

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier la turbulence quantique (nomée aussi superfluide) à des températures finies ($1 \text{ K} < T < 2 \text{ K}$). Une question ouverte importante consiste à savoir quelles sont les similarités et différences entre la turbulence classique et la turbulence quantique. À l'état actuel, sur cette plage de température, on pense que l'essentiel de l'énergie cinétique peut être étudiée à l'aide des mêmes outils statistiques que la turbulence classique.

Ce travail de thèse est un travail essentiellement numérique. L'objectif est d'analyser le budget énergétique au sein de la turbulence quantique décrit par le modèle Hall-Vinen-Bekharevich-Khalatnikov (HVBK), en utilisant la méthode de Simulation des Grandes Échelles SGE(LES). Dans la première étape de cette thèse, les prédictions de SGE (LES) de la turbulence superfluide isotrope ont montré l'effet de la température dans les différentes grilles numériques. Les résultats trouvés sont en bonne concordance avec les différents résultats déjà trouvés en turbulence superfluide. Les spectres d'énergie de la partie normale et de la partie superfluide obéissent bien à la loi du $-5/3$ de Kolmogorov, cet état de turbulence superfluide correspond à une gamme d'échelles supérieures à l'espace entre les lignes de vortex. En outre, nous étudions les déviations à la loi KO-41 causée par les effets d'intermittence.

Une deuxième motivation de notre travail est la suivante phase du projet qui est l'objet principal de cette thèse. Cette partie a consisté à valider et approfondir numériquement l'équation d'énergie budget afin d'étudier l'effet des différents termes du modèle HVBK. Par conséquent, la comparaison des termes dans l'équation budgétaire de l'énergie cinétique spectrale indique, dans l'intervalle contenant l'énergie, que la production et le transfert d'énergie deviennent significatifs, sauf pour la dissipation. Dans la zone inertielle, où les deux fluides sont parfaitement verrouillés, la friction mutuelle peut être négligée par rapport à d'autres termes.

Mots-clés : Superfluide ^4He , Modèle de HVBK, Simulation des Grandes Échelles, Énergie budgétaire.

Abstract

The aim of this thesis is to study quantum turbulence (or superfluid) at finite temperatures ($1 \text{ K} < T < 2 \text{ K}$). An important question consists to know what are the similarities and differences between the classical and the quantum turbulence. At the current state, in this temperature range, it is believed that most of the kinetic energy can be studied using the same statistical tools that the classical turbulence.

This work is essentially numeric. The objective is to analyze the superfluid energy budget based on the Hall-Vinen-Bekharevich-Khalatnikov (HVBK) model, using a large eddy simulations (LES). First, LES predictions of freely decaying isotropic superfluid turbulence have shown the effect of different temperatures range and spatial resolutions. Our results are found to be in good agreement with recent studies already found in superfluid turbulence taken with experimental data and numerical simulations based on other models. The superfluid and normal fluid energy spectra has the Kolmogorov form. At these lowest temperatures, the relevant length scales are significantly larger than the expected spacing of quantized vortex lines. We furthermore investigate deviations from the KO-41 spectrum caused by intermittency effects.

A second motivation of our work is the following phase of the project, which is the main subject of this thesis. This part consists to use the superfluid energy budget equation in order to investigate the effect of different terms of the HVBK equations. Therefore, comparison of the terms in the spectral kinetic energy budget equation indicates, in the energy-containing range, that the production and energy-transfer effects become significant except for dissipation. In the inertial range, where the two fluids are perfectly locked, the mutual friction may be neglected with respect to other terms.

Keywords : Superfluid ^4He , HVBK model, Large eddy simulation, Energy budget

Remerciements

Etrangement, après une centaine de pages de calculs et de codes, je suis en train de sécher sur ces remerciements, comme si je n'arrivais pas, finalement, à croire que cette thèse est bien achevée.

Un grand merci à ma directrice de thèse, Merahi Leila, pour tout ce qu'il a pu m'apporter, tant sur le plan scientifique que sur le plan personnel. Je te remercie de m'avoir donné la chance de pouvoir faire cette thèse qui restera une expérience unique et enrichissante, sans ta motivation pour que cette thèse voit le jour. Merci également à Hireche Omar, mon co-encadreur. Je n'aurais jamais eu le plaisir de passer trois ans dans le cadre plus qu'enviable que constitue le laboratoire de Mécanique Appliquée. Je remercie également toute l'équipe de LMA qui m'ont fait sortir du domaine balisé de la mécanique appliquée.

Imine Omar, Nehari Driss et notamment Hamidou Mohamed Kamel, je vous suis extrêmement reconnaissant d'avoir bien voulu faire partie du jury de cette thèse - malgré mon angoisse croissante à l'idée de devoir répondre à vos questions durant la soutenance! Merci à Adjlout Houari d'avoir accepté d'être président de ce jury.

Si je devais faire une liste non-exhaustive, je pense que je pourrais jeter pêle-mêle sens physique, connaissances épistémologiques et expérimentales, anecdotes et citations plus ou moins approximatives mais toujours très heureuses - et plus que tout, une certaine confiance en moi qui m'a toujours fait défaut. Je me rappellerai encore longtemps ce moment où j'ai glissé d'une remise en cause permanente de mon travail par rapport à celui des autres au constat d'un simple désaccord sur les résultats de nos calculs respectifs.

Un grand merci à Nasri Tarek, cher amis, pour m'avoir poussée à m'affirmer et à m'épanouir dans mon travail grâce à nos conversations! Merci également à Miloud pour avoir subi sans rechigner mes questions naïves sur $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ et Beamer...

Merci à Abbassi Redouane pour son soutien, ses conseils et ses questions toujours très pertinentes, pour avoir partagé son amour inconditionnel de la science et m'avoir montré avec passion l'objet de ses recherches.

Un grand merci à mes parents, de m'avoir sans cesse rappelé, à l'approche de la soutenance, que je n'avais pas le droit de flancher et de tout quitter parce qu'un trou de trois ans sur mon CV allait vraiment être ridicule, merci d'avoir cru en moi et surtout, de m'avoir laissée trouver ma voie sans jamais rien m'imposer.

Enfin, merci Dieu. Merci de m'avoir guidé dans le sens durant notre vie, de m'avoir soutenue contre vents et marrées. Sans toi, cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

À...

To my life companion whom I have not chosen yet, To my future children.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
Table des matières	v
Liste des Figures	viii
Liste des Tables	x
Liste des symboles	xi
1 INTRODUCTION	1
1.1 Une brève introduction sur l'hydrodynamiques du Superfluide	1
1.2 Organisation du manuscrit	2
2 La Superfluidité	4
2.1 Introduction	4
2.2 Hydrodynamique de l'hélium	5
2.2.1 L'hélium cryogénique comme fluide modèle classique	5
2.2.1.1 Extraction de l'hélium	6
2.2.1.2 Applications de l'hélium	7
2.2.2 Diagramme de phase de l'hélium	8
2.2.3 Propriétés thermodynamiques	10
2.2.4 Equations thermodynamiques de l'hélium superfluide	12
2.2.4.1 Contre-courant	13
2.2.4.2 Vitesse critique	15
2.2.4.3 Interaction	15
2.2.5 Premier et second sons de l'He II	16
3 Turbulence	19
3.1 Introduction	19
3.2 Cascade de Richardson	21
3.3 Au delà de Kolmogorov 1941	23
3.4 L'intermittence interne	25

3.5	Le budget d'énergie spectrale	28
3.6	Turbulence quantique et turbulence classique	30
3.6.1	Théories de la turbulence superfluide	32
3.6.2	Quelques travaux expérimentaux et Numériques en turbulence superfluide	33
4	Equations hydrodynamiques du superfluide : Modèle HVBK	38
4.1	Equations de base ; Modèle à deux fluides de Landau	38
4.1.1	Equations du mouvement HVBK	40
4.1.2	Force de friction mutuelle :	42
4.1.3	Equations de Vinen	43
4.1.4	Le modèle HVBK simplifié	44
5	Modélisation mathématique	46
5.1	Equations de Navier Stockes	46
5.2	Modélisation statistique de la turbulence	47
5.2.1	Simulation Numérique Directe <i>DNS</i>	48
5.2.2	RANS	48
5.2.3	URANS	49
5.3	Simulation des Grandes Echelles <i>LES</i>	50
5.3.1	Principe	50
5.3.2	Filtrage passe-bande	52
5.3.3	Formulation discrète	54
5.3.3.1	Problème de Fermeture	55
5.3.4	La modélisation sous-maille	55
5.3.5	Modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij}	56
5.3.5.1	Modèle de Smagorinsky	57
5.3.5.2	Modèle WALE	58
5.3.5.3	Modèles de la fonction de structure	59
5.3.5.4	Modèles utilisant l'énergie cinétique sous-maille	59
5.3.5.5	Modèles d'échelles mixtes	60
5.3.6	Modèles structurels	60
5.3.6.1	Les modèles à équations de transport	60
5.3.6.2	Les modèles de similarité d'échelles	60
5.3.7	Modèles mixtes	60
5.4	Les modèles dans l'espace spectral	61
5.4.1	Principes de la méthode spectrale pour les équations aux dérivées partielles	62
5.4.1.1	Sommes de Convolution	62
5.4.1.2	Méthodes pseudo-spectrales	62
5.4.1.3	Erreurs numériques : erreurs d'aliasing	63
5.4.2	Discrétisation temporelle- Méthode de Runge Kutta	64
5.4.3	Exemple de la turbulence homogène	64
6	Analyse numérique du budget d'énergie spectrale en turbulence spectrale	66
6.1	Introduction	66
6.2	L'énergie spectrale	69

6.2.1	Viscosité effective	70
6.2.2	Déviation de Kolmogorov $k^{-5/3}$	71
6.2.3	Effets de la température et le mode de résolution	73
6.3	Cascade d'énergie et l'intermittence	74
6.3.1	Turbulence Superfluide est aussi intermittente ?	74
6.3.2	Mise en évidence	75
6.3.2.1	L'écart du KO-41	75
	Viscosité effective dans la cascade	75
6.3.3	Conclusion	76
6.4	Le budget d'énergie spectrale en turbulence quantique	77
6.4.1	L'équation de l'équilibre	77
6.4.1.1	Termes de production et le transfert d'énergie	77
6.4.1.2	Terme de dissipation	78
6.4.2	Influence des différents termes	78
6.4.2.1	La production, le transfert d'énergie et la dissipation	78
6.4.2.2	Force de friction mutuelle	82
6.4.2.3	Force de la tension	82
6.4.3	Analyse et discussions	82
6.5	L'énergie spectrale sans le terme de friction mutuelle	85
6.5.1	L'énergie budgétaire ; L'absence de la friction mutuelle	86
6.5.2	Conclusions	88
	CONCLUSION GÉNÉRALE	90
	Publications	91
	Références	92

Liste des Figures

2.1	Nous maintenons le plus grand système de production et de distribution d'hélium du monde	6
2.2	Diagramme de phase de ^4He (D'après Brooks & Donnelly [?]).	8
2.3	Effet fontaine photographié par J.F. Allen en 1971.	9
2.4	Film de Rollin (ou effet Onnes) photographié par Alfred Leitner pour son film "liquid Helium ; Superfluid" en 1963.	10
2.5	À droite : Évolution de la masse volumique en fonction de la température à 0,1 MPa. À gauche : Évolution de l'entropie en fonction de la température à 0,1 MPa (donné par Baudouy [21]).	11
2.6	À droite : Capacité thermique de l'hélium (à pression de vapeur saturante) avec une divergence à $T_\lambda \approx 2.14\text{K}$ (Par Donnelly & Barenghi [41]). À gauche : Evolution de la viscosité en fonction de la température à 0,1 MPa (donné par Baudouy [21]).	11
2.7	Fraction relative des composantes normale et superfluide.	13
2.8	Vitesse du premier son c_1 et du second son c_2 en fonction de la température à pression de saturation obtenus en utilisant la base de données thermodynamiques HePack [44].	14
2.9	Exemple de signal de vitesse local obtenu dans un écoulement turbulent (cas un jet d'hélium gazeux [30]) et son analyse spectral (densité spectrale de puissance).	18
3.1	À gauche : Étude sur les turbulences par <i>Léonard de Vinci</i> . À droite : Turbulence générée en aval d'une grille (en haut) et jet axi-symétrique (en bas). Source : [134].	20
3.2	Énergie dissipée à petite échelle	22
3.3	Temps-Évolution d'énergie dans le pseudo-spectrale basée sur une Simulation des Grandes Échelles SGE (LES) effectuée par Lesieur et Rogallo [77], en commençant d'abord avec les spectres de k^4 à faible k . La résolution est de modes 128^3 (avec la permission <i>physique des fluides</i>).	27
3.4	Pour turbulence homogène au nombre très élevé Reynolds, les courbes de (a) sont les spectres de l'énergie et de la dissipation, (b) les contributions à l'équation de l'équilibre pour $E(k, t)$ (Eq. 3.19), et (c) le taux de le transfert d'énergie spectrale (B. Pope [48], p. 251)	29
5.1	Représentation schématique de la différence entre DNS, RANS et LES	49
5.2	Représentation schématique de la séparation des échelles en SGE.	50
5.3	Principe du filtrage en LES dans l'espace fréquentiel sur le spectre d'énergie cinétique et comparaison avec les approches RANS et DNS	51
5.4	Transfert d'énergie	58

6.1	La viscosité effective spectrale, le mode de résolution 128^3 ; basé sur la Simulation des Grandes Échelles SGE (LES), Eq. 6.7.	71
6.2	Temps-évolution des spectres d'énergie superfluide pour une large gamme de température ($1 \leq T \leq 2.1$ K), dans un LES avec 128^3 modes utilisant des méthodes pseudo-spectrale et la viscosité effective spectrale (voir Fig. 6.1). La ligne verticale en pointillés marque k_c . Le calcul est initialisé avec des champs de vitesse solénoïdales à la fois pour la composante normale et superfluide, qui sont générés suite à la méthode de Rogallo [118]. Un troisième ordre de la méthode de Runge-Kutta est utilisé pour l'intégration dans le temps. Un dealiasing est réalisée en utilisant la règle habituelle $2/3$	72
6.3	Analyse numérique d'énergie superfluide dans des différentes modes de résolutions à $t \simeq 13$, pour une température aussi basse que 1,6 K. La ligne pointillée est le spectre initial.	73
6.4	Énergie spectrale superfluide compensé par $k^{5/3}E(k)$ avec la correction de l'intermittence. La ligne verticale en pointillés marque k_c . Ces simulations sont faites à la température $T = 1, 1,6$ et $2,1$ K	76
6.5	Tracé log-linéaire des termes dans le budget de l'énergie spectrale $E(k, t)$ par rapport à nombre d'onde k , à $1,6 \text{ K} < T_\lambda$. Superfluide : évolution des différents termes la production (P_k), le transfert spectrale (T_k) et la dissipation (D_k), les équations. Eq. 6.10, 6.11 and 6.12. La ligne verticale pointillée marque k_c	79
6.6	Transfert d'énergie spectrale de la partie superfluide calculé avec SGE (LES). La ligne verticale pointillée marque k_c	80
6.7	Consideration d'un bilan énergétique : (a)l'énergie $E(k)$ et les spectres de dissipation $D(k)$ à la température $T = 1$ K, respectivement. La ligne verticale pointillée marque k_c	81
6.8	Consideration d'un bilan énergétique : (b)Énergie $E(k)$ & Spectres de dissipation $D(k)$ à la température 1,6 K. La ligne verticale pointillée marque k_c	81
6.9	(a) Superfluide : Contribution de la force de friction mutuelle pour les deux composants des fluides, Eq. 6.13 à $T = 1, 1,6$ et $2,1$ K.	83
6.10	(b) Normal fluide : Contribution de la force de friction mutuelle pour les deux composants fluides, Eq. 6.13 à $T = 1, 1,6$ et $2,1$ K.	83
6.11	Contribution de la tension \mathbf{T} Eq. 6.15, à basse température de $1.6 \text{ K} < T_\lambda$	84
6.12	L'énergie spectral "avec" et "sans" frottement mutuel en 128^3 modes de résolution (Calcul en SGE (LES)), à basses températures $T = 1.6$ K.	85
6.13	La dissipation : $D_k(k, t)$, Eq. 6.12, à basse température de $T = 1.6$ K.	86
6.14	Le transfert d'énergie spectrale : $T_k(k, t)$ Eq. 6.11, à basse température de $T = 1.6$ K.	87
6.15	Contribution de la tension : \mathbf{T} Eq. 6.15, à basse température de $T = 1.6$ K.	87
6.16	La vortisité du superfluide : $\omega_s = \text{curl}V_s$, à basse température de $T = 1.6$ K.	88

Liste des Tables

2.1	Viscosité cinématique ν de quelques fluides.	6
2.2	Quelques valeurs de vitesse du second son, c_2 , et d'entropie par unité de masse d'He II, s , pour quelques températures (correspondant à différentes fractions superfluide ρ_s/ρ), à la pression de vapeur saturante.	17
4.1	Coefficients de frottements	42

Liste des symboles

k	Nombre d'onde
k_c	Nombre d'onde de coupure
T	Température
T_λ	Température de transition
t	Temps de calcul
ρ	Densité totale
ρ_n	Densité de la partie normale
ρ_s	Densité de la partie superfluide
v_s	Vitesse du superfluide
v_n	Vitesse du normale fluide
ν	viscosité cinématique
ν_n	Viscosité cénitique du normale fluide
ν_s	Paramètre de tension de vortex
ν_e	Viscosité effective
S	Entropie
p	Pression
p_n, p_s	Pressions effectives
ω_s	Vorticité du superfluide
$\hat{\omega}_s$	Vecteur unitaire dans la direction du tourbillon superfluide
L	Densité de la ligne de vortex
L_0	Échelle caractéristique
δ	Distance inter-vortex
\mathbf{F}_{ns}	Force de friction mutuelle
B, \acute{B}	Coefficients de friction mutuelle
\mathbf{T}	La force de tension de vortex
Γ	Circulation quantique
\hbar	Constante de Planck
m	Masse de l'atome d'hélium
a_0	Paramètre de noyau de tourbillon

b_0	Espacement de tourbillon inter
C	Capacité thermique
κ	Conductivité thermique de l'hélium
c_1	Vitesse du premier son
c_2	Vitesse second son
ζ	Exposant d'échelle intermittent
P_k	Production
T_k	Transfert d'énergie
D_k	Dissipation
$\overline{f_1}, \overline{f_2}$	Réactives et dissipatives de la force de friction mutuelle
\wp	Contour fermé quelconque
ϵ	Taux de dissipation
Π	Tenseur d'ordre 2 de densité de quantité de mouvement
ξ	Longueur de l'arc
v_L	Vitesse de l'enchevêtrement
\mathbf{q}	Vecteur anisotropie
J	Densité de flux de masse
E	Énergie cinétique
η	Viscosité dynamique
μ	Potentiel chimique
Re	Nombre de Reynolds
λ_f	Micro échelle de Taylor
L_f	Macro échelle ou échelle de turbulence
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
P_{ij}	Opérateur de projection
G	filtre
ϕ	Variable
n	Entier

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Une brève introduction sur l'hydrodynamiques du Superfluide

À très basse température, l'Hélium liquide subit une transition de phase de deuxième espèce et passe à l'état superfluide. L'atmosphère ne contient que des traces d'hélium (0,0005 %) ce qui rend une extraction à partir de l'air très coûteuse et pas du tout rentable. C'est pourquoi, l'hélium est extrait exclusivement à partir de sources de gaz naturel riches en hélium (teneur sup. 2%). Ces sources de gaz naturel riches en hélium n'existent qu'à très peu d'endroits sur la terre qui présentent des conditions géologiques particulières. Le deuxième exportateur mondial après l'Etats-Unis, c'est l'Algérie, où l'hélium est produit lors de la liquéfaction du gaz naturel, pour les applications cryogénique (Technique de mesure, Médecine, Recherche et développement, Technologie et applications industrielles...). Au dessus $T_\lambda \simeq 2.17$ K (à la pression de vapeur saturante), la phase liquide de l' ^4He constitue un fluide classique appelé He I. Son comportement hydrodynamique est semblable à celui de l'air ou de l'eau. Lorsque l' ^4He est refroidi en dessous de $T_\lambda \simeq 2.17$. il subit une transition de phase. La nouvelle phase, appelée He II, ou parfois "superfluide", a un comportement exotique d'origine quantique.

Lorsque l'He II est fortement brassé, cela produit un enchevêtrement (ou pelote) de lignes de tourbillons quantiques. Ce type d'écoulement est appelé "turbulence quantique" ou "turbulence superfluide". Une question ouverte consiste à savoir comment cette turbulence se compare à la turbulence des fluides classiques, et notamment s'il existe une hiérarchie d'échelles et une cascade d'énergie similaire à celle proposée par Richardson pour les fluides classiques.

Plusieurs mesures expérimentales ont montré des similarités entre la turbulence

quantique et la turbulence classique (perte de charge, traînée) et quelques différences (spectre de vorticité). En 1998, Maurer & Tabeling [89] ont réalisé la première mesure locale de fluctuations de vitesse. Elle a montré que le spectre de vitesse d'un écoulement d'He II turbulent pouvait être compatible avec la prédiction classique de Kolmogorov en $f^{-5/3}$. Considérant que la turbulence dans les fluides normales est étudiée sur la terre ferme de l'équation de Navier-Stokes, il n'y a pas d'équation établie comme pour l'hélium II turbulent. Des simulations numériques existants (Baggaley et Barenghi[12]; Adachi et al.[2]) de la turbulence quantique suivent l'approche de Schwarz [129], qui a calculé les propriétés de l'enchevêtrement de vortex en intégrant dans le temps le mouvement d'un grand nombre de filaments de tourbillons individuels en présence d'un fluide normal prescrit, en négligeant la réaction arrière du superfluide sur le fluide normal.

1.2 Organisation du manuscrit

Cette thèse est divisée en six chapitre :

La première partie de ma thèse traite entièrement la turbulence quantique (superfluide) isotrope homogène. Dans le chapitre (2), je vous présente quelques propriétés physiques de l'Hélium à basse température, ses sources et ses applications industrielles. Ensuite, dans le chapitre (3), je présente quelques généralités sur la turbulence dans les fluides classiques puis sur la turbulence quantique. J'ai introduit le problème de la turbulence en présentant le modèle de Kolmogorov K41, le phénomène de l'intermittence statistique, l'énergie budgétaire, le modèle hydrodynamiques HVBK (dans le chapitre (4)). On verra que l'utilisation de l'hélium à des températures cryogéniques comme un fluide de travail permet d'atteindre des régimes d'écoulements turbulents dans des conditions expérimentales et techniques favorables. De plus, l'utilisation de l'hélium liquide à des températures inférieures à la température de transition T_λ (2.17 K à pression de saturation) ouvre la porte du domaine de la superfluidité et de la turbulence quantique où les contraintes imposées par la mécanique quantique laissent prévoir des comportements différents de ceux observés dans la phénoménologie classique de la turbulence. Les méthodes numériques sont abordées au chapitre (5). Ce chapitre est consacrée à la présentation des nombreuses composantes nécessaires à l'élaboration du modèle numérique proposé ainsi qu'à la résolution du problème discret associé, les modèles de turbulence et la modélisation des écoulements turbulents à surface libre. La turbulence est modélisée par la Simulation des

Grandes Échelles SGE (*Large Eddy Simulation*, LES), ainsi qu'une étude bibliographique sur les modèles sous-maille dynamiques et thermiques. Dans le dernier chapitre (6), nous choisissons d'appliquer de nouveau pour la turbulence superfluide, méthode de simulation des grandes échelles, bien connu dans la turbulence classique. Cela permet d'obtenir de nouvelles informations, intéressant pour la communauté de turbulence superfluide. Dans ce chapitre, nous allons montré que le modèle HVBK est idéal pour étudier la dynamique de liquide superfluide couplés et normal dans la limite de la turbulence intense à température finie. Nos travaux numériques constituent les premières simulations, dans la section 6.2, rendant compte d'une gamme de température finis, en prenant compte le mode des grilles numériques, donne un bon résultat numérique. Aussi, nous avons montré que la turbulence superfluide est aussi intermittent dans la section 6.3. Cela suggère que l'intermittence dans l'hélium superfluide est comparable à l'intermittence qui existe dans un fluide classique. Ma contribution dans la section 6.4 consiste à utiliser le modèle de HVBK pour étudier le budget de l'énergie spectrale dans le superfluide. Le modèle de HVBK est plus sophistiqué que *Shell model*, si nous comparons les résultats de HVBK contre les résultats de Wacks et Barenghi (2011)[89].

Chapitre 2

La Superfluidité

2.1 Introduction

La conductivité thermique exceptionnelle de l'hélium liquide superfluide (en dessous de 2,17 K) permet un refroidissement très efficace avec de faibles gradients thermiques ; la conductivité du superfluide est plusieurs milliers de fois plus importante que celle du cuivre. Cette particularité est largement utilisée dans les grands accélérateurs de particules pour le refroidissement des bobines supraconductrices (productrices de champ magnétique intense), des cavités et des détecteurs, par exemple dans le collisionneur LHC (au CERN). À une échelle plus petite, les propriétés thermiques uniques de l'hélium superfluide sont mises à profit pour le fonctionnement des réfrigérateurs à dilution. Dans tous ces dispositifs, l'évacuation de la chaleur par l'hélium superfluide est cependant limitée par l'apparition dans le superfluide d'un bain turbulent de vortex quantiques, appelé vortex tangle, qui réduit la conductivité thermique du superfluide et, de ce fait, ses capacités de refroidissement. Ce phénomène résulte de la mise en mouvement naturelle du superfluide au contact d'une source chaude, sous la forme d'un écoulement de contre-courant. Les propriétés de transport thermique en présence d'un bain turbulent de vortex quantiques ont été "caractérisées" dans des géométries d'intérêt pratique mais les conditions d'apparition de ce bain de vortex échappent toujours à une compréhension théorique. En particulier, aucun des modèles proposés jusqu'à présent (par exemple, les modèles basés sur un nombre de Reynolds de transition ou sur une vitesse critique) ne permettent de rendre compte quantitativement des expériences menées sur une grande plage de diamètres et géométries de conduite. Un enjeu important est donc de mieux comprendre l'établissement de cette "turbulence superfluide" afin de mieux la contrôler dans les applications industrielles.

2.2 Hydrodynamique de l'hélium

L'hélium a été découvert pour la première fois dans le spectre de raies du soleil en 1868 et baptisé "hélium" en 1871 dans un article de Kelvin. Il fait partie des gaz rares et possède deux isotopes stables He^3 et He^4 . Nous nous intéressons seulement à He^4 formé de bosons. L'hélium n'a été observé sur terre qu'en 1895 et a été considéré pendant longtemps comme étant inliquéfiable. De fait, il fut le dernier gaz à être liquéfié en 1908 par Kamerlingh Onnes [108]. La difficulté majeure est due à l'extrême petitesse des forces de Van der Waals, couplée au haut degré de symétrie de l'atome d'hélium. De nombreux expérimentateurs ont mis en évidence les propriétés exceptionnelles de l'hélium He II comme le célèbre effet fontaine (Allen et Jones, 1938 [5]) et l'écoulement à faible vitesse sans viscosité à travers un capillaire (Kapitza, 1938[64]). Cette phase réunit tous les aspects pour être nommée "superfluide".

2.2.1 L'hélium cryogénique comme fluide modèle classique

De tous les fluides cryogéniques, l'hélium présente un comportement proche de celui d'un fluide idéal, ceci étant dû en grande partie aux faibles valeurs de l'énergie d'interaction moléculaire. La plupart de la thermodynamique de l'hélium liquide peut être traitée de façon classique, mais des anomalies dans les propriétés physiques sont observables pour des températures inférieures à certaines valeurs critiques. Il est utile de rappeler brièvement quelques propriétés de l'hélium afin de mieux comprendre les modèles phénoménologiques permettant de décrire la thermodynamique de l'hélium.

Pour obtenir des nombres de Reynolds comparables à ceux des écoulements naturels, une solution consiste à utiliser un fluide dont la viscosité est beaucoup plus faible que celle de l'air ou de l'eau, notamment l'hexafluorure de soufre (SF_6) pressurisé ou l'hélium cryogénique qui est le fluide dont la viscosité est la plus faible de tous les fluides connus (le tableau 2.1).

L'utilisation d'hélium cryogénique gazeux comme fluide de travail a permis de réaliser des expériences pouvant atteindre les plus grands Reynolds accessibles en laboratoire et les plus résolues spatialement et temporellement notamment une expérience dans une configuration Von Karman¹. L'hélium cryogénique est donc un fluide très bien adapté à l'étude de la turbulence à très grand nombre de Reynolds.

1. Il s'agit d'une cellule dans laquelle le fluide est brassé entre deux pales contra-rotatives.

TABLE 2.1: Viscosité cinématique ν de quelques fluides.

Fluide	T(°K)	p (bar)	$\nu = \eta/\rho(m^2/s)$
Air	293	1	$1,0 \times 10^{-5}$
Eau	293	1	$1,0 \times 10^{-6}$
SF_6	300	15	$1,5 \times 10^{-7}$
$He_{(g)}$	4.3	1	$7,4 \times 10^{-8}$
$He_{(l)}$	4.2	1	$2,6 \times 10^{-8}$

2.2.1.1 Extraction de l'hélium

L'atmosphère ne contient que des traces d'hélium (0,0005 %) ce qui rend une extraction à partir de l'air très coûteuse et pas du tout rentable. C'est pourquoi, l'hélium est extrait exclusivement à partir de sources de gaz naturel riches en hélium (teneur sup. 2%). Ces sources de gaz naturel riches en hélium n'existent qu'à très peu d'endroits sur la terre qui présentent des conditions géologiques particulières. Actuellement, l'hélium est extrait à partir de gaz naturel aux Etats-Unis, en Russie, en Algérie, au Qatar et dans une source plus petite en Pologne. Sur tous ces sites, de grands liquéfacteurs d'hélium sont exploités (voir Fig. 2.1).



FIGURE 2.1: Nous maintenons le plus grand système de production et de distribution d'hélium du monde

Le deuxième exportateur mondial, c'est l'Algérie, où l'hélium est produit lors de la liquéfaction du gaz naturel. La première usine d'hélium est située à Arzew.

Cette plante, connue comme *Helios*, est une joint-venture entre Sonatrach (51%) et HELAPS Sa (49%). HELAPS SA est une joint-venture entre Air Liquide (50%) et Air Products (50%). L'usine *Helios* est situé dans le complexe (GNL) de gaz naturel liquéfié d'Arzew GL2/Z. Le succès de l'usine *Helios* a rapidement mené à la construction d'une autre installation connue comme la plante *Helison* qui est une joint-venture entre Sonatrach (49%) et Linde (51%). Cette usine est située à l'installation de GNL GL1/K de Skikda. La production de l'hélium est aujourd'hui encore bien au delà des capacités, mais l'Algérie produit moins de ce gaz naturel, expédié par bateau, depuis que l'Europe a ralenti sa consommation de gaz, ce qui fait chuter d'autant les quantités d'hélium algérien.

2.2.1.2 Applications de l'hélium

Pour de nombreuses applications, on ne peut plus se passer d'hélium grâce à ses caractéristiques particulières, l'hélium peut aussi être utilisé pour des applications très spécifiques.

