

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Thèse présentée en Vue de l'Obtention du Diplôme de Doctorat Ès Sciences

Spécialité : Génie Mécanique
Option : Energétique

Par

BENSAYAH Khaled

Intitulée :

**COMPARAISON RANS-LES DANS LES FLAMMES DE
PREMELANGE**

Soutenue le / /2015, devant le jury composé de :

M. YUCEFI Abdelkader	Pr. USTOMB-Oran	Président
M. BOUNIF Abdelhamid	Pr. CUR-Relizane	Rapporteur
M. HADJADJ Abdellah	Pr. INSA de ROUEN	Co-rapporteur
M. AZZI Abbès	Pr. USTOMB-Oran	Examineur
M. AOUISSI Mokhtar	MCA. UAT-Laghouat	Examineur
M. BOUZIT Mohamed	Pr. USTOMB-Oran	Examineur
M. ARIS Abdelkader	MCA. ENSET-Oran	Examineur

Université de USTO-MB

Faculté de génie mécanique

Cette thèse intitulée :

Comparaison RANS-LES dans les flammes de prémélange

présentée par

BENSAYAH Khaled

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Abdelahamid Bounif
(Professeur USTO-MB, Directeur de thèse)

Abdellah Hadjadj
(Professeur INSA de Rouen(France), Co-directeur de thèse)

Azzi Abès
(Professeur, USTO-MB)

Aouissi Mokhtar
(Maître de conférences, UATL)

Aris Abdelkader
(Maître de conférences, ENSET-Oran)

Youcef Abdelkader
(Professeur, USTO-MB)

Bouzit Mohamed
(Professeur, USTO-MB)

Thèse acceptée le _____

RÉSUMÉ

Le sujet de cette thèse porte sur la modélisation et la simulation numérique des écoulements turbulents compressibles issues des tuyères convergentes-divergentes de différentes formes (coniques ou profilées). Les travaux antérieurs ont montré que les modèles de turbulence standard étaient incapables de prédire correctement les écoulements compressibles avec gradients de pression adverses. Dans ce travail, on se propose d'introduire le modèle de turbulence à deux équations SST-V de Menter qui nécessite pas de fonctions d'amortissements pour améliorer les prédictions de tels écoulements. Ce modèle a ensuite été appliqué pour étudier les problèmes suivants :

- La simulation des écoulements turbulents compressibles dans les tuyères.
- La simulation des interactions supersoniques onde de choc/couche limite turbulente.
- La simulation de la transition entre décollement libre et décollement restreint.
- L'étude du transfert de chaleur à travers la paroi d'une tuyère en écoulements supersoniques.

Ces phénomènes jouent un rôle fondamental dans la conception et le fonctionnement dans de nombreuses situations tant en aérodynamiques internes et externes, ainsi l'échauffement par frottement turbulent en supersonique est important et un refroidissement externe devient nécessaire pour le maintien de l'intégrité de la surface de la tuyère.

La comparaison des résultats obtenus avec l'expérimentation dégage d'un accord très satisfaisant, le modèle de turbulence SST-V apporte une nette amélioration de prédiction de tels écoulements.

ABSTRACT

The subject of this thesis concerns modeling and numerical simulation of compressible turbulent flows from convergent-divergent nozzles of different forms (shaped or conical). Previous work has shown that the standard turbulence models were unable to correctly predict the compressible flows with adverse pressure gradients. In the present study, we propose to introduce the two-equation SST-V turbulence model that requires no model functions to improve predictions of such flows. This model was then applied to study the following problems :

- Simulation of turbulent compressible flows in nozzles.
- Simulation of supersonic shock wave/turbulent boundary layer interactions.
- The simulation of the transition between free separation and restricted separation.
- The study of heat transfer through the wall of nozzle in supersonic flows.

These phenomena play a fundamental role in the design and operation in many situations both internal and external aerodynamic and heating by supersonic turbulent friction is important and external cooling is necessary for maintaining the integrity of the surface of the nozzle.

Comparison of the results obtained with experimental data releases a very satisfactory agreement, the turbulence model SST-V provides a significant improvement in prediction of such flows.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des Figures	ii
Liste des Tables	iii
NOMENCLATURE	vi
Chapitre 1 : INTRODUCTION	1
1.1 Généralité	2
1.2 Cadre de l'étude et plan de mémoire	4
Références	10
Chapitre 2 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	11
2.1 Introduction	12
2.2 Interaction onde de choc/couche limite	14
2.3 Théorie de l'interaction libre	29
2.4 Critères de décollement	32
Références	40
Chapitre 3 : MODÈLES DE TURBULENCE	44
3.1 Introduction	45
3.2 Modélisation de la turbulence	48
3.3 Description statistique	50
3.4 Types de Moyenne	52
3.5 Les équations de la mécanique des fluides	58

3.6	Les équations de Navier-Stokes moyennées	60
3.7	La fermeture des équations	66
3.8	L'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence	67
3.9	L'équation de transport des contraintes de Reynolds	69
3.10	L'équation de transport de la dissipation turbulente	71
3.11	Modèles de fermeture des équations de Navier-Stokes	75
3.12	Fermeture de l'équation de l'énergie	102
3.13	Conditions de réalisabilité	105
3.14	Corrections de compressibilité	107
3.15	Conclusion	111
	Références	113
	Chapitre 4 : MÉTHODE NUMÉRIQUE	121
4.1	Introduction	122
4.2	Méthode des volumes finis	128
4.3	Linéarisation en temps	132
4.4	Fractionnement des flux eulériens	141
4.5	Termes de flux visqueux	148
4.6	Traitement des termes sources	151
4.7	Opérateur implicite	152
	Références	155
	Chapitre 5 : RÉSULTATS	157
5.1	Introduction	158
5.2	Validation du modèle de turbulence SST-V Menter	160
5.3	Etat de l'art sur le décollement stationnaire	169

5.4	Etude paramétrique du décollement	203
5.5	Étude du transfert thermique dans les tuyères	215
5.6	Formulation de transfert de chaleur	218
5.7	Effet de la température de paroi	230
5.8	Effet de nombre de Prandtl turbulent	231
5.9	Effet du facteur de récupération r	235
5.10	Effet de γ	237
5.11	Effet de la température de stagnation T_0	239
5.12	Effet de la pression de stagnation P_0	241
5.13	Effet de l'angle du convergent	243
	Références	244
	Chapitre 6 : CONCLUSION	251
	Annexe A :	258
	A.1 Coordonnées généralisées	258
	Annexe B :	263
	B.1 Conditions aux limites	263

LISTE DES FIGURES

1.1	<i>Écoulement localement supersonique sur une aile d'avion volant en régime transsonique</i>	6
1.2	<i>Écoulement supersonique dans une tuyère (Vulcain) avec $P_0 = 110\text{bars}$, $T_0 = 3646\text{K}$, $U_{max} = 4392\text{m/s}$ et $Mach_{max} = 4.76$</i>	6
1.3	<i>Avion spatial hypersonique américain X-33</i>	8
2.1	<i>Tuyère LEATOC en présence de décollement $t=0.408\text{ ms}$</i>	13
2.2	<i>La structure d'un écoulement sur une rampe sans séparation de la couche limite</i>	18
2.3	<i>Écoulement turbulent sans séparation sur une rampe à nombre élevé de Mach et Reynolds [4]</i>	19
2.4	<i>La structure d'un écoulement sur une rampe avec séparation de la couche limite</i>	20
2.5	<i>Écoulement sur une rampe avec séparation de la couche limite à nombre de Mach élevé</i>	20
2.6	<i>Ombroscopie d'écoulement turbulent sur une rampe à Mach 9.2 [7]</i>	22
2.7	<i>Interactions laminaire et turbulente</i>	23
2.8	<i>Réflexion d'un choc oblique sans décollement</i>	24
2.9	<i>LES compressible de l'interaction onde de choc/couche limite turbulente à grand nombre de Reynolds, document de CTR (Center of Turbulence Research) par : Ivan Bermejo-Moreno, Johan Larson et Sanjiva Lele</i>	25
2.10	<i>Réflexion d'un choc oblique avec décollement</i>	27

2.11	<i>Séparation supersonique dans une marche montante</i>	28
2.12	<i>Distribution de la pression de paroi statique typique observée dans une rampe, choc de réflexion et sur une marche, [14] et [15]</i>	29
2.13	<i>La fonction de corrélation de la pression de paroi généralisée $F(X)$ pour un écoulement turbulent uniforme, par Erdos et Pallone [16]</i> . . .	31
2.14	<i>Comparaison des modèles simples de prédiction de séparation pour (p_0/p_a) avec les résultats expérimentaux. La forme de symbole dans la légende indique dont l'enquête, les données sont prises et les couleurs des symboles correspondent à des configurations de buses différentes testées, voir Frey [27]. également publié dans [28], (remarque $p_{sep} = p_0$ et $M_{sep} = M_0$)</i>	38
4.1	<i>Volume d'intégration</i>	130
4.2	<i>Mailles en $i - 1$, i, et $i + 1$</i>	143
5.1	<i>Géométrie de la Tuyère JPL de Cuffel et al [5] en (m)</i>	161
5.2	<i>Maillage structuré multi blocs</i>	161
5.3	<i>Strioscopie numérique de la tuyère [5] (Simulation avec le modèle SST-Menter). NPR=3.12</i>	162
5.4	<i>Champ de nombre de Mach de la tuyère [5] NPR=3.12</i>	162
5.5	<i>Champ de pression avec NPR=3.12</i>	163
5.6	<i>Comparaison de champ de Mach dans la région transsonique pour un rapport de pression NPR=4.82 avec les mesures de Cuffel et al [5] (les alphabets représentent l'expérimentation)</i>	163
5.7	<i>distribution axiale de la pression sur la paroi, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])</i>	164

5.8	<i>distribution axiale de la pression à une distance égale à 4.7 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5]) . . .</i>	164
5.9	<i>distribution axiale de la pression à une distance égale à 4.32 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])</i>	165
5.10	<i>distribution axiale de la pression à une distance égale à 3.81 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])</i>	165
5.11	<i>distribution axiale de la pression à une distance égale à 2.54 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])</i>	166
5.12	<i>distribution axiale de la pression à une distance égale à 1.27 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])</i>	166
5.13	<i>distribution axiale de la pression sur l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])</i>	167
5.14	<i>Champ de vorticité dans la tuyère [5]</i>	167
5.15	<i>Fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente par l'approche monodimensionnelle d'un fluide parfait</i>	170
5.16	<i>Régimes de tuyère (P_a : Pression ambiante à l'aval, P_E : Pression à la lèvre de la tuyère fonctionnant dans le vide)</i>	171
5.17	<i>Tuyère bidimensionnelle en régime sous-détendu ($P_a/P_e = 0,66$). Notez la présence des faisceaux de détente à la lèvre de sortie de la tuyère (photo tirée de [17])</i>	174
5.18	<i>Tuyère bidimensionnelle en régime surdétendu avec réflexion de Mach pour un rapport de pression ($P_a/P_e > 2,5$)(photo tirée de [17]) . . .</i>	175
5.19	<i>Jet supersonique avec réflexion régulière et réflexion de Mach. P_c désigne la pression chambre (photos tirées de [19])</i>	175
5.20	<i>Décollement effectif lors d'un amorçage rapide - tuyère Amann [20] .</i>	176

5.21	<i>Représentation schématique de la réflexion régulière, de la réflexion de Mach et du choc en chapeau. I : choc incident, IS : choc de focalisation, IR : choc réfléchi, J : jet, SL : ligne de glissement, TP point triple, D : point de décollement, V : tourbillon (en haut). Moteur Vulcain au banc d'essai - Photos Snecma (en bas)</i>	177
5.22	<i>Schéma de principe d'un décollement libre. Les indices * et S font référence, respectivement, au pied de décollement (point de séparation naissante), au point de séparation effective</i>	180
5.23	<i>Distribution du champ de vitesse dans le divergent dans une tuyère TIC pour un rapport de pression $P_C/P_a = 25$, la température de la paroi est maintenue à $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$</i>	182
5.24	<i>Décollement libre FSS (Free Shock separation) dans une tuyère TIC Nombre de Mach (min = 0.0, max = 4.97) pour un rapport de pression $P_C/P_a = 25$, $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$</i>	182
5.25	<i>Représentation schématique du décollement libre FSS IS : choc interne, SJ : jet supersonique, SP : point de séparation, MD : disque de Mach, TP : point triple</i>	183
5.26	<i>structure de Réflexion de Mach dans une tuyère idéale tronquée avec $P_C/P_a = 25$, $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$)</i>	183
5.27	<i>Décollement libre dans une tuyère TIC refroidie. Nombre de Mach (min = 0.0, max = 4.97) pour un rapport de pression $P_C/P_a = 25$, distribution de la pression pariétale (en haut), le champ de Mach (en milieu), Strioscopie numérique (en bas)</i>	185
5.28	<i>Rapport $r = S/\Omega$ sur la paroi de la tuyère LEA-TOC</i>	186
5.29	<i>Validation de l'équation de la réalisabilité (5.1) proposée dans la présente étude pour l'amélioration de la prédiction de la pression pariétale)</i>	187

5.30	<i>Décollement libre, comparaison avec l'expérience sur LEA-TOC pour des rapports de pression $NPR = P_0/P_a$ égal à 15 et 16</i>	188
5.31	<i>Distribution du champ de vitesse dans le divergent dans une tuyère TOC pour un rapport de pression $P_c/P_a = 25$, la température de la paroi est maintenue à $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$</i>	190
5.32	<i>Décollement restreint RSS (Restricted Shock Separation) dans une tuyère TOC Nombre de Mach (min = 0.0, max = 5.26) pour un rapport de pression $P_c/P_a = 25$, $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$</i>	190
5.33	<i>Représentation schématique du décollement restreint RSS IS : choc interne, SJ : jet supersonique, SP : point de séparation, MD : disque de Mach, TP : point triple</i>	191
5.34	<i>confrontation du schéma de principe de RSS dans le cas théorique (en haut) et calcul numérique (en bas) i_1 choc interne, i_2 choc incident, r choc de réfléchi, TP point triple, S ligne de glissement</i>	192
5.35	<i>Décollement restreint dans une tuyère TOC refroidie. Nombre de Mach (min = 0.0, max = 5.26) pour un rapport de pression $P_c/P_a = 25$, distribution de la pression pariétale (en haut), le champ de Mach (en milieu), Strioscopie numérique (en bas)</i>	193
5.36	<i>Accélération convective représentée par $\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$</i>	195
5.37	<i>Comparaison par striscopie numérique entre la tuyère TOC et TIC, mêmes conditions opératoires</i>	195
5.38	<i>tuyère TOC(en haut) et TIC(en bas)</i>	196
5.39	<i>Champ de flux massique $\rho \tilde{u}$, $\rho \tilde{v}$</i>	196
5.40	<i>Structure de décollement RSS (Schlieren image) et lignes de courant pour la tuyère LEATOC , référence [45], avec un un schéma au second ordre MUSCL</i>	196

5.41	<i>Structure de décollement RSS (Schlieren image) et lignes de courant pour la tuyère LEATOC , référence [45], avec un un schéma WENO à l'ordre 5</i>	197
5.42	<i>Structure de décollement RSS (Schlieren image) et lignes de courant pour la tuyère LEATOC , présente étude</i>	197
5.43	<i>Transition FSS/RSS</i>	198
5.44	<i>Transition FSS/RSS (suite)</i>	199
5.45	<i>Transition décollement libre/décollement restreint de la tuyère LEA-TOC avec $NPR = 24.9558$ et $T_0 = 276.282K$ (suite)</i>	200
5.46	<i>Décollement restreint, comparaison avec l'expérience sur LEA-TOC pour des rapports de pression $NPR = P_0/P_a$ égal à 25, 33 et 37 . . .</i>	201
5.47	<i>Corrélation $P_C/P_a = f(A_D/A_C)$ influence de l'angle du divergent dans des tuyères coniques de 20° et 6° avec un rapport de section égale à 6</i>	204
5.48	<i>Corrélation $P_i/P_a = f(M_i)$ (l'indice i correspond au point au pied de décollement ou point de séparation naissante) (photo tirée de [16]) . .</i>	205
5.49	<i>effet de γ sur la position de séparation, $P_0/P_a = f(A_{sep}/A_{th})$</i>	206
5.50	<i>effet de γ sur la distribution de la pression pariétale, $P_w/P_0 = f(x)$.</i>	207
5.51	<i>comparaison calcul-expérience de rapport P_w/P_0, cas test 262 ($P_0=51.8$ N/cm^2, $T_0=843$ k), cas test 311 ($P_0=174.9$ N/cm^2, $T_0=572$ k)</i>	208
5.52	<i>comparaison calcul-expérience de rapport P_w/P_0, cas test 262 ($P_0=51.8$ N/cm^2, $T_0=843$ k), cas test 266 ($P_0=30.8$ N/cm^2, $T_0=835$ k)</i>	208
5.53	<i>Corrélation $P^*/P_0 = f(x^*/D_{th})$, influence de la température de paroi T_w et de la pression génératrice P_0 sur la pression P^* et l'abscisse x^* du pied de décollement</i>	210

5.54	<i>Corrélation $P_{sep}/P_0 = f(x_{sep}/D_{th})$, influence de la température de paroi T_w et de la pression génératrice P_0 sur la pression P_{sep} et l'abscisse x_{sep} de séparation</i>	211
5.55	<i>Corrélation $P^*/P_{sep} = f(x_{sep}/D_{th})$, influence de la température de paroi T_w sur le rapport de la pression P^*/P_{sep}</i>	211
5.56	<i>Corrélation $P^*/P_a = f(M^*)$, influence de l'état de surface sur la position de décollement</i>	212
5.57	<i>Distribution de la pression pariétale, photo tirée de [46]</i>	214
5.58	<i>Types de décollement libre [27]</i>	214
5.59	<i>Géométrie de la tuyère et configurations des deux entrées 1 et 2, référence [51]</i>	219
5.60	<i>La distribution de la pression statique le long de la paroi (entrée 2)</i>	219
5.61	<i>La distribution du nombre de Mach le long de la paroi (entrée 2)</i>	220
5.62	<i>Température de la paroi adiabatique calculée</i>	221
5.63	<i>Iso-contours calculés, en haut : nombre de Mach et en bas : débit massique</i>	222
5.64	<i>Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 2 avec $T_w/T_0 = 0.4$</i>	223
5.65	<i>Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 2 avec $T_w/T_0 = 0.45$</i>	223
5.66	<i>Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 2 avec $T_w/T_0 = 0.5$</i>	224
5.67	<i>Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 1 avec $T_w/T_0 = 0.4$</i>	225
5.68	<i>Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 1 avec $T_w/T_0 = 0.45$</i>	225
5.69	<i>Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 1 avec $T_w/T_0 = 0.5$</i>	226
5.70	<i>Rapport P_w/P_0 le long de la paroi de la tuyère citée dans la référence [53]</i>	226
5.71	<i>La distribution de débit massique au bord de la couche limite de la tuyère citée dans la référence [53]</i>	227

5.72	<i>Distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la paroi de la tuyère citée dans la référence [53]</i>	228
5.73	<i>En haut : strioscopie numérique et en bas : divergence de la vitesse</i>	229
5.74	<i>Géométrie de la tuyère de la référence [1]</i>	230
5.75	<i>Effet de la température de paroi et du rapport de la chaleur spécifique γ sur la distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la tuyère de la figure 5.74</i>	230
5.76	<i>Effet du nombre de Prandtl turbulent sur la distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la tuyère de la figure 5.74</i>	232
5.77	<i>Effet du nombre de Prandtl turbulent variable sur la distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la tuyère de la figure 5.74</i>	233
5.78	<i>Variation du nombre de Prandtl turbulent près de paroi, à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite</i>	234
5.79	<i>Facteur de récupération le long de la paroi de la tuyère de la figure 5.74</i>	235
5.80	<i>Effet du facteur de récupération sur le transfert thermique pariétal</i>	236
5.81	<i>Effet de γ sur le transfert thermique pariétal, $h[W/m^2] = f(x[m])$</i>	237
5.82	<i>Effet de γ sur la pression pariétale</i>	238
5.83	<i>Effet de γ sur la pression pariétale</i>	239
5.84	<i>Effet de la température de stagnation sur le transfert thermique pariétal pour l'AIR</i>	240
5.85	<i>Effet de la température de stagnation sur le transfert thermique pariétal pour le CO_2</i>	240
5.86	<i>Effet de la pression P_0 sur le transfert thermique pariétal, $h[W/m^2] = f(x[m])$, expérimental de la référence [1]</i>	242
5.87	<i>Effet de la pression P_0 sur le flux de masse au bord de la couche limite, expérimental de la référence [1]</i>	242

5.88	<i>Distributions expérimentales du coefficient de transfert de chaleur dans les tuyères 30°-15° et 60°-15° avec une conduite d'entrée non refroidie de 43.2 cm de longueur, réf [58].</i>	243
B.1	<i>maillage à la paroi</i>	273

LISTE DES TABLES

3.1	Les constantes du modèle $SSG/LRR - \omega$	102
3.2	Coefficients de l'équation de c_μ (éq.(3.141))	106
5.1	coefficients dans l'équation de c_μ	187
5.2	Les propriétés physiques des différents gaz	206

REMERCIEMENTS

Cette thèse est le fruit d'un travail réalisé en première partie à l'université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf USTOMB à Oran (Algérie). Il a été supporté financièrement par une bourse BAF dont la deuxième partie de ce travail est réalisée au sein de INSA de Rouen et le Laboratoire de CORIA UMR 6614 (France). Je tiens à remercier l'ensemble de ces acteurs qui m'ont permis d'effectuer cette thèse dans les meilleures conditions.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au professeur Abdelhamid BOUNIF, directeur de thèse, qui m'a fait inclus dans le domaine de la turbulence, qui m'a soutenu, guidé tout au long de la première partie de cette thèse.

Mes plus sincères remerciements vont également au professeur Abdellah HADJADJ de m'y avoir accueilli dans son équipe de recherche, qui a encadré ces recherches pour la deuxième partie de cette thèse, cette période a été une expérience riche et formatrice sur tous les points, aussi bien scientifiques qu'humains.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du Jury pour avoir accepté de juger mon travail.

Ces années de thèse ont été riches en expériences, je dois aussi remercier pour cela l'ensemble des thésards, et notamment celui qui a partagé avec moi le bureau et pour tout le soutien moral et amical dont il a fait preuve envers moi pendant ces années, Mahfoudi lahcen (et toute sa petite famille).

Je suis très reconnaissant aux personnels de ressources en informatique que ce travail a été rendu possible grâce à eux, calcul haute performance (HPC) les ressources de Grand Equipement National de Calcul Intensif (GENCI) sous l'allocation 2011-0211640 et le CRIHAN (Centre de ressources Informatique de Haute Normandie,

Rouen, France).

D'un point de vue plus personnel je remercie mes parents et ma famille pour m'avoir soutenu et suivi dans mes choix. Ma plus grande gratitude est pour ma mère qui depuis plus de 40 ans a su faire preuve de patience pour me supporter ce qui je sais est parfois chose très difficile. Elle a toujours été entièrement disponible, toujours prête à m'aider et me soutenir. Si aujourd'hui j'écris ces remerciements c'est en grande partie grâce à elle. Ainsi à toute ma famille, spécialement pour, ma femme, mes filles, Soundous et Rymase et Radja. Pour toutes les nuits qu'elles sont passées sans moi.



NOMENCLATURE

Symbol	Description
a	Vitesse du son (également c)
A	Matrice jacobienne du flux convectif F
A_ξ	Matrice jacobienne du flux convectif F_ξ
B	Matrice jacobienne du flux convectif G
B_η	Matrice jacobienne du flux convectif G_η
CFL	Courant Friedrichs Levy
α	Energie cinétique des quantités moyennées
c	Vitesse du son (également a)
c^*	Vitesse du son turbulente
c_p	Chaleur spécifique pression constante
c_v	Chaleur spécifique volume constant
C_f	Coefficient de frottement
δ	Epaisseur de la couche limite
ΔU	Accroissement explicite du vecteur U
δU	Accroissement implicite du vecteur U
$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker
ΔT	Accroissement en temps
e	Energie interne par unité de masse
e_t	Energie totale par unité de masse
ε	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente
ε^*	Taux de dissipation isotrope
F	Flux eulérien dans la direction x

F_ν	Flux visqueux dans la direction x
F_ξ	Flux eulérien dans la direction ξ
$F_{\nu\xi}$	Flux visqueux dans la direction ξ
G	Flux eulérien dans la direction y
G_ν	Flux visqueux dans la direction y
G_η	Flux eulérien dans la direction η
$G_{\nu\eta}$	Flux visqueux dans la direction η
γ	Rapport des chaleurs spécifiques ($\gamma = c_p/c_v$)
H	Matrice jacobienne des termes sources S_0
h	Coefficient du transfert de chaleur
h_t	Enthalpie totale par unité de masse
k	Energie cinétique de turbulente
ω	Taux de dissipation spécifique
l	Echelle spatiale de la turbulence
l_m	Longueur de mélange
λ_c	Coefficient de conductibilité thermique
M_e	Nombre de Mach l'extérieur de la couche limite (également M_∞)
M_t	Nombre de Mach turbulent ($M_t = \sqrt{2k}/c$)
\mathcal{H}	la fonction de Heaviside
$\mathcal{E}_{NS}(u_i)$	Opérateur de Navier-Stokes
q_j	Flux de chaleur par unité de surface et unité de temps dans la direction x_j
q_w	Flux de chaleur pariétal
μ	Viscosité moléculaire
ν	Viscosité cinématique
μ_t	Viscosité turbulente

μ_{ef}	Coefficient de diffusion effectif de quantité de mouvement
μ_{kef}	Coefficient de diffusion effectif de k
$\mu_{\omega ef}$	Coefficient de diffusion effectif de ω
Pr	Nombre de Prandtl
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent
p	Pression hydrostatique
p^*	Pression effective $p^* = p + \frac{2}{3}\rho k$
p_0	Pression génératrice ou de chambre (également p_c)
p_w	Pression statique pariétale
Re	Nombre de Reynolds
Re_t	Nombre de Reynolds turbulent
ρ	Masse volumique
S_0	Vecteur des termes sources
$\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$	Vecteur surface entre les mailles (i, j) et $(i + 1, j)$
$\vec{S}_{j+\frac{1}{2}}$	Vecteur surface entre les mailles (i, j) et $(i, j + 1)$
$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}$	Composantes du vecteur surface du module 1 entre (i, j) et $(i + 1, j)$
$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$	Composantes du vecteur surface du module 1 entre (i, j) et $(i, j + 1)$
σ_{ij}	Tenseur des contraintes visqueuses
t	Temps
T	Température
T_0	Température génératrice
T_w	Température pariétale
T_{aw}	Température adiabatique

τ	Temps de Kolmogorov
η	Echelle de Kolmogorov
τ_w	Frottement pariétal
U	Vecteur des grandeurs conservatives
u	Vitesse dans la direction x
u_i	Vitesse dans la direction x_i
V	Vecteur des grandeurs non-conservatives
v	Vitesse dans la direction y
$\mathcal{V}_{i,j}$	Volume de maille (i, j)
S_{ij}	Tenseur de déformation
Ω_{ij}	Tenseur de vorticité
\bar{f}	Moyenne d'ensemble de la quantité f
f'	Fluctuation de la quantité f pour la moyenne d'ensemble
\tilde{f}	Moyenne de Favre de la quantité f
f''	Fluctuation de la quantité f pour la moyenne de Favre
(x, y)	Axes du repère cartésien
(ξ, η)	Axes du repère local

Abréviations

<i>FSS</i>	Free Shock Separation (décollement libre)
<i>RSS</i>	Restricted Shock Separation (décollement restreint)

<i>LEA</i>	Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques
<i>TIC</i>	Truncated Ideal Contour
<i>TOC</i>	Thrust Optimized Contour
<i>TOP</i>	Thrust Optimized Parabolic
<i>WENO</i>	Weighted Essentially Non-Oscillatory
<i>RANS</i>	Reynolds Averaged Navier-Stokes
<i>NPR</i>	Nozzle Pressure Ratio
<i>SST</i>	Shear Stress Tensor

Chapitre 1

INTRODUCTION

” Je suis un vieil homme maintenant, et quand je mourrai et irai au paradis, il y a deux sujets sur lesquels j’aimerais bien être éclairé. L’un est l’électrodynamique quantique, et l’autre l’écoulement turbulent des fluides. Et à propos du premier je suis plutôt optimiste ”

[Sir Horace Lamb]

1.1 Généralité

Les précieux services offerts par les satellites actuels sont nombreuses et variées. Ils comprennent plus sûr contrôle de la circulation aérienne, des rapports météorologiques précises, les avertissements en temps opportun des risques environnementaux ainsi que d'un choix plus large de programmes de télévision et l'amélioration des soins de santé. Tous ces services que nous tenons aujourd'hui pour acquis et ont tendance à oublier qu'ils n'existeraient pas si nous n'avions pas de lance-roquettes capables de placer avec précision des satellites dans l'espace. Les véhicules spatiaux sont désormais omniprésents dans l'activité humaine que ce soit en défense, météorologie, communications. Il est difficile d'avoir un chiffre exact, on peut estimer à un millier le nombre de satellites artificiels en orbite autour de la terre. A ces satellites on peut ajouter le lancement d'un autre bon millier de sondes spatiales. Il y a donc une grande variété d'engins spatiaux et une grande variété de missions spatiales, chacune ayant des besoins spécifiques.

La fusée est un dispositif qui stocke sa propre masse propulsive et expulse cette masse à grande vitesse pour fournir une force de réaction, la poussée. Le propulseur est indépendant de son environnement et, par conséquent, peut fonctionner dans l'espace vide. Il y a deux groupes de propergols, liquides et solides. Beaucoup de lanceurs d'engins spatiaux impliquent l'utilisation de deux types de roquettes, par exemple les propulseurs à poudre attachés à des fusées à propulsion liquide. Fusées à combustible solide sont généralement plus simples que le liquide, mais ils ne peuvent pas être arrêtés une fois enflammés. Moteurs liquides peuvent être arrêtés après l'allumage et en théorie pourraient être rallumés.

Le principe de la technologie des lanceurs spatiaux est simple, mais la mise en œuvre est très compliquée. Les lanceurs spatiaux portent des charges très lourdes, pour un espace de l'appareil le plus restreint possible. Ce cahier des charges mène à l'utilisation de propergols hautement énergétiques délivrant des gaz de combustion à

haute température (plus de 3000 K), et génèrent une pression élevée à l'intérieur de la chambre (plus de 100 bars). Les sollicitations mécaniques et thermiques auxquelles sont soumises les tuyères dépendent de l'état thermodynamique des gaz d'échappement. Dans de telles conditions d'emploi, le choix des matériaux est primordial pour assurer l'intégrité des composants.

Les ondes de choc sont au cœur de plusieurs applications technologiques et scientifiques, comme par exemple l'injection de gasoil à haute pression dans une chambre de combustion, l'allumage d'un moteur-fusée cryogénique ou l'échappement de gaz à travers une tuyère propulsive. Ces systèmes industriels mettent en jeu des phénomènes qui sont sans doute parmi les plus complexes et les plus spectaculaires de la mécanique des fluides : jets supersoniques, interférences de chocs, instabilités à grande échelle. D'autres enjeux sociétaux concernent les risques industriels liés aux accidents et à la sécurité civile. Comprendre l'influence des différentes échelles de la turbulence, de la présence d'entités liquides ou d'obstacles solides sur la topologie du front de choc et de l'écoulement supersonique associé constitue la principale difficulté scientifique de ce domaine.

Dans la plupart des cas pratiques, l'effet des fluctuations de densité sur le champ fluctuant de vitesse est assez faible, sauf dans des écoulements flottants, parce que les fluctuations de densité constituent seulement une petite fraction de la densité moyenne. L'effet de gradients de densité moyenne sur la turbulence, cependant, peut être important dans certains cas. Pour de nombreuses applications, des modèles de turbulence pour des écoulements incompressibles peuvent être adéquates pour des écoulements à densité variable du même type, à condition que la densité moyenne doive être insérée dans les équations différentielles ou dans les formules algébriques liées les contraintes turbulentes et les taux de flux d'enthalpie à la vitesse moyenne et au champ de température.

En plus de la variation de densité, un autre aspect essentiel de l'écoulement compressible à haute vitesse est l'énergie. Un écoulement à grande vitesse est un

écoulement à haute énergie. Lorsque la vitesse de l'écoulement diminue, une partie de l'énergie cinétique est perdue et réapparaît comme une augmentation de l'énergie interne, ce qui augmente la température du gaz. Par conséquent, dans un écoulement à grande vitesse, les transformations de l'énergie et les changements de température sont des considérations importantes. De telles considérations relèvent de la science de la thermodynamique. Pour cette raison, la thermodynamique est outil essentiel dans l'étude des écoulements compressibles. Lorsqu'un fluide se déplace à des vitesses comparables à la vitesse du son, des variations de densité deviennent significatifs et l'écoulement est appelé compressible. Tels écoulements sont difficiles à obtenir dans les liquides, car des hautes pressions de l'ordre 1000 atm sont nécessaires pour générer des vitesses soniques. Dans les gaz, cependant, un rapport de pression de 2 seulement est susceptible de causer un écoulement sonique. Probablement les deux effets les plus importants et distinctifs de la compressibilité sur l'écoulement sont (1) l'étouffement, dans lequel le débit est fortement limitée par la condition soniques, et (2) des ondes de choc, qui sont des changements discontinus de propriétés dans un écoulement supersonique.

1.2 Cadre de l'étude et plan de mémoire

L'objet de cette thèse est de contribuer à l'étude des phénomènes aérodynamiques et thermiques dans le domaine de la propulsion.

Aujourd'hui la simulation numérique devient un incontestable progrès pour le calcul des phénomènes physiques d'écoulements supersoniques compressibles, et il constitue une aide précieuse à l'interprétation physique et à la visualisation des résultats expérimentaux. La principale motivation de cette thèse est de pouvoir comprendre l'effet de plusieurs paramètres qui gouvernent ces écoulement avec ou sans présence des gradients de pression adverses.

Une onde de choc est une augmentation soudaine de la pression et de la densité

sur une très mince "onde" avant l'écoulement supersonique. Il est, bien sûr, régi par les équations de conservation de masse, de mouvement et d'énergie, mais il en résulte une diminution soudaine de la pression totale et l'augmentation de l'entropie ; la dissipation est effectuée par la viscosité (telle que modifiée par le fait que l'épaisseur de l'onde de choc est à seulement quelques fois le libre parcours moyen entre les collisions de molécules de gaz), mais les détails de la perte totale de pression, etc, ne dépendent pas de la viscosité. L'augmentation de l'entropie implique qu'un concentré "onde de raréfaction" ne peut pas exister parce que l'entropie diminuerait.

L'interaction onde de choc/couche limite turbulente est une conséquence de l'écoulement compressible, plusieurs recherches ont commencé d'améliorer les performances des modèles de turbulence utilisés pour ce genre de phénomènes [1]. Différentes modifications, portant par des termes des équations liés à la compressibilité, ou traduisant indirectement les propriétés de la compression rapide de l'écoulement sur les échelles mises en jeu, ont été testées au cours des vingt dernières années [2],[3],[4]. Les améliorations demeurent limitées, Malgré ces efforts, et dépendent de la configuration d'interaction. Il apparaît donc manifestement que certains points clés relatifs aux mécanismes physiques mis en jeu dans ce type d'interaction sont encore mal modélisés ou même absents dans les modèles. La compréhension détaillée des phénomènes physiques mis en jeu lors d'une interaction onde de choc/couche limite turbulente est par conséquent encore aujourd'hui un enjeu important afin de rendre plus fiables les prédictions numériques associées en suggérant de nouvelles idées en matière de modélisation.

Plusieurs régimes d'écoulement peuvent exister comme conséquence de l'interaction onde de choc/ couche limite, on peut citer :

1. Transsonique : une situation rencontrée lorsque le nombre de Mach critique est dépassé, écoulement autour une aile d'avion passe du régime subsonique au régime transsonique lorsqu'apparaît une zone dans laquelle la vitesse égale à la

vitesse du son (figure 1.1).

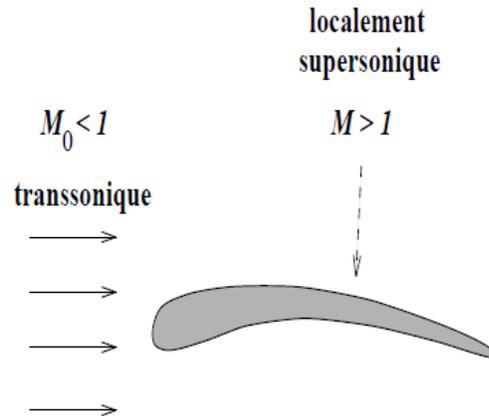


FIGURE 1.1. *Écoulement localement supersonique sur une aile d'avion volant en régime transsonique*

- Supersonique : Les écoulements supersoniques se rencontrent fréquemment dans de nombreux domaines d'applications (tuyères de moteur-fusée, missiles, avions de chasses et d'observations, prises d'air). Les phénomènes observés dans une tuyère d'une soufflerie supersonique constituée d'un convergent et d'un divergent séparés par un col sonique lorsque la soufflerie est amorcée (figure 1.2).

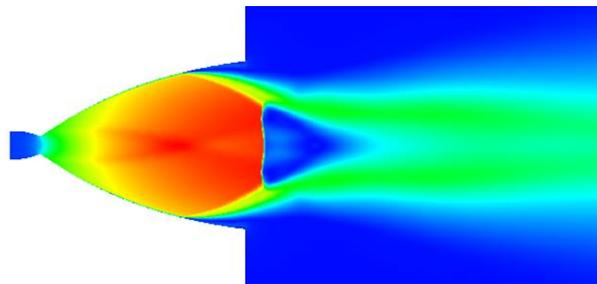


FIGURE 1.2. *Écoulement supersonique dans une tuyère (Vulcain) avec $P_0 = 110\text{bars}$, $T_0 = 3646\text{K}$, $U_{max} = 4392\text{m/s}$ et $Mach_{max} = 4.76$*

- Hypersonique : ces interactions ont lieu, par exemple, dans le cas de la rentrée

atmosphérique, ces effets sont sensibles à des vitesses supérieures à 5 km / s et un nombre de Mach supérieur à 7, alors ils peuvent déjà être pour plus faible vitesses dans le cas d'un écoulement à travers une tuyère, où le fluide en amont est hautement comprimé et chauffé avant la détente. Les mécanismes de ces écoulements sont très courts. Ainsi, pour un véhicule de longueur $L = 1m$ se déplaçant à 10 km/s, est $t = 0,0001s$. en raison de l'état de l'adhérence à la paroi, la présence du véhicule est accompagné d'une décélération brutale du fluide au voisinage de celui-ci. Cela implique la transformation de l'énergie cinétique, très haute en amont du corps en énergie thermique au voisinage de celle-ci, conduisant à l'apparition de niveaux d'énergie considérables. Par exemple, la conservation de l'enthalpie totale $h = C_p T + \frac{u^2}{2}$ pour une navette en mouvement à 6 km/s dans une atmosphère d'air à 200 K se traduit par :

$$C_p T_s = C_p T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2} \quad (1.1)$$

Où T_s est la température au niveau du nez de la navette. Dans ces conditions, nous obtenons avec $c_\infty = \sqrt{\gamma r T_\infty}$ un $M_\infty = 22$ et une température $T_s = 19000K$, un problème de flux de chaleur à la paroi, qui est la plus grande difficulté technologique de ces vols hypersoniques. Il est donc essentiel d'obtenir une prédiction précise des températures atteintes dans des conditions réelles de vol, en tenant compte des modèles physiques appropriées. Etant donné que ces températures sont supérieures aux températures de dissociation des molécules de l'oxygène et d'azote (3000K à 6000 K pour l'oxygène et l'azote respectivement) qui sont les principaux constituant de l'air.



FIGURE 1.3. *Avion spatial hypersonique américain X-33*

Une grande partie des points discutés précédemment constituent l'essentiel de cette thèse.

Le premier chapitre sera consacré à une introduction non-exhaustive de la diversité des paramètres qui gouvernent un écoulement turbulent compressible en présence d'onde de choc, ainsi la dynamique à très hautes vitesses des systèmes propulsives.

Dans le second chapitre, il nous a paru utile de rappeler des phénomènes d'interaction onde de choc/couche limite. En particulier, nous montrons deux aspects essentiels dans un écoulement avec séparation de couche limite, qui sont, la théorie de l'interaction libre pour décrire un décollement supersonique dont l'augmentation de pression est indépendante des conditions en aval, passant plus en détail aux critères permettant la détermination de la position du point de décollement et la pression plateau pour un décollement libre.

Dans le troisième chapitre, nous rappelons des équations instantanées de Navier-

Stokes (NS), puis une introduction au traitement statistique, faisant apparaître un système d'équations ouvert. Une présentation de la méthode de fermeture des équations de NS moyennées. Puis nous avons effectué une présentation des différentes modélisations de la turbulence, en essayant de présenter en détail le modèle $SST - Menter$ retenu dans nos simulations numériques.

La description de la méthode numérique utilisée et le traitement des flux eulériens et visqueux, de plus de la discrétisation explicite et implicite, constituent le quatrième chapitre.

Dans le cinquième chapitre, une comparaison avec un cas-test est utilisée pour mesurer et valider les performances du modèle de turbulence employé. Ce chapitre consiste en l'exposé et l'analyse des différents résultats obtenus. Un accent tout particulier a été mis sur la présentation théorique, expérimentale et numérique sur l'art de décollement libre et restreint dans une tuyère de différents formes de contours (conique, TIC ou TOC). Puis l'étude du transfert thermique en écoulement compressible constitue la seconde grande partie de ce chapitre.

Les annexes regroupent les différents points indispensables aux développements, mais qu'il aurait été fastidieux d'inclure dans le texte. En particulier, nous exposons les opérateurs implicites du flux visqueux, le système final d'équations à résoudre, traitement des conditions aux limites et le passage aux coordonnées généralisées.

RÉFÉRENCES

- [1] D. Knight, H. Yan, A. Panaras et A. Zheltovodov : Advances in cfd prediction of shock wave - turbulent boundary layer interactions. *Prog. Aerosp. Sci.*, 39 :121, (2003).
- [2] W. Liou, P. Huang et T.-H. Shih : Turbulence model assessment for shock wave/turbulent boundary interaction in transonic and supersonic flows. *Comput. Fluids*, 29 :275, (2000).
- [3] J. Forsythe, K. Hoffmann et H.-M. Damevin : An assessment of several turbulence models for supersonic compression ramp flow. In *AIAA Paper 98-2648*, (1998).
- [4] T. Coakley et P. Huang : Turbulence modeling for high speed flows. In *AIAA Paper 92-0436*, (1992).

