



République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des sciences et de la technologie d'Oran Mohammed Boudiaf
USTO-MB

ELECTRICITE

- ✚ Electrostatique
- ✚ Electrocinétique
- ✚ Electromagnétisme

Dr. Afifa YEDJOUR

Dr. H. AOUABDI-SETTAOUTI

Université des sciences et technologie d'Oran

Mohamed Boudiaf USTO-MB. Algérie

- 2016/2017 -

Ce polycopié a été rédigé pour permettre aux étudiants de 1ere année LMD du domaine science et technologie d'avoir un ouvrage de référence regroupant l'ensemble des connaissances indispensables pour ce module.

Le polycopié comprend trois grands volets :

- Electrostatique : est axé sur les phénomènes (champ et potentiel électrostatique) créés par des charges électriques statiques.
- Electrocinétique : est le domaine de la physique où les manifestations des mouvements de charges mobiles sont étudiées en termes de courants et de tensions
- Electromagnétisme ; étudie l'effet des interactions entre particules chargées électriquement, qu'elles soient au repos ou en mouvement

Nous renfonçons le module par un rappel mathématique organisé au début du semestre afin de permettre aux étudiants de mieux suivre le programme proposé.

Rappels Mathématiques

1 Eléments de longueur, de surface, de volume

1.1 Coordonnées cartésiennes

Un vecteur quelconque \vec{V} de l'espace est repéré par ses coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques...), dans l'espace cartésien ce vecteur \vec{V} s'écrit comme :

$$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z \quad \text{avec } (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) \text{ sont les vecteurs unitaires :}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}, \quad |\vec{V}| \text{ est la norme du vecteur } \vec{V} \text{ où } |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Dans ce qui suit, on n'admet qu'un point matériel M se déplace dans un repère cartésien d'origine O. Le point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y et z :

$$\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

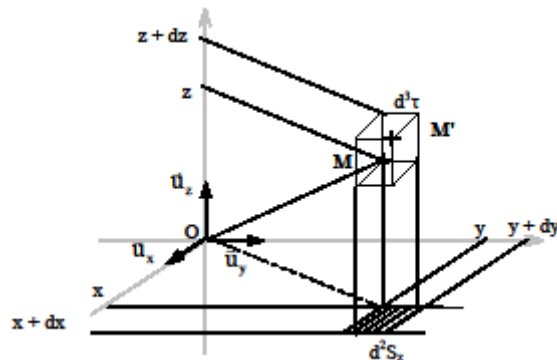


Figure 1. Calcul en coordonnées cartésiennes $d\ell, dS$ et dV : $dV = d^3\tau$

Nous considérons le déplacement infinitésimal du point $M(x, y, z)$ au point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$, le vecteur de déplacement s'écrit comme :

$$\vec{MM'} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$\vec{MM'}$ est un élément du vecteur de déplacement $d\vec{OM}$.

1.1.1 Elément de longueur

Le vecteur de déplacement s'écrit :

$$\vec{MM'} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Selon l'axe Ox, l'élément de longueur $d\ell$ engendré par le déplacement de M vers M' est : $\overrightarrow{d\ell} = dx\vec{i}$

Dans le plan (xOy) : $\overrightarrow{d\ell} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dx} \\ \overrightarrow{dy} \end{array} \right\}$

Dans l'espace (x,y,z) : $\overrightarrow{d\ell} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dx} \\ \overrightarrow{dy} \\ \overrightarrow{dz} \end{array} \right\}$

$\overrightarrow{d\ell}$ s'exprime en m.

1.1.2 Elément de surface

Dans le plan (xOy), l'élément de surface engendré par le déplacement de M vers M' décrit l'aire de cette surface : $dS_1 = dx dy$.

Dans le plan (yOz) l'élément de surface : $dS_2 = dy dz$.

Dans le plan (zOx) l'élément de surface : $dS_3 = dz dx$.

dS s'exprime en m^2

1.1.3 Elément de volume.

Dans l'espace (O,x,y,z), l'élément de volume engendré par le déplacement de M vers M' décrit le volume infinitésimal $dV = S_{base} \cdot H_{hauteur}$:

$$dV = dx dy dz.$$

dV s'exprime en m^3 .

1.2 Coordonnées cylindriques

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z dans la base associée au repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$

le vecteur déplacement infinitésimal du point M(r, θ ,z) au point M'(r+dr, θ +d θ , z+dz) s'écrit comme : $\overrightarrow{MM'} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$.

$\overrightarrow{MM'}$ est un élément du vecteur de déplacement noté $d\overrightarrow{OM}$. Avec $r \geq 0$, θ est entre $[0, 2\pi]$.

1.2.1 Element de longueur

Le vecteur de déplacement est :

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Si on fait varier r d'une valeur de dr , l'élément de longueur $d\ell$ s'écrit : $d\ell = dr$, ou $d\ell = r d\theta$ quand on fait varier θ d'un angle $d\theta$ ou bien $d\ell = dz$ lorsque le déplacement infinitésimal est suivant l'axe oz .

1.2.2 Élément de surface

Dans ce repère cylindrique, élément de surface dS engendré par le déplacement de M en gardant l'une des coordonnées fixe :

$$dS_z = dr \cdot r d\theta \text{ si on fixe le côté } z.$$

$$dS_r = r d\theta \cdot dz \text{ si on fixe le rayon } r.$$

$$dS_\theta = dr \cdot dz \text{ si l'angle } \theta \text{ est constant.}$$

1.2.3 Élément de volume infinitésimal

Nous considérons le volume infinitésimal dV engendré par le déplacement du point M est un cube de hauteur dz .

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$$

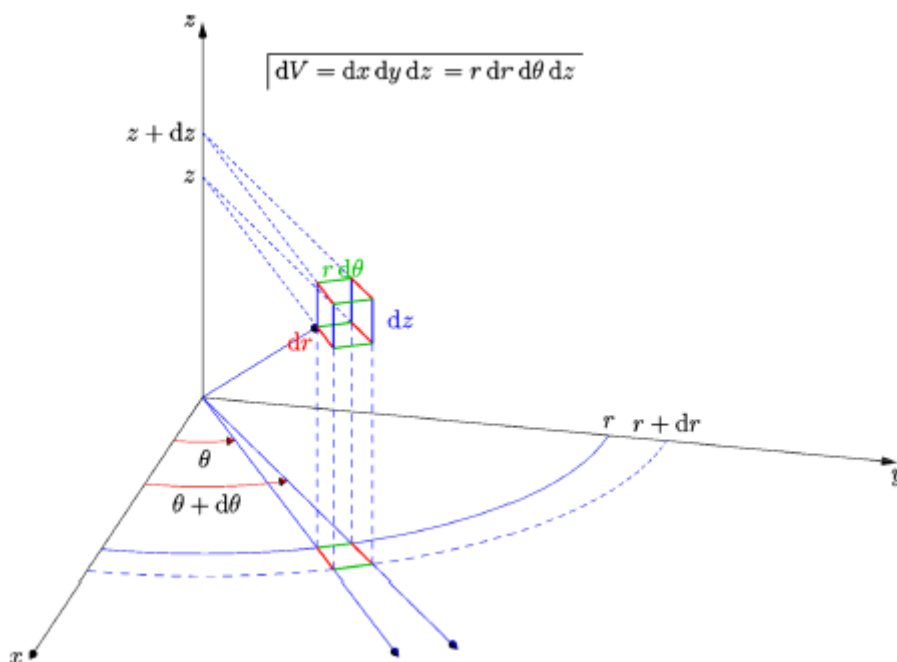


Figure 2. Calcul en coordonnées cylindriques $d\ell$, dS et dV

Exemple :

1/ Calculer l'aire d'un cercle de centre O et de rayon R en coordonnées cartésiennes.

1^{er} méthode :

Tout d'abord nous choisissons le plan (xOy) pour déterminer l'élément de surface dS.

L'équation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon R est : $x^2 + y^2 = R^2$

$$\iint dS = dx \cdot dy$$

Nous commençons d'intégrer S par exemple, sur y qui varie suivant x.

$$S = \int dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2-x^2} dx$$

En faisant un changement de variable $x = R \cos\theta$ et $dx = -R \sin\theta d\theta$

En faisant la transformation trigonométrique :

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Nous trouvons :

$$S = \pi R^2$$

2^{eme} méthode :

Dans le plan (r, θ), on peut montrer que cet élément de surface dS comme un petit carré tangent au cercle de dimensions longitudinales dr suivant \vec{u}_r et r dθ suivant l'axe transversal \vec{u}_θ en coordonnées polaires, finalement

$$S = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \pi R^2$$

Exemple :

Calculer le volume d'un cylindre V de rayon R et de hauteur H.

Nous prenons un élément de volume un petit cube de coordonnées dr, dθ, dz, dans le plan l'élément de longueur est :

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$$

L'intégrale triple de V : $V = \iiint r dr \cdot d\theta \cdot dz$

$$\text{Séparation des variables : } V = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^H dz, V = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^H$$

$V = \pi R^2 H$ est le volume d'un cylindre.

1.3 Coordonnées sphériques

Dans ce système, la position du point M est donnée par r , θ et φ dans la base associée au repère sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. $\vec{OM} = r \vec{u}_r$. le déplacement MM' est le déplacement infinitésimal du point $M(r, \theta, \varphi)$ vers $M'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$. Le déplacement peut alors s'écrire :

$$\vec{MM'} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

$\vec{MM'}$ est un élément du vecteur de déplacement noté $d\vec{OM}$. Avec $r \geq 0, \pi \geq \theta \geq 0$ et $2\pi \geq \varphi \geq 0$

1.3.1 élément de longueur

le vecteur de déplacement est déterminé par l'expression suivante:

$$d\vec{M} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

L'élément de longueur est $dl = dr$ ou $dl = r d\theta$ ou bien $dl = r \sin \theta d\varphi$

1.3.2 Elément de surface

Elément de surface dS engendré par le déplacement de M en gardant l'une des coordonnées fixe est :

Si on fixe r :

$$dS = r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Si on fixe θ :

$$dS = r \sin \theta d\varphi dr$$

Si on fixe φ :

$$dS = r dr d\theta$$

1.3.3 Elément de volume infinitésimal

On considère le volume infinitésimal dV engendré par le déplacement du point M précédemment décrit, ce volume est donné par :

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

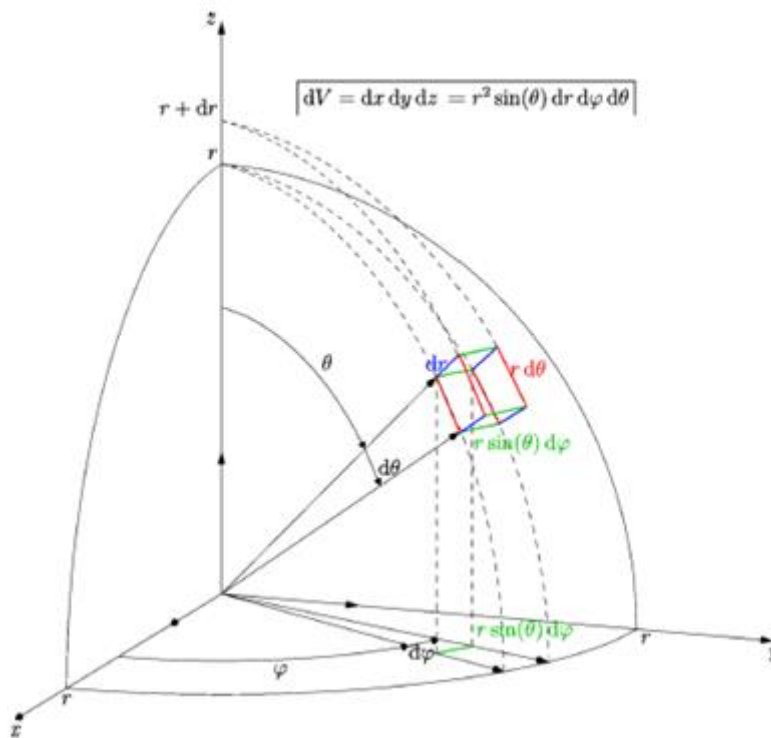


Figure 3. Calcul en coordonnées sphériques $d\ell$, dS et dV

Exemple :

Calculer le volume d'une sphère V de rayon R . Intégrale triple de volume.

$$V = \iiint dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

Séparation des variables :

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$V = \frac{R^3}{3} 2 \cdot 2\pi$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

2 Les opérateurs

2.1 Gradient

Etant donné un champ scalaire dont la valeur au point $M(x,y,z)$ est $U(x,y,z)$. On appelle gradient du champ $U(x,y,z)$, le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \vec{\nabla}U$$

La grandeur vectorielle ∇ représente l'opérateur nabla défini par:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

En coordonnées cylindriques:

$$\overrightarrow{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{U}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{U}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

En coordonnées sphériques:

$$\overrightarrow{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{U}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

2.2 Divergence

Etant donné un champ de vecteurs:

$$\vec{A} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

On appelle divergence du vecteur A , le scalaire:

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En coordonnées sphériques:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

2.3 Laplacien

➤ *Laplacien d'un vecteur*

Etant donné un champ de vecteurs:

$$\vec{A} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

On appelle laplacien du vecteur A, le vecteur:

$$\Delta\vec{A} = \Delta X\vec{i} + \Delta Y\vec{j} + \Delta Z\vec{k}$$

Où Δ représente un nouvel opérateur, le laplacien défini par :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

➤ *Laplacien d'un scalaire*

La divergence du gradient d'une fonction scalaire U est égale à son laplacien:

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}U}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}U) = \Delta U$$

Une fonction U à laplacien nul est dite fonction harmonique : sa valeur moyenne sur la surface d'une sphère est égale à sa valeur au centre de la sphère.

➤ *Laplacien d'un scalaire dans les systèmes cylindrique et sphérique*

En coordonnées cylindriques:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphériques:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

2.4 Rotationnel

Etant donné un champ de vecteurs:

$$\vec{A} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

On appelle rotationnel du vecteur A, le vecteur:

$$\overrightarrow{rot A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs A dérive d'un potentiel scalaire U est que son rotationnel soit nul:

$$\overrightarrow{rot A} = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}U) = \vec{\nabla} \wedge (-\vec{\nabla}U) = 0$$

Dans ce cas le champ est dit irrotationnel et il ne peut y avoir de lignes de champ fermés.

➤ **Rotationnel dans les systèmes cylindrique et sphérique**

En coordonnées cylindriques:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{k}$$

En coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\varphi$$

Exemple :

Un point M(x,y,z) étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

de module r : $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Calculer:

1) $\overrightarrow{grad}r$ et $\overrightarrow{grad} \frac{1}{r}$

2) $\overrightarrow{div}r$ et $\overrightarrow{Rot}r$

1) Calcul du gradient de (r) :

$$\text{On a : } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{et} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Les composantes du gradient sont :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

et

$$\overrightarrow{\text{grad}r} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{u}$$

Le vecteur \vec{u} représente le vecteur unitaire de la direction du vecteur r.

Calcul du gradient de (1/r) :

Ses composantes sont :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

et, de même :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = -\left(\frac{x}{r^3} \vec{i} + \frac{y}{r^3} \vec{j} + \frac{z}{r^3} \vec{k} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2) Divergence du vecteur r :

$$\text{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

C'est bien un scalaire. La divergence définit un champ de vecteurs divergent à partir de l'origine O.

Rotationnel du vecteur r :

$$\overrightarrow{\text{Rot}r} = \vec{0}$$

3 Dérivées et intégrales multiples

3.1 Dérivées

Soit f une fonction scalaire de plusieurs variables, y, z, t , on dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quand $x \rightarrow x_0$

ou $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lorsque $h \rightarrow 0$ admet respectivement une limite finie.