Applications avec de l'hélium gazeux : - Technologie de soudage et de coupage (gaz de protection, gaz d'assistance pour le coupage au laser) - Technologie du laser (gaz résonnant) - Technique de mesure (gaz vecteur et gaz de balayage en chromatographie gazeuse, gaz d'étalonnage en analytique) - Plongée (composant de gaz respirable dans mélanges de gaz de plongée) - Fluide frigorigène pour réacteurs et générateurs, par ex. lors de la fabrication de fibres optiques - Traitement thermique de métaux ou de composants - Gaz ascensionnel, pour ballons (veille météorologique, sport) et aéronefs

Applications avec de l'hélium liquide cryogénique : - Technique de mesure (analyse de résonance magn. nucléaire (NMR), fluxmètre supraconducteur, refroidissement de palpeurs)- Médecine (tomographie à résonance magnétique nucléaire, magnéto-encéphalographie) - Recherche et développement (fusion nucléaire et physique des particules, cryophysique, réservoirs d'énergie supraconducteurs, matériaux et palpeurs supraconducteurs, étude des matières sous cond. cryogéniques, analyses de matériaux) - Technologie et applications industrielles (séparateur de champ magnétique puissant, génération de vides poussés, stabilisation magnétique par fusion)

2.2.2 Diagramme de phase de l'hélium

Pour décrire l'ensemble des propriétés thermodynamiques de l'hélium, il est utile de se référer à son diagramme de phase présenté sur la Fig. 2.2 dans le plan p-T. En plus des propriétés habituelles d'un fluide peu visqueux certaines particularités sont à noter. L'hélium présente le point critique le plus bas avec $p_c=0,223$ MPa et $T_c=5,2$ K. L'hélium reste en phase saturée à la pression atmosphérique pour

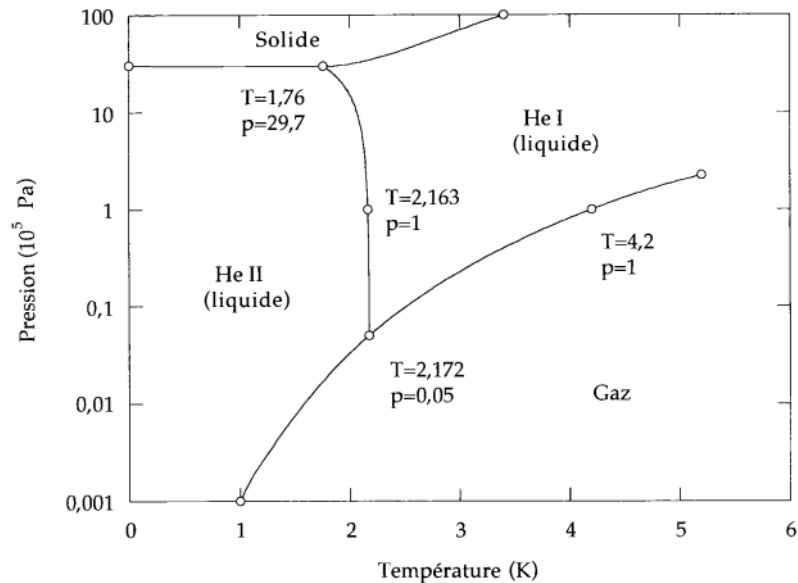


FIGURE 2.2: Diagramme de phase de ^4He (D'après Brooks & Donnelly [27]).

une température de 4,2 K (point d'ébullition normal) et si la pression de vapeur saturante diminue, il reste dans une phase saturée sans jamais atteindre la solidification même pour des températures proches du zéro absolu. Cette propriété est déterminante pour révéler la nature quantique de l'hélium. En effet, les énergies d'interaction moléculaire étant très faibles comparées aux énergies cinétiques, la cohésion des molécules d'hélium faisant apparaître un état solide n'est possible que si l'on exerce des pressions supérieures à 2,5 MPa. Ceci explique l'absence d'un point triple de première espèce. La particularité de l'hélium est que l'on retrouve sa phase liquide sous deux états. L'hélium normal ou He I est un fluide classique, au sens newtonien du terme, dont les caractéristiques de transport sont proches de celles d'un gaz et l'état "superfluide" ou He II qui présente des caractéristiques thermodynamiques remarquables comme la quasi-nullité de la viscosité ou la forte valeur de la conductivité thermique apparente qui peut être de plusieurs ordres de grandeur plus grande que celle des meilleurs conducteurs solides à ces températures. Les deux phases liquides sont séparées par la "ligne λ ". Cette désignation

provient de l'allure de la courbe de la chaleur spécifique en fonction de la température. À la pression de vapeur saturante, les coordonnées du point de transition λ sont $p_\lambda=0,005$ MPa et $T_\lambda=2,172$ K. La température de transition diminue lorsque la pression augmente jusqu'à atteindre une valeur de 1,76 K environ pour $p_\lambda=2,9$ MPa (Fig. 2.2) .

Cet état de la matière a été obtenu pour la première fois par Heike Kamerlingh Onnes² dans les années 1920 [108]. L'existence d'une transition de phase, parfois appelée transition "lambda" à cause de la forme de la courbe de chaleur spécifique qui diverge au passage de la transition et dont la forme évoque la lettre grecque λ , a été mise en évidence par l'étudiant de H.K. Onnes, Willem Hendrik Keesom à Leiden en 1927 [65]. La phase obtenue pour $T < T_\lambda$ est appelée He II.

Ce nouvel état de la matière possède des propriétés étonnantes. On constate no-

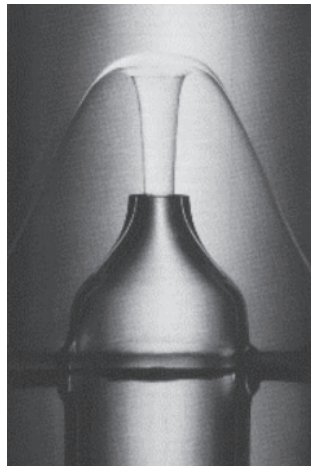


FIGURE 2.3: Effet fontaine photographié par J.F. Allen en 1971.

tamment qu'il transporte très efficacement la chaleur (c'est la raison pour laquelle il est utilisé pour refroidir les aimants supraconducteurs dans les accélérateurs de particules. Cela se traduit notamment par la disparition soudaine des bulles lors de la transition de phase dans un cryostat refroidi par pompage. De plus, H.K. Onnes [108] avait remarqué qu'à très basse température, le niveau d'hélium liquide dans un bûcher partiellement plongé dans le bain s'égalait avec le niveau du bain. Ce phénomène est possible par l'existence d'un écoulement de matière le long des parois (parfois appelé "effet Onnes" en hommage à la première observation par H.K. Onnes [108]). Cet effet de transport a été mis en évidence et interprété en 1939 par Bernard V. Rollin et F. Simon [119], et étudié systématiquement par J.G. Daunt et K. Mendelssohn [38]. Ainsi, lorsqu'on place un bûcher rempli d'hélium II

2. Heike K. Onnes est lauréat du prix Nobel 1913 pour ses études des propriétés de la matière à basse température. Il est le premier à avoir liquéfié l'hélium, qu'il a refroidi jusqu'à 0.9 K.

au dessus du bain, le liquide s'écoule sous forme d'un film qui recouvre les parois, forme des gouttes sous le bêcheur qui finissent par retomber dans le bain. La vitesse de remplissage (ou de vidage) du bêcheur dépend uniquement de la température (vitesse nulle à T_λ et qui augmente lorsque la température diminue). Cette vitesse ne dépend pas de la différence de potentiel gravitationnel, et de ce fait, permet d'exclure un mécanisme de siphon classique.

Les expériences d'écoulement réalisées en 1937 par Pyotr Kapitza [64] d'une part, et par John F. Allen et Don Misener [4] d'autre part, semblent indiquer que l'He II ne possède aucune viscosité. Par analogie avec la supraconductivité, P. Kapitza³ a proposé d'appeler cet état de la matière "superfluide". En particulier, les mesures d'écoulement dans des capillaires se révèlent sensiblement indépendantes de la pression appliquée et du diamètre du capillaire, ce qui n'est possible qu'en absence de viscosité. D'autre part, la même année, John F. Allen et Harry Jones [5] découvrent l'effet "fontaine" dans l'He II : un flux de chaleur appliqué à l'extrémité d'un tube bouché par un matériau poreux conduit à un écoulement stationnaire de liquide (voir Figs. 2.3 et 2.4 pour une illustration de l'effet "fontaine" et de l'effet "Onnes").

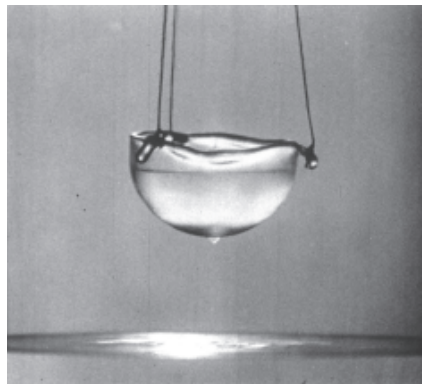


FIGURE 2.4: Film de Rollin (ou effet Onnes) photographié par Alfred Leitner pour son film "liquid Helium; Superfluid" en 1963.

2.2.3 Propriétés thermodynamiques

Pour des températures supérieures à T_λ , la masse volumique de l'hélium liquide diminue lorsque la température croît comme c'est le cas pour les fluides classiques. Par contre pour des températures inférieures à T_λ , elle croît lorsque la température croît (Fig. 2.5). L'évolution de la chaleur spécifique est équivalente puisque

3. P. Kapitza a obtenu le prix Nobel pour ses découvertes en physique des basses températures en 1978.

que pour des températures inférieures à 0,6 K la dépendance en température est cubique alors que pour des températures supérieures elle s'apparente entre 0,6 K et 1 K puis entre 1 K et T_λ (Fig. 2.6 à droite). A la pression de vapeur saturante, la transition λ est une transition de seconde espèce sans chaleur latente de transformation entre He I et He II.

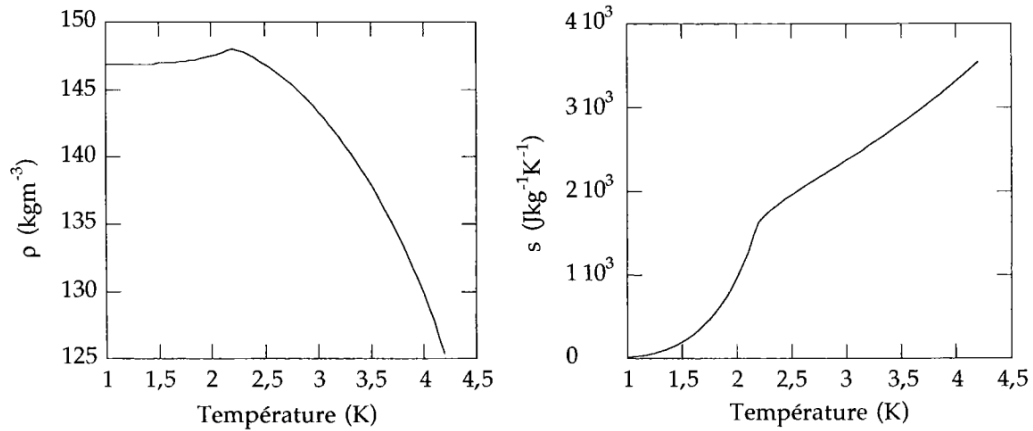


FIGURE 2.5: À droite : Évolution de la masse volumique en fonction de la température à 0,1 MPa. À gauche : Évolution de l'entropie en fonction de la température à 0,1 MPa (donné par Baudouy [21]).

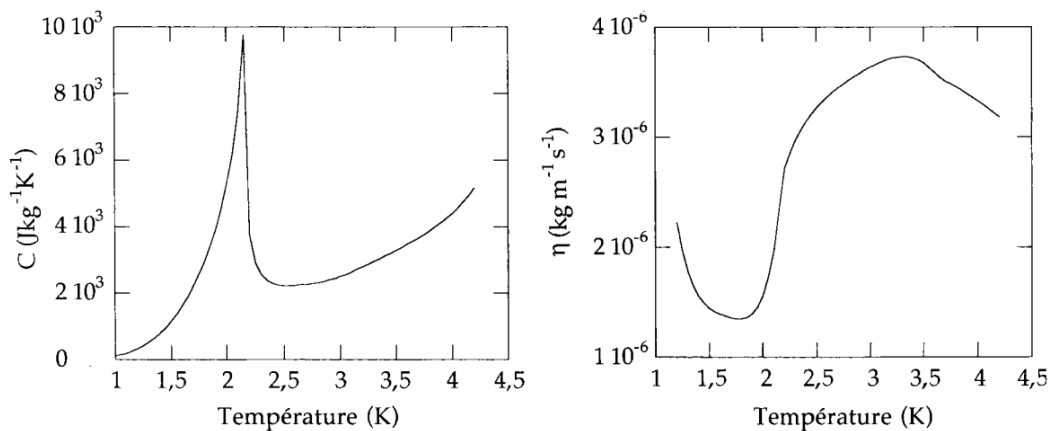


FIGURE 2.6: À droite : Capacité thermique de l'hélium (à pression de vapeur saturante) avec une divergence à $T_\lambda \approx 2.14\text{K}$ (Par Donnelly & Barenghi [41]). À gauche : Evolution de la viscosité en fonction de la température à 0,1 MPa (donné par Baudouy [21]).

Aux températures de l'He I, l'hélium possède une viscosité qui se rapproche plus de celle d'un gaz que de celle d'un liquide. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour mesurer la viscosité en He II. La méthode du viscosimètre à perte de charge en régime laminaire à travers un tube de petit diamètre et la mesure de l'amortissement des oscillations d'un disque en rotation sont les principales méthodes utilisées.

Pour un fluide classique les résultats sont identiques par les deux méthodes alors que pour l'He II des résultats différents ont été obtenus. Par la méthode de l'écoulement laminaire la valeur de la viscosité a été estimée inférieure à $10^{-10} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ voire nulle alors qu'avec la méthode utilisant un disque oscillant elle se rapproche de $10^{-6} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ et varie en fonction de la température (Fig. 2.6 à gauche). Cette contradiction expérimentale est à l'origine du modèle à deux fluides où l'He II est supposé être composé d'un "fluide" dit normal et visqueux et dans ce cas l'expérience du disque oscillant mesure sa viscosité, et d'un "fluide" dit superfluide possédant une viscosité quasiment nulle. C'est cette dernière viscosité qui est déterminée dans l'expérience de l'écoulement à travers des canaux de faibles dimensions où le fluide normal visqueux interagit avec la paroi et reste immobile.

2.2.4 Equations thermodynamiques de l'hélium superfluide

Une interprétation microscopique a été proposée par Fritz London [83] dès 1938 : la transition superfluide peut être vue comme une condensation de Bose-Einstein où une fraction macroscopique des atomes d'hélium sont dans un seul état quantique. Cependant, contrairement à un gaz de Bose, il existe des interactions importantes entre les atomes. La description actuelle de l'He II à température finie a été proposée par Laszlô Tisza et Lev Landau⁴ en 1941 [72] : le système se comporte comme une superposition de deux "fluides" ou deux "composantes". La composante "normale" est constituée par les excitations thermiques (phonons et rotons) et concentre toute l'entropie du système. La composante "superfluide", sans entropie, provient de l'état quantique fondamental du système.

Macroscopiquement, la composante "normale" se comporte comme un fluide visqueux classique. La composante "superfluide" se comporte comme un fluide quantique non visqueux. Les deux composantes sont couplées par une force de friction mutuelle (proposée par Gorter et Mellink en 1949 [51]). On note ρ_s et ρ_n les densités respectives de la composante superfluide et de la composante normale. La densité totale ρ est donnée par

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad (2.1)$$

La fraction relative de superfluide ρ_s/ρ augmente lorsque la température diminue : $\rho_s/\rho = 0$ à T_λ et $\rho_s/\rho = 1$ dans la limite $T = 0$ (voir Fig. 2.7).

4. Lev Landau a obtenu le prix Nobel en 1962 pour ses travaux en matière condensée et notamment sur l'hélium liquide.

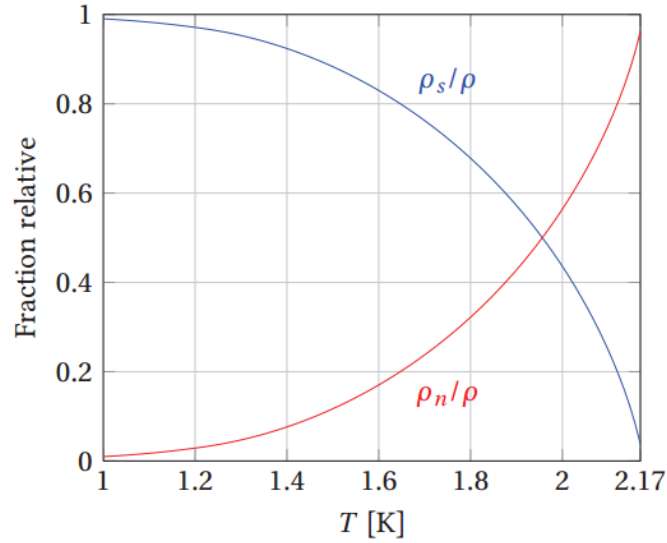


FIGURE 2.7: Fraction relative des composantes normale et superfluide.

De plus, comme l'a suggéré Lars Onsager⁵ dès 1949 [109], la circulation de la vitesse de la composante superfluide \vec{v}_s ,

$$\oint_{\varphi} \vec{v}_s \cdot d\vec{r} \quad (2.2)$$

où φ est un contour fermé quelconque dans le liquide doit prendre une valeur quantifiée en unités de $\kappa = 2\pi\hbar/m$ où m est la masse de l'atome d'hélium. Richard P. Feynman⁶ a proposé en 1958 une description de l'écoulement superfluide comme un écoulement irrotationnel en tout point ($\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$) sauf sur des lignes très fines (de l'ordre de l'Ångström) appelées lignes de vortex quantiques (ou tourbillons quantiques)[45]. Chaque ligne porte une vorticité κ . Cette description a été confirmée par des mesures expérimentales de circulation de vitesse, proches du quantum de vorticité, réalisées par William F. Vinen en 1960 [140].

2.2.4.1 Contre-courant

Puisque l'entropie est transportée par la composante normale on peut écrire le flux d'entropie S comme :

$$S = \rho s v_n - \kappa \frac{\nabla T}{T} \quad (2.3)$$

5. Lars Onsager a reçu le prix Nobel de chimie en 1968 pour la découverte des relations réciproque qui portent son nom qui sont fondamentales pour la thermodynamique des processus irréversibles.

6. Richard P. Feynman est par ailleurs du prix Nobel 1965 pour ses travaux sur l'électrodynamique quantique.

où s est l'entropie spécifique et κ est la conductivité thermique de l'hélium. En négligeant le terme de conduction on peut écrire le flux de chaleur comme $q = \rho s v_n T$ et, introduisant la quantité de mouvement :

$$\rho \vec{v} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s \quad (2.4)$$

où v est la vitesse du barycentre de l'ensemble. En particulier, on peut observer qu'à vitesse globale nulle ($v = 0$), par effet du transport de la chaleur limité à la composante normale (Eq. 2.3) le flux de chaleur entraîne l'écoulement normal et l'écoulement de superfluide en directions opposées pour conserver la masse. Ce transport de la chaleur de type convectif interne est appelé contre-courant.

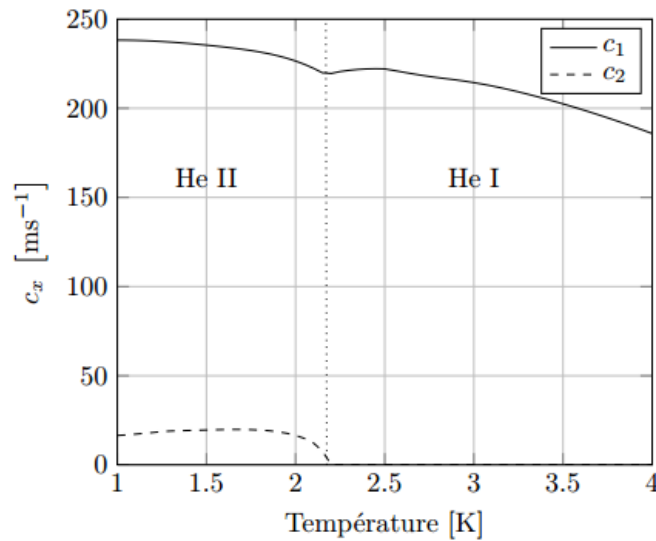


FIGURE 2.8: Vitesse du premier son c_1 et du second son c_2 en fonction de la température à pression de saturation obtenus en utilisant la base de données thermodynamiques HePack [44].

Les équations hydrodynamiques qui décrivent le comportement du superfluide pour des faibles vitesses (régime dit de Landau) sont :

$$\rho_s \frac{D \vec{v}_s}{Dt} = -\frac{\rho_s}{\rho} \vec{\nabla} P + \rho_s s \vec{\nabla} T \quad (2.5)$$

$$\rho_n \frac{D \vec{v}_n}{Dt} = -\frac{\rho_n}{\rho} \vec{\nabla} P - \rho_s s \vec{\nabla} T + \eta_n \nabla^2 \vec{v}_n \quad (2.6)$$

où η_n est la viscosité de la composante normale. L'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{v}) = 0 \quad (2.7)$$

et l'équation de conservation de l'entropie en négligeant les effets de dissipation s'exprime par la relation :

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}_n) = 0 \quad (2.8)$$

2.2.4.2 Vitesse critique

Si le dépassement du nombre de Reynolds critique de la composante normale ($Re = \rho_n v_n l / \mu_n$) détermine une transition laminaire-turbulente au sens classique, le dépassement par la composante superfluide d'une vitesse critique v_s^n détermine la nucléation et l'apparition de tourbillons dans l'He II par la destruction locale de la superfluidité. On parle donc de régime de turbulence superfluide. Une formule empirique de la vitesse critique a été proposée par qui dépend du diamètre de la conduite d selon la relation :

$$v_s^n \simeq 0.003d^{1/4} \quad (2.9)$$

La circulation de la vitesse v_s sur un contour fermé est quantifiée :

$$\oint \vec{v}_s d\vec{l} = \frac{n\hbar}{m} \quad (2.10)$$

où m est la masse de l'atome d'hélium, \hbar est la constante de Planck et n est un entier. Le quantum de circulation prend donc la forme $\Gamma = h/m$, pour $n = 1$. L'écoulement de superfluide est irrotationnel à l'exception de lignes de vortex, dont le rayon est de quelques Å, de flux unitaire κ . Ces tourbillons quantiques forment des enchevêtrements de vortex qui se caractérisent par une topologie complexe et dans le cadre de la description classique de la turbulence par un processus de cascade on doit introduire une nouvelle échelle caractéristique : la distance inter-vortex δ . Celle-ci est reliée à la densité de lignes de vortex L_0 c'est à dire la somme des longueurs de lignes de vortex quantiques normalisée par unité de volume de liquide considérée, par la relation $\delta = 1/\sqrt{L_0}$. Salort et al. montrent, en utilisant les résultats de simulations numériques et des résultats expérimentaux, que la distance inter-vortex varie selon la relation $\delta/L \simeq Re_\kappa^{-3/4}$ avec $Re_\kappa = L\sqrt{\langle u^2 \rangle}/\kappa$ et L est l'échelle intégrale de l'écoulement.

2.2.4.3 Interaction

L'enchevêtrement de vortex est responsable de la diffusion des excitations thermiques de la composante normale et ainsi de l'interaction entre la composante

normale et la composante superfluide. Cette interaction dépend de la différence de vitesse $|\vec{v}_n - \vec{v}_s|$ et se traduit par une force dite de friction mutuelle qui couple les deux composantes (effet Magnus) :

$$\vec{F}_{ns} = A\rho_n\rho_s|\vec{v}_n - \vec{v}_s|^2(\vec{v}_n - \vec{v}_s) \quad (2.11)$$

où A est le coefficient de friction mutuelle de Goerter-Mellink qui dépend de la température (déterminé expérimentalement). Quand la vitesse relative entre les composantes excède la vitesse critique la force de friction mutuelle modifie les Eqs. 2.5 et 2.6 qui prennent la forme suivante :

$$\rho_s \frac{D\vec{v}_s}{Dt} = -\frac{\rho_s}{\rho} \vec{\nabla} P + \rho_s s \vec{\nabla} T - A\rho_n\rho_s|\vec{v}_n - \vec{v}_s|^2(\vec{v}_n - \vec{v}_s) \quad (2.12)$$

$$\rho_n \frac{D\vec{v}_n}{Dt} = -\frac{\rho_n}{\rho} \vec{\nabla} P - \rho_s s \vec{\nabla} T + \eta_n \nabla^2 \vec{v}_n + A\rho_n\rho_s|\vec{v}_n - \vec{v}_s|^2(\vec{v}_n - \vec{v}_s) \quad (2.13)$$

2.2.5 Premier et second sons de l'He II

L'existence de deux composantes dans l'He II implique qu'il peut exister deux types d'ondes sonores, selon que les deux fluides oscillent en phase, le "premier son", ou en opposition de phase, le "second son". Déterminons l'équation du "second son".

On appelle \vec{v}_s et \vec{v}_n les vitesses des composantes superfluides et normales, p le champ de pression, T le champ de température, ρ la densité totale et s l'entropie par unité de masse d'He II. Un écoulement peut s'établir s'il y a un gradient de potentiel chimique⁷ μ ,

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \nabla) \vec{v}_s = -\nabla \mu \quad (2.14)$$

Avec

$$d\mu = -sdT + \frac{1}{\rho} d\rho \quad (2.15)$$

S'il n'y a pas de dissipation, on peut écrire une équation de conservation de l'entropie par unité de masse d'He II, s , qui est portée uniquement par la composante normale,

$$\frac{\rho}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \vec{v}_n) = 0 \quad (2.16)$$

On suppose que la quantité de mouvement totale est nulle à chaque instant, c'est-à-dire,

$$\rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n = 0 \quad (2.17)$$

7. potentiel chimique conduit à une équation d'Euler pour \vec{v}_s . On peut ajouter un terme de friction mutuelle $-\frac{\rho_n}{\rho}(\vec{v}_n - \vec{v}_s) \cdot d(\vec{v}_n - \vec{v}_s)$

Dans le cas où il n'y a pas de fluctuation de densité totale, $\partial\rho/\partial t = 0$, ni de gradient de pression $\nabla p = 0$, et en écrivant $ds = \frac{C_p}{T}dT$, avec C_p la capacité thermique massique, les Eqs. 2.14 à 2.17 se réécrivent, dans le cas unidimensionnel, au premier ordre (hypothèse acoustique) :

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} - s_0 \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ et } \frac{C_p}{T_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\rho_s}{\rho_n} s_0 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

D'où une équation de d'Alembert pour la température,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.19)$$

où $c_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{s_0^2 T_0}{C_p}$ est le carré de la vitesse du "second son". Quelques valeurs de s et c_2 sont données dans le tableau 2.2 pour quelques températures.

TABLE 2.2: Quelques valeurs de vitesse du second son, c_2 , et d'entropie par unité de masse d'He II, s , pour quelques températures (correspondant à différentes fractions superfluide ρ_s/ρ), à la pression de vapeur saturante.

T[K]	ρ_s/ρ	$s [Jkg^{-1}K]$	$C_2[m/s]$
1.55	0.86	237	19.7
1.80	0.68	544	19.5
2.00	0.44	958	16..5
2.10	0.25	1256	12.3
2.15	0.11	1447	7.87
2.16	0.08	1492	6.39

Contrairement à un fluide classique dans lequel la température obéit à une équation de diffusion, une fluctuation de température dans l'He II est donc transportée sous la forme d'une onde (second son), de façon similaire à une fluctuation de pression (*premier son*). Cela permet d'expliquer pourquoi l'He II transporte très efficacement la chaleur.

Par conséquent, l'analyse spectrale du signal permet d'obtenir des renseignements sur la distribution d'énergie à travers les échelles. La Fig. 2.9 est montré un exemple de signal de vitesse local obtenu dans un écoulement turbulent (cas d'un jet d'hélium gazeux) et son analyse spectral (densité spectrale de puissance).

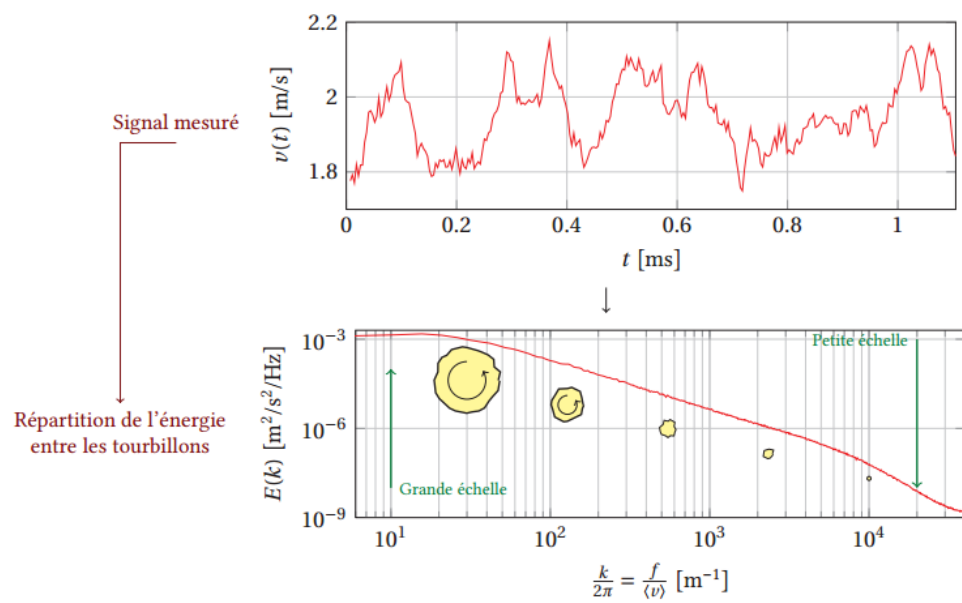


FIGURE 2.9: Exemple de signal de vitesse local obtenu dans un écoulement turbulent (cas un jet d'hélium gazeux [30]) et son analyse spectrale (densité spectrale de puissance).

Chapitre 3

Turbulence

3.1 Introduction

La turbulence classique décrit le comportement d'un fluide fortement brassé. Le mouvement obtenu peut sembler à la fois désordonné (vitesses aléatoires, non reproductibilité) et structuré "tourbillons, structures cohérentes". C'est un domaine qui intrigue les scientifiques depuis plusieurs siècles. La première étude systématique de ce problème a été publiée par Léonard de Vinci au début du XVI^e siècle (Fig. 3.1).

L'équation qui gouverne la dynamique d'un fluide non visqueux a été établie par Leonhard Euler en 1755 avec un modèle de milieu continu :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla P \quad (3.1)$$

où ρ est la densité du fluide, $p(\vec{r}, t)$ est le champ de pression dans le fluide, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesse du fluide et \vec{g} est l'accélération de la pesanteur. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire. C'est le terme non linéaire, $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ qui est à l'origine de la richesse de comportement des fluides fortement brassés.

Ce n'est cependant qu'au XIX^e siècle que Claude Navier et George Stokes ont établi l'équation qui prévaut toujours aujourd'hui et qui tient compte des frottements visqueux dans le fluide :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (3.2)$$

où η est la viscosité dynamique du fluide. Cette équation de Navier-Stokes est une équation différentielle non-linéaire dont la résolution constitue un problème

mathématique très difficile. Il s'agit de l'un des sept défis mathématiques relevant du prix du millénaire¹ : une récompense d'un million de dollars est promise à quiconque parviendra à trouver une solution exacte, ou même seulement à prouver l'existence ou l'inexistence de solutions exactes.

L'écoulement est "turbulent" lorsque le terme non-linéaire domine sur le terme

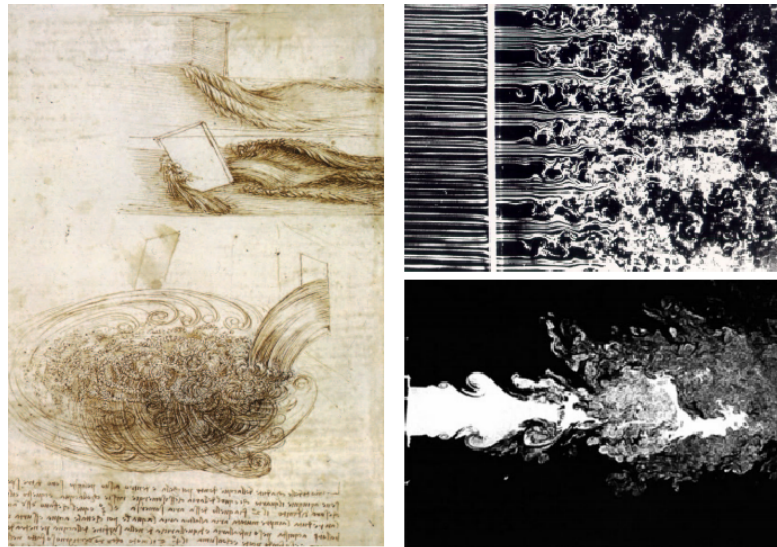


FIGURE 3.1: À gauche : Étude sur les turbulences par *Léonard de Vinci*. À droite : Turbulence générée en aval d'une grille (en haut) et jet axi-symétrique (en bas). Source :[134].

visqueux. On peut caractériser l'ordre de grandeur relatif de ces deux termes avec le nombre de Reynolds, Re :

$$Re = \frac{\text{Termenon} - \text{linéaire}}{\text{Termevisqueux}} = \frac{\rho L_0 v}{\eta} = \frac{L_0 v}{\nu} \quad (3.3)$$

où L_0 est l'échelle caractéristique à laquelle l'écoulement est généré, v est la vitesse typique de l'écoulement, $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique.

L'écoulement est "turbulent" lorsque le nombre de Reynolds est grand ($Re \gg 1$). Dans le cas contraire ($Re \ll 1$), on dit que l'écoulement est laminaire. Dans la vie courante, la plupart des écoulements sont turbulents : écoulement de l'air autour d'une voiture ou d'un avion, mouvement de l'eau autour d'un nageur, écoulement d'un cours d'eau,... C'est pour cette raison que l'étude de la turbulence, outre son intérêt fondamental comme système non-linéaire, est d'une grande importance pratique (industrie aéronautique, automobile, nucléaire,...). De nombreuses études, menées au XX^e siècle, ont permis de dégager une description théorique et statistique de la turbulence. Par ailleurs, il n'existe pas de solution exacte connue

1. htCp : [//www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations](http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations)

pour l'équation de Navier-Stokes et la turbulence reste un domaine de recherche toujours ouvert.