Chapitre 2

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Les équations de Navier-Stokes sont composées de 3 équations (dites bilan massique, bilan des moments et bilan énergétique). On peut les représenter de la manière suivante selon les 3 dimensions de l'espace (x_1 , x_2 et x_3) et du temps (t) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j) &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_i} + \rho f_j \\ \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho e + p) v_i] &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{i,j} v_j) + \sum_{i=1}^3 \rho f_i v_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + r\end{aligned}$$

Si quelqu'un trouve une solution à ces équations, merci de me la faire parvenir par email car c'est un problème à 1 million de dollars ! En effet, l'institut Clay basé à Cambridge a formulé 7 problèmes pour le nouveau millénaire et il offre 1 million de dollars à qui trouve un de ces 7 problèmes dont l'équation de Navier-Stokes fait partie. A ce jour, un problème a déjà été résolu : la conjecture de Poincaré résolue en 2003 par le mathématicien russe Grigori Perelman. Pour voir l'énoncé précis à résoudre pour Navier-Stokes : http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf

2.1 Introduction

Les activités de recherche des propulseurs à propergol sont actuellement un sujet de préoccupation majeur pour l'industrie et les chercheurs pour aider à améliorer la performance du lanceur européen Ariane 5 et de réduire le coût d'accès aux satellites. Afin d'augmenter la poussée du moteur Vulcain du premier étage, les efforts de recherche actuels sont orientés vers le choix de tuyères à rapport section S_{sortie}/S_{col} de plus en plus grande (de 45 pour Vulcain à 60 pour Vulcain2).

Ces types de tuyères sont adaptés à haute altitude où la pression extérieure est très faible. La pression dans le jet de propulsion est supérieure à la pression ambiante et la tuyère est entièrement amorcée.

En revanche, durant la phase de décollage et la première partie du vol, la pression dans la chambre de combustion n'est pas suffisante pour permettre un écoulement supersonique à travers toute la tuyère, l'écoulement est alors appelé "sur-détendu". Il s'ensuit l'apparition de l'onde de choc dans le divergent qui modifie considérablement la nature de l'écoulement dans la tuyère en raison de l'air extérieur est aspiré dans la partie divergente (voir figure 2.1).

Dans tout type d'écoulement avec séparation, la circulation du fluide est perturbée et est ensuite soumis dans le divergent à des efforts parasites appelés "charges latérales", ce qui peut conduire à des contraintes inacceptables du système de propulsion, le risque de perte de stabilité pour le lanceur ou même briser la tuyère. Les couches limites laminaire et turbulente montrent que l'un des facteurs primordiaux de la compressibilité est caractérisé par une augmentation rapide du déplacement relatif, c'est-à-dire le rapport de l'épaisseur de déplacement à l'épaisseur δ de la couche limite.

Les effets de la couche limite, souvent négligeables en écoulement incompressible, peuvent devenir très importants, lorsque des vitesses supersoniques s'établissent sur l'obstacle étudié. Pourtant, en écoulement ralenti que les effets de la couche limite

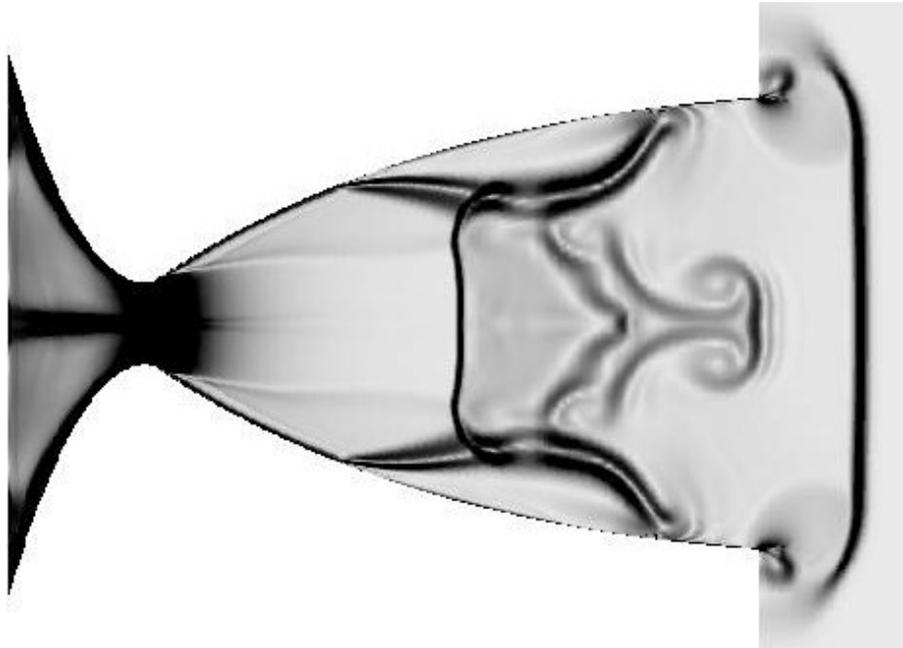


FIGURE 2.1. *Tuyère LEATOX en présence de décollement $t=0.408$ ms*

sont plus graves, un écoulement supersonique étant largement ralenti de façon brutal, par l'onde de choc et les effets de la viscosité sont alors considérablement aggravés par l'intensité des gradients de pression adverses impliqués et des phénomènes complexes en raison de l'interaction qui se produit entre la couche limite et de l'onde de choc dans le voisinage de leur rencontre. Le phénomène d'interaction onde de choc/couche limite qui se produit chaque fois qu'une onde de choc rencontre une paroi joue un rôle important dans de nombreux problèmes d'aéronautique.

En régime supersonique, l'interaction entre une onde de choc et une couche limite turbulente est un phénomène fréquemment rencontré dans de nombreuses configurations aérodynamiques, interne (tuyères, prises d'air, compresseurs) ou externe (nacelles). Conséquences, souvent néfastes, ces interactions ont motivé de nombreuses recherches variées. Ils sont à la fois sur des expériences en configuration réelle des études en soufflerie de simples configurations d'interactions qui reproduisent la plupart des phénomènes observés, ou la modélisation analytique ou numérique de ces

phénomènes. La complexité des phénomènes impliqués dans ces interactions rend difficile de telles prédictions précises. La tuyère fonctionne alors en régime de sur-détente (décollement de la couche limite), qui génère un choc de ré-compression, quittant la paroi, entre dans le divergent et provoque le décollement des couches limites. La distribution de ces décollements est souvent aléatoire, rendant l'écoulement dissymétrique et favorisant l'apparition de charges latérales. De plus, les fluctuations des valeurs et directions induites par ces décollements peuvent affecter le vecteur de la poussée résultant et nuire aux performances globales du véhicule. Ces phénomènes sont instables et instationnaires et se produisent à des fréquences basses, typiquement de quelques dizaines de Hertz dans le cas de Vulcain, ils impliquent des échelles qui sont susceptibles d'être une source d'excitation aérodynamique de certains modes de la structure et être préjudiciable à son intégrité. Les forces latérales sont un facteur limitant dans la conception de géométries de tuyères, elles conduisent généralement à un choix de tuyères plus épaisses (et donc plus lourdes), ou plus courtes dont la performance sera plus faible, donc une diminution de la charge utile. Les causes exactes de l'apparition de ces charges sont jusqu'à présent mal compris.

2.2 Interaction onde de choc/couche limite

Les écoulements transsoniques ou supersoniques sont principalement caractérisés par la présence des ondes de choc, provoquées par une contre-pression aval obligeant l'écoulement à redevenir subsonique dans le cas d'un écoulement interne et par la présence d'un changement de pente d'une surface (paroi) pour un écoulement externe. Le contact des ondes de choc et les surfaces sur lesquelles se développe une couche limite, produit un phénomène très complexe d'interaction qui s'accompagne, si le choc est suffisamment intense, de la formation d'un décollement. La théorie de l'interaction libre permet de prédire les risques de décollement lors d'une interaction onde de choc/couche limite. Une description de cette théorie est donnée dans [1]. La

simulation numérique des écoulements compressibles permet de décrire suffisamment les phénomènes physiques d'interaction sous réserve de l'utilisation des méthodes de discrétisation et des schémas numériques suffisamment précises avec des maillages raffinés ; le choix du modèle de la turbulence dans de tels types d'interactions reste problématique : en particulier la prédiction exacte du décollement d'une couche limite sous l'impact d'une onde de choc et de son éventuel recollement demeure difficile.

Les résultats expérimentaux sur l'interaction onde de choc/couche limite des écoulements 2D ont permis d'identifier avec précision le rôle joué par les principaux paramètres intervenant dans le processus d'interaction. Également des lois de corrélation ont été déduites en donnant la longueur amont de l'interaction, et la limite des chocs provoquant la séparation et, d'une importance primordiale dans les écoulements hypersoniques, du pic maximal de transfert thermique au rattachement. La situation n'est pas tellement satisfaisante dans les écoulements 3D en raison de la difficulté d'établir une description physique claire de l'organisation de ces écoulements.

Les conséquences de grand nombre de Mach et d'enthalpie élevée, typiquement pour les écoulements hypersoniques, sont multiples :

- En raison d'importante variation de la température dans les régions dissipatives, la densité est soumise à une forte diminution dans la couche limite, par conséquent, une amplification de l'effet de déplacement qui, conjointement avec la dépendance à la pression-déflexion, conduit à d'importants effets de couplage visqueux/non-visqueux.
- En raison des grandes différences de température dans le champ d'écoulement, des conditions de paroi adiabatiques sont rarement atteintes, d'où un effet spécifique de la température de la paroi.
- Dans les écoulements d'hyper enthalpie, l'échauffement provoqué par les ondes de chocs affecte les propriétés thermodynamiques de gaz, les effets de gaz réels résultant influencer l'écoulement.

- Les ondes de choc formées dans l’écoulement sont très intenses et interagissent fortement avec les couches limites donnant lieu à une amplification supplémentaire des effets visqueux.
- La conjonction de nombre de Mach élevé et la faible densité à haute altitude tend à maintenir un régime laminaire sur une grande partie de la surface du véhicule. Ainsi, on rencontre des situations où SWBLIs (Shocks Waves Boundary Layer Interactions) sont laminaire ou transitoire, les gradients de pression liés à l’interaction qui tend à précipiter la transition de la couche limite laminaire.
- Le choc formé devant un véhicule hypersonique étant à la fois intense et fortement courbé, le véhicule est entouré par une couche de fluide de rotation ou d’une couche d’entropie qui affecte le développement de la couche limite et à la suite de son interaction avec une onde de choc.
- Le fort couplage entre l’interaction et la partie non-visqueuse de l’écoulement entraîne des ondes de choc qui interfèrent entre eux pour créer des structures complexes de choc.

2.2.1 Les interactions de base

Les trois interactions fondamentales entre une onde de choc et une couche limite sont l’écoulement sur une rampe, le choc de réflexion incident et la discontinuité de pression résultant de l’adaptation à une pression plus élevée en aval. Le premier cas correspond à une surface de contrôle ou d’une rampe de compression d’admission d’air, le second à la réflexion de choc à l’intérieur d’une prise d’air du type compression supersonique mixte, le troisième à la condition à la sortie d’une tuyère sur-détendue.

1. La première configuration d’interaction onde de choc/couche limite et la plus conceptuellement simple est l’écoulement sur une rampe. Un changement brusque de l’inclinaison de la paroi est à l’origine d’un choc à travers lequel l’écoulement

entrant est soumis à une déflexion égale à l'angle de coin β

2. Le deuxième type d'écoulement est l'impact d'un choc incident (C_1) sur une paroi. Dans ce cas, l'écoulement entrant est soumis à une déviation $\Delta\varphi_1$ par le biais de (C_1), la nécessité de l'écoulement en aval d'être à nouveau parallèle à la paroi entraîne la formation d'un choc de réflexion (C_2), la déviation par le biais de (C_2) étant $\Delta\varphi_2 = -\Delta\varphi_1$.
3. Dans le troisième cas, l'onde de choc est provoquée par un saut de pression avec une déviation ultérieure $\Delta\varphi$ de l'écoulement, tandis que dans les cas précédents le saut de pression résultant d'une déviation de l'écoulement.

Dans la section suivante, nous allons examiner plus en détail la structure générale des champs d'écoulement résultant de ces interactions.

2.2.2 La structure générale du champ d'écoulement

2.2.2.1 Écoulement sur une rampe de compression

Lorsque l'angle β de la rampe est faible, la structure globale de l'écoulement n'est pas beaucoup affectée par l'interaction ayant lieu à l'origine de la rampe. La différence principale est la répartition de la pression de la paroi, l'étape de la solution non visqueuse étant remplacée par une montée progressive entre le niveau amont p_0 et aval p_1 correspondant aux chocs obliques. L'étalement de la distribution de la pression de paroi désigne le mécanisme d'influence en amont à travers laquelle la présence du choc se fait sentir en amont de son origine dans un fluide parfait, c'est à dire, le sommet de la rampe. Cet effet est quantifié par la longueur l'interaction en amont L_u définie comme la distance entre le début d'interaction (où la répartition de la pression de la paroi commence à monter) et l'origine de la rampe ou le point d'impact de choc incident dans le modèle d'écoulement non- visqueux.

Comme le montre la figure 2.2, cette propagation en amont résulte de l'existence d'une couche subsonique dans la partie interne de la couche limite à travers laquelle

aucun signal (une variation de pression) ne se propage à la fois dans les directions amont et aval. La compression associée au choc provoque une dilatation progressive de la couche subsonique, produisant dans la partie supersonique de l'écoulement des ondes de compression qui fusionnent pour constituer le choc induit par la rampe à une certaine distance de la paroi. Dans une couche limite turbulente, la couche subsonique est extrêmement mince pour que ce choc se forme dans la couche limite qui se comporte comme un fluide rotationnel non visqueux sur la plupart de son épaisseur. L'interaction est dite un processus d'interaction rapide des forces de viscosité qui jouent un rôle négligeable par rapport à l'action des conditions de pression et de quantité de mouvement. Toutefois, en raison de la condition de non-glissement, afin d'éviter les incohérences, une couche visqueuse mince en contact avec la paroi doit être considérée. L'interaction manifeste une structure de l'écoulement en trois couches, avec une zone externe non-visqueuse irrotationnelle (outer-deck), zone intermédiaire non-visqueuse rotationnelle (middle-deck) et une sous couche interne visqueuse (inner-deck) ([2],[3]).

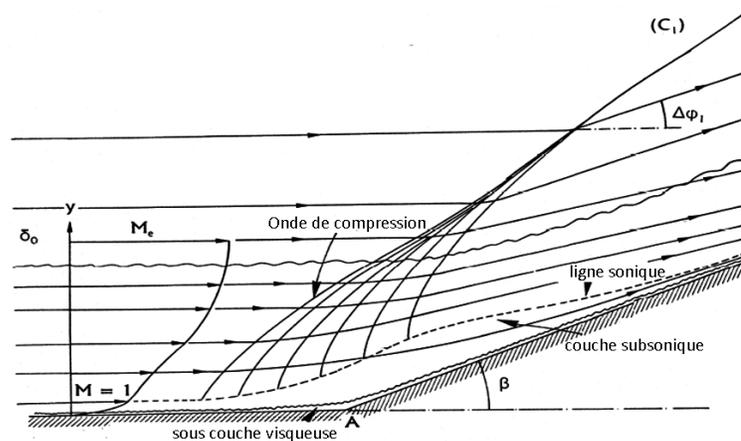


FIGURE 2.2. *La structure d'un écoulement sur une rampe sans séparation de la couche limite*

Au nombre élevé de Mach et de Reynolds, le profil de vitesse d'une couche limite

turbulente est tellement rempli que la couche subsonique est excessivement mince. Ensuite, comme représenté sur la figure 2.3, le choc provient d'une région très proche de la paroi et se propage dans la couche limite où il est courbé en raison de la variation du nombre de Mach.

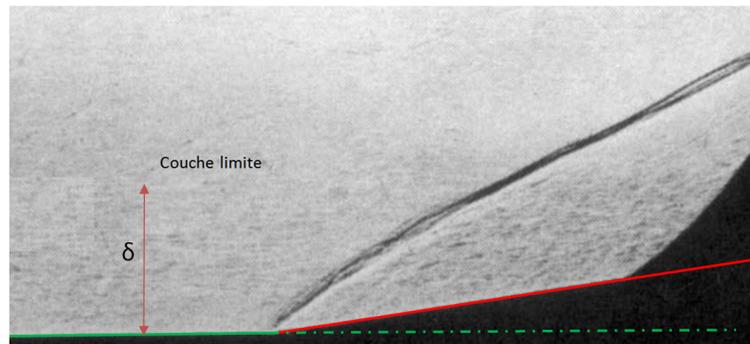


FIGURE 2.3. *Écoulement turbulent sans séparation sur une rampe à nombre élevé de Mach et Reynolds [4]*

Lorsque l'angle β de la rampe augmente (donc l'intensité du choc), la distance d'influence en amont augmente en conséquence et une situation peut être atteinte où l'augmentation de pression est suffisante pour provoquer la séparation de la couche limite (voir figure 2.4). Dans cette situation :

- L'influence des conditions en amont de la rampe, donc influence de la longueur L_u en amont, devient plus importante. Une nouvelle échelle est introduite en conséquence comme la longueur de séparation L_s qui sépare le point de séparation de celui de l'origine de la rampe ou de point d'impact théorique de choc incident.
- Un premier choc se forme ainsi en amont de la rampe. Ce choc résulte d'une déviation initiale de l'écoulement à la séparation.
- Un second choc provenant de la région de ré-attachement sur la rampe qui coupe le choc de la séparation à une courte distance de la paroi au nombre de Mach élevé.

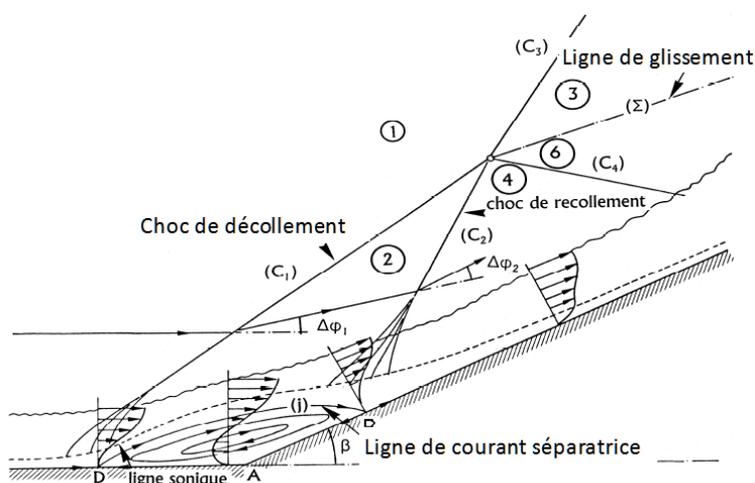


FIGURE 2.4. *La structure d'un écoulement sur une rampe avec séparation de la couche limite*

La séparation et le ré-attachement étant progressive, les ondes de compression induites coalescent avec les chocs à quelque distance de la paroi. Cependant, à nombre de Mach élevé, la coalescence est si rapide que le choc de séparation et de recollement qui se forment dans la couche limite et semblent provenir de la paroi. Fréquemment, l'onde de choc a tendance à être incorporé dans la couche limite comme montré dans la figure 2.5.

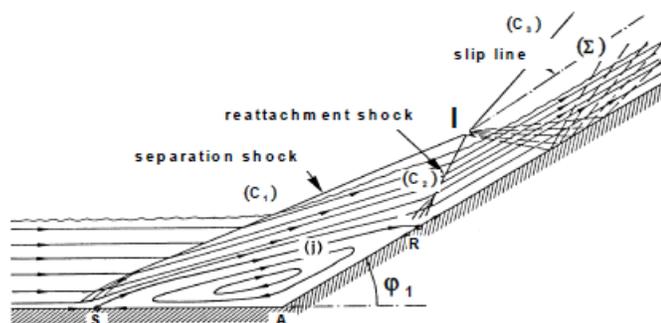
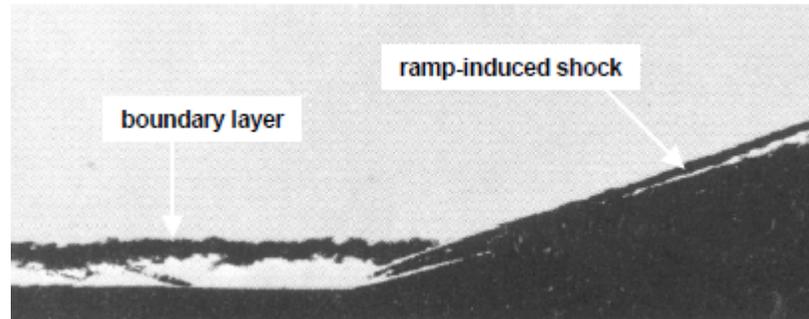


FIGURE 2.5. *Écoulement sur une rampe avec séparation de la couche limite à nombre de Mach élevé*

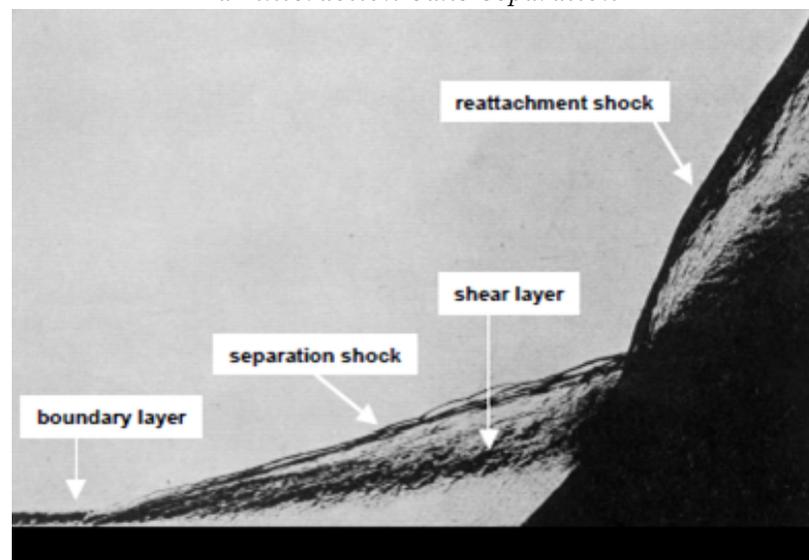
L'intersection des chocs de séparation et de recollement produit une structure d'interférence de type choc/choc ([5],[6]). Dès que le nombre de Mach est supérieur à environ 2, une détente centrée provenant du point triple I où les deux chocs se réunissent pour rendre les écoulements en dessus et en dessous du point triple compatible. En écoulement hypersonique, cette détente est si proche de la paroi ce qui conduit à une diminution importante de la pression lorsqu'il heurte la paroi. La figure 2.6 donne des exemples d'interactions hypersoniques turbulents à une rampe de compression dans un écoulement hypersonique de Mach 9.22 avec et sans séparation.

Dans le cas avec séparation, une couche de cisaillement se développe entre l'écoulement externe, au-dessous de choc de séparation, et la région de stagnation en contact avec la paroi. Cette couche de cisaillement est une caractéristique essentielle des écoulements séparés. Le long d'elle, l'écoulement à faible vitesse résultant de la séparation est accéléré sous l'action de forces de viscosité (viscosité du fluide ou viscosité turbulente) jusqu'à ce qu'elle atteigne un niveau dynamique qui lui permet de surmonter la seconde élévation de la pression au niveau de recollement. Puisque l'augmentation de pression à la séparation ne dépend que des conditions d'écoulement en amont, toute élévation de pression globale se traduit par une augmentation de la pression au recollement. Cela implique un déplacement en amont du point de séparation, afin de permettre une plus longue phase d'accélération (ou de longueur de mélange) du fluide dans la couche de cisaillement.

Dans le cas d'une couche de cisaillement impactant une rampe sous un angle élevé, la situation au recollement est similaire à celui à un point de stagnation frontale, taux de transfert de chaleur local donc très important, la température de stagnation (moyenne) dans la couche de cisaillement étant comparable à celle de l'écoulement externe. La différence dans les échelles entre écoulement sur rampe laminaire et turbulent avec séparation est illustrée sur la figure 2.7. L'interaction laminaire a été obtenue à Mach 10 dans une installation de faible nombre de Reynolds permettant de maintenir le régime laminaire le long de l'interaction. La visualisation a été ef-



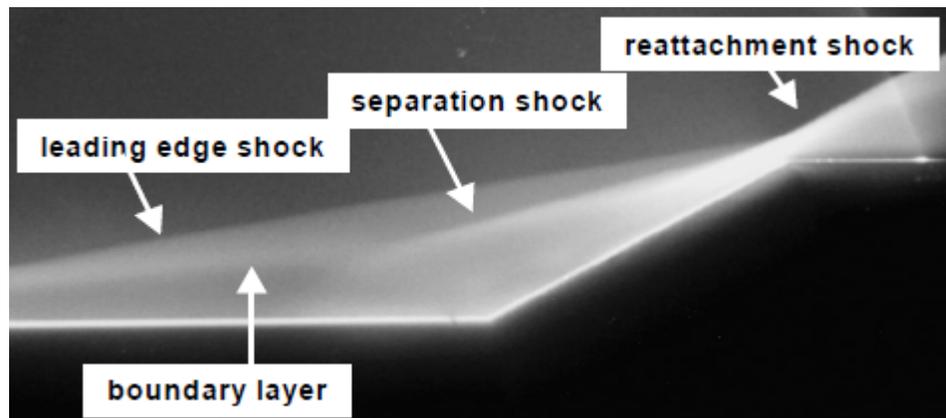
a- interaction sans separation



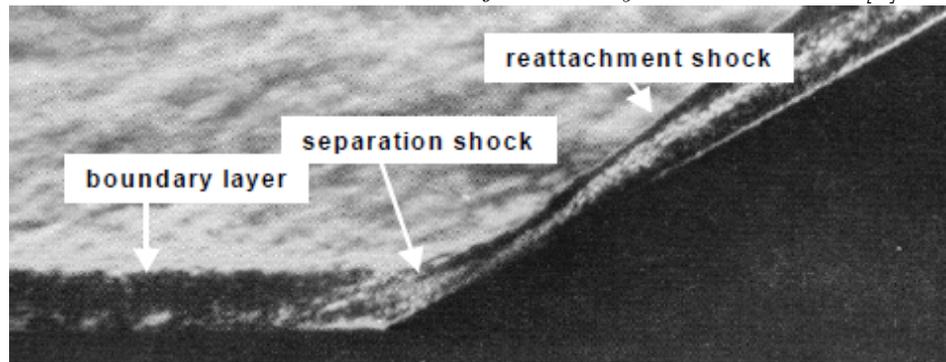
b- interaction avec separation

FIGURE 2.6. Ombroscopie d'écoulement turbulent sur une rampe à Mach 9.2 [7]

fectuée avec la technique de fluorescence par faisceau d'électrons. Le cas turbulent correspond à une interaction à Mach 8.6, la photo est une exposition d'ombroscopie de courte durée. Pour l'interaction laminaire, l'étendue longitudinale est de l'ordre de plusieurs épaisseurs de la couche limite, alors qu'elle est ici inférieure à une épaisseur de la couche limite dans le cas turbulent.



a- interaction laminaire à une jonction cylindre-entonnoir [8]



b- écoulement turbulent sur rampe [9]

FIGURE 2.7. Interactions laminaire et turbulente

2.2.2.2 Réflexion d'une onde choc oblique incidente

Dans cette configuration, une onde de choc est générée par un générateur de choc constitué d'une plaque plane, avec un bord d'attaque aigu, inclinée d'un angle α par rapport à l'écoulement uniforme entrant. Le choc oblique provenant du bord d'attaque de la plaque impacte un mur droit face au générateur de choc. Détery (1970) visualise le phénomène de choc de réflexion pour des valeurs croissantes de la déviation primaire $\Delta\varphi = \alpha$ à travers l'onde de choc incidente.

Lorsque le choc incident est faible, la structure générale de l'écoulement ne diffère pas beaucoup du modèle de fluide parfait. Cependant, un examen plus attentif révèle

que des phénomènes complexes se déroulent à l'intérieur de la couche limite. Ce type d'interaction est présentée sur la figure 2.8.

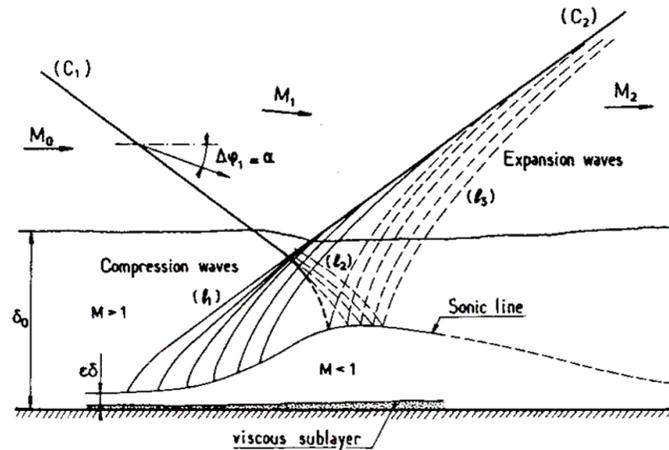


FIGURE 2.8. Réflexion d'un choc oblique sans décollement

Le choc incident (C_1) se courbe progressivement lors de sa pénétration dans la couche limite en raison de diminution du nombre de Mach local. Corrélativement, son intensité s'affaiblit et devient extrêmement faible lorsque le choc atteint la ligne sonique. D'autre part, l'augmentation de pression à travers (C_1) a tendance à se propager en amont de la région subsonique ($\varepsilon\delta$) de la couche limite, ce qui provoque un épaissement de cette partie.

L'épaississement de la couche limite subsonique génère des ondes de compression sortantes (ℓ_1) qui fusionnent rapidement pour former le choc de réflexion (C_2). La réflexion de ces ondes comme celui des chocs incidents qu'ils se propagent à travers la couche de rotation quasi-non-visqueuse ($(\ell - \varepsilon)\delta_0$), provoque le système d'onde secondaire (ℓ_2). Ces dernières ondes sont réfléchies par la ligne sonique comme des ondes de détente (ℓ_3) qui sont clairement visibles, juste derrière le choc (C_2).

Pour les très faibles chocs incidents, la distance d'interaction en amont est très

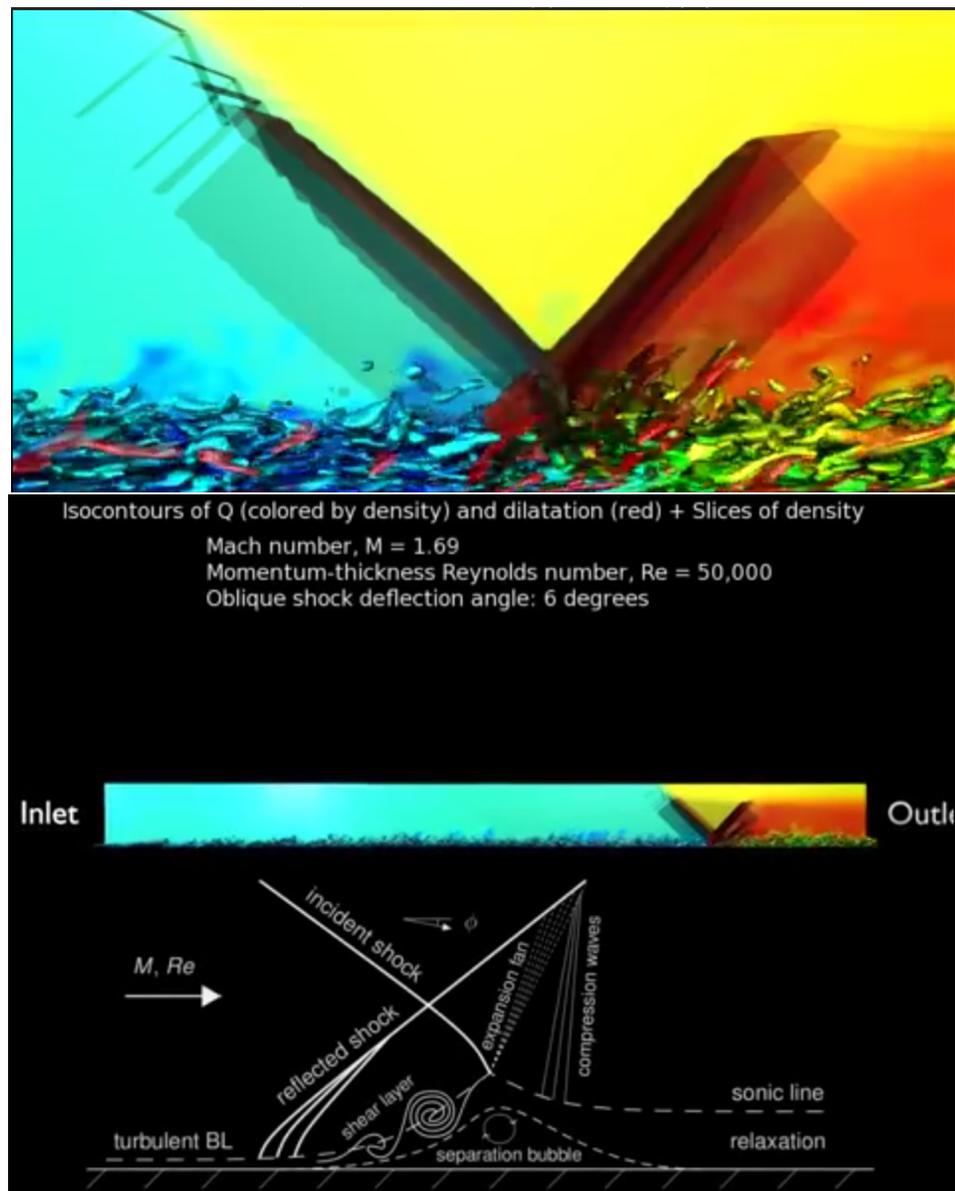


FIGURE 2.9. *LES compressible de l'interaction onde de choc/couche limite turbulente à grand nombre de Reynolds, document de CTR (Center of Turbulence Research) par : Ivan Bermejo-Moreno, Johan Larson et Sanjiva Lele*

courte, de sorte que la configuration d'écoulement ci-dessus est bien incorporée à l'intérieur de la couche limite. Ainsi, à l'échelle d'écoulement externe, la seule onde

de choc réfléchi est donc (C_2) avec un angle de déviation $\Delta\varphi$ égale mais de signe opposé à celui du choc incident (C_1). Dans ce cas, la réflexion du choc est dite "un processus d'interaction faible" dans le sens que l'écoulement visqueux ressemble beaucoup à l'écoulement non-visqueux. Cette ressemblance est aussi évidente lorsque l'on tient compte les distributions pariétales de la pression.

Une description théorique très approfondie du système d'onde résultant de la propagation d'un choc dans une couche limite a été donnée par Henderson [10]. Dans cette approche, le choc de réflexion est réinterprété comme un processus de choc de réfraction d'une couche non-visqueuse rotationnelle. Une grande variété de modèles d'ondes a été construit par Henderson [10]. Pour les interactions faibles, ces modèles sont généralement en bon accord avec les observations expérimentales. Cependant, ils commencent à différer nettement de l'expérience, dès que l'intensité de choc incident est augmentée.

Prenons le cas d'un choc incident assez fort pour séparer de la couche limite. Une représentation très schématique du champ d'écoulement observé est représentée sur la figure 2.10.

La couche limite sépare au point S , situé bien en amont du point où le choc rencontrerait la surface si le fluide était parfait. La montée rapide en pression lors de la séparation à lieu à la suite de la propagation des ondes de compression dans un premier temps dans la partie supersonique de la couche limite, puis dans l'écoulement non-visqueux externe. Ces ondes s'unissent pour constituer ce qui peut être interprété comme le premier choc de réflexion (C_2) à travers lequel l'écoulement non-visqueux externe est tourné vers le haut de la paroi. Le choc (C_2) croise le choc incident (C_1) au point H d'où émanent les deux chocs réfractés (C_3) et (C_4). Comme l'augmentation d'entropie à travers (C_1) et (C_4) est généralement différente de celle à travers (C_2) et (C_3), H est l'origine d'une ligne de glissement bien visible sur la figure 2.10.

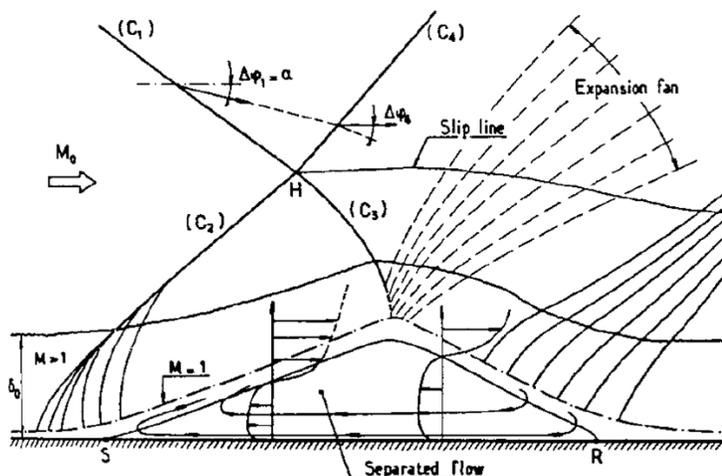


FIGURE 2.10. Réflexion d'un choc oblique avec décollement

Après l'intersection avec (C_2) , le choc (C_1) est courbé à cause du gradient de l'entropie en aval de (C_2) et les ondes de compression générées par l'épaississement de la couche limite (voir la figure 2.10). Ensuite, (C_1) entre dans la couche dissipative séparée, dont il est réfléchi en une onde de détente. On voit ainsi que l'impact de (C_1) sur la couche limite est similaire à une réflexion de choc à une pression constante de limite libre, comme c'est le cas de la limite extérieure d'une grande région séparée.

2.2.2.3 Écoulement sur une marche montante

Le troisième écoulement est induit par une marche montante de hauteur h face à l'écoulement entrant, voir la figure 2.11. Cet obstacle provoque la séparation de l'écoulement au point S . La montée rapide de la pression qui accompagne la séparation donne lieu à une onde de choc émanant d'un endroit très proche du point de séparation S , et une zone séparée qui se développe entre le point de séparation S et la marche.

Il a été démontré dans de nombreuses expériences, que la majeure partie des propriétés d'interaction onde de choc/couche limite sont presque indépendante de la cause ayant provoquée la séparation, si en étant un obstacle solide ou une onde de

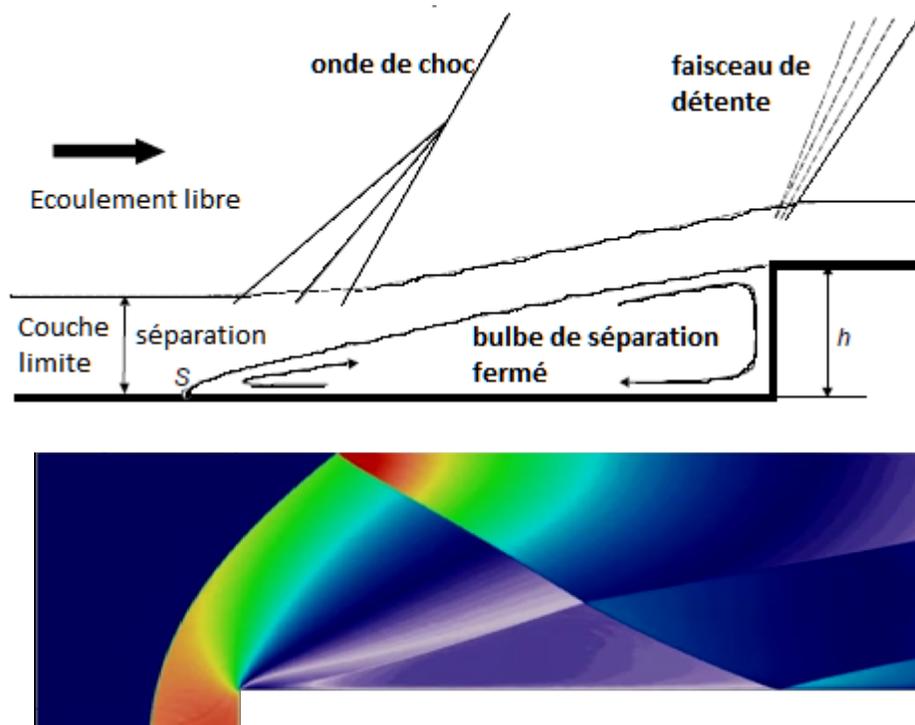


FIGURE 2.11. *Séparation supersonique dans une marche montante*

choc incidente ([11], [12], [13]). En fait, les caractéristiques de la pression pariétale statique pour les différentes configurations mentionnées ci-dessus sont les mêmes, voir figure 2.12. La pression de la paroi présente une forte élévation peu de temps après le début de l'interaction à 0. L'écoulement se sépare de la paroi en S , situé à une distance L_s de 0. Puis la pression pariétale s'approche progressivement d'un plateau avec une pression presque constante, désignée par P_P la pression de plateau. L'étendue de ce plateau reflète la taille de la bulle de recirculation fermée et P_P correspond donc à la pression de paroi dans la bulle. Une deuxième augmentation de la pression peut être observée plus qu'on s'approche de point de recollement R . Ces caractéristiques sont indépendantes de la géométrie en aval, comme déjà mentionné, tout se passe comme si l'écoulement était entièrement déterminé par ses propriétés à l'amont de l'interaction. Cette observation a mené Chapman et al. [12] pour formuler le concept

d'interaction libre.

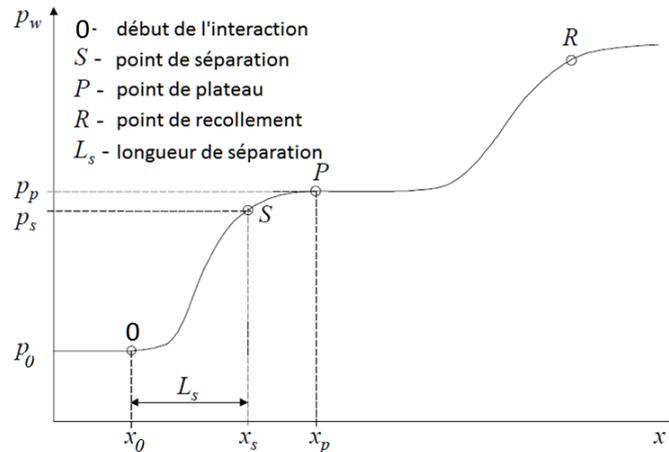


FIGURE 2.12. *Distribution de la pression de paroi statique typique observée dans une rampe, choc de réflexion et sur une marche, [14] et [15]*

2.3 Théorie de l'interaction libre

Le concept de l'interaction libre a été introduit par Chapman [12] pour décrire une séparation supersonique dont l'augmentation de pression est indépendante des conditions en aval. Le processus de séparation est le résultat de l'interaction de la couche limite et l'écoulement non-visqueux externe, dans le sens où la décélération et l'épaississement de la couche limite génère un gradient de pression défavorable dans l'écoulement, qui à son tour, favorise l'épaississement de la couche limite. Dans la zone d'interaction libre, l'écoulement ne dépend que de l'état de la couche limite et l'écoulement externe.