Soit $f = f(x, y, z, t)$

La dérivée totale par rapport au temps est :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{df}{dt}$$

Pour un temps constant la dérivée devient :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

3.1.1 Coordonnées cartésiennes.

On se rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, le vecteur de position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{u_x} + y \overrightarrow{u_y} + z \overrightarrow{u_z}$$

la différentielle à cette position donne à un temps fixe

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} dz$$

or le vecteur déplacement infinitésimal s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \overrightarrow{u_x} + dy \overrightarrow{u_y} + dz \overrightarrow{u_z}$$

$$df = \overrightarrow{grad} f \cdot d\overrightarrow{OM} \text{ d'où } \overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{u_z}$$

\overrightarrow{grad} est le gradient scalaire en coordonnées cartésiennes.

3.1.2 En coordonnées cylindriques

La différentielle en coordonnées cylindriques d'une fonction scalaire

$f = f(r, \theta, z)$ s'exprime :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1)$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est définie telle que :

$$df = \overrightarrow{grad}f \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (2)$$

Une comparaison $d\overrightarrow{OM} = dr \overrightarrow{u}_r + r d\theta \overrightarrow{u}_\theta + dz \overrightarrow{u}_z$ et les deux equations (1) et (2) montre que l'expression du gradient en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{u}_z$$

3.1.3 En coordonnées sphériques

La différentielle en coordonnées sphériques d'une fonction scalaire $f = f(r, \theta, \varphi)$ s'exprime :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \text{ et } df = \overrightarrow{grad}f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

On se rappelle qu'en coordonnées sphériques, le vecteur déplacement infinitesimal s'écrit: $d\overrightarrow{OM} = dr \overrightarrow{u}_r + r d\theta \overrightarrow{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \overrightarrow{u}_\varphi$, en comparant ces deux relations nous tirons l'expression du gradient en coordonnées sphériques.

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{u}_\varphi$$

3.2 Intégrales multiples

Lorsque f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, alors f admet une primitive notée F . on a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe $f(x)$ et les droites $x=a$ et $x=b$.

En subdivisant $[a, b]$, en n sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(b_i) (x_{i+1} - x_i)$$

$$b_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

dx est une longueur infiniment petite sur l'axe des abscisses, , pour x variant de a à b .

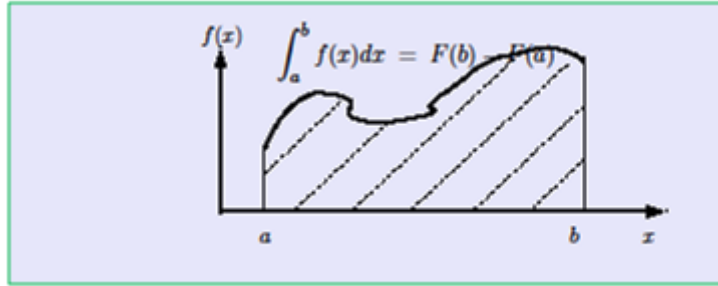


Figure 4. surface hachurée est l'aire comprise $f(x)$ et les droites $x=a$ et $x=b$

Circulation d'un champ de vecteur

Par définition, la circulation d'un champ de vecteur le long d'un chemin délimité par deux points A et B est déterminée par : $\overrightarrow{dC} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dc}$. Ce chemin est découpé en une infinité de vecteurs infinitésimaux \overrightarrow{dc}

La circulation de A vers B est donné par $\int_{C_A}^{C_B} dC = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dc}$

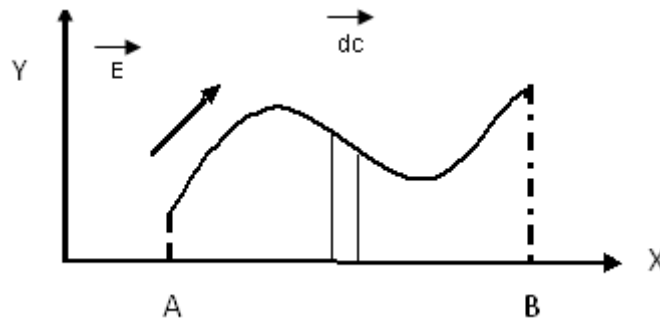


Figure 5. Circulation d'un vecteur long d'un chemin délimité par deux points A et B

On dit que le champ vecteur \vec{E} dérive du potentiel scalaire f si en tout point M du domaine la relation $\vec{E} = \overrightarrow{grad} f(M)$ est vérifiée :

$$C_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{grad} f(M) \cdot \overrightarrow{dc} = df = f(A) - f(B)$$

Alors, la circulation du vecteur \vec{E} est indépendante du chemin choisi, puisqu'elle ne dépend que du point initial et du point final.

Si nous choisissons un contour fermé, nous utilisons le symbole $C = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dc}$. Dans ce cas particulier, on a $\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dc} = 0$.

3.2.1 Intégral double

Le flux du champ de vecteur \vec{E} à travers une surface dont le vecteur unitaire normal à la surface \vec{n} s'écrit $\overrightarrow{dS} = dS \vec{n}$.

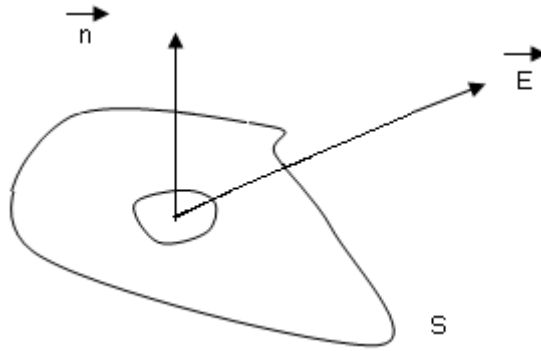


Figure 6. Le flux correspond à la quantité intégrée du champ de vecteur traversant la surface S

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Le flux correspond à la quantité intégrée du champ de vecteur traversant la surface S . La seule composante du champ \vec{E} qui va intervenir dans le flux est la composante parallèle à \vec{n} , puisque la composante perpendiculaire à la surface ne peut pas la traverser (nous le verrons en détail dans le prochain chapitre).

Exemple :

Calculer le flux du champ électrostatique créé par une charge q ponctuelle à travers une sphère de rayon R . Le champ électrostatique est radial et s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{u}_r \text{ avec } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

où r est la distance à la charge. Montrer que le flux dépend que de la charge.

$$S = \iint r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

Dans une sphère, le vecteur unitaire normal à la surface est radiale suivant.

$$\vec{dS} = dS \vec{u}_r$$

On a :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint \frac{kq}{r^2} \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \iint \frac{kq}{r^2} r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

$$\Phi = \frac{kq}{r^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$\Phi = 2\pi \frac{kq}{r^2} [-\cos \theta]_0^\pi$$

$$\Phi = 4\pi \frac{kq}{r^2} \text{ en remplaçant } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

On trouve $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ Φ est indépendant de R .

3.2.2 Intégral triple

Théorème de Green-Ostrogradsky

La divergence d'un vecteur est le flux extérieur d'un champ de vecteur par unité de volume. Ce théorème est beaucoup utilisé, il permet de passer d'une intégrale volumique à une intégrale surfacique. On choisit comme surface S un cube infinitésimal de côté $\Delta x, \Delta y$ et Δz . Le flux ϕ du vecteur \vec{E} à travers une surface fermée est $\phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS}$

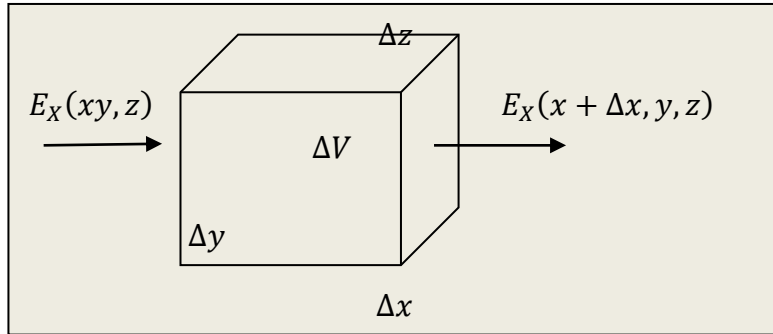


Figure 7. Un cube infinitésimal de côté $\Delta x, \Delta y$ et Δz .

$$\Delta\phi_x = \vec{E}_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y\Delta z - \vec{E}_x(x, y, z)\Delta y\Delta z$$

$$\text{Ceci implique que : } \Delta\phi_x = \left(\frac{\vec{E}_x(x + \Delta x, y, z) - \vec{E}_x(x, y, z)}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Cette relation tend vers la dérivée partielle de ϕ par rapport à x lorsque Δx est très petite.

$$\text{On peut écrire } \Delta\phi_x \sim \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} \Delta V \text{ lorsque } \Delta x \rightarrow 0$$

Même chose par les autres composantes suivant les axes oy et oz .

$$\Delta\phi_y \sim \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} \Delta V \text{ lorsque } \Delta y \rightarrow 0$$

$$\Delta\phi_z \sim \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} \Delta V \text{ lorsque } \Delta z \rightarrow 0$$

En sommant les contributions des 3 faces.

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \Delta\phi_x + \Delta\phi_y + \Delta\phi_z \\ \Delta\phi &= \left(\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} \right) \Delta V \end{aligned}$$

$$\Delta\phi = \text{div } \vec{E} \Delta V$$

d'où finalement en intégrant: $\iiint \text{div } \vec{E} \, dV = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS}$, cette équation traduit le Théorème de Green-Ostrogradsky

Physiquement, dans le cas d'une charge isolée, on a une source de champ électrostatique, cela traduit que $\text{div } \vec{E} \neq 0$.

Le champ magnétique à flux conservatif, une ligne de champ se referme toujours sur elle-même: $\text{div } \vec{B} = 0$.

Théorème de Stokes

La circulation d'une grandeur vectorielle \vec{F} sur un parcours fermé C est égale au flux de $\text{rot } \vec{F}$ à travers une surface quelconque s'appuyant sur C.

Ce théorème est couramment utilisé, il permet de passer d'une intégrale simple à une intégrale surfacique.

Soit une force vectorielle \vec{F} dans un espace donné. On veut calculer la circulation du vecteur \vec{F} autour d'un contour fermé C. $C = \oint \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$.

Nous choisissons comme contour C le contour d'un rectangle infinitésimal de côté $(\Delta x, \Delta y)$

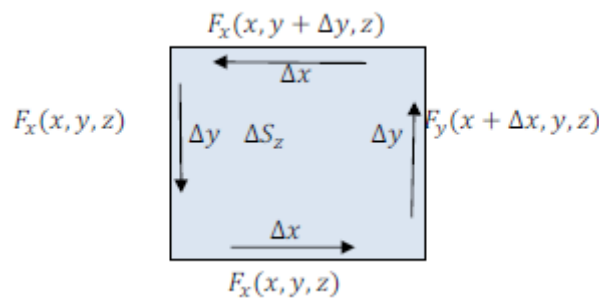


Figure 8. D'un rectangle infinitésimal de côté $(\Delta x, \Delta y)$

Selon l'axe ox, la contribution est :

$$F_x(x, y, z)\Delta x - F_x(x, y + \Delta y, z)\Delta x \rightarrow \frac{F_x(x, y, z)\Delta x - F_x(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta y}{\Delta y} \rightarrow -\frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta S_z$$

De même pour le côté selon l'axe oy :

$$F_y(x, y, z)\Delta y - F_y(x + \Delta x, y, z)\Delta y \rightarrow \frac{F_y(x, y, z)\Delta y - F_y(x + \Delta x, y, z)\Delta x \Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta S_z$$

d'où finalement en intégrant :

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S_z = \iint (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{dS}$$

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \iint (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{dS} \quad \text{est le théorème de Stokes.}$$

Chapitre I

Electrostatique

4 Charges et champs électrostatiques.

Nous allons définir les charges électriques par les effets qu'elles produisent et par ses propriétés localisées dans l'espace. Nous allons montrer que ces effets liés à l'existence de charges statiques sont décrits par les équations mathématiques (équations de Maxwell) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0.$$

4.1 Charge électrique :

- a) Une tige de verre frottée avec la soie repousse une autre tige de verre frottée avec la soie.

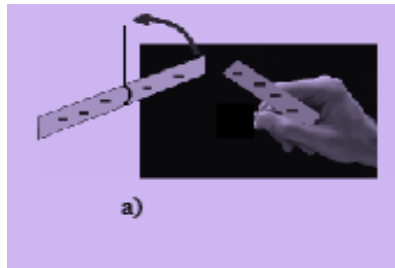


Figure 9. les deux corps de repoussent mutuellement

- b) Une tige d'ébonite frottée avec les cheveux repousse une autre tige d'ébonite pareillement traitée.

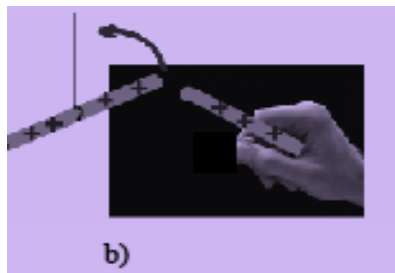


Figure 10. Les deux corps de repoussent mutuellement

- c) Une tige de verre frottée avec la soie attire une tige d'ébonite frottée avec les cheveux.

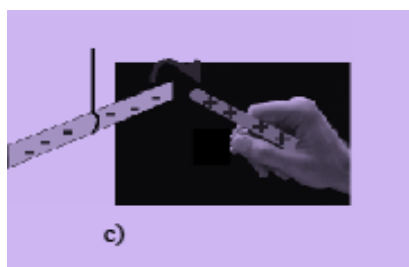


Figure 11. Phénomène d'attraction

Ces observations ont été interprétées de la façon suivante :

- ✓ Les frottements avec la soie ou les cheveux font apparaître des particules à la surface des matériaux ; celles-ci permettent aux matériaux d'interagir alors qu'ils étaient initialement neutres.
- ✓ De plus les particules qui apparaissent dans les deux cas sont de nature différente puisqu'une attraction apparaît entre le verre et l'ébonite.
- ✓ Les particules sont appelées charges électriques. Les deux sortes sont distinguées par les signes + et -. Ainsi deux charges + et - se repoussent. Une charge + et une charge - s'attirent.
- ✓ Elles ont un caractère conservatif : Dans un système isolé, la charge totale portée par l'ensemble des éléments du système est constante.

4.2 Loi de Coulomb

C'est en 1785 que Coulomb montre expérimentalement que la force exercée sur une charge ponctuelle q_2 par une charge ponctuelle q_1 a les propriétés suivantes :

- Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance r séparant q_1 et q_2 ($\vec{F} \propto \frac{1}{r^2}$).
- Elle est proportionnelle aux charges q_1 et q_2 ($\vec{F} \propto q_1, q_2$).

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \quad (1)$$

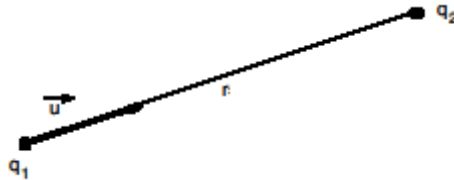


Figure 12. Loi de Coulomb

En 1936 Plimpton et Lawton ont montré que \vec{F} est en $\propto \frac{1}{r^2}$ avec une incertitude sur l'exposant de 2 de $\pm 2 \cdot 10^{-9}$. Cette reprise en 1971 par Williams, Faller et Hill aboutit à une incertitude sur l'exposant de 2 de $\pm 3 \cdot 10^{-16}$.

La loi de Coulomb est analogue à la loi de gravitation, la seule différence est la loi gravitationnelle est toujours attractive alors que la loi de Coulomb peut être attractive soit répulsive suivant les signes de q_1 et q_2 , ($q_1 \cdot q_2 > 0$ force répulsive, $q_1 \cdot q_2 < 0$ force attractive).