Il est également possible de définir un nombre de Reynolds basé sur une échelle microscopique plutôt que sur la grande échelle L_0 . Geoffrey Ingram Taylor a proposé en 1938 de définir une micro-échelle de la turbulence, λ , qui est associée aux gradients de la vitesse turbulente, c'est-à-dire,

$$\langle \|\nabla v\|^2 \rangle = \left(\frac{v_{rms}}{\lambda} \right)^2 \quad (3.4)$$

où $\langle \|\nabla v\| \rangle$ représente le module du gradient de vitesse turbulente. Cette échelle conduit à la définition du nombre sans dimension,

$$R_\lambda = \frac{v_{rms}\lambda}{\nu} \quad (3.5)$$

appelé nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor. Il permet de quantifier la prépondérance *locale* des effets turbulents par rapport aux effets visqueux. On peut montrer pour un écoulement homogène et isotrope que ce nombre Reynolds turbulent R_λ est relié au nombre de Reynolds Re par la relation.

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3}} Re \quad (3.6)$$

3.2 Cascade de Richardson

Une première description phénoménologique de l'évolution de la hiérarchie des structures visibles dans les écoulements turbulents a été proposée par Lewis Fry Richardson en 1922 [114, 115]. L'énergie est injectée à grande échelle. Elle apparaît sous la forme d'une grande structure (tourbillon) de taille L_0 . À cette échelle, le nombre de Reynolds $Re_{L_0} = L_0 v_{L_0} / \nu$ est très grand donc la dynamique est dominée par la non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes. Elle conduit à ce que la grande structure donne naissance à des structures plus petites. Ces structures plus petites donnent naissance à leur tour à des structures encore plus petites, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on atteigne une petite échelle l , à laquelle on peut associer un nombre de Reynolds $Re_l = l v_l / \nu$ suffisamment faible pour que le terme visqueux devienne significatif et que l'énergie cinétique puisse être dissipée (voir Fig. 3.2).

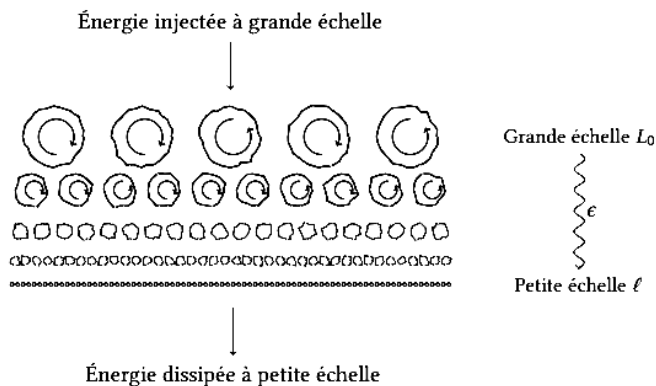


FIGURE 3.2: Énergie dissipée à petite échelle

Les échelles à travers lesquelles l'énergie cascade sont appelées "échelles inertielles". Dans la suite, on note ε le flux massique d'énergie qui se propage à travers les échelles inertielles. Une question importante est de savoir comment vérifier si ce modèle est correct à partir des grandeurs mesurables. Dans la pratique, à défaut d'être capable de mesurer directement ε , on peut mesurer une grandeur locale (notamment, la vitesse, à l'aide d'un anémomètre), et obtenir un signal temporel $v(t)$: Comment se traduit l'existence de la cascade d'énergie sur la nature du signal $v(t)$?

Lorsqu'une grosse structure est advectée à la vitesse $\langle v \rangle$ de l'écoulement moyen, elle va avoir un temps de vol sur le capteur qui sera plus long que celui d'une petite structure. Plus précisément, à une fluctuation de vitesse de fréquence f , peut être associé un tourbillon de taille $\langle v \rangle / f$.

En introduisant le concept "d'eddy", une structure de l'écoulement est caractérisée par une taille l (l peut être vue comme une longueur de cohérence) et une vitesse fluctuante² $u(l)$. Cette dernière est définie en utilisant la décomposition de Reynolds [113] du champ de vitesse $U(x, t)$ en une partie moyenne $\langle U \rangle$ et une partie fluctuante $u(x, t)$ selon la relation :

$$U(x, t) = \langle U \rangle + u(x, t). \quad (3.7)$$

La vitesse fluctuante u est une variable aléatoire centrée ($\langle u(x, t) \rangle = 0$) et $\langle \bullet \rangle$ correspond à l'opération de moyenne d'ensemble. Richardson propose un processus de cascade d'énergie où les "eddies" caractérisés par une taille comparable à

2. $u(l)$ peut être assimilé à l'incrément spatial $\delta_r u$ (voir la suite) sur une échelle $r = l$. Une formulation plus moderne consiste à considérer $u(l)$ comme l'écart-type des coefficients d'une décomposition à ondelettes à l'échelle l [99].

l'échelle caractéristique de l'écoulement (L) se fractionnent par effet d'instabilité en structures de tailles plus petites. Les grosses structures se caractérisent par un nombre de Reynolds $Re_l = u(l)l/\nu \gg 1$ et par conséquent les effets de dissipation visqueuse sont négligeables. L'énergie cinétique des grosses structures est transférée aux petites dans un processus de cascade qui continue jusqu'à ce que les effets de viscosité soient suffisamment importants pour que la viscosité moléculaire dissipe toute l'énergie résiduelle en chaleur.

3.3 Au delà de Kolmogorov 1941

En 1941, Kolmogorov [68–71] a donné les expressions quantitatives pour l'intensité typique des mouvements de taille l ainsi que pour l'échelle de dissipation l_d . Kolmogorov reprend l'idée de la cascade de Richardson et de hiérarchie d'échelles pour formuler une description statistique du champ de vitesse turbulent à chaque échelle de l'écoulement en introduisant trois hypothèses.

- (1) Pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés la séparation entre les grandes échelles (affectées par les conditions limites d'injection de l'énergie) et les petites échelles est suffisamment grande pour que ces dernières deviennent statistiquement indépendantes du mécanisme de production (à grande échelle et spécifique de chaque écoulement). Pour la même raison, les petites échelles peuvent être considérées comme statistiquement isotropes localement. L'information concernant l'écoulement à grande échelle est perdue le long de la cascade et la statistique des petites échelles est universelle.
- (2) Pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés la statistique des petites échelles devient universelle et est déterminée uniquement par la viscosité ν et le taux de dissipation $\langle \varepsilon \rangle$.
- (3) Pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés la statistique des échelles de longueur caractéristique l intermédiaire, $L \gg l \gg \eta$ ne dépend plus de la viscosité et ne dépend donc que du taux de dissipation $\langle \varepsilon \rangle$.

Une conséquence de la description de Kolmogorov est la séparation de la cascade en trois zones : une zone caractérisée par les grandes échelles d'injection de l'énergie L (ou l'échelle intégrale de l'écoulement), une zone dite inertielle ($L \ll l \ll \eta$) et une zone aux petites échelles dite de dissipation pour $l \sim \eta$ (où η est l'échelle de Kolmogorov définie ci après).

Dans le processus de cascade à l'équilibre, le taux de transfert de l'énergie entre

les grosses et les petites structures dans le domaine inertiel est constant car la production et la dissipation d'énergie sont à l'équilibre. On peut donc écrire le taux de transfert de l'énergie par unité de masse d'une structure de taille l et de temps de retournement $T_l = l/u(l)$ comme son énergie cinétique divisée par le temps de retournement de la structure turbulente selon la relation :

$$\langle \varepsilon \rangle \approx \frac{u_l^2}{T_l} = \frac{u_l^3}{l} \quad (3.8)$$

La vitesse de la structure à l'échelle intermédiaire l est :

$$u_l \sim (\langle \varepsilon \rangle l)^{1/3} \quad (3.9)$$

On peut donc définir une échelle de dissipation à partir de laquelle le processus de dissipation visqueuse devient comparable au terme de transfert inertiel (c'est à dire que le nombre de Reynolds $Re_l = u_l l / \nu \approx 1$). En utilisant l'Eq. 3.9 on obtient l'échelle η :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/4} \quad (3.10)$$

qui prend le nom de longueur de Kolmogorov. La séparation entre la grande et la petite échelle est définie donc par le nombre de Reynolds selon la relation :

$$\frac{L}{\eta} = Re_L^{3/4} \quad (3.11)$$

Le taux de dissipation moyen est par définition :

$$\langle \varepsilon \rangle = \nu \left\langle \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle \quad (3.12)$$

et dans l'hypothèse d'écoulement homogène et isotrope le taux de dissipation moyen $\langle \varepsilon \rangle$ s'écrit :

$$\langle \varepsilon \rangle = 15\nu \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (3.13)$$

Une conséquence de l'hypothèse de Kolmogorov de self-similarité dans le domaine inertiel est la prédiction que le moment d'ordre p des incréments de vitesse longitudinaux (ou fonction de structure d'ordre p) prend la forme :

$$S_p(r) = \langle (\delta_r u)^p \rangle \sim (\langle \varepsilon \rangle r)^{\zeta_p} \quad (3.14)$$

où l'exposant est donné par (argument dimensionnel) $\zeta_p = p/3$ et $\delta_r u = u(x+r) - u(x)$ est l'incrément de vitesse longitudinale en fonction de l'échelle de séparation r . La forme de la densité de probabilité de $\delta_r u$ ne varie pas en fonction de r dans la zone inertielle (invariance d'échelle). En particulier, pour l'ordre $p = 2$ on a :

$$S_2(r) = \langle (\delta_r u)^2 \rangle = C_2 \langle \epsilon \rangle r^{2/3} \quad (3.15)$$

et cette relation dans le domaine spectral, peut s'écrire de la façon suivante :

$$E(k) = C_k \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.16)$$

Dans les Eqs. 3.15 et 3.16 C_2 et C_k sont des constantes universelles reliées par la relation $C_k = \frac{\Gamma(2/3)}{\pi\sqrt{3}} C_2$. Dans l'article Kolmogorov utilise l'équation de Kármán-Howarth pour obtenir une relation exacte qui est solution de l'équation de Navier-Stokes et prend la forme :

$$S_3(r) = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r + 6\nu \frac{dS_2(r)}{dr} \quad (3.17)$$

et dans le domaine inertiel, en supposant que l'effet de la viscosité est négligeable, on a :

$$S_3(r) = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r \quad (3.18)$$

ce qui correspond à $\zeta_3 = 1$. Les observations expérimentales, en revanche, montrent que $\zeta_2 > 2/3$, $\zeta_3 = 1$ et $\zeta_p < p/3$ pour $p > 3$ traduisant la nature intermittente du taux de dissipation. On observe que la forme de la distribution de probabilité des incréments de vitesse évolue en fonction de r d'une forme quasi-gaussienne à grande échelle à une distribution étalée indiquant la présence d'événements de forte intensité à petite échelle. Cet étalement des distributions de probabilité est la signature du phénomène de l'intermittence statistique.

3.4 L'intermittence interne

Nous avons déjà souligné le caractère intermittent des petites échelles de turbulence isotrope, à la suite du processus d'étirage de filaments de tourbillons. Ceci conduit en particulier à la formation des tourbillons cohérente minces longues qui ont été indiqués ci-dessus d'exister. Ainsi, dans un flux turbulent isotrope tridimensionnel homogène, l'intensité des fluctuations de vitesse ne se répartit pas de façon uniforme dans l'espace, et présente ce qu'on appelle "l'intermittence interne". Cette

intermittence est d'une nature différente de la "intermittence externe" qui caractérise les grands tourbillons cohérents d'un écoulement turbulent à la frontière avec le flux irrotationnel externe, dans les couches limites turbulentes ou des jets par exemple. L'existence de l'intermittence interne est pas en contradiction avec l'hypothèse d'homogénéité, qui est une propriété moyenne de l'écoulement.

Ainsi, le "locale" taux de dissipation d'énergie cinétique affiche des fluctuations importantes au sujet de sa valeur moyenne. Une conséquence est la théorie de Kolmogorov 1941 [69], qui ne comporte pas ces fluctuations de et doit certainement être corrigé afin de tenir compte de ce caractère intermittent. Cela a été remarqué par Kolmogorov lui-même, qui a proposé une théorie en 1962 qui a corrigé sa théorie originale (Kolmogorov [71]). Les mêmes idées ont été exprimés simultanément par Oboukhov [107], et développés par Yaglom [151].

Un point à mentionner est que, au niveau du spectre d'énergie cinétique, les corrections d'intermittence qui pentification $k^{-5/3}$ Kolmogorov sont dans les deux théories. Ceci est trop petit pour permettre une vérification expérimentale à ce niveau. Ceci pourrait suggérer que les théories de fermeture pourraient donner des résultats satisfaisants, même si elles ne peuvent pas faire face à l'intermittence spatiale envisagée ici. Notez également que l' observé expérimentalement haute- k départ du $k^{-5/3}$ spectre correspond à la bosse déjà mentionné. Cela diminue les spectrale exposant module, contrairement à intermittence interne.

La même étude expérimentale que celle effectuée pour la vitesse par Anselmet et al. [6], a été effectuée par Antonia et al. [7] pour une température passive. Dans ces deux études (voir aussi Gagne [49]), le pdf respectivement de la différence de vitesse et de température entre deux points sur une distance donnée en dehors ont été trouvés pour avoir une queue exponentielle. Ceci est évidemment liée à mentionnés ci-dessus, et indique les gradients de température exponentielle-queue de la vitesse pdf-gradient. Mais le départ de gaussianité est beaucoup plus marquée pour la température que pour la vitesse. D'autre part, Metais et Lesieur [93] et [94] ont trouvé dans le DNS de décomposition turbulence isotrope que non seulement les dérivés de la température, mais aussi la température elle-même, affichent une distribution exponentielle. Au contraire, la vitesse est très proche de gaussienne. Mesures en turbulence de grille fait par Jayesh et Warhaft [61] confirment la température exponentielle pdf dans le cas d'une moyenne gradient non nul de la température, mais trouver un près de comportement gaussien sans gradient moyen.

Figure 3.3 montre, respectivement, la décroissance de l'énergie cinétique et spectres de température dans LES (en utilisant des méthodes pseudo-spectrale et une

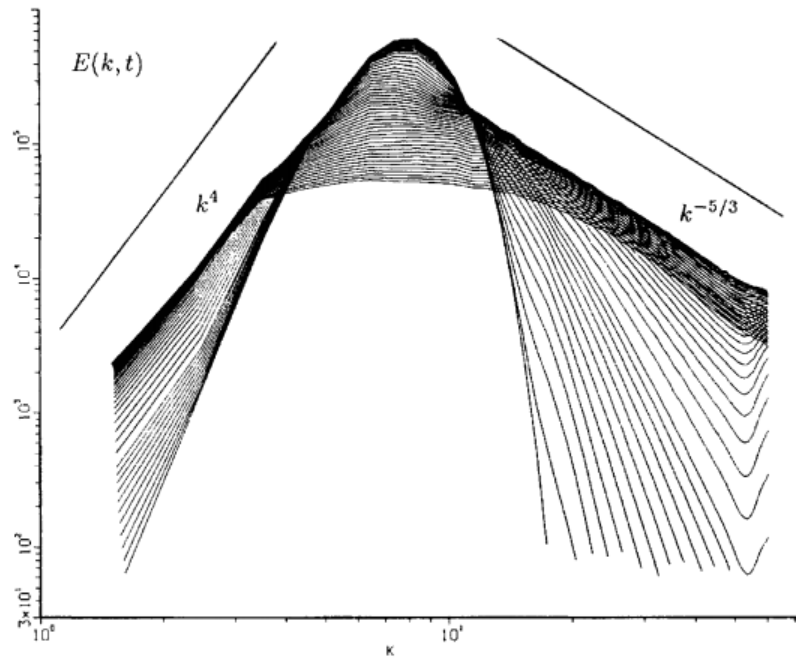


FIGURE 3.3: Temps-Évolution d'énergie dans le pseudo-spectrale basée sur une Simulation des Grandes Échelles SGE (LES) effectuée par Lesieur et Rogallo [77], en commençant d'abord avec les spectres de k^4 à faible k . La résolution est de modes 128^3 (avec la permission *physique des fluides*).

viscosité effectif spectrale, (*Voir la section 6.2 pour plus de détails*), effectuée par Lesieur et Rogallo [77]. Ces simulations, sur lequel plus de détails seront donnés dans le chapitre suivant, commencent avec l'énergie et la température spectres identiques fortement atteint un sommet dans les grandes échelles. Ils montrent d'abord la création d'une $\propto k^4$ spectre de rétrodiffusion dans les très grandes échelles, ce qui sera expliqué au chapitre suivant. Dans les petites échelles, deux spectres cascade vers un grand nombre d'ondes. L'énergie cinétique suit approximativement la loi de Kolmogorov³. D'autre part, les pièces de la température dans les grandes échelles une longue portée de pente plus faible que k^{-1} . Un loi *anomalous*⁴ a été expliquée par Lesieur et Rogallo [77] avec le même type d'arguments que ceux conduisant à la plage visqueuse convectif (mais ici le nombre de Prandtl moléculaire est supposé être ~ 1) : on suppose que, en raison de l'absence de gradient de pression dans l'équation scalaire, le scalaire va réagir très rapidement d'une manière quasi linéaire de la cisaille à grande échelle, avant que les effets non linéaires commencent à agir.

3. Il est en effet plus proche de k^{-2} avec la viscosité turbulente spectrale utilisée dans le présent SGE (LES)

4. En ce qui concerne la gamme $k^{-5/3}$ inertiel-convective.

Enfin, il doit être souligné que l'évolution vers un état intermittent est une tendance naturelle pour un écoulement turbulent. Lorsqu'il est appliqué à l'univers, supposé être fluide, ce concept permet de comprendre comment l'univers homogène initialement quasi du "big bang" a perdu son homogénéité, et a maintenant développé une telle distribution intermittente de galaxies. Nous mentionnons à cet égard les simulations de Frisch [48] basé sur une équation de Burgers multi-dimensionnelle. Plus généralement, l'intermittence semble caractériser tout système de dissipation non linéaire.

3.5 Le budget d'énergie spectrale

Pour une turbulence homogène (avec des gradients de vitesse moyenne imposée) l'image du l'énergie budget est quantifiée par l'équation d'équilibre pour la fonction spectre d'énergie $E(k, t)$. Cette équation (dérivé en détail dans Hinze (1975)[57] et Monin et Yaglom (1975)[98]) peut être écrite [48] :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = P_k(k, t) - \frac{\partial}{\partial k} T_k(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) \quad (3.19)$$

Les trois termes sur le côté droit représentent la production, le transfert spectrale, et de dissipation.

Le spectre de production P_k est donnée par le produit de la vitesse moyenne des gradients $\partial\langle U_i \rangle / \partial x_j$ et une partie anisotrope du tenseur du spectre. La contribution à la production de la gamme de nombre d'onde (k_a, k_b) est notée

$$P_{(k_a, k_b)} = \int_{k_a}^{k_b} P_k dk \quad (3.20)$$

et, dans la mesure où tous de l'anisotropie est contenue dans la plage contenant d'énergie, nous avons donc :

$$P = P_{(0, \infty)} \approx P_{(0, k_{EI})}, \quad (3.21)$$

$$P_{(k_{EI}, \infty)} / P \ll 1 \quad (3.22)$$

Dans le second terme sur le côté droit de l'équation 3.19, $T_k(k)$ est le taux de transfert d'énergie spectrale : il est le taux net à laquelle l'énergie est transférée de modes de nombre d'onde inférieure à K à ceux qui ont des nombres d'ondes

plus élevées que k . Ceci est simplement liée à $T(l)$ –le taux de transfert d'énergie à partir des tourbillons plus grand que l à ceux plus petit que l – par

$$T(l) = T_k(2\pi/l) \quad (3.23)$$

Le taux de gain d'énergie dans le nombre d'onde (k_a, k_b) en raison de ce transfert spectrale est

$$\int_{k_a}^{k_b} -\frac{\partial}{\partial k} T_k(k) dk = T_k(k_a) - T_k(k_b) \quad (3.24)$$

Depuis T_k disparaît à zéro et nombre d'onde infinie, ce terme de transfert ne fait aucune contribution à l'équilibre de l'énergie cinétique turbulente k .

Une expression exacte pour les savoirs traditionnels peuvent être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes (voir, par exemple, Hinze (1975)[57]). Il ya deux contributions : celle qui résulte de l'interaction de triades de modes nombre d'onde, l'autre exprimant un effet cinématique principal cela signifie gradients de vitesse ont sur le spectre. Le dernier terme de l'équation 3.19 est le spectre de dissipation $D(k, t) = 2\nu k^2 E(K, T)$.

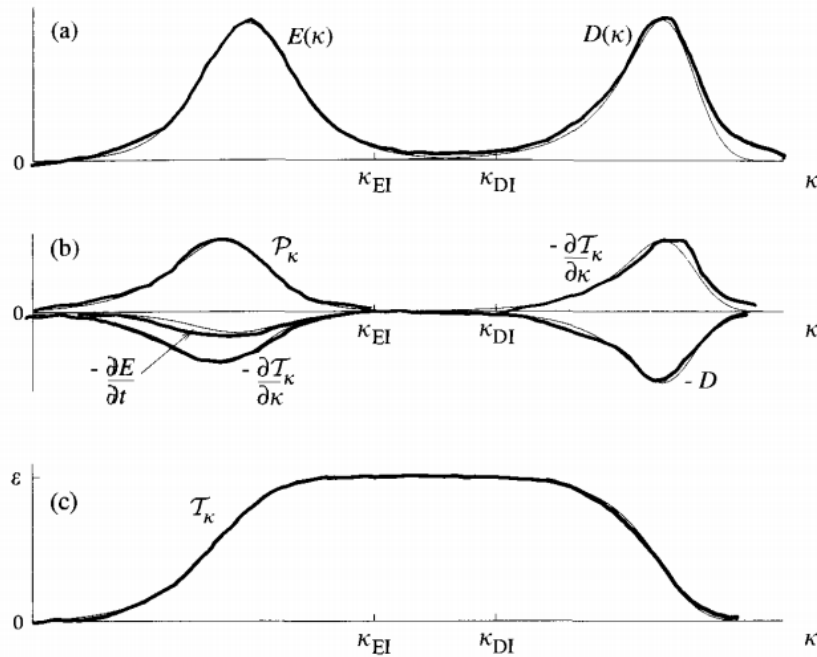


FIGURE 3.4: Pour turbulence homogène au nombre très élevé Reynolds, les courbes de (a) sont les spectres de l'énergie et de la dissipation, (b) les contributions à l'équation de l'équilibre pour $E(k, t)$ (Eq. 3.19), et (c) le taux de le transfert d'énergie spectrale (B. Pope [48], p. 251)

Figure 3.4 est une esquisse des quantités figurant dans l'équation de l'équilibre $E(k, t)$ (Eq. 3.19). Dans la gamme contenant énergie, tous les termes sont significatifs, sauf pour la dissipation. Avec la approximations $k_{(0, k_{EI})} \approx k$, $\varepsilon_{(0, k_{EI})} \approx 0$ et $P_{(0, k_{EI})} \approx P$, quand il est intégré sur la plage contenant énergie $(0, k_{EI})$, Eq. 3.19 rendements

$$\frac{dk}{dt} \approx P - T_{EI} \quad (3.25)$$

où $T_{EI} = T_k(k_{EI})$. Dans le domaine inertiel, le transfert spectrale est le seul processus important, de sorte que (quand il est intégré à partir de k_{EI} jusqu'à) k_{DI} Eq. 3.19 rendements

$$0 \approx T_{EI} - T_{DI} \quad (3.26)$$

où $T_{DI} = T_k(k_{DI})$. Alors que dans la gamme de dissipation, spectrale soldes de transfert dissipation de telle sorte que (quand il est intégré de k_{DI} à l'infini). Eq. 3.19 rendements

$$0 \approx T_{DI} - \varepsilon \quad (3.27)$$

Quand ils sont ajoutés ensemble, les trois dernières équations donnent (sans approximation) L'équation de l'énergie cinétique turbulent $dk/dt = P - \varepsilon$.

Les équations ci-dessus mettent en évidence encore les caractéristiques essentielles de la cascade de l'énergie. Le taux de transfert d'énergie à partir de la gamme T_{EI} contenant de l'énergie dépend, d'une manière non-universelle, à plusieurs facteurs, y compris les gradients de vitesse moyenne et les détails de la plage contenant énergie du spectre. Cependant, ce taux de transfert établit alors un domaine inertiel de caractère universel à $T_k(k) = T_{EI}$; et enfin la partie haute de nombre d'onde du spectre dissipe l'énergie à la même rythme que celle à laquelle il le reçoit. Ainsi, les deux T_{DI} et ε sont déterminés par, et sont égaux à, T_{EI} , quand "la dissipation" est envisagée – par exemple, pour caractériser le spectre de gamme inertielle $E(K) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$ – il est conceptuellement supérieure à envisager T_{EI} en place de ε .

3.6 Turbulence quantique et turbulence classique

En utilisant la description phénoménologique de la cascade de Richardson et Kolmogorov de la turbulence classique, les questions qui se posent concernent les effet

des restrictions quantiques sur le comportement de la cascade turbulente à des températures inférieures à T_λ . En particulier, les questions concernent la répartition de l'énergie entre la composante normale et la composante superfluide et la loi d'évolution du spectre d'énergie ainsi que les effets induits par la topologie des enchevêtrements de vortex (i.e. les effets de polarisation) à température finie. Les premiers résultats ont été obtenus à l'aide d'un capteur de pression dans un écoulement de von Kármán réalisé par forçage inertiel. Ils montrent une évolution du spectre de puissance de la vitesse compatible avec une loi de puissance de type $f^{-5/3}$ dans le superfluide, jusqu'à une température de 1.4 K et indépendamment de la fraction relative de superfluide. Un comportement compatible avec le processus de cascade de Kolmogorov a été observé dans les expériences de turbulence de grille entre 2.6 K et 1.65 K à l'aide des capteurs de pression de type micro-Pitot. Les mesures semblent confirmer une loi de puissance en $-5/3$ sur une décade de domaine inertiel mais la dynamique en fréquence et la résolution spatiale des capteurs sont limitées par les phénomènes de résonance (Helmholtz) et par la section de la prise de pression, respectivement. De plus, des mesures de vitesse locale sont en accord avec la loi des $4/5$ de Kolmogorov (Kármán-Howarth) entre 1.15 K et 2.15 K. Ce comportement semble être compatible avec une situation dans laquelle la composante normale et la composante superfluide sont couplées à grande échelle du fait de la force de friction mutuelle. À partir de l'échelle de forçage les deux composantes couplées suivent le même processus de cascade à la Kolmogorov qui nécessite seulement un mécanisme de forçage et un mécanisme de dissipation.

En revanche il est intéressant de mettre en évidence le fait que le mécanisme clé à la base de la cascade et du transfert d'énergie, l'étirement des structures tourbillonnaires, est absent dans la composante superfluide. Dans l'expérience de turbulence de grille en décroissance (où le forçage est obtenu par une grille métallique mise en mouvement dans une conduite d'hélium superfluide stagnant) la décroissance de la vorticité superfluide est mesurée à l'aide de transducteurs de second son et les résultats montrent une loi d'échelle en $t^{-3/2}$ compatible avec la turbulence classique.

En fonction de la température, car le terme de couplage dépend du ratio normal-superfluide (voir l'Eq. 2.11), le comportement de la cascade à petite échelle est plus complexe et mal connu : le mécanisme dominant de dissipation reste un sujet ouvert. Plusieurs scénarios ont été envisagés. Feynman a proposé un mécanisme de reconnection des vortex qui génère des anneaux de taille de plus en plus petite dans un processus de cascade. Un autre mécanisme postule l'existence d'ondes de

Kelvin (perturbations de la géométrie des lignes de vorticité) crées par des impulsions associées à la reconnection des vortex. Pour des températures inférieures à 1 K l'énergie est rayonnée sous la forme d'ondes acoustiques, analyse le spectre de l'énergie en mettant en évidence un phénomène de bottleneck. Une cascade turbulente classique en loi de puissance $k^{-5/3}$ est suivie par une remontée du spectre selon une loi de puissance en k^2 par effet de la polarisation des enchevêtrements de vortex. Le bottleneck est enfin suivi par une décroissance du spectre en $k^{-7/3}$ associée à la cascade d'ondes de Kelvin. Certaines simulations numériques de montrent que, aux basses températures ($\rho_s \gg \rho_n$), le spectre à des échelles comprises entre l'échelle intégrale et δ tend vers une loi de puissance en k^2 (caractéristiques d'un phénomène d'équipartition de l'énergie) par effet de l'accumulation de l'énergie due à la difficulté, pour le superfluide, de dissiper l'énergie cinétique. Du point de vue expérimental la vérification des prédictions théoriques est soumise à des difficultés multiples qui comprennent d'une part l'écoulement (i.e. plage de température accessible, type de forçage, sa qualité en termes de stationnarité, la taille de l'échelle intégrale L etc.), les contraintes liées à la technologie cryogénique et, d'autre part, la résolution spatiale limitée des sondes (environ 500 μm pour le micro-Pitots) de vitesse locale actuellement disponibles. De plus, la mesure de la déviation du comportement de la cascade turbulente par effet du superfluide par rapport à la cascade de la turbulence classique, nécessite la compréhension de cette dernière, un problème qui est loin d'être résolu.

3.6.1 Théories de la turbulence superfluide

La théorie de deux fluides de Landau est le modèle de base en hydrodynamique du superfluide. Les proportions relatives du fluide normal et du superfluide dépendent de la température absolue T . L'écoulement du superfluide sans frottement le différencie d'un fluide normal. Les lignes de vortex induisent dans un écoulement superfluide l'apparition d'une dissipation. Cette caractéristique rend l'He II très intéressant. La circulation et la force de couplage sont deux éléments essentiels des lignes de vortex (Vinen [136–139, 141]). La quantification de la circulation est Exprimée par la condition :

$$\int_c \nu_s dL = \Gamma \quad (3.28)$$

C'est le contour autour du noyau du vortex, $\Gamma = h/m = 9.97 \times 10^{-4} cm^2 s^{-1}$. Γ est la circulation quantifiée, h est la constante de Planck et m est la masse de l'atome d'Hélium.

3.6.2 Quelques travaux expérimentaux et Numériques en turbulence superfluide

Parmi les méthodes numériques pour la génération de l'enchevêtrement des lignes de vortex on relève :

C. F. Barenghi et al. (2013)[16] Turbulence dans l'hélium superfluide est inhabituel et représente un défi pour dynamiciens fluide car il se compose de deux couplés, inter pénétration fluides turbulents : le premier est non visqueux avec tourbillon quantifié, le second est visqueuse avec tourbillon continu. En dépit de cette double nature, spectres observés de la vitesse turbulente superfluide à des échelles suffisamment grandes de longueur sont similaires à ceux turbulence ordinaire. Nous présentons des résultats expérimentaux, numériques et théoriques qui expliquent ces similitudes, et illustrent les limites de notre compréhension actuelle de la turbulence superfluide à des échelles plus petites.

J. Salort et al. (2011)[122] La turbulence de l'hélium superfluide est étudiée numériquement à température finie. Simulations numériques directes sont effectuées avec un modèle de "HVBK", qui combine la description continue des équations Hall-Vinen-Bekerevich-Khalatnikov avec la contrainte supplémentaire que cette description continue ne peut pas dépasser une échelle de longueur quantique associée à espacer la moyenne entre l'individu tourbillons superfluide. Un bon accord est trouvé avec les mesures expérimentales de la densité de vortex. En outre, en faisant varier l'intensité de la turbulence seulement, Salort et al observent que l'espacement entre les intervortex varie en fonction du nombre de Reynolds Re en $-3/4$, comme l'échelle de longueur visqueux dans turbulence classique. Dans la limite de haute température, l'inertie du cascade de Kolmogorov est récupéré, comme prévu à partir d'études numériques et expérimentales précédentes. Lorsque la température diminue, la cascade inertielle reste présent à de grandes échelles de temps, à petite échelle, le système évolue vers un equipartition statistique de l'énergie cinétique entre les modes spectraux, avec un spectre de vitesse caractéristique. L'accumulation des excitations superfluide sur une gamme de mesoscales permet de garder le superfluide dissipation de l'énergie cinétique par la friction mutuelle avec le fluide normale résiduelle, bien que ce dernier devient rare à basse température. Il se trouve que la plupart du tourbillon superfluide peut se concentrer à basse température, alors qu'elle est concentrée dans la zone

inertielle à température plus élevée. Cette observation devrait avoir des conséquences sur l'interprétation de décomposition expériences de turbulence, qui sont souvent basées sur des mesures de densité de ligne de vortex.

D. H. Wacks et C. F. Barenghi(2011)[147] Ils ont développé un modèle de "*two-fluid shell model*" pour étudier la turbulence superfluide et d'enquêter sur les spectres d'énergie et l'équilibre des flux entre les deux fluides dans un état stable.

À des températures suffisamment basses un 'bottle-neck' se développe à grande nombres d'ondes suggérant la nécessité d'un autre effet de dissipation, comme la cascade de onde de Kelvin.

