0$.

ii) Soit la série entière $\sum a_n x^n$*, de rayon de convergence* R*. Alors son domaine de convergence est l'un des quatre intervalles :* $]-R, +R[\,,\ [-R, +R[\,,\ ]-R, +R]$ *ou bien* $[-R, +R]$.

Proposition 5.18 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R*. Alors les séries* $\sum n a_n x^{n-1}$ *et* $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *ont même rayon de convergence* R.

5.1.2 Opérations sur les séries entières

Proposition 5.19 *Soit* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *deux séries entières ayant respectivement* R *et* R'*pour rayon de convergence.*

i) Si $R \neq R'$, *le rayon de convergence* R''*de la série* $\sum (a_n + b_n) x^n$ *est* $R'' = \min\{R, R'\}$.

ii) Si $R = R'$, *le rayon de convergence de la série* $\sum (a_n + b_n) x^n$ *est* $R'' \geq R$.

Démonstration. 1- Supposons que $R' < R$.

i) Si $|x| < R'$ alors $|x| < R$, d'où les deux séries$\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes. Comme $|(a_n + b_n) x^n| \leqslant |a_n x^n| + |b_n x^n|$, alors la série $\sum (a_n + b_n) x_n$ converge absolument pour $|x| < R' = \min\{R, R'\}$.

ii) Si $|x| > R'$, deux cas de figure se présentent :

a) Si $R' < |x| < R$, la série$\sum b_n x^n$ converge absolument et $\sum a_n x^n$ diverge. Donc $\sum (a_{n+} b_n) x^n$ diverge.

b) Si $R' < R < |x|$, les deux séries divergent. Montrons $\sum (a_{n+} b_n) x^n$ diverge. Raisonnons par l'absurde. Alors on suppose que la série $(\sum (a_{n+} b_n) x^n)$ est convergent, donc d'après la Proposition 5.5 (Abel), la série $\sum (a_{n+} b_n) x^n$ converge absolument pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R' < |x_0| < R < |x|$. D'où la contradiction.

2) Si $R = R'$. Il est clair que la série $\sum (a_{n+} b_n) x^n$ converge absolument si $|x| < R = R'$, ainsi le rayon de convergence $R'' \geq R = R'$. ■

Exemple 5.20 *Soient les deux séries* $\sum_{n \geq 0} x^n$ *et* $\sum_{n \geq 0} \frac{1 - 2^n}{2^n} x^n$. *Les deux séries ont pour rayon de convergence* $R = 1$. *Par contre la série déduite de la somme des deux séries* $\sum_{n \geq 0} x^n$ *et* $\sum_{n \geq 0} \frac{1 - 2^n}{2^n} x^n$ *(i.e.* $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} x^n$*), a pour rayon de convergence* $R'' = 2$.

Proposition 5.21 *Soit* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *deux séries entières ayant respectivement* R *et* R'*pour rayon de convergence. Alors la série produit des deux séries* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *est une série entière de terme général* $c_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$ *et son rayon de convergence* R'', *vérifie* $R'' \geq \min\{R, R'\}$.

5.1.3 Application du Théorème de continuité, Théorème d'intégration et Théorème de dérivation sur les séries entières

• **Continuité**

Théorème 5.22 *La fonction somme* S *d'une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R $(\neq 0)$ *est continue sur* $]-R, +R[$.

Démonstration. Soit $0 < r < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et puisque la convergence est normale donc uniforme dans $[-r, r]$, donc d'aprés le Théorème de continuité sur les séries de fonctions (Théorème 4.26), la fonction somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur $[-r, r]$ pour tout r, $(0 < r < R)$, et par suite elle est continue sur $]-R, +R[$. ■

Proposition 5.23 *(**Continuité d'Abel**). Soit la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R.*

Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors la série entière $\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0, R]$, et sa somme est continue sur ce segment.

En particulier

$$\lim_{x \longrightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

• **Intégration**

Théorème 5.24 *Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de somme S et de rayon de convergence R. Alors pout tout intervalle $[a, b]$ inclue dans $]-R, +R[$ on a*

$$\int_a^b S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Démonstration. Il est clair que pour toute intervalle $[a, b]$ inclue dans $]-R, +R[$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues et la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[a, b]$, et donc d'aprés le Théorème d'intégration sur les série de fonctions (Théorème 4.29), on trouve que la fonction $S(x)$ la somme de la série $\sum a_n x^n$ est intégrable sur $[a, b]$, de plus on a

$$\int_a^b S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

■

Corollaire 5.25 *Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de somme S et de rayon de convergence R. Alors la fonction S est continue sur $]-R, +R[$ et ses primitives sont de la forme :*

$$t \longmapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. En appliquant le Théorème précédent sur le segment $[0, t]$. ■

• **Dérivation**

Théorème 5.26 *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$ *de somme* S *et de rayon de convergence* R. *Alors la fonction* S *est de classe* C^1 *sur* $]-R,+R[$, *de plus on a*

$$S^{'}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration. On applique le Théorème de dérivation sur les séries de fonctions (Théorème 4.31), en effet : pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x)=a_n x^n$ sont de classe C^1 sur $]-R,+R[$, la série $\sum a_n x^n$ converge simplement sur $]-R,+R[$ et la série $\sum n a_n x^{n-1}$ converge uniformément sur tout segment $[-r,+r]$ pour tout r tel que $0<r<R$. Alors la fonction somme S est de classe C^1 sur $[-r,+r]$, et par suite S est de classe C^1 sur $]-R,+R[$. De plus

$$S^{'}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ sur }]-R,+R[.$$

■

Corollaire 5.27 *Soit la série* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R. *Alors sa somme* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *est indéfiniment dérivable* ($f\in C^{\infty}(]-R,R[)$), *et l'on a :*

$$\forall x\in\,]-R,R[\,, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Démonstration. En effet : si $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, par application du Théorème précédent, il est facile de voir que la fonction f est indéfiniment dérivable ($f\in C^{\infty}(]-R,R[)$). De plus on a $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, et par récurrence, la dérivée d'ordre k est donnée par la relation :

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

De cette expression, il résulte que $f^{(k)}(0)=a_k k!$ c'est-à-dire

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

■

5.1.4 Séries de Taylor

• Motivation

Soit f une fonction réelle à variable réelle. Peut-on trouver une suite réelle $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \left]-r, r\right[$?

Si ce problème admet une solution, on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0.

On peut généraliser cette situation en se posant la même question pour une fonction définie au voisinage d'un point x_0 : existe-il une suite $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$?

Dans l'affirmatif, on dira que f est développable en série entière au voisinage de x_0.

Proposition 5.28 *Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 et dans ce cas on a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

Démonstration. Similaire à celle du Corollaire 5.27. ■

Proposition 5.29 *Soit $f : \left]-r, r\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \left]-r, r\right[$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est simplement convergente sur $\left]-r, r\right[$ et on a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in \left]-r, r\right[.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left]-r, r\right[$ on a $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M$.

Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ avec } \quad 0 < \theta < 1,$$

où la quantité $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ est appellé le reste de Mac-Laurin.

Pour démontrer la Proposition, il suffit de prouver que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.

En effet :

$$x \in]-r, r[\Rightarrow |x| < r \Rightarrow |\theta x| < r \Rightarrow \left|f^{(n+1)}(\theta x)\right| \le M,$$

donc

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or la série de terme général $u_n = \dfrac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente car

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{r}{n+2} = 0,$$

et par suite la série $\sum\left|\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$ est convergente, ainsi $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$, ce qui donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

■

Exemple 5.30 ***1.*** *La fonction exponentielle : $f(x) = e^x$.*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \left]-r, r\right[$ $(r > 0)$, $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x \leq e^r$.

2. *Les fonctions hyperboliques : les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ont même rayon de convergence que la fonction exponentielle, c'est à dire $R = +\infty$.*

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.\\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

5.2 Séries de Fourier

5.2.1 Définitions et généralités

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions d'un type particulier, qui servent à étudier les fonctions périodiques. L'idée est d'exprimer une fonction $2\pi-$périodique quelconque en série de fonctions $2\pi-$périodiques simples, de la forme $cos(nx)$ ou $sin(nx)$.

Définition 5.31 *(**Série trigonométrique**). On appelle **série trigonométrique** une série de fonctions $\sum f_n(x)$ dont le terme général est de la forme*

$$f_n(x) = a_n cos(nx) + b_n sin(nx) \quad \text{avec } x \in \mathbb{R} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad b_n \in \mathbb{C}.$$

Proposition 5.32 *Si les deux séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont absolument convergentes alors la série trigonométrique* $\sum (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n cos(nx) + b_n sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|,$$

et comme les deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum (|a_n| + |b_n|)$ est convergente, ainsi la série $\sum a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. ■

Remarque 5.33 *Toute série trigonométrique* $\sum (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$ *peut se réécrire sous la forme (complexe) :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad avec\ c_0 = a_0 \quad et\ \forall n \in \mathbb{N}^* : c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad et \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Proposition 5.34 ***(Évaluations des coefficients d'une série trigonométrique).***

Soit $\sum (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$ *une série trigonométrique uniformément convergente sur* $[-\pi, \pi]$ *. Notons*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx)), \quad pour\ tout\ x \in \mathbb{R},$$

alors

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S(x)\, dx$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S(x) cos(nx) dx \qquad et \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S(x) sin(nx) dx.$$

Proposition 5.35 *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *une série trigonométrique écrite sous forme complexe qui converge uniformément sur* $[-\pi, \pi]$*. Notons, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S(x)\, e^{-inx} dx.$$

Définition 5.36 *(**Série de Fourier**). Soit f une fonction $2\pi-$périodique. Sa **série de Fourier** notée par $F(f)(x)$, est par définition la série trigonométrique $\sum(a_n cos(nx)+b_n sin(nx))$ où*

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$$

et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,cos(nx)dx \qquad et \qquad b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,sin(nx)dx.$$

*Si ces intégrales sont définies, les coefficients a_n et b_n sont appelés **coefficients de Fourier** de f.*

Remarque 5.37 *i) Puisque f est $2\pi-$périodique, on peut changer l'intervalle d'intégration en $[\alpha,\alpha+2\pi]$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.*

ii) Si f est paire, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n(f)=0$.

iii) Si f est impaire, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=0$.

Définition 5.38 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue par morceau et $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$.*

*On appelle **régularisée** de f la fonction $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(x)=\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.*

Nous remarquons que, en tout points de continuité x_0, la fonction $\widetilde{f}$ coïncide avec la fonction f (i.e. $\widetilde{f}(x_0)=f(x_0)$).

Théorème 5.39 *(**Théorème de Lejeune-Dirichlet (1829)**). Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceau, $2\pi-$périodique. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée $\widetilde{f}$ de f, c'est-à-dire*

$$\forall x\in\mathbb{R},\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n cos(nx)+b_n sin(nx))=\widetilde{f}(x),$$

ou encore

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}=\widetilde{f}(x).$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de sa série de Fourier est $f(x)$.

Soit l'ensemble $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ 2\pi - \text{périodique et dont le carré est intégrable sur } [-\pi, \pi]\}$.