Le principe général de cette théorie et de pouvoir prédire le comportement d'un écoulement uniforme supersonique lors de séparation de la couche limite, qu'elle soit la cause de la séparation, induite par une contre pression, ou par une interaction avec

un choc ou encore par un obstacle. L'origine de l'interaction est défini par l'abscisse x_0 , un nombre de Mach M_0 et une pression p_0 . La couche limite est caractérisée par le coefficient de frottement C_{f0} et l'épaisseur de déplacement δ_0^* . L'analyse théorique de Chapman [12], suppose une loi de similitude en abscisse, et repose sur deux relations :

1. L'intégration de l'équation de la quantité de mouvement de la couche limite avec utilisation des hypothèses de couche mine, donne l'expression suivante :

$$\frac{p - p_0}{q_0} = \frac{\tau_{w0} l}{\delta_0^* q_0} \int_{\frac{x_0}{l}}^{\frac{x}{l}} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \frac{\delta_0^*}{\tau_{w0}} dx \quad (2.1)$$

$$\frac{p - p_0}{q_0} = \frac{C_{f0} l}{\delta_0^*} f_1(X) \quad (2.2)$$

avec

$$X = \frac{x - x_0}{l} \quad , \quad q_0 = \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2$$

où f_1 est une fonction sans dimension considérée comme seule fonction de l'abscisse normalisée X , et l une longueur de référence dite d'interaction définie à partir de l'origine x_0 .

2. La deuxième expression est celle de couplage reliant l'épaississement de la couche limite à la déviation de l'écoulement supersonique via l'expression linéarisée de la relation d'onde simple de pression-déviation :

$$\frac{p - p_0}{q_0} = \frac{2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \frac{\delta_0^*}{l} f_2(X) \quad (2.3)$$

Où f_2 est une fonction sans dimension. Par élimination du terme l/δ_0^* des expressions précédentes, on obtient :

$$\frac{p - p_0}{q_0} = \sqrt{2C_{f0}} (M_0^2 - 1)^{-0.25} F(X) \quad (2.4)$$

La fonction $F(X) = \sqrt{f_1 f_2}$ est une fonction universelle, indépendante du nombre de Mach et de Reynolds, déterminée par l'expérience.

La figure 2.13 montre la fonction de corrélation de la pression de paroi généralisée $F(X)$ obtenue par Erdos et Pallone [16]. La distance axiale à partir de l'apparition de l'interaction a été normalisée à la longueur de séparation soit, $l = L_s = x_s - x_0$. Dans le travail original de Erdos et Pallone la distance au niveau de plateau de pression de l'écoulement séparé a été utilisée comme l'échelle de longueur caractéristique soit, $l = L_p = x_p - x_0$. De la figure suivante des valeurs particulières de F peut être trouvé, $F_s = F(1) = 4.22$ au point de séparation et $F_p = F(4) = 6$ au point de plateau de pression.

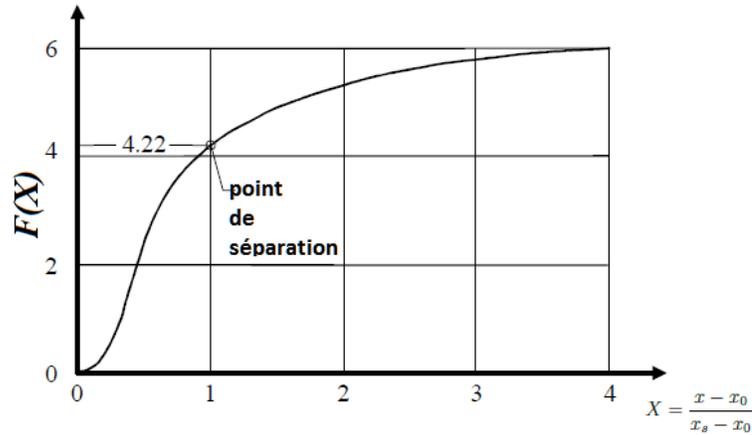


FIGURE 2.13. La fonction de corrélation de la pression de paroi généralisée $F(X)$ pour un écoulement turbulent uniforme, par Erdos et Pallone [16]

A partir de l'équation 2.4, on tire le critère de séparation déduit de la théorie de l'interaction libre :

$$\frac{p_K}{p_0} = 1 + \frac{\gamma M_0^2}{2} \sqrt{2C_{f0}} (M_0^2 - 1)^{-0.25} F_K(X) \quad (2.5)$$

où K est l'indice relatif à la zone décollée. Cette formule est valable :

- soit en considère la formation d'un décollement caractérisé ou effectif, d'où $K \equiv p$ dans la formule qui calcule la pression plateau p_p s'établissant dans la zone de fluide décollé
- soit en considérant la pression p_s au point de décollement physique S, c'est-à-dire au point où le frottement pariétal passe par zéro, au tout début du phénomène, quand la région décollée effective est encore extrêmement petite, d'où $K \equiv s$.

L'expression donnant la longueur de référence de l'interaction est obtenue en divisant les deux équations précédentes, d'où :

$$\frac{l}{\delta_0^*} = k \sqrt{C_{f0}} (M_0^2 - 1)^{0.25} \quad (2.6)$$

où k égal à $\sqrt{f_1/f_2}$ est une fonction obtenue de l'expérience.

L'analyse du critère d'interaction libre indique que le saut de pression p_p/p_0 à travers le choc de décollement dépend du nombre de Mach amont M_0 et du coefficient de frottement C_{f0} de la couche limite à l'origine de l'interaction. La variation du coefficient de frottement avec le nombre de Reynolds est très faible, les corrélations uniquement fonction du nombre de Mach amont M_0 ont été proposées.

2.4 Critères de décollement

Plusieurs expériences ont été réalisées pour formuler des critères permettant d'évaluer la position du décollement et la pression plateau dans le cas de décollement libre. Pour une tuyère sur-détendue, la position du point de décollement libre affecte généralement la poussée. Ces critères fournissent en général le saut de la pression

plateau p_p en fonction des conditions à l'origine de l'interaction (p_0, M_0) qui, d'après la théorie de l'interaction libre, pilotent le décollement. La pression plateau dans ces critères est supposée être égale à la pression ambiante. Le critère de décollement permet alors de déterminer les conditions à l'origine de l'interaction et donc la position de cette dernière. Pour prédire la position axiale du décollement, il est nécessaire de connaître, par exemple, le rapport p_0/p_p . La position x_0 du décollement naissant peut ensuite être déduite à partir du profil de pression pariétale dans le vide.

2.4.1 Critère de Summerfield

Le critère de Summerfield [17] est assez ancien, tiré d'essais effectués dans des tuyères surdétendues dans une gamme de rapports de pression p_c/p_a de 15 à 20 (où p_c indique la pression dans la chambre de combustion) :

$$\frac{p_0}{p_a} = 0.4 \quad (2.7)$$

2.4.2 Critère de Schilling

Une compilation effectuée par Schilling [18] de nombreux résultats expérimentaux pour la séparation dans divers types de tuyères, Schilling propose deux corrélations adaptées chacune à un type de tuyères :

1. Pour 90% des tuyères profilées tronquées alimentées, en air froid, les autres par des gaz de combustion d'ergols liquides de type O_2/H_2 pour les autres :

$$\frac{p_0}{p_c} = 0.582 \left(\frac{p_c}{p_a} \right)^{-1.195} \quad (2.8)$$

2. Pour les tuyères coniques, de 20° de demi-angle de divergence, alimentées par des gaz de combustion dont le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = 1.2$:

$$\frac{p_0}{p_c} = 0.541 \left(\frac{p_c}{p_a} \right)^{-1.136} \quad (2.9)$$

2.4.3 Critère de Schmucker

Schmucker a proposé un critère empirique à partir des données expérimentales compilées dans ([19],[20]), issues d'essais sur les moteurs fusées à propergols liquides. La corrélation proposée par Schmucker donnant le saut de pression est la suivante :

$$\frac{p_0}{p_a} = (1.88M_0 - 1)^{-0.64} \quad (2.10)$$

2.4.4 Critère de Kalt et Badal

A partir d'une compilation de nombreuses expériences en jets froids et gaz réels chauds provenant d'une combustion de propergols liquides ou solides, Kalt et Badal [21] proposent la corrélation suivante :

$$\frac{p_0}{p_c} = 0.667 \left(\frac{p_c}{p_a} \right)^{-1.2} \quad (2.11)$$

2.4.5 Critère de Zukoski

Les expériences de Zukoski [22] sont basées sur l'étude des décollements face à une marche ou à une rampe. Elles étaient limitées aux cas d'écoulements bidimensionnels plans pour un domaine de nombre de Mach entre 1.4 à 6. Les expériences couvrent un domaine de nombre de Reynolds de couche limite Re_δ de $(3 \times 10^4$ à $1.2 \times 10^6)$ et pour plusieurs rapports de la hauteur de la marche à l'épaisseur de la couche limite, pour les conditions suivantes : couche limite turbulente, épaisseur de la couche

limite inférieure à la hauteur de la marche. La pression plateau p_p , de même que les autres caractéristiques de la zone décollée, semblent indépendantes du nombre de Reynolds. Cette indépendance justifie la corrélation proposée par Zukoski, liant le saut de pression à travers le choc de décollement uniquement à la pression statique p_0 et au nombre de Mach amont M_0 . La corrélation de Zukoski s'écrit alors :

$$\frac{p_p}{p_0} = 1 + \frac{M_0}{2} \quad (2.12)$$

Zukoski précise que cette corrélation est aussi en accord avec les valeurs de pression-plateau obtenues dans les tuyères coniques sur-détendues de moteur-fusée, dans une plage de nombre de Mach allant de 2 à 5,5. Une autre corrélation issue de l'étude menée par Zukoski concerne la pression au point de séparation, p_s .

$$\frac{p_s}{p_0} = 1 + 0.73 \frac{M_0}{2} \quad (2.13)$$

2.4.6 Critère de Green

La corrélation de Green [23] est donnée par :

$$\frac{M_p}{M_0} = 0.78 \quad (2.14)$$

Cette corrélation est justifiée par de nombreuses expériences dans des tuyères coniques à grand angle de divergence

2.4.7 Théorie de Reshotko et Trucker

Cette corrélation est donnée sous forme de rapport du nombre de Mach à travers un choc de décollement. Reshotko et Trucker [24] proposent dans cette théorie une

méthode intégrale utilisée pour la prédiction l'effet de la variation brusque de pression sur une couche limite turbulente supersonique à Mach inférieur à 3. L'analyse part des équations de la couche limite où le terme de frottement a été négligé. Il est de plus supposé que l'enthalpie totale est constante au travers de la couche limite, ce qui implique un flux de chaleur nul à la paroi. Après la transformation des équations sous forme incompressible, et leur intégration, on arrive à une expression reliant le rapport des nombres de Mach avant et après la séparation à une fonction du paramètre de forme transformé \bar{H} :

$$\frac{M_p}{M_0} = \frac{f(\bar{H}_p)}{f(\bar{H}_0)} \quad (2.15)$$

avec

$$f(\bar{H}) = \frac{\bar{H}^2 \exp\left(\frac{1}{1+\bar{H}}\right)}{(1+\bar{H}) \sqrt{\bar{H}^2 - 1}} \quad (2.16)$$

Et \bar{H} est relié au paramètre de forme réel H par :

$$H = \frac{\gamma - 1}{2} M^2 (\bar{H} + 1) + \bar{H} \quad (2.17)$$

Cette analyse est appliquée pour prédire l'apparition du décollement induit par une onde de choc. Cet état de décollement naissant sera défini comme la situation où le paramètre de forme \bar{H}_p prend en aval de la discontinuité une valeur égale à 2.2 qui caractérise un profil de décollement. Ainsi, en prenant un paramètre de forme $\bar{H}_0 = 1.286$ correspondant à celui d'une couche limite turbulente sur plaque plane, on a :

$$\frac{M_p}{M_0} = 0.762 \quad (2.18)$$

L'influence du nombre de Reynolds est prise implicitement dans cette corrélation à travers le paramètre \overline{H}_0

2.4.8 Critère de Campbell et Farley

Des résultats d'essais de décollement dans des tuyères coniques avec des demi-angles de 15° , 25° et 29° ont été présentés par Campbell et Farley [25]. Le fluide utilisé était de l'air chauffé à $920K$. Des résultats en air froid furent également obtenus. Les données montrent une corrélation pour un rapport des nombres de Mach à travers le choc de :

$$\frac{M_p}{M_0} = 0.76 \quad (2.19)$$

2.4.9 Critère de Lawrence et Weynand

La séparation de l'écoulement d'air à température ambiante dans plusieurs tuyères bidimensionnelles et de révolution, à angle de divergence constant ou à divergent profilé, a été étudiée par Lawrence et Weynand [26]. L'objectif de cette étude est l'analyse de l'effet du contour géométrique du divergent sur le décollement. Cette étude aboutit à la conclusion que les pressions de décollement dans des tuyères bidimensionnelles ou axisymétriques répondent au même critère :

$$\frac{M_p}{M_0} = 0.8 \quad (2.20)$$

Sur la figure 2.14, une comparaison des critères avec des données des expériences sont présentées. Comme indiqué sur la figure une dispersion importante des points de données peut être observée. C'est ce qui explique l'avis de la NASA de l'addition d'une

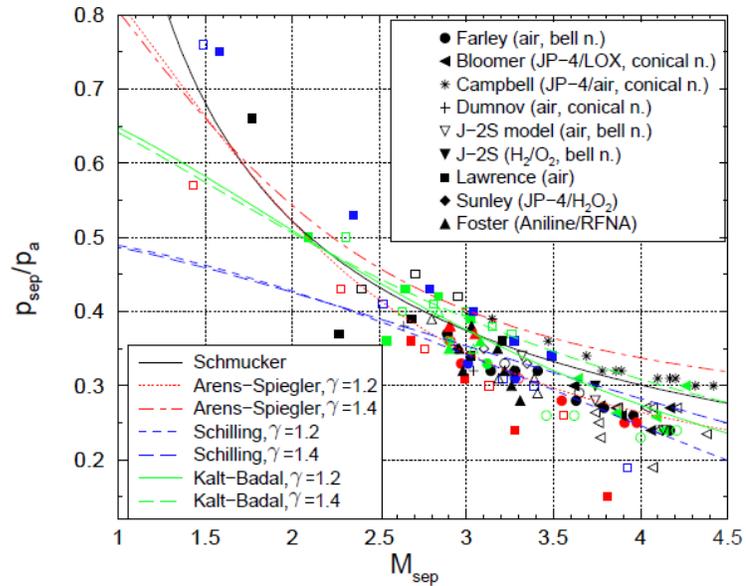


FIGURE 2.14. Comparaison des modèles simples de prédiction de séparation pour (p_0/p_a) avec les résultats expérimentaux. La forme de symbole dans la légende indique dont l'enquête, les données sont prises et les couleurs des symboles correspondent à des configurations de buses différentes testées, voir Frey [27]. également publié dans [28], (remarque $p_{sep} = p_0$ et $M_{sep} = M_0$)

marge de 20% dans le calcul de la position de décollement et souligne la nécessité de nouveaux critères plus fiables. L'une des principales raisons de l'accord non satisfaisant, c'est que tous les critères ci-dessus comprennent deux mécanismes distincts impliqués dans le saut de la pression de l'écoulement dans une seule expression. Ce fait a été déjà réalisé dans les années 1960 par Arens et Spiegler [29], Carrière [30] et par Laurent [31]. Ce dernier a suggéré que la pression p_0/p_a doit être divisée en deux parties, une partie de la montée de la pression critique, p_0/p_p , associée au choc de séparation et une seconde pour la montée en pression dans la zone de recirculation, p_p/p_a .

Pour la modélisation du premier mécanisme (la montée de pression de début de l'interaction p_0 jusqu'au p_p), la théorie de l'interaction libre peut être utilisée. L'aug-

mentation de la pression au niveau du choc (rapport p_0/p_p) est donc assez facilement modélisable¹. Pour la remontée de pression associée à la zone décollée (rapport p_p/p_a), la situation est très différente car les modèles manquent. Les expériences indiquent que de nombreux paramètres (géométrie de la paroi en aval du point de décollement, longueur de la zone de décollement, courbure de la paroi [32]...) influencent de manière significative l'augmentation de la pression dans cette zone. Malgré ces difficultés, de nouveaux modèles fondés sur cette décomposition du rapport p_0/p_a , tels celui de l'ONERA [33], ont été développés. Les résultats obtenus pour la tuyère LEA sont très encourageants et meilleurs que ceux fournis par des critères plus classiques [33].

1. En considère les critères utilisant un rapport de pression, en remplace p_a par p_p

RÉFÉRENCES

- [1] J. DÉLERY, Cours d'Aérodynamique, Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines (2001).
- [2] M.J. LIGHTHILL, On boundary layer upstream influence. Part II : Supersonic flows without separation. Proc. Roy. Soc., A (217), pp. 478-507 (1953).
- [3] K. STEWARTSON and P.G. WILLIAMS, Self-induced separation. Proc. Roy. Soc., A (312), pp. 181-206 (1969).
- [4] G.S. SETTLES, An experimental study of compressible boundary layer separation at high Reynolds number. Ph. D. Thesis, Princeton University (1975).
- [5] B. EDNEY, Anomalous heat transfer and pressure distributions on blunt bodies at hypersonic speeds in the presence of an impinging shock. Aeronautical Research Institute of Sweden, FFA Report 115, Stockholm (1968).
- [6] J. DÉLERY, Shock phenomena in high speed aerodynamics : still a source of major concern. The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Jan. (1999).
- [7] G.M. ELFSTROM, Turbulent hypersonic flow at a wedge compression corner. J. Fluid Mech., Vol. 53, Part 1, pp. 113-129 (1972).
- [8] B. CHANETZ, ONERA hypersonic test-cases in the framework of the Working Group 18. AGARD/FDP WG 18 on Hypersonic Experimental and Computational Capability, Improvement and Validation, AGARD AR 319, Vol. II (1997).
- [9] M. HOLDEN, Shock wave/turbulent boundary layer interactions in hypersonic flows. AIAA Paper 72-0074 (1972).
- [10] L. F. HENDERSON, The reflexion of a shock-wave at a rigid wall in the presence of a boundary-layer. J. Fluid Mech., Vol 30, Part 4, pp. 699-722 (1967).

- [11] P. REIJASSE, P. SERVEL and R. HALLARD, Synthesis of the 1998-1999 ONERA Works in the FSCD Working Group, ONERA RTS 49/4361 DAFE/Y, December (1999).
- [12] D. CHAPMAN, D. HUEHN, H. LARSON, Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition, NACA Report 1536, Ames Aeronautical Laboratory, Moffet Field, (1958).
- [13] J. DELERY, and J.G. MARVIN, "Shock-Wave Boundary Layer Interactions", AGARD No. 280, ISBN 92-835-1519-6, February (1986).
- [14] H. SCHLICHTING and K. GERSTEN, Boundary Layer Theory, Springer, Berlin Heidelberg (1997).
- [15] R. LANGE, Present Status of Information Relative to Prediction of Shock-Induced Boundary-Layer Separation, NACA Technical Note 3065, Langley Aeronautical Laboratory, Langley Field, February (1954).
- [16] J. ERDOS J, A. PALLONE, Shock-Boundary Layer Interaction and Flow Separation, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute Procs., Stanford University Press (1962).
- [17] M. SUMMERFIELD, C. FOSTER and W. SWAN, Flow separation in overexpanded supersonic exhaust nozzles. Jet Propulsion, V24, Sep.(1954).
- [18] M. SCHILLING, Flow separation in a rocket nozzle, M.S. Thesis, University of Buffalo, June (1962).
- [19] R. SCHMUCKER, Status of flow separation prediction in liquid propellant rocket nozzle, NASA TM X-64890, November (1974).
- [20] R. SCHMUCKER, Flow processes in overexpanded chemical rocket nozzles. Part 1 : flow separation, NASA TM-77396, Jan. (1984).
- [21] S. KALT and D. BADAL, Conical Rocket Nozzle Performance Under Flow Separated Condition, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 2, No. 3, May (1965).

- [22] E. ZUKOSKI, Turbulent boundary layer separation in front of a forward-facing step, *AIAA Journal*, Vol. 5, n10, Jan. (1967).
- [23] L. GREEN, Flow separation in rocket nozzles, *ARS Journal*, Vol. 23, n1, January-February (1953).
- [24] E. RESHOTKO and M. TUCKER, Effect of a discontinuity on turbulent boundary-layer thickness parameters with application to shock-induced separation, *NACA TN 3454*, (1955).
- [25] C. CAMPBELL, J. FARLEY, Performance of several conical convergent-divergent rocket-type exhaust nozzles, *NASA TN D-467*, September (1960).
- [26] R. LAWRENCE, E. WEYNAND, Factors affecting flow separation in contoured nozzles, *AIAA Journal*, Vol. 6, n6, June (1968).
- [27] M. FREY, Behandlung von Strömungsproblemen in Raketensden bei Überexpansion, (in German), Ph.D. dissertation, Insitut für Aerodynamik und Gasdynamik Univesität Stuttgart, ISBN 3-8265-8806-1, (2001).
- [28] G. HAGEMMAN, M. TERHARDT, M. FREY, P. REIJASSE, M. ONOFRI, F. NASUTI, J. ÖSTLUND, Flow Separation and Side-Loads in Rocket Nozzles, 4th International Symposium on Liquid Space Propulsion, DLR Lampoldshausen, March 12-15, (2000).
- [29] M. ARENS and E. SPIEGLER, Shock-Induced Boundary Layer Separation in Overexpanded Conical Exhaust Nozzles, *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 3, March (1963).
- [30] P. CARRIÈRE, Remarques sur les Méthodes de Calcul des Effets de la Viscosité dans les Tuyères Propulsives (Comments on computational methods of viscous effects in propulsion nozzles, in French), *DGRR/WGLR Symposium*, Bad Godesberg, also published as *ONERA TP 408*, October (1966).
- [31] R.A. LAWRENCE, Symmetrical and Unsymmetrical Separation in Supersonic Nozzles, Research report 67-1, Southern Methodist University, April (1967).

- [32] M. FREY and G. HAGEMANN, Status of flow separation prediction in rocket nozzles, AIAA Paper 98-3619, (1998).
- [33] P. REIJASSE and O. SARRAZIN, Modèle de décollement libre dans une tuyère sur-détendue, Technical Report RT 48/4361 DAFE/N, ONERA, September (1999).

Chapitre 3

MODÈLES DE TURBULENCE

"La prévision est un art difficile, surtout quand elle concerne l'avenir"

[Niels Bohr, Prix Nobel de physique 1922]

3.1 Introduction

Dans la première moitié du XIX^e siècle, l'existence de deux types d'écoulements différents, maintenant appelés laminaire et turbulent, fut mise évidence par St VENANT [1]. La turbulence est un phénomène physique caractérisé par des fluctuations aléatoires en temps et en espace, des propriétés de l'écoulement. Les fluctuations recouvrent, quand le nombre de REYNOLDS est élevé, une large plage d'échelles spatio-temporelles, qui vont de l'échelle macroscopique, dépendant essentiellement de la géométrie du problème, à l'échelle moléculaire dominée par les effets visqueux, qui contribuent à dissiper l'énergie cinétique des fluctuations en chaleur. Dans cette partie, nous allons présenter en détail les équations utilisées pour modéliser les écoulements turbulents.

Les équations de NAVIER-STOKES qui régissent l'écoulement d'un fluide newtonien, sont présentées. A ces équations vient se rajouter l'équation d'état des gaz parfaits permettant de fermer le système en reliant la pression aux autres variables thermodynamique. Pour de faibles valeurs du nombre de REYNOLDS, l'écoulement est dominé par la diffusion visqueuse et les équations admettent des solutions régulières. On parle dans ce cas de l'écoulement laminaire. Pour des valeurs élevées du nombre de REYNOLDS, le temps visqueux plus grand devant le temps cinétique, qui ne permet point aux effets visqueux de gommer les fluctuations (car le temps nécessaire de gommer les perturbations est plus grand par rapport de celui de déplacement des particules pour traverser une parcours caractéristique l). Des fluctuations rapides de vitesse et de pression et de masse volumique dans le cas d'un écoulement compressible, apparaissent et l'écoulement devient turbulent. La résolution numérique des équations de NAVIER-STOKES requiert un choix d'une discrétisation spatio-temporelle extrêmement fine, afin de représenter correctement toutes les échelles de l'écoulement. Cependant c'est Osborne REYNOLDS [2] qui a fondu la première théorie de la turbulence en considérant les conditions sous lesquelles l'écoulement

laminaire dans un tuyau se transforme en écoulement turbulent. Ceci conduit REYNOLDS à formuler un critère général de similitude dynamique pour les écoulements des fluides visqueux incompressibles, ce critère est fondé sur les valeurs de REYNOLDS, du nom de son créateur.

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (3.1)$$

Où U et L sont les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Ce nombre de Reynolds peut être interprété par le rapport des valeurs caractéristiques des forces d'inertie aux forces visqueuses agissant dans le fluide. Les forces d'inertie qui produisent le mélange de différents volumes de fluide se déplaçant avec des vitesses différentes, produisent aussi un transfert d'énergie entre les composantes à grandes échelles du mouvement et celles à échelles plus petites. Elles assistent ainsi à la formation d'hétérogénéités de petites tailles dans l'écoulement qui sont caractéristiques du problème de la turbulence. Les plus petites échelles spatiales de turbulence sont de la taille de l'échelle de KOLMOGOROV [3] :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.2)$$

Où ϵ représente le taux auquel l'énergie cinétique k des fluctuations turbulentes est détruite, aux plus petites échelles, par effet de la viscosité du fluide. Le taux de dissipation (destruction) ϵ doit être égal au taux auquel l'énergie cinétique turbulente k est produite, aux grandes échelles, par effet des déformations auxquelles l'écoulement est soumis. L'analyse adimensionnelle nous permettant d'écrire :

$$\epsilon \sim k^{\frac{3}{2}} l^{-1} \quad (3.3)$$

Le nombre de points nécessaires pour discrétiser le domaine de calcul est :

$$\left(\frac{l}{\eta}\right)^3 = \left(\frac{l\sqrt{k}}{\nu}\right)^{\frac{9}{4}} = Re_t^{\frac{9}{4}} \quad (3.4)$$

Où Re_t est le nombre de Reynolds turbulent. L'énergie cinétique turbulente k est lié au taux de déformation macroscopique $k \sim U^2$ et $Re_t \sim Re$. Le nombre de points de simulation augmente comme $Re^{\frac{9}{4}}$. Par exemple, pour un avion en vol, $Re \approx 10^8$, le maillage de cet écoulement nécessite un nombre d'environ 10^{18} points, la résolution dans ce cas est trop coûteuse. Le pas de temps est de l'ordre de l'échelle de temps de KOLMOGOROV :

$$\tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Des estimations effectuées par SPALART [4], nous disant que, pour calculer des écoulements stationnaires réalistes en aérodynamique par la résolution directe des équations de Navier-Stokes, il faudrait utiliser d'environ 10^{16} points de maillage tri-dimensionnel (3D) et effectuer environ $10^{7.7}$ itérations en temps. Si l'on considère le taux de progrès des moyens informatiques dans les années qui viennent, on pourrait espérer commencer les premiers calculs de ce genre, uniquement dans un but de recherche, à partir de l'année 2080!!! En réalité, même si l'on disposait de l'évolution complète en espace et en temps d'un écoulement turbulent, on devrait toujours, dans la pratique, effectuer des moyennes du champ aérodynamique afin d'extraire les informations qui nous intéressent. On peut alors envisager de résoudre une version moyennée des équations de Navier-Stokes, ce qui nous permet de plus de réduire les temps de calcul tout en fournissant suffisamment d'informations sur l'écoulement pour des applications pratiques. L'opération de moyenne fait apparaître des inconnus supplémentaires dans les équations et le problème n'est donc plus fermé.

3.2 Modélisation de la turbulence

La résolution exacte des équations de Navier-Stokes non linéaires reste un problème ouvert à l'heure actuel, il y a pas de théorie permettant d'obtenir ni l'existence ou l'unicité d'une solution à de tels systèmes. La résolution des équations de Navier-Stokes appartient à cette classe de problème. Bien que les équations de Navier-Stokes soient déterministes, il n'est pas évident ou d'ailleurs impossible de pouvoir prédire le comportement d'une solution quel que soit le temps. Ce problème requiert une prévision infinie sur les conditions initiales. Un exemple de ce comportement imprédictible est donné par les prévisions météorologiques. Par ailleurs, on ne sait pas montrer mathématiquement, l'unicité des équations de Navier-Stokes munies de conditions initiales quel que soit le temps.

Les écoulements turbulents sont fortement instationnaires avec des variations très irrégulières. Le caractère fortement non linéaire est associé à la coexistence dans l'écoulement de mouvements à des échelles très différentes, avec lesquelles l'énergie de l'écoulement est transférée et la répartition de cette énergie s'effectue depuis les grosses structures jusqu'aux plus petites par l'écoulement moyen, avec une taille limitée par la géométrie de l'écoulement. La limite des plus petites structures est liée aux effets dissipatifs (échelle de Kolmogorov).

Lorsque le régime d'écoulement est pleinement turbulent, les particules fluides sont rassemblées en agglomérats de tailles plus ou moins importantes. Ceux-ci forment et se déforment continuellement dans l'espace et le temps conférant à l'écoulement sa complexité. L'étude détaillée des grandeurs physiques met à jour des variations d'une telle irrégularité qu'il convient de les représenter par des variables aléatoires fonction de l'espace et du temps. On est alors amené à traiter le problème sous forme statistique. Dans ce cas les variables sont décomposées en une grandeur moyenne et une grandeur fluctuante, ce traitement provoquera l'apparition d'autres inconnues les reliant les unes aux autres. Le système d'équation obtenu est dit ouvert (nombre

d'inconnues supérieur au nombre d'équations), le terme du second ordre issu de la moyenne des équations de Navier-Stokes est appelé tenseur de contraintes de Reynolds désigné par $-\overline{\rho u_i'' u_j''}$. L'objectif de la modélisation des écoulements turbulents consiste à proposer des solutions permettant de relier le tenseur des contraintes de Reynolds aux variables moyennes connues. Les modèles de fermeture de turbulence ainsi développés sont classés généralement selon l'ordre de fermeture, allant de la fermeture la plus simple mettant en œuvre des relations algébriques à celles qui introduisent une ou plusieurs équations de transport. Leur degré de complexité reflète la prise en compte des effets mémoire de la turbulence au sein de l'écoulement, et aux caractères tridimensionnel et anisotrope de la turbulence. Ces modèles peuvent être regroupés en deux classes :

- Modèle à viscosité turbulente
- Modèle du second ordre

Lorsque les écarts de température deviennent importants, ou lorsque le nombre de Mach augmente, les écoulements visqueux sont alors le siège de phénomènes nouveaux. Les fluctuations de pression entraînent des fluctuations de température et de masse volumique, qui modifient les mécanismes de transport de la quantité de mouvement et créent des sources de transfert de chaleur. En outre, les fluctuations de vitesse ne sont plus, a priori, irrotationnelles. Cet ensemble de caractéristiques ajoute une complexité considérable au travail de la modélisation de la turbulence qui reste, même en incompressible, l'une des clés de l'élaboration de calcul en aérodynamique.

En aérodynamique, de nouvelles difficultés apparaissent aux régimes transsonique, supersonique et hyperbolique pour la prévision du comportement des couches limites. Souvent, ces écoulements contiennent des ondes de choc ou des faisceaux de détente rapides qui conduisent, par interaction avec la turbulence dans les couches limites notamment, à des configurations qui constituent encore un défi pour les méthodes de calcul. Cependant, l'effet des gradients de pression reste encore mal cerné, d'autant plus qu'ils sont souvent associés à une variation appréciable de la pression dans la

direction normal à la paroi, contrairement à ce qui se passe pour les écoulements régis par les équations de la couche limite, ces équations peuvent être dérivées des équations de Navier-Stokes en supposant une couche limite mince et la composante de la vitesse normale à la paroi est négligeable devant la composante tangentielle, ce qui implique que le gradient de pression suivant la normale à la paroi est nul.

Nous allons intéresser dans cette étude à la manière de moyenner les équations de Navier-Stokes lorsque l'on est confronté à des écoulements compressibles. Nous allons ensuite analyser ces différents termes supplémentaires que l'opération de la moyenne fait apparaître dans les équations et la manière de les modéliser.

3.3 Description statistique

Lorsqu'un écoulement est devenu turbulent, il n'est pas possible de contrôler le détail de l'ensemble des mouvements d'agitation. Deux expériences d'écoulements turbulents avec de conditions initiales et aux limites identiques, donnent deux champs de vitesse et pression différent ! C'est une question fondamentale de perte de déterminisme physique de la solution, sensibilité aux conditions initiales et aux limites. Nous nous limiterons ici à tirer les conséquences de ce constat en termes de traitement statistique à l'échelle macroscopique.

L'idée de base de l'approche probabiliste de la turbulence consiste à considérer que la répétitivité des conditions initiales et aux limites n'est physiquement possible qu'à un niveau de tolérance tel qu'il interdit la répétition effective de l'écoulement turbulent dans tous ses détails.

Vu l'impossibilité de la solution analytique des équations de Navier-Stokes, le passage à la discrétisation permet une approche numérique de la solution, et ce passage fait introduit les deux inconvénients suivants :

- La méthode de calcul est aveugle aux phénomènes ou changements qui se passent entre les mailles

- Des erreurs de troncature sont introduites par l’hypothèse faite sur les variables entre les points nodaux (précision de la méthode)

Cette discrétisation a donc une propriété de filtrage, qui peut se regrouper en trois types

1. ***Décomposition statistique*** : pour l’obtention des grandeurs moyennes d’un écoulement turbulent, pour une approche déterministe, il faudrait effectuer une moyenne d’ensemble sur un certain nombre de réalisations obtenues par la résolution des équations exactes. Pour une approche statistique, une moyenne temporelle sera faite sur les équations elles-mêmes, plutôt que sur leur solution. La solution ne transporte aucune information sur sa composante fluctuante, les informations sur la turbulence sont portées par des variables propres telles que les contraintes de Reynolds
2. ***Méthode de macro-simulation*** : cette méthode repose d’après Kolmogorov, sur le fait que les grosses structures responsables aux transports de plus grande partie de l’énergie cinétique turbulente, et donc déterministes pour le comportement de fluide, ne sont pas homogènes et isotropes. Alors que les petites structures responsables de la dissipation de l’énergie transférée par les grosses structures, sont poches de l’isotropie et ont un caractère plus universel. C’est pour cette raison que le calcul déterministe se limite aux phénomènes à grandes échelles, et que les petites échelles sont modélisées. C’est le type de modélisation de sous-maille couplée à simulation des grandes échelles
3. ***Simulation numérique directe*** : dans ce type, les équations de Navier-Stokes sont résolues sous leur forme vectorielle.

Par l’intermédiaire de ces trois approches citées, nous sommes passées d’un point de vue déterministe à une attitude statistique. Si on considère une fonction de densité de probabilité (pdf) pour d’être à l’intervalle $[a, b]$.

$$\text{prob}(a \leq \phi \leq b) = \int_a^b p(\phi) d\phi \quad (3.5)$$

Cette probabilité devient égale à 1 si les bornes a et b sont rejetées à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\phi) d\phi = 1 \quad (3.6)$$

Le premier moment de cette fonction de probabilité de densité donne la valeur moyenne de la variable ϕ :

$$\bar{\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi p(\phi) d\phi \quad (3.7)$$

Les variations de $\bar{\phi}$ dans l'espace et le temps dépendront de celles $p(\phi)$

3.4 Types de Moyenne

Toute grandeur ϕ peut être décomposée en

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \quad \bar{\phi}' = 0 \quad (3.8)$$

La partie moyenne représente ce qui est raisonnablement calculable, ou bien la partie déterministe

Moyenne d'ensemble : définie comme la moyenne statistique sur des réalisations indépendantes $\phi^{(i)}$

$$\bar{\phi}(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi^{(i)}(x, t) \quad (3.9)$$

Cette moyenne est aussi appelée moyenne de Reynolds

$$\bar{\phi}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(x, t) dt \quad (3.10)$$

Cette moyenne est valable pour des écoulements statistiquement stationnaires

Moyenne spatiale :

$$\bar{\phi}_V(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V \phi(x, t) dt \quad (3.11)$$

Peut être utilisée pour une turbulence homogène, c'est-à-dire pour un écoulement turbulent qui est uniforme en moyenne dans toutes les directions.

Moyenne de Favre : Cette moyenne est effectuée sur des variables conservatives associées ρU_i , ρE_t , ρe , ρT , ρk , $\rho \varepsilon$, $\rho \omega$. Elle est appelée moyenne pondérée par la masse. Plusieurs Auteurs, tels HESSENBERG [5], DEDEBANT et WEHRLE [6], VAN MIEGHEN et DUFOUR [7], BLACKADAR [8] et FAVRE [9], établiront des équations pour les écoulements turbulents compressibles en moyennant le produit de la vitesse et la masse volumique et en divisant le résultat par la valeur moyenne de la masse volumique. Plus tard, FAVRE [10] étendit ce principe à toutes les variables dépendantes, excepté la masse volumique et la pression. Cette moyenne peut être introduite statistiquement comme une moyenne ordinaire à travers la fonction de densité de probabilité jointe :

$$\tilde{p}(\phi) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_0^{\infty} \rho p_{\rho\phi}(\rho, \phi) d\rho \quad (3.12)$$

Ainsi, moyennes pondérées par la masse, variances et corrélations d'ordres supérieurs suivront en tant que moments de cette fonction de densité de probabilité.

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} = \int \phi \tilde{p}(\phi) d\phi \quad (3.13)$$

$$\tilde{\phi}''^2 = \frac{\overline{\rho\phi''^2}}{\bar{\rho}} = \int (\phi - \tilde{\phi})^2 \tilde{p}(\phi) d\phi \quad (3.14)$$

$$\tilde{\phi}'''^3 = \frac{\overline{\rho\phi'''^3}}{\bar{\rho}} = \int (\phi - \tilde{\phi})^3 \tilde{p}(\phi) d\phi \quad (3.15)$$

et

$$\widetilde{f(\phi)} = \int f(\phi)\widetilde{p}(\phi)d\phi \quad (3.16)$$

Relations entre moyennes conventionnelles et pondérées

$$\begin{cases} \phi = \bar{\phi} + \phi' & \text{moyenne selon Reynolds} \\ \phi = \widetilde{\phi} + \phi'' & \text{moyenne selon Favre} \\ \rho = \bar{\rho} + \rho' \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \overline{\widetilde{\phi} + \phi''} = \overline{\bar{\phi} + \phi'} \rightarrow \widetilde{\phi} + \overline{\phi''} = \bar{\phi} \\ \overline{\rho\phi} = \bar{\rho}\bar{\phi} + \overline{\rho'\phi'} \rightarrow \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} = \bar{\phi} + \frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\widetilde{\phi} = \bar{\phi} - \overline{\phi''} \quad (3.19)$$

posant

$$\widetilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}$$

La fluctuation suivant Favre est donnée en fonction la fluctuation conventionnelle par

$$\boxed{\begin{cases} \widetilde{\phi} = \bar{\phi} + \frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}} = \bar{\phi} + \overline{\phi''} \\ \overline{\phi''} = -\frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}} = -\frac{\overline{\rho'\phi''}}{\bar{\rho}} \end{cases}} \quad (3.20)$$

On obtient la relation donnant la moyenne de Favre en fonction de la moyenne conventionnelle

$$\boxed{\widetilde{\phi} = \bar{\phi} - \overline{\phi''}} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = \bar{\phi}_1 + \phi'_1 = \widetilde{\phi}_1 + \phi''_1 \\ \phi_2 = \bar{\phi}_2 + \phi'_2 = \widetilde{\phi}_2 + \phi''_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{\phi_1\phi_2} = \overline{\phi_1\phi_2} - \overline{(\phi_1\phi_2)''} = \overline{\phi_1\phi_2} + \frac{\overline{\rho'(\phi_1\phi_2)'}}{\bar{\rho}} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
\phi_1\phi_2 &= \overline{\phi_1\phi_2} + (\phi_1\phi_2)' \\
\widetilde{\phi_1\phi_2} &= (\widetilde{\phi_1} + \widetilde{\phi_1''})(\widetilde{\phi_2} + \widetilde{\phi_2''}) = \widetilde{\phi_1}\widetilde{\phi_2} + \widetilde{\phi_1}\widetilde{\phi_2''} + \widetilde{\phi_2}\widetilde{\phi_1''} + \widetilde{\phi_2''}\widetilde{\phi_1''} \\
\widetilde{\phi_1\phi_2} &= \widetilde{\phi_1}\widetilde{\phi_2} + \widetilde{\phi_2''}\widetilde{\phi_1''} = \overline{\phi_1\phi_2} + \frac{\rho'(\phi_1\phi_2)'}{\bar{\rho}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\phi_1\phi_2 = (\bar{\phi}_1 + \phi_1')(\bar{\phi}_2 + \phi_2') = \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 + \phi_1'\bar{\phi}_2 + \phi_2'\bar{\phi}_1 + \phi_1'\phi_2' = \overline{\phi_1\phi_2} + (\phi_1\phi_2)' \tag{3.24}$$

$$(\phi_1\phi_2)' = \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2' + \phi_1'\bar{\phi}_2' + \phi_2'\bar{\phi}_1' + \phi_1'\phi_2' - \overline{\phi_1\phi_2}' \tag{3.25}$$

$$\widetilde{\phi_1\phi_2} = \overline{\phi_1\phi_2} + \frac{\rho'\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2}{\bar{\rho}} + \frac{\rho'\phi_1'\bar{\phi}_2}{\bar{\rho}} + \frac{\rho'\phi_2'\bar{\phi}_1}{\bar{\rho}} + \frac{\rho'\phi_1'\phi_2'}{\bar{\rho}} - \frac{\rho'\overline{\phi_1\phi_2}}{\bar{\rho}} \tag{3.26}$$

$$\widetilde{\phi_1\phi_2} = \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 + \overline{\phi_1'\phi_2'} + \bar{\phi}_2\frac{\rho'\phi_1'}{\bar{\rho}} + \bar{\phi}_1\frac{\rho'\phi_2'}{\bar{\rho}} + \frac{\rho'\phi_1'\phi_2'}{\bar{\rho}} = \widetilde{\phi_1}\widetilde{\phi_2} + \widetilde{\phi_1''\phi_2''} \tag{3.27}$$

$$\widetilde{\phi_1''\phi_2''} = \bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 + \overline{\phi_1'\phi_2'} + \bar{\phi}_2\frac{\rho'\phi_1'}{\bar{\rho}} + \bar{\phi}_1\frac{\rho'\phi_2'}{\bar{\rho}} + \frac{\rho'\phi_1'\phi_2'}{\bar{\rho}} - \widetilde{\phi_1}\widetilde{\phi_2} \tag{3.28}$$

Avec :

$$\widetilde{\phi_1} = \bar{\phi}_1 + \frac{\rho'\phi_1'}{\bar{\rho}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi_2} = \bar{\phi}_2 + \frac{\rho'\phi_2'}{\bar{\rho}}$$

Finalement la relation du tenseur selon Favre est donnée en fonction du tenseur selon la décomposition conventionnelle (Reynolds) par

$$\widetilde{\phi_1''\phi_2''} = \overline{\phi_1'\phi_2'} + \frac{\rho'\phi_1'\phi_2'}{\bar{\rho}} - \frac{\rho'\phi_1'}{\bar{\rho}}\frac{\rho'\phi_2'}{\bar{\rho}} \tag{3.29}$$

L'utilisation des moyennes pondérées permet de garder une forme simple des termes convectifs des équations de transport, on obtient donc des formes analogues aux formes des équations instantanées. A l'exception de l'équation de la dissipation de l'énergie cinétique turbulence ε ; mis à part les termes convectifs, l'équation de ε est très complexe en moyenne pondérée. Il y a toujours dans le cas de l'utilisation de la

moyenne pondérée une question qui se pose : Est-ce qu'on peut comparer la moyenne obtenue par le calcul avec celle mesurée expérimentalement ? D. VANDROMME [11] a montré, lorsque le taux de turbulence est faible ou modérée et avec un nombre de Mach inférieur à 5, que les écarts entre moyennes conventionnelles et moyennes pondérées sont du second ordre et donc la comparaison avec l'expérience est possible.