Dans le système MKSA l'expression de :

- La force créée par q_1 s'exerçant sur q_2 s'écrit : $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{r}_{12}\|^2} \vec{u}_{12}$.

\vec{u}_{12} est un vecteur unitaire porté par la droite passant par q_1 et q_2 , dont le sens est de q_1 vers q_2 : $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{u}_{12}}{\|\vec{u}_{12}\|}$.

Exemple : $q_1 q_2 > 0$

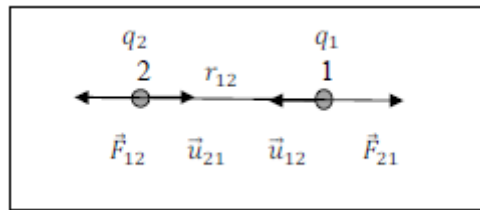


Figure 13. Représentation vectorielle de la force électrostatique

- La force créée par q_2 s'exerçant sur q_1 s'écrit $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{\|\vec{r}_{21}\|^2} \vec{u}_{21}$
 \vec{u}_{21} est un vecteur unitaire porté par la droite passant par q_2 et q_1 , dont le sens est de q_2 vers q_1 : $\vec{u}_{21} = \frac{\vec{u}_{21}}{\|\vec{u}_{21}\|}$.

En remarquant que le produit $q_2 \cdot q_1$ est commutatif, $\|\vec{r}_{12}\|^2 = \|\vec{r}_{21}\|^2$ et que $\vec{u}_{12} = -\vec{u}_{21}$ nous déduisons $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Ceci quel que soit le signe respectif de q_1 et q_2 .

Cette relation est d'une grande importance, parce qu'elle met en évidence la compatibilité de la loi de coulomb et d'un principe physique fondamental : le principe de l'action et de la réaction (3^{ème} loi de Newton) voir physique 1 (mécanique du point).

4.3 Principe de superposition

Nous considérons à présent trois charges ponctuelles de même signe q_1, q_2 et q_3 distantes :

- de r_{12} pour (q_1, q_2)
- de r_{13} pour (q_1, q_3)
- de r_{23} pour (q_2, q_3)

La force s'exerçant sur q_3 due à q_2 et q_1 sera la résultante des forces \vec{F}_{13} et \vec{F}_{23} . Elle aura pour :

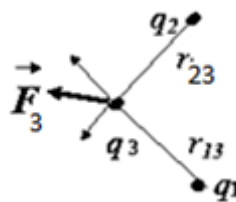


Figure 14. Principe de superposition

une expression résultante des forces : $\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \cdot q_3}{\|\vec{r}_{13}\|^2} \vec{u}_{13} + \frac{q_2 \cdot q_3}{\|\vec{r}_{23}\|^2} \vec{u}_{23} \right)$$

Si nous considérons maintenant un système de N charges ponctuelle ($q_1, q_2, q_3 \dots \dots q_j \dots q_N$).

La force agissant sur la charge q_j due aux autres charges, est la somme vectorielles des forces créées par chacune des forces prise isolément, agissant sur la charge q_j . Son expression sera

$$\text{alors } \vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i \cdot q_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \vec{u}_{ij} \quad \vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \cdot q_3}{\|\vec{r}_{13}\|^2} \vec{u}_{13} + \frac{q_2 \cdot q_3}{\|\vec{r}_{23}\|^2} \vec{u}_{23} \right)$$

En fonction du vecteur \vec{r}_{ij} , cette force s'écrira comme :

$$\vec{F}_j = k \sum_{i \neq j} q_i \cdot q_j \frac{\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|^3} \quad (2)$$

Avec $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Dans le système MKSA :

- \vec{F} s'exprime en (N)
- r s'exprime en (m)
- q s'exprime en (C)
- k est égale à $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$

Exemple 1 :

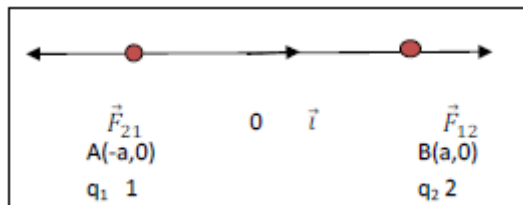


Figure 15. Exemple

Soient deux charges ponctuelles $q > 0$ identiques, placées en A (-a , 0) et B (a , 0) sur un axe ox. Représenter sur un schéma le vecteur force agissant sur les deux charges. Déterminez l'intensité forces répulsives

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{r}\|_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

$$\vec{u}_{12} = \vec{i}; q_1 = q_2 = q; \|\vec{r}\|_{12} = 2a$$

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q^2}{4a} \vec{i}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{\|\vec{r}\|_{12}^2} \vec{u}_{21}$$

$$\vec{u}_{21} = -\vec{i};$$

$$\vec{F}_{21} = -k \frac{q^2}{4a} \vec{i}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Exemple 2 : ordre de Grandeur

Nous comparons la force électrique et la force gravitationnelle existant entre l'électron (q_1, m_1) et le proton (q_2, m_2) formant l'atome d'hydrogène (sachant que le rayon de Bohr $r_{12} = 5.3 \cdot 10^{-11} m$).

Force électrique :

$$\|\vec{F}_e\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{r}\|_{12}^2} = \frac{(9.10^9)(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(5.3 \cdot 10^{-11})^2} = 8.10^{-8} N.$$

Force gravitationnelle :

$$\|\vec{F}_G\| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\|\vec{r}\|_{12}^2} = \frac{(6.7 \cdot 10^{-11})(9.1 \cdot 10^{-31})(1.7 \cdot 10^{-27})}{(5.3 \cdot 10^{-11})^2} = 3.7 \cdot 10^{-47} N.$$

$$\text{Soit } \frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{F}_G\|} \approx 10^{39}.$$

La force gravitationnelle est négligeable devant la force coulombienne ($\|\vec{F}_G\| \ll \|\vec{F}_e\|$). En conséquence nous pouvons retenir seulement de la loi de coulomb pour les électrons et le noyau de l'atome.

4.4 Champs électrostatiques.

Une charge ponctuelle q_2 au point (2) va créer à la distance r_{21} sur une charge ponctuelle q_1 au point (1), une force \vec{F}_1 ou (\vec{F}_{21}).

$$q_1 q_2 > 0 \quad \vec{F}_1 \text{ ou } (\vec{F}_{21}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{\|\vec{r}\|_{21}^2} \vec{u}_{21}$$

Divisons chacun des deux membres de cette expression par q_1 nous obtenons :

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\|\vec{r}\|_{21}^2} \vec{u}_{21}$$

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\|\vec{r}\|_{21}^2} \vec{u}_{21}$ est un champ vectoriel dont la valeur est prise au point (1) où se trouve la charge q_1 , il dépend aussi de la charge q_2 qui lui est donné naissance.

$\vec{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\|\vec{r}\|_{21}^2} \vec{u}_{21}$ est le champ électrostatique noté $\vec{E}(1)$. Ce dernier peut s'interpréter de deux façons :

1. C'est une force par unité de charge telle que :

$$\vec{E}(1) = \frac{\vec{F}_{21}}{q_1} \quad (3)$$

C'est la perturbation de l'espace créée par la présence de la charge q_2 , telle que si on place une charge test à la distance r_{21} de q_2 on obtient une force : $\vec{F}_1 = q_1 \vec{E}(1)$

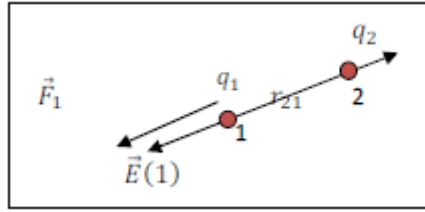


Figure 16. Champ créé par la charge q_2

Pour trouver le champ électrostatique au point j créé par N charges ponctuelles il suffit de déduire son expression de celle de force électrostatique \vec{F}_j créée par les $(N-1)$ charges sur q_j .

alors : $\vec{E}_j = \frac{\vec{F}_j}{q_j} = k \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{\|\vec{r}_{ij}\|^2}$

$$\vec{E}_j = k \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{\|\vec{r}_{ij}\|^3} \vec{r}_{ij} \quad (4)$$

\vec{E}_j va dépendre de la configuration du système de charges et de la position de la charge q_j .

4.5 Représentation du vecteur champ électrostatique

Le champ \vec{E} peut être défini en tout point M quelconque de l'espace (sauf sur la charge q). On place une charge q_A au point A , le champ créé par cette charge au point M s'écrira :

$$\vec{E}_A = K \frac{q_A}{\|AM\|^2} \vec{u}_{AM}$$

- Son module dépend des coordonnées du point M auquel on le définit puisqu'il est inversement proportionnel au carré de la distance par rapport à la charge.
- La direction du champ est radiale, elle passe toujours par la charge.
- Son sens est tel que :
 - \vec{E}_A s'éloigne de la charge q_A , si q_A est positive (\vec{E} est colinéaire à \vec{u}_{AM}).
 - \vec{E}_A se dirige vers la charge q_A , si q_A est négative (\vec{E}_A est opposé à \vec{u}_{AM})

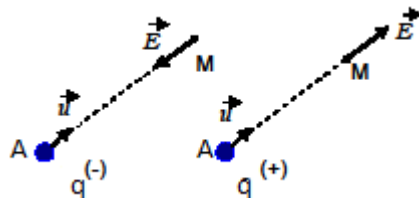


Figure 17. Notation vectorielle du champ \vec{E}

L'expérience prouve que l'addition d'une troisième charge q_3 au système, ne modifie pas la force d'interaction de q_1 et q_2 et que q_2 a non seulement une interaction avec q_1 mais aussi avec q_3 et q_1 avec q_3 toujours selon la même loi.

$$\vec{F}_2 = k \left(\frac{q_2 \cdot q_1}{\|\vec{r}\|_{21}^2} \vec{u}_{21} + \frac{q_2 \cdot q_3}{\|\vec{r}\|_{23}^2} \vec{u}_{23} \right).$$

Donc pour obtenir la force que subie une charge q_2 dans un système de charges, il faut composer vectoriellement tous les champs au point(2).

$$\vec{F}_2 = q_2 \vec{E}_{\text{résultant}}$$

Exemple : Calculer dans l'exemple 1 le champ électrostatique créé par q_1 au point (2).

$$\vec{E}(2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{\|\vec{r}\|_{21}^2} \vec{u}_{12}; \vec{F}_2(\text{ou } \vec{F}_{12}) = q_2 \vec{E}(2), \vec{u}_{12} = \vec{i}$$

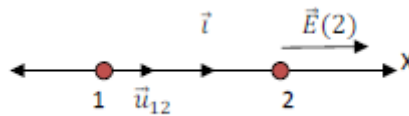


Figure 18. Exemple

$$\vec{E}(2) = k \frac{q_1}{a^2} \vec{i}.$$

4.6 Propriétés des champs de forces:

4.6.1 Travail de la force électrique et énergie potentielle U

Nous envisageons un déplacement élémentaire $dr > 0$ de la charge q_2 , nous prenons dans ce cas q_2 négative ($q_2 = -|q_2|$). Le travail élémentaire dW nécessaire au déplacement du point d'application de \vec{F}_2 est donnée par le produit scalaire :

$$dW = \|\vec{F}_2\| \cdot \|\vec{dr}\| \cos(\vec{F}_2, \vec{dr}).$$

Le travail total qui correspond au déplacement de q_2 de la position (2) ($r = r_{12}$) à l'infini ($r \rightarrow \infty$) est obtenu en faisant la somme de tous les travaux élémentaires.

$$W_{2 \rightarrow \infty} = \int_r^\infty \vec{F}_2 \cdot \vec{dr} = -|q_2| |\vec{E}_1| \cdot \vec{dr}$$

$$= -k \frac{|q_2| |q_1|}{r^2} \cos(\vec{F}_2, \vec{dr}) \text{ avec } \cos(\vec{F}_2, \vec{dr}) = -1$$

$$\text{Soit } W_{2 \rightarrow \infty} = k \frac{|q_2| |q_1|}{r^2} \left[\frac{1}{r} \right]_r^\infty$$

$$W_{2 \rightarrow \infty} = -k \frac{|q_2| |q_1|}{r} \quad (5)$$

le signe $-$ indique que le travail de \vec{F}_2 est résistant ou encore qu'il faut fournir de l'extérieur de l'énergie au système pour réaliser ce déplacement. On dit que le système a de l'énergie potentielle ou encore que q_2 a l'énergie potentielle $U(r) = -W_{2 \rightarrow \infty}$.

4.6.2 Champ conservatif

Lorsqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie, le travail de $F_{1 \rightarrow 2}$ est exprimé en variation d'énergie potentielle ΔU ou U est une fonction de coordonnées (x, y, z) .

$U(x, y, z)$ est une fonction de point, elle dépend que de la position, sa variation sur un chemin fermé est nulle. $\oint dU = \Delta U = 0$.

Nous avons vu en physique (mécanique du point) que le travail de la force d'interaction masse-terre lorsque l'origine du repère est prise à l'infini est :

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{z < 0}^{z=0} -mg dz = mgz = \Delta U = \int_z^{\infty} dU = U(\infty) - U(z)$$

$$U(\infty) = 0 \text{ Soit } mg = \frac{\partial U}{\partial z} \text{ ou encore :}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}U \quad (6)$$

Ce résultat est fréquemment utilisé pour les forces d'un champ conservatif dérivant d'un potentiel scalaire.

5 Potentiel électrostatique

Le travail électrique d'un système de deux charges pouvait être exprimé à l'aide du champ électrique \vec{E} .

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = q_2 \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} = -dU \text{ est une différentielle totale exacte.}$$

La différence du potentiel élémentaire est définie par la quantité :

$$dV = -\vec{E}_1 \cdot \vec{dl}$$

Le calcul de la variation du potentiel entre deux points A et B consiste à résoudre l'intégrale de r à l'infini :

$$\Delta V = - \int \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} \quad (7)$$

Sur un chemin quelconque joignant A et B (champ conservatif), l'opération nous donne le calcul de la circulation du vecteur \vec{E} .

Exemple.

Donner l'expression de la circulation du vecteur \vec{E}_1 créé par la charge q_1 le long d'un chemin de r à l'infini.

$$V(\infty) - V(r) = - \int_r^{\infty} \vec{E}_1 \cdot \vec{dr} = - \int_r^{\infty} k \frac{q_1}{r^2} = k \left[\frac{q_1}{r} \right]_r^{\infty} = -k \frac{q_1}{r}$$

Avec $V(\infty) = 0$

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ est le potentiel créé par } q_1 \text{ en } r.$$

Le travail de la force électrique lors du déplacement de q_1 entre A et B prend la forme plus simple $W = q_2(V(A) - V(B))$ que l'on réduit à : $W = qV$

Le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q à la distance r de q est le travail fourni pour déplacer une charge unité de l'infini à la distance r de q .

$$V(r) = k \frac{q}{r} \quad V(r) \text{ est un champ scalaire.}$$

Remarque : la valeur du potentiel électrostatique à la distance r de la charge électrique dépend de la référence choisie, ici la référence est le potentiel nul à l'infini.

5.1 Principe de superposition :

N charges ponctuelles vont créer au point (1) le champ électrique :

$$\vec{E}(1) = k \sum_{i \neq 1} \frac{q_i}{\|\vec{r}\|_{i1}^3} \vec{r}_{i1} \quad (8)$$

Et un potentiel électrostatique :

$$V(1) = k \sum_{i \neq 1} \frac{q_i}{r_{i1}} \quad (9)$$

5.2 Ligne de champ et équipotentiels

Les lignes de champ (ou de force) sont des courbes tangentes en chaque point au vecteur champ : les tubes de forces sont des ensembles de lignes de champ qui passent par tous les points d'une courbe.