J. Salort et al. (2011)[123] Ce travail rapporte de nouvelles données expérimentales et de simulation numérique pour la turbulence superfluide au-dessus de 1 K. Ils ont présenté les valeurs pour l'exposant de graduation de la valeur absolue des fonctions de structure de vitesse-incrément.

Dans les deux résultats expérimentaux et numériques, elles démontrent que l'intermittence se produit dans des écoulements superfluides d'une manière tout à fait comparable à la turbulence classique. En particulier, la déviation de Kolmogorov 1941 garde la même force qu'ils ont croisé la transition superfluide. La motivation de leur travail, c'est la première confirmation des résultats expérimentaux de Maurer & Tabeling (1998)[89]. Et ce travail est la première évidence numérique de l'intermittence dans la turbulence superfluide.

Boué et al. (2012)[24] Dans ce travail, Boué et al ont considéré le comportement intermittent de la turbulence superfluide. En raison de la similitude dans la structure non linéaire du modèle de deux-fluide de la superfluidité et les équations de l'Euler et du Navier-Charge, une s'attend à ce que les exposants de graduation des fonctions de structure soient les mêmes que dans la turbulence classique pour les températures près de la transition superfluide T_λ et également pour le $T \ll T_\lambda$.

Par l'utilisation du "*shell model*", ils ont proposé que pour un régime intermédiaire des températures, tel que la densité des composants superfluide et normal fluide sont comparable entre eux, existe là une gamme des balances dans lesquelles les exposants efficaces indiquent une intermittence plus forte. Boué et al. offrent une relation entre ces efficaces et les exposants classiques de graduation. Puisque cet effet se produit aux températures et aux nombres de Reynolds accessibles. Alors, ils ont proposé que des expériences doivent

être entreprises pour évaluer plus loin la validité et les implications de cette prévision.

Baggaley et al. (2012)[12] Les expériences numériques de ce travail avec la turbulence quantique à zéro absolu, ont indiqué que l'embrouillement de vortex contient les structures vortical logiques, ou les paquets de vortex parallèle raye, qui résultent seule de la dynamique de "*Biot-Savart*", et semble être semblables à la vorticité "*worms*" observés dans la turbulence ordinaire. À la différence de turbulence ordinaire, dans un système superfluide la vorticité est seulement sous forme de lignes. Etant donné la simplicité relative de la turbulence quantique, ceci peut fournir de nouvelles perspicacités dans la nature de la turbulence et l'origine des "*worms*".

P.-E. Roche et al. (2009)[116] Pour modéliser la turbulence homogène isotrope de quantum en hélium superfluide, P.-E. Roche et al ont effectué des simulations numériques directes (DNS) de deux fluides (le fluide normal et le superfluide) couplés par la force de friction mutuelle. Ils ont trouvé l'évidence du verrouillage fort du fluide superfluide et normal au long de la cascade turbulente. Ils ont aussi déterminé la vitesse résiduelle entre les deux fluides, et pour chaque fluide, l'équilibre relatif des forces à inertie, visqueuses et de frottement au long des balances. Leurs calculs prouvent que la relation classique entre l'injection d'énergie et la balance de dissipation est inadmissible en la turbulence quantique, mais ils ont pu dériver "température-dépendante" une relation analogue du superfluide. Aussi, dans ce travail, ils discutent les résultats de DNS courant de la turbulence quantique, y compris la valeur de la viscosité cinématique efficace.

Araki et al. [8] Par l'utilisation d'un modèle de filament de vortex pour un superfluide sans fluide normal que pour $k < 2\pi/l$, ils ont montré numériquement que le spectre de l'énergie a la forme $-5/3$ de Kolmogorov. Dans un deuxième cas, en absence de la force de couplage, ils ont trouvé que pour $k > 2\pi/l$, le spectre d'énergie a la forme de k^{-1} . Par contre pour $k < 2\pi/l$, le spectre converge vers la forme $-5/3$ de Kolmogorov . Ces résultats supportent seulement la zone inertielle.

Pour des échelles supérieures à l , avec l l'espace entre les lignes de vortex, les deux fluides possèdent un spectre ayant la forme de Kolmogorov. La raison est que la force de couplage a un effet dissipatif négligeable et les fluides sont soudés. La présence des lignes de vortex dans la partie superfluide donne naissance à une force de couplage entre les deux fluides permettant aux deux

fluides de rester soudés. Cette force n'est responsable que d'une faible dissipation. Pour des échelles plus faibles, comparées à la distance l , les lignes de vortex sont sous une forme discrète et la circulation est quantifiée. Sur ces petites échelles, une forte force agit entre les deux fluides causant une dissipation. La turbulence sur ces échelles a probablement la forme des ondes de Kelvin et la dissipation est accompagnée par les reconnections des lignes de vortex et des atténuations des ondes de Kelvin.

Nore et al. [106] Les études sur le processus de reconnections des lignes de vortex sont accomplies par l'utilisation de l'équation non linéaire de Schrödinger (NLSE). La reconnection entre deux filaments est un phénomène dissipatif. Au moment de la reconnection, une onde sonore est générée et dissipe l'énergie cinétique de l'enchevêtrement de lignes de vortex. L'apparition de cette reconnection donne naissance à des ondes de Kelvin qui émettent des radiations qui diminuent l'énergie. La théorie classique de Kolmogorov peut être appliquée au superfluide. Le spectre d'énergie sera donc de l'ordre $E(k) \simeq k^{-5/3}$ pareil à un fluide normal.

Nore et al. trouvent la première évidence de la théorie de Kolmogorov pour $T = 0$, $k < k_\delta$ où $k_\delta = \frac{1}{\delta}$, la loi de puissance $E(k) \simeq k^{-5/3}$ apparaît (δ étant la distance moyenne entre les lignes de vortex). Cette méthode est limitée par la résolution numérique car elle nécessite la résolution du rayon de vortex. Et cela limitera le nombre de lignes de vortex dans un calcul.

Tsubota et Kobayashi [132] Après une simulation numérique de l'équation de Gross Pitaevskii (GP) de la turbulence quantique, Tsubota et Kobayashi conclut que pour $4 < t < 10$ (t étant le temps) le spectre de l'énergie coïncide avec la loi en $-5/3$ de Kolmogorov et la dissipation est principalement causée par l'élimination des excitations émises lors de la reconnection des lignes de vortex au niveau des petites longueurs d'onde. Par contre si $t > 10$, le spectre est en désaccord avec cette loi.

Le modèle HVBK (Voir le Chapitre 4) introduit deux nouveaux effets qui sont absents dans la théorie de Landau.

- les lignes de vortex du superfluide dissocient les excitations thermiques, ce qui mène à introduire une force de couplage entre le fluide normal et le superfluide nommée la force de frottement ou force de couplage.
- les lignes de vortex du superfluide ont une énergie par unité de longueur appelée la tension. A cause de cette tension, les lignes de vortex oscillent.

L'écoulement de Couette inclut l'écoulement non linéaire de Taylor et prouve la validité du modèle HVBK. Ce dernier généralise le modèle à deux fluides de Landau

et a été vérifié pour des nombres de Reynolds inférieurs à 400 et reste comme approximation pour des nombres de Reynolds très grands.

Pour des échelles supérieures à la distance l entre les lignes de vortex, les champs de vitesse correspondant aux deux composants sont pratiquement identiques et présentent un spectre d'énergie ayant une forme $-5/3$ de Kolmogorov dans la zone inertielle. Ce type de turbulence est possible car la partie normale possède une petite viscosité soit un nombre de Reynolds très grand.

Chapitre 4

Equations hydrodynamiques du superfluide : Modèle HVBK

4.1 Equations de base ; Modèle à deux fluides de Landau

La phase He II est le siège d'effets quantiques qui se traduisent notamment par l'existence de tourbillons quantiques (par exemple, dans un réservoir tournant). Ces tourbillons sont quantiques dans le sens où la circulation de la vitesse autour de chacun d'eux est quantifiée en unités de $\Gamma = h/m = 0.99 \times 10^{-7} m^2 s^{-1}$ où h est la constante de Planck et m la masse de l'atome d'hélium. Les filaments tourbillonnaires portant un seul κ sont thermodynamiquement favorisés. Le profil de vitesse azimutale est alors inversement proportionnel à la distance au tourbillon. En dehors de ces tourbillons, l'hélium He II est irrotationnel. A travers de fins capillaires, il s'écoule sans dissipation, de façon réversible, tant que sa vitesse ne dépasse pas une vitesse critique. Au-delà de cette vitesse critique qui dépend de l'expérience considérée (écoulement dans un capillaire ou réservoir en rotation), le fluide devient dissipatif. De plus, dans une expérience où l'on fait tourner des disques dans l'hélium, on mesure une force de traînée sur ces disques. Cette apparente contradiction a été levée théoriquement par Landau en 1941 avec son modèle hydrodynamique "à deux fluides", décrivant l'hélium comme un "mélange" d'une partie superfluide ρ_s (de viscosité nulle) et d'une partie normale ρ_n (visqueuse, correspondant au gaz d'excitations) telles que la densité totale étant : $\rho = \rho_n + \rho_s$ est d'environ $0.145 gcm^{-3}$. ρ_s et ρ_n dépendent de la température car :

$$\rho_s(T = 0K) = \rho \quad , \quad \rho_n(T = 0K) = 0$$

$$\rho_s(T = T_\lambda) = 0 \quad , \quad \rho_n(T = T_\lambda) = \rho$$

Le mouvement de He II est caractérisé par deux vitesses : celle irrotationnelle du superfluide \vec{v}_s et celle du fluide normal \vec{v}_n . Le courant volumique associé est :

$$J = \rho_s v_s + \rho_n v_n \quad (4.1)$$

La densité ρ et le courant J doivent satisfaire à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} J = 0 \quad (4.2)$$

De plus, le mouvement superfluide n'est pas accompagné de dégagement de chaleur ce qui implique que la densité du flux de chaleur est égale à $\rho S T \vec{v}_n$ (où S est l'entropie par unité de masse). En l'absence de processus dissipatifs, la loi de conservation de l'entropie s'écrit :

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \text{div}(\rho S V_n) = 0 \quad (4.3)$$

La loi de conservation de l'impulsion entraîne :

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \nabla \cdot \Pi = 0 \quad (4.4)$$

où Π est le tenseur d'ordre 2 de densité de quantité de mouvement qui a pour expression (si nous ne gardons que η comme coefficient de dissipation) :

$$\Pi_{ik} = \rho_s V_{si} V_{sk} + \rho_n V_{ni} V_{nk} + p \delta_{ik} - 2\eta(\partial_i V_{nk} + \partial_k V_{ni}) \quad (4.5)$$

où p désigne la pression et δ_{ik} le symbole de Kronecker.

Pour des vitesses petites en valeur absolue et ρ_n et ρ_s constantes, le fluide normal suit une équation de Navier-Stokes tandis que le superfluide obéit à une équation d'Euler. Cet ensemble d'équations constitue le modèle à deux fluides de Landau :

$$\rho_s \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \nabla) \vec{v}_s \right) = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p + \rho S \nabla T + \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho} \nabla (\vec{v}_n - \vec{v}_s)^2 \quad (4.6)$$

$$\rho_n \left(\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} + (\vec{v}_n \cdot \nabla) \vec{v}_n \right) = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla p + \rho S \nabla T + \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho} \nabla (\vec{v}_n - \vec{v}_s)^2 + \eta \Delta \vec{v}_n \quad (4.7)$$

Si nous considérons de faibles variations autour des valeurs d'équilibre de ρ, ρ_s, ρ_n, S et T et si nous linéarisons autour de cet état d'équilibre pour des faibles vitesses, nous trouvons deux sons : le premier son correspond à des fluctuations de la densité totale (comme le son classique); il se propage à la vitesse $u_1 = \sqrt{\partial p / \partial \rho|_S}$ (loin de la température $T_\lambda \sim 2$ K, les compressibilités adiabatique et isotherme sont peu différentes $\partial p / \partial \rho|_S = \partial p / \partial \rho|_T C_p / C_V \simeq \partial p / \partial \rho|_T$). On note alors la valeur commune de la compressibilité $\partial p / \partial \rho$ et celle de la chaleur spécifique C); le second son correspond à des fluctuations de la température ou des densités relatives ρ_n / ρ et ρ_s / ρ ; nous trouvons $u_2 = \sqrt{S^2 T \rho_s / C \rho_n}$. Les mesures montrent que u_1 est pratiquement constante ($u_1 \sim 200$ m/s) tandis que u_2 dépend fortement de la température et s'annule avec ρ_s à T_λ .

Pour cela, il a fallu lui ajouter la notion de force de friction mutuelle entre les deux fluides, le fluide normal entraînant le fluide parfait via les tourbillons quantiques. C'est ce modèle complet qui a permis à Hall et Vinen [52] de décrire phénoménologiquement la formation de réseaux de tourbillons dans ledit réservoir.

4.1.1 Equations du mouvement HVBK

Un modèle macroscopique pour modéliser l'He II a été dérivé par un certain nombre de personnes [23, 53, 54, 56] et est connu comme "Hall · Vinen · Bekarevich · Khalatnikov" (équations du **HVBK**). Cet avantage de la théorie est limité par l'espace moyen entre les tourbillons qui est très petit par comparaison avec n'importe quelle échelle de longueur de l'écoulement. La seconde limitation est que l'interaction entre les tourbillons est non locale. Pour de telles situations, la vortacité superfluide, qui est discrète en nature, peut être rapprochée comme continuum, ayant pour résultat un champ superfluide de vortacité $\omega_s = \text{curl} v_s$. Les équations isothermes et incompressibles de HVBK peuvent être écrites comme :

les conditions d'incompressibilité :

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Les équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}_n) \mathbf{v}_n = -\frac{\nabla \mathbf{p}}{\rho} - \frac{\rho_s}{\rho} \mathbf{S} \nabla \mathbf{T} - \frac{\rho_s \nu_s}{\rho} \nabla |\omega_s| + \nu_n \nabla^2 \mathbf{v}_n + \frac{\rho_s}{\rho} \mathbf{F} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}_s) \mathbf{v}_s = -\frac{\nabla \mathbf{p}}{\rho} + \mathbf{S} \nabla \mathbf{T} - \frac{\rho_s \nu_s}{\rho} \nabla |\omega_s| - \mathbf{T} + \frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{F} \quad (4.10)$$

où v_n est la vitesse du normal fluide, ν_n est la viscosité cinétique du normale fluide, et p_n, p_s sont les pressions effectives ($\nabla p_s = (1/\rho) \nabla p - \frac{1}{2}(\rho_n/\rho) \nabla (v_n - v_s)^2$ et ($\nabla p_n = (1/\rho) \nabla p - \frac{1}{2}(\rho_s/\rho) \nabla (v_n - v_s)^2$ où p est la pression).

La force de friction mutuelle \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \hat{\omega}_s \times (\omega_s (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \nu_s \mathbf{curl} \hat{\omega}_s)) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{B}} \hat{\omega}_s \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \nu_s \mathbf{curl} \hat{\omega}_s) \quad (4.11)$$

avec :

$$\omega_s = \mathbf{curl} \mathbf{v}_s \quad ; \quad \hat{\omega}_s = \frac{\omega_s}{|\omega_s|} \quad (4.12)$$

avec : B et \hat{B} sont des coefficients de la force de friction mutuelle [14, 41]. Cette force est due aux collisions entre le fluide normal (principalement rotors, à la température concernant la plupart des expériences) et les lignes de vortex.

La tension \mathbf{T} décrit la propriété d'élasticité de la particule fluide dans les lignes du vortex (tourbillons). ce terme est sous la forme suivante :

$$\mathbf{T} = \nu_s \omega_s \times \mathbf{curl} \hat{\omega}_s \quad (4.13)$$

Ce terme réfléchit l'énergie par unité de longueur dans les lignes de vortex. Le paramètre de tension de vortex :

$$\nu_s = \frac{\Gamma}{4\pi} \log(\mathbf{b}_0/\mathbf{a}_0) \quad (4.14)$$

a la même dimension que la viscosité cinématique mais physiquement elle est très différente : elle représente la capacité d'une ligne de vortex d'osciller en raison des ondes de vortex qui peuvent être excités sur les lignes vortex. La quantité $b_0 = (|\omega_s|/\Gamma)^{-1/2}$ représente l'espace d'inter vortex. Nous nous référons Eqs. 4.9,4.10 comme équations originales de HVBK ¹.

1. Ce modèle fera l'objet des simulations numériques de l'écoulement de l'⁴He dans le chapitre (6).

4.1.2 Force de friction mutuelle :

Les travaux de Vinen et Hall [52, 53] ont permis d'écrire ce terme en général de la manière suivante suite aux travaux de Gorter & Mellink (1949)[51] basés sur l'expérimentation sur les différences de température et de pression .Ils ont proposé l'addition d'un terme de frottement.

Ce terme nommée force de frottement est écrit en général de la manière suivante :

$$F_{ns} = -\rho_s \rho_n A v_{ns}^2 v_{ns} \quad (4.15)$$

avec : $v_{ns} = v_n - v_s, v_{ns} = |\langle v_{ns} \rangle|$, A est fonction de la température de l'ordre $50 \text{ cm s}^{-1} \text{ g}^{-1}$. Cette forme de la force est utilisée dans les canaux pour la turbulence dans un écoulement à contre courant et généralement dans les cas stationnaires.

Dans le cas de L'Hélium II en rotation, Hall et Vinen [52, 53] proposent la forme suivante de la force de couplage :

$$F_{ns} = -B(\rho_n \rho_s / \rho) \hat{\omega} \times (\omega \times v_{ns}) - \dot{B}(\rho_n \rho_s / \rho) \times (\omega \times v_{ns}) \quad (4.16)$$

avec B et \dot{B} sont des coefficients qui dépendent de la température et reflètent l'ordre de frottement par interaction entre le vortex et le fluide normal . Ces coefficients sont donnés par le tableau 4.1 suivant pour différentes températures :

TABLE 4.1: Coefficients de frottements

T(°K)	B	\dot{B}
1.0	0.006	0.003
1.1	0.012	0.006
1.2	0.023	0.011
1.3	0.036	0.014
1.4	0.052	0.017
1.5	0.073	0.018
1.6	0.098	0.016
1.7	0.127	0.012
1.8	0.161	0.008
1.9	0.21	0.009
2.0	0.29	0.011
2.05	0.36	0.003
2.1	0.50	-0.030
2.15	1.09	-0.27

Dans le cas de lignes de vortex orientées d'une manière isotrope, la partie dissipative de la force de frottement est écrite sous la forme suivante :

$$F_{ns} = -\frac{B\rho_S\rho_N}{2\rho}\frac{2}{3}L_{\dot{a}}v_{ns} \quad \text{Avec : } L_{\dot{a}} = \langle L \rangle \quad (4.17)$$

Une autre technique pour la mesure de la vorticité dans l'He II est basée sur l'absorption du second bruit outil pour mesurer la densité L de la ligne de vortex.

4.1.3 Equations de Vinen

Ce modèle consiste à représenter la ligne de vortex sous forme de courbe $s = s(\xi, t)$ dans un espace tridimensionnel avec ξ étant la longueur de l'arc et t le temps. La vitesse instantanée du filament est :

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} = v_s + \beta s' \times s'' + B\beta s'' + Bs' \times v_{ns} \quad (4.18)$$

avec : $s' = \frac{\partial s}{\partial \xi}$ et $s'' = \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2}$, B : coefficient de la force de couplage
et :

$$\beta = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left(\frac{c}{a_0 \langle |s''| \rangle} \right) \approx \kappa \quad (4.19)$$

avec : Γ étant la circulation quantique défini par le rapport entre de la constante de Planck et la masse de l'Hélium. c : une constante d'ordre 1, $\langle |s''| \rangle$ est la courbure moyenne des tourbillons et $a_0 = 1.310^{-8} cm$ est le rayon du vortex quantifié. Les termes proportionnels à B' sont nuls.

La longueur de la ligne de vortex $l = \int \xi$ obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int (\alpha v_{ns} \cdot (s' \times s'') - \alpha \beta |s''|^2) d\xi \quad (4.20)$$

L'équation de Vinen a la forme suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = BL^{3/2} \chi_1 \rho_n \nu_{ns} - \frac{\chi_2 \Gamma L^2}{2\pi} \quad (4.21)$$

Dans cette formule (4.21), les paramètres χ_1 et χ_2 sont indéterminés. Une formule similaire trouvée récemment a permis de caractériser ces deux paramètres. Dans le cas stationnaire :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (4.22)$$

L'état d'équilibre de cette densité correspond à $L\hat{a} = \gamma^2 v_{ns}^2$, γ est en fonction de χ_1, χ_2 et est dépend de la température.

Les travaux de Lipniaki associent aux équations de mouvement du superfluide et du fluide normal la forme de la force de frottement suivante :

$$F_{ns} = B\kappa\rho_s L(q \times (q \times v_{ns}) - \frac{2}{3}V_{ns}(1 - q^2) + \beta I_0 c_1(1 - q^2)L^{1/2}\hat{v}_{ns}) \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = BI_0 c_1(1 - q^2)|\nu_{ns}|L^{3/2} - \beta Bc_2^2(1 - q^2)^2 L^2 - \text{div}(L\nu_L) \quad (4.24)$$

où :

$$v_L = v_s Bq \times v_{ns} + \beta BI_0 c_1(1 - q^2)L^{1/2}\hat{v}_{ns} \quad (4.25)$$

$$v_{ns} = v_n - v_s \quad (4.26)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\nabla \times v_s}{\kappa L} \quad \text{avec : } q = |\mathbf{q}| \quad (4.27)$$

$\rho_s, \rho_n, \beta \approx \kappa, c_1, c_2, I_0$ sont des constantes qui dépendent de la température.

Une expression alternative de F_{ns} est donnée comme suit :

$$F_{ns} = B\kappa\rho_s Lq(q \cdot v_{ns}) - v_{ns} \left(\frac{2 + q^2}{3} \right) + \beta BI_0 c_1(1 - q^2)L^{1/2}\hat{v}_{ns} \quad (4.28)$$

La force de couplage dépend de la densité L . Le système est fermé par la vitesse de l'enchevêtrement v_L , la vitesse du contre courant v_{ns} et le vecteur anisotropie \mathbf{q} .

4.1.4 Le modèle HVBK simplifié

Ce modèle simplifié consiste à réécrire le modèle HVBK ci-dessus mais sans le terme $-\nabla|\omega_s|$. En considérant la condition d'incompressibilité $\nabla \times v_n = 0, \nabla \times v_s = 0$, les équations de quantité de mouvement du fluide normal et du superfluide (4.9) et (4.11) seront réduites à :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \mathbf{v}_n \times \nabla \cdot \mathbf{v}_n = -\nabla \mathbf{p}_n + \nu_n \nabla^2 \mathbf{v}_n + \frac{\rho_s}{\rho} \mathbf{F}_{ns} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \times \nabla \cdot \mathbf{v}_s = -\nabla \mathbf{p}_s - \mathbf{T} - \frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{F}_{ns} \quad (4.30)$$

Avec p_s et p_n sont les pressions effectives telles que :

$$\nabla p_n = \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\rho_s}{\rho_n} S \nabla T \quad (4.31)$$

$$\nabla p_s = \frac{1}{\rho} \nabla P - S \nabla T \quad (4.32)$$

$\nu_n = \eta/\rho_n$ est la viscosité cinématique du fluide normal.

La force de tension est :

$$\mathbb{T} = -\nu_s \omega_s \times (\nabla \times \widehat{\omega}_s) \quad (4.33)$$

La force de frottement mutuel F_{ns} est :

$$F_{ns} = \frac{1}{2} B \widehat{\omega}_s \times [\omega_s \times (V_n - (V_s + \nu_s \nabla \widehat{\omega}_s))] + \frac{1}{2} B' \omega_s \times (V_n - V_s - \nu_s \nabla \times \widehat{\omega}_s) \quad (4.34)$$

avec :

$$\omega_s = \text{curl} V_s$$

$$\widehat{\omega}_s = \omega_s / |\omega_s|$$

$$\nu_s = (\kappa/4\pi) \log(b_0/a_0),$$

avec B, B' sont des grandeurs dépendant de la température. a_0 est le paramètre de noyau de tourbillon, $b_0 = (2\omega_s/\Gamma)^{-1/2}$ est l'espacement de tourbillon inter et $\Gamma \simeq 9.97 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{sec}$ est le quantum de circulation (le rapport de la constante de Plank et la masse d'un atome d'hélium).

Les équations HVBK ont été utilisées dans l'étude de l'He II à l'intérieur d'un cylindre en rotation et l'écoulement de Couette de l'He II. Les lignes de vortex du superfluide dissocient les excitations thermiques, ce qui mène à introduire une force de couplage entre le fluide normal et le superfluide nommée la force de frottement ou force de couplage. Les lignes de vortex du superfluide ont une énergie par unité de longueur appelée la tension. A cause de cette tension, les lignes de vortex oscillent. Ce modèle fera l'objet d'une partie de la simulation numérique de la turbulence quantique dans le chapitre cinq.

Chapitre 5

Modélisation mathématique

La description mathématique d'un écoulement commence par le choix d'un niveau d'approximation qui détermine la précision avec laquelle est évalué l'ensemble des paramètres du problème, contenant toute l'information disponible sur le phénomène physique étudié. Un milieu peut ainsi être décrit à l'échelle atomique, microscopique ou macroscopique. Le choix de ces deux dernières échelles amène à considérer le milieu comme un milieu continu. Dans ce travail, la description retenue est celle d'un fluide visqueux newtonien en écoulement incompressible modélisé à l'échelle microscopique. Les effets de convection et de viscosité sont pris en compte ce qui conduit aux équations de Navier-Stokes.

5.1 Equations de Navier Stockes

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, deux points de vue sont possibles. Le point de vue lagrangien consiste à suivre les particules dans leur mouvement, le point de vue eulérien depuis un domaine fixe. La description des écoulements de fluide repose généralement sur une formulation eulérienne qui permet de s'intéresser aux propriétés de l'écoulement dans les différentes zones du domaine fluide. Dans un référentiel eulérien, le domaine reste fixe au cours du temps et les particules de fluide traversent l'espace matériel décomposé en volumes de contrôles. Nous nous restreignons ici au cas des fluides dits newtoniens, ou linéaires visqueux, caractérisés par une loi de comportement telle que la relation entre la contrainte visqueuse et la déformation est linéaire. En première approximation, nous considérons l'écoulement comme incompressible. Les équations de

conservation de la masse et la quantité de mouvement prennent la formule locale suivante :

Dans l'espace physique : Dans un système cartésien $x = (x_1, x_2, x_3)$, les équations de quantité de mouvement et de continuité sont données par :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.2)$$

avec : p la pression statique et ν la viscosité cinématique

Dans l'espace spectral Dans cet espace, on tient compte de la condition d'orthogonalité entre le vecteur d'onde k et les modes $\hat{u}(k)$ traduite par l'égalité suivante :

$$k \times \hat{u}_i(k) = 0 \quad (5.3)$$

Le système d'équations 5.1, 5.2 sera donc réduit à l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \hat{u}_i(k) = T_i(k) \quad (5.4)$$

où $T_i(k)$ représente le terme non-linéaire tel que :

$$T_i(k) = M_{ijm}(k) \int \int \hat{u}_j(p) \hat{u}_m(q) \delta(k - p - q) d^3 p d^3 q \quad (5.5)$$

Avec :

$$M_{ijm}(k) = \frac{-\delta}{2} (k_m P_{ij}(k) + k_j P_{im}(k)) \quad (5.6)$$

δ étant le symbole de Kronecker et $P_{ij}(k)$ est l'opérateur de Projection sur le plan orthogonal au vecteur k . Cet opérateur s'écrit comme suit :

$$P_{ij}(k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad (5.7)$$

5.2 Modélisation statistique de la turbulence

Afin de préciser le contexte dans lequel se placent ces travaux, nous introduisons dans ce paragraphe différentes approches possibles quant à la prédiction numérique d'écoulements turbulents.

5.2.1 Simulation Numérique Directe *DNS*

La Simulation Numérique Directe (*Direct Numerical Simulation*, DNS) consiste à résoudre toutes les échelles de l'écoulement sans aucune hypothèse sur la modélisation de l'écoulement hormis les lois de comportement du fluide. Toutes les échelles spatiales de la turbulence sont résolues : des échelles dissipatives microscopiques de Kolmogorov jusqu'à l'échelle intégrale (L) contenant l'énergie cinétique. La taille de l'échelle de Kolmogorov est donnée par $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$ avec ε le taux d'énergie cinétique dissipée. Le nombre de mailles requis par une DNS pour résoudre toutes les échelles est donc dicté par la taille requise par les plus petites mailles et est proportionnel à $Re^{\frac{9}{4}}$. A titre indicatif pour un écoulement à nombre de Reynolds 10^4 , le nombre de mailles requis est de l'ordre de 10^9 . Les écoulements industriels restent donc pour la plupart hors d'atteinte des capacités informatiques actuelles. La DNS permet néanmoins de comprendre la dynamique de la turbulence et d'évaluer beaucoup de quantités inaccessibles expérimentalement (notamment toutes celles faisant intervenir la pression). Elle est également utilisée pour obtenir des solutions numériques de références utiles pour le développement de modèles de turbulence. La DNS est utilisée dans les domaines de la combustion turbulente, la magnétohydrodynamique, les écoulements diphasiques turbulents Moin et Mahesh (1998)[95].

5.2.2 RANS

La modélisation par moyenne de Reynolds des équations de Navier-Stokes (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*, RANS) utilise la décomposition des variables décrivant le mouvement (vitesse et pression dans le cas d'un écoulement incompressible) en leur moyenne statistique et leur fluctuation autour de cette moyenne. Dans une première approche, le mouvement moyen est considéré stationnaire et la totalité du mouvement fluctuant comme aléatoire. La prise de moyenne des équations de Navier-Stokes régissant l'écoulement associé à cette décomposition conduit à un système d'équations pour le mouvement moyen dans lequel apparaissent des termes fonction des inconnues : les corrélations doubles des vitesses fluctuantes (les composantes du tenseur des contraintes turbulentes ou *tenseur de Reynolds*). La résolution de ce système nécessite des lois de fermeture pour modéliser ces termes. Dans la pratique, la modélisation RANS permet d'accéder aux grandeurs moyennes

5.3 Simulation des Grandes Echelles LES

5.3.1 Principe

Un bon compromis est offert par la Simulation des Grandes Échelles (SGE ou LES pour *Large Eddy Simulation*) qui, avec des temps de calcul raisonnables, donne des résultats d'une précision supérieure à celle des méthodes RANS et peut traiter des problèmes instationnaires. La différence entre DNS, RANS et LES est représentée schématiquement sur la Fig. 5.1. Il est important de souligner que les 3 méthodes présentées ci-dessus sont les plus répandues mais ne sont pas les seules. Il existe en effet des approches hybrides telles que les méthodes URANS (*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*), la VLES (*Very Large Eddy Simulation*), la DES (*Detached Eddy Simulation*), la MILES (*Monotone Integrated Large Eddy Simulation*)... Un aperçu des particularités de certaines de ces méthodes est notamment donné par Spalart (2000)[128] et par Nikitin et al. (2000)[105].

La SGE utilise l'idée de séparation entre les grandes échelles et les petites échelles

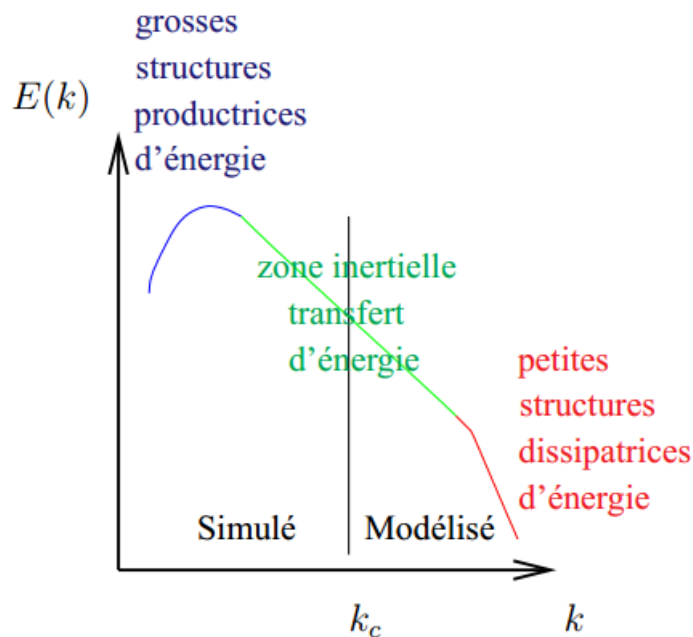


FIGURE 5.2: Représentation schématique de la séparation des échelles en SGE.