On définie sur $\mathcal{F}$ le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, \overline{g(x)} dx,$$

où $\overline{g(x)}$ désigne le nombre complexe conjuguée de $g(x)$.

On note par $\|f\|$ (norme de f) le nombre réel positif telle que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Proposition 5.40 *L'ensemble (infini) des fonctions $\{x \longrightarrow e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée (infinie) de $\mathcal{F}$ muni du produit scalaire définie en dessus.*

5.2.2 Interprétation géométrique des séries de Fourier

Soit $f \in \mathcal{F}$. Alors la série de Fourier n'est rien d'autre que sa décomposition suivant la base orthonormée $\{x \longrightarrow e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$. Cette interprétation permet de retenir l'expression des coefficients de Fourier de f.

Proposition 5.41 *(**Projection orthogonale**). Soit $f \in \mathcal{F}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ses coefficients de Fourier c_n est la projection orthogonale de f sur e^{inx}, c'est-à-dire*

$$c_n(f) = \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-inx} dx.$$

Définition 5.42 *On note par D l'ensemble des fonctions $f \in C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (l'ensemble des fonctions continues par morceaux et $2\pi-$périodique), telle que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.*

Nous remarquons que $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset D \subset C^0_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $f \in \mathcal{F}$ et $\{c_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ ses coefficients de Fourier en écriture complexe, et $\{(a_n, b_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ ses coefficients de Fourier en écriture réelle. Alors on a les résultats suivants.

• Inégalité de Bessel

Théorème 5.43 *(**Inégalité de Bessel (1828)**). Soit la fonction $f \in D$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx.$$

• **Égalité de Parseval**

Théorème 5.44 ***(Égalité de Parseval (1799)).*** *Pour tout fonction $f \in D$, on a*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 .$$

Si f est à valeurs réelles, on a

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

5.3 Exercices

Partie 1 : Séries entières

Exercice 5.1. Déterminer les domaines de convergence des séries entières

$$1. \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad ; \qquad 2. \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Exercice 5.2. Déterminer le rayon puis le domaine de convergence des séries entières suivantes

$$1. \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{3^n} x^n \qquad ; \qquad 2. \sum_{n\geq 0} e^{-n^2} x^n \qquad ; \qquad 3. \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^n;$$

$$4. \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n \qquad ; \qquad 5. \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n \qquad ; \qquad 6. \sum_{n\geq 0} ch(n)\, x^n.$$

Exercice 5.3. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Quelle est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$.
2. On déduit le rayon de convergence des séries entières :

$$1 \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^{2n} \qquad ; \qquad 2. \sum_{n\geq 0} ch(n)\, x^{3n} \qquad ; \qquad 3. \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{3^n} x^{5n}.$$

Exercice 5.4. Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que : $f_n(x) = \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.
2. Développer la fonction $f(x) = \cos x + chx$ en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

Exercice 5.5. Calculer les sommes des séries suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé ses rayon de convergence.

$$1.\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n.$$

Exercice 5.6. Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

$$1.\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n} \qquad ; \qquad 2.\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^{3n}.$$

Partie 2 : Séries de Fourier

Exercice 5.7. Soit f la fonction $2\pi-$ périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi[. \end{cases}.$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 5.8. Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

3. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 5.9. Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer la série de Fourier associée à f.

2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 5.10. Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 5.11. Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(x) & \text{si } \ x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[. \end{cases},$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_0(f)$, $a_1(f)$ et $b_1(f)$ associé à f.

2. Déterminer, pour tout $n \geq 2$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ associé à f et donner la série de Fourier associée à f.

3. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

Exercice 5.12. Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Déterminer la série de Fourier associée à f.

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| = \displaystyle\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$.

Exercices suplémentaires.

Exercice 5.13. Soit f la fonction paire, 2π périodique définie par

$$1.\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \ x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in]1, \pi] \end{cases}.$$

a) Déterminer la série de Fourier associée à la fonction f.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

c) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

• **Solutions des exercices.**

Solution de l'exercice 5.1.

1. On pose $u_n = \left|\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right|$.

En utilisant le Critère de D'Alembert sur les séries numériques à termes positifs, on trouve

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\dfrac{|z|^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{|z|^{2n}}{(2n)!}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right|$ est convergente sur $\mathbb{C}$, d'où la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

2. On pose $u_n = \left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right|$.

En utilisant le Critère de D'Alembert sur les séries numériques à termes positifs, on trouve

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\dfrac{|z|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{|z|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0,$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right|$ est convergente sur $\mathbb{C}$, ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice 5.2.

1. On pose $a_n = \dfrac{n^2+n}{3^n}$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^2+n+1}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^2+n}{3^n}}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3},$$

d'où le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n^2+n}{3^n}x^n$ est $R = 3$.

Pour $x = 3$:

$$\frac{n^2+n}{3^n}x^n = \frac{n^2+n}{3^n}3^n = n^2+n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n^2+n}{3^n}x^n$ est divergente pour $x = 3$.

Pour $x = -3$:

$$\frac{n^2+n}{3^n}x^n = \frac{n^2+n}{3^n}(-1)^n 3^n = \left(n^2+n\right)(-1)^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty,$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{3^n} x^n$ est divergente pour $x=-3$.

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{3^n} x^n$, est $D = \left]-3, 3\right[$.

2. On pose $a_n = e^{-n^2}$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left|e^{-n^2}\right|} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-n} = 0.$$

d'où le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2} x^n$ est $R=+\infty$.

Ainsi son domaine de convergence est $D=\mathbb{R}$.

3. On pose $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^n$ est $R=1$.

Pour $x=1$: $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente.

Pour $x=-1$: la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ est absolument convergente, donc elle est convergente.

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^n$, est $D = [-1, 1]$.

4. On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{\ln n}}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$ est $R=1$.

Pour $x=1$: la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge d'aprés le Théorème d'Abel (Théorème 2.49).

Pour $x=-1$: la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge, car $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n\geq 2$.

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n$, est $D = \left]-1, 1\right]$.

5. On pose $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)x^n$ est $R=1$.

Pour $x=1$: $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, alors la série $\sum_{n\geq 2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Pour $x=-1$: la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge d'aprés le Théorème d'Abel (Théorème 2.49).

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\ln n}x^n$, est $D=[-1,1[$.

6. On pose $a_n = ch\,(n)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{ch\,(n+1)}{ch\,(n)}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{ch\,(n+1)}{ch\,(n)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-(n+1)}}{e^n+e^{-n}}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{e^n\left(e+e^{-(2n+1)}\right)}{e^n\left(1+e^{-2n}\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{e+e^{-(2n+1)}}{1+e^{-2n}} = e.\end{aligned}$$

Alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}ch\,(n)\,x^n$ est $R=\frac{1}{e}$.

Pour $x=\frac{1}{e}$: $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1+e^{-2n}}{2}=\frac{1}{2}$, donc la série $\sum_{n\geq 1}ch\,(n)\left(\frac{1}{e}\right)^n$ diverge.

Pour $x=-\frac{1}{e}$: $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1+e^{-2n}}{2}(-1)^n=\pm\frac{1}{2}$, donc la série $\sum_{n\geq 1}ch\,(n)\left(\frac{1}{e}\right)^n$ diverge.

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\ln n}x^n$, est $D=\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$.

Solution de l'exercice 5.3.

1. $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence R, si et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\text{si } |x|<R, \text{ la série entière } \sum_{n\geq 0}a_nx^n \text{ est convergente}$$

et

$$\text{si } |x|>R, \text{ la série entière } \sum_{n\geq 0}a_nx^n \text{ est divergente.}$$

Alors,

$$\text{si } \left|x^2\right|<R \text{ (i.e. } |x|<\sqrt{R}), \text{ la série entière } \sum_{n\geq 0}a_nx^{2n} \text{ est convergente}$$

et

$$\text{si } \left|x^2\right| > R \text{ (i.e. } |x| > \sqrt{R}), \text{ la série entière } \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n} \text{ est divergente.}$$

D'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ est $\sqrt{R}$.

2.1. D'aprés l'Exercice 5.2, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^n$ est 1, ainsi on déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} x^{2n}$ est $\sqrt{1} = 1$.

2.2. En utilisant la démonstration par récurrence, on peut montrer que si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^{pn}$ est de rayon de convergence $\sqrt[p]{R}$.

D'aprés l'Exercice 5.2, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} chn\ x^n$ est $\frac{1}{e}$, ainsi le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} chn\ x^{3n}$ est $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

2.3. D'aprés l'Exercice 5.2, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{3^n} x^n$ est 3, ainsi le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n}{3^n} x^{5n}$ est $\sqrt[5]{3}$.

Solution de l'exercice 5.4. Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que

$$f_n(x) = \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

1. Calcul de rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)!} x^n$. On pose $a_n = \frac{1}{(4n)!}$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{\frac{1}{(4(n+1))!}}{\frac{1}{(4n)!}}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(4n)!}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!} = 0,$$

d'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)!} x$ est $R = +\infty$.

Ainsi d'après l'Exercice précédent, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n)!} x$ est $\sqrt[4]{R} = +\infty$.

2. On a : $\cos x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ et $chx = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ alors

$$\cos x + chx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 1}{(2n)!} x^{2n}.$$

3. Comme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n+1}{(2n)!}x^{2n} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k}+1}{(4k)!}x^{4k}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k+1}+1}{(2\,(2k+1))!}x^{2(2k+1)}\\ &= 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k)!}x^{4k}.\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k)!}x^{4k}=\frac{\cos x+chx}{2}.$$

Solution de l'exercice 5.5.

1. On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{n\,(n+1)}}{\dfrac{1}{n\,(n-1)}}\right|=1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\,(n-1)}x^n$ est $R=1$.

Comme $\dfrac{1}{n\,(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$, donc

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,(k-1)}x^k=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}x^k-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}x^k.$$

En passant quand n tend vers l'infini, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-x=-\ln(1-x)-x$$

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}x^n=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-x\ln(1-x).$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n-1)}x^n &= -x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x\\ &= x+(1-x)\ln(1-x).\end{aligned}$$

2. On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\dfrac{\dfrac{3\,(n+1)}{n+3}}{\dfrac{3n}{n+2}}\right|=1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{3n}{n+2}x^n$ est $R=1$.

Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n &= 3\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2}\right] \\
&= 3\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right] \\
&= 3\left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2}\left(-\ln(1-x) - x\right)\right] \\
&= 3\left[\frac{2-x}{x(1-x)} + \frac{2\ln(1-x)}{x^2}\right].
\end{aligned}$$

Pour $x = 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n = 0$.

D'où

$$S(x) = \begin{cases} 3\left[\dfrac{2-x}{x(1-x)} + \dfrac{2\ln(1-x)}{x^2}\right] & \text{si } \ x \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,+1\right[\\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 5.6.

1. Calcul de rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$. On pose $a_n = \dfrac{n}{(2n+1)!}$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{\frac{n+1}{(2n+3)!}}{\frac{n}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0,$$

donc $R = +\infty$.

Alors d'après l'Exercice 5.3, le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}$ est $+\infty$.