Les équations de Navier-Stokes moyennées peuvent contenir des termes additionnels comme les tenseurs de contraintes de Reynolds. Ces équations moyennées seront simplifiées pour les écoulements compressibles en utilisant la moyenne de Favre. Dans le cas d'un écoulement compressible, la masse volumique ρ n'est plus constante, et si l'on choisit la moyenne de Reynolds.

$$\overline{\rho u_i u_j} = \underbrace{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}}_{(1)} + \underbrace{\overline{\rho' u'_i \bar{u}_j}}_{(2)} + \underbrace{\overline{\rho' u'_j \bar{u}_i}}_{(3)} + \underbrace{\overline{\bar{\rho} u'_i u'_j}}_{(4)} + \underbrace{\overline{\rho' u'_i u'_j}}_{(5)} \quad (3.30)$$

Dans le cas incompressible on a :

$$\overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{\bar{\rho} u'_i u'_j} \quad (3.31)$$

On a la relation entre la moyenne d'ensemble et la moyenne pondérée :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\rho u_i u_j} = (1) + (2) + (3) + \frac{\overline{\rho' u'_i \cdot \rho' u'_j}}{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \\ + (4) + (5) - \frac{\overline{\rho' u'_i \cdot \rho' u'_j}}{\bar{\rho}} \rightarrow \overline{\rho u''_i u''_j} \end{aligned} \right\} \text{Décomposition de Favre} \quad (3.32)$$

L'équation de continuité se traduit par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u'_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' u'_j) \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' u'_j) = 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' u'_j - \rho' u'_j - \bar{\rho} u'_j - \rho' \bar{u}_j - \bar{\rho} \bar{u}_j) \end{cases} \quad (3.34)$$

On constate que l'équation de continuité n'a plus la même forme que pour l'équation de continuité non moyennée. Introduisant maintenant le formalisme de Favre, qui consiste à pondérer toutes variables par ρ , excepté p et ρ . Avec ce nouveau choix, l'équation de continuité moyenne devient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (3.35)$$

Cette équation a la même forme de l'équation instantanée, l'emploi de la moyenne de Favre permet de garder la forme instantanée des équations de Navier-Stokes pour leurs homologues moyennées.

$$\left. \begin{aligned} \overline{\rho u_i u_j} &= (1) + (2) + (3) + \frac{\overline{\rho' u'_i \cdot \rho' u'_j}}{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \\ &+ (4) + (5) - \frac{\overline{\rho' u'_i \cdot \rho' u'_j}}{\bar{\rho}} \rightarrow \overline{\rho u''_i u''_j} \end{aligned} \right\} \text{Décomposition de Favre}$$

Chassaing [12] a proposé une décomposition qui permet de mieux appréhender le rôle de la variation de la masse volumique, cette décomposition est donnée par :

$$\overline{\rho u_i u_j} = \underbrace{\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}_{(1)} + \underbrace{\overline{\rho' u'_i \bar{u}_j} + \overline{\rho' u'_j \bar{u}_i}}_{(2)+(3)} + \underbrace{\overline{\rho' u'_i u'_j}}_{(4)+(5)}$$

Ha Minh [13] propose plusieurs décompositions dans le cas compressible avec la moyenne non pondérée :

$$\overline{\rho U_i U_j} = \underbrace{\bar{Q}_i \bar{U}_j}_{(1)+(2)} + \underbrace{\bar{q}_i \bar{u}_j}_{(3)+(4)+(5)} \left. \vphantom{\overline{\rho U_i U_j}} \right\} \text{Décomposition de Ha Minh, Launder et Mac Innes}$$

3.5 Les équations de la mécanique des fluides

La résolution des équations de Navier-Stokes par l'approche de simulation directe reste pour l'instant et sûrement pour longtemps encore, limitée à des écoulements à nombre de Reynolds faible et pour des configurations géométriques simples voire simpliste par rapport aux préoccupations industrielles. Lorsqu'on s'intéresse à des écoulements réalistes, il fallait donc s'intéresser aux grandeurs moyennes et d'obtenir le système d'équations vérifiées par ces grandeurs. Pour ce faire, on applique la décomposition de Favre sur les inconnues du problème. Les nouvelles équations obtenues sont dites équations moyennées.

3.5.1 Rappel des équations instantanées

Les équations de la mécanique des fluides s'écrivent, respectivement pour la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e_t + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j (\rho e_t + p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} q_j \quad (3.38)$$

Où u_i sont les composantes de la vitesse, p la pression, ρ la masse volumique, σ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses, e_t est l'énergie totale et q_j est le flux de chaleur. Pour fermer ces équations, on ajoute les relations thermodynamiques qui relient la pression, la température et la masse volumique. L'intensité de flux de chaleur

par conduction q_j est, en désignant par λ_c le coefficient de conduction thermique du fluide, proportionnelle, d'après la loi de Fourier, au gradient de température :

$$q_j = -\lambda_c \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3.39)$$

Le choix de la variable énergie totale e_t pour écrire la conservation de l'énergie est une forme parmi d'autres. En effet l'équation de conservation de l'énergie totale peut s'écrire en fonction de l'énergie interne $e = c_v T$, pour un gaz parfait cette relation est donnée par :

$$e_t = e + \frac{1}{2} u_k u_k \quad (3.40)$$

Avec l'enthalpie massique $h = e + \frac{p}{\rho}$, l'équation (3.38) peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e_t + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho h_t u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} q_j \quad (3.41)$$

Où $h_t = h + \frac{1}{2} u_k u_k$ est l'enthalpie totale par unité de masse.

Pour des écoulements compressibles, le tenseur des contraintes visqueuses, σ_{ij} , dépend du second coefficient de viscosité λ (qui représente la résistance que les forces visqueuses opposent à la compression d'un volume élémentaire de fluide) en plus que la viscosité moléculaire μ . La loi de comportement qui relie le tenseur des contraintes visqueuses au tenseur taux de déformation moyen est, pour un fluide newtonien :

$$\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.42)$$

Où $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ est la partie symétrique du tenseur de vitesses et δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon).

Avec $2\mu + 3\lambda = 0$, car les changements de volume se font sans viscosité (hypothèse de Stokes)

Nous considérons la loi d'état des gaz parfait, qui relie la pression, la température et la masse volumique :

$$p = \rho r T = \rho (\gamma - 1) e \quad (3.43)$$

Où r est la constante des gaz parfaits qui égale à la constante universelle des gaz divisée par la masse moléculaire du fluide. Nous pouvons aussi réécrire le flux de chaleur en faisant apparaître le nombre de Prandtl laminaire, Pr :

$$q_j = -\lambda_c \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x_j} \quad (3.44)$$

avec

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda_c} = \gamma \frac{\mu c_v}{\lambda_c}$$

La viscosité d'un fluide varie en fonction de sa température, la loi de Sutherland qui relie la viscosité et la température, cette loi est donnée par :

$$\mu(T) = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0} \frac{1 + \frac{S}{T_0}}{1 + \frac{S}{T}}}$$

Où $S = 110.4K$, $T_0 = 273.15K$ et $\mu_0 = 1.711 \cdot 10^5 Pa.s$

3.6 Les équations de Navier-Stokes moyennées

Par une combinaison des deux moyennes, les équations moyennées résultantes peuvent être simplifiées par rapport à une formulation qui porte uniquement sur la décomposition de Reynolds. Cette méthode, consiste à décomposer la pression et la masse volumique en une moyenne centrée selon (3.8) et à décomposer toute autre grandeur (vitesse, température, énergie) en moyenne pondérée par la masse volumique selon (3.17). Introduisant l'hypothèse de fluctuations négligeables de la viscosité et de la conductivité thermique, la forme ouverte du système d'équations de Navier-Stokes statistiquement moyennées est :

3.6.1 Equation moyenne de conservation de la masse

En utilisant une moyenne pondérée pour la vitesse, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (3.45)$$

L'équation de fluctuation de la masse volumique est obtenue en soustrayant l'équation moyennée (3.45) de celle instantanée (3.36) :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j'') = 0 \quad (3.46)$$

3.6.2 Equation moyenne de conservation de la quantité de mouvement

En utilisant une technique similaire à celle de l'équation de continuité, l'équation de la quantité de mouvement se met sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} - \overline{\sigma_{ij}'}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \quad (3.47)$$

L'équation de la quantité de mouvement pour la composante fluctuante de la vitesse est obtenue en soustrayant l'équation moyennée (3.47) de l'équation instantanée de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho' \tilde{u}_i + \rho u_i'') + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' \tilde{u}_j \tilde{u}_i + \rho \tilde{u}_i u_j'' + \rho u_i'' \tilde{u}_j + \rho u_i'' u_j'' - \overline{\rho u_i'' u_j''}) = \\ -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}'' - \overline{\sigma_{ij}'}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

En plus des termes conventionnels qui existent déjà dans l'équation instantanée, nous avons fait apparaître un terme nouveau $\left(-\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}\right)$, qui a une dimension d'une contrainte et dont l'existence est à la base du problème de fermeture. La décomposition du tenseur des contraintes visqueuses σ_{ij} , fait apparaître non seulement une valeur moyenne de type $\tilde{\sigma}_{ij}$, mais aussi un terme non nul :

$$\overline{\sigma''_{ij}} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \overline{u''_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u''_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{\mu} \frac{\partial \overline{u''_k}}{\partial x_k} \quad (3.49)$$

Ce terme peut être négligé en supposant que tous les termes impliquant des fluctuations autres que les tensions de Reynolds sont négligeables. L'équation de la quantité de mouvement moyennée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u''_i u''_j} \right) \quad (3.50)$$

3.6.3 Equation moyenne de conservation de l'énergie

L'équation de transport de l'énergie, quand lui applique le formalisme de Favre, devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u''_i u''_i}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \tilde{u}_j \bar{p} + \tilde{u}_j \overline{\rho u''_i u''_i} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho u''_j e''} + \bar{p} \overline{u''_j} + \overline{p' u''_j} + \tilde{u}_i \overline{\rho u''_j u''_i} + \frac{1}{2} \overline{\rho u''_j u''_i u''_i} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i + \tilde{\sigma}_{ij} \overline{u''_i} + \overline{\sigma''_{ij} \tilde{u}_i} + \overline{\sigma''_{ij} u''_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{q}_j + \overline{q''_j} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

De même que pour l'équation de quantité de mouvement, des termes nouveaux apparaissent :

$\frac{1}{2} \overline{\rho u''_i u''_i}$: énergie cinétique des fluctuations turbulentes par unité de volume, noté $\bar{\rho} k$

où :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u''_i u''_i} \quad (3.52)$$

$\frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i$: énergie cinétique du mouvement moyen par unité de volume

$\overline{\rho u''_j e''}$: transport turbulent de la chaleur

$\frac{1}{2} \overline{\rho u''_j u''_i u''_i}$: transport turbulent de l'énergie turbulente

$\overline{\sigma_{ij} u''_i} = \left(\tilde{\sigma}_{ij} \overline{u''_i} + \overline{\sigma''_{ij} u''_i} \right)$: diffusion moléculaire de l'énergie turbulente

En soustrayant l'équation moyennée (3.51) de l'équation instantanée (3.38), on peut tirer l'équation de fluctuation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e'' + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} u_i'' u_i'' \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} + \frac{\partial}{\partial t} \rho' \left(\tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \tilde{u}_j \left(e'' + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} u_i'' u_i'' \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho' \tilde{u}_j \left(\tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j'' \left(\tilde{e} + e'' + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} u_i'' u_i'' \right) - \\
& \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_j \overline{\rho u_i'' u_i''} + \overline{\rho u_j'' e''} + \tilde{u}_i \overline{\rho u_i'' u_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j p' + u_j'' \bar{p} + u_j'' p') - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j'' \bar{p}} + \overline{u_j'' p'}) = \\
& \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} u_i'' + \sigma_{ij}'' \tilde{u}_i + \sigma_{ij}'' u_i'') - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} \overline{u_i''} + \overline{\sigma_{ij}''} \tilde{u}_i + \overline{\sigma_{ij}'' u_i''}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (q_j'' - \overline{q_j''})
\end{aligned} \tag{3.53}$$

La corrélation vitesse-température peut être exprimée par :

$$\overline{\rho u_j'' e''} = c_v \overline{\rho u_j'' T''} \tag{3.54}$$

La corrélation pression-vitesse :

$$\begin{aligned}
\overline{\bar{p} u_j''} + \overline{p' u_j''} &= \overline{p u_j''} = (\gamma - 1) \overline{\rho e u_j''} \\
&= (\gamma - 1) \overline{\rho e'' u_j''} \\
&= c_v (\gamma - 1) \overline{\rho T'' u_j''}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Avec

$$\overline{\rho u_j'' e''} + \overline{p u_j''} = \gamma c_v \overline{\rho u_j'' T''} \tag{3.56}$$

(3.56) est l'expression globale de (3.54) et (3.55)

La corrélation du tenseur de contraintes visqueuses et de fluctuations de vitesse, est donnée par :

$$\overline{\sigma_{ij}u_i''} = \tilde{\sigma}_{ij}\overline{u_i''} + \overline{\sigma_{ij}''u_i''} \quad (3.57)$$

Pour l'analyse des termes $(\tilde{\sigma}_{ij}\overline{u_i''})$ et $(\overline{\sigma_{ij}''u_i''})$, la fluctuation de vitesse u_i'' a besoin d'être exprimée en d'autres termes connus, tout en gardant la moyenne conventionnelle pour ρ et p , et celle de Favre pour la vitesse, la température, etc. Vandromme [14] propose deux approches possibles :

1. Sachant que la température totale T_t est constante dans les tourbillons. Dans ce cas la fluctuation de température T'' est exprimée en fonction de la valeur moyenne de la fluctuation de vitesse.

$$\begin{aligned} T_t &= T + \frac{1}{2c_p}u_iu_i = C_0 \\ T_t &= \tilde{T} + \frac{1}{2c_p}\left(\tilde{u}_i\tilde{u}_i + \overline{u_i''u_i''}\right) \\ T'' &= -\frac{\tilde{u}_i u_i''}{c_p} - \frac{1}{2c_p}\left(u_i''u_i'' - \overline{u_i''u_i''}\right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Où C_0 est une constante. Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel, on peut écrire :

$$T'' = -\frac{\tilde{u}_i u_i''}{c_p} \quad (3.59)$$

Introduisant l'hypothèse de Rubesin [15], pour un comportement polytropique de la turbulence :

$$\frac{p'}{\bar{p}} = n\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{n}{n-1}\frac{\rho T''}{\bar{\rho}\tilde{T}} \quad (3.60)$$

Où n est l'exposant polytropique, on obtient une expression donnant la fluctuation de la masse volumique ρ :

$$\rho' = -\frac{\rho\tilde{u}_i u_i''}{(n-1)c_p\tilde{T}} \quad (3.61)$$

Utilisant les relations entre moyenne conventionnelle et celle pondérée par la masse en tenant compte de l'expression de fluctuation de ρ , on obtient :

$$\overline{u_i''} = -\frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} = \frac{\tilde{u}_j \widetilde{u_i'' u_j''}}{(n-1) c_p \tilde{T}} \quad (3.62)$$

2. Dans cette approche, on se sert de la relation polytropicque (3.60), on obtient :

$$\overline{u_i''} = -\frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} = \frac{\widetilde{u_i'' T''}}{(n-1) \tilde{T}} \quad (3.63)$$

Il apparaît dans cette expression la corrélation vitesse-température, qui prend en considération le cas d'un flux thermique ou température imposés comme conditions aux limites, contrairement à l'expression (3.62).

Le terme $(\tilde{\sigma}_{ij} \overline{u_i''})$ peut être exprimé soit à partir de (3.62) ou (3.63), son rôle est négligeable pour des valeurs de Mach inférieur à 5 [15]-[16]. Le terme $(\overline{\sigma_{ij}'' u_i''})$ est modélisé dans [17] :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{ij}'' u_i''} &= \overline{\mu u_i'' \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} \right)} \\ &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\overline{u_i'' u_i''}}{2} + \overline{u_i'' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_i'' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Les termes $\overline{\sigma_{ij}'' \tilde{u}_i}$, $\overline{q_j''}$ et $-\frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}$ étant négligés, car nous tenons en compte seules les corrélations impliquant les tensions de Reynolds. L'équation (3.51) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \tilde{u}_j \bar{p} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\lambda_c \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \gamma c_v \overline{\rho T'' u_j''} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

De plus, on tient compte de l'équation de l'état moyennée :

$$\bar{p} = \bar{\rho} (c_p - c_v) \tilde{T} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \tilde{e} \quad (3.66)$$

On peut aussi écrire une équation donnant la fluctuation de pression :

$$p' = (\gamma - 1) (\rho' \tilde{e} + \rho e'') \quad (3.67)$$

L'équation d'état peut se mettre encore sous la forme :

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{T''}{\tilde{T}} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{\rho' T''}{\bar{\rho} \tilde{T}} \quad (3.68)$$

3.7 La fermeture des équations

L'établissement du système des équations précédemment écrites témoigne de l'apparition des termes supplémentaires qui s'expriment sous forme de corrélations, qui traduisent l'effet de la turbulence sur le mouvement du champ moyen et qui rendent le système des équations ouvert. Le problème de fermeture se pose alors à l'établissement du lien entre les corrélations et le champ moyen. La recherche d'équations ou de relations algébriques pour fermer le système d'équation constitue la procédure de modélisation qui doit s'appuyer sur une validation expérimentale. La tension de Reynolds constitue la corrélation principale car elle détermine en grande partie le comportement du champ moyen de vitesse. Dans la fermeture du premier ordre, les corrélations doubles sont exprimées en fonction du gradient du champ moyen et d'une viscosité de la turbulence à travers une hypothèse de Boussinesq [18]. La fermeture du second ordre est basée sur les équations de bilan pour les composantes de la corrélation double de vitesse, l'approche de troisième ordre des corrélations triples [19] semble à l'heure actuelle très complexe. Pour le flux de chaleur turbulent, la fermeture peut être portée à différents niveaux jusqu'au modèle de transport par une équation de bilan aux dérivées partielles [20]. Il se pose la question : à quel niveau devrait-on effectuer la fermeture de la corrélation thermique par rapport à la fermeture de la corrélation

cinématique? La réponse dépend de la nature des écoulements qu'on envisage de traiter et elle est en même temps un compromis entre la complexité du modèle et sa performance. Très schématiquement nous pouvons considérer que l'obtention d'un système fermé d'équations peut se faire à partir du système ouvert par :

- Réduction du nombre d'inconnues
- Adjonction d'équations supplémentaires
- Combinaisons des deux procédures précédentes

3.8 L'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence

Une équation différentielle pour l'énergie cinétique turbulente k peut être obtenue par la démarche suivante :

1. On considère l'équation instantanée de la quantité de mouvement écrite en variables primitives, une équation de Navier-Stokes peut être écrite sous la forme :

$$\mathcal{E}_{NS}(u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.69)$$

Dans ce cas l'équation de la quantité de mouvement est obtenue par :

$$\mathcal{E}_{NS}(u_i) = 0 \quad (3.70)$$

2. On multiplie l'équation précédente par u_i'' et on moyenne en temps :

$$\overline{u_i'' \mathcal{E}_{NS}(u_i)} = 0 \quad (3.71)$$

$$\overline{u_i'' \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i'' \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \overline{u_i'' \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} = 0 \quad (3.72)$$

Avec

(a)

$$\begin{aligned} \overline{u_i'' \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}} &= \overline{u_i'' \rho \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{\frac{1}{2} \rho u_i'' u_i''} - \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \overline{u_i'' \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= \overline{\tilde{u}_j \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} u_i'' u_i''} + \overline{\rho u_j'' \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} u_i'' u_i''} + \overline{\rho u_j'' u_i'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} \\ &= \overline{\rho u_j'' u_i'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\tilde{u}_j \frac{1}{2} \rho u_i'' u_i''} - \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \tilde{u}_j} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\frac{1}{2} \rho u_j'' u_i'' u_i''} - \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j''} \end{aligned}$$

(c)

$$\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} = \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i'' p'} - \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$$

(d)

$$-\overline{u_i'' \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} = \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' \sigma_{ij}}$$

A partir de l'équation de continuité, on peut tirer :

$$\frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \tilde{u}_j} + \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j''} = 0 \quad (3.73)$$

On obtient l'équation scalaire suivante :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_j \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''}}_1 &= - \underbrace{\overline{\rho u_j'' u_i'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}}_2 \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} + \overline{u_j'' p'} - \overline{u_i'' \sigma_{ij}} \right)}_3 \\ &\quad - \underbrace{\overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}}_4 + \underbrace{\overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}}_5 - \underbrace{\overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}}_6 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Les termes représentent respectivement :

1. : variation temporelle de k et sa convection par le champ de vitesse moyenne
2. : représente la production de l'énergie cinétique de turbulence par le mouvement moyen
3. : représentent respectivement
 - (a) diffusion par mouvements turbulents : $\frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}$
 - (b) diffusion par fluctuations de pression : $\overline{u_j'' p'}$
 - (c) diffusion par mouvements moléculaires : $\overline{u_i'' \sigma_{ij}}$
4. : l'interaction du champ de pression moyenne avec fluctuations de vitesse
5. : c'est corrélation entre fluctuation de pression et divergence des vitesses fluctuantes
6. : correspond à la destruction de l'énergie cinétique de turbulence par l'effet de la viscosité

3.9 L'équation de transport des contraintes de Reynolds

Cette équation joue un rôle important dans la fermeture au second ordre avec équations de transports ou bien sous sa forme simple dans la fermeture au premier ordre qui se présente comme une équation de l'énergie cinétique de turbulence.

Considérons les produits $\mathcal{E}_{NS}(u_i)$ par la fluctuation de vitesse u_j'' et $\mathcal{E}_{NS}(u_j)$ par u_i'' . La moyenne statistique de la somme des deux produits donne :

$$\overline{u_j'' \mathcal{E}_{NS}(u_i) + u_i'' \mathcal{E}_{NS}(u_j)} = 0 \quad (3.75)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{NS}(u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \\ \mathcal{E}_{NS}(u_j) = \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \end{cases} \quad (3.76)$$

Nous commençons par le développement des termes instationnaires :

$$\overline{u_j'' \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i'' \rho \frac{\partial u_j}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_i'' u_j''} - \overline{u_i'' u_j'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (3.77)$$

Le terme convectif s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{u_j'' \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\tilde{u}_k \rho u_i'' u_j''} - \overline{u_i'' u_j'' \frac{\partial \rho \tilde{u}_k}{\partial x_k}} + \\ &\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''} - \overline{u_i'' u_j'' \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_k'' u_i'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_k'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Le terme du gradient de pression :

$$\begin{aligned} \overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} &= \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \\ &= \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' p'} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j'' p'} - p' \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Le terme visqueux :

$$-\overline{u_j'' \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}} - \overline{u_i'' \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_j'' \sigma_{ik}} + \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i'' \sigma_{jk}} + \overline{\sigma_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \quad (3.80)$$

Utilisant l'équation (3.73), on obtient l'équation de transport pour les contraintes de Reynolds :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_i'' u_j''} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\tilde{u}_k \rho u_i'' u_j''} &= -\overline{\rho u_k'' u_i'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_k'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''} + \overline{u_i'' p' \delta_{jk}} + \overline{u_j'' p' \delta_{ik}} - \overline{u_j'' \sigma_{ik}} - \overline{u_i'' \sigma_{jk}} \right) \\ -\overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} - \overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} &+ p' \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right) - \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} - \overline{\sigma_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Cette équation de transport est utilisée comme alternative à la modélisation du tenseur de Reynolds $-\overline{\rho u_i'' u_j''}$, elle contient des termes de corrélation triples, qu'il faudra modéliser.

3.10 L'équation de transport de la dissipation turbulente

L'équation de la dissipation demande beaucoup plus d'effort, la dissipation est donnée à partir de l'expression suivante :

$$\bar{\rho}\varepsilon = \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \quad (3.82)$$

On peut exprimer une équation pour la contrainte visqueuse σ_{ik} en utilisant les expressions (3.69) et (3.70). En ajoutant une viscosité cinématique ν pour avoir une dimension d'une contrainte.

$$\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{NS}(u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}_{NS}(u_k) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_n} \mathcal{E}_{NS}(u_n) \right) \quad (3.83)$$

Les termes de l'équation (3.83) sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{NS}(u_i) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \rho u_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}_{NS}(u_k) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \rho u_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_n} \mathcal{E}_{NS}(u_n) &= -\frac{2}{3} \delta_{ik} \left\{ \rho u_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_l} \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_n} - \frac{2}{3} \delta_{nl} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x_n \partial x_n} + \frac{\partial \rho}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (3.86)$$

L'équation (3.83) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
& \nu \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) + u_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) \right) = \\
& + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ik} \nu \frac{\partial^2 p}{\partial x_n \partial x_n} - 2\nu \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i} - \\
& \frac{2}{3} \delta_{ik} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_l} \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_n} - \frac{2}{3} \delta_{nl} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \\
& \nu \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} - \nu \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \nu \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{2}{3} \delta_{ik} \nu \frac{\partial \rho}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{2}{3} \delta_{ik} \nu \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_l}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

En dérivant par rapport à x_k l'équation pour la fluctuation de vitesse u_i'' , on obtient

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right) + \rho u_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} - \rho' \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t \partial x_k} - \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial t} - \frac{\partial \rho' \tilde{u}_l}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} \\
& - \rho' \tilde{u}_l \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial x_l} - \frac{\partial \rho u_l'}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} - \rho u_l'' \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \overline{\rho u_i'' u_l''} + \\
& \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l''}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l''}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} \right)
\end{aligned} \tag{3.88}$$

En multipliant les équations (3.87) et (3.88) respectivement par $\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right)$ et $(\nu \sigma_{ik}^*)$, où :

$$\sigma_{ik}^* = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \tag{3.89}$$

La somme de deux équations résultantes donne une équation de transport de $\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \mu \sigma_{ik}^* \right)$:

$$\begin{aligned}
& \nu \rho \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \sigma_{ik}^*}{\partial t} + \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} u_l \frac{\partial \sigma_{ik}^*}{\partial x_l} + \sigma_{ik}^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right) + \sigma_{ik}^* u_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right) \right) = \\
& + \frac{2}{3} \delta_{ik} \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_n \partial x_n} - 2\nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i} + \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \\
& \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} - \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{2}{3} \delta_{ik} \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial t} \\
& + \frac{2}{3} \delta_{ik} \nu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_l} - \nu \sigma_{ik}^* \rho' \tilde{u}_l \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_k} - \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial \rho' \tilde{u}_l}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} - \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial t} - \nu \sigma_{ik}^* \rho' \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t \partial x_k} \\
& - \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} - \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial \rho u_l'}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} - \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_k} - \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial x_l} - \nu \sigma_{ik}^* \rho u_l'' \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_k} + \\
& \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \overline{\rho u_i'' u_l''} + \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l''}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} \right) \\
& - \nu \sigma_{ik}^* \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

La première ligne de l'équation (3.90), en tenant compte de l'équation de continuité, après le passage à la moyenne temporelle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\left(\nu \rho \sigma_{ik}^* \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right)} + \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\left(\nu \rho u_l \sigma_{ik}^* \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{u}_l \bar{\rho} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\left(u_l'' \nu \rho \sigma_{ik}^* \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right)}$$

Finalement, en regroupant l'ensemble des résultats, l'équation de transport de ε s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{u}_l \bar{\rho} \varepsilon = -\bar{\nu} \rho \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \bar{\nu} \rho \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \\
& \bar{\nu} \overline{\frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_k \partial x_l} u_l'' \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \bar{\nu} \overline{\frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_i \partial x_l} u_l'' \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \bar{\nu} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} u_l'' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \\
& \frac{2}{3} \bar{\nu} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} u_l'' \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \bar{\nu} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \rho u_l'' \left(\frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_k''}{\partial x_i \partial x_l} \right)} + \frac{2}{3} \bar{\nu} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \rho u_l'' \frac{\partial^2 u_j''}{\partial x_j \partial x_l}} - 2\bar{\nu} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial^2 p}{\partial x_n \partial x_n}} + \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial^3 u_i''}{\partial x_l \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_l''}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right)} - \frac{4}{3} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \mu \frac{\partial^3 u_j''}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}} + \\
& \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial^3 u_k''}{\partial x_l \partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_l''}{\partial x_k \partial x_i \partial x_l} \right)} - \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \mu \left(\frac{\partial^3 u_n''}{\partial x_l \partial x_n \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_l''}{\partial x_n \partial x_n \partial x_l} \right)} + \\
& \frac{4}{9} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \mu \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_l \partial x_l \partial x_j}} - \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}} - \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t}} - \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}} - \\
& \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t}} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_l}} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial t}} - \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \\
& \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t \partial x_k} \rho' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t \partial x_i} \rho' \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \\
& \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \rho' \tilde{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \rho' \tilde{u}_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \\
& \overline{\tilde{u}_l \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_k} \rho' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \overline{\tilde{u}_l \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_i} \rho' \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial \rho \tilde{u}_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i''}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \\
& \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial \rho u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \rho u_l''}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \rho u_l''}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \\
& \overline{\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_i} \rho u_l'' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_l \partial x_i} \rho u_l'' \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + \\
& \overline{\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \rho u_i'' u_l'' \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i''}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k''}{\partial x_i} \right)} + \frac{2}{3} \overline{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \rho u_i'' u_l'' \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j''}{\partial x_j} \right)} + \\
& \overline{\mu \left(\frac{\partial^3 u_i''}{\partial x_l \partial x_l \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_l''}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} - \frac{2}{3} \overline{\mu \left(\frac{\partial^3 u_j''}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} - \\
& \frac{2}{3} \overline{\mu \left(\frac{\partial^3 u_i''}{\partial x_l \partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^3 u_l''}{\partial x_i \partial x_l \partial x_i} \right) \frac{\partial u_n}{\partial x_n}} + \frac{4}{9} \overline{\mu \left(\frac{\partial^3 u_j''}{\partial x_j \partial x_i \partial x_i} \right) \frac{\partial u_n}{\partial x_n}} - \\
& \overline{\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^3 u_i''}{\partial x_l \partial x_l \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_l''}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i''}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k''}{\partial x_i} \right)} + \\
& \frac{2}{3} \overline{\tilde{\mu} \frac{\partial^3 u_j''}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i''}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k''}{\partial x_i} \right)} + \\
& \frac{2}{3} \overline{\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^3 u_i''}{\partial x_l \partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^3 u_l''}{\partial x_i \partial x_l \partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \tilde{u}_n''}{\partial x_n} \right)} - \frac{4}{9} \overline{\tilde{\mu} \frac{\partial^3 u_j''}{\partial x_j \partial x_i \partial x_i} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \tilde{u}_n''}{\partial x_n} \right)}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

L'équation de la dissipation ε est assez complexe, fait apparaître plusieurs corrélations

inconnues et complexes, qui rend son utilisation impossible. Elle fut proposée en premier lieu pour des écoulements turbulents incompressibles [21], [22]. L'utilisation de la moyenne de Favre pour des écoulements à masse volumique variable augmente la difficulté de modélisation terme à terme de cette équation [23]. Vandromme [23] simplifie cette équation, et suppose un comportement isotrope des petits tourbillons dissipatifs et néglige l'effet des fluctuations de la masse volumique. Il est suffisant d'utiliser une forme analogue au cas incompressible [24], calquée sur sa correspondante de l'énergie cinétique turbulente.

3.11 Modèles de fermeture des équations de Navier-Stokes

3.11.1 Modèles à viscosité turbulente

Pour éviter de résoudre les équations de transport des composantes du tenseur des contraintes turbulentes, on peut établir une hypothèse pour modéliser le terme $-\rho \widetilde{u_i'' u_j''}$. L'hypothèse de fermeture est celle de Boussinesq [25], et similairement pour la fermeture de l'équation de l'énergie :

$$-\rho \widetilde{u_i'' u_j''} = 2\mu_t \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{u}_{k,k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.92)$$

Le terme $-\frac{2}{3} \mu_t \tilde{u}_{k,k} \delta_{ij}$ présente la dilatation volumique utilisé dans le cas des écoulements compressibles.

3.11.1.1 Modèles à zéro équation

Les modèles à zéro équation utilisés pour modéliser les contraintes de Reynolds dans les équations de quantité de mouvement utilisent une viscosité turbulente algébrique ou une longueur de mélange. C'est Ludwig Prandtl qui a proposé une relation reliant la viscosité turbulente au gradient de la vitesse moyenne en introduisant une longueur l_m appelé longueur de mélange, pour des écoulements de types couche limite :

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (3.93)$$

Cette relation traduit u état d'équilibre entre le champ moyen et le champ fluctuant. Pour déterminer l_m , Von Karman [26], Klebanoff [27] et Michel et al [28], ont proposé de différents modèles en fonctions de la distance à la paroi, de l'épaisseur de la couche limite et du gradient de vitesse moyenne. Pour tenir en compte de l'effet de la paroi, Van Driest [29] a proposé une fonction d'amortissement F dans la relation μ_t .

$$\begin{aligned} \mu_t &= \rho F^2 l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \\ F &= 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \\ y^+ &= \frac{u_\tau y}{\nu_p}, \quad u_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho}, \quad \tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_p \end{aligned} \quad (3.94)$$

D'autres modèles ont été développés par Cebeci Smith [30], Alber [31] et le modèle connu de Baldwin Lomax [32]. L'avantage de ce type de modèle est sa simplicité de mise en œuvre, mais les inconvénients sont diverses, beaucoup d'empirisme, absence de l'historique de la turbulence.

3.11.1.2 Modèles à une équation

Parmi les différents modèles dans ce groupe, on ne considère que le modèle de Spalart et Allmaras (SA), qui, contrairement au modèle Cebeci-Smith qui utilise des expressions algébriques pour la viscosité turbulente (ν_t), le modèle (SA) utilise une équation de transport.

Le modèle Spalart-Allmaras ([33], [32], et [35]) est un modèle de viscosité turbulente relativement récent basé sur une équation de transport pour la viscosité turbulente. Ce modèle a été inspiré d'un ancien modèle développé par Baldwin et Barth

[36]. Sa formulation et coefficients ont été définis en utilisant l'analyse dimensionnelle, et les résultats empiriques sélectionnés. Les résultats empiriques utilisés dans son développement étaient pour deux dimensions (2-D) de type, couches de mélange, sillage, et écoulement de couche limite sur une plaque plane.

Le but de ce modèle est d'améliorer les prédictions obtenues avec les modèles algébriques de longueur de mélange pour développer un modèle local pour des écoulements complexes, et de fournir une alternative plus simple à des modèles de turbulence à deux équations.

Le modèle utilise la distance la plus proche de la paroi dans sa formulation, et fournit un passage de transition en douceur du régime laminaire au turbulent, à condition que la position de début de transition est donnée. Il ne nécessite pas un maillage très fin dans le cas des écoulements avec parois comme dans les modèles de turbulence à deux équations, et il montre une bonne convergence dans les écoulements simples.

Le modèle ne donne pas de bonnes prévisions dans l'écoulements de jet, mais donne assez de bonnes prédictions dans les écoulements 2-D de couches de mélange, sillage, et les couches limites de plaques planes et montre une amélioration de la prévision des écoulements avec des gradients de pression adverses par rapport aux modèles $k - \varepsilon$ et $k - \omega$, mais pas autant que le modèle SST.

Les équations du modèle :

La fonction de la viscosité turbulente est définie en fonction d'une viscosité variable, $\tilde{\nu}$, et une fonction de paroi, f_{ν_1} , comme suit :

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu_1} \quad (3.95)$$

Dans les zones lointaines de paroi, la fonction f_{ν_1} est égale à un et $\nu_t = \tilde{\nu}$.

L'équation de transport convective de la viscosité turbulente est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{\nu} u_j) = & c_{b_1} (1 - f_{t_2}) \rho \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b_2} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \\ & - \left(c_{w_1} f_w - \frac{c_{b_1}}{\kappa^2} f_{t_2} \right) \rho \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + f_{t_1} \rho \Delta U^2 \end{aligned} \quad (3.96)$$

Où les termes de droite représentent, la production de viscosité turbulente, conser-
vation de diffusion, la diffusion non-conservative, la dissipation de la turbulence près
de la paroi, l'amortissement de transition, et la source de de transition de la turbu-
lence. L'indice b signifie "de base", w pour "paroi", ν signifie "visqueux", et t signifie
"trajet" (trip en anglais).

Les constantes de modèle et les fonctions auxiliaires sont définis en termes de
modèle de base pour des écoulements cisailés libres, le modèle de paroi pour les
couches limites, le modèle visqueux de l'intégration à la paroi, et le modèle de tran-
sition pour la transition laminaire-turbulent.

Les constantes de modèle de base pour des écoulements cisailés libres pour contrôl-
er la production et la diffusion de la viscosité turbulente sont :

$$c_{b_1} = 0.1355 \quad c_{b_2} = 0.622 \quad \sigma = 2/3$$

Les constantes supplémentaires du modèle et les fonctions auxiliaires pour la des-
truction de la viscosité turbulente dans la zone de la couche limite sont :

$$\begin{aligned} c_{w_1} &= \frac{c_{b_1}}{\kappa^2} + \frac{(1+c_{b_2})}{\sigma} & r &= \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \\ c_{w_2} &= 0.3 & g &= r + c_{w_2} (r^6 - r) \\ c_{w_3} &= 2 & f_w &= g \left(\frac{1+c_{w_3}^6}{g^6+c_{w_3}^6} \right)^{1/6} \end{aligned}$$

Ces fonctions auxiliaires permettent au modèle la prédiction de la couche logarithmique, bien que le bilan particulier de la contrainte de cisaillement de Reynolds n'est pas en accord quantitatif avec les données expérimentales. Les fonctions de modélisation et les constantes pour les régions proches de paroi sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= S + \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa d)^2} f_{\nu 2} & S &= \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} & \chi &= \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \\ f_{\nu 1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3} & f_{\nu 2} &= 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}} & c_{\nu 1} &= 7.1 \end{aligned}$$

Les fonctions auxiliaires et les constantes du modèle pour contrôler la région laminaire des couches de cisaillement et la transition à la turbulence sont définies avec un terme source contrôlé avec la fonction f_{t_1} et une réduction de la production contrôlée par la fonction f_{t_2} .

$$\begin{aligned} f_{t_1} &= c_{t_1} g_t e^{\left(-c_{t_2} \frac{w_t^2}{\Delta U^2} (d^2 + (g_t d_t)^2)\right)} \\ f_{t_2} &= c_{t_3} e^{(-c_{t_4} \chi^2)} \\ g_t &= \min\left(0.1, \frac{\Delta U}{w_t \Delta x_t}\right) \\ c_{t_1} &= 1 \quad c_{t_2} = 2 \quad c_{t_3} = 1.2 \quad c_{t_4} = 0.5 \end{aligned}$$

Où w_t est la vorticité au point de disjonction de la couche limite, ΔU est la norme de la différence entre la vitesse au point d'écoulement et la vitesse au point de déclenchement, Δx_t est l'espacement de la maille le long de la paroi au point-trajet (trip point), et d_t est la distance de la paroi.

Malgré l'existence de trop d'empirismes, nombre de fonctions d'amortissement et de constantes, le modèle Spalart Allmaras est considéré comme un compromis entre les approches algébriques et les modèles à deux-équations.

Conditions aux limites :

La valeur idéale de la viscosité turbulente dans les régions d'écoulement libre est

égale à zéro. Certains solveurs ont des problèmes avec des valeurs nulles de $\tilde{\nu}$ dans l'écoulement libre, et des valeurs inférieures $\frac{\tilde{\nu}}{2}$ ont été recommandées. Des petites valeurs sont recommandées pour les écoulements cisailés libres, sinon, les solutions montrent une dépendance aux régions à l'extérieur de la couche limites dans les profils de vitesse et taux de décroissance. Sur les parois la viscosité turbulente est nulle.

3.11.1.3 Modèles à deux équations

Bien que les modèles d'une équation ont trouvé peu de succès, sauf pour le modèle SA, et où le transport des caractéristiques de la turbulence est important comme le cas dans des écoulements de forts gradients adresses ou des écoulements séparés, les modèles à deux-équations ont trouvé une large utilisation. Différents modèles à deux-équations ont été proposés et plus de détails ont été donnés, par exemple dans [33],[37]. Trois modèles célèbres qui sont basés sur cette approche sont le modèle $k - \varepsilon$, le modèle de $k - w$ de Wilcox, et le modèle SST de Menter [33],[37], qui regroupe les deux modèles, $k - \varepsilon$ dans la région externe et $k - w$ dans la région de la paroi.

3.11.1.3.1 Le modèle $k - \varepsilon$ (Launder-Sharma)

Le modèle de $k - \varepsilon$ est un à modèle de viscosité turbulente à deux-équations le plus connu et très largement utilisé. Il existe de différentes versions de ce modèle dans la littérature. Les principales références sur ce modèle sont décrites par Jones et Launder [38] et Launder et Sharma [39]. La formulation utilisée ici est celle de Launder et Sharma. D'autres formulations du modèle de $k - \varepsilon$ sont rapportés dans la littérature.

Le modèle de $k - \varepsilon$ a été développé à l'origine pour améliorer le modèle de longueur de mélange et d'éviter la prescription algébrique de l'échelle de longueur turbulent en écoulements complexes. Des équations de transport sont résolues pour deux propriétés scalaires de turbulence. L'équation de k est un modèle de l'équation de transport

de l'énergie cinétique turbulente, et l'équation de ε est un modèle pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

Le modèle $k - \varepsilon$ de Launder et Sharma est une variante du modèle $k - \varepsilon$ de Jones et Launder, avec une prise en compte des effets "bas Reynolds" dus aux parois.

Ce modèle donne de bons résultats pour les écoulements cisailés libres avec relativement faibles gradients de pression. Pour un écoulement avec présence de parois, le modèle donne un bon accord avec les résultats expérimentaux pour zéro et faibles gradients de pression moyenne, mais est moins précis pour des gradients de pression adverses élevés [33]. Les prédictions du modèle sont insensibles aux valeurs de turbulence à l'extérieur de la couche limite. Le modèle nécessite des fonctions d'amortissement explicites et un maillage fin près des parois solides.