(ou échelles sous-maille) introduite en 1963 par Smagorinsky pour l'étude des mouvements atmosphériques (Smagorinsky (1963)[126]). Comme son nom l'indique, la SGE simule les grandes échelles alors que les échelles sous-maille sont modélisées. Mathématiquement, la séparation d'échelles s'effectue au moyen d'un filtre

passe-bas en fréquence (passe-haut en échelles). La limite entre grandes et petites échelles est déterminée par la longueur de coupure $\overline{\Delta}$ qui est associée à la fréquence de coupure k_c dans l'espace spectral. Ce principe est représenté sur le spectre d'énergie cinématique de la Fig. 5.2. Au niveau des petites fréquences, qui correspondent aux grosses structures de l'écoulement, il y a production d'énergie. Aux fréquences intermédiaires, on trouve une zone dite inertielle où s'effectue un transfert d'énergie des grosses vers les petites structures selon la cascade de Kolmogorov. Enfin, à l'opposé du spectre, les petites structures, qui sont au niveau des hautes fréquences, dissipent l'énergie sous l'action de la viscosité moléculaire. La fréquence de coupure k_c doit se trouver dans la zone inertielle du spectre. Dans la pratique c'est le maillage qui est le filtre et qui fixe ainsi la fréquence de coupure. C'est donc du choix du maillage que découle la séparation entre les échelles qui seront simulées et celles qui seront modélisées.

Le principe du filtrage dans l'espace fréquentiel est présenté sur la Fig. 5.3 en comparaison avec les méthodes RANS et DNS.

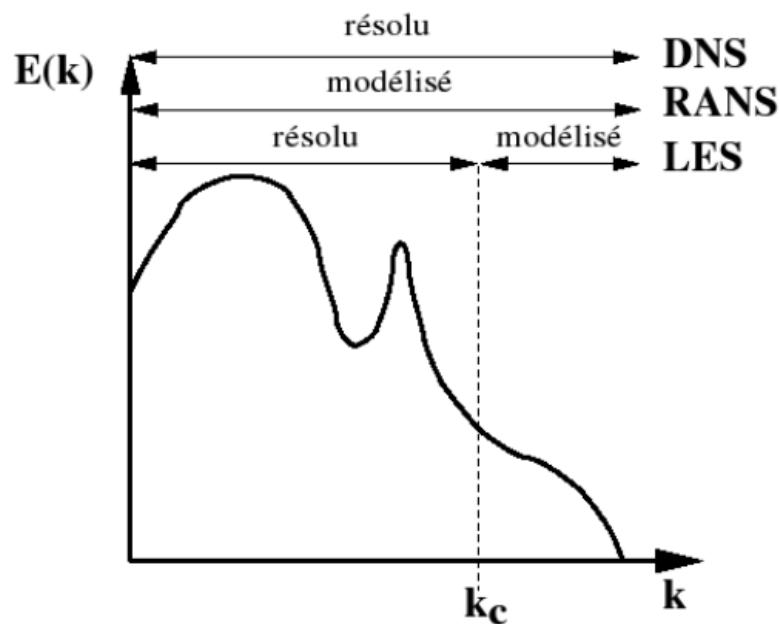


FIGURE 5.3: Principe du filtrage en LES dans l'espace fréquentiel sur le spectre d'énergie cinématique et comparaison avec les approches RANS et DNS

5.3.2 Filtrage passe-bande

Afin d'appliquer le filtre passe-bas en fréquence, Sagaut (1998 [120], 282 p) propose de formuler le système d'équations-bilan dans l'espace spectral. Le passage de l'espace physique à l'espace spectral se fait au moyen d'une transformée de Fourier :

$$\widehat{\phi}(K, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \phi(x, t) e^{-iKx} d^3x \quad (5.8)$$

Il est ainsi possible d'écrire le système d'équations précédent dans l'espace spectral et d'effectuer le filtrage dans cet espace (se référer à Sagaut (1998[120], 282 p) et Lesieur et al. (2005[80], 219 p) pour plus d'informations sur la LES spectrale).

Si on reste dans l'espace physique, le filtrage homogène et isotrope¹ d'une équation se traduit par un produit de convolution :

$$\overline{\phi}(X, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, t) G(X - \xi, t) d^3\xi \quad (5.9)$$

On le note : $\phi = g \times \phi(X, t)$, $G(x, t)$ étant le filtre.

La partie non-résolue de ϕ , notée ϕ' s'écrit : $\phi' = \phi - \overline{\phi} = \delta_D - G) \times \phi$, où δ_D est l'impulsion de Dirac.

Certaines propriétés doivent être imposées au filtre afin de pouvoir l'appliquer aux équations-bilan :

– conservation des constantes :

$$\overline{a} = a \quad (5.10)$$

– linéarité :

$$\overline{\phi + \psi} = \overline{\phi} + \overline{\psi} \quad (5.11)$$

– commutativité avec la dérivation :

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} \quad (5.12)$$

Il est important de remarquer que les filtres qui vérifient ces propriétés ne sont pas, en général, des opérateurs de Reynolds, ce qui signifie que pour ces filtres :

$$\overline{\overline{\phi}} \neq \overline{\phi} \quad (5.13)$$

1. Les filtres homogènes et isotropes ont des caractéristiques invariantes par translation ou rotation, ce qui implique que le milieu étudié est non-borné. Comme l'explique Sagaut (1998[120], 282 p), ce cas idéal est le seul permettant de mener le développement jusqu'au bout. Cependant, lorsqu'on s'intéresse aux zones proches des frontières d'un domaine ou lorsqu'on a besoin de faire varier la longueur de coupure $\overline{\Delta}$ dans l'espace, cette hypothèse n'est plus valable. Dans ce cas il faut revoir la définition du filtrage.

$$\overline{\phi} \neq 0 \quad (5.14)$$

Les filtres homogènes et isotropes les plus utilisés en SGE sont le filtre boîte, le filtre gaussien et le filtre porte. Une description plus détaillée de ces filtres est donnée par Sagaut (1998[120], 282 p).

Après application du filtrage aux équations de Boussinesq et aux équations Bas Mach, on obtient les systèmes suivants² :

$$\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i \overline{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{ref}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu_{ref} \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial^2 x_j} - \beta(\overline{T} - T_{ref})g_i \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{T} \overline{U}_j}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial^2 x_j} \quad (5.17)$$

et :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho U}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho U}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho U}_i \overline{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_j} \right) + (\overline{\rho} - \rho_{ref})g_i \quad (5.19)$$

$$C_p \left(\frac{\partial(\overline{\rho T})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho U}_j \overline{T})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \overline{P}_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right) \quad (5.20)$$

En ce qui concerne les équations Bas Mach, la densité étant variable il est pratique d'introduire un autre type de filtrage, basé sur la moyenne de Favre, symbolisée par un $\tilde{\cdot}$ et qui permet de s'affranchir des termes triples $\overline{\rho U_i U_j}$ et $\overline{\rho U_j T}$. La moyenne de Favre d'une variable ϕ est définie de la manière suivante :

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho \phi}}{\overline{\rho}} \quad (5.21)$$

On peut alors, de la même manière qu'avec le filtrage "classique", définir une partie non résolue :

$$\phi'' = \phi - \tilde{\phi}$$

2. Le cas des équations incompressibles n'est pas présenté car le filtrage de ces équations est similaire à celui des équations de Boussinesq

En utilisant ce filtrage de Favre les équations Bas Mach, deviennent :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}U_i\tilde{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}^i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} \right) + (\bar{\rho} - \rho_{ref})g_i \quad (5.23)$$

$$C_p \left(\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}U_j\tilde{T})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}} \right) \quad (5.24)$$

Dans ces équations filtrées apparaissent des termes non-résolus : $\overline{U_i U_j}$, $\overline{U_j T}$, $U_i \tilde{U}_j$ et $\tilde{U}_j T$. Pour que les équations puissent être résolues ces termes doivent être exprimés en fonction de \bar{U} , U^i , \bar{T} et T^i pour les équations de Boussinesq et de \tilde{U} , U^i , \tilde{T} et T^i pour les équations Bas Mach.

5.3.3 Formulation discrète

Résolution temporelle Un algorithme à pas fractionnaire est employé pour résoudre les équations de masse et de moment (Chorin). La première étape, dite de prédiction, consiste à calculer les composantes de la vitesse. L'équation de masse est ensuite prise en compte durant la seconde étape (dite de correction) : une équation de Poisson est résolue sur la pression ce qui permet de corriger le flux de masse en vérifiant le critère d'incompressibilité de l'écoulement (champ à divergence nulle). Le schéma en temps est d'ordre 2. Un schéma de Crank-Nicolson est employé pour les termes convectifs et diffusifs tandis que les termes sources et le flux de masse sont estimés à partir d'un schéma d'Adams-Bashforth (à l'ordre 2).

Cadre des Volumes Finis Une méthode des Volumes Finis colocalisés est employée. Les grandeurs physiques sont définies au centre des volumes de contrôle sur lesquels les équations sont intégrées afin d'obtenir une valeur moyenne sur le volume. La discrétisation spatiale est centrée. Afin de prendre en compte les non-orthogonalités dues aux déformations de mailles, un procédé de reconstruction itérative du gradient est prévu.

5.3.3.1 Problème de Fermeture

La modélisation des petites échelles consiste en l'approximation des termes de couplage en se basant sur l'information que contiennent les échelles résolues. Mais le problème qui se pose est que ces petites échelles existent ou non dans la solution exacte à n'importe quel point de l'espace et du temps. Utiliser les propriétés physiques pour relier l'existence des échelles sous maille à certaines propriétés des échelles résolues et introduire de nouvelles inconnues telles que l'énergie cinétique sous maille. Une fois l'existence des modes sous maille est déterminée, leurs interactions avec les échelles résolues doivent être reflétées. L'élaboration de modèles sous-maille fait cependant appel à l'hypothèse selon laquelle si les échelles sous-maille existent, alors l'écoulement est localement (en espace et en temps) turbulent. Deux stratégies de modélisation existent. La première, appelée modélisation structurelle, consiste à modéliser le tenseur des contraintes sous-maille en fonction du champ résolu. La seconde, appelée modélisation fonctionnelle, consiste à modéliser les effets des contraintes sous-maille sur le champ résolu mais pas le tenseur lui-même. Devant la profusion de modèles décrits dans la littérature, nous n'aborderons que les modèles les plus utilisés, en essayant de mettre l'accent sur leurs avantages et inconvénients. Pour une revue détaillée des modèles proposés, le lecteur pourra se référer à [120]. Pour qu'une modélisation des petites échelles soit correcte, un ensemble de contraintes doit être pris en considération. En voici, une énumération, Sagaut [120] : Les propriétés des équations de Navier-Stokes doivent exister dans les équations de la SGE ; en particulier, les propriétés d'invariance et de symétrie. Le comportement des modèles doit conserver la dynamique des grandes échelles de tourbillons. Dans le cas d'un écoulement laminaire, l'effet du modèle sous maille doit être nul. Numériquement, le modèle et ses propriétés ne doivent pas dépendre du schéma de discrétisation et de l'opérateur de filtrage explicite. Le modèle ne doit pas engendrer des instabilités numériques. Enfin, le modèle ne doit pas alourdir le temps de la simulation.

5.3.4 La modélisation sous-maille

Une fois le filtrage et les décompositions effectués, il reste à modéliser les interactions faisant intervenir les échelles sous-maille représentées par le terme τ_{ij} . Comme le souligne Sagaut (1998[120], 282 p), pour être utilisable un modèle doit satisfaire deux types d'exigences :

- physiques : il doit conserver les propriétés fondamentales de l'équation de départ (comme par exemple l'invariance galiléenne), s'annuler là où il n'existe pas d'échelles sous-maille, induire un effet de même nature que les interactions sous-maille et ne pas perturber la dynamique des échelles résolues.
- numériques : il doit être d'un coût algorithmique acceptable, ne pas déstabiliser la simulation numérique et être discrétisable.

Les paragraphes suivants présentent différentes modélisations possibles pour le terme τ_{ij} .

5.3.5 Modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij}

Il existe de nombreux modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij} . En effet, beaucoup de déclinaisons des modèles de base ont été développées.

Modèles basés sur la viscosité sous-maille (modèles fonctionnels) Ce type de modèles utilise l'hypothèse de Boussinesq, qui propose de modéliser le terme sous-maille sous une forme analogue à celle du terme visqueux en introduisant une viscosité sous-maille ν_{sm} :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_{sm}\bar{S}_{ij} \quad (5.25)$$

où \bar{S}_{ij} est le tenseur des déformations filtré :

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.26)$$

Comme seule la partie anisotrope du tenseur sous-maille est modélisée, la partie isotrope de ce tenseur est ajoutée à la pression qui devient alors :

$$P^* = P + \frac{1}{3}\rho\tau_{kk} \quad (5.27)$$

Cette modélisation est basée sur deux hypothèses :

- l'action des échelles sous-maille sur les échelles résolues est essentiellement énergétique,
- on ne considère que la cascade directe d'énergie³, négligeant ainsi la cascade inverse⁴.

3. énergie transférée des grandes échelles vers les petites échelles.

4. faible quantité d'énergie transmise par les petites échelles aux grandes échelles.

5.3.5.1 Modèle de Smagorinsky

Différents modèles proposent des expressions de ν_{sm} . Le plus connu est le modèle de Smagorinsky qui fournit une expression de ν_{sm} en fonction des échelles résolues (Smagorinsky (1963)[126]). ν_{sm} est supposée proportionnelle au produit d'une échelle de longueur caractéristique : $\bar{\Delta}$ et d'une vitesse turbulente caractéristique : $\bar{\Delta}\|\bar{S}\|$, avec $\|\bar{S}\| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$. Pour trouver son expression, on utilise l'analyse dimensionnelle qui donne :

$$\nu_{sm} \propto \tilde{\varepsilon}^{1/3} \bar{\Delta}^{-4/3} \quad (5.28)$$

où $\tilde{\varepsilon}$ est le flux d'énergie à travers la coupure.

Le modèle est développé dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope pleinement développée pour lequel $\tilde{\varepsilon}$ peut être évalué en utilisant la forme du spectre de Kolmogorov : $E(k) = K_o \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, avec $K_o \sim 1.4$, ainsi que la relation suivante :

$$\langle \|\bar{S}\|^2 \rangle = \langle 2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} \rangle = \int_0^{k_c} 2k^2 E(k) dk \quad (5.29)$$

En faisant de plus l'hypothèse d'équilibre local qui stipule qu'il n'y a pas d'accumulation d'énergie, et donc que le taux d'énergie produite ε_I , le taux d'énergie transférée à travers la coupure $\tilde{\varepsilon}$ et le taux d'énergie dissipée par les effets visqueux ε sont égaux (voir la Fig. 5.4), le modèle de Smagorinsky s'écrit : sur la Fig. 5.3 en comparaison avec les méthodes RANS et DNS.

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\Delta})^2 \|\bar{S}\| \quad (5.30)$$

où C_s est une constante.

Ce modèle est le plus ancien et le plus simple. Il sert encore souvent de modèle de référence. Cependant il présente plusieurs inconvénients (Germano et al. (1991)[50]; Meneveau et Katz (2000)[91]) :

- la constante C_s n'est pas universelle, dans la pratique elle doit être adaptée au cas par cas,
- il est trop dissipatif,
- il ne s'annule pas à la paroi,
- il simule mal les régimes de transition laminaire-turbulent,
- il ne peut pas simuler la cascade d'énergie inverse (backscatter).

De plus, dans le cadre des faibles nombres de Reynolds les hypothèses menant au spectre de Kolmogorov ne sont plus justifiées et le modèle surestime alors la

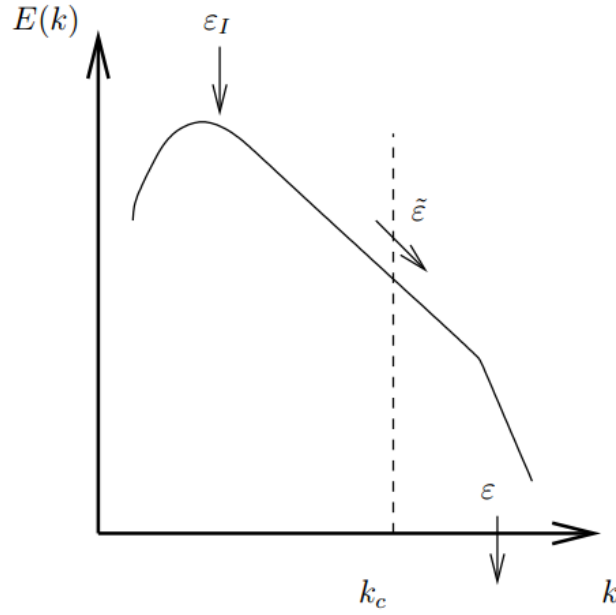


FIGURE 5.4: Transfert d'énergie

viscosité sous-maille. Voke (1994)[146] a étudié l'utilisation d'autres formes de spectres plus exactes dans de telles situations. L'allure du spectre peut également être modifiée sous l'effet de mécanismes influant sur la dynamique de la turbulence (intermittence, effets de compressibilité,...). Bataille et al. (2005)[19] ont proposé une méthode générale permettant de dériver un modèle sous-maille à partir d'une forme de spectre donnée.

5.3.5.2 Modèle WALE

Nicoud et Ducros (1999)[101] ont proposé le modèle WALE (Wall Adapting Local Eddy), également basé sur les échelles résolues, qui prend en compte à la fois le tenseur des déformations et le tenseur de rotation afin d'améliorer les performances de la LES obtenues avec le modèle de Smagorinsky. Le modèle WALE présente l'avantage d'être invariant par translation ou rotation des coordonnées et d'être utilisable pour des géométries complexes. Sa formulation est :

$$\nu_{sm} = (C_w \bar{\Delta})^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (5.31)$$

où C_w est une constante et $s_{ij}^d = \bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\bar{S}_{mn} \bar{S}_{mn} + \bar{\Omega}_{mn} \bar{\Omega}_{mn})$, $\bar{\Omega}_{ij}$ étant le tenseur de rotation filtré :

$$\bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.32)$$

Les auteurs ont observé les améliorations apportées par ce modèle par rapport au modèle de Smagorinsky dans les cas test de turbulence isotrope et d'un écoulement en canal : la viscosité sous-maille s'annule à la paroi en suivant la loi désirée ($\propto y^3$) et le modèle est capable de simuler les régimes de transition.

5.3.5.3 Modèles de la fonction de structure

Contrairement aux deux précédents, les modèles de cette famille sont basés sur l'évaluation de ν_{sm} à partir de l'énergie à la coupure. L'énergie à la coupure est elle-même exprimée par une fonction de structure notée F_2 :

$$F_2(\vec{x}, \vec{r}, t) = \left\langle \left[\overline{\vec{U}}(\vec{x}, t) - \overline{\vec{U}}(\vec{x} + \vec{r}, t) \right]^2 \right\rangle_{\|\vec{r}\|=\Delta_x} \quad (5.33)$$

Ceci conduit, dans le cas de la turbulence homogène isotrope, à l'expression :

$$\nu_{sm} = 0.105 C_K^{-3/2} \Delta_3 [F_2]^{1/2} \quad (5.34)$$

Une description détaillée de ce modèle est donnée par Métais et Lesieur (1992)[94] et Lesieur et al. (2005[80], 219 p).

Des améliorations du modèle de base ont été proposées ultérieurement (Ackermann et Métais (2001)[1] ; Lesieur et al. (2005[80], 219 p)) :

- modèle de la fonction de structure filtrée,
- modèle de la fonction de structure sélective,
- modèle de la fonction de structure sélective modifiée.

5.3.5.4 Modèles utilisant l'énergie cinétique sous-maille

L'hypothèse de base de ces modèles est que si l'énergie cinétique à la coupure est non nulle, alors il existe une action sous-maille. Comme pour le modèle de Smagorinsky, la viscosité sous-maille est exprimée en fonction d'une échelle de longueur, $\bar{\Delta}$, et d'une échelle de vitesse. Cette dernière est cette fois exprimée en fonction de l'énergie cinétique sous-maille $q_{sm}^2 \frac{1}{2} \overline{U_i' U_j'}$.

$$\nu_{sm} = C_m \bar{\Delta} \sqrt{q_{sm}^2} \quad (5.35)$$

où C_m est une constante. q_{sm} est elle-même évaluée à l'aide de son équation d'évolution dans laquelle les termes de diffusion et de dissipation sont modélisés.

5.3.5.5 Modèles d'échelles mixtes

Ces modèles sont obtenus en effectuant une moyenne pondérée d'un modèle basé sur les échelles résolues et d'un autre basé sur l'énergie à la coupure ou l'énergie sous-maille. On en, comme considère donc toujours $\bar{\Delta}$, et, comme étant l'échelle de longueur caractéristique, échelle de vitesse, on utilise une moyenne pondérée de $\bar{\Delta} \|\bar{S}\|$ et de $\sqrt{q_{sm}^2}$.

5.3.6 Modèles structurels

Les modèles structurels les plus connus sont :

5.3.6.1 Les modèles à équations de transport

Une équation de transport est écrite et résolue pour chaque composante du tenseur sous-maille, après modélisation des différents termes et choix des valeurs des constantes. Cette approche fut initialement proposée par Deardorff dans le cadre de l'étude de la turbulence atmosphérique (se référer à Deardorff (1973)[39] pour une description précise de cette méthode). Un modèle de ce type a récemment été mis au point par Chaouat et Schiestel (2005)[31].

5.3.6.2 Les modèles de similarité d'échelles

Ces modèles sont basés sur l'hypothèse de similarité entre la structure des plus grandes échelles sous-maille et celle des plus petites échelles résolues, introduite par Bardina et al. (1980)[13]. Le tenseur $\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j$ est approximé par $K(\widehat{\overline{U_i U_j}} - \widehat{\bar{U}_i \bar{U}_j})$, où K est une constante et $\widehat{}$ désigne un second filtre, dont la longueur de coupure $\widehat{\Delta}$ est supérieur à la longueur de coupure initiale $\bar{\Delta}$.

5.3.7 Modèles mixtes

Il s'agit d'exprimer le terme sous-maille comme une combinaison linéaire de termes provenant de deux types de modèles différents (un fonctionnel et un structurel).

En effet, le point fort des modèles basés sur une viscosité sous-maille est la reproduction du transfert d'énergie mais ils ne sont pas conçus pour représenter la structure du tenseur sous-maille et souvent ils ne permettent pas la prise en compte du backscatter. À l'inverse, les modèles structurels respectent mieux la structure du terme sous-maille et peuvent simuler l'effet de backscatter mais sont moins performants en ce qui concerne les transferts d'énergie (ils sont trop peu dissipatifs). Un moyen d'obtenir des modèles qui se comportent correctement dans les deux domaines est donc de combiner un modèle de chaque catégorie (se référer à Sagaut (1998[120], 282 p) pour des exemples de modèles mixtes).

5.4 Les modèles dans l'espace spectral

Soit u , une variable sous forme de développement infini en séries de fonctions ϕ_k telle que :

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k \phi_k \quad (5.36)$$

Le principe de la méthode spectrale est de rechercher la solution sous la forme précédente où \hat{u}_k sont des coefficients spectraux qui dépendent de toutes les valeurs de u dans l'espace physique. ϕ_k sont les fonctions de base, en général orthogonales au sens de produit scalaire.

Le développement en fonction du système orthogonal introduira une transformation linéaire entre u et le développement de ses coefficients généralement appelée transformation finie $\{\hat{u}_k\}$. Cette transformation est entre l'espace physique et l'espace de transformation. En pratique ces développements sont basés :

- Soit sur des séries de Fourier
- Soit sur des séries de Chebyshev ou Legendre

Si la solution u est C^∞ , alors les coefficients \hat{u}_k décroissent très vite et on parlera alors d'une convergence spectrale. Ceci rend l'utilisation des méthodes spectrales particulièrement intéressantes dans l'étude de la stabilité de l'écoulement et dans la simulation directe de la turbulence.

5.4.1 Principes de la méthode spectrale pour les équations aux dérivées partielles

5.4.1.1 Sommes de Convolution

Considérons un traitement Fourier Galerkin du terme quadratique :

$$w(x) = u(x)v(x) \quad (5.37)$$

Le développement en séries infinies du terme quadratique $w(x)$ est :

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x)e^{-ikx} dx \quad (5.38)$$

avec

$$U(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{u}_m e^{imx}, V(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{v}_m e^{inx} \quad (5.39)$$

où U, V sont approximées par leurs séries de Fourier.

L'équation 5.37 devient :

$$\widehat{W}_k = \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n, \quad -N/2 \leq k \leq N/2 \quad (5.40)$$

5.4.1.2 Méthodes pseudo-spectrales

L'évaluation de cette sommation 5.40 consiste à appliquer les transformées de Fourier inverses pour transformer \hat{u}_m et \hat{v}_n dans l'espace physique et ensuite une transformée de Fourier à w_k pour déterminer \hat{w}_k tels que :

Dans l'espace physique :

$$U_j = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} \hat{u}_k e^{ikx}, j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.41)$$

$$V_j = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} \hat{v}_k e^{ikx}, j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.42)$$

$$W_j = U_j V_j \quad (5.43)$$

et :

$$\widehat{W}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} W_j e^{-ikx}, k = -\frac{N}{2} \dots + \frac{N}{2} - 1 \quad (5.44)$$

avec :

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}$$

La relation d'orthogonalité aboutit à :

$$\begin{aligned} \widehat{W}_k &= \sum_{m+n=k} \widehat{u}_m \widehat{v}_n + \sum_{m+n=k \pm N} \widehat{u}_m \widehat{v}_n \\ &= \widehat{w}_k + \sum_{m+n=k \pm N} \widehat{u}_m \widehat{v}_n \end{aligned} \quad (5.45)$$

Le second terme à droite est l'erreur d'aliasing.

5.4.1.3 Erreurs numériques : erreurs d'aliasing

L'enlèvement des erreurs d'aliasing par troncation nommé aussi la règle 3/2 utilise une transformation avec M points tel que $M \geq 3N/2$:

$$y_j = \frac{2\pi j}{M} \quad (5.46)$$

$$U_j = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \widehat{u}_k e^{iky}, j = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (5.47)$$

$$V_j = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \widehat{v}_k e^{ikx}, j = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (5.48)$$

$$W_j = U_j V_j \quad (5.49)$$

où :

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_k |k| \leq N/2, \text{ Sinon } \tilde{u}_k = 0$$

de la même manière :

$$\tilde{W}_k = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} W_j e^{-iky}, k = -M/2, \dots, M/(2-1) \quad (5.50)$$

Alors :

$$\tilde{W}_k = \sum_{m+n=k} \tilde{u}_m \tilde{v}_n + \sum_{m+n=k \pm M} \tilde{u}_m \tilde{v}_n \quad (5.51)$$

Les \tilde{W}_k considérées correspondent à $k \leq N/2$. M est choisi de telle manière que le terme de droite disparaîtra dans cet intervalle de k. Cette méthode de transformation compte $(45/4) \log 2 (3/2 N)$ avec la condition $M \geq \frac{3N}{2} - 1$

Cette technique de de-aliasing est souvent référée à la règle de 2/3.

5.4.2 Discrétisation temporelle- Méthode de Runge Kutta

Dans la plus part des applications des méthodes spectrales aux équations aux dérivées partielles, la discrétisation spatiale est spectrale alors que la discrétisation temporelle est assurée au moyen des différences finies. Le choix d'un schéma de discrétisation dépend des facteurs suivants : la précision, la stabilité, et l'espace de stockage. On s'intéressera dans cette partie au schéma standard de Runge Kutta.

Ces méthodes sont souvent combinées aux méthodes spectrales pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Dans cette thèse, une discrétisation temporelle à l'aide du schéma de Runge Kutta d'ordre 3 est appliquée. La formulation équivalente est :

$$\begin{aligned}
 U^{(1)} &= U^n \\
 G^{(1)} &= F(U^{(1)}, t_n) \\
 U^{(2)} &= U^{(1)} + \frac{1}{3}\Delta t G^{(1)} \\
 G^{(2)} &= -\frac{5}{9}G^{(1)} + F(U^{(2)}, t_n + \frac{1}{3}\Delta t) \\
 U^{(3)} &= U^{(2)} + \frac{15}{16}\Delta t G^{(2)} \\
 G^{(3)} &= -\frac{153}{128}G^{(2)} + F(U^{(3)}, t_n + \frac{3}{4}\Delta t) \\
 U^{n+1} &= U^{(3)} + \frac{8}{15}G^{(3)}
 \end{aligned}$$

5.4.3 Exemple de la turbulence homogène

Quand la turbulence est homogène (elle ne varie pas statistiquement par translations), il est recommandé de travailler dans l'espace de Fourier. L'introduction de la représentation de Fourier peut être utilisée dans le cas mathématique simple qui considère un écoulement idéal dans une boîte cubique de côté L . on suppose aussi que les conditions de frontières sur les différentes faces du cube sont cycliques. Cette condition permet d'avoir un nombre infini de cubes identiques de façon à avoir un écoulement périodique de période L dans les trois directions de l'espace. Soit $\vec{u}(\vec{x}, t)$, le champ de vitesse périodique de période L . Il est exprimé en séries

infinies :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{n_1, n_2, n_3=-\infty}^{+\infty} \left[e^{\frac{2\pi}{L}(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3)} \right] \hat{u}(n_1, n_2, n_3, t) \quad (5.52)$$

avec n_1, n_2, n_3 des entiers.

On introduit le vecteur d'onde \vec{k}

$$\vec{k} = \left(\frac{2\pi}{L} n_1, \frac{2\pi}{L} n_2, \frac{2\pi}{L} n_3 \right) \quad (5.53)$$

La transformée de Fourier de $\vec{u}(\vec{x}, t)$ est définie par :

$$\tilde{u}(\vec{x}, t) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \int e^{ikx} \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (5.54)$$

$d\vec{x} = dx_1 dx_2 dx_3$. Généralement, en turbulence homogène, $\vec{u}(\vec{x}, t)$ ne décroît pas rapidement à l'infini. Pour sa détermination, on utilise la transformée de Fourier inverse :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \int e^{ikx} \vec{u}(\vec{k}, t) \quad (5.55)$$

Après transformations, on obtient :

$$\tilde{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{vol(B_i)} \int_{B_i} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 d\vec{k} \int e^{ikx} \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (5.56)$$

Chapitre 6

Analyse numérique du budget d'énergie spectrale en turbulence spectrale

6.1 Introduction

En dessous de la température de transition $T_\lambda = 2,17K$, l'hélium liquide devient superfluide et peut être vu comme la superposition de deux fluides en interaction : un fluide visqueux Newtonien, le fluide normal, et un fluide sans viscosité, le superfluide (à proprement parler) dont la vorticité est concentrée sous la forme de vortex quantiques. On dit alors que l'h elium superfluide est un fluide quantique (et non classique). La composante superfluide devient largement majoritaire vers les tr es basses temp eratures. La dynamique de ces deux composantes est r egie respectivement par les  equations de Navier-Stokes et d'Euler, coupl ees par une force macroscopique rendant compte de l'interaction entre les vortex quantiques du superfluide et les excitations thermiques du fluide normal ( a l' echelle microscopique). Il s'agit du cadre g en eral du mod ele  a deux fluides de la superfluidit e initiée par Landau [72]. Depuis les ann ees 1950, la dynamique des fluides quantiques a  et e  etudi ee surtout exp erimentalement, avec la motivation de comprendre en quoi le ph enom ene de superfluidit e modifie la dynamique classique des fluides (Vinen and J.J. Niemela (2002) [143]). Les travaux th eoriques et num eriques reposent sur des mod elisations simplifi ees dans lesquelles la r etroaction de la composante normale

sur la composante superfluide est négligée¹; les conditions aux bords sont également généralement ignorées. Ces études ont conduit à de nombreux progrès dans notre compréhension de la superfluidité, cependant un certain nombre d'observations restent inexplicables, en particulier dans le régime turbulent. Nos travaux récents dans ce domaine se distinguent des travaux précédents en soulignant l'importance de la rétroaction de la composante normale sur la composante superfluide, en particulier dans le régime turbulent.

L'étude de la turbulence superfluide (ou turbulence quantique) s'est imposée comme une voie originale pour étudier le rôle de la dissipation visqueuse en turbulence, la température constituant une variable d'ajustement des effets de la viscosité aisément contrôlable dans les expériences. Nous sommes plus particulièrement intéressés par le régime des températures basses mais non nulles, pour lesquelles la composante superfluide domine. Nous voulons comprendre par quel(s) mécanisme(s) le fluide parvient cependant à dissiper son énergie cinétique. Dans ce cas, le transfert d'énergie entre les deux composantes, normale et superfluide, devrait jouer un rôle fondamental. Enfin, la description actuelle de la turbulence superfluide repose sur l'hypothèse centrale que la dissipation totale d'énergie cinétique et l'enstrophie superfluide sont liées par une relation de proportionnalité similaire à celle qui existe pour les fluides Newtoniens. Le coefficient de proportionnalité (homogène à une viscosité cinématique) permet a priori de définir une viscosité effective pour le fluide. Cette modélisation, élaborée pour rendre compte de résultats expérimentaux, est auto-consistante mais l'hypothèse centrale sur laquelle elle repose n'a été jamais testée, ni expérimentalement, ni numériquement. Notre projet vise également à progresser sur ce point. Les implications pour l'interprétation de nombreuses expériences, et en particulier de celles citées précédemment, est immédiate.