Calcul de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}$ sur $\mathbb{R}$: on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1-1}{(2n+1)!} x^{2n}\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n}\right],$$

Alors pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(ch(x) - \frac{sh(x)}{x}\right).
\end{aligned}$$

Si $x = 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{m} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 \underset{m\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'où
$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(ch(x)-\frac{sh(x)}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}.$$

2. Calcul de rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n$. On pose $a_n=\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2+4(n+1)-1}{(n+1)!(n+3)}}{\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}}\right|\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)^2+4(n+1)-1}{n^2+4n-1}\frac{(n+2)}{(n+1)(n+3)}=0,\end{aligned}$$

donc $R=+\infty$.

Alors d'après l'Exercice 5.3, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^{3n}$ est $+\infty$.

Calcul de la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^{3n}$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^{3n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)^2-5}{n!(n+2)}x^{3n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{3n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{3n}-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{3n}\\ &= x^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^3)^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^3)^n}{n!}-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{3n}\\ &= x^3e^{x^3}+2e^{x^3}-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{3n}.\end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{3n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}x^{3n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^{3(n-2)}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{3(n-1-1)}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(x^3)^{(n-2)}}{n!},\end{aligned}$$

donc pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} x^{3n} &= \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^3\right)^n}{n!} - \frac{1}{x^6} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(x^3\right)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{x^3}\left(e^{x^3} - 1\right) - \frac{1}{x^6}\left(e^{x^3} - 1 - x^3\right) = \left(\frac{e^{x^3}\left(x^3-1\right)+1}{x^6}\right),
\end{aligned}$$

ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!\,(n+2)} x^{3n} = x^3 e^{x^3} + 2\left(e^{x^3} - 1\right) - 5\left(\frac{e^{x^3}\left(x^3-1\right)+1}{x^6}\right).$$

Si $x = 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!\,(n+2)} x^{3n} = 1 \underset{m \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} x^{3n} = 1$.

D'où

$$S(x) = \begin{cases} x^3 e^{x^3} + 2\left(e^{x^3}-1\right) - 5\left(\dfrac{e^{x^3}\left(x^3-1\right) + x^4 - x^3 + 1}{x^6}\right) & \text{si } \ x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 5.7.

1. La fonction f n'est ni paire, ni impaire, alors les coefficients de Fourier sont :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\, x \sin(nx)\right]_0^{\pi}\Big) - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n^2\pi} \cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$a_{2p}(f) = 0 \text{ pour } p \neq 0$$

et

$$a_{2p+1}(f) = -\frac{2}{(2p+1)^2\,\pi}.$$

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\,x\cos(nx)]_0^{\pi}\right) + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\left(x\cos(nx)]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right).$$

2. La fonction f étant de classe C^1 par morceaux et $2\pi-$périodique, alors d'aprés le Théorème de Lejeune Dirichlet (Théorème 5.39), on a en particulier en tout point x où f est continue

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right).$$

La fonction f est continue en 0, alors

$$\begin{aligned}
0 &= f(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ ,
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},
\end{aligned}$$

alors on a

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ ,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution de l'exercice 5.8.

1.

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0,$$

car la fonction $x \mapsto x\cos(nx)$ est impaire.

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\,x\cos(nx)]_0^{\pi}\right) + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } \ n = 2p+1 \end{cases}.$$

3. f est C^1 par morceaux et continue sur $[-\pi,\pi[$ donc d'après le Théorème de Lejeune Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[-\pi,\pi[$; d'où pour tout $x \in [-\pi,\pi[$, on a

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

En particulier pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right),$$

en utilisant **2,** on trouve

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}(-1)^n = \frac{\pi}{2},$$

par suite, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

En utilisant l'égalité de Parceval, on a

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx,$$

ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Solution de l'exercice 5.9.

1. Comme f est paire, alors pour tout $n\in\mathbb{N}, b_n(f)=0$.

$$\bullet\ a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos(nx)\,dx,$$

car la fonction $x\mapsto x^2\cos(nx)$ est paire.

En utilisant l'intégral par partie deux fois, on trouve

$$a_n(f)=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

2. f est C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le Théorème de Lejeune Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

Donc en tout point x où la fonction f est continue, on a :

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

En particulier pour $x=0$, on a :

$$f(0)=0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

De même pour $x = \pi$, on a :

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En utilisant l'égalité de Parceval, on a :

$$\frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5},$$

ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Solution de l'exercice 5.10 .

1. Comme f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0$.

$$\bullet\ a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx,$$

car la fonction $x \mapsto |x|\cos(nx)$ est paire. D'où

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\, x\sin(nx)]_0^{\pi}\right) - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(nx)]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right), \end{aligned}$$

ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p}(f) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1}(f) = -\frac{4}{(2p+1)^2\pi}$.

La série de Fourier associée à f est donc

$$F(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x).$$

2. La fonction f est C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le Théorème de Lejeune

Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[-\pi,\pi[$; d'où pour tout $x\in[-\pi,\pi[$, on a

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x).$$

En particulier pour $x=0$, on a :

$$f(0)=0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

D'après les Exercices précédents on a

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

En utilisant l'égalité de Parceval, on a

$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3},$$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{16n^4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4},$$

alors on a

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Solution de l'exercice 5.11.

1. En utilisant l'intégration par partie, on a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} a_1(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\cos(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_1(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\,dx. \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x(1-\cos(2x))\,dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [x\sin((n+1)x) + x\sin((1-n)x)]\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi} x\sin((n+1)x)\,dx - \int_{0}^{\pi} x\sin((n-1)x)\,dx\right), \end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\left(x\left(-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\cos((n-1)x)\right)\Bigg]_0^{\pi}\right) \\ &\quad \underbrace{-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\cos((n-1)x)\right)dx}_{=0}, \end{aligned}$$

donc

$$a_n(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} = -\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[x\cos((1-n)x) - x\cos((n+1)x)\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi} x\cos((n-1)x)\,dx - \int_{0}^{\pi} x\cos((n+1)x)\,dx\right),
\end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left(x\left(\frac{1}{n-1}\sin((n-1)x) - \frac{1}{n+1}\sin((n+1)x)\right)\Big]_0^{\pi}\right)}_{=0} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{n-1}\sin((n-1)x) - \frac{1}{n+1}\sin((n+1)x)\right)dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= -\frac{1}{2\pi}\left(\left(-\frac{1}{(n-1)^2}\cos((n-1)x) + \frac{1}{(n+1)^2}\cos((n+1)x)\right)\Big]_0^{\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$b_n(f) = \frac{2n\left((-1)^{n+1} - 1\right)}{\pi\left(n^2-1\right)^2}.$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$\begin{aligned}
F(f)(x) &= a_0(f) + a_1(f)\cos(x) + b_1(f)\sin(x) + \sum_{n\geq 2}\left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{\pi}{4}\sin(x) + \sum_{n\geq 2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\cos(nx) + \frac{2n\left((-1)^{n+1}-1\right)}{\pi\left(n^2-1\right)^2}\sin(nx)\right).
\end{aligned}$$

3. D'après le Théorème de Lejeune Dirichlet, appliqué au point $x = 0$, on a

$$f(0) = 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1},$$

ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} = -\frac{1}{4}.$$

Solution de l'exercice 5.12.

1. Comme f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0$.

- $a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = \dfrac{2}{\pi}$ (la fonction $\sin(x)$ est positive sur $[0,\pi]$)

$$a_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(2x)\,dx = 0.$$

Pour $n \geq 2$, on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(nx)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(x)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\,dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right]_{-\pi}^{0}\Bigg) \\
& +\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right]_{0}^{\pi}\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right) \\
& +\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) \\
= & \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right),
\end{aligned}$$

ainsi

$$a_{2p}(f) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1}\right) \qquad \text{et} \quad a_{2p+1}(f) = 0.$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$\begin{aligned} F(f)(x) &= a_0(f) + a_1(f)\cos(x) + \sum_{n\geq 2} a_n(f)\cos(nx) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(2nx). \end{aligned}$$

2. f étant continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc d'après le Théorème de Lejeune Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, donc on a

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos(2nx)$$

or $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$ et les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{1-4n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\sin^2(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin^2(nx)}{1-4n^2}$$

convergent, donc

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\sin^2(nx).$$

Et comme

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2n+1} - 1,$$

alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = -1,$$

ainsi

$$|\sin x| = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\sin^2(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}.$$

Chapitre 6

Intégrales généralisées

Les intégrales de Riemann étudiées en première année concernent des fonctions f définies et bornées sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Il est utile de généraliser cette notion au cas de fonctions f définies sur un intervalle quelconque, sauf peut-être en un nombre fini de points et pas forcément bornées. Autrement dit, pour définir l'intégrale de Riemann, on est parti d'une fonction bornée sur un intervalle compact. Comment traiter le cas:

1) d'une fonction non bornée sur un intervalle borné ?

2) d'une fonction quelconque sur un intervalle non borné ?

Nous nous placerons dans la situation suivante :

I est un intervalle non compact et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quelconque.

6.1 Généralités

Définition 6.1 *On dit que f est* ***localement intégrable (loc. int)*** *sur I si f est Riemann intégrable sur tout intervalle compact $[a, b]$ inclus dans I.*

Exemple 6.2 *Toute fonction continue, ou continue par morceaux est localement Riemann-intégrable.*

Dans toute la suite, les fonctions considérées seront localement intégrables, et on suppose que I soit de la forme $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) avec a, b deux nombres réels tel que $a < b$ (intervalle borné), à savoir la fonction n'est pas définie en b (resp. n'est pas définie en a), c'est le cas où la courbe C_f de la fonction f possède une asymptote verticale d'équation $x = b$ (resp. $x = a$), ou soit de la forme $[a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b]$) c'est-à-dire le domaine d'intégration est non borné.

Définition 6.3 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, où $a < b \leq +\infty$ une fonction localement intégrable.*

i) L'intégrale $\int_a^{\to b} f(t)\, dt$ est appelée ***intégrale généralisée****, ou* ***intégrale impropre*** *de f.*

ii) On dit que l'intégrale $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ ***converge*** *si* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow b \\ <}} \int_a^{x} f(t)\,dt$ *existe et finie (i.e. cette limite vaut un nombre réel unique). Dans ce cas, on note :*

$$\int_a^{\to b} f(t)\,dt = \lim_{\substack{x \longrightarrow b \\ <}} \int_a^{x} f(t)\,dt$$

et on l'appelle la valeur de l'intégrale généralisée.

Dans le cas contraire, on dit que l' intégrale généralisée $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ ***diverge****.*

De même si $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *où* $-\infty \leq a < b$ *une fonction localement intégrable.*

i) L'intégrale $\int_{\to a}^{b} f(t)\,dt$ *est appelée* ***intégrale généralisé****e, ou* ***intégrale impropre*** *de* f*.*

ii) On dit que l'intégrale $\int_{\to a}^{b} f(t)\,dt$ ***converge*** *si* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}} \int_x^{b} f(t)\,dt$ *existe et finie (i.e. cette limite vaut un nombre réel unique). Dans ce cas, on note :*

$$\int_{\to a}^{b} f(t)\,dt = \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}} \int_x^{b} f(t)\,dt$$

et on l'appelle la valeur de l'intégrale généralisée.