Les équations du modèle

Les tensions de Reynolds sont modélisées en termes de viscosité turbulente comme suit :

$$\tau_{t_{ij}} = 2\mu_t (S_{ij} - S_{nn}\delta_{ij}/3) - 2\rho k\delta_{ij}/3 \quad (3.97)$$

Où μ_t est la viscosité turbulente, S_{ij} est le tenseur du taux de déformation de la vitesse moyenne, ρ est la densité du fluide, k est l'énergie cinétique turbulente, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

La viscosité turbulente est définie comme une fonction de l'énergie cinétique turbulente, k , et le taux de dissipation turbulent, ε :

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.98)$$

La viscosité turbulente est donnée en fonction de la densité du fluide, ρ , l'échelle de vitesse turbulente, $k^{1/2}$, et l'échelle de longueur, $k^{3/2}/\varepsilon$, sur la base de l'analyse dimensionnelle locale. c_μ est le coefficient du modèle, déterminé par analyse de l'équilibre à des nombres de Reynolds élevés, et la fonction d'amortissement, f_μ , est modélisée en fonction d'un nombre de Reynolds de la turbulence, $Re_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}$.

Pour fermer les équations, il reste à construire des équations d'évolution pour k et ε , les équations de transport de turbulence pour le modèle $k - \varepsilon$ de Launder-Sharma sont définies comme suit :

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k a la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j k - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \rho \varepsilon + \phi_k \quad (3.99)$$

L'équation de transport de ε est de la forme :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j \varepsilon - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{t_{ij}} S_{ij} - c_{\varepsilon 2} f_2 \rho \varepsilon \frac{\varepsilon}{k} + \phi_\varepsilon \quad (3.100)$$

Où les termes à droite représentent, la production, la dissipation, et le terme de la paroi, respectivement.

avec

$$\begin{aligned} c_\mu &= 0.09 & c_{\varepsilon 1} &= 1.45 & c_{\varepsilon 2} &= 1.92 \\ \sigma_k &= 1.0 & \sigma_\varepsilon &= 1.3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_\mu &= \exp(-3.4/(1 + 0.02 Re_t)^2) \\ f_2 &= 1 - 0.3 \exp(-Re_t^2) \quad , \quad Re_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon} \end{aligned}$$

et les termes explicites de paroi sont :

$$\phi_k = 2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2, \quad \phi_\varepsilon = 2\mu \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \right)^2$$

Où u_s est la vitesse d'écoulement parallèle à la paroi.

Conditions aux limites :

Des conditions de non-glissement sont imposées à la paroi par les relations simples suivantes :

Ici ε est la pseudo-dissipation isotrope qui remplace la dissipation effective pour des besoins de robustesse numérique et de simplification de la condition de paroi.

$$k = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0$$

Lorsque les termes de paroi sont inclus (ϕ_k et ϕ_ε) le taux de dissipation effectif est exprimé par $\varepsilon - \phi_k/\rho$. Sur l'axe de symétrie, une condition de glissement ($\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$) est imposée.

3.11.1.3.2 Le modèle $k - \omega$ (Wilcox)

$k - \omega$ ([33] et [40]) est un modèle de viscosité de turbulence de deux-équations bien connu et largement expérimenté. La référence principale de ce modèle est donnée par Wilcox [33], et sa formulation est utilisée ici. Les racines de ce modèle peuvent être attribuées à Kolmogorov, Prandtl, Saffman, et Wilcox, en collaboration avec d'autres scientifiques.

Ce modèle a été développé à peu près au même moment et en parallèle avec le modèle $k - \varepsilon$ comme une alternative à définir une fonction de viscosité turbulente. Des

équations de transport convectives sont résolues pour l'énergie cinétique turbulente et son taux spécifique de dissipation, k et $\omega = \varepsilon/\beta^*k$ respectivement.

L'obtention d'une équation de transport pour la fréquence ω est tout aussi délicate que pour la pseudo-dissipation et par conséquent une stratégie analogue est mise en œuvre en considérant une forme d'équation prototype inspirée de l'équation de k . Le modèle $k - \omega$ de Wilcox s'est avéré être de stabilité numérique supérieure de modèle $k - \varepsilon$ principalement dans la sous-couche visqueuse à proximité de la paroi. Ce modèle ne nécessite pas de fonctions d'amortissement comme dans le modèle à deux équations $k - \varepsilon$ et autres en raison des grandes valeurs de ω dans la région de la paroi. Les conditions aux limites de paroi nécessitent la spécification de la distance entre la paroi et le premier point du maillage. Dans la région logarithmique, le modèle donne un bon accord avec les résultats expérimentaux pour les écoulements avec un gradient modéré de pression adverse.

Dans la couche de cisaillement libre et les écoulements de couche limite à gradient de pression adverses, les résultats du modèle $k - \omega$ sont sensibles à de faibles valeurs de ω à l'extérieure de la couche limite (références [40] et [41]). Dans les calculs des écoulements complexes, il est difficile d'exercer assez de contrôle sur la turbulence de la région externe pour éviter de petites valeurs de w dans l'écoulement libre et encore éviter les ambiguïtés dans les résultats.

Les équations du modèle

Les tensions de Reynolds sont modélisées en termes de viscosité turbulente comme suit :

$$\tau_{t_{ij}} = 2\mu_t (S_{ij} - S_{nn}\delta_{ij}/3) - 2\rho k\delta_{ij}/3 \quad (3.101)$$

La viscosité de turbulence est définie comme une fonction de l'énergie cinétique

turbulente, k et du taux de dissipation spécifique, ω , comme suit :

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \quad (3.102)$$

Les deux équations de transport pour le k et ω sont définies ci-dessous par :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j k - (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta^* \rho \omega k \quad (3.103)$$

et

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j \omega - (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta \rho \omega^2 \quad (3.104)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{5}{9} & \beta &= \frac{3}{40} & \beta^* &= \frac{9}{100} \\ \sigma &= 0.5 & \sigma^* &= 0.5 \end{aligned}$$

Conditions aux limites

Le choix de valeurs externes recommandées pour les écoulements de couche limite est :

$$\omega_\infty > \lambda \frac{U_\infty}{L} \quad \mu_{t\infty} < 10^{-2} \mu_{tmax} \quad k_\infty = \frac{\mu_{t\infty}}{\rho_\infty} \omega_\infty$$

Où L est la longueur approximative du domaine de calcul, et U_∞ est la vitesse caractéristique. Un facteur de proportionnalité $\lambda = 10$ a été recommandé. Les couches de cisaillement libres sont plus sensibles à de faibles valeurs d'écoulement libre de ω_∞ et des valeurs plus élevées de ω sont nécessaires. Suite à une analyse d'autosimilarité,

une valeur de λ peut être déterminée d'où une valeur d'au moins $\lambda = 10$ pour de couches de mélange, augmentée jusqu'à $\lambda = 80$ pour des jets ronds.

Les conditions aux limites de parois sont données par les relations suivantes

$$k = 0 \quad \text{et} \quad \omega = 10 \frac{6\mu}{\beta\rho(y_1)^2}$$

Où y_1 est la distance du premier point à la paroi et $y^+ < 1$, des conditions du gradient nul sont appliquées aux limites de symétrie.

3.11.1.3.3 Le modèle $k - \omega$ BSL (Menter)

Les modèles $k - \omega$ ne nécessitent généralement pas de fonctions d'amortissements supplémentaires et semblent donc présenter, dans la région proche-paroi, un comportement plus universel que les modèles $k - \varepsilon$ "bas-Reynolds". En tenant compte de cette remarque et du fait que les modèles $k - \omega$ s'avèrent, contrairement aux modèles $k - \varepsilon$, sensibles à la définition des conditions de l'écoulement lointain, Menter propose de définir un modèle mixte à deux équations, possédant les caractéristiques d'une fermeture $k - \omega$ près des parois et celles d'un modèle $k - \varepsilon$ dans Les zones lointaines. Ce modèle dit $k - \omega$ Baseline (BSL) de Menter [42][43].

Pour développer cette combinaison, Menter considère tout d'abord la formulation $k - \omega$ de Wilcox, les équations de transport de k et ω sont données respectivement par :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j k - (\mu + \sigma_{k1} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta^* \rho \omega k \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j \omega - (\mu + \sigma_{\omega 1} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{\gamma_1}{\mu_t} \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta \rho \omega^2 \quad (3.106)$$

En considère que $f_2 = 1$ pour faire abstraction des aspects de bas-Reynolds, l'équation de la pseudo-dissipation (3.100) est modifiée afin de tenir en compte la relation reliant ε et ω donnée par :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{c_\mu k} \quad (3.107)$$

Nous obtenons les équations de transport suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j k - (\mu + \sigma_{k_2} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta^* \rho \omega k \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j \omega - (\mu + \sigma_{\omega_2} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{\gamma_2}{\mu_t} \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta \rho \omega^2 + 2 \rho \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (3.109)$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k reste inchangée avec des modifications apportées aux les coefficients. Pour l'équation de ω , un terme nouveau s'est apparaît suite au passage de l'équation de ε à l'équation de ω , appelé terme de diffusion croisé.

Pour faire profiter d'avantage des deux modèles $k-\varepsilon$ loin de la couche limite et $k-\omega$ près de paroi, Menter a fait intervenir une fonction F_1 qui permet de basculer entre les deux modèles. Maintenant, l'équation (3.105) et l'équation (3.106) sont multipliées par F_1 et l'équation (3.108), et l'équation (3.109) sont multipliées par $(1 - F_1)$ et les équations correspondantes de chaque ensemble sont additionnées pour donner le nouveau modèle :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j k - (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta^* \rho \omega k \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j \omega - (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{\gamma}{\mu_t} \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta \rho \omega^2 + 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (3.111)$$

La viscosité de turbulence est donnée par :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.112)$$

La fonction F_1 permet de sélectionner le modèle de Wilcox $k - \omega$ dans la sous-couche visqueuse et la région logarithmique et basculer progressivement vers le modèle $k - \varepsilon$ à mesure qu'on s'éloigne de la paroi. On profite ainsi de la robustesse de ω dans la région de proche paroi et de l'insensibilité de ε dans l'écoulement libre. La fonction de Menter F_1 s'écrit :

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (3.113)$$

avec

$$\arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right), \frac{4\rho k \sigma_{\omega_2}}{CD_{k\omega} y^2} \right)$$

où y est la distance normale à la paroi et

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right)$$

avec

Le terme $\sqrt{k}/0.09\omega y$ est une échelle de longueur turbulente, adimensionnée par la distance à la paroi, intervient principalement dans la zone logarithmique, puis décroît plus qu'on s'éloigne de la couche limite.

Le terme $500\nu/\omega y^2$ assure l'activation du modèle $k - \omega$ dans la sous-couche visqueuse, et tend vers zéro plus qu'on s'éloigne de la paroi.

Le terme $4\rho k\sigma_{\omega_2}/CD_{k\omega}y^2$ consiste à prévenir la dégénérescence de la solution pour de petites valeurs de ω dans l'écoulement externe.

Soit ϕ_1 représentent les constantes dans le modèle original ($\sigma_{k1}\dots$), ϕ_2 les constantes dans le modèle $k - \varepsilon$ transformé ($\sigma_{k2}\dots$) et ϕ_1 les constantes correspondantes du nouveau modèle ($\sigma_k\dots$), alors la relation entre eux est :

$$\begin{aligned}\phi &= F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2 \\ \phi &= \{\sigma_k, \sigma_\omega, \beta, \gamma\}\end{aligned}\tag{3.114}$$

Les deux groupes de constantes suivantes seront utilisées :

groupe 1 (Wilcox) :

$$\begin{aligned}\sigma_{k_1} &= 0.5, & \sigma_{\omega_1} &= 0.5, & \beta_1 &= 0.075 \\ \beta^* &= 0.09, & \kappa &= 0.41, & \gamma_1 &= \beta_1/\beta^* - \sigma_{\omega_1}\kappa^2/\sqrt{\beta^*}\end{aligned}$$

groupe 2 (Jones-Launder) :

$$\begin{aligned}\sigma_{k_2} &= 1.0, & \sigma_{\omega_2} &= 0.856, & \beta_2 &= 0.0828 \\ \beta^* &= 0.09, & \kappa &= 0.41, & \gamma_2 &= \beta_2/\beta^* - \sigma_{\omega_2}\kappa^2/\sqrt{\beta^*}\end{aligned}$$

3.11.1.3.4 Le modèle $k - \omega$ SST (Menter)

L'une des principales différences entre le modèle de viscosité turbulente et un modèle complet des tensions de Reynolds, pour des applications aérodynamiques,

c'est que celui-ci prend compte de l'effet important du transport turbulent de la contrainte de cisaillement principale $\tau = -\overline{u'v'}$ de la forme.

$$\frac{D\tau}{Dt} = \frac{\partial\tau}{\partial t} + u_k \frac{\partial\tau}{\partial x_k} \quad (3.115)$$

L'importance de ce terme est apparue clairement par le succès du modèle Johnson-King (JK) [44]. Notez que la principale différence entre le modèle-JK et le modèle de Cebeci-Smith réside dans l'inclusion de ce terme dans le premier modèle, conduisant à des résultats nettement améliorées pour les écoulements avec gradient de pression adverses. Le modèle JK dispose d'une équation de transport pour la contrainte de cisaillement turbulente τ qui repose sur l'hypothèse de Richard Bradshaw que la contrainte de cisaillement dans une couche limite est proportionnelle à l'énergie cinétique turbulente, k :

$$\tau = \rho a_1 k \quad (3.116)$$

avec la constante $a_1 = 0,3$. D'autre part, dans les modèles de deux-équations, la contrainte de cisaillement est calculée à partir de :

$$\tau = \mu_t \Omega \quad (3.117)$$

avec $\Omega = \partial u / \partial y$. Pour les modèles classiques de deux équations, cette relation peut être réécrite pour donner :

$$\tau = \rho \sqrt{\frac{Production_k}{Dissipation_k}} a_1 k \quad (3.118)$$

Comme indiqué dans [45]. Dans les écoulements avec gradient de pression adverse, le rapport de production à la dissipation peut être nettement supérieur à un, comme on en trouve à partir des données expérimentales de la référence [46], et l'équation (3.118) conduit donc à une surestimation de τ . Afin de satisfaire l'équation (3.116) dans le cadre d'un modèle de viscosité turbulente, la viscosité turbulente devra être redéfinie comme suit :

$$\mu_t = \rho \frac{a_1 k}{\Omega} \quad (3.119)$$

Les raisons de cette modification peuvent aussi s'expliquer de la manière suivante : dans les modèles conventionnels de deux équations la contrainte de cisaillement turbulente répond instantanément aux variations du taux de déformation en cisaillement Ω , un peu comme un modèle algébrique de viscosité turbulente, alors que l'équation (3.119) garantit que τ ne change plus rapidement que $\rho a_1 k$. Alors l'équation (3.119) n'est pas souhaitable dans tout le champ d'écoulement, car elle mène à des viscosités turbulentes infiniment élevées aux points où Ω tend vers zéro. Il est à noter que, en écoulements avec gradient de pression adverses, la production est plus grande que la dissipation dans la plus grande partie de la couche (ou $\Omega > a_1 \omega$). L'expression suivante :

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega)} \quad (3.120)$$

garantit donc la sélection de l'équation (3.119) pour la plupart des régions de gradient de pression défavorables (région de sillage de la couche limite), tandis que l'équation (3.112) d'origine est utilisée pour le reste de la couche limite.

Afin de récupérer la formulation initiale de la viscosité turbulente pour les couches de cisaillement libres (où l'équation de Bradshaws (3.116) ne détient pas nécessairement)

la modification du modèle SST doit être limitée à des écoulements de couche limite. Cela peut être fait de la même manière que pour le modèle de BSL par application d'une fonction auxiliaire F_2 .

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)} \quad (3.121)$$

où a_1 est une constante issue de l'hypothèse de Bradshaw, Ω est la valeur absolue de la vorticité, et F_2 une fonction construite pour faire en sorte que cette correction sur la viscosité turbulente n'opère que dans les couches limites.

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (3.122)$$

et

$$\arg_2 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \nu}{\omega y^2}\right) \quad (3.123)$$

Les constantes du groupe 1 correspondant au modèle $k - \omega$ sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_{k_1} &= 0.85, & \sigma_{\omega_1} &= 0.65, & \beta_1 &= 0.075 & a_1 &= 0.31 \\ \beta^* &= 0.09, & \kappa &= 0.41, & \gamma_1 &= \beta_1 / \beta^* - \sigma_{\omega_1} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*} \end{aligned}$$

Menter propose d'introduire un limiteur sur la production d'énergie cinétique turbulente donné par :

$$\mathcal{P} = \min(\tau_{t_{ij}} S_{ij}, 20 \rho \beta^* \omega k)$$

Ce traitement permet d'éliminer les pics de viscosité dans l'écoulement. Il empêche aussi l'apparition de phénomènes non-physiques, comme l'augmentation de la visco-

sité dans les régions stagnantes, énergie cinétique élevée dans des régions de faibles vitesses, l'apparition de pressions négatives.

formulation constitue le modèle SST (Shear Stress Transport) standard de Menter.

3.11.1.3.4.1 *Modèle SST Menter avec terme Source de vorticité (SST-V)*

Cette forme du modèle SST est parfois utilisée, le terme source de vorticité est souvent presque identique à l'expression du terme source exacte pour des écoulements simples de couche limite, et l'utilisation du terme de vorticité peut éviter certaines difficultés numériques, parfois associées à l'utilisation du terme source exacte (valeurs excessives de l'énergie cinétique turbulente k , qui peuvent conduire à des valeurs négatives de pression), la référence pour ce modèle est [42].

Les équations sont les mêmes que pour la version "standard" (SST), sauf que le terme de production de k (dans les deux équations) est approximé par :

$$\mathcal{P} = \tau_{t_{ij}} S_{ij} = \mu_t \Omega^2 - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.124)$$

Pour les écoulements à faibles vitesses, le second terme du côté droit de cette équation est généralement faible par rapport au premier terme. (Pour un écoulement incompressible le second terme est identiquement nul.) Un limiteur de production est encore employé pour le terme de \mathcal{P} dans l'équation de k , comme décrit par (SST).

Une autre différence mineure de (SST) est que le limiteur de production est utilisé à la fois pour les équations de k et ω , et la constante est chang e de 20 à 10. En d'autres termes, \mathcal{P} dans les deux équations remplacé par :

$$\mathcal{P} = \min(\tau_{t_{ij}} S_{ij}, 10\rho\beta^*\omega k)$$

La définition de terme de diffusion croisée $CD_{k\omega}$ est légèrement modifiée, et donnée par :

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right)$$

Enfin, les définitions de deux des constantes sont légèrement modifiées :

$$\gamma_1 = 5/9 \quad \gamma_2 = 0.44$$

Le premier est supérieur à la constante de définition initiale d'environ 0,43 %, et le second est inférieur de moins de 0,08 %.

Notez que si cette forme de terme de production est utilisée avec ce modèle, il devrait être nommé (SST-V2003).

3.11.1.3.4.2 Modèle SST Menter avec décroissance contrôlée (SST-sust)

Cette forme du modèle SST élimine la décroissance non physique des variables de turbulence dans l'écoulement libre des problèmes aérodynamiques externes, grce à l'ajout de termes dans les équations de transports. La référence est [47] :

Les équations sont :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \beta^* \rho \omega_{amb} k_{amb} \quad (3.125)$$

et

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{t_{ij}} S_{ij} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

$$+ \beta \rho \omega_{amb}^2 \quad (3.126)$$

Tous les termes sont identiques au modèle standard (SST), sauf le dernier terme. Les conditions aux limites de champ lointain recommandées sont peu différentes :

$$\begin{aligned} k_{farfield} &= k_{amb} = 10^{-6} U_\infty^2 \\ \omega_{farfield} &= \omega_{amb} = \frac{5U_\infty}{L} \end{aligned}$$

Ici, L n'est pas la "longueur approximative du domaine de calcul," comme si c'était pour (SST), mais l'échelle de longueur définissant le problème particulier (généralement associé à une caractéristique ou à l'échelle du corps aérodynamique d'intérêt). Dans les équations, ω_{amb} et k_{amb} sont prises pour être ces valeurs limites en champ lointain. Les termes supplémentaires ont pour effet d'annuler exactement les termes de destruction dans l'écoulement libre lorsque les niveaux de turbulence sont égaux aux niveaux du milieu ambiant. à l'intérieur de la couche limite, ils sont généralement en ordres de grandeur plus petites que les termes de destruction des niveaux raisonnables de turbulence de l'écoulement libre (disant, $TU = 1\%$ ou moins, TU est l'intensité de turbulence), et ont donc peu d'effet. La condition de limite de champ lointain $k_{farfield} = k_{amb} = 10^{-6} U_\infty^2$ correspond à une zone d'écoulement libre de niveau $TU = 0,08165\%$.

3.11.1.3.4.3 Modèle SST Menter avec décroissance contrôlée et terme Source de vorticité (SST-Vsust)

Cette forme du modèle SST combine (SST-V) et (SST-sust). Le modèle est identique à (SST-sust), sauf que le terme \mathcal{P} (dans les deux équations) est donné par :

$$\mathcal{P} = \tau_{t_{ij}} S_{ij} = \mu_t \Omega^2 - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.127)$$

Pour les écoulements lents, le second terme sur le côté droit de cette équation est généralement faible par rapport au premier terme. (Pour les écoulements incompressibles le second terme est identiquement nul). Un limiteur de production est encore utilisé pour l'expression de \mathcal{P} dans l'équation de k , comme pour (SST).

3.11.1.3.4.4 Modèle SST Menter à deux-équations avec Correction de Rotation/courbure (SST-RC)

Cette forme de rotation/courbure du modèle SST est identique à la version (SST) "standard", sauf que le terme de production \mathcal{P} dans les deux équations est multiplié par une fonction f_{r1} , décrite ci-dessous [48].

Bien que la référence ci-dessus utilise la convention de dénomination "CC", ici nous utilisons "RC" (rotation et courbure) pour la compatibilité avec la convention de dénomination SA-RC (modèle de Spalart-Allmaras de correction de rotation/courbure) déjà établi.

La fonction empirique est donnée par :

$$f_{r1} = \max [\min (f_{rotation}, 1.25), 0.0]$$

et

$$f_{rotation} = (1 + c_{r1}) \frac{2r^*}{1+r^*} [1 - c_{r3} \tan^{-1} (c_{r2} \hat{r})] - c_{r1}$$

Toutes les variables et leurs dérivés sont définis par rapport au cadre de référence de calcul, qui peut tourner avec vitesse de rotation Ω^{rot} . Les fonctions restantes sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
r^* &= S/W \\
\hat{r} &= \frac{2W_{ik}S_{jk}}{WD^3} \left(\frac{DS_{ij}}{Dt} + (\varepsilon_{imn}S_{jn} + \varepsilon_{jmn}S_{in}) \Omega_m^{rot} \right) \\
S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
W_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 2\varepsilon_{mji} \Omega_m^{rot} \right] \\
S^2 &= 2S_{ij}S_{ij} \\
W^2 &= 2W_{ij}W_{ij} \\
D^2 &= \max(S^2, 0.09\omega^2) \\
c_{r1} &= 1.0 \quad c_{r2} = 2.0 \quad c_{r3} = 1.0
\end{aligned}$$

Le terme DS_{ij}/Dt représente les composantes de la dérivée lagrangienne du tenseur de taux de déformation. Le taux de rotation Ω^{rot} est différent de zéro que si le référentiel lui-même est en train de tourner.

Notez que si la correction RC est ajoutée à un modèle SST de base différente, la désignation du modèle devrait refléter. Par exemple, RC est ajoutée au modèle (SST-2003), le modèle corrigé devrait être nommé (SST-2003RC). Si RC est ajoutée au modèle (SST-V), le modèle corrigé devrait être nommé (SST-VRC).

3.11.1.3.4.5 Modèle SST Menter avec Correction simplifiée de Rotation/Courbure de Hellsten (SST-RC-Hellsten)

La forme de rotation/courbure simplifiée du modèle SST est identique à la version (SST) "standard", sauf que le terme de destruction dans l'équation ω est multiplié par la fonction F_4 , décrite ci-dessous [49] [50].

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j \omega - (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) &= \rho \frac{\gamma}{\mu_t} \tau_{t_{ij}} S_{ij} - F_4 \beta \rho \omega^2 \\
&+ 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (3.128)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \frac{1}{1+C_{RC}R_i} & C_{RC} &= 1.4 \\
 R_i &= \frac{W}{S} \left(\frac{W}{S} - 1 \right) \\
 S &= \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} & S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
 W &= \sqrt{2W_{ij}W_{ij}} & W_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}$$

Où R_i est le nombre de Richardson, la viscosité turbulente prend une forme légèrement différente par rapport à la formulation de Menter. Elle s'écrit :

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, |S| F_2 F_3)}$$

La fonction F_3 est conçue pour empêcher la limitation SST d'être activé dans la couche de rugosité dans les écoulements de parois rugueuses, c'est à dire la couche la plus proche de la paroi rugueuse. Cela est nécessaire car l'hypothèse de Bradshaw n'est pas valide là. La fonction F_3 est une extension du modèle original développé par Hellsten [51] en coopération avec Menter [52]. F_3 est donnée par :

$$F_3 = 1 - \tanh \left[\left(\frac{150\mu}{\rho\omega y^2} \right)^4 \right]$$

3.11.1.4 Modèle de fermeture au second ordre (SSG/LRR-RSM-w2012)

Ce modèle a été développé dans le cadre du projet européen FLOMANIA pour application à des problèmes d'écoulement aéronautiques. Il utilise un mélange de deux modèles différents pression-déformation (la partie LRR est basée sur une version antérieure du modèle WilcoxRSM-W2006 [53]). Les références principales de ce modèle sont celles de Cecora et al [54], Eisfeld et al [55], Eisfeld et al [56], Eisfeld [57]

Contrairement aux modèles de viscosité turbulente, le modèle RSM (Reynolds Stress Model) considère les termes du tenseur de Reynolds comme des inconnues. Le but de ce modèle est la suppression de l'hypothèse introduite par l'approximation de transport par gradient. Les expérimentations montrent que les corrélations ne suivent toujours pas un changement de signe avec les gradients qui les relient avec une viscosité de turbulence.

D'après l'équation de quantité de mouvement, une équation de transport pour le tenseur de Reynolds peut être dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{R}_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{R}_{ij}) = \bar{\rho} P_{ij} + \bar{\rho} \Pi_{ij} - \bar{\rho} \varepsilon_{ij} + \bar{\rho} D_{ij} + \bar{\rho} M_{ij} \quad (3.129)$$

avec

$$\bar{\rho} \tilde{R}_{ij} = -\tau_{ij} = \overline{\rho u_i'' u_j''}$$

Dans cette équation le terme production P_{ij} est exacte, alors que les autres termes sur le côté droit ont besoin de modélisation.

$$\bar{\rho} P_{ij} = \bar{\rho} \tilde{R}_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \bar{\rho} \tilde{R}_{jk} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \quad (3.130)$$

Dans le projet européen FLOMANIA [58] le modèle $SSG/LRR - \omega$ ([55],[56]) a été développé, transférant les idées de modèle de SST de Menter [59] dans le cadre des modèles des contraintes de Reynolds différentielles. En particulier, le terme de redistribution a été harmonisé entre le modèle de Launder-Reece-Rodi (LRR) [60] près des parois, en omettant les termes de ce que l'on appelle réflexion de paroi comme suggéré par Wilcox [61] et le modèle de Speziale-Sarkar-Gatski (SSG) [62] vers le champ lointain. Le terme de redistribution qui en résulte peut être écrit dans la notation unifiée suivante :

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}\Pi_{ij} = & - \left(C_1\bar{\rho}\varepsilon + \frac{1}{2}C_1^*\bar{\rho}P_{kk} \right) \tilde{b}_{ij} + C_2\bar{\rho}\varepsilon \left(\tilde{b}_{ik}\tilde{b}_{kj} - \frac{1}{3}\tilde{b}_{mn}\tilde{b}_{mn}\delta_{ij} \right) \\
& + \left(C_3 - C_3^*\sqrt{II} \right) \bar{\rho}\tilde{k}\tilde{S}_{ij}^* + C_4\bar{\rho}\tilde{k} \left(\tilde{b}_{ik}\tilde{S}_{jk}^* + \tilde{b}_{jk}\tilde{S}_{ik}^* - \frac{2}{3}\tilde{b}_{mn}\tilde{S}_{mn}^*\delta_{ij} \right) \\
& + C_5\bar{\rho}\tilde{k} \left(\tilde{b}_{ik}\tilde{W}_{jk} + \tilde{b}_{jk}\tilde{W}_{ik} \right)
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Qui est formellement identique au modèle SSG et où $\tilde{b}_{ij} = \tilde{R}_{ij}/(2\tilde{k}) - \delta_{ij}/3$ est le tenseur d'anisotropie avec son deuxième invariant $II = \tilde{b}_{ij}\tilde{b}_{ij}$. Notez que l'énergie cinétique spécifique de turbulence est équivalente à la moitié de la trace du tenseur de Reynolds spécifique, c'est-à-dire $\tilde{k} = \tilde{R}_{ii}/2$. En outre $\tilde{W}_{ij} = 1/2(\partial\tilde{u}_i/\partial x_j - \partial\tilde{u}_j/\partial x_i)$ est le tenseur de rotation moyenne.

avec

$$\tilde{S}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Enfin $\varepsilon = C_\mu\tilde{k}\omega$, où $C_\mu = 0.09$, et ω est fourni par l'équation de BSL Menter [59] donnée ci-dessous. Le terme de dissipation est modélisé par un tenseur isotrope selon Rotta [63].

$$\bar{\rho}\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}C_\mu\bar{\rho}\tilde{k}\omega\delta_{ij} \tag{3.132}$$

Un gradient simple ou modèles de diffusion de gradient généralisé peuvent être utilisés alternativement. Selon [64], on peut écrire

$$\bar{\rho}D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\bar{\mu}\delta_{kl} + \hat{D}\frac{\bar{\rho}}{\omega}\tilde{R}_{kl} \right) \frac{\partial\tilde{R}_{ij}}{\partial x_l} \right] \tag{3.133}$$

La contribution due aux fluctuations de masse, $\bar{\rho}M_{ij}$, est négligée, comme c'est une pratique courante pour les écoulements transsoniques.

Le modèle de turbulence est fermé par l'équation de ω du modèle BSL de Menter [59]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho}\tilde{u}_k\omega) = \alpha \frac{\omega}{\tilde{k}} \frac{\bar{\rho}P_{kk}}{2} - \beta \bar{\rho}\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\bar{\mu} + \sigma \frac{\bar{\rho}\tilde{k}}{\omega} \right) \frac{\partial\omega}{\partial x_k} \right) \\ + \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{\omega} \max \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial\omega}{\partial x_j}; 0 \right) \end{aligned} \quad (3.134)$$

La relation donnant l'assemblage entre les régions SSG et LRR est obtenu par :

$$\phi = F_1\phi^{(LRR)} + (1 - F_1)\phi^{(SSG)} \quad (3.135)$$

où la fonction de Menter est donnée par

$$F_1 = \tanh(\zeta^4) \quad (3.136)$$

avec

$$\zeta = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{\tilde{k}}}{C_\mu \omega d}; \frac{500\bar{\mu}}{\bar{\rho}\omega d^2} \right); \frac{4\sigma^{(SSG)}\bar{\rho}\tilde{k}}{\max \left\{ 2\sigma^{(SSG)} \frac{\bar{\rho}}{\omega} \frac{\partial\tilde{k}}{\partial x_k} \frac{\partial\omega}{\partial x_k}; 10^{-20} \right\}} \right] \quad (3.137)$$

Les valeurs de la limite d'ensemble des coefficients de fermeture pour le SSG et le LRR sont donnés dans le tableau 3.1 :

Conditions aux limites :

$$\tilde{R}_{ij, farfield} = \frac{2}{3} \tilde{k}_{farfield} \delta_{ij} \quad \omega_{farfield} = \frac{\bar{\rho}\tilde{k}_{farfield}}{\mu_{t, farfield}}$$

	C_1	C_1^*	C_2	C_3	C_3^*	C_4	C_5	\hat{D}	α	β	σ	σ_d
SSG	3.4	1.8	4.2	0.8	1.3	1.25	0.4	2.44	0.44	0.0828	0.856	1.712
LLR	3.6	0.0	0.0	0.8	0.0	2.0	1.11	0.5	0.5556	0.075	0.5	0.0

TABLE 3.1. Les constantes du modèle $SSG/LRR - \omega$

La valeur initiale est une fonction de l'intensité de la turbulence de champ lointain Tu , avec :

$$\tilde{k}_{farfield} = (3/2)(Tu)^2 U_{farfield}^2$$

Les valeurs typiques sont :

$$Tu = 0.001 (= 0.1\%) \quad \mu_{t, farfield} / \bar{\mu}_{farfield} = 0.1$$

pour les surfaces solides (parois) :

$$\tilde{R}_{ij, paroi} = 0 \quad \omega_{paroi} = 10 \frac{6\bar{\nu}}{\beta^{(LRR)} (\Delta d_1)^2}$$

où $(\Delta d_1)^2$ est la distance entre la paroi et le point le plus proche.

3.12 Fermeture de l'équation de l'énergie

L'application de la moyenne sur l'équation de l'énergie totale, de la même manière comme pour les équations de quantité de mouvement, fait apparaître de nouvelles corrélations à modéliser. D'où on a montré toutes les hypothèses de modélisation (voir équation (3.65)), il reste à modéliser la corrélation donnant le tenseur de Reynolds $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ et le flux de chaleur turbulent $\overline{\rho T'' u_j''}$. En réalité, la fermeture de telle équation de transport dépend essentiellement du choix de types de modélisations appropriées pour chaque type d'écoulement, et encore du choix de modèle et de l'ordre de fermeture.

3.12.1 fermeture par modèle à deux équations

L'approximation la plus courante pour la modélisation du flux de chaleur turbulent consiste à utiliser une sorte de loi de Fourier turbulente (hypothèse de transport par gradient généralisé), c'est-à-dire de modéliser le flux de chaleur turbulent $\overline{\rho T'' u_j''}$ en fonction des grandeurs connues du champ moyen. Le flux de chaleur turbulent est supposé proportionnel au gradient de température moyen, suivant la loi.

$$\overline{\rho T'' u_j''} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}$$

3.12.2 fermeture par modèle au second ordre

Pour une fermeture au second ordre, le flux de chaleur turbulent peut être approximer, par une équation qui le transporte, ou toujours par une approximation hybride, qui tienne compte du type gradient généralisé, dans ce dernier cas, les contraintes de Reynolds sont transportées avec des équations spécifiques. Cette approximation est donnée par :

$$\overline{\rho T'' u_j''} = -c_e \frac{k}{\varepsilon} \overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}$$

où $c_e = 0.11$.

En utilisant le modèle *SSG/LRR*– ω , pour la fermeture de l'équation de l'énergie, le flux de chaleur turbulent est obtenu par :

$$\overline{c_p \rho u_j'' T''} \approx -\frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}$$

où μ_t est obtenue par une "viscosité turbulente équivalente", $\mu_t = \bar{\rho} \tilde{k} / \omega$.

Les termes associés à la diffusion moléculaire et au transport turbulent dans l'équation de l'énergie sont modélisés comme la moitié de la trace du terme $\bar{\rho} D_{ij}$. Pour le modèle de diffusion de gradient généralisé, c'est :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\sigma_{ij} u_i''} - \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\bar{\rho} T_{ii} + \bar{\rho} D_{ii}^{(\nu)} \right)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\rho} T_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D \frac{\bar{\rho} \bar{k} \bar{R}_{kl}}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_l} \right) \\ \bar{\rho} D_{ij}^{(\nu)} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

Dans cette étude, on adopte une hypothèse de transport par gradient pour la fermeture de l'équation (3.65), l'équation d'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \tilde{u}_j \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \right) \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma \left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.138)$$

D'autres difficultés sont liées au type de modélisation choisi pour l'estimation du flux de chaleur turbulent. Nous avons vu que, généralement, ce terme est modélisé par une sorte de loi de transport par gradient, ce qui implique un nombre de Prandtl turbulent supposé constant $Pr_t \approx 0.9$. Parmi les inconvénients majeurs de l'utilisation du nombre de Prandtl turbulent constant, est qu'en réalité, cela dépend de l'écoulement considéré. Pour un écoulement libre Pr_t est très nettement différent de 0.9 dans la partie extérieure de l'écoulement. Par exemple, pour un jet turbulent Pr_t est de l'ordre d'environ 0.7 (supérieur à 0.7 plus qu'en s'éloigne de l'axe de l'écoulement, voir BENSAYAH et al [65] et [66]), pour une couche de mélange, il est plutôt de l'ordre de 0.5, et pour un écoulement libre cisailé homogène il est de l'ordre de 1.1. Il est donc clair que le calcul d'un écoulement turbulent compressible en configuration simple ou complexe, l'utilisation d'un nombre de Prandtl turbulent constant est certainement une solution approchée, qui n'est pas toujours satisfaisante

(et en effet les différences entre les mesures et calculs sur les flux de chaleur à la paroi sont importants en général).

3.13 Conditions de réalisabilité

Les modèles de turbulence à deux équations utilisent couramment une hypothèse de viscosité turbulente, les contraintes de Reynolds sont données par le modèle de Boussinesq, par :

$$\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{k} = -2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_u \delta_{ij} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (3.139)$$

Et c_μ est une constante généralement égale à 0.09. Lorsque, par exemple, le terme $\frac{k}{\varepsilon} S_{11}$ est supérieur à 5.56, ces équations prédisent une valeur négative physiquement impossible pour $\widetilde{u_1'' u_1''}$.

Ce problème de réalisabilité dans les modèles de turbulence de deux équations utilisant l'hypothèse de Boussinesq a été considéré par quelques auteurs indépendamment. Reynolds [67] a noté la possibilité d'obtention de contraintes normales négatives à partir du modèle, et propose une équation pour c_μ fonction du taux de déformation, limitant les tensions normales à zéro. Durbin [68] a rencontré le même problème lors de l'application d'un modèle de turbulence à trois équations ($k - \varepsilon - v^2$) sur une aile. Il a montré une forte croissance erronée de l'énergie cinétique à proximité du bord d'attaque d'une aile quand le coefficient c_μ est considéré constant (0.09). Il a obtenu des niveaux de turbulence réalistes quand il a utilisé une équation pour c_μ qui assure une réalisabilité des contraintes. Moore et Moore [69] ont montré des résultats similaires pour la cascade de compresseur 2D à l'aide du modèle de turbulence $q - \omega$ de Coakley, avec $c_\mu = 0.09$, ils ont montré des contraintes normales négatives dans toute la région du bord d'attaque, avec la plus grande contrainte normale négative d'environ $-4k$. La relation entre les contraintes normales négatives et la surproduction de turbulence

peut être considéré en tenant compte de l'écoulement incompressible bidimensionnel. Avec x et y sont les directions principales du taux de déformation, la production de la turbulence est donnée par :

$$\frac{P}{\varepsilon} = -\frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\overline{u'u'}}{k} - \frac{\overline{v'v'}}{k} \right) \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (3.140)$$

La production est proportionnelle à la différence des contraintes normales. Si $\overline{v'v'}/k = -4$, $\overline{u'u'}/k$ correspondante soit grande et positive, de l'ordre de 5.33 par exemple, de sorte que la différence est 9.33. Pour les contraintes avec réalisabilité, la différence est entre 2 et zéro.

Afin d'éviter ce problème, les auteurs ont introduit une limitation sur la viscosité de turbulence via le coefficient c_μ :

$$c_\mu = \min \left\{ c_{\mu,lim}, \frac{1}{A_0 + A_s (S^a + A_\Omega \Omega^a)^{1/a}} \right\} \quad (3.141)$$

	$c_{\mu,lim}$	A_0	A_s	A_Ω	a
Reynolds [67]	x	11.5	éq.(3.142)	0	1
Zhu and Shih [70]	x	8.25	1.5	0	1
Shih et al [71]	x	1.875	1.5	1.35	1
Shih et al [72]	x	4	éq.(3.142)	1	2
Durbin [68]	0.09	0	1.732	0	1
Moore [69]	$0.09f_u$	0	éq.(3.142)	0	1
Menter [59]	0.09	0	Δ	$\frac{3.23}{\Delta} F_2$	1
Menter mod	0.09	0	3.23	0	1

TABLE 3.2. Coefficients de l'équation de c_μ (éq.(3.141))

avec

$$A_s = \sqrt{3} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\sqrt{6} S_{ij} S_{jk} S_{ki} / (S_{mn} S_{mn})^{3/2} \right] \right) \quad (3.142)$$

Moore Moore [69] ont cité que les facteurs qui influent sur le choix des coefficients dans l'équation (3.141) sont :

1. Pour assurer la réalisabilité prendre $A_s \geq \sqrt{3}$
2. Si le modèle de bas-Reynolds est utilisé, A_0 doit être choisi de sorte que c_μ dans la région de loi logarithmique d'une couche limite ($S = \Omega = 3.3$) est supérieure ou égale à 0.09.
3. Si la formule est utilisée dans une formulation de nombre de Reynolds élevé, la formule doit donner des valeurs raisonnables pour $S = \Omega = 0$ ainsi que pour la région de loi logarithmique.

3.14 Corrections de compressibilité

Pour les écoulements de nombre de Mach élevé, la compressibilité affecte la turbulence par ce qu'on appelle la dissipation/dilatation ε_d , normalement négligée dans la modélisation des écoulements incompressibles. En négligeant la dissipation/dilatation ne parvient pas à prédire la diminution observée des taux de décroissance avec l'augmentation du nombre de Mach pour un mélange compressible et pour les couches de cisaillement libre [73]. Pour tenir compte de ces effets, les termes dilatation/dissipation doivent être inclus dans les équations de l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation. Le terme dissipation/dilatation est fonction du nombre de Mach turbulent, modélisation commune dans tous les modèles de corrections de compressibilité.

Morkovin [74] a mis l'hypothèse que les effets des fluctuations de densité par rapport à la densité moyenne dans une couche limite, sont négligeables dans une couche limite, tant que le nombre de Mach reste inférieur à 5.

En effet, le terme exact du taux de dissipation qui apparaît dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente est donné par :

$$\bar{\rho}\varepsilon = \bar{\rho}(\varepsilon_s + \varepsilon_d)$$

Le premier terme est appelé le taux de dissipation solénoïdal ε_s , et le second est le taux de dissipation de dilatation (ou compressible) ε_d . Le terme ε_s représente le taux de dissipation du modèle de turbulence incompressible. Il sera donné par l'équation de transport correspondant au modèle. En revanche, ε_d nécessite une modélisation et sera ajouté uniquement dans le terme de dissipation apparaissant dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente. Certains auteurs préconisent d'inclure cette dissipation compressible dans la définition de la viscosité turbulente, ce qui permet dans certains cas d'améliorer les résultats en réduisant la viscosité turbulente, mais cette approche ne repose sur aucune justification physique.

Les corrections les plus populaires sont dues à Sarkar et al. [75] et Zeman [76] proviennent principalement de couches de mélange compressibles. Cependant, puisqu'ils donnent un coefficient de frottement abaissé dans les couches limites turbulentes ([77],[78],[79]), aucune de ces corrections sont tout à fait satisfaisante à la fois pour les couches de mélange et les couches limites. Le modèle de Wilcox [61] résout ce dilemme en activant la correction de compressibilité tout d'abord, lorsqu'une valeur de seuil de nombre de Mach turbulent $M_{t0} = 0,25$ soit atteinte.