Après les travaux pionniers de Landau [66], un modèle pour la modélisation macroscopique ^4He II a été dérivé par les équations Hall · Vinen · Bekharevich · Khalatnikov (HVBK)². Ces équations ont été établies en supposant que les configurations d'écoulement dans lesquels il existe un grand nombre de lignes de tourbillons plus ou moins alignées dans la même direction. Alors que dans le modèle d'origine Landau les deux fluides sont indépendants; une force de friction mutuelle est introduit dans le modèle HVBK. Ces équations sont écrites de la manière suivante [15] :

1. Par exemple dans le célèbre modèle de filaments de vorticité de Schwarz [129]

2. Ce modèle est également prévu, comme indiqué par Barenghi et al. [15] que "*the use of the HVBK equations at high Reynolds numbers, although not exact, should provide us with a useful approximation*".

les conditions d'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_s = 0, \nabla \cdot \mathbf{V}_n = 0 \quad (6.1)$$

Les équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} + (\mathbf{V}_n \cdot \nabla) \mathbf{V}_n = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\rho_s}{\rho_n} \mathbf{S} \nabla \mathbf{T} + \nu_n \nabla^2 \mathbf{V}_n + \frac{\rho_s}{\rho} \mathbf{F}_{ns} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} + (\mathbf{V}_s \cdot \nabla) \mathbf{V}_s = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{S} \nabla \mathbf{T} - \mathbf{T} - \frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{F}_{ns} \quad (6.3)$$

La force de friction mutuelle, \mathbf{F}_{ns} , des Eqs. 6.2, 6.3 peuvent être écrit comme :

$$\mathbf{F}_{ns} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \widehat{\omega}_s \times [\omega_s \times (\mathbf{V}_n - (\mathbf{V}_s + \nu_s \nabla \widehat{\omega}_s))] + \frac{1}{2} \mathbf{B}' \omega_s \times (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s - \nu_s \nabla \times \widehat{\omega}_s) \quad (6.4)$$

où la vorticité du superfluide $\omega_s = \text{curl} V_s$, avec $\widehat{\omega}_s = \omega_s / |\omega_s|$ est le vecteur unitaire dans la direction du tourbillon superfluide, et $(\mathbf{V}_s + \nu_s \nabla \widehat{\omega}_s)$ est la vitesse superfluide locale, ce qui correspondrait à la vitesse locale de la lignes de vortex en l'absence de tout fluide normal, et B, B' sont des coefficients de friction mutuelle dépendant de la température.

La force de tension de vortex \mathbf{T} de Eq. 6.3, reflète l'énergie par unité de longueur dans les lignes de vortex. Ce terme peut être écrit comme :

$$\mathbf{T} = -\nu_s \omega_s \times (\nabla \times \widehat{\omega}_s) \quad (6.5)$$

où $\nu_s = (\Gamma/4\pi) \log(b_0/a_0)$, est le paramètre de tension de vortex, avec un a_0 est le paramètre de noyau de tourbillon, $b_0 = (2\omega_s/\Gamma)^{-1/2}$ est l'espacement de tourbillon inter et $\Gamma \simeq 9.97 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{sec}$ est le circulation quantique (le rapport de la constante de Plank et la masse d'un atome d'hélium).

Les équations de HVBK ont des limites intéressantes. À $T \rightarrow 0$ alors $\rho_n \simeq 0$, nous avons $\nu_s = 0$, donc l'équation du superfluide (6.3) devient l'équation d'Euler classique. Si $T \rightarrow T_\lambda$ correspondant à $\rho_s \simeq 0$, donc l'équation fluide normal (6.2)

devient l'équation de Navier-Stokes classique. Les méthodes standard de la turbulence classique ont été adaptés pour les équations de HVBK, par exemple, Simulation de Grandes Échelles [92], Simulations Numériques Directes [116, 122] et le EDQNM [130].

Ce modèle à deux équations, qui a été vérifié dans l'expérience pour les nombres de Reynolds inférieur à 400, prouve également valable dans le cas turbulent à travers les résultats numériques trouvés. Par conséquent, on voit que le modèle HVBK est idéal pour étudier la dynamique de fluide couplés superfluide et normale, et peut être utilisé pour dériver la méthode LES pour de grandes échelles de turbulence isotrope superfluide.

Le but de cette partie de ma thèse est de fournir plus informations dans l'étude de la turbulence à très basse température, mesurée par les équations de HVBK. Nous utilisons la méthode similaire à celles du travail de Merahi et al. [92] généré le modèle de HVBK numériquement par SGE (LES).

6.2 L'énergie spectrale

Pour les équations de HVBK décrite par la Simulation des Grandes Échelles SGE (LES). Merahi et al. [92] ont été impliqués cette technique dans la turbulence quantique homogène et isotrope³. Dans le présent travail, nous appliquons la même approche systématique basée sur le cadre mathématique du modèle HVBK et le filtre de convolution⁴ utilisé dans le travail [92], selon la procédure habituelle de LES. Ensuite, nous étudions le modèle proposé avec différents modes de résolutions spatiales dans une durée du temps prolongée, pour une large gamme de températures ($1 \text{ K} < T < 2.1 \text{ K}$). Le modèle HVBK (Eqs. 6.1-6.3) filtré décrit ci-dessus est résolu en utilisant une méthode entièrement pseudo-spectrale. Tous les termes non linéaires sont calculées dans l'espace physique, de la même façon que le terme de convection. Les équations de quantité de mouvement (Eqs. 6.1-6.3) sont écrits, dans l'espace spectral, sous la forme compacte suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_{\mathbf{e}} \mathbf{k}^2 \right) \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{k}) = \mathbf{T}_{\mathbf{r}}(\mathbf{k}) \quad (6.6)$$

3. Merahi et al. (2006) Ils ont montré que l'énergie cinétique du superfluide présente une gamme d'inertie en concordance avec la loi -5/3 de Kolmogorov.

4. Cette approche structurelle consiste à réécrire l'opérateur de filtrage sous forme différentielle, qui correspond à la fermeture différentielle complète pour tous les termes non linéaires qui apparaissent dans les équations du modèle HVBK.

avec le terme de transfert $T_r(k)$ calculée directement à résoudre les modes, et ν_e est la viscosité effective spectrale (sera démontré prochaine).

6.2.1 Viscosité effective

Dans cette thèse, ces simulations numériques (en cas de LES) ont besoin d'une modélisation sous-maille efficace afin de tenir compte de la turbulence à petite échelle, et de préserver le processus de cascade d'énergie cinétique, la modélisation se fait via une approche de viscosité effective spectrale. Cette approche est une forme exponentielle, et il est basé sur le nombre d'onde k et sur l'échelle de longueur de coupure k_c qui est choisie pour se situer dans la gamme d'inertie des deux spectre normal et superfluide énergie turbulente.

Nous introduisons un modèle Lamballais-Lesieur-Silvestrini [125] dans les deux équations de quantité de mouvement normal et superfluide, tandis que d'autres termes sont modélisés via l'approche différentielle. La viscosité effective dans l'espace spectral, ν_e , a la forme suivante :

$$\nu_e = 0.267F(\mathbf{k}/\mathbf{k}_c)\sqrt{\frac{\mathbf{E}(\mathbf{k}_c)}{\mathbf{k}_c}} \quad (6.7)$$

avec

$$F(\mathbf{k}/\mathbf{k}_c) = 1 + 34.5\exp[-3.03(\mathbf{k}_c/\mathbf{k})] \quad (6.8)$$

avec une coupure nette au-dessus de k_c dans l'espace de Fourier, est dans un contexte de turbulence homogène et isotrope. Si l'échelle de longueur d'onde de coupure est situé dans la zone inertielle Kolmogorov, il devrait probablement être étendue pour tenir compte le cas où lequel la coupure serait située à beaucoup plus petite échelle dominé par la cascade de onde de Kelvin.

La Fig. 6.1 montre la viscosité effective turbulente spectral provenant le modèle Lamballais - Lesieur - Silvestrini [125]. Dans l'Eq. 6.8, $F(k/k_c)$ affiche une forte dépassement dans le voisinage de $k/k_c=1$. De toute évidence, la viscosité effective doit tenir compte de l'intermittence et manque d'homogénéité de la turbulence (jusqu'à corrections d'intermittence discutés dans la section 6.3). En conséquence, les processus de dissipation qui sont en jeu dans les deux composantes normale et superfluide se produisent à des échelles beaucoup plus petites que k_c^{-1} , et ne nécessitent pas d'être modelée de façon très précise au niveau de l'échelle résolu. En présence de tourbillons, la friction mutuelle F_{ns} , qui couple les deux fluides,

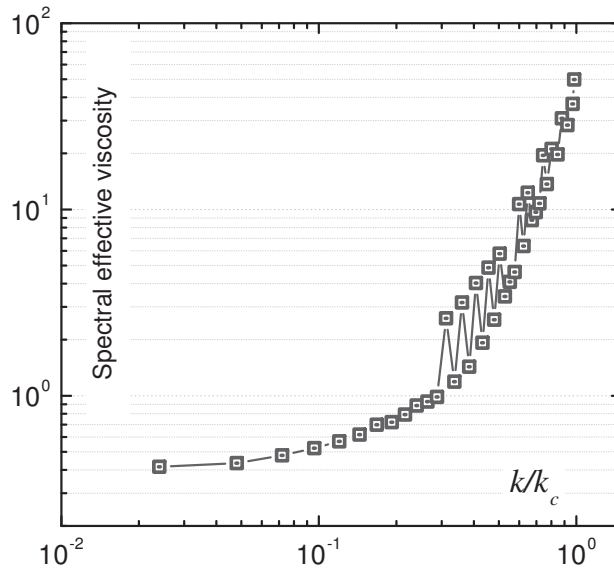


FIGURE 6.1: La viscosité effective spectrale, le mode de résolution 128^3 ; basé sur la Simulation des Grandes Échelles SGE (LES), Eq. 6.7.

dépend de la densité de lignes de vortex L^5 (longueur de vortex par unité de volume). La coupure survient à échelles auxquelles la cascade de Kolmogorov est beaucoup plus grande que la cascade de onde de Kelvin. Par conséquent, la principale liaison inter-échelle résultera du terme de convection, et correspondra à la cascade d'énergie cinétique. Ceci montre que le terme de friction mutuelle dans l'équation du superfluide (6.4), bien que proportionnel à ρ_n/ρ , ne peut pas être négligé, même dans la limite très basse température, et qu'il imite, dans une certaine mesure, un terme visqueux au long de la cascade. Cependant, s'écarte d'un plateau aux plus petites échelles, où les deux composantes ne sont plus verrouillées, notamment à très basse température. Ceci est différent du cas classique pour lequel on obtiendrait un plateau jusqu'aux plus petites échelles.

6.2.2 Déviation de Kolmogorov $k^{-5/3}$

Les résultats précédents des simulations LES des équations de HVBK [92] rapportés concernent des températures supérieures à 1,6 K. Il ya un besoin évident d'étendre la gamme de température et de les comparer avec ceux donnés par la

5. Disons simplement, dans la pratique, k_c est également supposé être beaucoup plus grande que le vortex quantifiés lissée espacement $\ell \approx L^{-1/2}$.

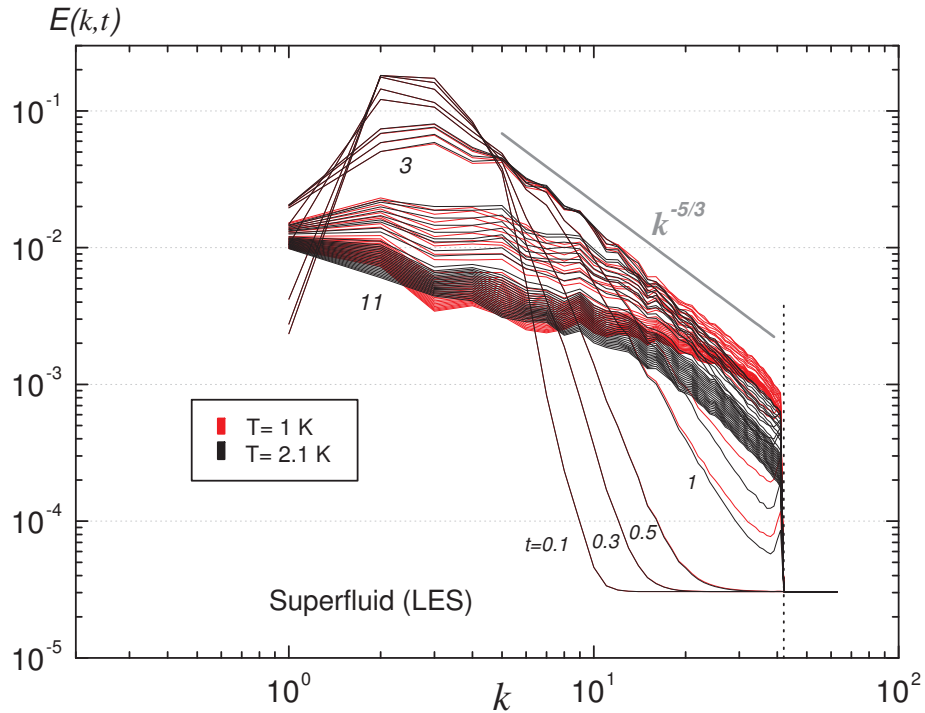


FIGURE 6.2: Temps-évolution des spectres d'énergie superfluide pour une large gamme de température ($1 \leq T \leq 2.1$ K), dans un LES avec 128^3 modes utilisant des méthodes pseudo-spectrale et la viscosité effective spectrale (voir Fig. 6.1). La ligne verticale en pointillés marque k_c . Le calcul est initialisé avec des champs de vitesse aléatoires homogènes solénoïdales à la fois pour la composante normale et superfluide, qui sont générés suite à la méthode de Rogallo [118]. Un troisième ordre de la méthode de Runge-Kutta est utilisé pour l'intégration dans le temps. Un dealiasing est réalisée en utilisant la règle habituelle 2/3 (Voir la section 5.4.1.3.)

dynamique des différentes modes de résolutions spatiales. La Fig. 6.2 montre, sur un terrain logarithmique, l'évolution du temps des spectres d'énergie cinétique du superfluide utilisant la SGE (LES) dans le pseudo-spectrale. Alors que les lignes rouges et noires de la Fig. 6.2 correspondent respectivement à $T = 1$ K et 2,1. Dans cette gamme de températures correspondant à $0.23 \leq \rho_s/\rho \leq 0.98$, les prédictions LES des statistiques de la turbulence et des spectres d'énergie sont jugés en bon accord avec les travaux de Barenghi et al. [16], Lvov et al. [86] et selon Roche et al. [116] prises avec des données expérimentales et des simulations numériques basées sur d'autres modèles. À basse température $T \simeq 1$ K, la cascade d'énergie Kolmogorov établit en temps comparable aux moments critiques estimés dans [92] résultats concernant la HVBK modélisé avec un modèle sous-maille fait par Chollet

et Lesieur [34]. Nous notons également que pendant la première phase du calcul ($t \leq 11$), la décroissance de spectres auto-similaire avec la pentes $k^{-5/3}$ allant jusqu'à k_c . Ce résultat est en accord avec l'étude précédente [12, 16, 116] dans la limite des très basses températures.

6.2.3 Effets de la température et le mode de résolution

Les résultats de l'HVBK appliqués à la turbulence isotrope LES sont satisfaisants quand il est mis en œuvre sur un code spectrale directement dans l'espace de Fourier et à une faible mode de grille : Fig. 6.3 montre l'évolution des spectres d'énergie superfluide à partir de conditions initiales correspondant à des spectres fortement pointu. Après une période transitoire (" $t \simeq 13$ ") qui correspond à la détente de la solution initiale vers une solution physique, le spectre a la forme de Kolmogorov pour la raison de la faible modes de résolution (uniquement dans des modes 32^3 and 64^3 de calcul spectrale). Ce résultat a été fait à des températures aussi basses que 1,6 K correspondant à $\rho_s/\rho \simeq 0.84$, puis donne les mêmes résultats que Chollet [35] dans la turbulence classique à cette faible modes de grille. Aussi,

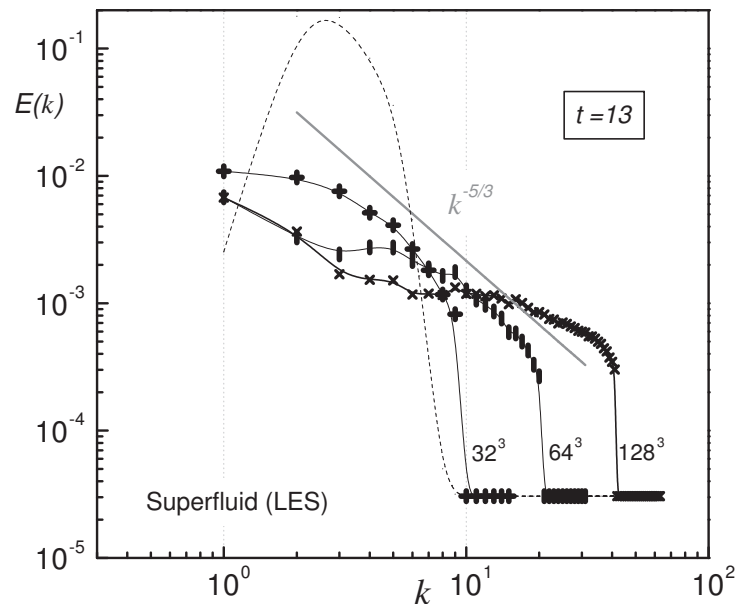


FIGURE 6.3: Analyse numérique d'énergie superfluide dans des différentes modes de résolutions à $t \simeq 13$, pour une température aussi basse que 1,6 K. La ligne pointillée est le spectre initial.

nous avons trouvé un accord insatisfaisant entre le spectre d'énergie mesurée et le spectre de Kolmogorov théorique à la phase tardive " $t \simeq 13$ " avec la grille plus élevée (128^3 , voir. Fig. 6.3). Arguments de [67] peuvent être formulées à suggérer que le système ne dispose que de petits tourbillons et étant plus turbulent au stade tardif. Mais auparavant, nous allons examiner certains aspects anormaux de la diffusivité effective spectrale, liées au caractère intermittent à grande échelle de la température passive. En particulier, il est bien connu [47] que dans la zone inertielle, le champ de vitesse turbulent est pas auto-similaire, mais montre des effets d'intermittence qui modifient le scénario KO-41, sera mentionnés dans la section suivante.

6.3 Cascade d'énergie et l'intermitence

6.3.1 Turbulence Superfluide est aussi intermittente ?

Un aspect important du problème a été absent sans aucune discussion : effets d'intermittence. Il est connu depuis longtemps que la turbulence hydrodynamique classique est intermittente et mise à l'échelle exposants diffère des KO-41 prédictions, (voir U. Frisch [47], *Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov*). L'intermittence statistique des écoulements turbulents se manifeste sous la forme d'une déviation au comportement linéaire $\zeta_p = p/3$ (prédit par le modèle K41) de la hiérarchie des exposants des fonctions de structure d'ordre p des incréments de vitesse longitudinaux (*Voir la section 3.4*). Sur la représentation compensée, l'écart au modèle Kolmogorov 41, qui traduit le caractère intermittent du champ de vitesse turbulent est révélé par des comportements en loi de puissance de pentes $\zeta_p - p/3$, positive pour les ordres $p < 3$, nulle pour $p = 3$ et négatives pour $p > 3$ dans la plage des échelles inertielles.

La turbulence superfluide est aussi intermittente, voir par exemple J. Maurer & P. Tabeling [89]. Il a été remarqué par Boué et al. [24] que, à des températures proches de 2K, lorsque les densités des composantes normales et superfluide sont friction mutuelle comparable peut entraîner une déviation des exposants de mise à l'échelle par intermittence à partir de leurs valeurs classiques. Est-ce que notre Simulations des Grandes Échelles SGE (LES) support ou de ne pas tenir compte de ce scénario ?

6.3.2 Mise en évidence

Afin de tenir compte de l'intermittence et de comparer l'intermittence dans la turbulence superfluide avec les turbulences dans les fluides normales, il faut remarquer que l'intermittence a été partiellement explorée dans les études expérimentales et numériques [24, 89, 123, 124] pour une haute $T = 2,1$ K et une faible $T = K$, correspondant au rapport $\rho_s/\rho \simeq 0.23$ et $\rho_s/\rho \simeq 0.98$, respectivement, lorsque la densité des composantes normales et superfluide $\rho_s \sim \rho_n$ est comparable à l'autre.

6.3.2.1 L'écart du KO-41

Viscosité effective dans la cascade L'écart à la loi KO-41 permet de définir une viscosité effective, même aux plus basses températures. La viscosité obtenue est proche de celle de la composante normale. Dans cette partie, on s'intéresse à l'écart à petite échelle à la loi KO-41. En turbulence classique, c'est la viscosité qui est à l'origine de cette déviation. L'équation exacte peut être obtenue à partir de l'équation de Chollet-Lesieur [35] et permet de généraliser la loi KO-41 à petite échelle.

$$\nu_e = 0.441 \times 1.4^{-3/2} F(k/k_c) \left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \quad (6.9)$$

(Pour $F(k/k_c)$ voir l'équation 6.8)

Physiquement, l'équation 6.9 correspond à l'énergie qui est dissipée dans la cascade à cause de la viscosité. De façon analogue, on peut définir une viscosité effective dans l'He II à partir de l'écart à la loi KO-41 aux petites échelles inertielles.

Les statistiques de turbulence ^4He calculées à partir de la viscosité effective, ν_e (6.9), sont tracées sur la Fig. 6.4. Pour toutes les températures, comprises entre 1 K ($\rho_s/\rho_n = 40$) où la composante superfluide domine et 2,1 K ($\rho_s/\rho_n = 0.1$) où la composante normale domine. Cette figure présente un "plateau" dans la zone inertielle. Ceci implique que l'écart à la loi KO-41 peut être décrit, dans une certaine mesure, par une viscosité effective, et ce jusqu'aux plus basses températures, bien que la densité de la composante normale puisse être négligeable. La Fig. 6.4 compensées par $k^{5/3}E(k)$, montre que les statistiques de turbulence ^4He superfluide appaurent similaires à celle des fluides classiques (bleu et les lignes rouges, voir Fig. 6.4), en accord avec les études précédentes. Les exposants d'échelle intermittents semblaient même en turbulence classique et superfluide [16, 24].

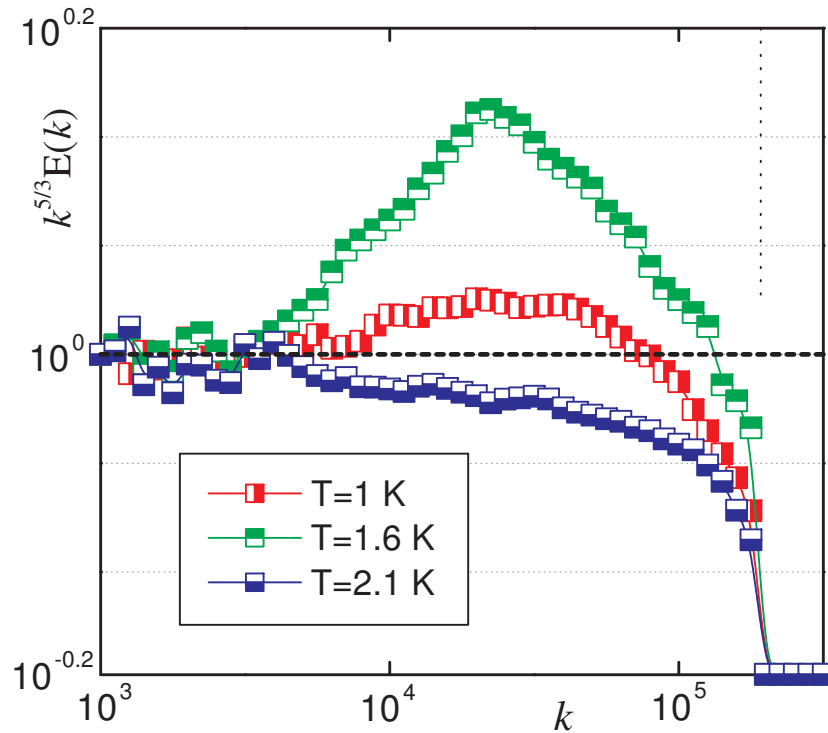


FIGURE 6.4: Énergie spectrale superfluide compensé par $k^{5/3}E(k)$ avec la correction de l'intermittence. La ligne verticale en pointillés marque k_c . Ces simulations sont faites à la température $T = 1, 1,6$ et $2,1$ K

Aux températures 1,6 K correspondant à $\rho_s/\rho \simeq 0.84$, où le liquide normal et le superfluide sont dans la même proportion $\rho_s \approx \rho_n$, une différence entre le comportement intermittent classique et superfluide, comme représenté par la ligne verte sur la Fig. 6.4.

Nos simulations numériques du modèle HVBK de l'hélium II conduisent, pour toutes les températures, à des exposants identiques. Ces exposants sont quantitativement compatibles avec le modèle d'intermittence de She & Lévêque [127].

6.3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la turbulence Superfluide est aussi intermittente. Notre simulation donne même résultat et bon accord avec le modèle d'intermittence de She & Lévêque [127] et le travail de J. Maurer & P. Tabeling [89], Barenghi et al. [16] et Boué et al. [24]. De plus, il émerge une gamme d'échelle

dans laquelle les deux composantes sont encore verrouillées et où on observe un écart à la loi KO-41 similaire à la correction visqueuse classique. La composante superfluide hérite alors de la viscosité de la composante normale. Enfin, les moments d'ordre supérieur obtenus numériquement ont des valeurs "anormales", quantitativement similaires à celles de la turbulence classique. Cela suggère que l'intermittence dans l'hélium superfluide est comparable à l'intermittence qui existe dans un fluide classique.

6.4 Le budget d'énergie spectrale en turbulence quantique

6.4.1 L'équation de l'équilibre

Pour compléter la section précédente et fournir plus d'informations absent dans les mesures, nous étudions l'évolution des différents termes constituant les équations HVBK. En effet, l'évolution d'un champ turbulent dépend de la manière dont le transfert d'énergie entre différentes échelles en mouvement. Pour cette analyse, nous considérons l'équation d'équilibre pour la fonction d'énergie spectrale $E(k, t)$ [112] (*Voir la Section 3.5*). Cette équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \mathbf{t}) = \mathbf{P}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{t}) - T_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{t}) - \mathbf{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{t}) - \mathbf{F} \quad (6.10)$$

les quatre termes sur le côté droit représentent, respectivement, la production, le transfert spectrale, la dissipation, et la friction mutuelle.

6.4.1.1 Termes de production et le transfert d'énergie

La production, $P_k(k, t)$, est aussi un terme dérivé directement. Elle peut être exprimée comme une simple différence dans le temps. Dans le second terme sur le côté droit de l'Eq. 6.10, $T_k(k, t)$, est le taux de transfert d'énergie spectrale : il est le taux net à laquelle l'énergie est transférée en modes de nombre d'onde inférieure à k à ceux qui ont des nombres d'ondes plus élevées que k jusqu'à k_c . Certains de ses éléments constitutifs ont été mesurées directement. Le terme non linéaire de ce transfert spectrale est :

$$T_k(k, t) = ik_j u_i u_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \cdot \hat{u}_i(k) \quad (6.11)$$

depuis T_k disparaît de zéro à nombre d'onde infinie (avec une coupure nette k_c), ce terme de transfert ne fait aucune contribution à l'équilibre de l'énergie cinétique turbulente.

6.4.1.2 Terme de dissipation

L'autre terme de l'Eq. 6.10, $D_k(k, t)$, est le spectre de dissipation, si les échelles de dissipation sont isotropes, peut être expansé de la manière suivante :

$$D_k(k, t) = 2\nu k^2 E(k, t) \quad (6.12)$$

la dissipation est proportionnelle de gradients de vitesse au carré ; le facteur k^2 dans l'Eq. 6.12 se pose parce que la différenciation correspond à la multiplication par le nombre d'onde.

6.4.2 Influence des différents termes

6.4.2.1 La production, le transfert d'énergie et la dissipation

Des études numériques récentes de l'énergie budgétaire ont été réalisées par Wacks et Barenghi [147] en utilisant un modèle "*Shell model*", et la DNS de modèle à deux fluides hydrodynamique par Roche et al. [116]. Ils ont constaté qu'une accumulation de l'énergie se développe à un grand nombres d'ondes suggérant la nécessité d'un autre effet de dissipation. Dans notre travail, la simulation LES du modèle HVBK prédit la contribution de tous les termes de l'équation d'équilibre $E(k, t)$ pour l'hélium superfluide.

Comme indiqué dans la Fig. 6.5, des valeurs positives indiquent un gain et les valeurs négatives indiquent une perte d'énergie. La production et le transfert d'énergie spectrale dominant le budget de l'énergie turbulente. La ligne bleue de la Fig. 6.5 montre la fonction de transfert d'énergie donnée par l'Eq. 6.11. Certains des composants du transfert d'énergie mesurés directement sont négatifs à des grandes échelles et positif sur le reste du spectre, conformément à [25, 87] dans la turbulence classique. Ce chiffre démontre clairement la non-existence d'un domaine inertiel. En outre, la Fig. 6.5 montre l'existence d'un nombre d'onde, où la production et le transfert spectrale due à la déformation sont à la fois positif et ce gain est équilibré par la dissipation.

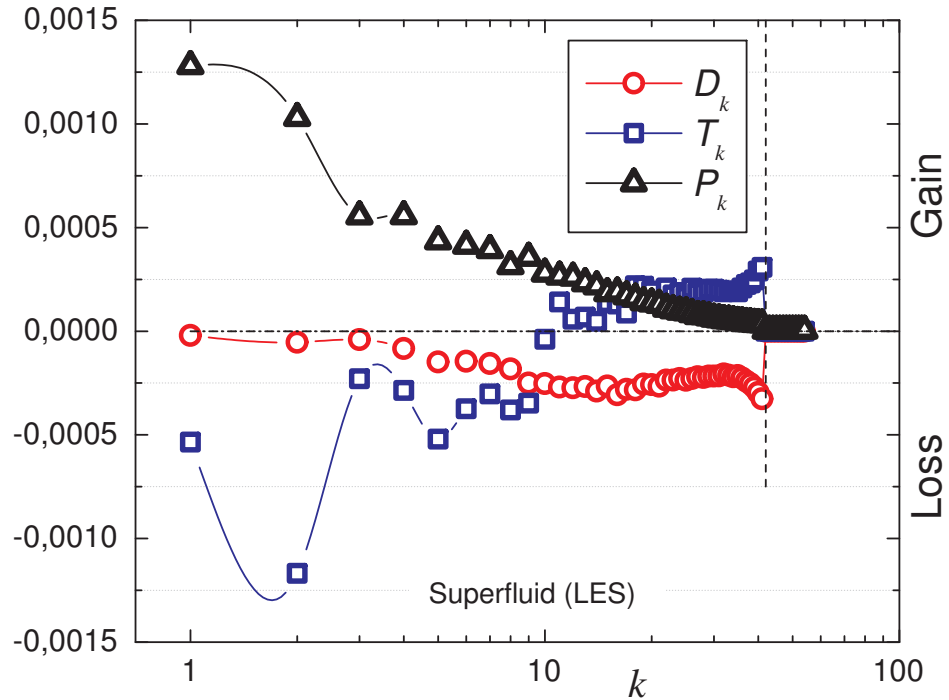


FIGURE 6.5: Tracé log-linéaire des termes dans le budget de l'énergie spectrale $E(k, t)$ par rapport à nombre d'onde k , à $1,6 \text{ K} < T_\lambda$. Superfluide : évolution des différents termes la production (P_k), le transfert spectral (T_k) et la dissipation (D_k), les équations. Eq. 6.10, 6.11 and 6.12. La ligne verticale pointillée marque k_c .

Le spectre d'énergie devient isotrope à tels des nombres d'ondes, car le transfert d'énergie est le seul qui devient isotrope quelque temps après la production quand cette dernière tend vers zéro. Dans la gamme contenant énergie, les effets de la production et de transfert d'énergie deviennent importants et constituent une source ou un puits à chaque nombre d'onde, sauf pour la dissipation. Comme la turbulence se développe à son plein développement, les plus grands échelles produisent des tourbillons plus en plus petits à travers l'interaction inertielle, ainsi transférant l'énergie jusqu'à les plus petits échelles, comme il est discuté par Lumley [84].