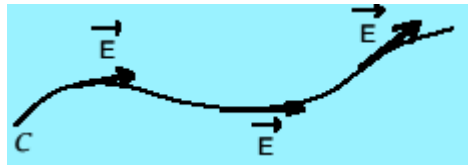


Figure 18. Lignes de champ électrostatique

Les lignes et les surfaces équipotentiels sont le lieu géométrique des points d'égal potentiel. L'une des propriétés des lignes de champ est que les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentiels, nous pouvons faire la démonstration en calculant le travail élémentaire dW sur un chemin $\vec{d\ell}$ pris sur une équipotentielle :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = q\vec{E} \cdot \vec{d\ell} = qdV \quad (10)$$

par définition du potentiel électrique : or $dV=0$ sur l'équipotentielle. \vec{E} est donc perpendiculaire à l'équipotentielle.

5.3 Distribution de charge continue

Nous considérons cette fois une charge électrique Q dans un volume V . nous pouvons définir une densité volumique de charge $\rho(x', y', z')$, telle que :

$$Q = \int_V \rho(x', y', z') dx', dy', dz' \quad (11)$$

A condition d'avoir dans l'élément de volume $dV' = dx', dy', dz'$, autour du point $M(x', y', z')$ un grand nombre de charges élémentaires bien que $dV' \ll V$.

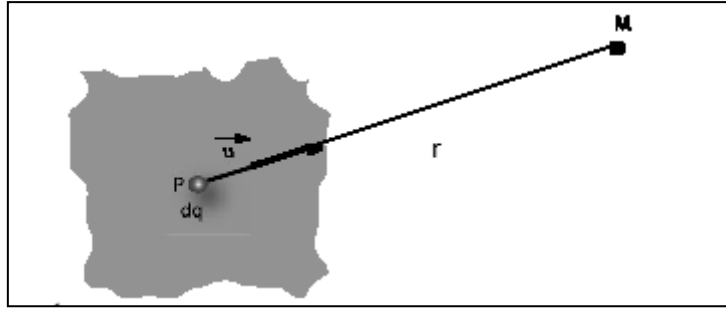


Figure 19. élément du champ électrostatique $d\vec{E}$

Pour calculer le champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ au point P , créé par la charge q , nous procédons de la façon suivante :

- ✓ Nous commençons par calculer le champ électrique $d\vec{E}(x, y, z)$ au point P créé par la charge $dQ = \rho(x', y', z')dV'$ contenu dans dV' :

$$d\vec{E}(x, y, z) = k \rho(x', y', z') dx', dy', dz' \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Avec $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$ et \vec{u} est vecteur unitaire.

- ✓ Nous déduisons ensuite d'après le principe de superposition

$$\vec{E}(x, y, z) = k \int_V \rho(x', y', z') dx', dy', dz' \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Qui s'écrit encore en remplaçant $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{E}(x, y, z) = k \int_V \rho(x', y', z') dx', dy', dz' \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Une composante $E_x(x, y, z)$ s'écrit :

$$E_x(x, y, z) = k \int_V \frac{(x - x') \rho(x', y', z') dx', dy', dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (12)$$

Connaissant le champ électrique \vec{E} nous pouvons déduire le potentiel électrostatique (voir chapitre 1 rappel Mathématique).

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Nous rendons la courbe C fermée en faisant tendre A vers B . $V(A) - V(B) = 0$. Alors la

circulation est nulle. $0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$

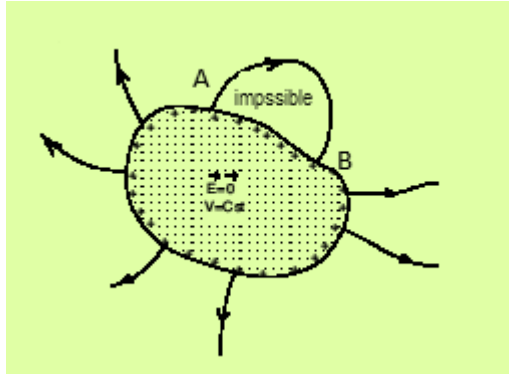


Figure 20. Circulation de \vec{E} selon un contour fermé

En utilisant le théorème de *STOKES*

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint (\overrightarrow{rot}) \cdot d\vec{S} \text{ (voir chapitre rappels mathématique).}$$

Et l'expression devient

$$0 = \iint (\overrightarrow{rot}) \cdot d\vec{S}$$

Il faut donc $\overrightarrow{rot} = 0$

Or un tel résultat implique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Le champ électrique n'est autre que le gradient d'une fonction scalaire (potentiel électrique).

Nous déduisons facilement le potentiel

$$dV(x, y, z) = k \frac{\rho(x', y', z') dx', dy', dz'}{r}$$

$$r = |\overrightarrow{MP}| \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$$

$\rho(x', y', z')$ est la densité volumique de charge

En appliquant le principe de superposition pour calculer $V(x, y, z)$ soit :

$$V(x, y, z) = k \int \frac{\rho(x', y', z') dx', dy', dz'}{r}$$

D'une manière générale

$$V(x, y, z) = k \int \frac{dQ}{r} \quad (13)$$

Avec

- $dQ = \rho dV$ pour une distribution volumique.
- $dQ = \sigma dS$ pour une distribution surfacique
- $dQ = \lambda d\ell$ pour une distribution linéique.

Application

Calculer en un point M le champ et le potentiel électrostatiques créés par un fil rectiligne infiniment long , uniformément chargé de densité linéique λ .

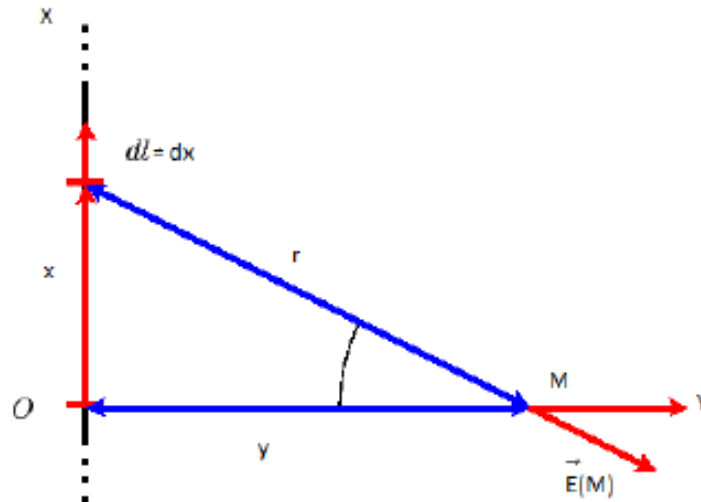


Figure 21. Application fil infini

Par application de la loi de coulomb :

$$\vec{E}(M) = k \int_V \frac{\lambda d\ell}{r^2}$$

Nous obtenons

$$E_y(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Cette équation montre que le champ créé en point M par un fil rectiligne infiniment long chargé est : $E_y(M) \propto 1/r$

si

$$\begin{aligned} \lambda > 0 & \quad \vec{E}_y \text{ est radial de M vers l'exterieur} \\ \lambda < 0 & \quad \vec{E}_y \text{ est radial de M vers l'interieur} \end{aligned}$$

Pour calculer le potentiel électrostatique dans le cas d'un fil infini, nous sommes obligés de définir le potentiel à partir d'une origine prise arbitraire. Pour cela, nous calculons d'abord

la variation du potentiel électrostatique entre deux points M_1 et M_2 distants du fil respectivement de r_1 et r_2 .

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log} r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log} r_1$$

Nous déduisons ensuite le potentiel électrostatique :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log} r + \text{cste.}$$

En tenant le même raisonnement déjà vu dans le chapitre (rappels mathématiques) afin de démontrer que le champ vectoriel \vec{A} n'est autre que le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$.

De la même manière, nous écrivons $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

Cette expression implique :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Tout problème en électrostatique peut se résoudre en utilisant cette relation.

6 Dipôle électrique.

Un exemple de dipole est la molécule d'eau. La molécule d'eau contient deux charges (H_3O^+ , OH^-).

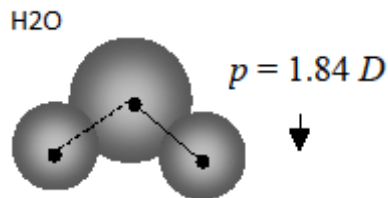


Figure 22. Molécule d'eau

Notre but dans cette section est de calculer le potentiel créé en un point M par un dipôle électrique.

6.1 Définition

Nous supposons un système de deux charges $(-q, +q)$ placées en N et P respectivement distant de a telle que $a = \|\overline{NP}\|$

Et $a \ll PM$ ou NM

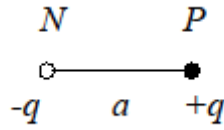


Figure 23 Moment dipolaire

On définit le moment dipolaire le vecteur \vec{p} par :

$$\vec{p} = q\overline{NP} \quad (14)$$

\vec{p} s'exprime en Cm.

6.2 Potentiel créé par un dipôle électrique.

Nous utilisons les coordonnées polaires afin de calculer le potentiel créé par le dipôle électrique \vec{p} . nous prenons comme origine O milieu de NP , et la droite NP comme origine des angles. Dans le cas d'un dipôle : $OM = r \gg a$.

$$\text{Par définition } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

$$PM \approx r - \frac{a}{2} \cos \theta \quad NM \approx r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$$

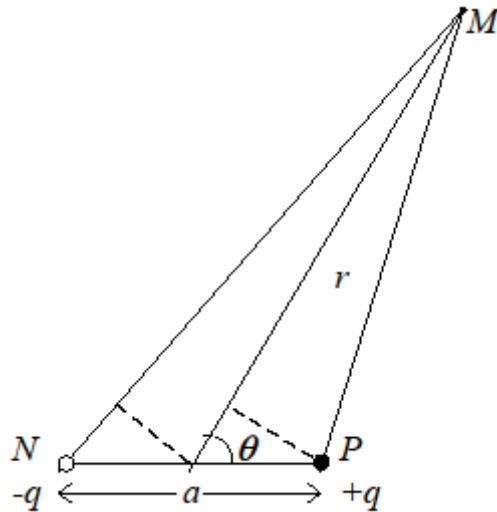


Figure 24. dipôle électrique

$$NM \approx r + \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$NM \approx r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$$

Série de Taylor : $(1 + X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \dots$ si $X \ll 1$

Dans ce cas $\frac{a}{r} \ll 1$

Nous obtenons :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a \cos \theta}{r^2} \right) \quad (15)$$

Nous introduisons \vec{p} le moment dipolaire, nous écrivons :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2} \right)$$

Où \vec{u} est un vecteur unitaire porté par \overrightarrow{OM}

Le potentiel électrique du dipôle dépend de (r, θ) et c'est une fonction décroissante en $1/r^2$.

Exemple :

- Donner les expressions du champ électrique créé par ce dipôle.
- Quelle est l'équipotentielle $V = cste$.
- Nous rappelons la relation entre le champ électrique et le potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

En coordonnées polaires

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

Nous obtenons

$$E_r = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta}{r^3} \right) \quad (16)$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sin \theta}{r^3} \right)$$

L'équipotentielle $V = cste$

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) = cste$$

Nous donne

$$r^2 = k' \cos \theta \quad (17)$$

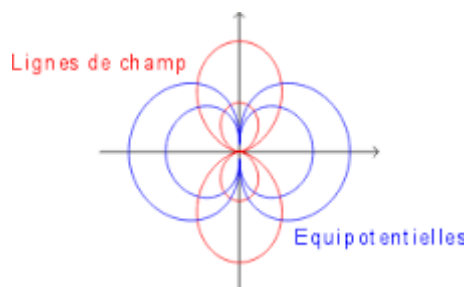


Figure 25. Lignes de champ créé par un dipôle électrique et équipotentiel

Chapitre II

Flux du champ électrique

7 Définition :

le flux de \vec{E} à travers une surface S, noté $\phi_S(\vec{E})$ est la quantité scalaire définie comme :

$$\phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (18)$$

$\vec{dS} = \vec{n} dS$, est un vecteur porté par la normale \vec{n} en un point de surface S considérée. Lorsque S est une surface fermée, \vec{dS} est toujours portée par la normale extérieure.

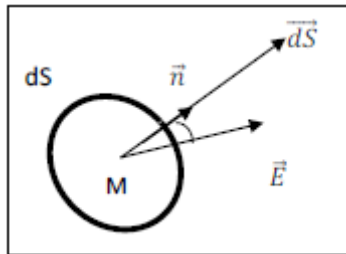


Figure 26. le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ définit l'élément de flux à travers \vec{dS} .

8 Flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle.

Nous calculons le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle q à travers une surface fermée.

Deux cas peuvent se présenter

- q est à l'extérieur de la surface fermée.
- q est à l'intérieur de la surface fermée

8.1 cas où q est à l'extérieur de la surface fermée.

Nous considérons une surface fermée particulière obtenue par l'intersection de deux sphères concentriques de rayon r_1 et r_2 centrées sur q et d'un cône d'angle au sommet α : α est très petit.

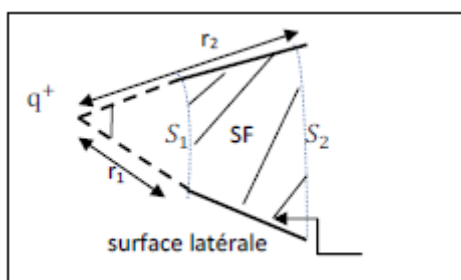


Figure 27. l'intersection de deux sphères concentriques de rayon r_1 et r_2 centrées sur q

La surface fermée est composée de : $S = S_1 + S_2 + S_{latérale}$

Le flux du champ électrique à travers cette surface se décompose ainsi :

$$\phi_{SF}(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_{latérale}}(\vec{E})$$

Le champ électrique créé par la charge q est radial : $\vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$

Donc il est perpendiculaire en chaque point à $d\vec{S}_{latérale}$.

Puisque $\vec{E} \perp d\vec{S}_{latérale}$

En effet $\phi_{S_{latérale}}(\vec{E}) = 0$.

Nous calculons le flux $\phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E})$

$$\phi_1(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \int \|\vec{E}\| \cdot \|d\vec{S}_1\| \cos \pi = -E S_1 ; \text{ Eet } S_1 \text{ sont parallèle et de sens contraire}$$

De la même façon nous trouvons

$$\phi_2(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \int \|\vec{E}\| \cdot \|d\vec{S}_2\| \cos 0 = E S_2 ; \text{ Eet } S_2 \text{ sont parallèle et de même sens}$$

Quand α est tres petit $S_1 \approx S_2 = S$

$$\text{Alors } \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) = 0$$

Le flux de \vec{E} à travers S_1 est exactement compensé par Le flux de \vec{E} à travers S_2 .

$$\text{Donc } \phi_{SF}(\vec{E}) = 0.$$

Le flux sortant à travers toute la surface fermée est nul.

8.2 cas où q à l'intérieur de la surface fermée

Nous choisissons dans ce cas une surface fermée sphérique, comme précédemment S_1 et S_2 seront des portions de sphère comme indique la figure

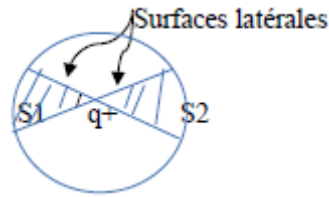


Figure 28. S_1 et S_2 seront des portions de sphère

Les deux cônes au sommet q^+ ont un angle α très petit. Le flux du champ électrique à travers cette surface hachurée sur la figure est :

$$\Phi_{SF}(\vec{E}) = \Phi_{S1}(\vec{E}) + \Phi_{S2}(\vec{E}) + \Phi_{S \text{ latérale}}(\vec{E})$$

$\Phi_{S \text{ latérale}}(\vec{E}) = 0$ Meme chose qu'en A.