3.14.1 *Modèle de Zeman*

Zeman a observé à partir des résultats de simulation numérique directe, la présence des petits chocs dans une couche de mélange supersonique. Ces chocs dissipent rapidement l'énergie cinétique turbulente, et la structure des chocs est assimilée à une dissipation/dilatation. Il obtient par suite une relation entre la partie dilatation et la

partie sinusodale sous la forme :

$$\varepsilon_d = \xi^* F(M_t) \varepsilon_s$$

$$\frac{D\rho k}{Dt} = P_k - \beta_c^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{D\rho \omega}{Dt} = P_\omega - \beta_c \rho \omega^2 + 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$$

avec

$$\beta_c^* = \beta^* (1 + \xi^* F(M_t))$$

$$\beta_c = \beta - \beta^* \xi^* F(M_t)$$

et

$$F(M_t) = \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma + 1) \frac{(M_t - M_{t0})^2}{\Lambda^2}\right) \right] \mathcal{H}(M_t - M_{t0})$$

$$\xi^* = 3/4$$

avec

$$\begin{array}{c} \text{pour des écoulements cisailés libres} \\ \hline \Lambda = 0.6 \quad , \quad M_{t0} = 0.1 \sqrt{2/(\gamma + 1)} \\ \text{pour des couches limites} \\ \hline \Lambda = 0.66 \quad , \quad M_{t0} = 0.25 \sqrt{2/(\gamma + 1)} \end{array}$$

Où $\mathcal{H}(\cdot)$ est la fonction de Heaviside

3.14.2 Modèle de Sarkar

L'analyse d'une étude asymptotique des équations de Navier-Stokes dans le cas de turbulence homogène, et les résultats d'une simulation numérique directe de décroissance de turbulence isotrope compressible, conduit à Sarkar et al. de proposer un modèle donnant le taux de dissipation/dilatation par :

$$\varepsilon_d = M_t^2 \varepsilon_s$$

Sarkar a présenté ce modèle comme une correction globale pour les termes de dissipation/dilatation et de corrélation pression/dilatation.

avec

$$\begin{aligned} F(M_t) &= M_t^2 \\ \xi^* &= 1 \end{aligned}$$

Dans une deuxième correction Sarkar a regroupé la dilatation de pression $\overline{p''d''}$ et la dissipation compressible ε_d par :

$$\begin{aligned} \overline{p''d''}_{(k-\varepsilon)} &= -\alpha_2 P_k M_t^2 + \alpha_3 \rho \varepsilon_s M_t^2 \\ \overline{p''d''}_{(k-\omega)} &= -\alpha_2 P_k M_t^2 + \alpha_3 \rho \beta^* k \omega M_t^2 \end{aligned}$$

avec

$$M_t = \sqrt{2k}/a \quad , \quad \alpha_1 = 1.0 \quad , \quad \alpha_2 = 0.15 \quad , \quad \alpha_3 = 0.2$$

Dans ce modèle les équations de transport de k et de ω sont données par :

$$\frac{D\rho k}{Dt} = P_k - \beta^* \rho \omega k [1 + \alpha_1 M_t^2 (1 - F_1)] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + (1 - F_1) \overline{p''d''} \quad (3.143)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{D\rho \omega}{Dt} &= P_\omega + (1 - F_1) \beta^* \alpha_1 M_t^2 \rho \omega^2 - \beta \rho \omega^2 + 2\rho (1 - F_1) \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - (1 - F_1) \frac{\overline{p''d''}}{\nu_t} \end{aligned} \quad (3.144)$$

3.14.3 *Modèle de Wilcox*

Malheureusement, les corrections de compressibilité Sarkar/Zeman peuvent avoir un effet indésirable sur de nombreuses prédictions de la couche limite (ils ont tendance à produire des coefficients de frottement trop faibles à la paroi, et peuvent également avoir un impact négatif sur la taille de la zone de séparation prévue [79]). Wilcox ([53],[80]) a développé une modification qui réduit considérablement cet effet néfaste, et Brown [81] en outre tenté d'éliminer son impact potentiel dans les couches limites à grand nombre de Mach en la combinant avec la fonction de F_1 de Menter. Dans la correction de Wilcox, les coefficients sont modifiés comme suit :

$$F(M_t) = [M_t^2 - M_{t0}^2] \mathcal{H}(M_t - M_{t0})$$

$$\xi^* = 3/2, \quad M_{t0} = 0.25, \quad M_t = \sqrt{2k}/a$$

Les coefficients dans le cas de la combinaison de la fonction F_1 et le nombre de Mach turbulent, sont données par :

$$M_{t0} = 0.25, \quad M_t = \sqrt{2k(1 - F_1)}/a$$

3.15 Conclusion

Les modèles de turbulences de viscosité tourbillonnaire de deux équations de transport basés sur l'hypothèse de Boussinesq présentent les fermetures turbulentes les plus largement utilisées. Ces modèles sont généralement préférés en raison d'une facilité de mise en œuvre, le coût numérique très faible par rapport aux modèles très sophistiqués de LES (Large eddy simulation) et DNS (Direct Numerical Simulation), ce coût est raisonnable devant les modèles de second ordre, et surtout une grande robustesse, ce qui permet d'envisager la simulation des écoulements complexes sans modification ou étalonnage de certaines constantes empiriques. Cependant, comme Chassaing [82] le souligne, malgré de nombreuses modélisations récentes, ces approches souffrent

d'un certain nombre de limitations. Si l'équation de l'énergie cinétique turbulente est directement dérivée des équations de transports des contraintes turbulentes, le développement de l'équation de transport de la seconde variable turbulente (pseudo-dissipation ε pour une fermeture au second ordre du type $k - \varepsilon$, ou la dissipation spécifique ω pour une méthode de second ordre basée sur le modèle $k - \omega$, comme le modèle *SSG/LRR - ω* ...) est d'une grande difficulté et l'empirisme de l'expression présente une faiblesse de la méthode. En outre, dans la modélisation de premier ordre, l'emploi d'une relation linéaire ne permet pas une récupération fiable de certaines propriétés de la turbulence locales, comme l'anisotropie ou l'apparition de zones de turbulence de production négative d'énergie cinétique. Dans ce chapitre nous avons essayé, de faire une présentation non exhaustive, de différentes modélisations du tenseur de Reynolds et de flux de chaleur turbulent. Quelques modèles à viscosité turbulente utilisant une ou deux équations de transport et autres de second ordre ont été détaillés. Il est difficile de faire une hiérarchie qualitative des différents modèles. Les comparaisons sont établies pour des gammes d'écoulements spécifiques. Néanmoins, sur le plan pratique, il est actuellement raisonnable de penser que les modèles à deux équations présentent un bon compromis entre le résultat de prédiction et le coût de calcul. Le modèle de turbulence retenu pour cette étude est celui dénommé le modèle *SST - V* de Menter réalisable avec la prise en compte de l'effet de compressibilité et de courbure

RÉFÉRENCES

- [1] J. G. ST VENANT, C.R.A.S, 17(1843)
- [2] O. REYNOLDS, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 174, pp. 935-982(1883).
"On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion", Phy. Trans. Roy. Soc. London, 186, pp. 123-161(1884)
- [3] A. N. KOLMOGOROV, Equations of turbulent motion of incompressible fluid, Izv. Akad. Nauk SSSR seria fizichiska VI, 56(1942)
- [4] P.R. SPALART, Strategies of turbulence modelling and simulations. International Journal of Heat and Fluid Flow 21, pp. 252-263(2000)
- [5] HESSELBERG, Die Gesetze der ausgeglichenen atmosphärischen Bewegungen, Beitz-Physik forcien Atmosphäre, vol. 12, pp. 141-160(1925)
- [6] G. DEDEBANT et Ph. WEHRLE, sur les équations aux valeurs probables d'un fluide turbulent, C.R.A.S. T. 206, pp. 1790-1791(1938)
- [7] VAN MIEGHEN et L. DUFOUR, Thermodynamique de l'atmosphère, Mem. Inst. Roy. Meteor. de Belgique, 30(1948)
- [8] A. K. BLACKADAR, The transformation of energy by the large scale eddy stress in the atmosphere, Meteor. papers vol. 1, n^o 4, New York University(1950)
- [9] A. FAVRE, Equations statistiques des gaz turbulents, C.R.A.S 246, pp. 2576-2579, 2723-2725, pp. 2839-2842, 3216-3219 (1958)
- [10] A FAVRE, Equations des gaz turbulents compressibles, Journal de Mécanique, vol. 4, n^o 3(1965)

- [11] D. VONDRORMME, Modèle de turbulence à deux équations pour écoulement plan cisailé à masse volumique variable, Thèse de Docteur-Ingénieur Lille (1980)
- [12] P. CHASSAING et H. HA MINH, Physique et Mécanique des fluides réels, Cours de l'E.N.S.A.E (1982)
- [13] H. HA MINH, The impact of turbulence modelling on the numerical predictions of flows, Rome 6-10 July (1992)
- [14] D. VONDRORMME, Turbulence modeling for compressible flows and implementation in Navier-Stokes solvers, V.K.I lecture series, March (1991)
- [15] M.W. RUBESIN, A one-equation model of turbulence for use with compressible Navier-Stokes equations, NASA TM X-73-128, (1976)
- [16] J.R. VIEGAS, T.J. COAKLEY, Numerical investigation of turbulence models for shock separated boundary layer flows, AIAA paper, No. 77-44, (1977)
- [17] G.O. FRESKOS, Etude physique et simulation numérique des écoulements dans les entrées d'air supersonique, Thèse, Institut National Polytechnique de Toulouse, (1992)
- [18] J. BOUSSINESQ, Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section, volume I-II. Gauthier-Villars, (1897).
- [19] R.S. AMANO and P. GOEL, Investigation of third-order closure model of turbulence for the computation of incompressible flows in a channel with a backward facing step. J. Fluids Eng., 109 :424-428, (1987)
- [20] R. FRIEDRICH. Compressible turbulence. In Space Course, Munich, Octobre (1993)
- [21] K.HANJALIC, B.E. LAUNDER, A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. J.F.M (1972)
- [22] H. TENNEKES, J.L. LUMLEY, A First course in turbulence. M.I.T. Press. Cambridge, Massachussetts (1972)

- [23] D. VONDROMME, Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable. Thèse d'Etat de l'Université de Lille (1983)
- [24] W.P. JAUNES, B.E. LAUNDER, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. J. of Heat and Mass Transfer, Vol.15, PP.301-314 (1972)
- [25] J. BOUSSINESQ, Théorie des écoulements tourbillonnaires, CRAS T23, (1887)
- [26] T. VON KARMAN, Mechanische anlichkeit und turbulenz, NACA TM. 611 (1930)
- [27] P.S. KLÉBANOFF, Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, NACA TN. 3178 (1956)
- [28] R. MICHEL, C. QUEMARD R. DURANT, Application d'un schéma longueur de mélange à l'étude de couches limites d'équilibre, Note Technique ONERA. No1. 154 (1969)
- [29] E.R. VAN DRIEST, Turbulent boundary layer in compressible fluids. J. Aeronaut. Sci. vol 18, pp. 145-162 (1951)
- [30] T. CEBECI, A.M.O. SMITH S.G. MOSINSKI, Calculations of compressible adiabatic turbulent boundary layer, AIAA Journal. No 8, pp. 1974-1982 (1970)
- [31] I.E. ALBER, Similar solutions for a family of separated turbulent boundary-layers. AIAA Paper. 71-203 (1971)
- [32] B.S. BALDWIN H. LOMAX, Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA Paper. 78-0257 (1978)
- [33] D. C. WILCOX, Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Inc., 5354 Palm Drive, La *Cañada*, Calif., (1993).
- [34] P. R. SPALART and S. R. ALLMARAS, A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. AIAA Paper, 92-0439, (1992).

- [35] P. R. SPALART and S. R. ALLMARAS, A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. La Recherche Aérospatiale, no. 1, pp. 5-21 (1994)
- [36] B. S. BALDWIN and T. J. BARTH, A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows. NASA TM- 102847, (1990)
- [37] T. CEBECI, Analysis of Turbulent Flows, Elsevier, London, (2004).
- [38] W.P. JONES and B.E. LAUNDER, The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15, pp. 301-314 (1972).
- [39] B. E. LAUNDER and B. I. SHARMA, Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. Letters in Heat and Mass Transfer, vol. 1, no. 2, pp. 131-138 (1974).
- [40] D. C. WILCOX, "Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models", AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, pp. 1299-1310 (1988).
- [41] F. R. MENTER, Influence of Freestream Values on $k - \omega$ Turbulence Model Predictions. AIAA J. vol. 30, no. 6, pp. 1657-1659. June (1992).
- [42] F. R. MENTER, Improved two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flow, NASA Technical Memorandum 103975(1992).
- [43] F. R. MENTER, Zonal two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows, in 24th Fluid Dynamics Conference, AIAA (1993).
- [44] D. A. JOHNSON and L. S. KING, A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers, AIAA Journal, Vol. 23, pp. 1684-1692(1985).
- [45] F. R. MENTER, Performance of Popular Turbulence Models for Attached and Separated Adverse Pressure Gradient Flows, AIAA Journal, Vol. 30, pp. 2066-2072 (1992)

- [46] D. M. DRIVER, Reynolds Shear Stress Measurements in a Separated Boundary Layer, AIAA Paper 91-1787,(1991)
- [47] P. R. SPALART and C. L. RUMSEY, Effective Inflow Conditions for Turbulence Models in Aerodynamic Calculations, AIAA Journal, Vol. 45, No. 10, pp. 2544 - 2553 (2007).
- [48] P. E. SMIRNOV, F. R. MENTER, Sensitization of the SST Turbulence Model to Rotation and Curvature by Applying the Spalart-Shur Correction Term,” ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 131, 041010, October (2009).
- [49] A. HELLSTEN, Some Improvements in Menter’s k - ω SST Turbulence Model,” AIAA Paper 98-2554, June (1998).
- [50] M. MANI, J.A. LADD and W.W. BOWER, Rotation and Curvature Correction Assessment for One- and Two-Equation Turbulence Models, Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 2, pp. 268-273 (2004).
- [51] A. HELLSTEN and S. LAINE, Extension of the k - ω -SST Turbulence Model for Flows over Rough Surfaces, in AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, (New Orleans, LA, USA), (1997).
- [52] F. R. MENTER, Private communication
- [53] D. C. WILCOX, Turbulence Modeling for CFD, 3rd edition, DCW Industries, Inc., La *Cañada* CA, (2006).
- [54] R.D. CECORA, B. EISFELD, A. PROBST, S. CRIPPA and R. RADESPIEL, Differential Reynolds Stress Modeling for Aeronautics,” AIAA Paper 2012-0465, January (2012).
- [55] B. EISFELD, Implementation of Reynolds Stress Models into the DLR-FLOWer Code,” Institutsbericht, DLR-IB 124-2004/31, Report of the Institute of Aerodynamics and Flow Technology, Braunschweig, ISSN 1614-7790, (2004).
- [56] B. EISFELD and O. BRODERSEN, Advanced Turbulence Modelling and Stress Analysis for the DLR-F6 Configuration”, AIAA Paper 2005-4727, June (2005).

- [57] B. EISFELD, Computation of Complex Compressible Aerodynamic Flows with a Reynolds Stress Model, Conference on Boundary and Interior Layers, BAIL 2006, Gttingen, Germany, July 2006.
- [58] W. HAASE, B. AUPOIX, U. BUNGE, D. (Eds.) SCHWAMBORN, FLOMANIA, A European Initiative on Flow Physics Modelling, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (NNFM), vol. 92, Springer, (2006).
- [59] F.R. MENTER, Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications, AIAA Journal, 32, 1598-1605 (1994).
- [60] B.E. LAUNDER, G. J. REECE, W. RODI, Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, Journal of Fluid Mechanics, 68, 537-566 (1975).
- [61] D. C. WILCOX, Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, La Cañada, USA, 2nd ed.,(1998).
- [62] C. G. SPEZIALE, S. SARKAR, T.B. GATSKI, Modelling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach, Journal of Fluid Mechanics, 227, 245-272 (1991).
- [63] J. ROTTA, Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, Zeitschrift für Physik, 129, 547-572 (1951).
- [64] B. J. DALY, F. H. Harlow, Transport equations of turbulence, Physics of Fluids 13, 2634-2649 (1970).
- [65] K. BENSAYAH, A. BENCHATTI, M. AOUISSI, A. BOUNIF, Scalar turbulence model investigation with variable turbulent Prandtl number applies in hot axisymmetric turbulent round jet, Int J Heat Tech. 25 : 49-56 (2007).
- [66] M. AOUISSI, A. BOUNIF, K. BENSAYAH, Scalar turbulence model investigation with variable turbulent Prandtl number in heated jets and diffusion flames, Heat Mass Transfer, 44 :1065-1077, (2008)

- [67] W.C. REYNOLDS, Fundamentals of turbulence for turbulence modeling and simulation, AGARD Report No. 755, (1987)
- [68] P.A. DURBIN, Turbulence modeling for separated flow, NACA-CR-197352, pp. 97-105, (1994)
- [69] J.G. MOORE and J. MOORE, Controlling over-production of turbulence in two-equation models by limiting the anisotropy of the Reynolds normal stresses, ASME Paper FEDSM97-3356, (1997)
- [70] J.ZHU and T.H. SHIH, Calculations of turbulent separated flows, NASA TM 106154, (1993).
- [71] T.H. SHIH, J.ZHU and J.L. LUMLEY, A realizable Reynolds stress algebraic equation model, NASA TM 105993, (1994)
- [72] T.H. SHIH, W.W. LIOU, A. SHABBIR, Z. YANG and J. ZHU, A new $k-\varepsilon$ eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows-model development and validation, NASA TM 106721 (1994)
- [73] S. F. BIRCH and J. M. EGGERS, Free Turbulent Shear Flows, NASA SP-321, 1. 11-40, NASA Langley Research Center, Hampton, VA (1972).
- [74] M.V. MORKOVIN, Effect of compressibility on turbulent flows. *Mecanique de la Turbulence*, edited by A. Favre, p. 367, (1961).
- [75] S. SARKAR and L. BALAKRISHNAN, Application of a Reynolds-Stress Turbulence Model to the Compressible Shear Layer, 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, AIAA Paper No. 1990-1465 (1990).
- [76] O. ZEMAN, Dilataion Dissipation : The Concept and Application in Modeling Compressible Mixing Layers, *Phys. Fluids*, 2(2), pp. 178-188(1990).
- [77] T. J. COAKLEY and P. G. HUANG, Turbulence Modeling for High Speed Flows," 30th Aerospace Science Meeting and Exhibit, AIAA Paper No. 92-0436 (1992).

- [78] B. AUPOIX, E. DESMET and S. VIALA, Hypersonic Turbulent Boundary Layer Modelling, Symposium on Transitional and Turbulent Compressible Flows, ASME Fluids Engineering Conference (1993).
- [79] M. MACLEAN, T. WADHAMS, M. HOLDEN and H. JOHNSON, "A Computational Analysis of Ground Test Studies of the HIFiRE-1 Transition Experiment," AIAA Paper 2008-0641, January (2008)
- [80] D. C. WILCOX, Progress in Hypersonic Turbulence Modeling, AIAA Paper 91-1785, June (1991).
- [81] J. BROWN, Turbulence Model Validation for Hypersonic Flows, AIAA Paper 2002-3308, June (2002).
- [82] P. Chassaing, Turbulence En Mécanique Des Fluides - Analyse Du Phénomène En Vue De Sa Modélisation À L'usage De L'ingénieur. Cépaduès (2000).

Chapitre 4

MÉTHODE NUMÉRIQUE

” Déclarant sur son lit de mort qu’il poserait à Dieu deux questions : ”Pourquoi y-a-t’ il la relativité et pourquoi y-a-t’ il la turbulence”, et d’ajouter ”je suis persuadé qu’il pourra répondre à la première question” ”

[Werner Heisenberg, Prix Nobel de physique 1932]

4.1 Introduction

Des progrès importants ont été réalisés ces dernières années dans le domaine des méthodes numériques, nous présentons dans ce chapitre une méthode numérique qui n'a pas de telles limitations. La forme compressible des équations de Navier-Stokes décrit correctement tout écoulement aérodynamique à des conditions standards de pression et de température. Une étape très importante pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles a été développée avec succès par l'utilisation des méthodes implicites non itératives. Ces méthodes ont largement amélioré de façon très significative les performances des méthodes numériques par rapport aux schémas explicites qui sont fortement liées aux conditions explicites de stabilité. Leurs pas de temps sont fréquemment limités par des critères sévères de précision et de stabilité, et le nombre d'opérations par points et pas de temps, aussi bien que la complexité de programmation sont beaucoup plus importants que dans le cas des méthodes explicites. Les principales propriétés de la méthode implicite qui est présentée dans ce chapitre sont :

- Critère incondionnelle de stabilité
- Préservation de la forme conservative des équations quand elle existe
- Précision de second ordre en espace et en temps
- Absence d'inversion de matrice tridiagonale

L'histoire de cette méthode peut être tracée par le suivi de l'évolution du schéma de MAC CORMACK à travers les références ([1],[2],[3]). Dans la référence [1] un changement du schéma en deux étapes de Lax-Wendroff ([4],[5],[6]) permet pour la première fois la résolution des équations de Navier-Stokes pour une interaction onde de choc-couche limite laminaire. Cette méthode utilise les différences en alternance pour les dérivées avant et arrière spatiales en deux étapes. Dans la référence [2] un traitement implicite, n'est donné qu'aux termes visqueux, le traitement des termes convectifs a toujours été explicite. Cette méthode est également connue sous le nom de

la méthode hybride ou méthode caractéristique explicite-implicite. Une version de ce schéma est présentée dans la référence [3], où un traitement implicite est appliqué à tous les termes des équations de Navier-Stokes. Deux différentes parties peuvent être distinguées dans cette dernière version. La première partie du schéma explicite utilise des différences finies du type prédicteur correcteur [1]. Les équations aux différences finies ainsi générées approximent les équations d'évolution de l'écoulement avec une précision du second ordre en espace et en temps mais souffrent de conditions explicites restrictives de la stabilité. La deuxième partie enlève les restrictions de stabilité, en transformant les équations de la première partie numériquement dans une forme implicite. Les équations matricielles qui en résultent, qui doit ensuite être résolues sont bidiagonale supérieures ou inférieures, et peuvent être résolues beaucoup plus facilement que les équations matricielles tridiagonale qui apparaissent dans les méthodes existantes implicites [7],[8].

De point de vue général, la dynamique d'un fluide peut être décrite par des lois de conservation de trois quantités : la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale. La forme de ces lois de conservation établit, pour chaque quantité considérée, un équilibre entre le taux d'accumulation, les échanges surfaciques et la production de cette quantité. Pour un écoulement bidimensionnel, les sources de chaleur et les forces de volumes d'action à distance sont négligées, la forme instationnaire des équations compressible de Navier-Stokes est :

– **Conservation de la masse**

La conservation de la masse se traduit par l'équation dite "de continuité" obtenue en supposant qu'en absence de source de fluide, la masse du fluide contenue dans un volume donné se conserve au cours de son mouvement. Cette loi de conservation s'exprime comme suit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (4.1)$$

– **Conservation de la quantité de mouvement**

Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent comme suit :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik}) \quad (4.2)$$

– **Conservation de l'énergie totale**

La conservation de l'énergie totale définie comme la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique par :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (E) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (E) = \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i \tau_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (Q_k) \quad (4.3)$$

Dans lesquelles ρ est la masse volumique, u_k la composante de la vitesse selon x_k , E est l'énergie totale du fluide par unité de masse. La somme des forces de contact est définie par :

$$\tau_{ik} = -P\delta_{ik} + \mu S_{ik} \quad (4.4)$$

$$S_{ik} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \quad (4.5)$$

avec μ la viscosité dynamique du fluide et λ le coefficient de Lamé relié à la viscosité via l'hypothèse de Stokes $2\mu + 3\lambda = 0$.

la terme Q_k représente le flux de chaleur :

$$Q_k = -\lambda_c \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (4.6)$$

λ_c est le coefficient de conductivité calorifique.

L'existence des ondes de choc est une caractéristique unique des écoulements supersoniques. A des grand nombre de Reynolds (tend vers l'infini), des discontinuités figurent dans les solutions des équations d'évolution de l'écoulement sous forme des ondes de choc.

Il existe notamment deux approches différentes pour la résolution numérique de telles discontinuités.

1. La technique du "Shock-fitting" ou "Shock-patching" (ou ajustement à l'onde de choc) consiste à traiter l'onde de choc comme une discontinuité, et en travers de laquelle les relations de Rankine-Hugoniot sont satisfaites. Cette technique a présenté un succès sur un maillage fixe (eulérien) pour un écoulement monodimensionnel réalisé par RICHTMYER [9], tandis qu'elle semble impossible dans le cas de deux dimensions sur un maillage fixe [10]. Elle a permis de meilleurs résultats dans le cas d'un maillage flottant [11] ou après transformation du maillage pour un écoulement non-visqueux [12] et pour un écoulement visqueux [13]. Cette technique semble très utile pour l'amélioration de la précision de chocs relativement simples détachés, elle ne permet pas la prédiction des réseaux complexes de chocs (interaction onde de choc-couche limite), ou la position d'un choc mobile (désamorçage d'une tuyère).
2. La deuxième technique dite "Shock capturing" est plus attrayante, elle n'a pas besoin d'un traitement spécifique d'une onde de choc, cette technique tend plutôt à étaler la discontinuité sur plusieurs points de maillage, au lieu de la maintenir comme une vraie discontinuité. Si les équations (4.1) à (4.3) sont réarrangées de telle sorte que les variables conservatives (ρ , ρu , ρv et ρE) soient des variables indépendantes, l'utilisation des méthodes conservatives (différences finies, volumes finis) assurent une stricte conservation de la masse, la quantité de mouvement et de l'énergie. Les relations de Rankine-Hugoniot ne tiennent pas compte des détails internes à la structure de l'onde de choc [14], car elles sont basées seulement sur le principe global de conservation. Le résultat est que, toutes méthodes de différence finies ou volumes finis consistantes et conservatives appliquées aux équations de conservation satisfont les relations de Rankine-Hugoniot et donc produisent les conditions correctes de saut à travers une onde de choc. Il est à noter toutefois que l'utilisation de la forme conservative des équations différentielles ne garantit pas strictement une telle conservation. Pour les variable (ρ , u , v et E), le choc provoque des discontinuités dans la solution,

tandis que la solution est continue en utilisant des variables conservatives, et qui sont légèrement discontinues en présence d'une onde de choc mobile ou oblique

Nous considérons un modèle à deux équations de transport ($k - \omega$), la forme instationnaire compressible des équations de conservations en deux dimensions peut s'écrire sous la forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{\partial F_v(U)}{\partial x} + \frac{\partial G_v(U)}{\partial y} + S_0(U) \quad (4.7)$$

où

$$U = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{e}_t \\ \bar{\rho}k \\ \bar{\rho}\omega \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Les vecteurs des flux eulérien et visqueux F et F_v sont donnés dans la direction x par :

$$F = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + p^* \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ (\bar{\rho}\tilde{e}_t + p^*)\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}k \\ \bar{\rho}\tilde{u}\omega \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{xx}\tilde{u} + \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{v} - \tilde{q}_x \\ \tilde{\sigma}_{kx} \\ \tilde{\sigma}_{\omega x} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Les vecteurs des flux eulérien et visqueux G et G_v sont donnés dans la direction y par :

$$G = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + p^* \\ (\bar{\rho}\tilde{e}_t + p^*)\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}k \\ \bar{\rho}\tilde{v}\omega \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{yy} \\ \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{u} + \tilde{\sigma}_{yy}\tilde{v} - \tilde{q}_y \\ \tilde{\sigma}_{ky} \\ \tilde{\sigma}_{\omega y} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Le vecteur des termes sources S_0 est donné par :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_k \\ H_\omega \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) & \tilde{\sigma}_{yy} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \\ \tilde{\sigma}_{xy} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) & p^* &= \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho}k \\ \tilde{q}_x &= -\gamma \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{e}_{in}}{\partial x} & \tilde{q}_y &= -\gamma \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{e}_{in}}{\partial y} \\ \tilde{\sigma}_{kx} &= \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} & \tilde{\sigma}_{ky} &= \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} \\ \tilde{\sigma}_{\omega x} &= \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega} \right) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} & \tilde{\sigma}_{\omega y} &= \left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega} \right) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un modèle de turbulence ($k - \epsilon$) à bas-Reynolds, les termes sources sont donnés par :

$$H_k = P - \bar{\rho}\epsilon^* - 2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$$

$$H_\epsilon = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P - c_{\epsilon 2} \bar{\rho} f_\epsilon \frac{\epsilon \epsilon^*}{k} + 2\nu \mu_t \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)^2$$

4.2 Méthode des volumes finis

La discrétisation des problèmes de la mécanique des fluides peut être entamée avec diverses méthodes numériques que nous choisissons la façon la plus appropriée en fonction de critères multiples tels que le coût, la complexité de la programmation informatique, la souplesse nécessaire pour être en mesure d'aborder des géométries complexes et de l'adéquation de la formulation discrète pour des formulations mathématiques. La résolution numérique du système des équations aux dérivées partielles peut être effectuée en utilisant différentes techniques numériques : méthodes spectrales, éléments finis, différences finies et volumes finis. L'approche adoptée dans cette étude pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans le cas des écoulements turbulents est de type volumes finis. L'équation aux dérivées partielles est résolue d'une manière approximative à l'aide d'un maillage volumes finis composé de petits volumes qui sont disjoints (3D, 2D surfaces, les segments en 1D) qui, ensemble, forment le domaine d'études. Le volume fini peut être construit autour d'un point de maillage de départ, mais ce n'est pas une nécessité. Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques. Les équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux de divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont converties en des intégrales de surface et les termes de flux sont ensuite évalués au niveau des interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de

flux numérique pour construire une approximation des flux au niveau des interfaces. Le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution des lois de conservation. Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non-structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

Dans le cas d'une intégration sur un volume élémentaire \mathcal{V} de frontière \mathcal{S} , les différentes variables seront évaluées au centre des volumes de contrôle et considérées constantes durant l'incrément en temps que constitue une itération, d'où :

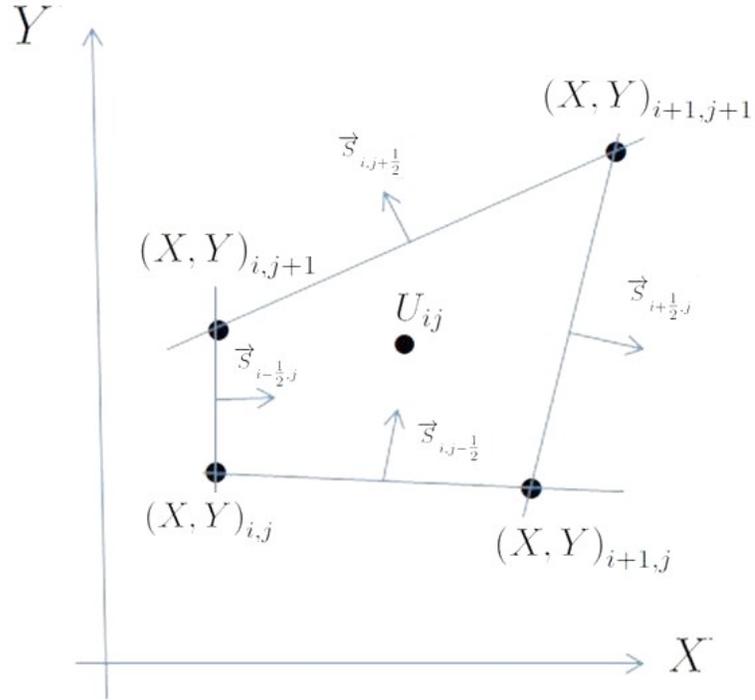
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{d\mathcal{S}} - \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{S}} \vec{F}_\nu \cdot \vec{d\mathcal{S}} = S_0 \quad (4.12)$$

où $\vec{d\mathcal{S}}$ est le vecteur de surface, $\vec{F} = F \vec{i}_x + G \vec{i}_y$, $\vec{F}_\nu = F_\nu \vec{i}_x + G_\nu \vec{i}_y$. avec (\vec{i}_x, \vec{i}_y) est une base du repère cartésien (x, y) . le volume \mathcal{V}_{ij} représente un quadrilatère centré aux indices (i, j) (voir figure 4.1).

En appliquant le théorème de la divergence, l'équation se ramène alors à effectuer un bilan de flux de surfaces entrant et sortant du volume élémentaire de contrôle. Les vecteurs de surface sur chaque côté du volume de contrôle sont donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}} &= (y_{i,j+1} - y_{i,j}) \vec{i}_x - (x_{i,j+1} - x_{i,j}) \vec{i}_y = (\vec{\mathcal{S}}_{ix} \vec{i}_x + \vec{\mathcal{S}}_{iy} \vec{i}_y)_{i-\frac{1}{2}} \\ \vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}} &= (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}) \vec{i}_x - (x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}) \vec{i}_y = (\vec{\mathcal{S}}_{ix} \vec{i}_x + \vec{\mathcal{S}}_{iy} \vec{i}_y)_{i+\frac{1}{2}} \\ \vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}} &= -(y_{i+1,j} - y_{i,j}) \vec{i}_x + (x_{i+1,j} - x_{i,j}) \vec{i}_y = (\vec{\mathcal{S}}_{jx} \vec{i}_x + \vec{\mathcal{S}}_{jy} \vec{i}_y)_{j-\frac{1}{2}} \\ \vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}} &= -(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}) \vec{i}_x + (x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}) \vec{i}_y = (\vec{\mathcal{S}}_{jx} \vec{i}_x + \vec{\mathcal{S}}_{jy} \vec{i}_y)_{j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

L'équation (4.12) s'écrit alors :

FIGURE 4.1. *Volume d'intégration*

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + a + b = c + d + e \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left\{ (Fm_x + Gm_y)_{i+\frac{1}{2},j} |\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}| - (Fm_x + Gm_y)_{i-\frac{1}{2},j} |\vec{S}_{i-\frac{1}{2}}| \right\} \\ b = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left\{ (Fn_x + Gn_y)_{i,j+\frac{1}{2}} |\vec{S}_{j+\frac{1}{2}}| - (Fn_x + Gn_y)_{i,j-\frac{1}{2}} |\vec{S}_{j-\frac{1}{2}}| \right\} \\ c = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left\{ (F_\nu m_x + G_\nu m_y)_{i+\frac{1}{2},j} |\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}| - (F_\nu m_x + G_\nu m_y)_{i-\frac{1}{2},j} |\vec{S}_{i-\frac{1}{2}}| \right\} \\ d = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left\{ (F_\nu n_x + G_\nu n_y)_{i,j+\frac{1}{2}} |\vec{S}_{j+\frac{1}{2}}| - (F_\nu n_x + G_\nu n_y)_{i,j-\frac{1}{2}} |\vec{S}_{j-\frac{1}{2}}| \right\} \\ e = S_{0i,j} \end{cases}$$

On notera que U_{ij} et S_{0j} représentent les valeurs moyennes dans le volume de contrôle élémentaire \mathcal{V}_{ij} , $\vec{F}_{i+\frac{1}{2}}$ est le flux moyen à travers la surface

$$\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$$

Dans le volume de contrôle élémentaire \mathcal{V}_{ij} les composantes des vecteurs de surface¹ unitaire sont données par :

$$\begin{aligned} (m_x)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{|\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}|} \vec{i}_x \vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}} & (n_x)_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|} \vec{i}_x \vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}} \\ (m_y)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{|\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}|} \vec{i}_y \vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}} & (n_y)_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|} \vec{i}_y \vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

avec

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 1 \quad , \quad \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1$$

L'équation (4.7) sans termes sources ($S_0 = 0$) est la forme stricte des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles utilisées pour le calcul des écoulements turbulents ou laminaire. Un modèle avec un système complet ne peut plus se mettre sous une forme strictement conservative (équation 4.7) à cause de la présence des termes sources dans les équations du modèle de turbulence. En fait, le contenu de la matrice des termes sources a une nature plus complexe que celui de F ou G , en particulier la linéarité de S_0 en fonction de U n'est plus assurée et le jacobien $\frac{\partial S_0}{\partial U}$ n'est pas aisé à déterminer d'où en considère que les termes sources du modèle de turbulence sont linéairement dépendants uniquement de leurs variables conservatives correspondantes .

Tous ce que nous avons exposé jusqu'ici, est une méthode valable et destinée à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles sur un maillage rectangulaire. Ceci peut être appliqué pour une couche limite sur plaque plane, ou encore pour le calcul d'interaction onde de choc-couche limite pour des tuyères à section droite constante.

Le flux eulérien passant par la surface $\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}$ est exprimé par :

$$F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} = (Fm_x + Gm_y)_{i+\frac{1}{2},j} \quad (4.14)$$

1. Vecteur surface est l'aire de la surface multiplié par le vecteur unitaire normal à la surface

De même à travers les autres surfaces :

$$\begin{aligned}
 F_{\xi i-\frac{1}{2},j} &= (Fm_x + Gm_y)_{i-\frac{1}{2},j} \\
 G_{\eta i,j+\frac{1}{2}} &= (Fn_x + Gn_y)_{i,j+\frac{1}{2}} \\
 G_{\eta i,j-\frac{1}{2}} &= (Fn_x + Gn_y)_{i,j-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

les flux visqueux à travers les surfaces $\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}$ et $\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 G_{\nu\eta i,j+\frac{1}{2}} &= (F_\nu n_x + G_\nu n_y)_{i,j+\frac{1}{2}} \\
 F_{\nu\xi i+\frac{1}{2},j} &= (F_\nu m_x + G_\nu m_y)_{i+\frac{1}{2},j}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

L'injection de ces expressions dans (4.13) donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} &\left(F_{\xi i+\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - F_{\xi i-\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \right) \\
 &+ \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\eta i,j+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - G_{\eta i,j-\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \right) \\
 &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{\nu\xi i+\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - F_{\nu\xi i-\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \right) \\
 &+ \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\nu\eta i,j+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - G_{\nu\eta i,j-\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \right) \\
 &\quad + S_{0i,j}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.3 Linéarisation en temps

les flux sont évalués à l'instant $t = n+1$ (méthode implicite), l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta t \left(\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} & \left(F_{\xi i+\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - F_{\xi i-\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \right)^{n+1} \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\eta i,j+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - G_{\eta i,j-\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \right)^{n+1} \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{\nu \xi i+\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - F_{\nu \xi i-\frac{1}{2},j} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \right)^{n+1} \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\nu \eta i,j+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - G_{\nu \eta i,j-\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \right)^{n+1} \\
& + \Delta t S_{0i,j}^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

pour la suite, nous posons :

$$\Delta t \left(\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} \right)^n = \delta U_{i,j}^n \tag{4.19}$$

la linéarisation en temps des flux eulériens est faite de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_{\xi}^{n+1} = F_{\xi}^n + \left(\frac{\partial F_{\xi}}{\partial U} \right)^n \delta U^n = F_{\xi}^n + A_{\xi}^n \delta U^n \\ G_{\eta}^{n+1} = G_{\eta}^n + \left(\frac{\partial G_{\eta}}{\partial U} \right)^n \delta U^n = G_{\eta}^n + B_{\eta}^n \delta U^n \end{cases} \tag{4.20}$$

où A_{ξ} et B_{η} représentent respectivement les matrices jacobiennes de F_{ξ} G_{η} par rapport à U

la matrice A_{ξ} est diagonalisée grâce à la marice S_X et faite d'une transformation de variables conservatives δU en variables non-conservatives δV puis une transformation de ces dernières en variables caractéristiques δU_{car} telle que :

$$A_{\xi} = S_X^{-1} \Lambda_{\xi} S_X \tag{4.21}$$

la matrice S_X se décompose de la manière suivante :

$$S_X = S_{\xi} R_{\xi} N_c \tag{4.22}$$

N_c est la matrice de passage entre les variables non-conservatives et conservatives, obtenue à partir de V et de U :

$$V = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ p^* \\ k \\ \omega \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{e}_t \\ \bar{\rho}k \\ \bar{\rho}\omega \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

a) passage de δV en δU :

$$\begin{pmatrix} \delta(\bar{\rho}) \\ \delta(\bar{\rho}\tilde{u}) \\ \delta(\bar{\rho}\tilde{v}) \\ \delta(\bar{\rho}\tilde{e}_t) \\ \delta(\bar{\rho}k) \\ \delta(\bar{\rho}\omega) \end{pmatrix} \xrightarrow{N_c} \begin{pmatrix} \delta(\bar{\rho}) \\ \delta(\tilde{u}) \\ \delta(\tilde{v}) \\ \delta(p^*) \\ \delta(k) \\ \delta(\omega) \end{pmatrix}$$

où

$$\delta V = N_c \delta U \quad (4.24)$$

l'expression de N_c est donnée par :

$$N_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}} & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{v}}{\bar{\rho}} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta & -\beta\tilde{u} & -\beta\tilde{v} & \beta & -\Gamma\beta & 0 \\ -\frac{k}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

où

$$\begin{cases} \beta = \gamma - 1 \\ \alpha = \frac{1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \\ \Gamma = 1 - \frac{2}{3\beta} \end{cases}$$