Le transfert d'énergie spectrale, $T_k(k, t)$, traverse la ligne zéro à $k \simeq 10$ comme il est représenté sur la Fig. 6.6. A ce nombre d'onde, le spectre de dissipation a montré sa valeur maximale à $T = 1,6 \text{ K}$ (voir la Fig. 6.8), qui récupère les mêmes résultats que Van Atta et Chen [133] fait par la turbulence classique. Mais à température finie 1 K , la dissipation était encore à peu près 50% de la valeur maximale à $k \simeq 10$

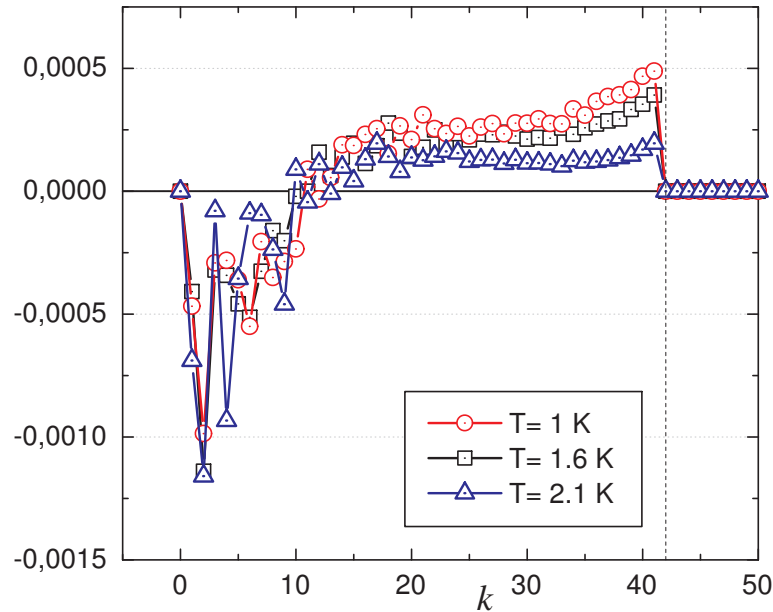


FIGURE 6.6: Transfert d'énergie spectrale de la partie superfluide calculé avec SGE (LES). La ligne verticale pointillée marque k_c .

(voir Fig. 6.7). Dans le même temps, l'effet de la dissipation⁶, avec eux, devient plus en plus important pour les plus petites échelles. Dans la zone inertielle, à partir de $k \sim 5$, il n'y a pas beaucoup de dissipation dans la gamme de production d'énergie comme le montre la Fig. 6.7 et Fig. 6.8. À d'autres échelles, qui sont équivalentes aux petites échelles, ce terme de dissipation fonctionne comme une viscosité. Dans l'état entièrement développé, il ne sont pas les plus grands échelles qui auront l'énergie cinétique maximale, mais ce sont les échelles dans une gamme de nombre d'onde supérieure. Dans la gamme des échelles contenant de l'énergie, où les tourbillons font la principale contribution à l'énergie cinétique totale de turbulence, le spectre d'énergie présente son maximum (voir Fig. 6.7 et Fig. 6.8). Nous pouvons associer un nombre d'onde k avec ce maximum pour indiquer que les échelles les plus permanentes contiennent beaucoup moins d'énergie que d'autre échelles.

6. La représentation du spectre de la dissipation par $2\nu k^2 E(k, t)$ donne une estimation de la distance entre les gammes de production et de dissipation.

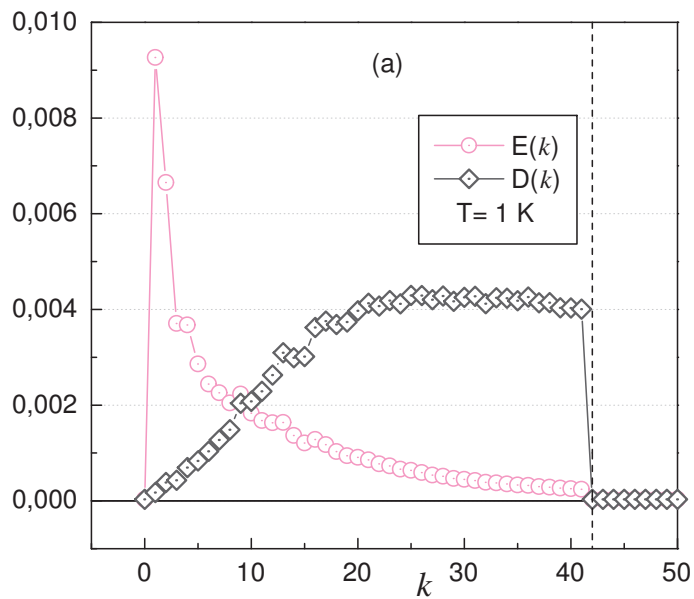


FIGURE 6.7: Consideration d'un bilan énergétique : (a) l'énergie $E(k)$ et les spectres de dissipation $D(k)$ à la température $T = 1$ K, respectivement. La ligne verticale pointillée marque k_c .

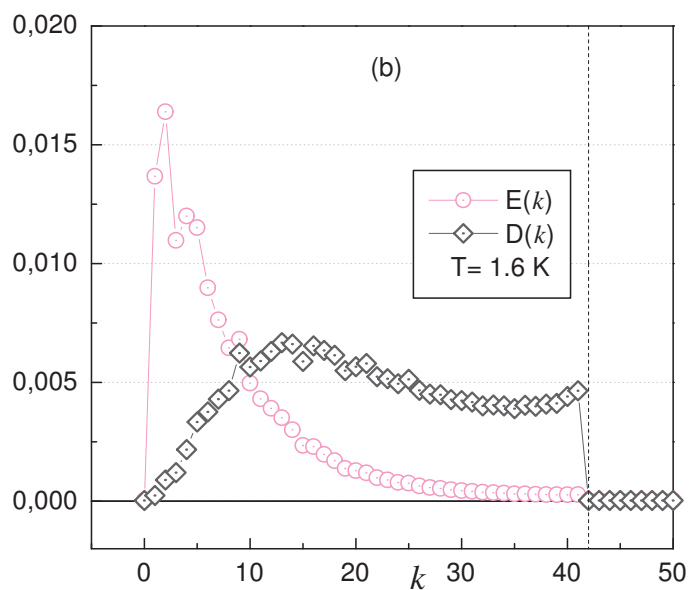


FIGURE 6.8: Consideration d'un bilan énergétique : (b) Énergie $E(k)$ & Spectres de dissipation $D(k)$ à la température 1,6 K. La ligne verticale pointillée marque k_c .

6.4.2.2 Force de friction mutuelle

En revanche, la contribution de la tension \mathbf{T} et la force de friction mutuelle \mathbf{F} dans les termes de l'énergie budgétaire sont également pris en compte. Le dernier terme dans l'équation (Eq. 6.10) est la force de friction mutuelle, pris comme suit :

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{k}) \quad (6.13)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{f}}_1 + \bar{\mathbf{f}}_2 \quad (6.14)$$

avec \bar{f}_1 et \bar{f}_2 représentant, respectivement, les parties réactives et dissipatives de la force de friction mutuelle.

6.4.2.3 Force de la tension

Ainsi, dans le reste des termes de l'équation d'énergie budgétaire, pour la partie superfluide est le terme liées à la tension \mathbf{T} est comme suit :

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{k}) \quad (6.15)$$

6.4.3 Analyse et discussions

Les Fig. 6.9, Fig. 6.10 et 6.11 montrent l'importance de la force de friction mutuelle \mathbf{F} et la tension \mathbf{T} , respectivement. Nous observons que leur ordre de grandeur est très faible. Ainsi, l'influence de la durée de la friction mutuelle, en particulier, peut être négligé dans l'ordre de 10^{-10} pour le superfluide et dans l'ordre de 10^{-11} pour le fluide normal ; la raison est que ces deux fluides ont le même champ de vitesse ($V_n - V_s \simeq 0$) à grande échelle, évidemment le même spectre d'énergie. A ces températures les plus basses, les grandes échelles sont significativement plus grande que la distance prévue dans les lignes de vortex quantifiés [18, 142]. Ainsi, la Fig. 6.9 montre que pour les grandes échelles, la friction mutuelle est suffisante pour maintenir les deux fluides verrouillés.

Même pour la tension \mathbf{T} de la partie superfluide, sur la Fig. 6.11, à la température aussi bas que $T = 1,6$ K, la tension \mathbf{T} serait insignifiante dans l'ordre de 10^{-5} . Les fluides verrouillés se comportent comme un seul fluide turbulent dans

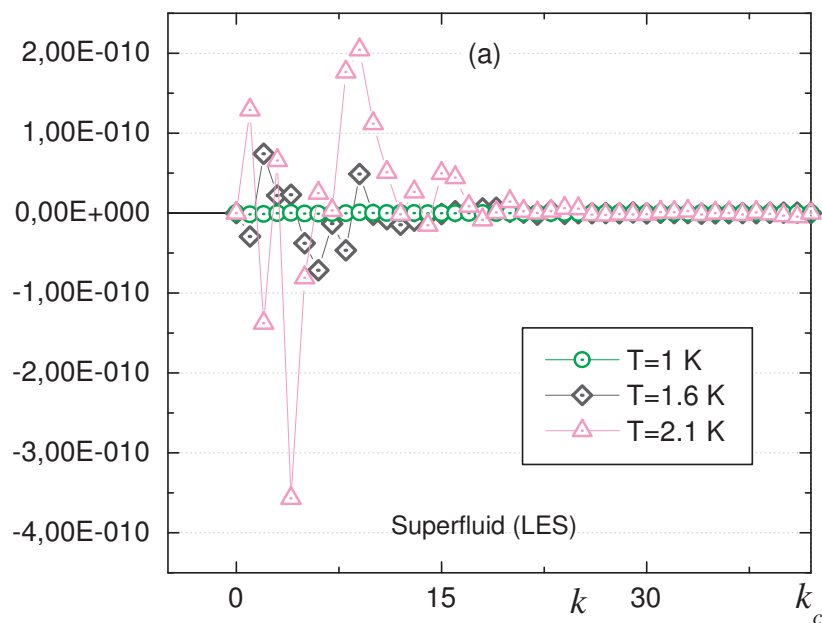


FIGURE 6.9: (a) Superfluide : Contribution de la force de friction mutuelle pour les deux composants des fluides, Eq. 6.13 à $T = 1, 1,6$ et $2,1$ K.

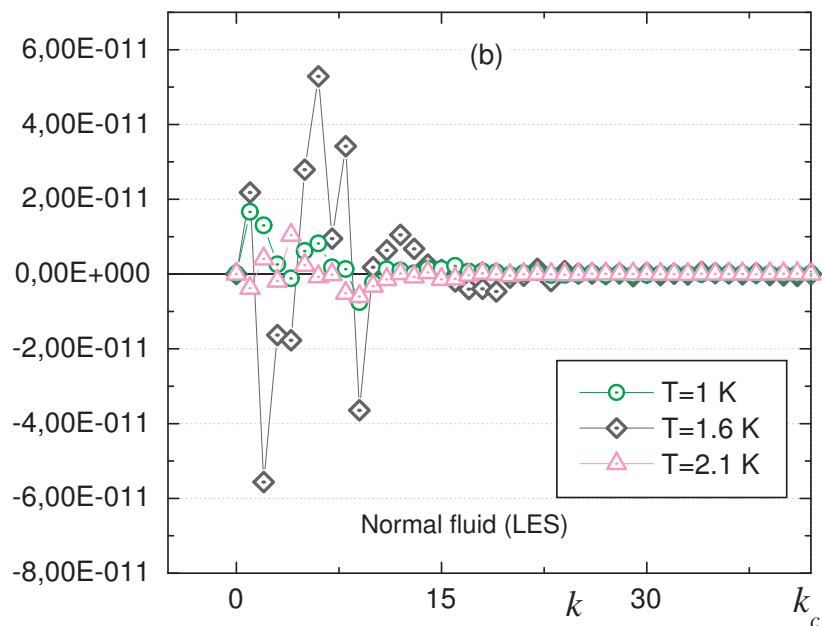


FIGURE 6.10: (b) Normal fluide : Contribution de la force de friction mutuelle pour les deux composants fluides, Eq. 6.13 à $T = 1, 1,6$ et $2,1$ K.

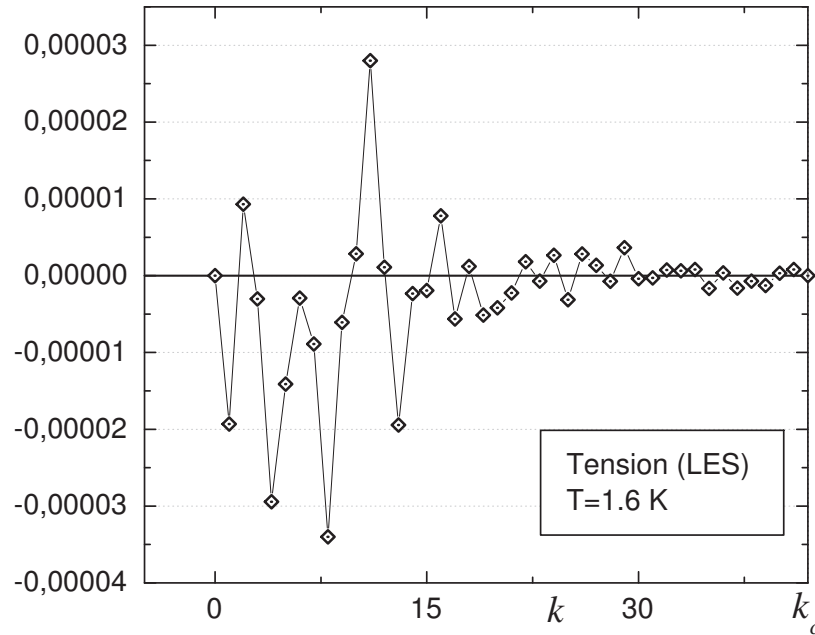


FIGURE 6.11: Contribution de la tension \mathbf{T} Eq. 6.15, à basse température de $1.6 \text{ K} < T_\lambda$.

lequel il ya dissipation négligeable. À $T \rightarrow 2.1 \text{ K}$ correspondant à $\rho_s/\rho \ll 1$, où la composante superfluide peut être négligée, les statistiques du superfluide ${}^4\text{He}$ deviennent semblables à ceux des fluides classiques. À cet égard, la contribution de la friction mutuelle du superfluide augmente légèrement à les grande échelle comme le montre la Fig. 6.9. Il n'est pas le même pour la partie de fluide normal, qui montre sa valeur maximale à $T = 1,6 \text{ K}$ (voir la Fig. 6.10). On résulte que la dissipation doit être due à une combinaison de dissipation visqueuse dans le fluide normale et la force friction mutuelle, comme il est discuté par Vinen [142]. Par conséquent, la formes de Kolmogorov spectrale, à condition bien sûr, l'énergie est dissipée par quelque moyen ou au-delà du nombre d'onde de Kolmogorov comme dans un fluide classique.

6.5 L'énergie spectrale sans le terme de friction mutuelle

Pour aller plus loin, nous avons étudié numériquement le spectre d'énergie sans le terme de friction mutuelle. Fig. 6.12 montre le transitoire d'énergie spectral "avec" et "sans" de cette force. Les effets des forces mutuelles est marqué, tandis que le spectre d'énergie à petite échelle a la forme k^{-1} conformément à des résultats trouvés dans le travail de Araki et al. [9]. A $t = 5 \text{ sec}$, le spectre a un grand pic au nombre d'onde plus petite, étant à plat dans la gamme intermédiaire, car il n'y a que les grands tourbillons et aucune structure de petite échelle sur eux. La Fig. 6.12 montre que les spectres d'énergie à grande échelle converge vers la forme de Kolmogorov $k^{-5/3}$ lorsque cette force est prise en compte, à condition que l'écoulement de fluide normale n'a pas été significativement affectée par la viscosité. Cette friction est suffisante pour assurer que les deux spectres sont associés avec eux à la même champ de vitesses.

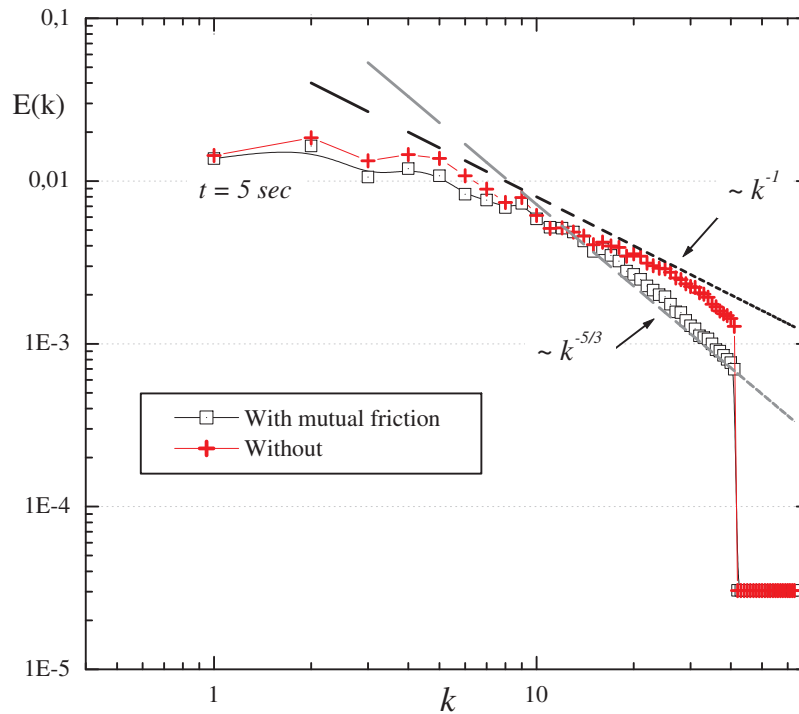


FIGURE 6.12: L'énergie spectrale "avec" et "sans" frottement mutuel en 128^3 modes de résolution (Calcul en SGE (*LES*)), à basses températures $T = 1.6 \text{ K}$.

6.5.1 L'énergie budgétaire ; L'absence de la friction mutuelle

Bien que l'absence de la force de friction mutuelle, nous considérons l'équation d'énergie budgétaire pour la fonction spectre d'énergie spectrale $E(k, t)$ [112]. Cette équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = -T_k(k, t) - D_k(k, t) - \mathbf{T} \quad (6.16)$$

Avec $T_k(k, t)$, $D_k(k, t)$ and \mathbf{T} sont, respectivement, le taux de transfert d'énergie spectrale Eq. 6.11, la dissipation Eq. 6.12 et la tension Eq. 6.15.

Le processus en cascade sans friction mutuelle en turbulence superfluide a été discutée [8]. La décroissance des différents termes de modèle HVBK de la friction mutuelle est montré dans les Figs. 6.13, 6.14, 6.15 et 6.16. Le seul mécanisme pour la désintégration est que la procédure de coupure qui permet d'éliminer les petits vortex. Depuis deux résultats sont calculés seulement à température aussi basse que 1,6 K, le transfère l'énergie à partir d'une grande échelle à petite échelle est nécessaire pour la décomposition du spectre d'énergie.

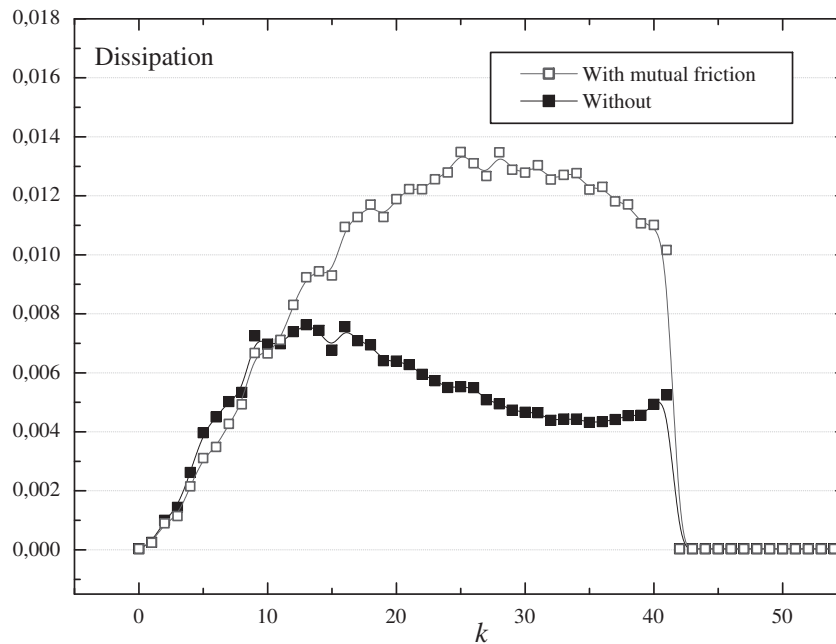


FIGURE 6.13: La dissipation : $D_k(k, t)$, Eq. 6.12, à basse température de $T=1.6$ K.

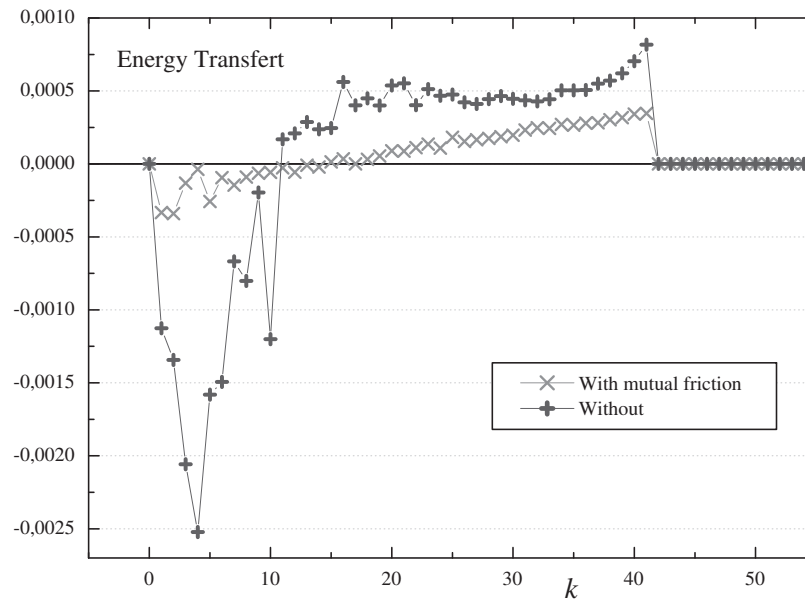


FIGURE 6.14: Le transfert d'énergie spectrale : $T_k(k, t)$ Eq. 6.11, à basse température de $T = 1.6$ K.

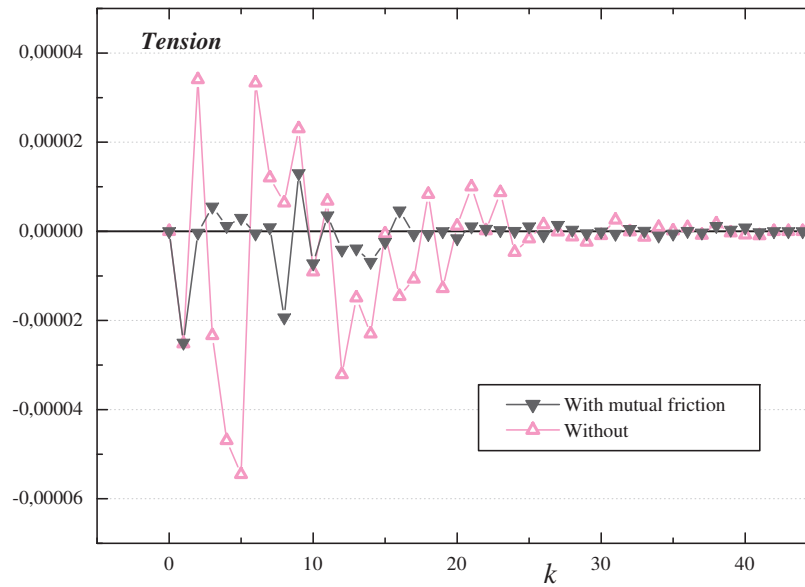


FIGURE 6.15: Contribution de la tension \mathbf{T} Eq. 6.15, à basse température de $T = 1.6$ K.

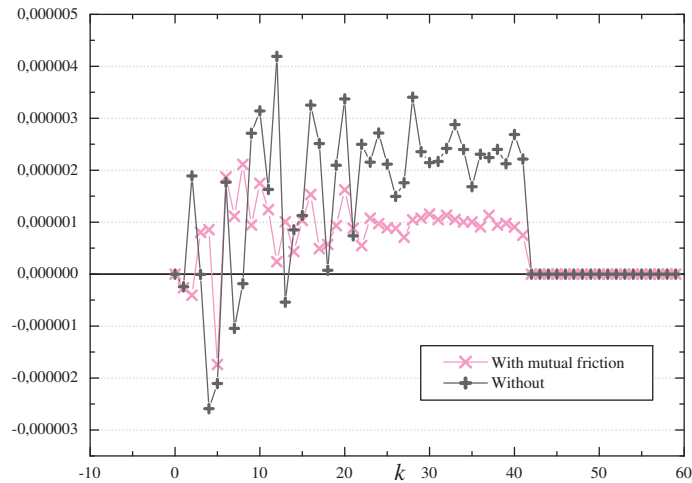


FIGURE 6.16: La vorticité de superfluide : $\omega_s = \text{curl}V_s$,   basse température de $T=1.6$ K.

La friction mutuel est alors une source possible de dissipation parce que sur ces échelles de longueur du champ de vitesse superfluide est dominée par les effets quantiques (comme le montre la Fig. 6.13), mise en correspondance des champs de vitesse du superfluide et normale fluide, se produisant à des grandes échelles de longueur, ne peut plus tenir. Cependant, dans une description phénoménologique du la turbulence superfluide, le mécanisme de dissipation est à un degré significatif d'importance.

A une température finie il ya un fluide normal, ce qui conduit à une force de frottement sur une ligne de vortex mobiles. La force de frottement peut conduire à un amortissement supplémentaire des ondes de Kelvin, et il peut aussi causer de petits anneaux à rétrécir. L'amortissement par le frottement des ondes de Kelvin devient de plus en plus important que la température augmente, et il devient probablement plus important que le rayonnement du son   la température.

6.5.2 Conclusions

Dans cette section, nous étudions numériquement le spectre d'énergie de l'hélium superfluide générée par des équations HVBK sans de la force de friction mutuelle. Notre simulation "LES" prédit que le transfert d'énergie devient plus importante lorsque cette force est pris en compte, et, on résulte que la dissipation doit être due

à une combinaison de la dissipation visqueuse dans le fluide normale et la force de friction mutuelle.

CONCLUSION GÉNÉRALE

A partir des équations couplées du modèle HVBK, nous avons effectué des calculs numériques à ceux conduisant à l'établissement de la loi de Kolmogorov $k^{-5/3}$ pour la turbulence classique. Ces développements nous permettent d'établir (de manière exacte) un bilan d'énergie cinétique échelle par échelle de la turbulence superfluide, et de discuter nos résultats numériques précédents sur la loi de Kolmogorov $k^{-5/3}$. Donc, le modèle HVBK est idéal pour étudier la dynamique du superfluide et du normale fluide couplés dans la limite de la turbulence intense à température finie. L'étude de l'effet de la température et de la grille numérique en appliquant une LES au modèle HVBK, nous a fournit de bon résultat qui concordent avec d'autre travaux récents. Nous avons mis en évidence, à partir de ces simulations numériques de la trubulence quantique, que les fluctuations de l'énergie cinétique d'un fluide quantique (en dessous de la température de transition superfluide) restait compatible avec la loi de Kolmogorov $\sim 5/3$ aux échelles inertielles. Ce résultat fournit un élément supplémentaire en faveur de l'existence d'une cascade d'énergie à la Kolmogorov en turbulence superfluide. Nos calculs nous ont permis de conclure aussi que la la turbulence superfluide est intermittente. L'analyse de l'équation budgétaire de l'énergie a montrée que le terme de transfert d'énergie et la production jouent un rôle essentiel pour l'échange d'énergie entre le moyen et le mouvement fluctuant. Le terme de production semble être en décomposition plus rapide suivant la distance en aval. Les simulations LES pour une large gamme de température ($1 \leq T \leq 2.1$ K) confirment que les deux composantes de ^4He sont verrouillées avec un champ de vitesse unique à grandes échelles. Le mécanisme de verrouillage est la force de friction mutuelle entre les deux fluides. Par conséquent, dans la zone inertielle, où les effets de dissipation sont absents, la contribution du terme de friction mutuelle peut être négligée.

Publications

- **M. Bakhtaoui**, and L. Merahi. "Analysis of the Energy Budget in Quantum Turbulence : HVBK Model." *Journal of Low Temperature Physics* 178.3-4 (2015) : 129-141. (This article is protected by copyright and all rights are held exclusively by Springer Science+Business Media New York).
- * Cet article traite de l'ensemble des résultats figurant dans la partie ???. Nous choisissons d'appliquer de nouveau pour la turbulence superfluide, méthode de simulation des grandes échelles, bien connu dans la turbulence classique. Cela permet d'obtenir de nouvelles informations, intéressant pour la communauté de turbulence superfluide suivant les commentaires d'examineurs. Les valeurs numériques se fait à un bon niveau professionnel, nous pensons que ce sera intéressant pour l'expert dans ce domaine, disent les examineurs.
- **M. Bakhtaoui**, and L. Merahi. "Energy Budget Equation of Superfluid HVBK Model : LES Simulation." World Academy of Science, Engineering and Technology. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering* 8.12(2014) : 1871-1874
- * Cet article traite de certains des principaux résultats figurant dans la section 6.4. Ma contribution à ce papier consiste à utiliser le modèle de HVBK pour étudier le budget de l'énergie sur le superfluide. Le modèle de HVBK est plus sophistiqué que *Shell model*, suivant les commentaires d'examineurs, si nous comparons les résultats de HVBK contre les résultats de Wacks et Barenghi (2011).
- **M. Bakhtaoui**, and L. Merahi. "Large eddy simulations analysis of energy spectrum without mutual friction in superfluid ^4He : HVBK model." (On est en train de préparation).

Bibliographie

- [1] ACKERMANN, C. ET MÉTAIS, O., A modified selective structure function subgrid-scale model. *Journal of Turbulence*, 2 :(11)p. 1–26, 2001. URL <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1088/1468-5248/2/1/011>.
- [2] ADACHI, H., FUJIYAMA, S., ET TSUBOTA, M. Steady-state counterflow quantum turbulence : Simulation of vortex filaments using the full Biot-Savart law. *Physical Review B*, 81 :(10)(10), p. 104511., 2010. URL <http://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.81.104511>.
- [3] AKSELVOLL, K. ET MOIN, P., Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 315 :p. 387–411, 1996. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=378974&fileId=S0022112096002479>.
- [4] ALLEN, J. ET A. MISENER, Flow of Liquid Helium II. *Nature*, 141 :p. 75, 1938. DOI : <http://dx.doi.org/10.1038/141075a0>.
- [5] ALLEN, J. ET H. JONES, New Phenomena Connected with Heat Flow in Helium II. *Nature*, 141 :p. 243–244, 1938. DOI : <http://dx.doi.org/10.1038/141243a0>.
- [6] ANSELMET, F., Y. GAGNE, E.J. HOPFINGER, AND R.A. ANTONIA, velocity structure functions in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 140 :p. 2704–2707, 1984. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=376860&fileId=S0022112084000513>.
- [7] ANTONIA, R.A., E.J. HOPFINGER, Y. GAGNE AND F. ANSELMET, Temperature structure functions in turbulent shear flows. *Phys. Fluids A*, 30 :718–722, 1989. URL <http://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevA.30.2704>.
- [8] ARAKI, T. ET TSUBOTA, M., Cascade process of vortex tangle dynamics in superfluid HeII without mutual friction. *Journal of low temperature physics*, 121 :(5/6)p. 405–410, 2000. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1017501730164>.

- [9] ARAKI, T., TSUBOTA, M., ET NEMIROVSKII, S. K., Energy spectrum of superfluid turbulence with no normal-fluid component. *Physical review letters*, 89 :(14)145301, 2002. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.89.145301>.
- [10] ARTAL, L. ET NICOUD, F., Direct numerical simulation of reacting turbulent multi-species channel flow, dans 6th Direct and Large-Eddy Simulation Conference. *ERCRAFT Workshop*, Université de Poitiers, France, 2005. URL http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-5152-2_9.
- [11] BAGGETT, J. S., NICOUD, F., MOHAMMADI, B., BEWLEY, T., GULLBRAND, J., ET BOTELLA, O., Sub-optimal control based wall models for les including transpiration velocity. *Center for Turbulent Research, Proceedings of the Summer Program*, Stanford, CA : Center for Turbulence Research, p. 331–342, 2000. URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/98/2/26002>.
- [12] BAGGALEY, A. W., C. F. BARENGHI, A. SHUKUROV AND Y. A. SERGEEV. Coherent vortex structures in quantum turbulence. *EPL*, 9826002 :p1–6, April 2012. URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/98/2/26002>.
- [13] BARDINA, J., FERZIGER, J., ET REYNOLDS, W., Emerging issues in helium turbulence. *Improved subgrid scale models for large eddy simulation, AIAA Journal*, 80 :p. 1357, 1980. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1983stan.reptV...B>.
- [14] BARENGHI, C. F., R. J. DONNELLY, AND W. F. VINEN Friction on quantized vortices in helium II. A review. *J. Low Temp. Phys.*, 52 :(3/4)p. 189–247, September 1983. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00682247>.
- [15] BARENGHI, C. F., C. J. SWANSON AND R. J. DONNELLY. Emerging issues in helium turbulence. *J. Low Temp. Phys.*, 100(5/6) :385–413, September 1995. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00751517>.
- [16] BARENGHI, C F., V. S. L'VOV AND P.-E. ROCHE. Turbulent velocity spectra in a quantum fluid : experiments, numerics and models *arXiv :1306.6248v1*, p :1–15, Jun 2013. URL <http://arxiv.org/abs/1306.6248>.
- [17] BARENGHI, C. F., AND Y A. SERGEEV. Vortices and Turbulence at Very low Temperatures. by *SpringerWienNewYork*, SPIN :12325634. Printed in Italy, 2008. URL <http://www.springer.com/us/book/9783211094464>.
- [18] BARENGHI, C. F., R. J. DONNELLY AND W. F. VINEN. An introduction to Experiments on superfluid turbulence. *LNP*, 571 :17–35, 2001. URL <http://link.springer.com/book/10.1007%2F3-540-45542-6>.