Dans le cas contraire, on dit que l' intégrale généralisée $\int_{\to a}^{b} f(t)\,dt$ ***diverge****.*

Exemple 6.4 1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$, *pour tout* $x > 0$ *on a*

$$\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x),$$

alors

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$$

ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ *converge.*

2. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(t)\,dt$, *pour tout* $x > \frac{\pi}{2}$ *on a*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\,dt = -\cos(x),$$

alors

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\,dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (-\cos(x)) = -\lim_{x \longrightarrow +\infty} \cos(x),$$

cette limite peut prendre une infinité des valeurs, ainsi n'existe pas. Par conséquent l'intégrale $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ *diverge.*

3. $\int\limits_{0}^{5} \frac{1}{t}dt$, *pour tout* $0 < x < 5$ *on a*

$$\int\limits_{x}^{5} \frac{1}{t}dt = \ln 5 - \ln x,$$

alors

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \int\limits_{x}^{5} \frac{1}{t}dt = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} (\ln 5 - \ln x) = +\infty,$$

ainsi l'intégrale $\int\limits_{0}^{5} \frac{1}{t}dt$ *diverge.*

Théorème 6.5 ***(Critère de Cauchy pour les intégrales généralisées).***

i) Soit f *une fonction loc.int sur* $[a, +\infty[$, *alors l'intégrale généralisée* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x, x^{'} \geq A \Longrightarrow \left| \int\limits_{x}^{x^{'}} f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

ii) Soit f *une fonction loc.int sur* $[a, b[$ $(a, b \in \mathbb{R}$ *et* $a < b)$, *alors l'intégrale généralisée* $\int\limits_{a}^{\rightarrow b} f(t)\,dt$

converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \left]0, b-a\right[: \forall x, x^{'} \in \left]b-\delta, b\right[\Longrightarrow \left| \int_{x}^{x^{'}} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Pour l'intervalle de type $\left]a, b\right]$, *nous avons une critère analogue.*

Définition 6.6 *On dit que deux intégrales sont de* ***même nature*** *si elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes.*

Proposition 6.7 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *(*$I = \left[a, b\right[$ *où* $a < b \leq +\infty$*) une fonction localement intégrable sur* I. *Alors pour tout nombre réel* c *tel que* $a \leq c < b$ *on a*

$$\int_{a}^{\to b} f(t)\, dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{c}^{\to b} f(t)\, dt \text{ converge},$$

c'est-à-dire les deux intégrales $\int_{a}^{\to b} f(t)\, dt$ *et* $\int_{c}^{\to b} f(t)\, dt$ *ont même nature.*

Démonstration. D'après la relation de Chasles il est clair que : pour tout c tel que $a \leq c < b$ on a

$$\int_{a}^{\to b} f(t)\, dt = \int_{a}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{\to b} f(t)\, dt,$$

or la fonction f est intégrable sur le compact $[a, c]$ (puisque f est localement intégrable sur $[a, b[$). Ainsi les deux intégrales $\int_{a}^{\to b} f(t)\, dt$ et $\int_{c}^{\to b} f(t)\, dt$ sont de même nature. ■

• **Intégrales doublement impropres**

Dans cette partie on s'intéresse au cas des intervalles $\left]a, b\right[$, $\left]-\infty, b\right[$, $\left]a, +\infty\right[$ et $\left]-\infty, +\infty\right[$, c'est-à-dire au cas des intégrales doublement impropres.

Proposition 6.8 *Soit* f *une fonction loc. int sur* $\left]a, b\right[$ *et* $c \in \left]a, b\right[$. *Alors,*

l'intégrale $\int_{\to a}^{\to b} f(t)\, dt$ *est convergente si et seulement si les deux intégrales* $\int_{\to a}^{c} f(t)\, dt$ *et* $\int_{c}^{\to b} f(t)\, dt$ *sont convergentes. Dans ce cas, on note*

$$\int_{\to a}^{\to b} f(t)\, dt = \int_{\to a}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{\to b} f(t)\, dt.$$

Sinon on dit que l'intégrale impropre $\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,dt$ *est divergente.*

Remarque 6.9 *La Proposition précédente montre que, pour étudier une intégrale doublement impropre, il faut la couper en deux intégrales impropres.*

Exemple 6.10 *On sait que* $\int_{-x}^{x} \sin(t)\,dt = 0 \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et pourtant l'intégrale impropre* $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ *n'a pas de sens (diverge) puisque l'intégrale* $\int_{0}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ *n'existe pas.*

- **Intégrales faussement impropres**

On se place ici sur l'intervalle $[a,b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$.

Proposition 6.11 *Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Si f admet une limite finie en b^- alors l'intégrale impropre* $\int_{a}^{\to b} f(t)\,dt$ *est convergente.*

On dit dans ce cas que l'intégrale est ***faussement impropre*** *en b.*

Démonstration. Comme f admet une limite finie en b^-, il suffit de prolonger f par continuité en b. Notons $\widetilde{f}$ ce prolongement. $\widetilde{f}$ est continue sur $[a,b]$ et pour $a \leq x < b$, on a

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} \widetilde{f}(t)\,dt \underset{x\longrightarrow b^-}{\longrightarrow} \int_{a}^{b} \widetilde{f}(t)\,dt,$$

ce qui prouve que $\int_{a}^{\to b} f(t)\,dt$ converge et vaut $\int_{a}^{b} \widetilde{f}(t)\,dt$. ■

Remarque 6.12 *Pas d'intégrale faussement impropre en $\pm\infty$, c'est réserver à une borne finie.*

Exemple 6.13 *L'intégrale* $\int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *est faussement impropre en* 0, *donc elle est convergente, car* $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1.$

6.2 Intégrales de référence

Dans cette partie nous donnons quelques résultats fondamentaux des intégrales impropres de type spécial qui peuvent être utilisés à l'étude de la nature d'autre intégrale impropre.

Proposition 6.14 *i) L'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *est* $\begin{cases} \textit{convergente si} & \alpha > 1 \\ \textit{divergente si} & \alpha \leq 1 \end{cases}$.

ii) L'intégrale impropre $\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *est* $\begin{cases} \textit{convergente si} & \alpha < 1 \\ \textit{divergente si} & \alpha \geq 1 \end{cases}$.

Démonstration. *i)* On distingue deux cas ($\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$).

Pour $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^x \Bigg)$$

$$= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} \ (\in \mathbb{R}) & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Ainsi,

$$\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \begin{cases} \text{converge si} & \alpha > 1 \\ \text{diverge si} & \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

De même façon on peut démontrer *ii)*, c'est-à-dire

$$\text{l'intégrale } \int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt \begin{cases} \text{converge si} & \alpha < 1 \\ \text{diverge si} & \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

■

Exemple 6.15 *Les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *et* $\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *sont convergentes, et les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *et* $\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^2} dt$ *sont divergentes.*

Corollaire 6.16 *Si* $-\infty < a < b < +\infty$, *et si* α *un réel, alors*

i) $\int_{\to a}^{b} \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

ii) $\int_{a}^{\to b} \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration. Pour la première intégrale il suffit de prendre le changement du variable $\langle u = t - a \rangle$.

Pour la deuxième il suffit de prendre le changement du variable $\langle u = b - t \rangle$. Puis en appliquant la Proposition précédente. ■

Proposition 6.17 *L'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ *est* $\begin{cases} \textit{convergente si} & \alpha > 0 \\ \textit{divergente si} & \alpha \leq 0 \end{cases}$.

Démonstration.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^{x} e^{-\alpha t} dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\left. -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x \right)$$

$$= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha x} \right) \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} (\in \mathbb{R}) & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases},$$

ainsi,

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \begin{cases} \text{converge si} & \alpha > 0 \\ \text{diverge si} & \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

■

Exemple 6.18 *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ *est convergente et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{t} dt$ *est divergente.*

6.3 Propriétés

• **Linéarité**

Théorème 6.19 *Soient* f, g *deux fonctions réelles loc. int. sur* $[a, b[$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$i) \text{ si } \int_a^{\to b} f(t)\, dt \text{ converge et } \int_a^{\to b} g(t)\, dt \text{ converge alors, } \int_a^{\to b} (f+g)(t)\, dt \text{ converge,}$$

de plus on a

$$\int_a^{\to b} (f+g)(t)\, dt = \int_a^{\to b} f(t)\, dt + \int_a^{\to b} g(t)\, dt.$$

$$ii) \text{ Si } \int_a^{\to b} f(t)\, dt \text{ converge alors } \int_a^{\to b} (\lambda f)(t)\, dt \text{ converge et on a } \int_a^{\to b} (\lambda f)(t)\, dt = \lambda \int_a^{\to b} f(t)\, dt.$$

Démonstration. *i)* Trivial, il suffit d'écrire, pour tout x tel que $a \leq x < b$: $\int\limits_a^x (f+g)(t)\,dt = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_a^x g(t)\,dt$ (car les deux fonction f, g sont loc. int sur $[a, b[$). Puis en passant à la limite on trouve le résultat.

ii) On utilise la même idée. ■

Remarque 6.20 *Si* $\int\limits_a^{\to b} f(t)\,dt$ *et* $\int\limits_a^{\to b} g(t)\,dt$ *sont divergentes alors on ne peut rien conclure sur la nature de l'intégrale* $\int\limits_a^{\to b} (f+g)(t)\,dt$*, par exemple si on prend l'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$.

D'une part, on a

$$1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1+t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt$$

et d'autre part, les deux intégrales impropres $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+t}{t^2}dt$ *et* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ *sont divergentes, c'est-à-dire*

$$1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1+t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt \neq \int\limits_1^{+\infty} \frac{1+t}{t^2}dt - \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt.$$

- **Intégration par partie**

Théorème 6.21 *Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Si fg possède une limite finie en b^-, alors les intégrales impropres $\int\limits_a^{\to b} \left(f'g\right)(t)\,dt$ *et* $\int\limits_a^{\to b} \left(fg'\right)(t)\,dt$ *sont de même nature. Si de plus elles sont convergentes, alors*

$$\int\limits_a^{\to b} \left(f'g\right)(t)\,dt = fg]_a^{\to b} - \int\limits_a^{\to b} \left(f\ g'\right)(t)\,dt.$$

- **Changement de variable**

Théorème 6.22 *Soient a, b deux réels tel que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, φ une bijection de classe C^1 de $]a, b[$ sur son image et f une fonction continue sur $\varphi(]a, b[)$. Alors, les intégrales* $\int\limits_{\to\varphi(a)}^{\to\varphi(b)} f(t)\,dt$ *et* $\int\limits_{\to a}^{\to b} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$ *sont de même nature et égales si elles convergent.*

6.4 Intégrale des fonctions positives

6.4.1 Critères de convergence

Dans cette partie nous donnons les principaux critères de comparaison adoptés pour l'étude de la nature d'une intégrale généralisée.