$\Phi_{S1}(\vec{E}) + \Phi_{S2}(\vec{E}) = 2 kcarEet S$ sont parallèle et de même sens en chaque point la surface.

Dans ce cas, Le flux à travers la surface fermée est non nul.

8.3 valeur de $\Phi_{SF}(\vec{E})$ quand q est à l'intérieur de la surface fermée

Pour cela nous remarquons d'abord que est radial : $\vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$, son module est constant à la distance est radial r , de plus $Eet S$ sont parallèle et de même sens.alors,

$$\Phi_{S'}(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS'} = \int \|\vec{E}\| \cdot \|\overrightarrow{dS'}\| \cos 0$$

$$\Phi_{SF}(\vec{E}) = K \frac{q}{R^2} \int dS' = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \Phi_S(\vec{E})$$

En résumé

$$\Phi_{SF}(\vec{E}) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ est exterieur à } SF \\ \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ est exterieur à } SF \end{cases}$$

9 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss se déduit des résultats précédente, il s'annonce ainsi :

Le flux du charges électrique créé par une charge électrique Q , à travers une surface fermée est égal :

- à $\frac{Q}{\epsilon_0}$ quand Q est à l'intérieur de la surface fermée.
- à 0 quand Q est à l'extérieur de la surface fermée

Ceci se résume par la formule :

$$\Phi_{SF}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (19)$$

Remarques :

1/ le résultat obtenu est indépendant de la forme et de la taille surface fermée

2/ le flux du champ électrique ne dépend que de la charge électrique totale intérieure à cette surface fermée.

3/si cette charge électrique est distribuée dans un volume V fini, de telle sorte qu'on puisse définir une densité volumique de charge $\rho(x, y, z)$.

Alors le théorème de Gauss s'écrit

$$\Phi_{SF}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky

$$\iiint \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

$$\text{Donc } \iiint \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

Pour un élément de volume très petit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20)$$

1^{er} équation de Maxwell

10 Application du théorème de Gauss :

Calculer le champ électrique créé par un fil rectiligne infiniment long uniformément chargé de densité linéique $\lambda > 0$

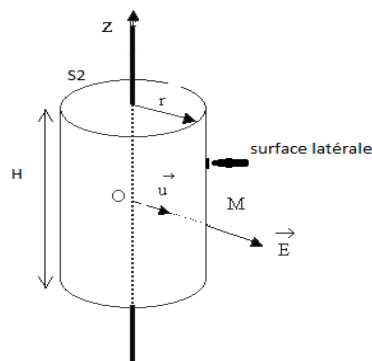


Figure 29. surface de Gauss est un cylindre de longueur H de rayon r

Nous tenons compte de la symétrie du système, nous choisissons comme surface de Gauss un cylindre de longueur H de rayon r .

Le flux de \vec{E} à travers cette surface fermée :

$$\phi_{SF}(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_{latérale}}(\vec{E})$$

Les deux premières intégrales sont nulles puisque $\vec{E} \perp \vec{dS}_{S_1}$ et $\vec{E} \perp \vec{dS}_{S_2}$.

La troisième intégrale $\phi_S(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int E \cdot dS$ E est constant à la distance r

$$\phi_S(\vec{E}) = E \int dS = ES = E2\pi rH$$

Or d'après le théorème de Gauss

$$E2\pi rH = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^H \lambda d\ell}{\epsilon_0} = \frac{\lambda H}{\epsilon_0}$$

Donc :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (21)$$

Résultat déjà trouvé par application de loi de Coulomb.

Dans le système international (SI) MKSA les unités fondamentales sont le metre, le kilogramme, la seconde et l'Ampère.

Dans ce système :

- la charge électrique q s'exprime en Coulomb.
- ρ en coulomb par m^3 .
- σ en coulomb par m^2 .
- λ en coulomb par m .
- La force F en Newton.
- Le travail W en joule
- Le potentiel V en joule par coulomb ou en volt.
- Le champ électrique E en volt par mètre.

Chapitre III

Conducteurs en équilibre.

Notions de cristallographie

Dans la nature la grande majorité des corps existe à l'état cristallisé. Un solide cristallisé est composé d'un agrégat de cristaux collés les uns des autres.

Un cristal est constitué de motifs. Le motif peut être soit :

- ✓ Un atome
- ✓ Une molécule
- ✓ Un ion

Nous supposons que le motif soit un atome, sa structure électronique est formé d'un atome de charge électronique positive autour du quel gravitent des électrons qui portent de charges négatives. Les orbites qui sont proches du noyau forment des couches internes et celles qui sont les plus éloignées forment les couches externes. Ces couches qui vont former les liaisons entre les différents atomes qui constituent le cristal.

Les électrons des couches externes peuvent être :

- Soit fortement liés : isolant
- Faiblement liés : électrons presque libre.

11 Conducteur et isolant à l'équilibre électrostatique.

11.1 Champ électrique dans les isolants

Plaçons un isolant dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_{ext} . Ce champ va agir sur les électrons mais comme ceux-ci sont bien liés à leurs atomes il ne va rien se passer sauf une déformation du nuage électronique existant autour du noyau à cause de la force électrostatique.

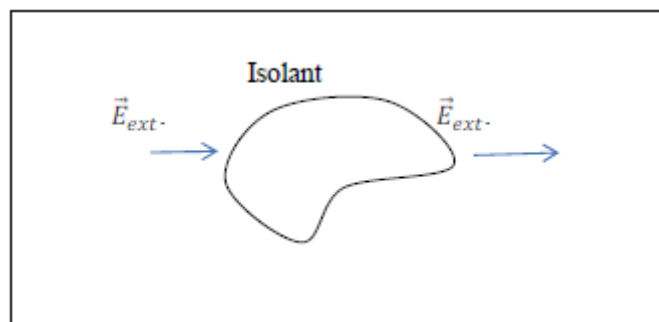


Figure 30. Le champ électrique est presque le même à l'intérieur et à l'extérieur de l'isolant.

11.2 Champ électrique dans le conducteur

Lorsque nous plaçons un métal tel que le cuivre dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_{ext}

Il va y avoir un déplacement des charges négatives jusqu'à la surface du conducteur, qu'elles ne pourront pas franchir. Nous aurons un empilement des charges positives d'un côté et de charges négatives de l'autre côté.

Cette nouvelle répartition des charges va engendrer un nouveau champ \vec{E}_N de sens opposé \vec{E}_{ext} . Plus l'empilement de charges augmente plus \vec{E}_N augmente.

L'état stationnaire ou état d'équilibre est atteint quand le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul :

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_N = 0 \quad (22)$$

à ce moment les charges électrique ne sont plus soumis à aucune force.

Par conséquent la surface du conducteur est recouverte de charges.

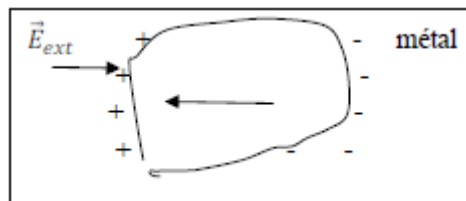


Figure 31. Empilement des charges positives d'un côté et de charges négatives de l'autre côté.

Nous avons montré que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique est nul

$$\vec{E}_{int} = 0$$

En effet

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Alors le potentiel V est constant.

Ce résultat a pour conséquent que tout le conducteur et en particulier sa surface est une équipotentielle. Les charges électriques sont accumulées en surface avec une densité superficielle de charge σ .

Nous appliquons le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique \vec{E}_s au voisinage immédiat du conducteur. Nous choisissons la surface de Gauss un cylindre très plat dont les génératrices sont perpendiculaires à la surface du conducteur.

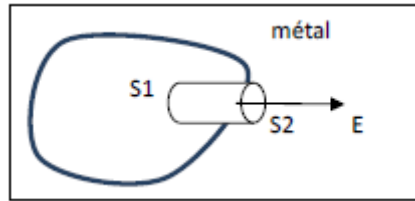


Figure 33. $E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ est approximativement à la surface extérieure du conducteur

$$\phi_{SF}(\vec{E}) = \phi_{S1}(\vec{E}) + \phi_{S2}(\vec{E}) + \phi_{S \text{ latérale}}(\vec{E})$$

Les deux premières intégrales sont nulles puisque $\vec{E} \perp \vec{dS}_{S1}$ et $\vec{E} \perp \vec{dS}_{S2}$.

La troisième intégrale $\phi_{S \text{ latérale}}(\vec{E}) = \oiint \vec{E}_s \cdot \vec{dS} = \int E_s \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

E_s est constant à la distance r

$$\phi_{S \text{ latérale}}(\vec{E}) = E_s \int dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E_s S = \frac{\int \sigma dS}{\epsilon_0}$$

Nous prenons σ comme une constante, nous obtenons finalement

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (23)$$

Nous remarquons que l'existence d'une discontinuité du champ électrique qui passe de zéro à l'intérieur du conducteur vers la valeur $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ est approximativement à la surface extérieure du conducteur. Cette discontinuité provient de l'accumulation des charges en surface.

12 Influence subie par un conducteur isolé

Soit C un conducteur isolé et non chargé. Il n'y a aucune charge nulle part, donc $V = 0$

partout et $E = 0$. Aucune ligne de champ n'existe. On approche de C un autre conducteur A chargé positivement. Les charges de A vont régner un champ électrique qui agit sur les charges mobiles de C . Dans C , les charges négatives se déplacent apparaissent sur la partie de C proche de A et des charges positives sur la partie la plus éloignée de A jusqu'à ce que l'on arrive à une situation d'équilibre.

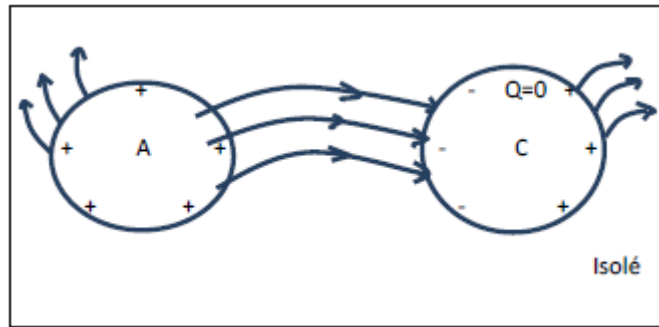


Figure 34. Les charges négatives se déplacent et apparaissent sur la partie de **C** proche de **A** et des charges positives sur la partie la plus éloignée de **A**

13 Influence subie par un conducteur maintenu à un potentiel constant

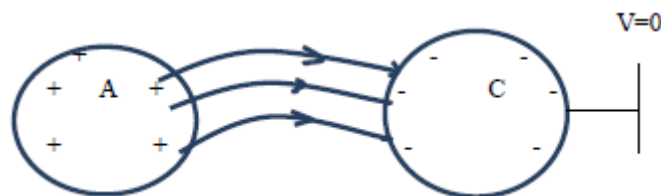


Figure 35. Lors que conducteur **C** est maintenu à un potentiel $V = 0$, il apparait que des charges négatives sur **C**,

Influence électrostatique sur un conducteur maintenu à $V = 0$

Nous partons toujours d'un conducteur seul face à un plan de masse, mais cette fois, il est relié par un fil conducteur à ce plan de masse.

Il n'y a aucune charge nulle part, donc $V = 0$ partout, $E = 0$. Aucune ligne de champ n'existe.

Quand nous approchons de **C** le conducteur **A** chargé positivement, nous avons un effet très voisin du précédent, mais cette fois, comme V est maintenu à 0 sur **C**, aucune ligne de champ ne peut plus sortir de **C** car aucun endroit n'est à un potentiel plus faible. Donc aucun point de la surface de **C** ne peut porter de charges positives.

il apparaît que des charges négatives sur **C**, alors qu'il y'a déplacement des charges positives vers la terre (c .à.d déplacement des électrons de la Terre vers **C**).

Or toutes les lignes de champ qui arrivent sur **C** viennent de **A**, tandis que celles qui partent de **A** ne viennent pas toutes sur **C**.

14 L'influence totale

L'influence totale se produit lorsque le conducteur B entoure le conducteur A. nous aurons le phénomène suivant : si le conducteur B est isolé et initialement neutre. Puisque la charge totale doit rester nulle, il apparaît sur la face externe la charge $+Q$.

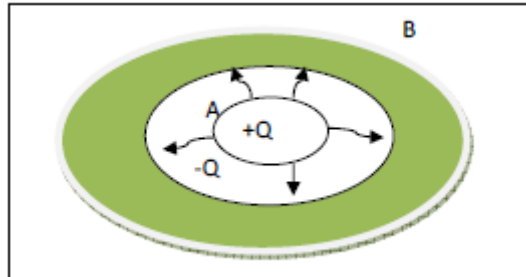


Fig 36.

Par contre si le conducteur B est isolé et porte initialement une charge Q' , par influence totale sa charge va augmenter et va s'ajouter à la charge initiale, il apparaît donc sur sa face externe la charge $Q + Q'$.

Finalement, le conducteur B est relié au sol, aucune charge sur sa face externe (déplacement des électrons de la terre vers le conducteur B). B devient isolé.

15 Pression électrostatique.

Soit un conducteur C de charge surfacique σ . Le champ électrostatique est nul à l'intérieur de C tandis que le champ électrique au voisinage de la surface du conducteur C est

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Le champ moyen dans l'épaisseur de la couche e est :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Nous montrons que la force élémentaire ainsi exercée sur une portion de surface dS du conducteur a pour expression $\vec{dF} = P d\vec{S}$.

Or

$$dF = EdQ.$$

$$\text{Et donc à la force } dF = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sigma dS$$

Nous trouvons que

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (24)$$

La pression P est toujours positive quel que soit le signe de la charge.

16 Capacité d'un conducteur et d'un condensateur

16.1 Conducteur

La charge Q d'un conducteur isolé Q est proportionnelle à son potentiel V

$$Q = C_i V \quad (25)$$

Le coefficient de proportionnalité C_i est appelé capacité du conducteur isolé. La capacité C_i du conducteur isolé ne dépend que de sa géométrie. C_i s'exprime en farads.

1farads correspond à une charge de 1Coulomb quand le potentiel est de 1Volt .

$$\mu F = 10^{-6} F$$

$$nF = 10^{-9} F$$

$$pF = 10^{-12} F$$

Exemple :

Quelle est la charge d'une sphère isolée de rayon $5cm$.

Si on prend comme surface de Gauss une sphère concentrique à la première et de rayon r le champ E en tout point est radial et de module constant. Donc, le flux de E est égal à $E4\pi r^2$.

Ce flux est donc égal à la charge $\frac{Q}{\epsilon_0}$.

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Donc,

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

soit le même que si la charge Q était ponctuelle. Le potentiel donc lui aussi le même que pour une charge ponctuelle :

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r}$$

A la surface, $r = R$ on a donc $V = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi R}$

Où : $Q = 4\pi\epsilon_0 R V$ en comparant avec $Q = C V$

Nous trouvons

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} = 0.555 \cdot 10^{-11} F = 5.55 pF.$$

16.2 Condensateur.

Un condensateur est constitué de deux conducteurs en influence totale. Nous supposons que le conducteur 2 entoure complètement le conducteur 1. Le conducteur 1 s'appelle l'armature interne et le conducteur 2 l'armature externe.

16.2.1 Capacité d'un conducteur

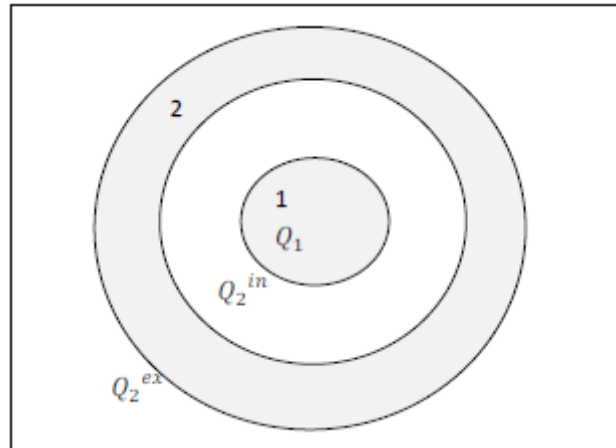


Figure 32 Par influence total, il apparait des charges sur la surface externe du conducteur 2

Soit Q_1 la charge totale du conducteur 1.