- [19] BATAILLE, F., RUBINSTEIN, R., ET HUSSAINI, M. Y., Eddy viscosity and diffusivity modeling. *Physics Letters A*, 346 :p. 168–173, 2005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960105011552>.
- [20] BATCHELOR, G. K., The theory of homogeneous turbulence. Published by *The Syndics of the Cambridge University Press*, Bentley House, 200 Euston Road, London, UK. First printed 1953, Reprinted 1956, 1959. Date Published : May 1982. Information on this title : www.cambridge.org/9780521041171.
- [21] BAUDOY, B., Étude des transferts de chaleur dans les isolations électriques de câbles supraconducteurs d'aimant d'accélérateur refroidis par hélium superfluide . *Thèse de doctorat*, L'université de pierre et marie curie, soutenue le 4 Octobre 1996. Information on this title : <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=178811>.
- [22] BELOTSEKOVSKII, O. M., A. M., OPARIN AND V. M. CHECHETKIN. Turbulence : New Approaches. Published by *Cambridge International Science Publishing Ltd*, 7 Meadow Walk, Great Abington, Cambridge CB1 6AZ, UK. ISBN :1-904602-22-3. First published 2005, Printed and bound in Great Britain by Lightning Source UK Ltd. Information on this title : <http://www.cisp-publishing.com>.
- [23] BEKHAREVICH, I.L. ET I.M. KHALATNIKOV : *Soviet Phys. JETP*. 13 :p. 643, 1961.
- [24] BOUÉ, L., V. L'VOV, A. POMYALOV AND I. PROCACCIA. Enhancement of intermittency in superfluid turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 110 : 014502 p1–4, July 2012. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.014502>.
- [25] BRADSHAW, P., AND D. H. FERRISS. The Spectral Energy Balance in a Turbulent Mixing Layer. MINISTRY OF AVIATION AERONAUTICAL RESEARCH COUNCIL, Printed and published by *LONDON : HER MAJESTY'S STATIONERY OFFICE*, CR No : 899. To be purchased from 49 High Holborn, London w.c.1, 1967. URL <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/arc/cp/0899.pdf>.
- [26] BRILLANT, G., Simulations des grandes échelles thermiques et expériences dans le cadre d'effusion anisotherme. *Thèse de doctorat*, INSA de Lyon, 2004. URL http://www-trio-u.cea.fr/home/liblocal/docs/Publications/these_brillant_2004.pdf.
- [27] BROOKS, J. S. ET R. J. DONNELLY, The calculated thermodynamic properties of superfluid helium II. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 6 :p. 51, 1977. DOI : <http://dx.doi.org/10.1007/BF00682247>.

- [28] CABOT, W. ET MOIN, P., Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high reynolds number flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63 :p. 269–291, 1999. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1009958917113>.
- [29] CANNON, J., AND B. SHIVAMOGGI. Mathematical and Physical Theory of Turbulence. Published in 2006 by *Chapman and Hall/CRC*, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487-2742. ISBN -13 :978-0-8247-2323-1 (Hardcover), ISBN -10 :0-8247-2323-6 (e-book). LCC Number 2006040268. 2006 by Taylor et Francis Group, LLC. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/2Fs00162-007-0059-9>.
- [30] CHANAL, O., B. CHABAUD, B. CASTAING ET B. HÉBRAL Intrmittency in a tubulent low temperature gaseous helium jet. *Eur. Phys. J. B*, 17 : p. 309–317, 2000. DOI <http://dx.doi.org/10.1007/s100510070146>.
- [31] CHAOUAT, B. ET SCHIESTEL, R., A new partially integrated transport model for subgrid-scale stresses and dissipation rate for turbulent developing flows. *Physics of Fluids*, 17 :(6) p. 065106-1-065106-19, 2005. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/17/6/10.1063/1.1928607>.
- [32] CHÂTELAIN, A., DUCROS, F., ET MÉTAIS, O., Les of conjugate heat-transfer using thermal wall-functions, dans B. G. R. Friedrich et O. M. eds., réds., *Proceedings of the D-LES 5 ERCOFTAC Workshop*, p. 307–314, Munich, 2003. URL http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-2313-2_33.
- [33] CHÂTELAIN, A., DUCROS, F., ET MÉTAIS, O., Les of turbulent heat transfer : proper convection numerical schemes for temperature transport. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44(9) : p. 1017–1044, 2004. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/fld.691/abstract>.
- [34] CHOLLET, J. P., AND M. LESIEUR. Parameterization of Small Scales of Three-Dimensional Isotropic Turbulence Utilizing Spectral Closures. *J. Atmos. Sci.*, 38 (12) :2747–2757, December 1981. URL <http://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/1520-0469%281981%29038%3C2747:POSSOT%3E2.0.CO%3B2>.
- [35] CHOLLET, J. P. AND M. LESIEUR. Modélisation sous maille des flux de quantité de mouvement et de chaleur en turbulence tridimensionnelle isotrope. *La Météologie*, 29-30 :p. 183–191, 1982.

- [36] COLIN, O., DUCROS, F., VEYNANTE, D., ET POINSOT, T., A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion *Physics of Fluids*, 12 :(7)p. 1843–1863, 2000. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/7/10.1063/1.870436>.
- [37] COOK, A. W. ET RILEY, J. J., A subgrid model for equilibrium chemistry in turbulent flows. *Physics of Fluids*, 6 :(8)p. 2868–2870, 1994. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/6/8/10.1063/1.868111>.
- [38] DAUNT, J. ET K. MENDELSSOHN, The transfer effect in liquid He II. I. The transfer phenomena. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 170 :(942)p. 423–439, 1939. DOI : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1939.0040>.
- [39] DEARDORFF, J. W., The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence *Journal of Fluids Engineering (ASME)*, p. 429–438, 1973. URL <http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1422198>.
- [40] DESJARDIN, P. E. ET FRANKEL, S. H., Large eddy simulation of a nonpremixed reacting jet : Application and assessment of subgrid-scale combustion models. *Physics of Fluids*, 10 :(9)p. 2298–2314, 1998. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/10/9/10.1063/1.869749>.
- [41] DONNELLY, R. ET BARENGHI, C. The Observed Properties of Liquid Helium at the Saturated Vapor Pressure. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 27 :p. 217, 1998. DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.556028>.
- [42] DRIKAKIS, D., AND B.J. GEURTS. Turbulent Flow Computation. Published by *KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS*, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. ISBN :0-306-48421-8 (e-book), ISBN :1-4020-0523-7 (Print). Print 2002, Kluwer Academic Publishers Dordrecht. Information on this title : <http://kluweronline.com>.
- [43] DUCROS, F., COMTE, P., ET LESIEUR, M., Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plane. Published by *Journal of Fluid Mechanics*, 236 :p. 1–36, 1996. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199962381>.
- [44] DURI, D., Mise en évidence expérimentale de l’intermittence dans un jet cryogénique turbulent d’hélium normal et superfluide. *Thèse de doctorat*, L’université de Grenoble, Thèse soutenue publiquement le 30 novembre 2012, URL <http://www.theses.fr/2012GRENI037>.

- [45] FEYNMAN, R., Excitations in liquid helium. Published by *Physica*, 24 :p. 18–26, 1958. DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914\(58\)80495-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914(58)80495-4).
- [46] FOIAS, C., O. MANLEY, R. ROSA AND R. TEMAM. Navier–Stokes Equations and Turbulence. Published by *The Press Syndicate of the University of Cambridge*, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, United Kingdom. ISBN :0-511-03936-0 eBook (netLibrary) ISBN :0-521-36032-3 hardback First published in printed format 2001. Information on this title : <http://www.cambridge.org/0521360323>.
- [47] FRISCH, U., Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov. *Cambridge University Press*, Cambridge, UK. First published November 1995, Reprinted 1996. Information on this title : www.cambridge.org/9780521451031.
- [48] FRISCH, U., Burgulence. In New trends in turbulence 2000, Les Houches Summer School of Theoretical Physics M. Lesieur, A. Yaglom and F. David eds, *EDP-Springer*, 341–383, 2001. URL http://link.springer.com/chapter/10.1007/2F3-540-45674-0_7.
- [49] GAGNE, Y., Etude expérimentale de l’intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence d’éveloppée. *Thèse de Doctorat d’Etat*, Grenoble, 1987. URL <http://www.theses.fr/1987GRE10159>.
- [50] GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P., ET CABOT, W., A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A*, 3(7) :p. 1760–1765, 1991. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pofa/3/7/10.1063/1.857955>.
- [51] GORTER, C. ET J. MELLINK, On the irreversible processes in liquid helium II. *Physica*, 15 :p. 285–304, 1949. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0031-8914\(49\)90105-6](http://dx.doi.org/10.1016/0031-8914(49)90105-6).
- [52] HALL, H. E., ET VINEN, W. F., The rotation of liquid helium II. I. Experiments on the propagation of second sound in uniformly rotating helium II. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 238 :1213p. 204–214, December, 1956. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/238/1213/204.short>.
- [53] HALL, H. E., ET VINEN, W. F., The rotation of liquid helium II. II. The theory of mutual friction in uniformly rotating helium II. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 238 :1213p. 215–234, December, 1956. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/238/1213/215.short>.
- [54] HALL, H. E., : *Adv. Phys.*, 9 :p. 89, 1960.

- [55] HENDERSON, K. L. AND C. F. BARENGHI. Implications of Holm's Finite Temperature Corrections to the HVBK Equations. *J. Low Temp. Phys.*, 134(3/4) : 959–972, February 2004. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/B:JOLT.0000013211.05952.c4>.
- [56] HILLS R. N. ET P. H. ROBERTS, Superfluid mechanics for a high density of vortex lines. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 66 :(1)p. 43–71, 1977. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00250851>.
- [57] HINZE, J. O., Turbulence (2nd ed). *McGraw-Hill*, :New York, 1975. URL <http://www.amazon.com/Turbulence-McGraw-Hill-mechanical-engineering-Hardcover/dp/B00SB1PQ22>.
- [58] IACCARINO, G. ET ELKINS, C. J., Rapid techniques for measuring and modeling turbulent flows in complex geometries. dans W. Rodi et M. Mulas, réds., *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 6*, ERCOFTAC, ETMM6 - Sardinia, Italy, 23 :25May 2005, p. 3–16, Elsevier, Amsterdam, 2005. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/s10494-006-9035-5>.
- [59] IOVIENO, M., PASSONI, G., ET TORDELLA, D., A new large-eddy simulation near-wall treatment. *Physics of Fluids*, 16 :(11)p. 3935–3944, 2004. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/16/11/10.1063/1.1783371>.
- [60] JABERI, F. A. ET JAMES, S., A dynamic similarity model for large eddy simulation of turbulent combustion. *Physics of Fluids*, 10 :(7)p. 1775–1777, 1998. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/10/7/10.1063/1.869696>.
- [61] JAYESH AND Z. WARHAFT, Probability distribution, conditional dissipation, and transport of passive-temperature fluctuations in grid-generated turbulence. *Phys. Fluids A*, 4 :2292–2307, 1992. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pofa/4/10/10.1063/1.858469>.
- [62] KADER, B. A., Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers*, 24 :(9)p. 1541–1544, 1981. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931081902209>.
- [63] KALTENBACH, H.-J., FATICA, M., MITTAL, R., LUND, T. S. ., ET MOIN, P., Study of the flow in a planar asymmetric diffuser using large- eddy simulation, *Journal of Fluid Mechanics*, 390 :p. 151–185, 1999. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=15221&fileId=S0022112099005054>.

- [64] KAPITZA, P., Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, 141 :p. 74, 1938. URL : <http://www.nature.com/physics/looking-back/superfluid/index.html>.
- [65] KEESOM, W. ET A. KEESOM, New measurements on the specific heat of liquid helium. *Physica*, 2 :(1/12)p. 557–572, 1935. DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914\(35\)90128-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914(35)90128-8).
- [66] KHALATNIKOV, I. M., An Introduction to the Theory of Superfluidity. *Perseus Publishing, Cambridge, UK*, 1989. ISBN –13 :978–0738203003 Information on this title : <http://www.amazon.com/Introduction-Theory-Superfluidity-Isaac-Khalatnikov/dp/0738203009>.
- [67] KOBAYASHI, M. AND M. TSUBOTA. Kolmogorov Spectrum of Superfluid Turbulence : Numerical Analysis of the Gross-Pitaevskii Equation with a Small-Scale Dissipation. *J. Phys. Rev. Lett.*, 94 065302 :1–4, February 2005. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.94.065302>.
- [68] KOLMOGOROV, A. N., *Compt. rend. acad. sci. U.R.S.S.*, 30 :301; 32 : 16, 1941. URL <ftp://climate.soest.hawaii.edu/users/kelvin/tracers/turbulence/papers/kolmogorov41b.pdf>.
- [69] KOLMOGOROV, A.N., The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30 : 301–305, 1941. URL <http://homepages.see.leeds.ac.uk/~eeaol/p/kolmogorov41.pdf>.
- [70] KOLMOGOROV, A.N., On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 31 : 538–541, 1941. URL http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-011-3030-1_46.
- [71] KOLMOGOROV, A.N., A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 12 : 82–85, 1962. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=368738&fileId=S0022112062000518>.
- [72] LANDAU, L.D., Theory of the Superfluidity of Helium II. Volume 6 of *Physical Review*, 60 :(4) 356, 1941. URL <http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.60.356>.
- [73] LANDAU, L.D., AND E.M. LIFSHITZ. Fluid Mechanics. Volume 6 of *A Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press 1959. Information on this title : <http://archive.org/details/FluidMechanics>.
- [74] LANDAU, L.D., AND E.M. LIFSHITZ. Mechanics (Third Edition). Imprint : *Butterworth Heinemann*. Paperback, 224 :ISBN 978-0-7506-2896-9. Published : January

1976. Information on this title : <http://www.elsevier.com/books/mechanics/landau/978-0-7506-2896-9>.
- [75] LE, H., MOIN, P., ET KIM, J., Direct numerical simulation of turbulent flow over a backwardfacing step *Journal of Fluid Mechanics*, 330 :p. 349–374, 1997. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=13055&fileId=S0022112096003941>.
- [76] LEE, S., SANJIVA, S. K., ET MOIN, P., Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of taylor’s hypothesis in compressible flows. *Physics of Fluids A*, 4 :(7)1992. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pofa/4/7/10.1063/1.858425>.
- [77] LESIEUR, M. AND R. ROGALLO, Large-eddy simulation of passive-scalar diffusion in isotropic turbulence. *Phys. Fluids A*, 1 :718–722, 1989. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pofa/1/4/10.1063/1.857365>.
- [78] LESIEUR, M., Turbulence in Fluids (Third Revised and Enlarged Edition). Published by *KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS*, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands. Dordrecht/ Boston/ London. ISBN :0-7923-4415-4 (HB), ISBN :0-7923-4416-2 (PB). 1993, reprinted 1995. URL <http://www.springer.com/us/book/9781402064340>.
- [79] LESIEUR, M. ET MÉTAIS, O. New trends in large-eddy simulations of turbulence. Published by *Annual Reviews of Fluids Mechanics*, 28 :p. 45–82, 1996. URL <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fl.28.010196.000401?journalCode=fluid>.
- [80] LESIEUR, M., MÉTAIS, O., ET COMTE, P., Large-Eddy Simulations of Turbulence. Published by *Cambridge University Press*, Cambridge, 2005, 219 p. URL <http://www.amazon.fr/Large-Eddy-Simulations-Turbulence-M-Lesieur/dp/0521781248>.
- [81] LESIEUR, M., Turbulence in Fluids (Fourth Revised and Enlarged Edition). Published by *Springer*, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands. Volume 84, ISBN :978-1-4020-6434-0 (HB), ISBN :978-1-4020-6435-7 (e-book). LCC Number 2007941158. Printed on acid-free paper, 2008 Springer. URL <http://www.springer.com/us/book/9781402064340>.
- [82] LESSANI, B. ET PAPALEXANDRIS, M. V., Time-accurate calculation of variable density flows with strong temperature gradients and combustion. *Journal of Computational Physics*, 212 :p.218–246, 2006. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999105003189>.

- [83] LONDON, F., The λ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy. *Nature*, 141 :p.643–644, 1938. DOI : <http://dx.doi.org/10.1038/141643a0>.
- [84] LUMLEY, J. L., Spectral Energy Budget in Wall Turbulence. *Phys. Fluids*, 7 : 1901964. The American Institute of Physics. Received 07 août 1963, Revised 20 septembre 1963, Published online 09 décembre 2004. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/7/2/10.1063/1.1711132>.
- [85] LUND, T., WU, X., ET SQUIRES, K., On the generation of turbulent inflow conditions for boundary layer simulations. *Center for Turbulent Research*, Annual Research Briefs, p. 281–295, 1996. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199919895882X>.
- [86] LVOV, V.S., S.V. NAZARENKO AND L. SKRBEK. Energy Spectra of Developed Turbulence in Helium Superfluids. *J. Low Temp. Phys.*, 145(1/4) :125–142, November 2006. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/s10909-006-9230-8>.
- [87] MANSOUR, N. N., J. KIM, AND P. MOIN. Reynolds-stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow. NASA Technical Memorandum–89451. *Ames Research Center, Moffett Field*, California 94035, USA, A-87182. Accepted for publication in *J. Fluid Mech.*, December 1987. URL https://archive.org/details/nasa_techdoc_19880005792.
- [88] MARUYAMA, T., On the influence of turbulence characteristics at an inner boundary for large eddy simulation of a turbulent boundary layer, dans W. Rodi et D. Laurence, réds., *Engineering turbulence modeling and experiments- 4*, p. 217–226, Elsevier Science Ltd., Amsterdam, 1999. URL <https://www.elsevier.com/books/engineering-turbulence-modelling-and-experiments-4/laurence/978-0-08-043328-8>.
- [89] MAURER, J. AND P. TABELING. Local investigation of superfluid turbulence. *Europhys. Lett.*, 43(1) :29–34, July 1998. URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/43/1/029>.
- [90] MELLEN, C. P., FRÖLICH, J., ET RODI, W., Lessons from lesfoil project on large-eddy simulation of flow around an airfoil *AIAA Journal*, 41(4) :p. 573–581, 2003. URL <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.2005?journalCode=aiaaj>.
- [91] MENEVEAU, C. ET KATZ, J., Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation. *Annual Reviews of Fluids Mechanics*, 32 :p. 1–32, 2000. URL <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.32.1.1>.

- [92] MERAHI, L., P. SAGAUT, AND M. ABIDAT. A closed differential model for large-scale motion in HVBK fluids. *J. Europhys. Lett.*, 75(5) :757–763, August 2006. URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/75/5/757>.
- [93] MÉTAIS, O., AND M. LESIEUR. Large-eddy simulation of isotropic and stably-stratified turbulence. In *Advances in Turbulence 2*, H.H. Fernholz and H.E. Fiedler eds, Springer-Verlag, :371–376, 1989. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=398095&fileId=S0022112092004361>.
- [94] MÉTAIS, O., AND M. LESIEUR. Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably-stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239 :157–194, 1992. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=398095&fileId=S0022112092004361>.
- [95] MOIN, P., ET K. MAHESH. Direct numerical solution : a tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*,, 30 : 393, p.–415, 1998. URL <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.30.1.539>.
- [96] MOIN, P., Advances in large eddy simulation methodology for complex flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 23 :, p.710–720, 2002. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X02001674>.
- [97] MONIN, A. S. AND A. M. YAGLOM, Statistical Fluid Mechanics : Mechanics of Turbulence. *Cambridge*, Vol. 01 :, MA : MIT Press, 1971. URL : <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=372760&fileId=S0022112073220244>.
- [98] MONIN, A. S. AND A. M. YAGLOM, Statistical Fluid Mechanics : Mechanics of Turbulence. *Cambridge*, Vol. 02 :, MA : MIT Press, 1975. URL <http://www.amazon.com/Statistical-Fluid-Mechanics-Volume-Turbulence/dp/0486458911>.
- [99] MUZY, J. F., E. BACRY, ET A. ARNEODO, Wavelets and multifractal formalism for singular signals : Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.*,, 67 :, p. 3515–3518, Dec 1991. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.67.3515>.
- [100] NICOUD, F. C., Numerical study of a channel flow with variable properties. *Center for Turbulent Research*, Annual Research Briefs, p. 289–309, 1998. URL <http://www.math.univ-montp2.fr/~nicoud/PDF/ctr98.pdf>.
- [101] NICOUD, F. ET DUCROS, F., Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62 :p. 183–200, 1999. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1009995426001>.

- [102] NICOUD, F. ET BAGGETT, J., On the use of the optimal control theory for deriving wall models for LES. *Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs*, p. 329–341, 1999. URL <http://www.math.univ-montp2.fr/~nicoud/PDF/ctr99.pdf>.
- [103] NICOUD, F., BAGGETT, J. S., MOIN, P., ET CABOT, W., Large eddy simulation wall-modeling based on suboptimal control theory and linear stochastic estimation. *Physics of Fluids*, 13(10) :, p. 32968–2984, 2001. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/13/10/10.1063/1.1389286>.
- [104] NICOUD, F. C. ET BRADSHAW, P., A velocity transformation for heat and mass transfer. *Physics of Fluids*, 12(1) :, p. 237–238, 2000. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/1/10.1063/1.870252>.
- [105] NIKITIN, N. V., NICOUD, F., WASISTHO, B., SQUIRES, K. D., ET SPALART, P. R., An approach to wall modeling in large-eddy simulations. *Physics of Fluids*, 12 (7) :p. 1629–1632, 2000. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/7/10.1063/1.870414>.
- [106] NORE, C., M. ABID, AND M. E. BRACHET. Kolmogorov Turbulence in Low-Temperature Superflows. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 78(20) :3896–3899, The American Physical Society, May 1997. URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.78.3896>.
- [107] OBOUKHOV, A.M., Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 12 : p. 77–81, 1962. URL : <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=368735>.
- [108] ONNES, K. H., On the lowest Temperature Yet Obtained. *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden.*, p. 159, 1922. URL : <http://pubs.rsc.org/en/content/articlelanding/1922/tf/tf9221800145/unauth>.
- [109] ONSAGER, L., Statistical Hydrodynamics. *Supplemento al Volume VI, Serie IX del Nuovo Cimento*, 6 :(2) p. 279, 1949. URL : <http://link.springer.com/article/10.1007%2F978-94-009-991-1?LI=true>.
- [110] PÉNEAU, F., BOISSON, H., ET DJILALI, N., Large-eddy simulation of the influence of high free-stream turbulence on a spatially evolving boundary layer. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21 : p. 640–647, 2000. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X00000552>.
- [111] PIOMELLI, U. ET BALARAS, E., Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual Reviews of Fluids Mechanics*, 34 : p. 349–374, 2002. URL : <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.34.082901.144919>.

- [112] POPE, B., Turbulent Flows. *Cambridge University Press*, Cambridge, UK. Date Published : August 2000, Reprinted 2003. Information on this title : www.cambridge.org/9780521598866.
- [113] REYNOLDS, O., On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion.. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A.)*, 186 :123–164, 1895. URL <http://www.jstor.org/stable/90643>.
- [114] RICHARDSON, L. F., The supply of energy from and to atmospheric eddies. *Proc. Roy. Soc., A*, 97 :354, 1922. URL <http://www.jstor.org/stable/93887>.
- [115] RICHARDSON, L. F., Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 110 :709–737, 1926. URL <http://www.jstor.org/stable/94463>.
- [116] ROCHE, P.-E., C. F. BARENGHI AND E. LÉVÈQUE. Quantum turbulence at finite temperature : The two-fluids cascade. *EPL*, 8754006 :1–6, August 2009. URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/87/5/54006>.
- [117] RODI, W., FERZIGER, J. H., BREUER, M., ET POURQUIÉ, M., Status of large eddy simulation : Results of a workshop. *Journal of Fluids Engineering (ASME)*, 119 :p. 248–262, 1997. URL : http://www.twd-wind.com/en/pdf/RC_Advantages_Rodi1997.pdf.
- [118] RO GALLO, R. S., Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence. *NASA Technical Report*, TM-73 :203, 1977. URL <http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19780005424>.
- [119] ROLLIN, B. ET F. SIMON, On the Film phenomenon of liquid Helium. *Physica*, 6 :(2)p. 219, 1939. DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914\(39\)80013-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0031-8914(39)80013-1).
- [120] SAGAUT, P., Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements incompressibles. *Springer*, Berlin, 1998, 282 p. URL : <http://www.springer.com/la/book/9783540646846>.
- [121] SAGAUT, P., COMTE, P., ET F., DUCROS, Filtered subgrid-scale models. *Physics of Fluids*, 12 :(1)p. 233–236, 2000. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/12/1/10.1063/1.870297>.
- [122] SALORT, J., P.-E. ROCHE AND E. LÉVÈQUE. Mesoscale equipartition of kinetic energy in quantum turbulence. *EPL*, 9424001 :p1–6, April 2011. URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/94/2/24001>.

- [123] SALORT, J., B. CHABAUD, E. LÉVÊQUE AND P.-E. ROCHE. Investigation of intermittency in superfluid turbulence. In *J. Phys. : Conf. Ser.*, 318 : 042014 p 1–7 of Proceedings of the 13th EUROMECH European Turbulence Conference, Warsaw. IOP Publishing, September 12-15, 2011. URL <http://iopscience.iop.org/1742-6596/318/4/042014/>.
- [124] SALORT, J., B. CHABAUD, E. LÉVÊQUE AND P.-E. ROCHE. Energy cascade and the four-fifths law in superfluid turbulence. *EPL*, 97 : 34006 p1–6, February 2012. URL <http://iopscience.iop.org/0295-5075/97/3/34006>.
- [125] SILVESTRINI, J.H., E. LAMBALLAIS AND M. LESIEUR. Spectral-dynamic model for LES of free and wall shear flows. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 19(5) :492–504, October 1998. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X98100292>.
- [126] SMAGORINSKY, J., General circulation experiments with the primitive equations, *Monthly Weather Review*, 91(3) :p. 99–164, 1963. URL : <http://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/1520-0493%281963%29091%3C0099:GCEWTP%3E2.3.CO;2>.
- [127] SHE, ZHEN-SU ET LEVEQUE, EMMANUEL. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Physical review letters*,, vol. 72(3) :p. 336., 1994. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.72.336>.
- [128] SPALART, P. R., Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(3) :p. 252–263, 2000. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X00000072>.
- [129] SCHWARZ, K. W., Phase slip and turbulence in superfluid He 4 : A vortex mill that works. *Physical review letters*, 64(10) :1130, 1990. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.64.1130>.
- [130] TCHOUFAG, J. AND P. SAGAUT. Eddy damped quasi normal Markovian simulations of superfluid turbulence in helium II. *Phys. Fluids*, 22 :125103, 2010. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/22/12/10.1063/1.3527282>.
- [131] TENNEKES, H., AND J. L. LUMELEY. A First Course in Turbulence. by *The MIT Press*, Cambridge, Massachusetts, and London, England ISBN :0262200198. Printed by Kingsport Press in USA, 1972. URL : <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=385530&fileId=S002211207321251X>.
- [132] TSUBOTA M., ET KOBAYASHI M., Kolmogorov spectrum of the Gross–Pitaevskii turbulence. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 66 :(2005) p. 1498–1500, 2005. URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.94.065302>.

- [133] VAN ATTA, C. W., AND W. Y. CHEN. Measurements of spectral energy transfer in grid turbulence. *J. Fluid Mech.*, 38(04) : 743–763, October 1969. Published online : 29 March 2006. DOI : <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112069002576>.
- [134] VAN DYKE, M., An album of fluid motion. *Parabolic Press.*, DOI : <http://ocw.internet-institute.eu/courses/earth-atmospheric-and-planetary-sciences/12-820-turbulence-in-the-ocean-and-atmosphere-spring-2007/lecture-notes/ch1.pdf>.
- [135] VERZICCO, R., Large-eddy-simulation of complex flows using the immersed boundary method. dans W. Rodi et M. Mulas, réds., *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 6*, ETMM6- Sardinia, Italy, 23 :25 May 2005, p. 17–30, ERCOFTAC, Elsevier, Amsterdam, 2005. URL : <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.1001>.
- [136] VINEN, W.F., Mutual friction in a heat current in liquid helium II. I. Experiments on steady heat currents. *Proc. R. Soc. Lond. A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2401220 :. The Royal Society. p. 114–127, 1957, April. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/240/1220/114.short>.
- [137] VINEN, W.F., Mutual friction in a heat current in liquid helium II. II. Experiments on transient effects. *Proc. R. Soc. Lond. A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2401220 :. The Royal Society. p. 128–143. 1957, April. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/240/1220/128.short>.
- [138] VINEN, W.F., Mutual friction in a heat current in liquid helium II. III. Theory of the mutual friction. *Proc. R. Soc. Lond. A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2421231 :. The Royal Society. p. 493–515, 1957, November. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/242/1231/493.short>.
- [139] VINEN, W.F., Mutual friction in a heat current in liquid helium II. IV. Critical heat currents in wide channels. *Proc. R. Soc. Lond. A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2431234 :. The Royal Society. p. 400–413. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/243/1234/400.short>.
- [140] VINEN, W.F., The detection of single quanta of circulation in liquid helium II. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 260 :p. 218–236. DOI : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1961.0029>.
- [141] VINEN, W.F., 1958, JANUARY. Vortex lines in liquid helium II. *Progress in Low Temperature Physics*, 3 :p. 1–57, 1961. URL <http://books.google.fr/books?hl=fr&lr=&id=EdtyRjSIz2sC&oi=fnd&pg=PA1&dq=Vinen.+W.+F.+1961+Vortex+>

- lines+in+liquid+helium+II.+Progress+in+Low+Temperature+Physics&ots=egDxAxVlha&sig=f0ms03ELX5cCq2MEyzHrK3nDSyg.
- [142] VINEN, W.F., Turbulence in a superfluid. *J. Low Temp. Phys.*, 121(5/6) :367–376, 2000. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1017593428347>.
- [143] VINEN, W. F. ET NIEMELA, J. J., Quantum turbulence. *J. Low Temp. Phys.*, 128(5/6) :167–231, 2002. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1019695418590>.
- [144] VINEN, W.F., The theory of homogeneous turbulence in superfluid 3He–B. *J. Phys. Chem. Solids*, 66 :1493–1497, September 2005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022369705001368>.
- [145] VINEN, W.F. Theory of quatum grid turbulence in superfluid 3He-B. *Phys. Rev. B*, 71 :024513, January 2005. URL <http://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.71.024513>.
- [146] VOKE, P. R., Low-reynolds-number subgrid-scale models. *Rap. tech., Department of Mechanical Engineering*, University of Surrey, Guildford GU2 5XH, United Kingdom, 1994. URL : http://cfm.mace.manchester.ac.uk/ercsoftac/database/cases/case73/Case_docs/sgmmefd/sgmmefd.ps.
- [147] WACKS, D. H. AND C. F. BARENGHI. Shell model of superfluid turbulence. *Phys. Rev. B*, 84 :184505, October 2011. URL <http://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.84.184505>.
- [148] DAVID C. WILCOX. Turbulence Modeling for CFD. 1993, 1994 by *DCW Industries, Inc*, La Canada, California. First Printing :July 1993, Second Printing :November 1994. URL : <http://www.amazon.com/Turbulence-Modeling-CFD-Third-Edition/dp/1928729088>.
- [149] WU, X., SQUIRES, K. D., ET LUND, T. S., Large-eddy simulation of a spatially-developping boundary layer, dans ACM/IEEE Supercomputing Conference, p. 1–18, San Diego, 1995. URL : http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=1383204&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D1383204.
- [150] XU, X., LEE, J. S., ET PLETCHER, R. H., A compressible finite volume formulation for large eddy simulation of turbulent pipe flows at low mach number in cartesian coordinates. *Journal of Computational Physics*, p. 22–48, 2005. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910400316X>.

-
- [151] YAGLOM, A.M., Effect of fluctuations in energy dissipation rate on the form of turbulence characteristics in the inertial range. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 49 : 166, 1966. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/1966SPhD...11...26Y>.
- [152] ZHOU, X. ET MAHALINGAM, S., A flame surface density based model for large eddy simulation of turbulent nonpremixed combustion *Physics of Fluids*, 14 : (11)p. L77-L80, 2002. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/14/11/10.1063/1.1518691>.