Pour la suite nous utiliserons que les fonctions positives. Pour les intégrales des fonctions négatives, il suffit de considérer la fonction $-f$, qui nous amène au cas des intégrales des fonctions positives.

Proposition 6.23 *Si f est loc. int. et positive sur $[a,b[$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ converge si et seulement s'il existe un nombre réel $M>0$ tel que $0 \leq \int_a^x f(t)\,dt \leq M$ pour tout $x \in [a,b[$.*

Et donc l'intégrale $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ diverge si et seulement si $\int_a^{\to b} f(t)\,dt = +\infty$.

Proposition 6.24 ***(Critère de comparaison).*** *Si $f,g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions loc. int. positives telles que $f \leq g$, alors :*

$$\text{i) } \int_a^{\to b} g(t)\,dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{\to b} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

$$\text{ii) } \int_a^{\to b} f(t)\,dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{\to b} g(t)\,dt \text{ diverge.}$$

Démonstration. *i)* On a

$$f \leq g \text{ sur } [a,b[\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt \quad \text{pour tout } x \in [a,b[,$$

or $\int_a^{\to b} g(t)\,dt$ converge, alors d'après la Proposition 6.23, il existe un nombre réel $M>0$ tel que

$$0 \leq \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt \leq M, \text{ pour tout } x \in [a,b[,$$

ainsi $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ converge.

ii) Comme $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ diverge et d'après la Proposition 6.23 on a

$$+\infty = \int_a^{\to b} f(t)\,dt \leq \int_a^{\to b} g(t)\,dt,$$

d'où l'intégrale généralisé $\int_a^{\to b} g(t)\,dt$ diverge. ■

Corollaire 6.25 *Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions loc. int. positives telles que $f \overset{b}{\sim} g$ (les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de b), alors les deux intégrales $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ et $\int_a^{\to b} g(t)\,dt$ sont de même nature.*

Démonstration. On a

$$f \overset{b}{\sim} g \Leftrightarrow f(t) = g(t)(1 + \varepsilon(t)) \text{ tel que } \lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} b} \varepsilon(t) = 0,$$

donc il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$\frac{1}{2} g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2} g(t), \quad \forall t \in [c, b[$$

En appliquant la Proposition 6.24, on trouve que les deux intégrales $\int_c^{\to b} f(t)\,dt$ et $\int_c^{\to b} g(t)\,dt$ sont de même nature, et d'aprés la relations de Chasles on déduit que les intégrales $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ et $\int_a^{\to b} g(t)\,dt$ sont de même nature. ■

Plus généralement on a la Proposition suivante.

Proposition 6.26 *Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions loc. int. positives telles que*

$$\lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} b} \frac{f(t)}{g(t)} = l \ (l \in \mathbb{R}).$$

i) Si $l \neq 0$, alors les deux intégrales $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ et $\int_a^{\to b} g(t)\,dt$ sont de même nature.

ii) Si $l = 0$ ($f = o(g)$ au voisinage de b), alors,

$$\bullet \int_a^{\to b} g(t)\,dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{\to b} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

$$\bullet \int_a^{\to b} f(t)\,dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{\to b} g(t)\,dt \text{ diverge.}$$

Démonstration. *i)* Il suffit de remarquer que

$$\lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} b} \frac{lf(t)}{g(t)} = 1,$$

ainsi d'après le Corollaire 6.25 précédent, les deux intégrales $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ et $\int_a^{\to b} g(t)\,dt$ sont de même nature.

ii) On a

$$f = o(g) \text{ au voisinage de } b \Rightarrow f = O(g) \text{ au voisinage de } b$$

$$\Rightarrow \exists M > 0,\ f(x) \leq Mg(x) \text{ au voisinage de } b.$$

D'après la proposition 6.24, on trouve le résultat. ■

Corollaire 6.27 *i) Soit f une fonction loc. int. sur $[a, +\infty[$, et positive. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.*

ii) Soit f une fonction loc. int. sur $[a, b[$ $(a < b)$, et positive. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} b} (b-t)^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ est convergente.

Démonstration. *i)* On a

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0 \Leftrightarrow f = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Comme $\alpha > 1$, alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge. Ainsi d'après la Proposition précédente l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

ii) On a

$$\lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} b} (b-t)^\alpha\ f(t) = 0 \Leftrightarrow f = o\left(\frac{1}{(b-t)^\alpha}\right) \text{ au voisinage de point } b.$$

Comme $\alpha < 1$, alors l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge. Ainsi d'aprés la Proposition précédente l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)\, dt$ est convergente. ■

6.5 Intégrale des fonctions de signe quelconque

• Convergence absolue

Définition 6.28 *Soient $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctions loc. int. L'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)\, dt$ est dite **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} |f(t)|\, dt$ converge.*

Proposition 6.29 *Soient $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctions loc. int. Alors*

$$\int_a^{\to b} f(t)\, dt \text{ est absolument convergente} \Rightarrow \int_a^{\to b} f(t)\, dt \text{ est convergente.}$$

Démonstration. On sait que

$$|f| = f^+ + f^- \quad \text{et} \quad f = f^+ - f^-$$

où

$$\begin{cases} f^+ = \max(f, 0) \\ f^- = \max(-f, 0) \end{cases}$$

et donc

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \text{ et } f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

alors les fonctions f^+ et f^- sont loc int sur $[a, b[$. De plus on a

$$0 \leq f^+ \leq |f| \text{ et } 0 \leq f^- \leq |f|.$$

Or l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} |f(t)|\, dt$ converge, et donc d'après le Critère de comparaison (Proposition 6.24), les deux intégrales impropres $\int_a^{\to b} f^+ dt$ et $\int_a^{\to b} f^- dt$ sont convergente. Ainsi l'intégrale

$$\int_a^{\to b} f(t)\, dt = \int_a^{\to b} f^+ dt - \int_a^{\to b} f^- dt$$

est convergente, d'aprés la linéarité. ■

Exemple 6.30 *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin\left(\ln\left(t^2+1\right)\right) dt$ *est absolument convergente.*

En effet :

$$\left|e^{-t} \sin\left(\ln\left(t^2+1\right)\right)\right| \leq e^{-t},$$

or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ *est convergente. Ainsi l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin\left(\ln\left(t^2+1\right)\right) dt$ *est absolument convergente.*

6.5.1 Critère d'Abel pour les intégrales de la forme $\int fg$

Théorème 6.31 ***(Théorème d'Abel)****. Soient* $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions loc. int.*

i) Si f *est monotone et* $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} b} f(t) = 0$, *et*

ii) s'il existe $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in [a, b[$: $\left|\int_a^x g(t)\, dt\right| \leq M$.

Alors l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)\, g(t)\, dt$ *converge.*

Exemple 6.32 *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *est convergente.*

En effet : $f(t) = \frac{1}{t}$, *est une fonction décroissante sur* $[1, +\infty[$, *et* $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$.

D'autre part, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\left|\int_1^x \sin(t)\, dt\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2.$$

Ainsi d'après le Théorème d'Abel, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *converge.*

• **Intégrale semi-convergente**

Définition 6.33 *L'intégrale impropre* $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ *est dite* ***semi-convergente*** *si elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.*

Exemple 6.34 *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *converge mais elle ne converge pas absolument. Donc elle est semi-convergente.*

En effet : en utilisant le Théorème d'Abel (Théorème 6.31), il est clair que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *est convergente.*

Etude de la convergence absolue.

On a pour tout $t \geq 1 : \frac{\sin^2 t}{t} \leq \frac{|\sin t|}{t}$ *et* $\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$. *Or l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ *diverge, ainsi l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ *diverge.*

6.6 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ et une fonction de deux variables $f(t, x)$ où $t \in [a, b[$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose ou bien que $b = +\infty$ ou bien que $b < +\infty$ et que pour certain $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(t, x)$ n'est pas définie en b. On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(t, x)$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ au sens des intégrales généralisées et on s'intéresse aux propriétés de la fonction définie sur I par l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_a^{\to b} f(t, x)\,dt.$$

On étudie la continuité et la dérivabilité de F sur I.

6.6.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 6.35 *Soit* $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions intégrables sur un intervalle semi ouvert* $[a, b[$ *telle que :*

i) la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $[a, b[$ *vers une fonction localement intégrable* f.

ii) il existe une fonction φ *intégrable (au sens des intégrales généralisées) sur l'intervalle semi ouvert* $[a, b[$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Alors f est intégrable (au sens des intégrales généralisées) sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ et :

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t)\,dt = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^{\rightarrow b} f_n(t)\,dt.$$

6.6.2 Continuité

Théorème 6.36 *Soit $f : [a,b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables sur $[a,b[\times I$. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, intégrable (au sens des intégrales généralisées) sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ telle que :*

$$\forall(t,x)\in[a,b[\times I,\ \ |f(t,x)|\leq\varphi(t).$$

Alors la fonction $t\longrightarrow f(t,x)$ est intégrable (au sens des intégrales généralisées) sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ et la fonction F, définie pour $x\in I$ par

$$F(x) = \int_a^{\rightarrow b} f(t,x)\,dt.$$

est continue sur I. En particulier, pour tout $x_0\in I$, on a

$$F(x_0) = \int_a^{\rightarrow b} \lim_{x\longrightarrow x_0} f(t,x)\,dt = \lim_{x\longrightarrow x_0}\int_a^{\rightarrow b} f(t,x)\,dt,$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et d'intégrale généralisée.

Exemple 6.37 *Soit $f(t,x)=\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$, définie pour $(t,x)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$.*

La fonction f est continue par rapport à chacune des deux variables sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$$\forall(t,x)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[,|f(t,x)|\leq\frac{1}{1+t^2},$$

qui est une fonction intégrable (au sens des intégrales généralisées) sur $[0,+\infty[$.

La fonction $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$, est donc continue sur $]0,+\infty[$.

Pour la continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre, en général, on ne peut pas raisonner sur l'intervalle I tout entier. On cherche des dominations sur des sous-intervalles de I et on utilise un argument de saturation pour obtenir le résultat sur I tout entier. Voir l'Exemple 6.40, de la fonction Gamma ci-dessous.

6.6.3 Dérivation

Théorème 6.38 *Soit* $f : [a,b[\times I \longrightarrow \mathbb{R}$*, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables sur* $[a,b] \times I$*. On suppose que* f *admet une dérivée partielle par rapport à* x*,* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$*, continue par rapport à chacune des deux variables sur* $[a,b] \times I$*. On suppose qu'il existe deux fonctions* φ *et* $\psi : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$*, intégrables (au sens des intégrales généralisées) sur l'intervalle semi-ouvert* $[a,b[$ *telles que*

$$\forall (t,x) \in [a,b[\times I, |f(t,x)| \leq \varphi(t) \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \psi(t).$$

Alors pour tout $x \in I$*, les fonctions* $t \longrightarrow f(t,x)$ *et* $t \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ *sont intégrables (au sens des intégrales généralisées) sur l'intervalle semi ouvert* $[a,b[$ *et la fonction* F*, définie pour* $x \in I$ *par*

$$F(x) = \int_a^{\to b} f(t,x)\, dt,$$

est dérivable sur I *et*

$$F'(x) = \left(\int_a^{\to b} f(t,x)\, dt\right)' = \int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\, dt,$$

ce qui est un cas d'interversion de dérivée et d'intégrale généralisée.