Q_2 la charge totale du conducteur 2. Avec $Q_2 = Q_2^{in} + Q_2^{ex}$

Nous remarquons déjà que $Q_2^{in} = -Q_1$,

D'après le théorème de Gauss et puisque $\vec{E} = 0$ à l'intérieur d'un conducteur, on a

$$Q_1 = -Q_2^{in}$$

Les relations entre les charges et les potentiels s'écrit :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \quad (26)$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \quad (27)$$

Nous sommes dans un cas d'influence totale alors : $C_{ii} = |\sum_{j \neq i} C_{ji}|$

Qui devient $C_{11} = -C_{21} = -C_{12}$ car

$$C_{21} = C_{12} \quad (28)$$

C_{22} est le coefficient de l'armature externe en influence avec une armature dont le potentiel tend vers l'infini si $V_2 \neq 0$.

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$Q_1 = C_{11}(V_1 - V_2) \quad (29)$$

Q_1 depend de la ddp entre les armatures.

Maintenant, pour trouver Q_2 , il suffit de chercher Q_2^{ex} en fonction de Q_2^{ex} .

Q_2^{ex} est la charge portée par la surface extérieur du conducteur 2.

$$Q_2^{ex} = Q_2 - Q_2^{in} = Q_2 + Q_1$$

Nous trouvons

$$Q_2 = -C_{11}(V_1 - V_2) + (C_{22} - C_{11})V_2.$$

Par définition C_{11} est la capacité du condensateur

$$C_{11} = \frac{Q_1}{(V_1 - V_2)} \quad (30)$$

16.2.2 Exemple de condensateur

1/un condensateur plan

un condensateur plan est formé de deux plaques parallèles de surface S distant de e .

$e \ll S$, le champ qui règne entre les armature est uniforme : $E = \frac{V_1 - V_2}{e}$.



Figure 33. La capacité du condensateur plan

E s'exprime aussi en fonction de la densité de charge surfacique: $\sigma = \frac{Q}{S}$, tel que

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Le théorème de Gauss nous permet de connaître le champ, créé par un plan infini portant une charge de densité surfacique σ . $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

D'après le principe de superposition, le champ créé par deux plans infinis portant respectivement de densité $+\sigma, -\sigma$

Nous revenons au calcul de la capacité du condensateur plan $C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)}$.

En exprimant la charge Q en fonction de la d.d.p. $Q = \sigma S$

En remplaçons l'expression de $E \varepsilon_0 = \sigma$ dans Q

d'où

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \quad C \gg \varepsilon_0 \quad (30)$$

2/Condensateur sphérique

Un condensateur sphérique se présente comme deux sphères conductrices concentriques de rayon R_1 et R_2 respectivement $R_1 < R_2$ jouant le rôle d'armature interne et externe. C'est le cas d'une influence totale.

Si Q est la charge de l'armature interne, et $(V_1 - V_2)$ la d.d.p, nous déduisons l'expression de la capacité $C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)}$.

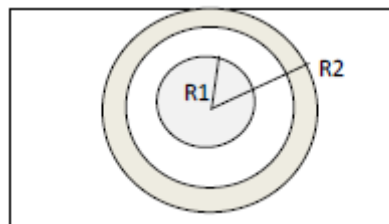


Figure 34. Capacité d'un condensateur sphérique

d'après la définition

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr$$

Avec $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

D'où $V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$

Nous obtenons

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (31)$$

Remarque :

$R_2 \rightarrow \infty C = 4\pi\epsilon_0 R_1 c'$ est la capacité d'une sphère isolé.

Si $R_2 = R_1 + e$ telle que $e \ll R_1$ alors $C = \frac{\epsilon_0 S}{e} c'$ est la capacité d'un condensateur plan.

16.2.3 Capacité d'un condensateur cylindrique.

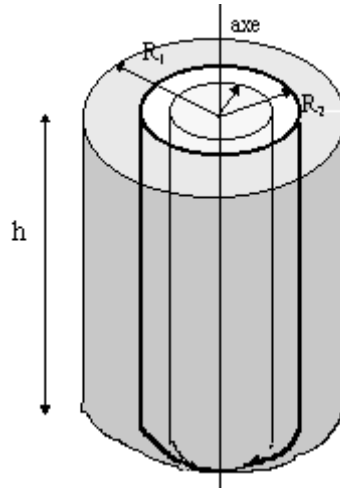


Figure 40. Capacité d'un condensateur cylindrique

d'un condensateur cylindrique est formé de deux conducteurs cylindrique coaxiaux de rayon respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) de hauteur h .

en supposant que le champ qui régné entre les armatures est le même que celui produit par un cylindre infiniment long portant une charge Q .

Alors $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$ avec λ est une charge linéique telle que $Q = \lambda h$.

Nous déduisons la capacité

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\log \frac{R_2}{R_1}} \quad (32)$$

Dans cas, si la distance entre les armatures est très petite

$R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$ alors : $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

Nous retrouvons l'expression de la capacité d'un condensateur plan.

16.2.4 Groupements de condensateurs

Un condensateur est caractérisé par sa capacité et la d.d.p qu'il peut supporter.

Objectif du groupement de condensateurs :

- avoir un condensateur capable de supporter les d.d.p élevées,
- ou avoir un condensateur de capacité très grande.

- Groupement en série.

Pour un groupement en série de n condensateurs, la capacité du condensateur équivalent sera :

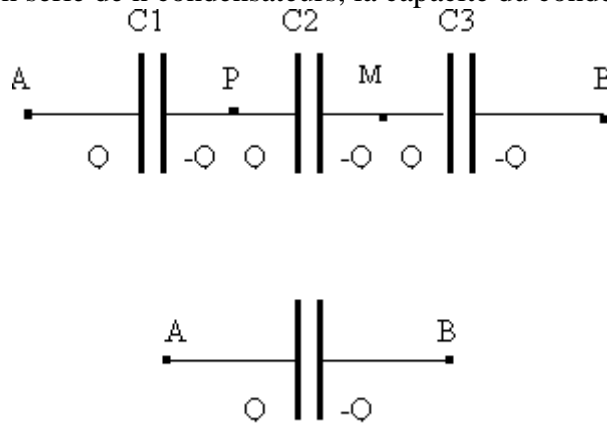


Figure 41. Capacité C du conducteur équivalent au montage des condensateurs en série

Nous appliquons une d.d.p. $V_A - V_B$ entre les bornes A et B . L'armature du condensateur C_1 , reliée à la borne A , reçoit une certaine quantité d'électricité Q , positive. Les autres armatures portent les charges Q ou $-Q$, qui sont réparties comme il est indiqué. En effet, les deux armatures d'un condensateur portent des quantités d'électricité opposées.

Déterminons la capacité C du conducteur équivalent au montage des condensateurs en série. Si l'on applique la même d.d.p. $V_A - V_B$ au condensateur équivalent, les mêmes quantités d'électricité Q et $-Q$ sont reçues par ses armatures. Sa capacité C est donc telle que : $Q = C \cdot (V_A - V_B)$.

Considérant le montage en série (figure 1) des condensateurs de capacités C_1 , C_2 et C_3 , on peut écrire pour chacun d'eux :

on peut écrire pour chacun d'eux :

$$Q = C_1 (V_A - V_P);$$

$$Q = C_2 (V_P - V_M);$$

$$Q = C_3 (V_M - V_B)$$

$$\text{Et par suite : } \frac{Q}{C_1} (V_A - V_P) + \frac{Q}{C_2} (V_P - V_M) + \frac{Q}{C_3} (V_M - V_B) = \frac{Q}{C}$$

$$\text{On obtient } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$C_1, C_2, C_3 \dots \dots C_n$, sont montés en série, le condensateur équivalent a la capacité C telle que

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (33)$$

- Groupement en parallèle

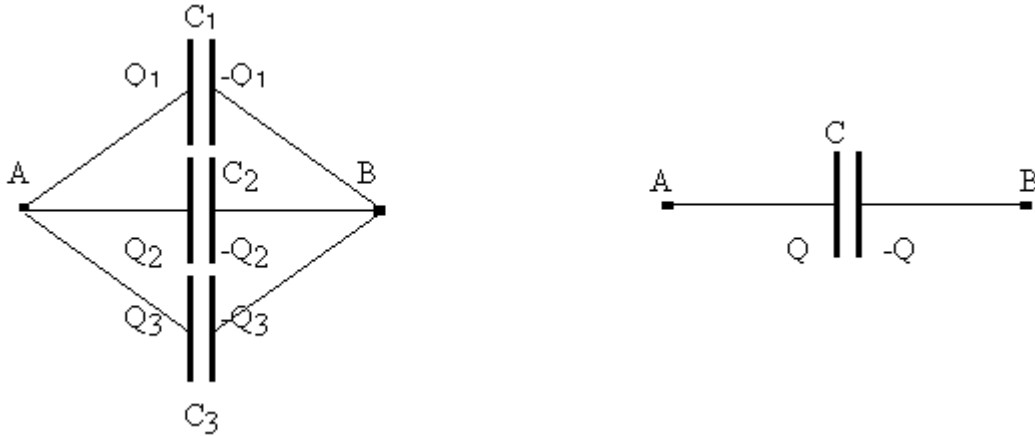


Figure 42. Capacité C du conducteur équivalent au montage des condensateurs en parallèle

On a représenté (figure 1) le montage en parallèle de 3 condensateurs de capacité C_1 , C_2 et C_3 . La même d.d.p. est appliquée à tous les condensateurs. Les armatures reliées au point **A** prennent les quantités d'électricité Q_1 , Q_2 , et Q_3 , positives si $V_A > V_B$. Les armatures reliées au point **B** prennent les quantités d'électricité $-Q_1$, $-Q_2$ et $-Q_3$.

Si la même d.d.p. $V_A - V_B$ est appliquée au condensateur équivalent, à ce montage, son armature chargée positivement reçoit la quantité d'électricité $Q_1 + Q_2 + Q_3$. La capacité C de ce condensateur est donc telle que :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = C(V_A - V_B)$$

On peut écrire pour chaque condensateur du montage en parallèle :

$$Q_1 = C_1(V_A - V_B)$$

$$Q_2 = C_2(V_A - V_B)$$

$$Q_3 = C_3(V_A - V_B)$$

$$\text{donc : } Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B) + C_3(V_A - V_B) = C(V_A - V_B)$$

$$\text{Il vient après simplification : } C = C_1 + C_2 + C_3$$

D'une manière générale, la capacité C du condensateur équivalent à n condensateurs montés en parallèle, de capacité $C_1, C_2, C_3 \dots C_n \dots$ est :

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (34)$$

Chapitre IV

Électrocinétique

17 Introduction :

L'électrocinétique : est le domaine de la physique où les manifestations des mouvements de charges mobiles sont étudiées en termes de courants et de tensions. Il s'agit ainsi d'étudier la circulation des courants électriques dans des circuits électriques assez simples composés de sources, résistance, bobine, condensateur, etc. Par contre électrostatique étude des phénomènes liés aux charges électriques immobiles.

18 Conducteur électrique.

Lorsqu'on relie deux conducteurs en équilibre A et B par un fil conducteur, les charges se mettent en mouvement sous l'influence du champ électrostatique qui règne dans le fil. Ce mouvement se poursuit jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre. Cette circulation de charges correspond au passage d'un courant électrique dans le fil de connexion.

18.1 Courant électrique

Un courant électrique est la grandeur algébrique correspondant à la circulation de charges électrique mobiles dans un conducteur. Les différents types de charges sont :

- Dans les métaux : électrons libres $q = -e$ (charge élémentaire $e = 1.6021710 \times 10^{-19}$ C). Chaque atome du métal libère un ou plusieurs électrons qui se propagent librement dans le métal.
- Dans les semi-conducteurs : électrons libres (charge $q = -e$) et trous (charge $q = +e$).
- Dans les liquides : cations (ions +), anions (ions -).
- Dans les gaz : porté à très haute température, il peut y avoir ionisation d'une partie d'un gaz dans certaines conditions comme une décharge électrique, on parle de plasma.

L'Intensité électrique $i(t)$ à travers une section (S) de conducteur est le débit de charges $d q(t)$ qui traverse la section(S) de conducteur pendant un intervalle de temps dt , soit :

$$i(t) = \frac{d q(t)}{dt} \quad (35)$$

L'intensité $i(t)$ est une grandeur algébrique, et s'exprime en ampère ($A = C/s$) dans le S.I.

Elle se mesure au moyen d'un ampèremètre (branché en série avec le circuit). Symbole: A Par convention, le sens positif du courant est celui des charges positives : $d q > 0$.

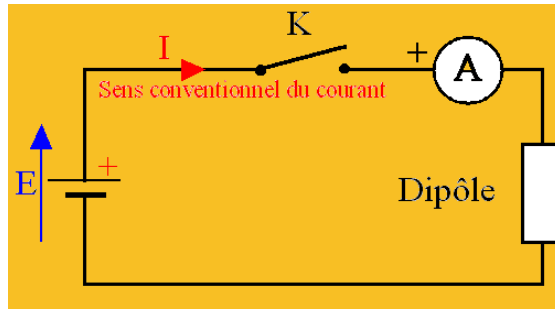


Figure 35. Circuit électrique

en unité de temps $i = q t$

18.2 Densité de courant

Soit un matériau conducteur dans lequel tous les charges sont de même type q se déplacent avec une vitesse \vec{v} assimilée à la vitesse de groupe (partie électromagnétisme).

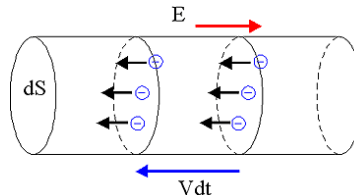


Figure 36. le flux du vecteur \vec{j} à travers la surface S

On appelle vecteur densité volumique de courant, noté j exprimé en $/m^2$,

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (35)$$

ρ est la densité volumique des charges :

$$\rho = nq \quad (36)$$

Où n correspond à la densité des charges mobiles.

L'intensité du courant électrique apparaît comme le flux du vecteur \vec{j} à travers la surface S .

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (37)$$

la surface S est quelconque.

19 LOI d'OHM

Les travaux pratiques montrent que le rapport entre la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance R métallique (conducteur) et le courant qui le traverse $i(t)$, est constant (la température de la salle est maintenue constante). La constante R est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms Ω .

$$R = \frac{u(t)}{i(t)} \quad (38)$$

C'est la Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.

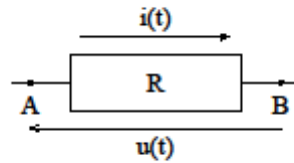


Figure 37. Résistance électrique du conducteur

À l'échelle microscopique.

En tout point M d'un conducteur de conductivité σ , il existe un champ \vec{E} entraîne l'apparition d'une densité de courant \vec{j} : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; $E = \frac{j}{\sigma}$

Cette expression est générale, elle constitue la forme locale de la loi d'Ohm.

La constante σ , dépend de la nature du matériau. On utilise ρ pour caractériser le matériau où sa résistivité. $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{j/S}$; $E = \rho \frac{j}{S}$

Pour un conducteur de longueur L, de section constante S, on définit la résistance R par : $R = \rho \frac{L}{S}$.