R_ξ est la matrice de passage du repère (x, y) au repère (ξ, η) lié à la surface $\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}$
ou $\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}$

b) passage de δV en δU_{car} :

$$\begin{pmatrix} \delta(\bar{\rho}) \\ \delta(\tilde{u}) \\ \delta(\tilde{v}) \\ \delta(p^*) \\ \delta(k) \\ \delta(\omega) \end{pmatrix} \xrightarrow{S_\xi} \begin{pmatrix} \delta(\bar{\rho}) - \frac{1}{c^{*2}} \delta(p^*) \\ \delta(p^*) + \bar{\rho}c^* \delta(\tilde{u}) \\ \delta(\tilde{v}) \\ \delta(p^*) - \bar{\rho}c^* \delta(\tilde{u}) \\ \delta(k) \\ \delta(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\delta U_{car} = S_\xi \delta V \quad (4.26)$$

où la matrice S_ξ est définie par :

$$S_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}c^* & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\rho}c^* & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) passage de δU en δU_{car} :

le passage des variables conservatives en variables caractéristiques se fera par la matrice S_X et après multiplication par la matrice de rotation R_ξ

$$S_X = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha\beta}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{u}}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{v}}{c^{*2}} & -\frac{\beta}{c^{*2}} & \frac{\Gamma\beta}{c^{*2}} & 0 \\ \bar{\rho}c^* \left(-\frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}}m_x - \frac{\tilde{v}}{\bar{\rho}}m_y \right) + \alpha\beta & c^*m_x - \beta\tilde{u} & c^*m_y - \beta\tilde{v} & \beta & -\Gamma\beta & 0 \\ \frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}}m_y - \frac{\tilde{v}}{\bar{\rho}}m_x & -\frac{1}{\bar{\rho}}m_y & \frac{1}{\bar{\rho}}m_x & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\rho}c^* \left(-\frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}}m_x - \frac{\tilde{v}}{\bar{\rho}}m_y \right) + \alpha\beta & -c^*m_x - \beta\tilde{u} & -c^*m_y - \beta\tilde{v} & \beta & -\Gamma\beta & 0 \\ \frac{-k}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ \frac{-\omega}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \end{pmatrix}$$

avec

$$R_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_x & m_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_y & m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où c^* est la vitesse du son turbulente donnée par :

$$c^{*2} = \frac{\gamma p^*}{\bar{\rho}} = \frac{\gamma (\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{\rho}k)}{\bar{\rho}} \quad (4.27)$$

la matrice inverse de S_X soit S_X^{-1} est obtenue soit par l'inversion de la matrice S_X ou par :

$$S_X^{-1} = R_\xi^{-1} N_c^{-1} S_\xi^{-1}$$

d'où

$$S_X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ \tilde{u}m_x - \tilde{v}m_y & \frac{1}{2c^{*2}}(\tilde{u}m_x - \tilde{v}m_y) + \frac{m_x}{2c^*} & -\bar{\rho}m_y & \frac{\tilde{u}m_x - \tilde{v}m_y}{2c^{*2}} - \frac{m_x}{2c^*} & 0 & 0 \\ \tilde{u}m_y + \tilde{v}m_x & \frac{1}{2c^{*2}}(\tilde{u}m_y + \tilde{v}m_x) + \frac{m_y}{2c^*} & \bar{\rho}m_x & \frac{\tilde{u}m_y + \tilde{v}m_x}{2c^{*2}} - \frac{m_y}{2c^*} & 0 & 0 \\ \alpha + \Gamma k & \frac{\alpha + \Gamma k}{2c^{*2}} + \frac{\tilde{u}}{2c^*} + \frac{1}{2\beta} & \bar{\rho}\tilde{v} & \frac{\alpha + \Gamma k}{2c^{*2}} - \frac{\tilde{u}}{2c^*} + \frac{1}{2\beta} & \bar{\rho}\Gamma & 0 \\ k & \frac{k}{2c^{*2}} & 0 & \frac{k}{2c^{*2}} & \bar{\rho} & 0 \\ \omega & \frac{\omega}{2c^{*2}} & 0 & \frac{\omega}{2c^{*2}} & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}$$

avec

$$R_\xi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_x & -m_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N_c^{-1} est la matrice de passage de variables non-conservatives en variables conservative telle que :

$$\delta U = N_c^{-1} \delta V \quad (4.28)$$

$$N_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{v} & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha + \Gamma k & \bar{\rho}\tilde{u} & \bar{\rho}\tilde{v} & \frac{1}{\beta} & \bar{\rho}\Gamma & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}$$

et encore S_ξ^{-1} est donnée par :

$$S_{\xi}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho c^*} & 0 & -\frac{1}{2\rho c^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale Λ_{ξ} recherchée est :

$$\Lambda_{\xi} = \begin{pmatrix} \Lambda_{\xi 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\xi 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\xi 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 6} \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{\xi 1} = \tilde{u}m_x + \tilde{v}m_y \\ \Lambda_{\xi 2} = \tilde{u}m_x + \tilde{v}m_y + c^* \\ \Lambda_{\xi 3} = \tilde{u}m_x + \tilde{v}m_y \\ \Lambda_{\xi 4} = \tilde{u}m_x + \tilde{v}m_y - c^* \\ \Lambda_{\xi 5} = \tilde{u}m_x + \tilde{v}m_y \\ \Lambda_{\xi 6} = \tilde{u}m_x + \tilde{v}m_y \end{array} \right. \quad (4.29)$$

on peut suivre une démarche analogue pour diagonaliser la matrice jacobienne B_{η} , qui fera apparaître les matrices suivante :

$$B_{\eta} = S_Y^{-1} \Lambda_{\eta} S_Y \quad (4.30)$$

la matrice S_Y est donnée par :

$$S_Y = S_\eta R_\eta N_c \quad (4.31)$$

$$S_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}c^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\rho}c^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$R_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & -n_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$S_Y = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha\beta}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{u}}{c^{*2}} & \frac{\beta\tilde{v}}{c^{*2}} & -\frac{\beta}{c^{*2}} & \frac{\Gamma\beta}{c^{*2}} & 0 \\ -\frac{1}{\bar{\rho}}(\tilde{u}n_y - \tilde{v}n_x) & \frac{n_y}{\bar{\rho}} & -\frac{n_x}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ -c^*(\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y) + \alpha\beta & c^*n_x - \beta\tilde{u} & c^*n_y - \beta\tilde{v} & \beta & -\Gamma\beta & 0 \\ c^*(\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y) + \alpha\beta & -c^*n_x - \beta\tilde{u} & -c^*n_y - \beta\tilde{v} & \beta & -\Gamma\beta & 0 \\ -\frac{k}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \end{pmatrix}$$

la matrice inverse S_Y^{-1} est donnée par :

$$S_Y^{-1} = N_c^{-1} R_\eta^{-1} S_\eta^{-1} \quad (4.33)$$

avec

$$R_\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$S_\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\rho}c^*} & -\frac{1}{2\bar{\rho}c^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2c^{*2}} \\ \tilde{u} & \bar{\rho}n_y & \frac{1}{2c^{*2}}(\tilde{u} + c^*n_x) \\ \tilde{v} & -\bar{\rho}n_x & \frac{1}{2c^{*2}}(\tilde{v} + c^*n_y) \\ \alpha + \Gamma k & \bar{\rho}(\tilde{u}n_y - \tilde{v}n_x) & \frac{\alpha + \Gamma k}{2c^{*2}} + \frac{\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y}{2c^*} + \frac{1}{2\beta} \\ k & 0 & \frac{k}{2c^{*2}} \\ \omega & 0 & \frac{\omega}{2c^{*2}} \\ & & \frac{1}{2c^{*2}} & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2c^{*2}}(\tilde{u} - c^*n_x) & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2c^{*2}}(\tilde{v} - c^*n_y) & 0 & 0 \\ & & \frac{\alpha + \Gamma k}{2c^{*2}} - \frac{\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y}{2c^*} + \frac{1}{2\beta} & \bar{\rho}\Gamma & 0 \\ & & \frac{k}{2c^{*2}} & \bar{\rho} & 0 \\ & & \frac{\omega}{2c^{*2}} & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale Λ_η a pour valeur :

$$\Lambda_\eta = \begin{pmatrix} \Lambda_{\eta 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\eta 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\eta 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 6} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_{\eta 1} &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y \\ \Lambda_{\eta 2} &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y \\ \Lambda_{\eta 3} &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + c^* \\ \Lambda_{\eta 4} &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - c^* \\ \Lambda_{\eta 5} &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y \\ \Lambda_{\eta 6} &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y \end{aligned} \tag{4.34}$$

Enfin, comme F_ξ et G_η sont homogène par rapport à U [15], on peut écrire :

$$\begin{aligned} F_\xi &= A_\xi U \\ G_\eta &= B_\eta U \end{aligned} \tag{4.35}$$

4.4 Fractionnement des flux eulériens

4.4.1 Fractionnement des flux eulériens au premier ordre

En tenant compte de la direction de propagation des informations, les flux eulériens sont décomposés en une partie dépendante des conditions amont (proposition de Steger et Warming [16]), notée F_ξ^+ , et une partie dépendante des conditions aval, notée F_ξ^- :

$$F_\xi = F_\xi^- + F_\xi^+ \tag{4.36}$$

de même pour G_η

$$G_\eta = G_\eta^- + G_\eta^+ \quad (4.37)$$

Avec comme notation $\delta U = U^{n+1} - U^n$, la linéarisation des flux Eulériens est faite à travers la surface $\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}$ de la façon suivante :

$$F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} = F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{+n} + A_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{-n} + A_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{-n} \delta U_{i+1,j}^n \quad (4.38)$$

On peut écrire à partir de l'expression (4.35) :

$$F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} = A_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{+n} U_{i,j}^n + A_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + A_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{-n} U_{i+1,j}^n + A_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{-n} \delta U_{i+1,j}^n \quad (4.39)$$

de la même façon, la linéarisation en temps des flux Eulériens est faite à travers la surface $\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{+n} + B_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{-n} + B_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{-n} \delta U_{i,j+1}^n \\ &= B_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{+n} U_{i,j}^n + B_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + B_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{-n} U_{i,j+1}^n + B_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{-n} \delta U_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (4.40)$$

Steger et Warming [16] proposent d'évaluer les matrices jacobiennes aux mêmes points que U , cette méthode est présentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} &= A_{\xi_{i,j}}^{+n} U_{i,j}^n + A_{\xi_{i,j}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + A_{\xi_{i+1,j}}^{-n} U_{i+1,j}^n + A_{\xi_{i+1,j}}^{-n} \delta U_{i+1,j}^n \\ G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= B_{\eta_{i,j}}^{+n} U_{i,j}^n + B_{\eta_{i,j}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + B_{\eta_{i,j+1}}^{-n} U_{i,j+1}^n + B_{\eta_{i,j+1}}^{-n} \delta U_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (4.41)$$

MacCormack [17] suggère d'évaluer les matrices jacobiennes aux mêmes points que U , alternativement entre i et $i+1$, c'est le schéma prédicteur- correcteur de MacCormack :

$$\begin{aligned}
F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} &= A_{\xi_{i+l,j}}^{+n} U_{i,j}^n + A_{\xi_{i+l,j}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + A_{\xi_{i+l,j}}^{-n} U_{i+1,j}^n + A_{\xi_{i+l,j}}^{-n} \delta U_{i+1,j}^n \\
G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= B_{\eta_{i,j+l}}^{+n} U_{i,j}^n + B_{\eta_{i,j+l}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + B_{\eta_{i,j+l}}^{-n} U_{i,j+1}^n + B_{\eta_{i,j+l}}^{-n} \delta U_{i,j+1}^n
\end{aligned} \quad (4.42)$$

Où $l = 0$ dans l'étape prédicteur et $l = 1$ dans l'étape correcteur, et l'inverse pour l'itération suivante

4.4.2 Fractionnement du flux eulérien au deuxième ordre

le flux passant par la surface $\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$ est calculé en fonction des grandeurs sur les mailles $i - 1$, i , $i + 1$ et $i + 2$.

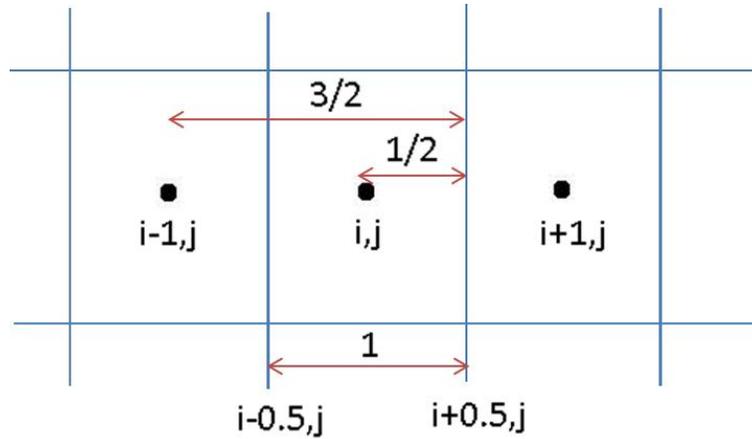


FIGURE 4.2. Mailles en $i - 1$, i , et $i + 1$

Le flux est traité exhaustivement suivant l'indice i , au sens de Steger et Warming [16] le flux à dans le sens croissant travers la surface en $i + 0.5$ est exprimé en fonction des mailles en $i - 1$ et i , on a :

$$\begin{aligned}
\delta F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^+ &= \frac{3}{2} A_{\xi_{i,j}}^+ \delta U_{i,j} - \frac{1}{2} A_{\xi_{i-1,j}}^+ \delta U_{i-1,j} \\
F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}^+ &= \frac{3}{2} A_{\xi_{i,j}}^+ U_{i,j} - \frac{1}{2} A_{\xi_{i-1,j}}^+ U_{i-1,j}
\end{aligned} \quad (4.43)$$

Le flux eulérien est écrit de la même manière dans sens décroissant de i à travers la surface $i + 0.5$ entre les mailles $i + 1$ et $i + 2$:

$$\begin{aligned}
\delta F_{\xi i+\frac{1}{2},j}^- &= \frac{3}{2} A_{\xi i+1,j}^- \delta U_{i+1,j} - \frac{1}{2} A_{\xi i+2,j}^- \delta U_{i+2,j} \\
F_{\xi i+\frac{1}{2},j}^- &= \frac{3}{2} A_{\xi i+1,j}^- U_{i+1,j} - \frac{1}{2} A_{\xi i+2,j}^- U_{i+2,j}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Le flux dans la direction croissante-décroissante de i s'écrit :

$$\begin{aligned}
F_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{n+1} &= \left(\frac{3}{2} A_{\xi i+1,j}^{-n} U_{i+1,j}^n - \frac{1}{2} A_{\xi i+2,j}^{-n} U_{i+2,j}^n \right) \\
&+ \left(\frac{3}{2} A_{\xi i,j}^{+n} U_{i,j}^n - \frac{1}{2} A_{\xi i-1,j}^{+n} U_{i-1,j}^n \right) \\
&+ \left(\frac{3}{2} A_{\xi i+1,j}^{-n} \delta U_{i+1,j}^n - \frac{1}{2} A_{\xi i+2,j}^{-n} \delta U_{i+2,j}^n \right) \\
&+ \left(\frac{3}{2} A_{\xi i,j}^{+n} \delta U_{i,j}^n - \frac{1}{2} A_{\xi i-1,j}^{+n} \delta U_{i-1,j}^n \right)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Le flux G^η dans la direction j à travers la surface $j + 0.5$ est donné de la même façon par :

$$\begin{aligned}
G_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left(\frac{3}{2} B_{\eta i,j+1}^{-n} U_{i,j+1}^n - \frac{1}{2} B_{\eta i,j+2}^{-n} U_{i,j+2}^n \right) \\
&+ \left(\frac{3}{2} B_{\eta i,j}^{+n} U_{i,j}^n - \frac{1}{2} B_{\eta i,j-1}^{+n} U_{i,j-1}^n \right) \\
&+ \left(\frac{3}{2} B_{\eta i,j+1}^{-n} \delta U_{i,j+1}^n - \frac{1}{2} B_{\eta i,j+2}^{-n} \delta U_{i,j+2}^n \right) \\
&+ \left(\frac{3}{2} B_{\eta i,j}^{+n} \delta U_{i,j}^n - \frac{1}{2} B_{\eta i,j-1}^{+n} \delta U_{i,j-1}^n \right)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Le flux est fractionné au sens de MacCormack [17], [18], [19], les équations (4.45) et (4.46) seront données par :

$$\begin{aligned}
F_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{n+1} &= A_{\xi i+l,j}^{-n} \left(\frac{3}{2} U_{i+1,j}^n - \frac{1}{2} U_{i+2,j}^n \right) + A_{\xi i+l,j}^{-n} \left(\frac{3}{2} \delta U_{i+1,j}^n - \frac{1}{2} \delta U_{i+2,j}^n \right) \\
&+ A_{\xi i+l,j}^{+n} \left(\frac{3}{2} U_{i,j}^n - \frac{1}{2} U_{i-1,j}^n \right) + A_{\xi i+l,j}^{+n} \left(\frac{3}{2} \delta U_{i,j}^n - \frac{1}{2} \delta U_{i-1,j}^n \right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

et

$$\begin{aligned}
G_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= B_{\eta i,j+l}^{-n} \left(\frac{3}{2} U_{i,j+1}^n - \frac{1}{2} U_{i,j+2}^n \right) + B_{\eta i,j+l}^{-n} \left(\frac{3}{2} \delta U_{i,j+1}^n - \frac{1}{2} \delta U_{i,j+2}^n \right) \\
&+ B_{\eta i,j+l}^{+n} \left(\frac{3}{2} U_{i,j}^n - \frac{1}{2} U_{i,j-1}^n \right) + B_{\eta i,j+l}^{+n} \left(\frac{3}{2} \delta U_{i,j}^n - \frac{1}{2} \delta U_{i,j-1}^n \right)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Le schéma de MacCormack donne de bons résultats dans les couches limites mais peut conduire à des instabilités dans les zones à forts gradients de pression. L'expression proposée par Steger et Warming est beaucoup plus dissipative et permet alors

de conserver la stabilité du schéma dans ces zones. Dans la pratique, une pondération est donc utilisée entre ces deux types de décomposition :

$$\begin{aligned} F_{\xi i+\frac{1}{2},j} &= W_p \left(F_{\xi i+\frac{1}{2},j} \right)_{MacCormack} + (1 - W_p) \left(F_{\xi i+\frac{1}{2},j} \right)_{Steger\ et\ Warming} \\ G_{\eta i,j+\frac{1}{2}} &= W_p \left(G_{\eta i,j+\frac{1}{2}} \right)_{MacCormack} + (1 - W_p) \left(G_{\eta i,j+\frac{1}{2}} \right)_{Steger\ et\ Warming} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Où W_p est une fonction de poids associée au saut de pression entre deux mailles voisines :

$$W_p = \frac{1}{1 + \Delta p \cdot \Delta p}$$

pour le flux passant par la maille $i + 0.5$, Δp est donné par :

$$\Delta p = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\min(p_{i+1,j}, p_{i,j})}$$

dans le cas du flux passant par $j + 0.5$, Δp est donné par :

$$\Delta p = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\min(p_{i,j+1}, p_{i,j})}$$

Les matrices jacobiennes des flux fractionnés sont donnés en basant sur l'expression (4.34), A_ξ^+ est donné par :

$$A_\xi^+ = S_X^{-1} \Lambda_\xi^+ S_X \quad (4.50)$$

avec

$$\Lambda_\xi^+ = \begin{pmatrix} \Lambda_{\xi 1}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\xi 2}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\xi 3}^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 4}^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 5}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 6}^+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\xi 1}^+ &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 1} + |\Lambda_{\xi 1}|) \\
\Lambda_{\xi 2}^+ &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 2} + |\Lambda_{\xi 2}|) \\
\Lambda_{\xi 3}^+ &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 3} + |\Lambda_{\xi 3}|) \\
\Lambda_{\xi 4}^+ &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 4} + |\Lambda_{\xi 4}|) \\
\Lambda_{\xi 5}^+ &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 5} + |\Lambda_{\xi 5}|) \\
\Lambda_{\xi 6}^+ &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 6} + |\Lambda_{\xi 6}|)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

A_{ξ}^+ est donné par :

$$A_{\xi}^- = S_X^{-1} \Lambda_{\xi}^- S_X \tag{4.52}$$

$$\Lambda_{\xi}^- = \begin{pmatrix} \Lambda_{\xi 1}^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\xi 2}^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\xi 3}^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 4}^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 5}^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\xi 6}^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\xi 1}^- &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 1} - |\Lambda_{\xi 1}|) \\
\Lambda_{\xi 2}^- &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 2} - |\Lambda_{\xi 2}|) \\
\Lambda_{\xi 3}^- &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 3} - |\Lambda_{\xi 3}|) \\
\Lambda_{\xi 4}^- &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 4} - |\Lambda_{\xi 4}|) \\
\Lambda_{\xi 5}^- &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 5} - |\Lambda_{\xi 5}|) \\
\Lambda_{\xi 6}^- &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi 6} - |\Lambda_{\xi 6}|)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

De la même façon pour les expressions de B_{η}^- et B_{η}^+ :

$$\begin{aligned}
B_{\eta}^+ &= S_Y^{-1} \Lambda_{\eta}^+ S_Y \\
B_{\eta}^- &= S_Y^{-1} \Lambda_{\eta}^- S_Y
\end{aligned} \tag{4.54}$$

avec

$$\Lambda_{\eta}^{+} = \begin{pmatrix} \Lambda_{\eta 1}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\eta 2}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\eta 3}^{+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 4}^{+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 5}^{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 6}^{+} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\eta 1}^{+} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 1} + |\Lambda_{\eta 1}|) \\ \Lambda_{\eta 2}^{+} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 2} + |\Lambda_{\eta 2}|) \\ \Lambda_{\eta 3}^{+} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 3} + |\Lambda_{\eta 3}|) \\ \Lambda_{\eta 4}^{+} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 4} + |\Lambda_{\eta 4}|) \\ \Lambda_{\eta 5}^{+} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 5} + |\Lambda_{\eta 5}|) \\ \Lambda_{\eta 6}^{+} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 6} + |\Lambda_{\eta 6}|) \end{aligned} \tag{4.55}$$

et

$$\Lambda_{\eta}^{-} = \begin{pmatrix} \Lambda_{\eta 1}^{-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{\eta 2}^{-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\eta 3}^{-} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 4}^{-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 5}^{-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{\eta 6}^{-} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\eta 1}^{-} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 1} - |\Lambda_{\eta 1}|) \\ \Lambda_{\eta 2}^{-} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 2} - |\Lambda_{\eta 2}|) \\ \Lambda_{\eta 3}^{-} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 3} - |\Lambda_{\eta 3}|) \\ \Lambda_{\eta 4}^{-} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 4} - |\Lambda_{\eta 4}|) \\ \Lambda_{\eta 5}^{-} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 5} - |\Lambda_{\eta 5}|) \\ \Lambda_{\eta 6}^{-} &= \frac{1}{2} (\Lambda_{\eta 6} - |\Lambda_{\eta 6}|) \end{aligned} \tag{4.56}$$

On conserve les indices sur A_{ξ} et B_{η} tels qu'ils sont donnés par les expressions (4.39) et (4.40), utilisant la pondération donnée par (4.49), l'équation (4.18) devient :

$$\begin{aligned}
& \delta U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{+n} \delta U_{i,j}^n + A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{-n} \delta U_{i+1,j}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}} | \\
& - \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{+n} \delta U_{i-1,j}^n + A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{-n} \delta U_{i,j}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}} | \\
& + \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{-n} \delta U_{i,j+1}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}} | \\
& - \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{+n} \delta U_{i,j-1}^n + B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{-n} \delta U_{i,j}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}} | \\
& = - \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i,j}^n + A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i+1,j}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}} | \\
& + \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i-1,j}^n + A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i,j}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}} | \\
& - \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j}^n + B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j+1}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}} | \\
& + \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j-1}^n + B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j}^n \right) | \vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}} | \\
& + \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(F_{\nu\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{n+1} | \vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}} | - F_{\nu\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{n+1} | \vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}} | \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\nu_{i,j}} \left(G_{\nu\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} | \vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}} | - G_{\nu\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} | \vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}} | \right) \\
& + \Delta t S_0 \nu_{i,j}^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

4.5 Termes de flux visqueux

Les termes à l'instant $(n+1)$ de flux visqueux peuvent être approximés par :

$$F_{\nu\xi}^{n+1} = F_{\nu\xi}^n + \delta F_{\nu\xi}^n \quad G_{\nu\eta}^{n+1} = G_{\nu\eta}^n + \delta G_{\nu\eta}^n \tag{4.58}$$

Par l'utilisation de l'hypothèse de couche mince, les gradients suivant ξ sont faibles devant les gradients suivant η , d'où :

$$\delta G_{\nu\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \delta G_{\nu\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \gg \delta F_{\nu\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \delta F_{\nu\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tag{4.59}$$

Les flux visqueux dont donnés suivant (x, y) , il faut donc évaluer $\delta G_{\nu\eta}$ en fonction des coordonnées dans le plan (ξ, η) . Le vecteur du flux visqueux $G_{\nu\eta}$ est donné par :

$$G_{\nu\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) n_x + \mu_{ef} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) n_y \\ \mu_{ef} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) n_x + \mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) n_y \\ \left(\mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \tilde{u} n_x + \mu_{ef} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) (\tilde{v} n_x + \tilde{u} n_y) + \right. \\ \left. \mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \tilde{v} n_y + \lambda_{ef} \left(\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial y} n_y \right) \right) \\ \mu_{kef} \left(\frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y \right) \\ \mu_{\omega ef} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Où $\mu_{ef} = \mu + \mu_t$, $\lambda_{ef} = \frac{\gamma\mu}{Pr} + \frac{\gamma\mu_t}{Pr_t}$, $\mu_{kef} = \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}$ et $\mu_{\omega ef} = \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega}$

Le flux visqueux implicite $\delta G_{\nu\eta}$ a pour expression :

$$\delta G_{\nu\eta} \approx \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|}{\mathcal{V}_{i,j}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_{ef} \left(\frac{4}{3} n_x^2 + n_y^2 \right) \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial \eta} + \mu_{ef} \left(-\frac{2}{3} n_x n_y + n_x n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{v}}{\partial \eta} \\ \mu_{ef} \left(-\frac{2}{3} n_x n_y + n_x n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial \eta} + \mu_{ef} \left(\frac{4}{3} n_y^2 + n_x^2 \right) \frac{\partial \delta \tilde{v}}{\partial \eta} \\ \left(\mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \tilde{u} n_x^2 + \tilde{v} n_x n_y + \tilde{u} n_y^2 - \frac{2}{3} \tilde{v} n_x n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial \eta} + \right. \\ \left. \mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \tilde{v} n_y^2 + \tilde{v} n_x^2 + \tilde{u} n_x n_y - \frac{2}{3} \tilde{u} n_x n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{v}}{\partial \eta} \right) \\ \lambda_{ef} \left(n_x^2 + n_y^2 \right) \frac{\partial \delta \tilde{\epsilon}}{\partial \eta} \\ \mu_{kef} \left(n_x^2 + n_y^2 \right) \frac{\partial \delta k}{\partial \eta} \\ \mu_{\omega ef} \left(n_x^2 + n_y^2 \right) \frac{\partial \delta \omega}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Le vecteur $\delta G_{\nu\eta}$ devient pour la surface $|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|$:

$$\delta G_{\nu\eta} \approx \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta 1} \frac{\partial}{\partial \eta} (\delta \rho, \delta \tilde{u}, \delta \tilde{v}, \delta \tilde{\epsilon}, \delta k, \delta \omega)^t \quad (4.62)$$

où $\mathcal{M}_{\eta 1}$ est donné par :

$$\mathcal{M}_{\eta 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ef} \left(\frac{4}{3}n_x^2 + n_y^2 \right) & \frac{1}{3}\mu_{ef}n_xn_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\mu_{ef}n_xn_y & \mu_{ef} \left(\frac{4}{3}n_y^2 + n_x^2 \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\mu_{ef}\tilde{u} \left(\frac{4}{3}n_x^2 + n_y^2 \right) + \frac{1}{3}\mu_{ef}\tilde{v}n_xn_y \right) & \left(\mu_{ef}\tilde{v} \left(\frac{4}{3}n_y^2 + n_x^2 \right) + \frac{1}{3}\mu_{ef}\tilde{u}n_xn_y \right) & \lambda_{ef} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{kef} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{\omega ef} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Soit N_c''' la matrice de passage des variables conservatives aux variables non-conservatives :

$$\begin{pmatrix} \delta\bar{\rho} \\ \delta\tilde{u} \\ \delta\tilde{v} \\ \delta\tilde{e} \\ \delta k \\ \delta\omega \end{pmatrix} = N_c''' \begin{pmatrix} \delta\bar{\rho} \\ \delta\bar{\rho}\tilde{u} \\ \delta\bar{\rho}\tilde{v} \\ \delta\bar{\rho}\tilde{e}_t \\ \delta\bar{\rho}k \\ \delta\bar{\rho}\omega \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

$$N_c''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}} & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{v}}{\bar{\rho}} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha-\tilde{e}}{\bar{\rho}} & -\frac{\tilde{u}}{\bar{\rho}} & -\frac{\tilde{v}}{\bar{\rho}} & \frac{1}{\bar{\rho}} & -\frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ -\frac{k}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ -\frac{\omega}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Où $\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)$, $\delta G_{\nu\eta}$ s'écrit sous la forme :

$$\delta G_{\nu\eta} \approx \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta 1} \frac{\partial}{\partial \eta} N_c''' \delta U \approx \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta} \frac{\partial \delta U}{\partial \eta} \quad (4.66)$$

Où $\mathcal{M}_{\eta} = \mathcal{M}_{\eta 1} N_c'''$

4.6 Traitement des termes sources

L'intégration sur un volume élémentaire conduit à l'équation simplifiée $\frac{\partial U}{\partial t} = S$.

U et S sont supposés constants et égaux à leur valeur au centre de ce volume. Les termes sources peuvent être linéarisés de la façon suivante :

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n + \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{i,j}^n \delta U_{i,j}^n = S_{i,j}^n + H_{i,j}^n \delta U_{i,j}^n \quad (4.67)$$

Les termes sources pour k et ω sont de nature complexes et le jacobien $H = \frac{\partial S}{\partial U}$ n'est pas aisé à déterminer. Une procédure simple couramment utilisée a été mise en place, on suppose que les termes sources S_k et S_{ω} linéairement dépendants d'uniquement leurs variables conservatives correspondantes. Il résulte une matrice $H_{i,j}^n$ diagonale, qui peut se mettre sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_k}{\rho k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_{\omega}}{\rho \omega} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

La dominance diagonale de l'opérateur implicite est d'avantage renforcée en ne prenant en compte que la contribution négative des termes sources.

Dans le cas d'une configuration axisymétrique, l'expansion de volume dans la direction radiale contribue à changer le comportement d'un écoulement axisymétrique par rapport à celui d'un écoulement bidimensionnel. Cette modification est apportée

par les flux supplémentaires liés aux contraintes de pression et aux contraintes visqueuses normales aux surfaces $\theta = Cste$ du volume élémentaire, qui contribuent à la modification du bilan de la quantité de mouvement dans la direction radiale.

Le terme source $S_\theta = \frac{p^* + \tilde{\sigma}_\theta}{r}$ où $\tilde{\sigma}_\theta$ est la contrainte visqueuse tangentielle :

$$\tilde{\sigma}_\theta = \mu \left(-\frac{2\tilde{v}}{r} + \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \right) \quad (4.69)$$

La matrice $H_{i,j}^n$ est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta\alpha}{r} & -\frac{\beta\tilde{u}}{r} & -\frac{\beta\tilde{v}}{r} & \frac{\beta}{r} & -\frac{\beta\Gamma}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_k}{\rho k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_\omega}{\rho\omega} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

où $\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)$, $\beta = \gamma - 1$, $\Gamma = 1 - \frac{2}{3\beta}$

4.7 Opérateur implicite

Les accroissements implicites δU sont regroupés par indices, après avoir introduit les matrices H et \mathcal{M} dans l'équation (4.57), on aura le système suivant :

$$\hat{A}_{i,j} \delta U_{i,j}^n + \hat{B}_{i,j} \delta U_{i,j+1}^n + \hat{C}_{i,j} \delta U_{i,j-1}^n + \hat{D}_{i,j} \delta U_{i+1,j}^n + \hat{E}_{i,j} \delta U_{i-1,j}^n = \Delta U_{i,j}^n \quad (4.71)$$

Les termes d'accroissement explicite $\Delta U_{i,j}^n$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\Delta U_{i,j}^n = & -\frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i,j}^n + A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i+1,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i-1,j}^n + A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \\
& - \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j}^n + B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j+1}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j-1}^n + B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{\nu \xi i+\frac{1}{2},j}^n |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| + F_{\nu \xi i-\frac{1}{2},j}^n |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\nu \eta i,j+\frac{1}{2}}^n |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| + G_{\nu \eta i,j-\frac{1}{2}}^n |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \right) + \Delta t S_{0,i,j}^n
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Les matrices $\hat{A}_{i,j}$, $\hat{B}_{i,j}$, $\hat{C}_{i,j}$, $\hat{D}_{i,j}$ et $\hat{E}_{i,j}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{i,j} = & I + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| + B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| \right. \\
& \left. - B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| + \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j+\frac{1}{2}}^n + \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j-\frac{1}{2}}^n \right) - \Delta t H_{i,j}^n \\
\hat{B}_{i,j} = & \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j+\frac{1}{2}}^n \right) \\
\hat{C}_{i,j} = & -\frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| + \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
\hat{D}_{i,j} = & \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \\
\hat{E}_{i,j} = & -\frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}|
\end{aligned}$$

La résolution de l'équation (4.71) s'effectue à l'aide de l'algorithme de Thomas généralisé. Une relaxation de Gauss-Seidel est utilisée dans la direction ξ en faisant

deux boucles sur les valeurs de i (la première boucle avec i décroissant et la deuxième avec i croissant). En pratique, deux itérations suffisent pour assurer la convergence de la relaxation de Gauss-Seidel [18].

RÉFÉRENCES

- [1] R.W. MAC CORMACK, The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. AIAA paper N^0 69-354 (1969).
- [2] R.W. MAC CORMACK, An efficient numerical method for solving the time dependent compressible Navier-Stokes equations at high Reynolds number. Computing in Applied Mechanics, AMD vol. 18, The American Society of Mechanical Engineers (1976).
- [3] R.W. MAC CORMACK, A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow. AIAA paper N^0 81-0110 (1981).
- [4] P.D. LAX et B. WENDROFF, Systems of conservation laws. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 13, pp. 217-237 (1960).
- [5] P.D. LAX et B. WENDROFF, Difference schemes with high order of accuracy for solving hyperbolic equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 17, p. 381 (1964).
- [6] R.D. RICHTMYER, A survey of difference methods for nonsteady fluid dynamics. NCAR Technical Note 63-2. Boulder. Colorado (1963).
- [7] R.M. BEAM et R.F. WARNING, An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA. J. vol. 16, N^0 4, pp. 393-402 (1978).
- [8] R.W. BRILEY et H. Mc DONALD, Solutions of the three dimensional compressible Navier-Stokes equations by an implicit technique. Lecture Notes in Physics - Springer Verlag, vol. 35, pp. 105-110.
- [9] R.D. RICHTMYER, Difference methodes for initial value problems, Interscience Publishers Inc. New York (1957)
- [10] V.J. SKOGLUND et J. K. COLE, Numerical analysis of the interaction of an

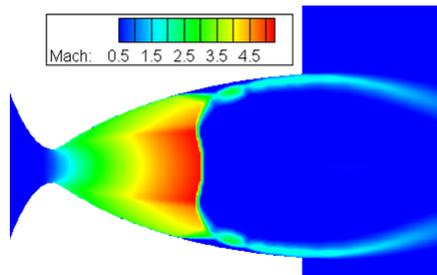
- oblic shock wave and a laminar boundary layer. Bureau of Engineering Research report N^0 ME 23. University of New Mexico. Albuquerque (1966)
- [11] S.K. GODUNOV, A.W. ZABRODYN et G.P. PROKOPOV, A computational scheme for two-dimensional non-stationary problems of gas dynamics and calculation of the flow from a shock wave approaching a stationary state. U.S.S.R. J. Computational Mathematics and Mathematical Physics, PP. 1187-1219 (1959)
- [12] G. MORETTI et G. BLEICH, Three dimensional inviscid flow about supersonic blunt cones et angle of attack. SC-RR-68-3728, Sandia Laboratories - Albuquerque - New Mexico (1968).
- [13] G. MORETTI et M.D. SALAS, The blunt body problem for a viscous rarefied gas flow. AIAA paper N^0 69-139, New York (1969).
- [14] G.S. SETTLES, T.G. FITZPATRICK et S.M. BOGDONOFF, Detailed study of attached and separated compression corner flow fields in high Reynolds number supersonic flow. AIAA J. 17 pp. 579-585 (1979).
- [15] Y. LEBRET, Etude numérique de la couche de mélange compressible. Thèse, Faculté des Sciences et Techniques de Rouen(1993).
- [16] J. STEGER, R.F WARMING, Flux vector splitting of the inviscid gas dynamics equations with application to finite difference methods. J. Comput. Phys., 40(2) :263-293, (1981).
- [17] R.W. MAC CORMACK, An efficient explicit, implicit, characteristic method for solving the compressible Navier-Stokes equations. SIAM-AMS Proceedings of the symposium of CFD, New York (1977)
- [18] R.W. MAC CORMACK, Current status of numerical solutions of the Navier-Stokes equations. AIAA paper, N^0 . 85-0032 (1985)
- [19] R.W. MAC CORMACK, Numerical computation of compressible viscous flow. Notes de cours, Dept. of Aero. and Asto., Stanford University (1986)

Chapitre 5

RÉSULTATS

” Il est plus important qu’une équation soit belle qu’en accord avec l’expérience ”

[Paul Dirac, Prix Nobel de physique 1933]



*Champ de Mach dans une tuyère TOC (Thrust Optimized Contour).
décollement restreint RSS (Restricted Shock separation)*

5.1 Introduction

La mécanique des fluides et le transfert de chaleur dans un écoulement turbulent accéléré sont différents du cas de non-accelération. L'étude des écoulements un peu complexes, tel que une zone de recirculation, un décollement sur une rompe de compression, une couche de mélange, ou encore l'écoulement à travers des tuyères supersoniques, ont mis en évidence l'intérêt dans la conception et le développement et dans la recherche fondamentale. Cette étude numérique est réalisée pour acquérir une meilleure compréhension des effets de plusieurs paramètres sur ce genre d'écoulement et sur le transfert thermique dans des tuyères supersoniques coniques ou galbées.

Des efforts considérables ont été consacrés à la prédiction de la dynamique des gaz et au transfert de chaleur par convection à travers les tuyères supersoniques [1], mais relativement il existe peu de connaissance sur l'écoulement réel et sur les phénomènes de transfert de chaleur par convection qui peuvent se produire dans les tuyères de différentes configurations et à diverses conditions d'exploitation, l'étude est issue d'un intérêt croissant pour la compréhension de transfert de chaleur par convection provient de l'accélération de la couche limite turbulente.

En régime établi, tous les facteurs susceptibles de modifier les caractéristiques de l'écoulement au voisinage de la paroi agiront sur la position du point de décollement ; parmi ceux-ci, notons les échanges thermiques entre la paroi et les gaz, les perturbations de profil de la paroi, la nature de l'écoulement de proche paroi (laminaire ou turbulente), ainsi que les perturbations de pression atteignant la couche limite (que celles-ci viennent de la partie amont ou aval de l'écoulement).

Des facteurs complexes sont rencontrés dans ce type d'écoulement influençant le transfert de chaleur, il est extrêmement difficile de clarifier d'une façon pertinente la situation pour permettre d'obtenir des résultats de validité générale. L'investigation numérique des couches limite turbulentes dans une tuyère à paroi refroidie ont généralement été associées à un écoulement supersonique, dans lesquels les effets

d'échauffement par frottement deviennent importants et un refroidissement externe est parfois nécessaire pour maintenir l'intégrité de la surface ([2],[3]), le transfert de chaleur du gaz chaud à la paroi devrait être aussi faible que possible.

Quelques auteurs ont déjà travaillé sur ce problème ([4]-[8]). Pour combler en partie cette lacune nous avons mis en évidence numériquement, le transfert de chaleur associé à un écoulement turbulent d'air chaud comprimé à travers une tuyère convergente-divergente refroidie. Les objectifs de notre étude est de clarifier l'effet de certains paramètres importants, tels que :

- L'effet de la température de la paroi sur la position du point de séparation, sur la répartition de la pression statique pariétale et sur le taux de transfert de chaleur.
- L'effet du rapport de la chaleur spécifique γ sur la pression statique pariétale pour le cas adiabatique et isotherme et sur le transfert de chaleur.
- Dans le cas d'un décollement libre FSS (Free Shock separation) ou restreint RSS (Restricted Shock separation) dans les tuyères galbées, tuyère TIC (Truncated Ideal Contour) ou une tuyère TOC (Thrust Optimized Contour).

Ainsi, l'intérêt de simuler numériquement le décollement de jet et le transfert thermique dans une tuyère de moteur fusée est issu de plusieurs facteurs :

- Ce domaine n'a pas fait l'objet d'examen précis jusqu'à ce jour.
- Quoiqu'anciens, les résultats expérimentaux disponibles permettent des comparaisons valables.
- D'un point de vue industriel, une meilleure prédiction du transfert thermique et des charges latérales thermiques dans les tuyères est nécessaire.

La complexité des phénomènes physiques nous a conduit à procéder par étapes. Ainsi, l'étude a débuté avec la réalisation de simulations d'écoulements axisymétriques dans diverses géométries et dans différentes conditions. Ces simulations permettent d'étudier différents paramètres qui influencent le décollement et le transfert thermique pariétal.

5.2 Validation du modèle de turbulence SST-V Menter

Afin de valider l'influence et la robustesse du modèle utilisé sur le comportement du champ turbulent et ses conséquences sur le champ moyen, les résultats numériques seront confrontés aux valeurs expérimentales de Cuffel et al [5] et Back et al ([1],[4]).

Cuffel et al [5] ont utilisé dans leur expérimentation une tuyère conique, qui a un demi angle de convergence et de divergence de 45° et 15° (figure 5.6), respectivement, avec $r_c/r_{th} = 0.625$. La pression statique a été calculée dans tout le champ d'écoulement. Le fluide employé est de l'air comprimé qui entre à une pression $P_0 = 4.82$ bar et $T_0 = 300K$. Un paramètre important influant l'écoulement isentropique dans la région transsonique d'une tuyère avec un col circulaire est le rapport de l'arc de rayon et le rayon du col r_c/r_{th} .

Pour des valeurs de rapport r_c/r_{th} considérablement supérieur à l'unité, c'est-à-dire un écoulement unidimensionnel avec le contour progressif du col. Avec la diminution du rapport r_c/r_{th} les effets d'écoulement bidimensionnel deviennent importants. Dans le cas où r_c/r_{th} supérieur ou légèrement inférieur d'environ 2, il existe des théories analytiques pour une prédiction adéquate de l'écoulement bidimensionnel dans la région transsonique de la tuyère ([9]-[11]) comme il est indiqué par le calcul et la mesure de la pression statique sur la paroi [4].

Cependant, pour des tuyères avec ($r_c/r_{th} < 1$), comme l'on trouve dans certains moteurs fusées, ces théories ne s'appliquent pas. Cette configuration présente des flux internes dans la région transsonique d'une tuyère avec un petit rapport de $r_c/r_{th} = 0.625$.

Les résultats numériques seront comparés aux résultats de l'expérimentation menée par Cuffel et al [5].