Remarque 6.39 *Pour la dérivation sous le signe somme, on a la même remarque que pour la continuité : en général, on ne peut pas raisonner sur l'intervalle* I *tout entier. On cherche des dominations sur des sous-intervalles de* I *et on utilise un argument de saturation pour obtenir le résultat sur* I *tout entier. Voir l'Exemple suivant.*

Exemple 6.40 *La fonction Gamma.*

Pour $x \in \mathbb{R}$*, on pose*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Comme il y a deux problèmes d'intégration, en 0 *et en* $+\infty$*, on sépare cette intégrale généralisée en deux intégrales généralisées :*

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{et} \quad \Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

La fonction à intégrer $f(t,x) = e^{-t} t^{x-1}$ *est positive et localement intégrable. On peut donc pour* $x > 0$ *fixé, appliquer les Critères de comparaison sur les intégrales généralisées.*

Etude de Γ_1 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ *fixé. Quand* $t \longrightarrow 0$, $f(t,x)$ *est équivalente à* t^{x-1} *et comme* $\int\limits_0^1 t^{x-1}dt$ *converge si et seulement si* $x > 0$, *alors* $\Gamma_1(x)$ *est bien définie pour* $x \in]0,+\infty[$.

Etude de Γ_2 :

Pour tout x *fixé, quand* $t \longrightarrow +\infty$, *on a*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{t/2} f(t,x) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-t/2} t^{x-1} = 0.$$

Donc $f(t,x)$ *est dominée au voisinage de* $+\infty$ *par* $e^{-t/2}$ *qui est intégrable en* $+\infty$. *Donc* $\Gamma_2(x)$ *est également bien définie pour* $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi la fonction Γ *est bien définie pour* $x > 0$.

On vérifie sans difficulté que $\Gamma_1(1) = 1$ *et que* $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. *On en déduit en particulier que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. *La fonction* Γ *apparaît donc comme une extension à* $\mathbb{R}_+$ *de la fonction "factorielle".*

Continuité : *la fonction* $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$ *est continue sur* $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Soit $a > 0$, *on a :*

$$\forall x \in [a,+\infty[, \forall t \in]0,1], e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{a-1}.$$

La fonction $\psi_1(t) = e^{-t}t^{a-1}$ *est intégrable au voisinage de* 0. *D'après le Théorème 6.36 , la fonction* $\Gamma_1(x)$ *est continue sur* $[a,+\infty[$. *Ceci étant vrai pour tout* $a > 0$, *on en déduit que* $\Gamma_1(x)$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

Soit $b > 0$. *On a de la même façon :*

$$\forall x \in]0,b], \forall t \in [1,+\infty[, e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{b-1}.$$

La fonction $\psi_2(t) = e^{-t}t^{b-1}$ *est intégrable en* $+\infty$. *D'après le Théorème 6.36, la fonction* $\Gamma_2(x)$ *est continue sur* $]0,b]$. *Ceci étant vrai pour tout* $b > 0$, *on en déduit que* $\Gamma_2(x)$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

La fonction Γ *est donc continue sur* $]0,+\infty[$.

Dérivation *: la fonction* $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$ *admet une dérivée partielle par rapport à* x *qui est continue sur* $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. *En effet: pour tout* $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{-t}t^{x-1}\ln(t).$$

Soit $\alpha, \beta > 0$. *Comme pour la continuité, on a :*

$$\forall x \in [\alpha,+\infty[, \forall t \in]0,1], \left|e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\right| \leq -e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(t),$$

la fonction $e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(t)$ *est intégrable en* 0, *car :*

Pour $\alpha > 1$, $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(t)}{\ln(t)} = 0$ *et* $\int\limits_0^1 \ln(t) = -1$, *donc* $\int\limits_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(t)\,dt$ *converge,*

pour $\alpha = 1$, $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{e^{-t}\ln(t)}{\ln(t)} = 1$ *et* $\int\limits_0^1 \ln(t) = -1$, *donc* $\int\limits_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(t)\,dt$ *converge,*

et pour $0 < \alpha < 1$, *soit* $\gamma > 0$ *tel que* $1-\alpha < \gamma < 1$, *alors on a :* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(t)}{\frac{1}{t^{\gamma}}} = 0$ *et* $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{\gamma}}dt$ *converge, donc* $\int\limits_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(t)\,dt$ *converge.*

De même on a

$$\forall x \in]0,\beta], \forall t \in [1,+\infty[, \left|e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\right| \leq e^{-t}t^{\beta-1}\ln(t).$$

et

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{e^{-t}t^{\beta-1}\ln(t)}{\frac{1}{t^2}} = 0,$$

alors la fonction $e^{-t}t^{\beta-1}\ln(t)$ *est intégrable en* $+\infty$.

On en déduit par le Théorème 6.38, que les fonctions Γ_1 *et* Γ_1 *sont dérivables respectivement sur* $[\alpha,+\infty[$ *et* $]0,\beta]$. *Comme c'est vrai pour tous* $\alpha,\beta > 0$, *ces deux fonctions sont dérivables sur* $]0,+\infty[$. *Il en est de même pour* Γ *et on a :*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma'(x) = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\,dt.$$

Remarque 6.41 *L'hypothèse de domination de la fonction* $f(t,x)$ *par une fonction intégrable* φ *ou de la dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *par une fonction intégrable* ψ *sur l'intervalle semi-ouvert* $[a,b[$ *dans les deux Théorèmes (Théorème 6.36 et Théorème 6.38) est très forte. On peut envisager une hypothèse moins forte, la convergence uniforme.*

Définition 6.42 *On dit que l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre*

$$F(x) = \int\limits_a^{\rightarrow b} f(t,x)\,dt,$$

est ***uniformément convergente*** *sur* I *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[\text{ tel que } \forall x \in I, \left|\int\limits_c^{\rightarrow b} f(t,x)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

On peut montrer que la conclusion des Théorèmes (Théorème 6.36 et Théorème 6.38) reste valide si on remplace l'hypothèse de domination (sur f ou sur $\frac{\partial f}{\partial x}$) par cette hypothèse de convergence uniforme.

6.7 Exercices

Exercice 6.1. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$1.\ \int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt \quad ; \quad 2.\ \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)dt \quad ; \quad 3.\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \quad ; \quad 4.\ \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\sqrt{t^5+t+1}}dt;$$

$$5.\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(t^2\right)}{1+t^2}dt \quad ; \quad 6.\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}dt \quad ; \quad 7.\ \int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{t+1}}dt \quad ; \quad 8.\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+2}dt.$$

Exercice 6.2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$1.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt \quad ; \quad 2.\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(5t)-\sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}}dt \quad ; \quad 3.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3+t^2}{t^6+1}dt \quad ; \quad 4.\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

$$5.\ \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt \quad ; \quad 6.\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^t}dt \quad ; \quad 7.\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt.$$

Exercice 6.3. Calculer les intégrales suivantes

$$1.\ \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos(t)}dt \quad ; \quad 2.\ \int_{\to a}^{\to b} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt, \quad \text{où} \quad a<b.$$

Exercice 6.4.

1. Étudier pour $\alpha > 0$, la convergence et la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$.

2. Étudier suivant les valeurs des paramètres réels α et β ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}dt.$$

Exercice 6.5. Étudier suivant les valeurs des paramètres réels α et β $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ la nature de l'intégrale de Bertrand

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}\left[\ln(t)\right]^{\beta}} dt.$$

Exercice 6.6. On étudie ici l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} f(t,x)\, dt$$

avec $f(t,x) = \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$.

1. a - Montrer que cette intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que F est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b - Montrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est paire et calculer $F(0)$.

3. Montrer que pour $x > 0$, on a

$$F(x) = xG(x),$$

où $G(x)$ est donnée par

$$G(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2 + x^2} du.$$

4. Montrer que $G(x)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $G^{'}(x)$ et $G^{''}(x)$ sous la forme d'intégrales généralisées dépendant du paramètre $x \in]0, +\infty[$.

5. En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est donnée par

$$F^{''}(x) = x \int_{0}^{+\infty} \frac{\left(2x^2 - 6u^2\right)\cos(u)}{\left(u^2 + x^2\right)^3} du.$$

Exercices suplémentaires

Exercice 6.7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction

$$f(x) = \int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - x\cos(t)}dt$$

1) Vérifier que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est une fonction paire de x.

3) Montrer que f et 2 fois dérivable pour $|x| < 1$ et qu'elle vérifie la relation :

$$4x(x^2-1)f^{''}(x)+4(x^2-1)f^{'}(x)-xf(x)-\int_0^{\pi}R(t,x)\,dt\ ,$$

où

$$R(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin(t)}{\sqrt{1-x\cos(t)}}\right).$$

4) En déduire que f vérifie l'équation différentielle :

$$4x(x^2-1)f^{''}(x)+4(x^2-1)f^{'}(x)-xf(x)=0.$$

• **Solutions des exercices**

Solution de l'exercice 6.1.

1. On a

$$\int_0^{+\infty}\sin(t)\,dt=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_0^{x}\sin(t)\,dt=\lim_{x\longrightarrow+\infty}(1-\cos(x))\ \text{ n'existe pas}$$

(cette limite prend plus d'une valeur), et donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\sin(t)\,dt$ diverge.

2. En faisant le changement du variable $\langle u=t^2\Rightarrow du=2tdt\rangle$, alors

$$\int_1^{+\infty}\sin\left(t^2\right)dt=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}du.$$

En appliquant le Théorème d'Abel (Théorème 6.31) à l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}du.$

D'une part la fonction $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et $\lim_{u\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}=0.$

D'autre part pour tout $x\in[1,+\infty[$: on a $\left|\int_1^{x}\sin(u)\,du\right|\leq 2.$

D'où l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}du$ converge, ainsi l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\sin\left(t^2\right)dt$ converge, et par suite l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\sin\left(t^2\right)dt$ converge car la fonction $\sin\left(t^2\right)$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$.

3. Pour $t \geq 1$, on a $t^2 \geq t$. D'après la croissance de la fonction exponentielle on trouve

$$e^{-t^2} \leq e^{-t},$$

or d'après la Proposition 6.17, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, d'où d'après la Proposition 6.24, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge, ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge, car la fonction e^{-t^2} est continue sur $[0,1]$.

4. On sait que $\frac{2t}{\sqrt{t^5+t+1}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$, et comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ converge, alors d'après le Corollaire 6.25, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{2t}{\sqrt{t^5+t+1}}dt$ converge, ainsi l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{\sqrt{t^5+t+1}}dt$, car la fonction $\frac{2t}{\sqrt{t^5+t+1}}$ est continue sur $[0,1]$.

5. On a

$$\left|\frac{\cos\left(t^2\right)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+t^2} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, alors d'après la Proposition 6.24, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos\left(t^2\right)}{1+t^2}\right| dt$ converge. D'où l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(t^2\right)}{1+t^2}dt$ converge, ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(t^2\right)}{1+t^2}dt$ converge puisque la fonction $\frac{\cos\left(t^2\right)}{1+t^2}$ continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.