Si $V_A - V_B$ désignent les potentiels entre deux points A et B distant de L dans le conducteur, la norme du champ électrique est égale aussi à

$$V_A - V_B = \int_0^L E \, dl. : \quad E = \frac{V_A - V_B}{L}$$

Ainsi, La loi d'Ohm traduit l'effet du déplacement des charges au champ électrique E auquel correspond une différence de potentiel en fonction du matériau caractérisé par sa résistance.

Dans le Cu : densité volumique d'atomes: $n = 8.4 \cdot 10^{28} \, m^{-3}$.

on admet que chaque atome fournit 1 é au courant :

$$n_e = 8.4 \cdot 10^{28} \, m^{-3}.$$

$$\Rightarrow q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19} \, C$$

$$v = ?$$

Exemple :

pour $I = 10 \, A$ et $S = 10 \, mm^2$. on calcule $I : I = J \cdot S = eqvS$

On trouve $v \approx 7.4 \cdot 10^{-4} \, m/s$.

20 Loi de Joule.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent (2) que le travail de la force électrique lors du déplacement d'une charge q entre deux points A et B prend la forme suivante : $W = q (V(A) - V(B))$.

Si un élément de charge dq passe d'un point A à un point B à travers une résistance R, le travail des forces électriques est : $dW = dq (V(A) - V(B))$.

Nous remplaçons $dq = idt$ et $V(A) - V(B) = u$ est lad.d.p.

$$D'où $dW = Ri^2 dt$$$

Ce travail est l'énergie dissipée sous forme de chaleur : c'est l'effet Joule

A l'état stationnaire. Elle correspond à une puissance

$$P = \frac{dW}{dt} = Ri^2 \quad (39)$$

Soit

$$P = \frac{u^2}{R} \quad (40)$$

$$P = u i \quad (41)$$

Une puissance s'exprime généralement en watts, ou en joules par seconde.

21 Les Circuits électriques.

Un **circuit électrique** est constitué d'un ensemble de conducteurs et de composants électriques ou électroniques parcourus par un courant électrique.

Un circuit électronique simple est constitué d'un générateur qui fournit l'énergie électrique, un récepteur qui reçoit l'énergie du générateur et interrupteur qui permet de commander le passage du courant dans le circuit

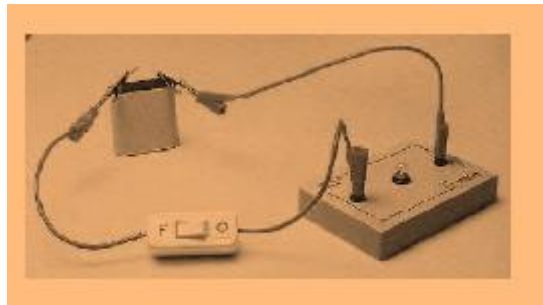


Figure 38 Circuit électronique simple

Circuit électronique simple

On distingue deux types de circuit.

- Un circuit électrique passif est un circuit composé de (résistance, bobine, condensateur). un circuit passif consomme de l'énergie.
- Un circuit électrique actif comporte de (diode, circuit intégré.....). un circuit actif fournit de l'énergie au circuit dans lequel il est connecté.

Groupement de résistances.

Association en série de résistance

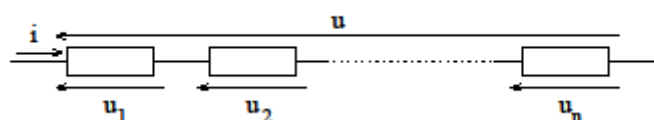


Figure 39 Association en série de résistance

Chaque résistance est traversée par la même intensité et la tension aux bornes de la résistance équivalente est égale à la somme des tensions partielles

$$u = \sum_k^N u_k \quad (42)$$

Où $u = Ri$

Association en parallèle de résistance

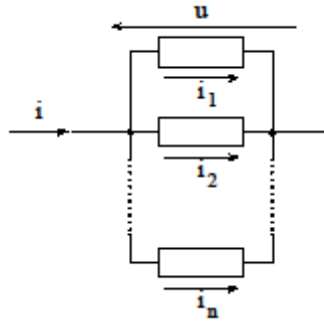


Figure 40 Association en parallèle de résistance

Les résistances sont soumises à la même tension. Le courant total qui traverse l'ensemble des résistances est égal à la somme des courants individuels

$$i = \sum_k^n i_k \quad (43)$$

21.1 Lois de Kirchhoff

Un circuit comportant des générateurs de tension, des récepteurs et de fil de connexion.

Nous définissons :

- un nœud est un point du circuit relié à deux dipôles ou plus.
- Une branche de réseau est la partie de circuit comprise entre deux nœuds.
- Une maille est un parcours fermé de branches passant au plus une seule fois par un nœud donné.

21.2 Loi des nœuds

En tout nœud d'un circuit, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui sortent. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de la charge électrique.

$$\sum i_{entrant} = \sum i_{sortant} \quad (44)$$

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

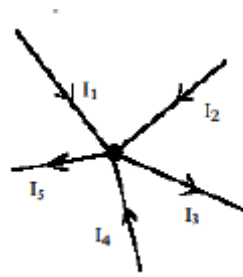


Figure 41. Loi des Noeuds

21.3 Loi des mailles

Le long de toute maille d'un circuit électrique, à tout instant, la somme algébrique des tensions est nulle.

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_?) + \dots \dots \dots (V_? - V_A) = 0 \quad (45)$$

Les deux lois de Kirchhoff permettent l'analyse les réseaux électriques.

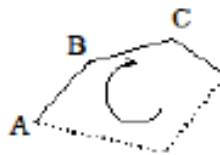


Figure 42. Loi des mailles

6- Application de la Loi d'Ohm aux réseaux

Nous considérons maintenant un circuit fermé comportant un générateur de tension et N résistances en série. Selon la loi des mailles nous pouvons écrire :

$$-V + \sum_k^N R_k i = 0 \quad (46)$$

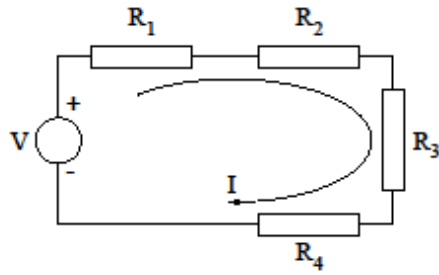


Figure 50. Circuit électrique fermée

Par définition la résistance équivalente est telle : $V = R i$, donc :

$$R = \sum_k^N R_k$$

Nous supposons N résistances en parallèle, elles sont soumises à la même tension, chacune est parcourue par un courant

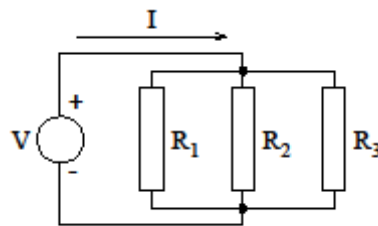


Figure 43. Association en série et en parallèle

$$i_1 = \frac{V}{R_1}$$

La loi des nœuds nous donne.

$$I = \sum_k^N \frac{V}{R_k}$$

Exemple :

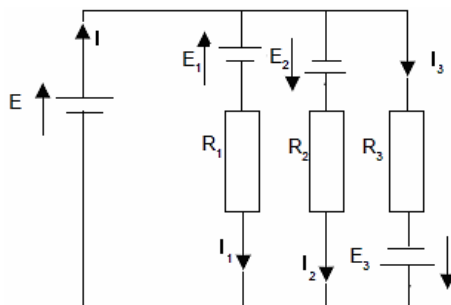


Figure 44. Calcul du courant principal I

Calculer le courant principal I . On donne :

$$E = 10V, E_1 = 5V, E_2 = 3V, E_3 = 6V, R_1 = 1k, R_2 = 2,2k, R_3 = 3,3k.$$

Solution :

La loi des nœuds

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

La tension est la même (groupement parallèle) :

$$E = +R_1 I_1 = -E_2 + R_2 I_2 = -E_3 + R_3 I_3$$

Dans la 1^{er} branche

$$I_1 = (E - E_1) / R_1 = (10V - 5V) / 1k = 5mA$$

Dans la 2^{ème} branche

$$I_2 = (E + E_2) / R_2 = (10V + 3V) / 2,2k = 5,91mA$$

La 3^{ème} branche

$$I_3 = (E + E_3) / R_3 = (10V + 6V) / 3,3k = 4,85mA$$

Nous obtenons

$$I = 5mA + 5,91mA + 4,85mA = 15,76mA.$$

Chapitre V

Electromagnétisme

22 Introduction

- ✓ *Tout mouvement de charges produit une perturbation dans son environnement → l'existence d'un champ magnétique.*
- ✓ *Tout mouvement de charges dans un champ magnétique subit une force magnétique.*

Cette force apparaît est proportionnelle au produit des intensités des deux courants et de leurs sens relatif. Pareillement à la force électrostatique, elle est inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

23 Définition d'un champ magnétique.

Nous avons vu comment une tige de plastique chargée produisait un champ vectoriel \vec{E} en tout point de l'espace qui l'entoure. De la même façon, un aimant produit un champ vectoriel c'est le champ magnétique \vec{B} . Un aimant est une pierre noire qui a la propriété d'attirer des objets en fer. Il est constitué de deux types de pôles différents. Par exemple, l'extrémité d'une aiguille aimantée qui pointe vers le Nord est appelée pôle nord et l'autre extrémité pôle sud.



Figure 45. Aiguille aimantée

Le champ magnétique est un phénomène courant. Par exemple si vous fixez une note sur la porte du réfrigérateur avec un petit aimant vous allez constater que l'aimant agit sur la porte à cause de son champ magnétique. Ces aimants sont plus familiers n'ont pas besoin d'un courant électrique pour produire un champ magnétique, on les appelle les aimants permanents.

Un type d'aimant assez répandu est constitué d'une bobine de fil enroulée autour d'un noyau de fer et parcouru par un courant. Dans ce cas la grandeur du champ magnétique est déterminée par l'intensité du courant. Exemple les électroaimants sont utilisés dans l'industrie.

23.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse v dans un référentiel galiléen est défini comme :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (48)$$

μ_0 est la perméabilité du vide

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Hm}^{-1} \text{ (SI)}$$

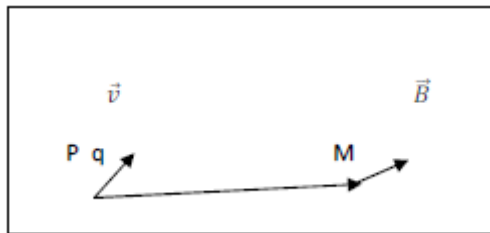


Figure 46. Champ créé par une charge mobile

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ magnétique. Si on considère deux particules q_1 et q_2 alors le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace sera la somme vectorielle des champs créés par chaque particule est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3} \quad (49)$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume V donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules on utilisera une description continue comme nous l'avons fait en électrostatique.

24 Force Magnétique.

Lorsqu'une particule chargée se déplace dans un champ magnétique on peut déterminer expérimentalement si une force provenant du champ agit sur cette particule. Dans ce chapitre, nous étudierons la relation entre cette force et le champ magnétique.

24.1 Force de Lorentz.

Tout commença avec l'expérience d'Oersted en 1820. Il plaça un fil conducteur au-dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est déviée, prouvant une relation entre le courant électrique et le champ magnétique. Par ailleurs, il observa que si on inversa le sens du courant, la déviation changera de sens. Cette force qui dévie l'aiguille est non radiale.

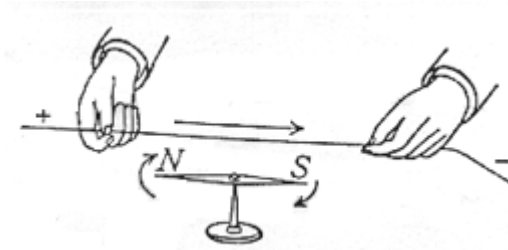


Figure 47. Relation entre le courant et le champ magnétique

En résumé on obtient l'équation vectorielle suivante :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (50)$$

On peut écrire la grandeur de \vec{F}_m

$$\text{Comme suit : } F_m = |q|v B \sin\alpha$$

Où α est l'angle entre les directions de la vitesse \vec{v} et du champ magnétique \vec{B} .

Cette équation indique que la force F_m sur une particule dans un champ magnétique est proportionnelle à la charge q et à sa vitesse v de la particule. Si $q = 0$ ou si la particule est immobile donc : $F_m = 0$. l'équation indique aussi que $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ($\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$) alors $F_m = 0$. Et que la force est maximal lorsque $\vec{v} \perp \vec{B}$.

24.2 Représentation vectoriel de la force de Lorentz.

On a déjà vu dans le chapitre cinématique que le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur \perp au plan formé par ces deux vecteurs. Par ailleurs le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ donnera un vecteur qui sera \perp au plan (\vec{v}, \vec{B}) . La règle de la main droite montre que le pouce de la main droite pointe dans la direction $\vec{v} \wedge \vec{B}$ quand les autres deux doigts forme la surface entre \vec{v} et \vec{B} en partant de \vec{v} .

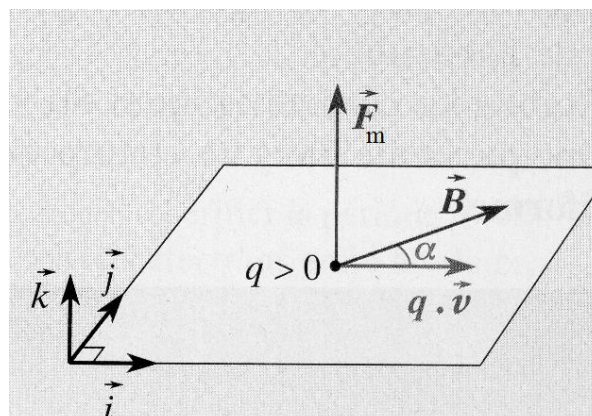


Figure 48. le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ donnera un vecteur qui sera \perp au plan (\vec{v}, \vec{B}) .

Si $q > 0$, la direction de \vec{F}_m aura le même signe que $\vec{v} \wedge \vec{B}$. par conséquent la direction de \vec{F}_m sera la même que celle du pouce. Par contre, si $q < 0$ la direction de \vec{F}_m sera opposée à celle du pouce.

En résumé. On définit qu'une particule de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un référentiel où règne un champ magnétique \vec{B} , est soumise à la force $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

Avec \vec{F} est la force de Lorentz s'exprime en N

q est la charge (C).

\vec{v} : vitesse de la particule (m/s)

\vec{B} est le champ magnétique s'exprime en Tesla (T).

L'unité compatible avec le système international pour mesurer l'intensité des champs magnétiques est le tesla (T).

Quelques ordres de grandeurs

Le champ magnétique de la terre $B \approx 10^{-4} T$

Un aimant permanent B de 10m à 1 T

Un électroaimant B de 0.1 à 0.2 T

Une bobine supraconductrice B de 5 à 50 T

24.3 Les lignes de champ magnétique

On peut représenter les champs magnétiques par des lignes de champ, comme l'on a fait pour les champs électriques. Les règles s'appliquent en tout point, la direction de la tangente à une ligne de champ magnétique donne la direction de \vec{B}

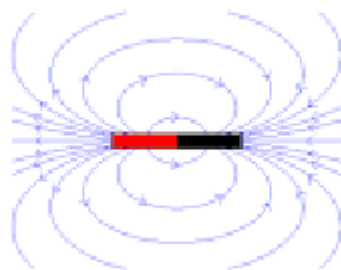


Figure 49. Une ligne de champ commence au pôle nord (rouge) d'un aimant et se termine en son pôle sud (noir).