6. On a pour tout $t \geq 1$:

$$\sin(t) \geq -1, \text{ donc } e^{\sin t} \geq e^{-1},$$

ainsi

$$\frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{e^{-1}}{t}.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge, alors d'après la Proposition 6.24, on déduit que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}dt$ diverge.

7. $\int\limits_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{t+1}} dt = \int\limits_{\to -1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{t+1}} dt$

En faisant le changement du variable $\langle u = t+1 \rangle$, on trouve

$$\int\limits_{\to -1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{t+1}} dt = \int\limits_{\to 0}^{8} \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du.$$

Comme l'intégrale impropre $\int\limits_{\to 0}^{1} \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du$ converge, alors l'intégrale $\int\limits_{\to 0}^{8} \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du$ converge. Ainsi l'intégrale impropre $\int\limits_{\to -1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{t+1}} dt$ converge.

8. On a pour $t \geq e$,

$$\frac{\ln(t)}{t+2} \geq \frac{1}{t+2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t+2} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

et comme l'intégrale impropre $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, alors d'après le Corollaire 6.25 et la Proposition 6.24, l'intégrale impropre $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+2} dt$ diverge.

Solution de l'exercice 6.2.

1. On a

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \sin(t)\, dt + \int\limits_{0}^{+\infty} \sin(t)\, dt,$$

or

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(t)\, dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int\limits_{0}^{x} \sin(t)\, dt = 1 - \lim_{x \longrightarrow +\infty} \cos x, \text{ est une limite qui n'éxiste pas.}$$

Ainsi l'intégrale $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(t)\, dt$ diverge, et par conséquent (Proposition 6.8), l'intégrale impropre $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\, dt$ est divergente.

2. L'intégrale $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt$, est doublement impropre, alors on doit le couper en deux integrales impropres, en effet :

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt.$$

• Pour $I_1 = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt$, il est clair que la fonction $\sin(5t) - \sin(3t)$ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, et

$$\sin(5t) - \sin(3t) = 2t + o(t).$$

Ainsi

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}}}{\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{2t}{t^{\frac{5}{3}}}}{\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}} = 2.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int\limits_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} dt$ est convergente alors l'intégrale impropre $I_1 = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt$ est convergente.

• Pour $I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt$, on a

$$\left| \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} \right| \leq \frac{2}{t^{\frac{5}{3}}},$$

et comme l'intégrale impropre $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} dt$ converge, alors l'intégrale impropre $I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt$ est convergente, et par conséquent l'intégrale impropre $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(5t) - \sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}} dt$ converge.

3. On a

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 + t^2}{t^6 + 1} dt &= \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{t^3 + t^2}{t^6 + 1} dt + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^3 + t^2}{t^6 + 1} dt \\ &= -\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^3 - t^2}{t^6 + 1} dt + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^3 + t^2}{t^6 + 1} dt \end{aligned}$$

Il est clair que les deux intégrales $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^3 - t^2}{t^6 + 1} dt$ et $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^3 + t^2}{t^6 + 1} dt$ sont impropres au voisinage de $+\infty$.

Comme

$$\frac{t^3 - t^2}{t^6 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3} \quad \text{et} \quad \frac{t^3 + t^2}{t^6 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$$

et l'intégrale impropre $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge alors les deux intégrales $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^3 - t^2}{t^6 + 1} dt$ et $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^3 + t^2}{t^6 + 1} dt$ sont convergentes, et par conséquent l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3+t^2}{t^6+1} dt$ converge.

4. On a

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \int\limits_{\rightarrow 0}^{1} \frac{\cos(t)}{t^2} dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

• Pour $I_1 = \int\limits_{\rightarrow 0}^{1} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$, il est clair que $\cos(t)$ est une fonction positive au voisinage de 0, de plus

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{\cos(t)}{t^2}} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)}{t^2}} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)} = 1.$$

Comme l'intégrale impropre $\int\limits_{\rightarrow 0}^{1} \frac{1}{t^2} dt$ est divergente, alors d'aprés la Proposition 6.26, l'intégrale $\int\limits_{\rightarrow 0}^{1} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est divergente, et par conséquent (Proposition 6.8), l'intégrale $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ diverge.

5. On a

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt = \int\limits_{\rightarrow 0}^{1} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt.$$

• Pour $I_1 = \int\limits_{\rightarrow 0}^{1} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$, il est clair qu'au voisinage de 0 on a

$$1-\cos(t) = \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$$

et donc

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2},$$

Or la fonction constante $\frac{1}{2}$ esr Riemann intégrable sur $[0,1]$, d'où $I_1 = \int\limits_{\rightarrow 0}^{1} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

• Pour $I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$, il est clair que

$$\left| \frac{1-\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}.$$

Or $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, alors l'intégrale $I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente, et par conséquent I_2 converge. Ainsi l'intégrale $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ converge.

6.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^t} dt &= \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{\ln(t)}{t+e^t} dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^t} dt \\
&= -\int\limits_{\to 0}^{1} \frac{-\ln(t)}{t+e^t} dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^t} dt.
\end{aligned}$$

• Pour $I_1 = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{-\ln(t)}{t+e^t} dt$, on a

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{-\ln(t)}{t+e^t}}{-\ln(t)} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t+e^t} = 1.$$

Et d'après l'intégration par partie on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\to 0}^{1} \ln(t)\, dt &= \left(t\ln(t)]_{\to 0}^{1} - \int\limits_{0}^{1} dt \right) \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} t\ln(t) - 1 = -1.
\end{aligned}$$

Ainsi d'aprés la Proposition 6.26, l'intégrale $I_1 = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{-\ln(t)}{t+e^t} dt$ est convergente.

• Pour $I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^t} dt$, il est clair que

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(t)}{t+e^t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\left(\ln 2 + \ln\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{t}{e^t} + 1 \right)} \frac{t^2}{e^{\frac{t}{2}}} = 0.$$

Comme l'intégrale impropre $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente, alors d'aprés la Proposition 6.26, l'intégrale $I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^t} dt$ est convergente. Et par conséquente l'intégrale impropre $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^t} dt$ est convergente.

7. On a

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt=\int_{\to 0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\to 1}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt+\int_{\to 1}^{2}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt+\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt.$$

• Pour $I_1=\int_{\to 0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$, il est clair que

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{\ln(t)}{t^2-1}}{\frac{1}{\sqrt{t}}}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{2\sqrt{t}\ln\left(\sqrt{t}\right)}{t^2-1}=0.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_{\to 0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente, alors d'aprés la Proposition 6.26, l'intégrale $\int_{\to 0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ est convergente.

• Pour $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{\to 1}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ et $I_3=\int_{\to 1}^{2}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$, il est clair que

$$\lim_{t\longrightarrow 1}\frac{\frac{\ln(t)}{t^2-1}}{\frac{1}{t+1}}=\lim_{t\longrightarrow 1}\frac{\ln(t)}{t-1}=\lim_{t\longrightarrow 1}\frac{1}{t}=1.$$

Et comme les deux intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t+1}dt$ et $I_3=\int_{1}^{2}\frac{1}{t+1}dt$ existent alors d'aprés la Proposition 6.26, les deux intégrales $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{\to 1}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ et $I_3=\int_{\to 1}^{2}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ sont convergentes.

• Pour l'intégrale $I_4=\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$, il est clair que

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty}\frac{\frac{\ln(t)}{t^2-1}}{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{t\longrightarrow +\infty}\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}=0.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ est convergente, alors l'intégrale $I_4=\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ converge. Ainsi l'intégrale impropre $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ est convergente.

Solution de l'exercice 6.3.

1. Pour calculer l'intégrale $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{1+\cos(t)}dt$, nous utilisons le changement du variable $\left\langle u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right\rangle$, donc $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $dt = \frac{2}{1+u^2}du$. Ainsi

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{1+\cos(t)}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du = \int\limits_{0}^{+\infty} du = +\infty.$$

2. $\int\limits_{\to a}^{\to b} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt$, où $a < b$.

On a

$$\begin{aligned}(t-a)(b-t) = -t^2 + (a+b)t - ab &= -\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a^2+b^2-2ab}{4}\\ &= -\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.\\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\left[1 - \left(\frac{2}{b-a}t - \frac{a+b}{b-a}\right)^2\right],\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{2}{b-a}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{b-a}t - \frac{a+b}{b-a}\right)^2}}.$$

Et d'après le changement du variable $\left\langle u = \frac{2}{b-a}t - \frac{a+b}{b-a}\right\rangle$, on trouve

$$\int\limits_{\to a}^{\to b} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}dt = \int\limits_{\to -1}^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \int\limits_{\to -1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du + \int\limits_{0}^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

• Pour $I_1 = \int\limits_{0}^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$, on a

$$\int\limits_{0}^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \lim_{t \longrightarrow +1} \arcsin(t) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

• Pour $I_2 = \int\limits_{\to -1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$, on a

$$\int\limits_{\to -1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \lim_{t \longrightarrow -1} - \arcsin(t) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\int\limits_{\to a}^{\to b} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt = \int\limits_{\to -1}^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int\limits_{\to -1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du + \int\limits_{0}^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \pi.$$

Solution de l'exercice 6.4.

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$

En utilisant le Théorème d'Abel, il est facile de voir que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente.

Pour la convergence absolue, on a

• Pour $\alpha > 1$, on a $\left| \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et comme l'intégrale de Riemann $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge car $\alpha > 1$. Alors l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente.

• Pour $0 < \alpha \leq 1$: il faut étudier la convergence de l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$.

On sais que pour tout x tel que $x \in [0,1]$ on a $x \geq x^2$, et donc pour tout $t \geq 1$: $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$, d'où

$$\text{pour tout } t \geq 1 : 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}.$$

Comme

$$\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{2t^\alpha} - \frac{\cos(2t)}{2t^\alpha}$$

et l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente. Ainsi l'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ diverge.

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{t^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta} dt$, est une intégrale impropre en 0.

On a

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{t^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}}{\frac{1}{t^{\beta-\alpha}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{t^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta} \overset{0}{\sim} \frac{1}{t^{\beta-\alpha}},$$

c'est-à-dire les deux intégrales impropres $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{\beta-\alpha}}dt$ sont de même nature.

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^{\beta-\alpha}}dt$ est convergente si et seulement si $\beta-\alpha<1$.

Solution de l'exercice 6.5.

• $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta}dt$

• Si $\alpha>1$: si on choisit un réel γ de sorte que $1<\gamma<\alpha$, on trouve

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta}}{\frac{1}{t^\gamma}} = \lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}[\ln(t)]^\beta} = 0, \text{ quelque soit la valeur de } \beta,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta} = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$. Et comme l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\gamma}dt$ est convergente car $\gamma>1$, on déduit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta}dt$ est convergente.