Exemple : spectromètre de masse

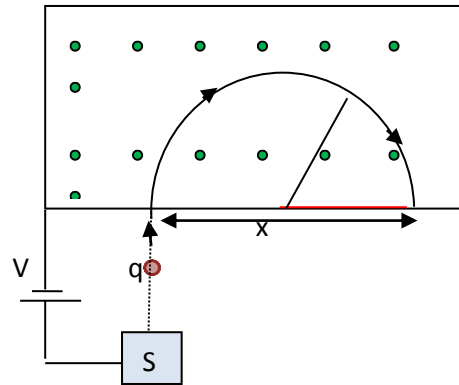


Figure 50: spectromètre de masse

La figure montre les éléments essentiels d'un spectromètre de masse m qui peut servir à mesurer la masse d'un ion. Un ion de masse m et de charge q est produit à la source S . L'ion initialement au repos est accéléré par le champ causé par une ddp V . L'ion émerge de S et entre dans une chambre de séparation dans laquelle un champ magnétique uniforme \vec{B} est \perp à la trajectoire de l'ion. Poussé par le champ magnétique, l'ion décrit un demi-cercle et frappe une plaque photographique située à une distance x de la fente d'entrée. Nous supposons que dans un essai, $B= 80.000 \text{ mT}$, $V= 1000.0 \text{ V}$ et que des ions de charges $q = +1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ frappe la plaque à $x = 1.625 \text{ m}$.

✓ Quelle est la masse m de chaque ion.

En utilisant la conservation de l'énergie

$$\Delta E_C + \Delta E_P = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - qV = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

D'après la 2eme loi de Newton à un mouvement circulaire uniforme

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

La force qui agit sur l'ion à une grandeur de $F_m = qvB \sin\alpha$

Et puisque v et B sont toujours \perp alors

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

Nous trouvons le rayon de la trajectoire circulaire

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

$$\text{Donc } x = 2r = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

$$\text{En isolant } m \text{ dans l'équation } m = \frac{B^2 q x^2}{8V}$$

et en remplaçant les variables par les valeurs données

$$m = \frac{(0.080\ 000)^2 (1.6022 \cdot 10^{-19}) (1.6254)^2}{8 (1000.00)}$$

On trouve $m = 3.3863 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$.

25 Loi de Laplace.

Nous supposons un élément de circuit de longueur dL parcouru par courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique \vec{B} , contient des charges mobiles de densité volumique ρ .

Un volume élémentaire dV autour d'un point M du conducteur contient une charge :

$dq = \rho dV$ avec $dV = S dL$ où S est la section du conducteur et dL un élément de longueur de ce conducteur.

Chacune de ces charges élémentaires dq subit une force :

$$\vec{dF} = dq \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = \rho dV \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Nous rappelons que le vecteur densité de courant est : $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

$$\vec{dF} = dV \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{j} \cdot S \cdot dL \wedge \vec{B}$$

Et par définition (voir chapitre électrocinétique).

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Soit $\vec{dF} = I \vec{dL} \wedge \vec{B}$

La force subit par un élément de circuit de longueur dL parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique \vec{B} appelée force de Laplace.

$$\vec{dF} = I \vec{dL} \wedge \vec{B} \quad (51)$$

Où \vec{dL} est parallèle à l'élément de circuit et dans le sens du courant .

26 Loi de Faraday.

26.1 flux magnétique

Soit un circuit fermé C , placé dans un champ magnétique.

Il y'a apparition d'un courant induit dans C lorsque le flux magnétique dans le circuit varie au cours du temps ; nous rappelons la relation permettant de calculer le flux du champ magnétique à travers une surface S :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad (52)$$

On peut obtenir un flux magnétique variable dans les deux cas suivant :

- Cas de Neumann : le champ magnétique varie au cours du temps
- Cas de Lorenz : le circuit C se déplace dans le champ \vec{B} constant et la surface S qui varie.

26.2 Induction magnétique

La création d'un courant induit est liée à une variation dans le temps du flux magnétique à traers le circuit. Nous pouvons faire une manipulation au laboratoire.

Le circuit de la figure est formé d'une bobine et un Ampère mètre plutôt un μ Ampère mètre parce le courant est d'intensité très faible et des fils qui les relie.

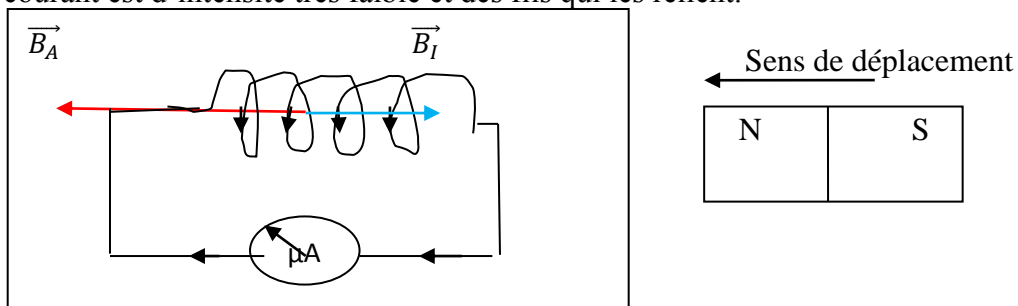


Figure 51. Loi de Lenz

Dans le 1^{er} cas, nous rapprochons un aimant de telle façon que le pôle nord est approximatif de la bobine. Le champ magnétique créé par l'aimant à l'intérieur de la bobine on le note par \vec{B}_A . Le sens de \vec{B}_A est un vecteur qui sort du pôle nord.

Lorsque nous déplaçons l'aimant vers la bobine nous observons la déviation de l'aiguille de l'Ampère mètre indiquant le passage d'un courant. Ce courant induit dans le circuit va lui aussi créer un champ magnétique induit à l'intérieur de la bobine on le note \vec{B}_I . Maintenant, pour voir le sens de \vec{B}_I , il suffit de placer la main droite en bas :

index → *sens du courant*

pouce → *sens du champ magnétique*

Nous constatons que \vec{B}_I est de sens opposé de \vec{B}_A . Le champ résultant à l'intérieur de la bobine s'écrira : $\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_A\| - \|\vec{B}_I\|$

Ce champ induit tend à diminuer la valeur de $\|\vec{B}_A\|$.

Dans le 2^{ème} cas, nous éloignons l'aimant de la bobine. La valeur de \vec{B}_A va diminuer.

Nous observons dans la manipulation que le courant change de sens par conséquent le champ magnétique induit \vec{B}_I change aussi. \vec{B}_I aura le même sens que \vec{B}_A d'après la règle de la main droite.

Le champ résultant à l'intérieur de la bobine s'écrira : $\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_A\| + \|\vec{B}_I\|$.

Ce champ induit tend à augmenter la valeur de $\|\vec{B}_A\|$.

En résumé :

La cause d'existence de ce courant induit c'est parce que nous avons déplacé l'aimant.

Ce déplacement à l'origine de la variation du champ magnétique.

Cette variation du champ magnétique qui a créé le courant induit.

Le courant induit lui-même il a créé un champ magnétique qui s'oppose toujours à la cause.

27 Loi de Faraday

Au fait, la création d'un champ magnétique dans une bobine engendre un flux magnétique Φ . La variation de ce flux magnétique induit de la loi de Faraday.

La force électromotrice (f.é.m) induite dans un circuit est égale à l'opposé de dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers ce circuit.

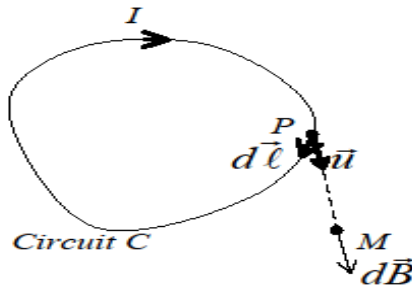
$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (53)$$

La f.é.m tend à s'opposer à la variation de flux magnétique d'où le signe (-).

La f.é.m est mesurée en volts, Φ en weber (Wb).

28 Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Soit C un circuit filiforme fermé parcouru par un courant I. Le champ élémentaire créé par $I \vec{dl}$ en un



point M est :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (54)$$

le champ total :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (55)$$

où \vec{dl} est un vecteur tangent à C en un point P quelconque du circuit, orienté dans le sens du courant.

29 Dipôle magnétique

29.1 Moment magnétique d'une distribution de courant

Le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une distribution de courant est défini de la manière suivante : Dans le cas d'un circuit filiforme fermé plan de surface S, en appelant \vec{n} le vecteur normal au plan du circuit correspondant au sens positif de l'intensité I dans le circuit, on a :

Le moment magnétique de la spire est :

$$\vec{\mu} = I \vec{S} \quad (56)$$

avec $\vec{S} = S \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur normal.

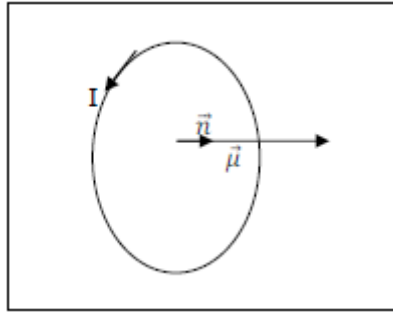


Figure 60. Circuit filiforme fermé plan de surface S parcouru par un courant I

En particulier, le moment magnétique d'une bobine comportant N spires identiques de surface S est : $\vec{\mu} = NIS$

29.2 dipôle magnétique

On appelle dipôle magnétique une distribution de courant de moment magnétique $\vec{\mu}$ non nul dont la taille caractéristique a est infiniment petite devant les autres longueurs du problème.

Exemple : atome de Bohr

Modèle classique de l'atome d'hydrogène

$$a = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}; E = -13.6 \text{ eV}; m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

29.3 Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

On admet qu'il suffit d'utiliser l'analogie déjà rencontrée dans les dipôle électrique pour en déduire le champ créé par le dipôle magnétique.

$$\vec{B} \begin{cases} \frac{2\mu_0 M \cos\theta}{4\pi r^3} \\ \frac{\mu_0 M \sin\theta}{4\pi r^3} \end{cases} \quad (57)$$

L'équation des lignes de champ donne :

$$r = cts \sin^2 \theta \quad (58)$$

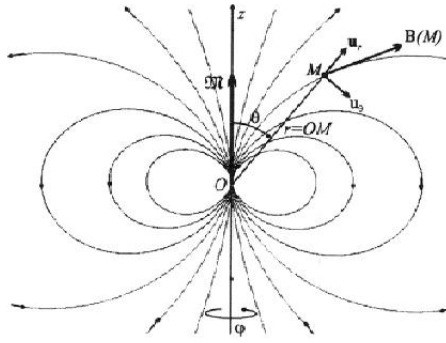


Figure 52. Une ligne de champ s'éloigne du pôle nord d'un aimant et se dirige vers son pôle sud

En un point donné, le vecteur \vec{B} est par conséquent tangent à la ligne de champ passant par ce point et orienté dans le même sens.

Références

PHYSIQUE tout-en-un pour la licence. Laurent Gautron et al DUNOD.

PHYSIQUE 2. Electricité et magnétisme, 6eme édition David Hallyday et al DUNOD.

Electricité Notion de Base, Electrostatique, Electrocinétiq ue, Electromagnétisme. Dr. Samir Khene

Table des Matières

<i>Rappels mathématiques</i>	2
1 Éléments de longueur, de surface, de volume.....	2
1.1 Coordonnées cartésiennes.....	2
1.2 Coordonnées cylindriques.....	3
1.3 Coordonnées sphériques.....	6
2 Dérivées et intégrales multiples.....	12
2.1 Dérivées.....	12
2.2 Intégrales multiples.....	13
<i>Chapitre I</i>	18
<i>Electrostatique</i>	18
1 Charges et champs électrostatiques.....	18
1.1 Charge électrique :	18
1.2 Loi de Coulomb.....	19
1.3 Principe de superposition.....	20
1.4 Champs électrostatiques.....	22
1.5 Représentation du vecteur champ électrostatique	23
1.6 Propriétés des champs de forces:	24
2 Potentiel électrostatique.....	25
2.1 Principe de superposition :.....	26
2.2 Ligne de champ et équipotentielles	26
2.3 Distribution de charge continue.....	26
3 Dipôle électrique.....	30
3.1 Définition.....	31
3.2 Potentiel créé par un dipôle électrique.....	31
<i>Chapitre II</i>	33
<i>Flux du champ électrique</i>	33
1 Définition :.....	33
2 Flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle.....	33
2.1 cas où q est à l'extérieur de la surface fermée.....	33
2.2 cas où q à l'intérieur de la surface fermée.....	34

2.3	valeur de $\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ quand \mathbf{q} est à l'intérieur de la surface fermée	35
3	Théorème de Gauss.....	35
4	Application du théorème de Gauss :	36
Chapitre III.....		38
Conducteurs en équilibre.		38
1	Conducteur et isolant à l'équilibre électrostatique.	38
1.1	Champ électrique dans les isolants	38
1.2	Champ électrique dans le conducteur	39
2	Influence subie par un conducteur isolé	40
3	Influence subie par un conducteur maintenu	41
4	L'influence totale.....	42
5	Pression électrostatique.....	42
6	Capacité d'un conducteur et d'un condensateur.....	43
6.1	Conducteur.....	43
6.2	Condensateur.	44
Chapitre IV.....		50
Électrocinétique.....		50
1	Introduction :.....	50
2	Conducteur électrique.....	50
2.1	Courant électrique.....	50
2.2	Densité de courant	51
3	LOI d'OHM	51
4	Loi de Joule.....	52
5	Les Circuits électriques.....	53
5.1	Lois de Kirchhoff.....	54
5.2	Loi des noeuds.....	54
5.3	Loi des mailles	55
6-	Application de la Loi d'Ohm aux réseaux.....	55
Chapitre V.....		58
Electromagnétisme		58
1	Introduction.....	58
2	Définition d'un champ magnétique.	58
2.1	Champ magnétique créé par une charge en mouvement	59
3	Force Magnétique.	59

3.1	Force de Lorentz.....	59
3.2	Représentation vectoriel de la force de Lorentz.....	60
3.3	Les lignes de champ magnétique.....	61
4	Loi de Laplace.....	63
5	Loi de Faraday.....	64
5.1	flux magnétique.....	64
5.2	Induction magnétique.....	64
6	Loi de Faraday.....	65
7	Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart).....	66
8	Dipôle magnétique.....	66
8.1	Moment magnétique d'une distribution de courant.....	66
8.2	dipôle magnétique.....	67
8.3	Champ magnétique créé par un dipôle magnétique.....	67
	Références.....	69

Table des figures

Figure 1.....	2
Figure 2.....	4
Figure 3.....	7
Figure 4.....	14
Figure 5.....	14
Figure 6.....	15
Figure 7.....	16
Figure 8.....	17
Figure 9.....	18
Figure 10.....	18
Figure 11.....	18
Figure 12.....	19
Figure 13.....	20
Figure 14.....	20
Figure 15.....	21
Figure 16.....	23
Figure 17.....	23
Figure 18.....	26
Figure 19.....	26
Figure 20.....	27
Figure 21.....	28
Figure 22.....	29
Figure 23.....	30
Figure 24.....	31
Figure 25.....	31
Figure 26.....	32
Figure 27.....	33
Figure 28.....	34
Figure 29.....	35
Figure 30.....	36
Figure 31.....	38
Figure 32.....	39
Figure 33.....	40
Figure 34.....	41
Figure 35.....	42
Figure 36.....	44
Figure 37.....	45
Figure 38.....	46
Figure 39.....	47
Figure 40.....	48
Figure 41.....	49
Figure 42.....	51
Figure 43.....	51

Figure 44.....	52
Figure 45.....	53
Figure 46.....	53
Figure 47.....	54
Figure 48.....	55
Figure 49.....	55
Figure 50.....	56
Figure 51.....	56
Figure 52.....	56
Figure 53.....	58
Figure 54.....	59
Figure 55.....	60
Figure 56.....	60
Figure 57.....	61
Figure 58.....	62
Figure 59.....	64
Figure 60.....	67
Figure 61.....	68