• Si $\alpha<1$: Si on choisir un réel γ de sorte que $\alpha<\gamma<1$, on trouve

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{t^\gamma}}{\frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta}} = \lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t^{\gamma-\alpha}[\ln(t)]^{-\beta}} = 0, \text{ quelque soit la valeur de } \beta,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{t^\gamma} = o\left(\frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta}\right)$. Et comme l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\gamma}dt$ est divergente car $\gamma<1$, on déduit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta}dt$ est divergente.

• Si $\alpha=1$ et $\beta=1$: une primitive de $\frac{1}{t\ln(t)}$ est $\ln(\ln(t))$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc l'intégrale est divergente dans ce cas.

• Si $\alpha=1$ et $\beta\neq 1$: une primitive de $\frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ est $\frac{(\ln(t))^{1-\beta}}{1-\beta}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ lorsque $\beta>1$ et vers $+\infty$ lorsque $\beta<1$.

Conclusion

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha [\ln(t)]^\beta}dt \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \alpha>1 \ \text{ ou} \\ \alpha=1 \text{ et } \beta>1. \end{array} \right. .$$

Solution de l'exercice 6.6.

1. a - On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x)| \leq h(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Ceci nous montre tout d'abord que $F(x)$ est bien définie puisque $\int\limits_0^{+\infty} h(t)\,dt$ est convergente.

b - Comme $f(t,x)$ est continue, et uniformément dominée par la fonction $h(t)$, alors en appliquant le Théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (Théorème 6.36), la fonction $F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $F(x)$ est bornée par

$$\int\limits_0^{+\infty} h(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(t)]_0^{+\infty} = \lim_{T \longrightarrow +\infty} \arctan(T) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Il est immédiat que $F(x) = F(-x)$ puisque $cos(tx) = cos(-tx)$, donc F est paire.

$$\bullet\ F(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{T \longrightarrow +\infty} \arctan(T) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

3. En utilisant le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{1+\left(\frac{u}{x}\right)^2}\frac{du}{x} = x\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2+x^2}du = xG(x).$$

4. On pose $g(u,x) = \dfrac{\cos(u)}{u^2+x^2}$. D'une part,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u,x) = \frac{-2x\cos(u)}{(u^2+x^2)^2},$$

est une fonction continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Soit $a > 0$ donné. Pour $x \geq a$, on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(u,x)\right| \leq \frac{2x}{(u^2+x^2)^2} \leq \frac{2x}{x^2(u^2+x^2)} \leq \frac{2}{x(u^2+x^2)} \leq \frac{2}{a(u^2+a^2)}$$

et

$$|g(u,x)| = \frac{\cos(u)}{u^2+x^2} \leq \frac{1}{u^2+a^2}.$$

D'autre part $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(u^2+a^2)} du = \frac{\pi}{2a}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{2}{a\,(u^2+a^2)} du = \frac{\pi}{a^2}$, donc en appliquant le Théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (Théorème 6.38) on déduit que G est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$G^{'}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(u,x)\,du = \int_0^{+\infty} \frac{-2x\cos(u)}{(u^2+x^2)^2} du$$

De même, on calcule

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,x) = \frac{8x^2\cos(u)}{(u^2+x^2)^3} - \frac{2\cos(u)}{(u^2+x^2)^2} = \frac{\left(6x^2-2u^2\right)\cos(u)}{(u^2+x^2)^3}.$$

C'est une fonction continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Pour $x \geq a$, on a

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,x)\right| = \left|\frac{\left(6x^2-2u^2\right)\cos(u)}{(u^2+x^2)^3}\right| \leq \left|\frac{6\left(x^2+u^2\right)}{(u^2+x^2)^3}\right| \leq \frac{6}{(u^2+x^2)^2} \leq \frac{6}{(u^2+a^2)^2}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{6}{(u^2+a^2)} du$ converge, ceci nous permet d'appliquer le Théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (Théorème 6.38) qui nous montre que $G^{'}$ est

classe C^1 sur $[a, +\infty[$, c'est-à-dire que G est de classe C^2 et que sa dérivée $G^{''}$ est donnée par

$$G^{''}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,x)\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\left(6x^2-2u^2\right)\cos(u)}{(u^2+x^2)^3} du.$$

5. Puisque $F(x) = xG(x)$, F est aussi deux fois dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est donnée par $F^{'}(x) = xG^{'}(x) + G(x)$, et sa dérivée

seconde donnée par

$$\begin{aligned} F^{''}(x) &= xG^{''}(x) + 2G^{'}(x) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{x\left(6x^2-2u^2\right)\cos(u)}{(u^2+x^2)^3} - \frac{4x\cos(u)}{(u^2+x^2)^2}\right] du \\ &= x\int_0^{+\infty} \frac{\left(2x^2-6u^2\right)\cos(u)}{(u^2+x^2)^3} du. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] **Alain-Jérome Riquet,** Calcules Scientifiques Suites et Séries, Cours et exercices corrigés, **ellipses-** paris 2010; ISBN : 978-2-7298-5421-8.

[2] **Antoine RAUZY,** Mathématique, Cours d'analyse : licence L1 et L2 1^{re} et 2^{e} année d'université, **ESKA** 2004; ISBN : 2-7472-0724-2.

[3] **Ariel Dufetel,** Analyse Séries de Fourier et Équations Différentielles, Exercices et problème résolus avec rappels de cours, **Vuibert-** paris aout 2010.

[4] **F. Delmer**, Mathématique, Les Séries, rappels de cours et exercices résolus, **Dunod-** paris 1995; ISBN : 2 10 002635 6.

[5] **François Liret et Dominique Martinais**, Analyse 2 année, Cours et exercices avec solutions, **Dunod-** paris 2004; ISBN : 210 0048330 7.

[6] **François Bayen et Johann Yebbou ,** Mathématiques supérieurs Analyse 2, Exercices corrigés, Conseils Précis de cours, **Vuibert-** paris 1994; ISBN : 2-7117-2097-7.

[7] **Gilbert Monna Avec la participation de Rémi Morvan,** Problèmes de mathématiques, Séries numériques, Séries de fonctions, Séries entières, **Cepadués-edition** France 2008; ISBN : 978.2.85428.832.2.

[8] **Jacues Douchet**, Analyse- Recueil d'exercices et aide-mémoire vol.1,**Presses polytechniques et universitaires romandes** 2003;.ISBN : 2-88074-552-7.

[9] **Jean-Marie Monier**, Analyse 2, Cours et 600 exercices corrigés, **DUNOD,** paris 1994; ISBN : 210 004439 7.

[10] **Jerrold Marsden and Alan Weinstein**, Calculus III, **Springer**, 1985.

[11] **Mohammed Aassila**, 400 Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours, **ellipses-** paris 2014; ISBN : 9782340-002029, **Collection Références science.**

[12] **Olivier Rodot**, Analyse mathématique, Cours et exercices corrigés; **Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles, de boeck** : 2010/0074/342; ISBN : 978-2-8041-6230-6.

[13] **Pierre Meunier,** Analyse, Exercices corrigés avec commentaires sur le cours, **Presses universitaires de France**, 1994; ISBN :2 13 046739 3.

[14] **Sylvie Guerre-Delabrière,** Suites, Séries, Intégrales, Cours et exercices.

[15] xercices, **ellipses.**

[16] **Tran Van Hiep,** Analyse 2, **Presses universitaires de France**, 1996; ISBN :2 13 048115 9.

[17] **Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak,** Problème d'analyse III intégration, Exercices corrigés, **EDP Sciences France** 2008; ISBN : 978-7598-0087-2.

Identités remarquables

En utilisant la formule du binôme de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab \\
(a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+a^3 \\
(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
0^0 &= (1-1)^0 = C_0^0 1^0 (-1)^0 = 1\times 1\times 1 = 1.
\end{aligned}$$

En utilisant la division encludien on peut montrer les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) \\
a^3-b^3 &= (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) \\
a^3+b^3 &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) \\
a^4-b^4 &= (a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) \\
a^5-b^5 &= (a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right) \\
a^5+b^5 &= (a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)
\end{aligned}$$

Formules trigonométriques

En utilisant l'écriture d'Euler d'un nombre complexe

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta),$$

on trouve

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = \left[\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\right]\left[\cos(\beta)+i\sin(\beta)\right],$$

donc

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1\\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\\
\cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\alpha)\right]\\
\sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2}\left[1-\cos(2\alpha)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)\\
\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\beta)\\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}\\
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}\\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Primitives usuelles

$$
\begin{aligned}
1. \int x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c \quad , \quad n\neq -1.\\
\int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c \quad , \quad \alpha\neq -1.\\
2. \int \frac{1}{x}dx &= \ln|x|+c\\
3. \int e^x dx &= e^x+c\\
4. \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a}+c \quad , \quad a>0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
5.\int \sin(x)\,dx &= -\cos(x)+c\\
6.\int \cos(x)\,dx &= \sin(x)+c\\
7.\int \tan(x)\,dx &= -\ln|\cos(x)|+c\\
8.\int sh(x)\,dx &= ch(x)+c\\
9.\int ch(x)\,dx &= sh(x)+c\\
10.\int \frac{1}{1+x^2}dx &= \arctan(x)+c\\
11.\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin(x)+c\\
12.\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c\\
13.\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c.
\end{aligned}$$

Limites

En appliquant le Théorème de l'Hôpital, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{e^x} &= 0\\
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} &= 0 \qquad \forall\alpha,\beta>0\\
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln x}{x} &= 0\\
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} &= 0 \qquad \forall\alpha,\beta>0
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\longrightarrow0}x^\alpha\ln^\beta(x)=0 \qquad \forall\alpha,\beta>0.$$

Somme des carrés et somme des cubes

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\
\sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{r-1} dx$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad \Gamma(0) = \Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{r-1} dx = \frac{\Gamma(r)}{a^r}, \quad a, r > 0.$$

Formule de Stirling

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \\ & \Gamma(x+1) \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Intégrale de Gauss

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^r dx = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{2a^{\frac{r+1}{2}}}, \quad a > 0 \text{ et } r > -1.$$

Quelques inégalités remarquable : Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski, Jensen

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $(u_1, ..., u_n)$ et $(v_1, ..., v_n)$ des réels ou des complexes et soient $f, g \in C([0,1], \mathbb{R})$.

• **Avec des sommes**

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2\right)^{1/2}.$$

• **Avec des intégrales**

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g|^2\right)^{1/2}$$

Inégalité de Hölder

Il s'agit d'une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soient $(u_1, ..., u_n)$ et $(v_1, ..., v_n)$ des réels ou des complexes et soient $f, g \in C([0,1], \mathbb{R})$.

• **Avec des sommes**

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q},$$

pour tous p et q avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

• **Avec des intégrales**

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g|^q\right)^{1/q},$$

pour tous p et q avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Inégalités de Minkowski

• **Avec des sommes**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p\right)^{1/p},$$

pour tous réel p.

• **Avec des intégrales**

$$\left(\int_0^1 |fg|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{1/p},$$

pour tous réel p.

Inégalité de Jensen

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec $a < b$, $f, g \in C([0,1],]a,b[)$, et $\phi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe. Alors

$$\phi\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right) \leq \int_0^1 \phi[f(x)]\, dx.$$