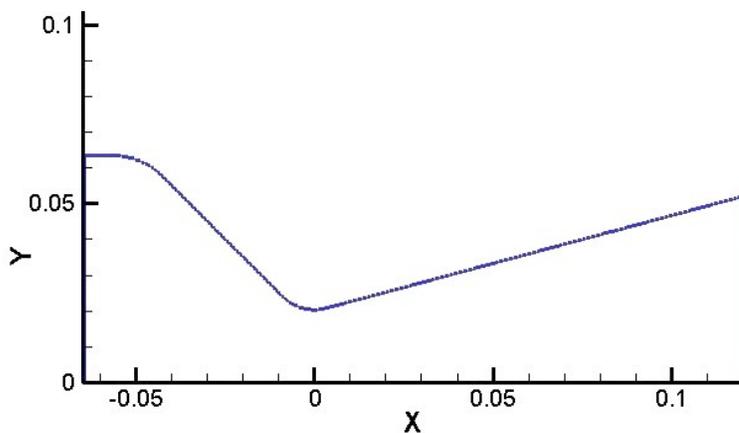


FIGURE 5.1. *Géométrie de la Tuyère JPL de Cuffel et al [5] en (m)*

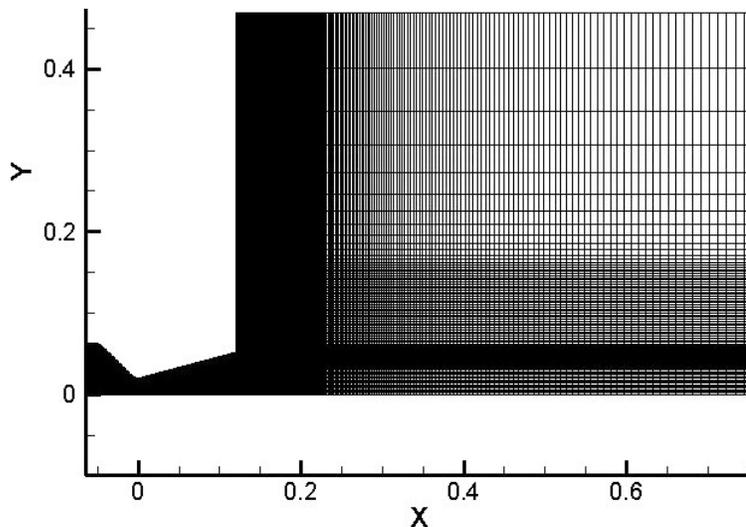


FIGURE 5.2. *Maillage structuré multi blocs*

Le maillage adopté est du type curviligne avec une technique multibloc. La figure 5.2 montre le maillage de la tuyère de la figure 5.1. L'avantage de cette technique est qu'elle autorise des domaines de calcul plus étendus avec une grande facilité de programmation sur des machines massivement parallèles. Notre code de calcul utilise une approche de parallélisation à mémoire distribuée en faisant appel à la

bibliothèque d'échanges de messages MPI (Message Passing Interface). Bien qu'elle ne puisse simplement optimiser les performances des boucles de calcul, elle présente l'intérêt de pouvoir répartir les tâches sur un nombre important de processus.

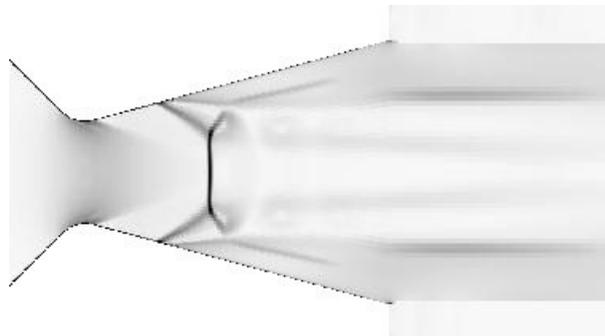


FIGURE 5.3. *Strioscopie numérique de la tuyère [5] (Simulation avec le modèle SST-Menter). NPR=3.12*

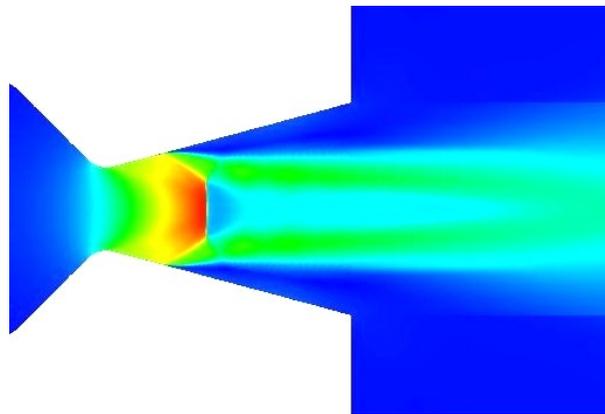


FIGURE 5.4. *Champ de nombre de Mach de la tuyère [5] NPR=3.12*

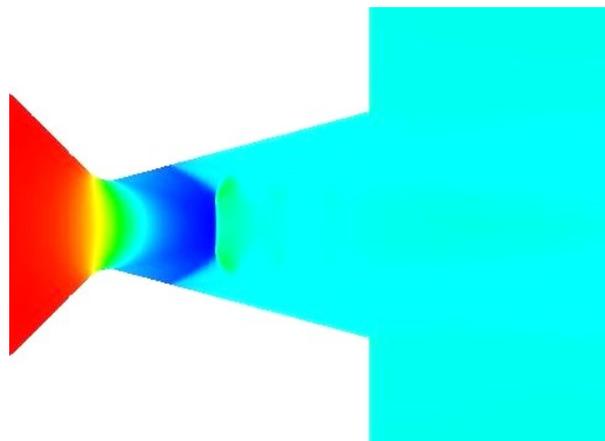


FIGURE 5.5. *Champ de pression avec $NPR=3.12$*

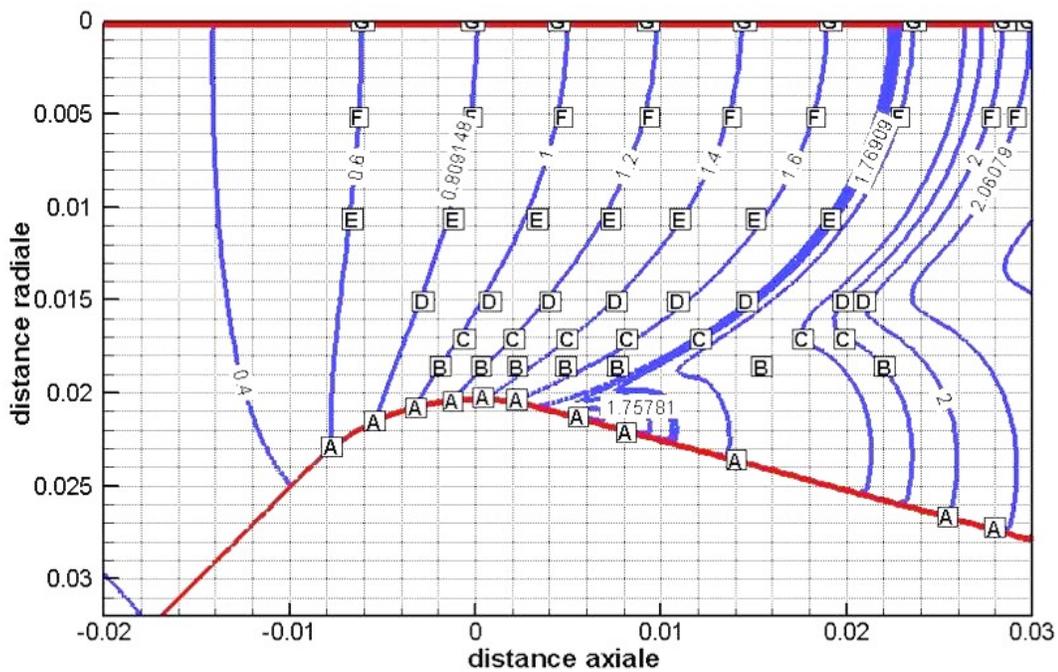


FIGURE 5.6. *Comparaison de champ de Mach dans la région transsonique pour un rapport de pression $NPR=4.82$ avec les mesures de Cuffel et al [5] (les alphabets représentent l'expérimentation)*

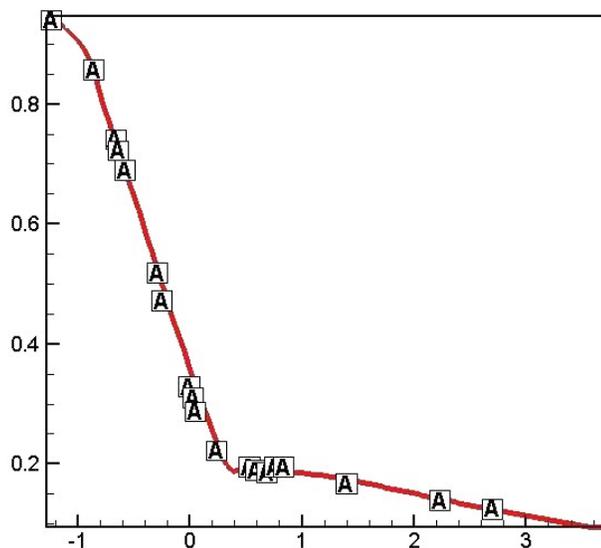


FIGURE 5.7. *distribution axiale de la pression sur la paroi, $NPR=4.82$ (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])*

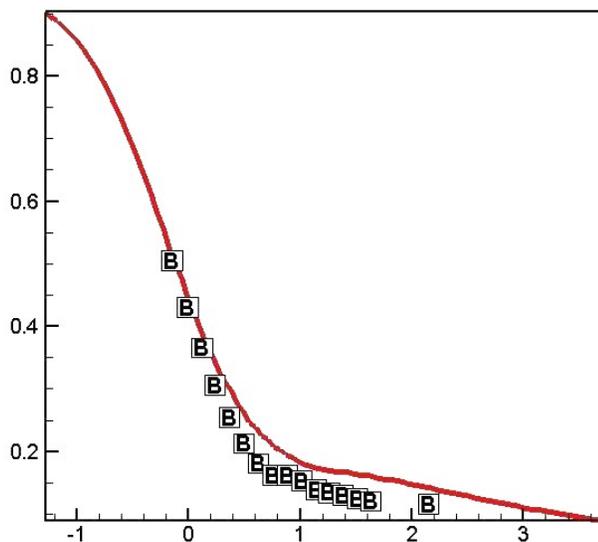


FIGURE 5.8. *distribution axiale de la pression à une distance égale à 4.7 cm de l'axe, $NPR=4.82$ (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])*

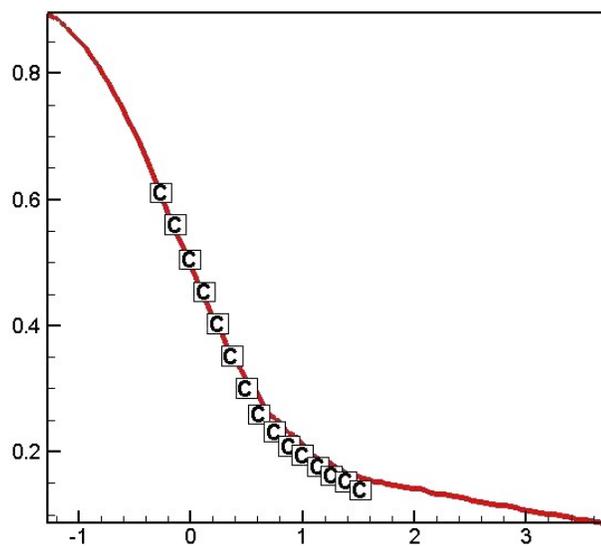


FIGURE 5.9. *distribution axiale de la pression à une distance égale à 4.32 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])*

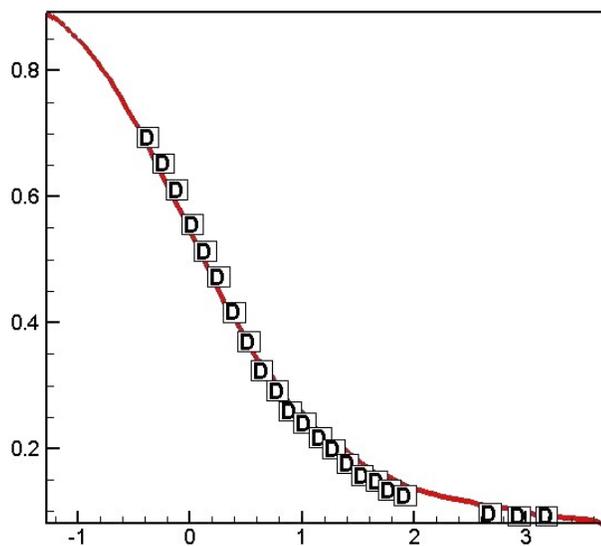


FIGURE 5.10. *distribution axiale de la pression à une distance égale à 3.81 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])*

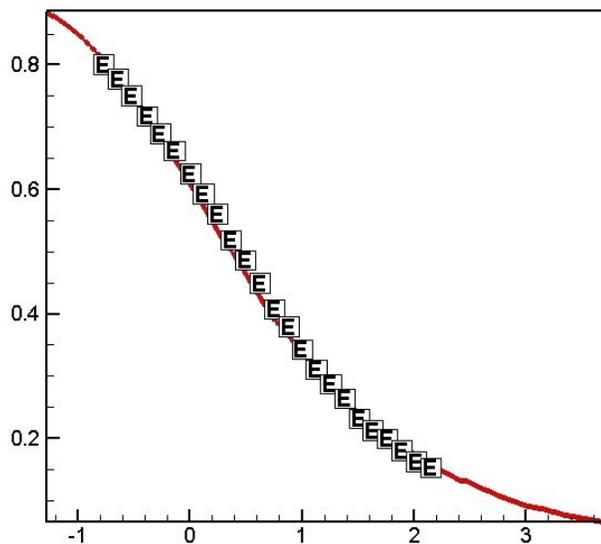


FIGURE 5.11. *distribution axiale de la pression à une distance égale à 2.54 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])*

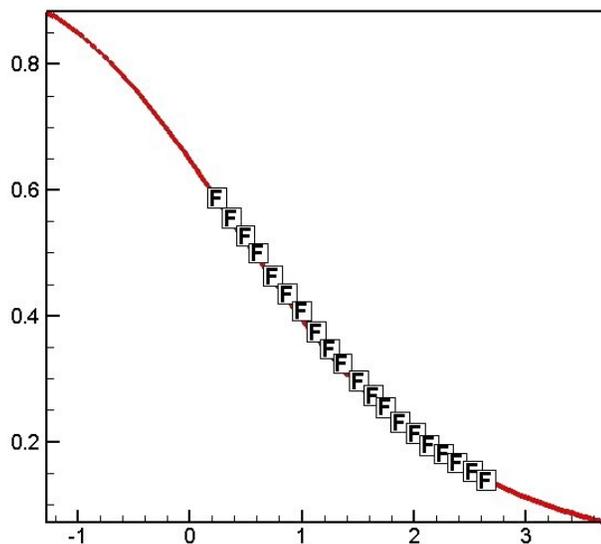


FIGURE 5.12. *distribution axiale de la pression à une distance égale à 1.27 cm de l'axe, NPR=4.82 (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])*

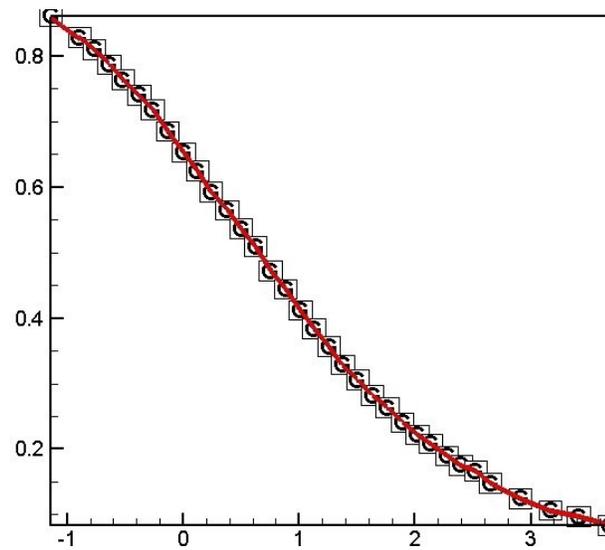


FIGURE 5.13. *distribution axiale de la pression sur l'axe, $NPR=4.82$ (les alphabets représentent l'expérimentation de [5])*

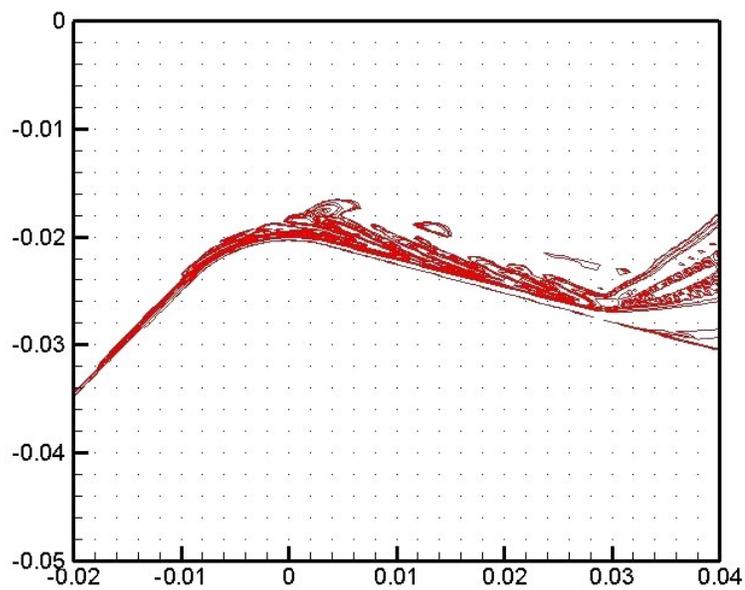


FIGURE 5.14. *Champ de vorticité dans la tuyère [5]*

Quant à l'écoulement sur ce genre de tuyère nous permettra plus particulièrement

d'évaluer l'influence des choix numériques (schémas de discrétisation, stratégie de limitation) et du modèle de turbulence, retenus dans cette étude pour le cas bien spécifique d'un écoulement turbulent instationnaire dont les flux internes de recirculation dans la région transsonique sont réputés relativement difficiles à capturer en raison de l'existence d'un écoulement bidimensionnel associé à cette géométrie. L'étude de l'écoulement turbulent dans la région transsonique avec un profil de tuyère où $r_c/r_{th} < 1$ est un cas de validation classique pour les codes de calcul utilisant une approche RANS.

Il est important de souligner, que la modélisation de la turbulence pour la simulation de l'interaction choc/couche-limite reste encore un sujet de recherche ouvert. Les travaux de Liou et al [12] comparent par exemple des calculs menés sur une bosse en régime d'écoulement transsonique, une interaction entre une onde de choc oblique et une couche limite turbulente ainsi qu'une rampe de compression en régime supersonique, pour une modélisation de la turbulence par le modèle $k - \varepsilon$ dans la formulation proposée par Chien, ce même modèle avec ajout d'une non linéarité faible de type "réalisabilité", le modèle de Spalart-Allmaras [13] et le modèle SST de Menter [14]. Ces travaux mettent en évidence que, quel que soit le modèle de turbulence utilisé, la prédiction correcte du coefficient de frottement s'avère plus délicate que celle des distributions de vitesse en une abscisse donnée.

Nous pouvons à notre tour donner quelques éléments de comparaison entre le modèle de turbulence disponible (SST Menter [14]) implanté durant nos travaux. Nous comparons en premier lieu les résultats obtenus avec le cas de validation retenu. On examine le contour du nombre de Mach sur toute la région transsonique ainsi que la pression statique dans différentes régions radiales.

La variation de la pression statique radiale est large (figure 5.7 à figure 5.13), avec des valeurs de la pression statique le long de l'axe allant jusqu'à trois fois à ceux près de la paroi proche du col de la tuyère. Le gradient de la pression radiale est sensiblement le même que le gradient de la pression axiale. Le fluide se détend

plus rapidement le long de la paroi, et en conséquence de fortes variations radiales du nombre de Mach (figure 5.6) calculé pour un écoulement isentropique avec ($\gamma = 1,4$). Dans le plan du col, le nombre de Mach est de l'ordre de 0,8 sur l'axe et 1,4 sur le bord de la couche limite.

L'augmentation de la pression statique observée le long de la paroi, juste en position aval de la tangente entre le col et l'arc du cercle de la partie conique du divergent, est considérée associée à une compression de l'écoulement tournant. La forte rotation angulaire acquise par l'écoulement dans la région du col de faible rayon de courbure (figure 5.14) peut conduire à un renversement de l'écoulement de telle sorte que les lignes de courants près de la paroi deviennent inclinées à la paroi conique aval, comme indiqué par les calculs. La région où les lignes de Mach commencent à converger, ce qui présente le début de la formation de choc associé à la compression de l'écoulement tournant à devenir parallèle à la paroi. Une faible onde de choc oblique se forme par la suite et s'étend en aval, coupant l'axe à une distance $x=0,8$ cm, il est raisonnable de supposer que l'écoulement est isentropique dans toute cette région.

5.3 Etat de l'art sur le décollement stationnaire

Au col la tuyère est amorcée et rien n'est modifié au débit q quand la pression p_a baisse en dessous de P_{asup} (figure 5.15), un amorçage d'un écoulement supersonique se produit en aval du col dans le divergent de la tuyère. L'écoulement est entièrement supersonique dans tout le divergent avec une pression en aval qui doit être inférieure ou égale à la pression P_{ainf} . Dans ce cas la tuyère est complètement amorcée et la pression le long de la paroi du divergent est indépendante des conditions aval. Un choc vient se positionner en une abscisse précise lorsque la pression en aval prend une valeur entre P_{asup} et P_{ainf} .

Suivant le régime et les conditions de fonctionnement d'une tuyère, la pression ambiante dans laquelle la tuyère débouche son écoulement en sortie peut considérablement

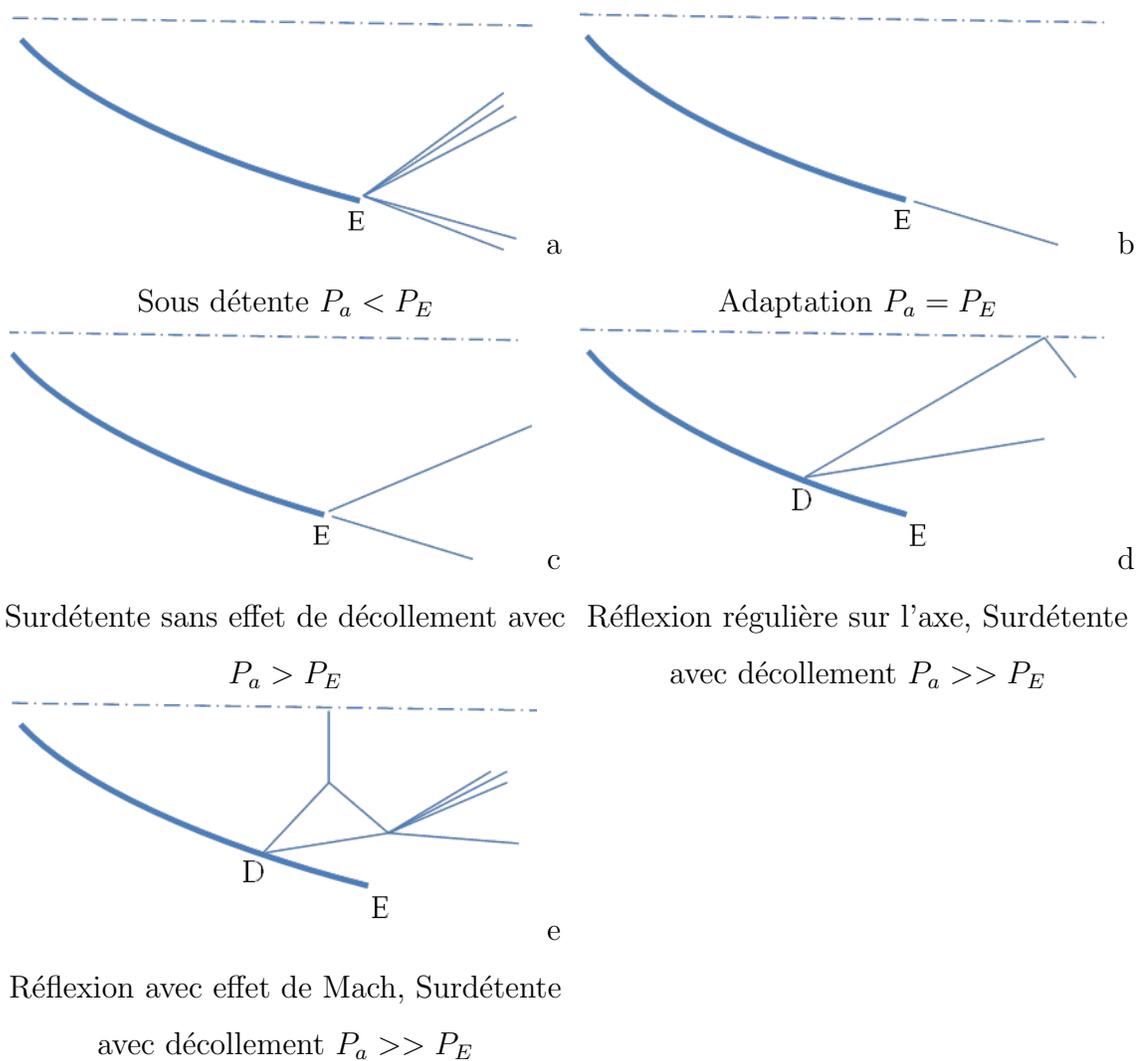


FIGURE 5.16. Régimes de tuyère (P_a : Pression ambiante à l'aval, P_E : Pression à la lèvre de la tuyère fonctionnant dans le vide)

la lèvre E .

- La pression du jet est égale à la pression ambiante, dans ce cas il s'agit d'un jet adapté (voir figure 5.16b). En pratique, ce type d'écoulement est difficile à obtenir sauf pour des tuyères destinées à des conditions de fonctionnement spécifiques. La pression le long de la paroi de la tuyère suit une distribution décroissante depuis la pression chambre jusqu'à la pression de sortie P_E qui

est égale à la pression ambiante P_a . Au voisinage de la lèvre E , les lignes de courant moyennes du jet quittent le divergent sans subir aucune différence de pression statique. En quittant la lèvre E la couche limite du jet entre en contact avec le fluide ambiant et l'entraîne dans son sillage, ce qui forme une couche de mélange.

- La pression du jet est plus faible que la pression ambiante, dans ce cas il s'agit d'un jet surdétendu (voir figure 5.16d). La ligne isobare, séparant le jet supersonique et l'écoulement ambiant, est déviée vers l'axe de la tuyère ce qui induit une forte compression de l'écoulement conduisant ainsi à la formation d'un choc de compression initié à la sortie de la tuyère.

Des charges latérales dans une tuyère de révolution sont le résultat d'une dissymétrie du décollement de la couche limite¹ On s'intéresse plus particulièrement au décollement symétrique et stationnaire, ce qui n'est généralement pas vérifié lorsque la tuyère est fortement surdétendue, c'est-à-dire que la pression aval P_a est légèrement inférieure à P_{asup} (voir figures 5.15, 5.16).

La surdétente peut avoir un caractère :

- Permanent : des moteurs fusée munis de tuyères adaptées à haute altitude et fonctionnant à basses altitudes (au sol lors d'essais ou à basse altitude durant l'ascension d'un lanceur)
- Transitoire : lors de la séparation d'étages ou lors du démarrage correspondant à la montée en pression dans la chambre de combustion.

1. La dissymétrie du décollement peut être engendré par :

- Lorsque la section de sortie de la tuyère est tronquée d'une manière non perpendiculaire à l'axe (Scarfed nozzle).
- Un obstacle solide ou liquide extérieur à la tuyère.
- Un gradient élevé de pression adverse traduisant le fonctionnement de la tuyère en régime de surdétente.

Ce genre de décollement a fait l'objet de plusieurs recherches expérimentales, en vue de préconiser une similitude permettant la prédiction de la distribution de la pression le long de la paroi en fonction des paramètres bien connus (la géométrie de la tuyère, la nature du gaz de combustion, le rapport des pressions amant et val). Citons les expériences menées par M.V. Herbert et R.J. Herd [15] puis par R.H Schmucker [16] et d'autres, qui ont montré que plusieurs expériences ont été faites dans des conditions mal définies (la nature de la couche limites, grandes incertitudes des niveaux de pression au décollement) cette incertitude, traduite par une grande dispersion des points expérimentaux, est principalement due aux techniques et aux moyens de mesure rudimentaires utilisés à l'époque. Les premières expériences concernant le décollement dans les tuyères propulsives fonctionnant avec des gaz chauds ont été faites par Forster et Cawles [1949] à l'Institut de Technologie de Californie.

Si la tuyère est amorcée (état sonique au col), l'écoulement est supersonique au divergent et ne dépend que du rapport entre la pression ambiante P_a (supposée variable) et la pression statique en sortie P_e . On distingue, pour ces régimes de fonctionnement, les écoulements non-décollés et des écoulements décollés.

– **A) Ecoulement non-décollé :**

Dans le cas d'une tuyère amorcée et que l'écoulement dans le divergent reste attaché à la paroi, le profil de pression pariétale n'est pas influencé par la pression ambiante externe mais dépend principalement de la pression chambre, P_c , et de la géométrie de la tuyère employée. Ce type d'écoulement se rencontre lorsque le moteur fonctionne à et au-delà d'une altitude pour laquelle il a été adapté. En terme de rapport de pression, cela correspond à :

- $P_a = P_e = 1$: tuyère adaptée à la pression ambiante ou extérieure.

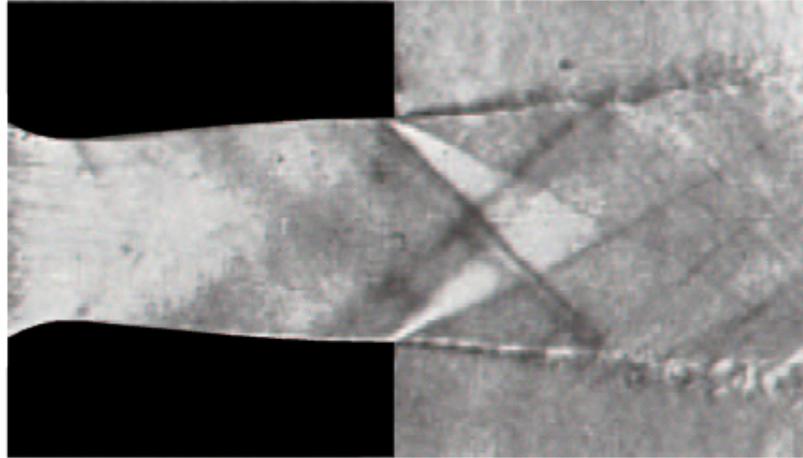


FIGURE 5.17. *Tuyère bidimensionnelle en régime sous-détendu ($P_a/P_e = 0,66$). Notez la présence des faisceaux de détente à la lèvre de sortie de la tuyère (photo tirée de [17])*

- $P_a/P_e < 1$: régime de sousdétente, dans ce cas, un faisceau de détente apparait à la lèvre de sortie de la tuyère (voir figure 5.17)

- **B) Ecoulement avec décollement naissant :**

Dans ce cas la tuyère fonctionne en régime de surdétente et le rapport de pression $P_a/P_e > 1$, un choc de recompression ou de décollement se forme à la lèvre de la tuyère, à cause de l'existence d'un gradient de pression adverse, la couche limite s'épaissit et reste attachée à la paroi jusqu'au sortie de la tuyère (voir figure 5.18).

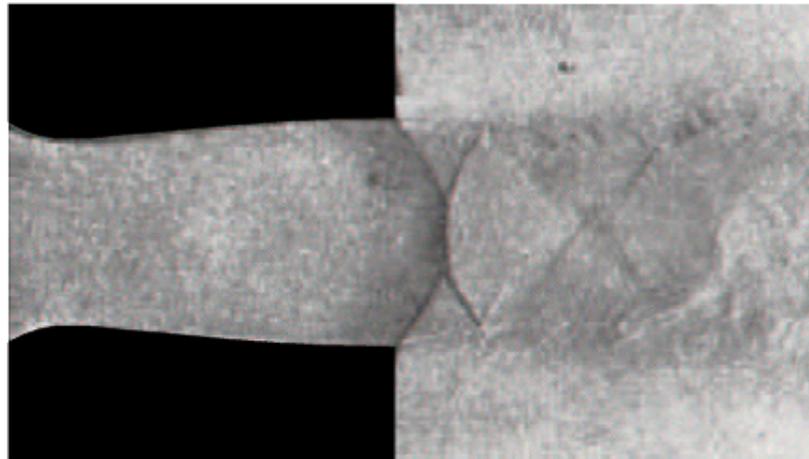
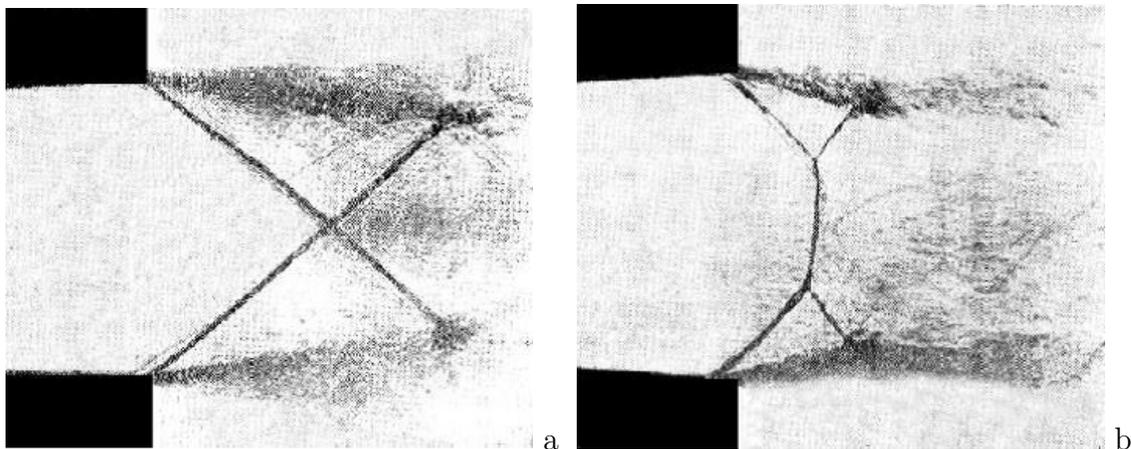


FIGURE 5.18. *Tuyère bidimensionnelle en régime surdétendu avec réflexion de Mach pour un rapport de pression ($P_a/P_e > 2,5$)(photo tirée de [17])*

Différentes structures de choc (réflexion régulière, réflexion de Mach et choc en chapeau [18]), décrites plus en détails par la suite, peuvent être observées dans le jet comme en témoignent les figures 5.19, 5.20.



Réflexion régulière à $P_c/P_a = 3,84$ fig13a Réflexion de Mach à $P_c/P_a = 3.54$ fig13b

FIGURE 5.19. *Jet supersonique avec réflexion régulière et réflexion de Mach. P_c désigne la pression chambre (photos tirées de [19])*

– C) **Ecoulement avec décollement :**

Quand la pression aval continue à augmenter et dépasse un certain seuil². ($P_a/P_e \gg 1$, régime de forte surdétente), la couche limite décolle au moment où elle ne peut plus contrer le gradient de pression adverse qui devient trop important (voir figure 5.20). Soulignons, à ce niveau, que la prédiction de seuil de pression est un enjeu important pour les motoristes, qui souhaitent souvent éviter ou maîtriser la position de décollement. Les critères de décollement ont pour objectif d'estimer ce seuil.

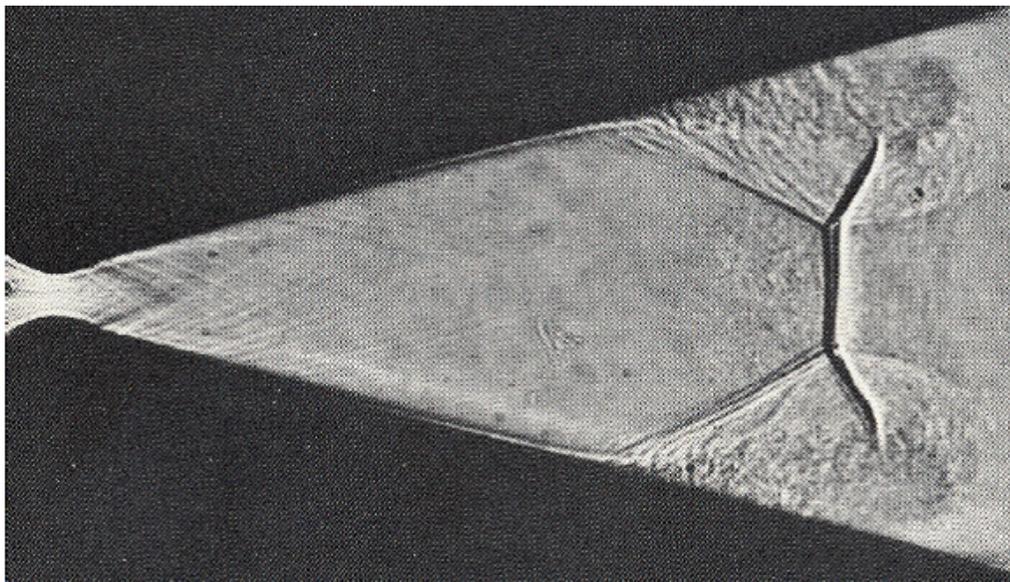
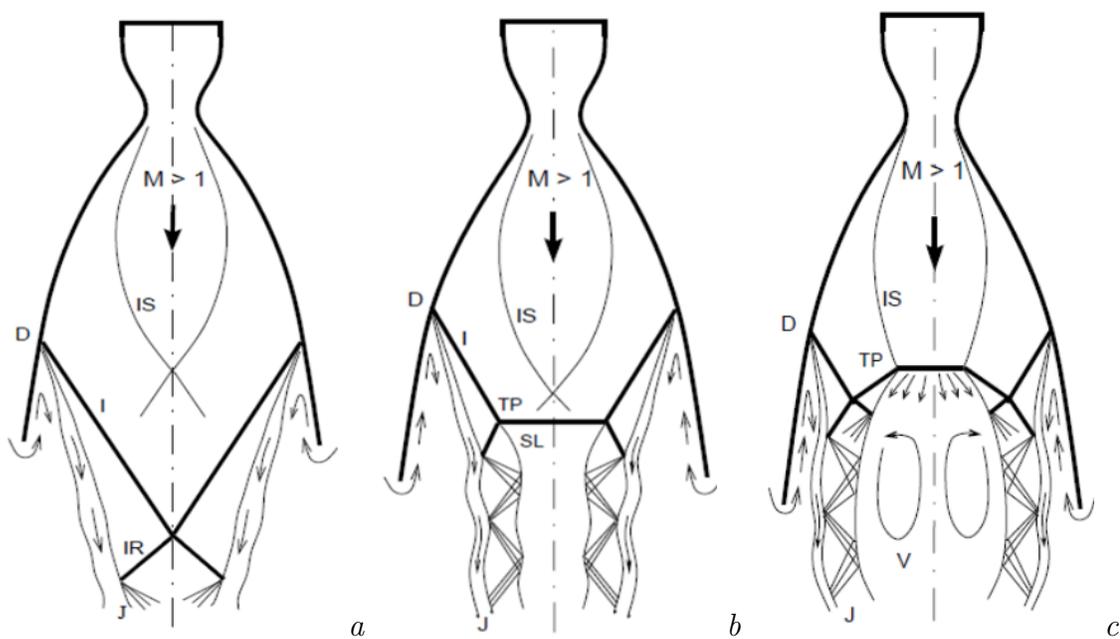


FIGURE 5.20. *Décollement effectif lors d'un amorçage rapide - tuyère Amann [20]*

2. En pratique, $P_e = P_a \approx 0.4 - 0.8$ [21]



Réflexion régulière

Réflexion de Mach

Choc en chapeau



Réflexion de Mach

Choc en chapeau

FIGURE 5.21. Représentation schématique de la réflexion régulière, de la réflexion de Mach et du choc en chapeau. *I* : choc incident, *IS* : choc de focalisation, *IR* : choc réfléchi, *J* : jet, *SL* : ligne de glissement, *TP* point triple, *D* : point de décollement, *V* : tourbillon (en haut). Moteur Vulcain au banc d'essai - Photos Snecma (en bas)

les différents types et structures de choc dans les tuyères de révolution sur-détendues sont récapitulées dans les figures ci-dessus. Comme évoqué précédemment plusieurs types de structure de choc peuvent être observés dans le jet. Lorsque l'évolution du profil de la tuyère est doucement gradué (cas des tuyères de moteurs fusée de type TIC), le choc de décollement se réfléchit sur l'axe de symétrie. Deux types de réflexion peuvent se produire :

- l'une dite "régulière"³ mais il arrive que le disque de Mach soit si petit que la réflexion est apparemment régulière (figure 5.21a) ou le choc incident I se réfléchit directement sur l'axe de symétrie en un choc oblique réfléchi IR.

- l'autre dite "singulière" ou "de Mach" ou le choc incident I se réfléchit en formant un choc normal à l'axe appelé disque de Mach (figure 5.21b). Du point triple TP, où se rencontrent le choc incident, le choc réfléchi et le disque de Mach, émane une ligne de glissement SL. Cette discontinuité isobare sépare la poche subsonique en aval du choc fort de la région supersonique en aval du choc réfléchi IR.

On note que l'obtention de l'une des réflexions citées au-dessus dépend fortement du rapport de pression (P_C/P_a) et du profil de la tuyère. D'autre part, le phénomène de transition entre ces réflexions peut faire intervenir un effet d'hystérésis ([22],[23]).

Lorsque le profil de la tuyère est fortement optimisé en poussée (TOC et TOP), il se forme alors un choc interne de focalisation (IS). Ce choc est dû à l'évolution de la courbure du profil de la paroi au niveau du col. L'interférence du choc interne avec le choc de décollement (I) peut conduire à une structure de choc complexe dite "en chapeau" (figure 5.21c). Cette structure est le résultat de l'interférence entre le choc de décollement et la réflexion de Mach inverse du choc interne sur l'axe de symétrie. Là encore, l'obtention de l'une ou l'autre de ces structures dépend du profil de la tuyère, du rapport de pression et fait également intervenir un effet d'hystérésis [24].

En dernier lieu, concernant le décollement lui-même, deux types de configurations

3. Ce type de réflexion est théoriquement impossible dans les tuyères axisymétriques [22]

ont été observés expérimentalement (voir figure 5.21), puis confirmés numériquement.

5.3.1 *Différente topologies de décollement :*

L'écoulement dans un divergent comprend en réalité des effets turbulents et visqueux, prépondérants près de la paroi. Pour un jet surdétendu, la couche limite développée est soumise à un gradient de pression adverse plus ou moins intense selon le rapport de pression, au-delà d'une certaine grandeur, la couche limite décolle à cause du manque d'énergie (i.e. la couche limite décolle avant d'atteindre la lèvre de la sortie de la tuyère). La compression de l'écoulement aura lieu en amont du divergent, au travers un choc de décollement s'est formé par focalisation d'ondes de compression. En aval du point de décollement situé derrière ce choc, naît une couche de mélange entre une zone de retour et le jet décollé (voir figure 5.22). La topologie générale de l'écoulement n'est donc plus gouvernée par le processus eulériens mais avec des effets visqueux et turbulents intervenant au niveau de la couche limite; ces derniers plus complexes, rendent la prédiction théorique du décollement extrêmement délicate. L'analyse montre l'existence de deux régions dans un écoulement décollé :

- La première zone se situe entre le point * et S (zone de décollement libre).
- La largeur de cette zone est très faible (environ trois l'épaisseur de la couche limite), une augmentation très rapide est observée de la pression pariétale au pied de décollement *.
- La pente de la courbe de pression pariétale est la même pour cette région quel que soit l'obstacle provoquant le décollement, confirmée par les expériences de Chapman [25] et Mager [26] pour le décollement devant des rompes de compression et des marches de grandes dimensions, et ceci reste valable pour les décollements dans des tuyères surdétendues.
- Carrière [27] a généralisé la théorie de Chapman [25] (pour des écoulements plans et uniformes) au cas d'un écoulement de révolution non uniforme. Cette théorie généralisée corrélait bien les résultats expérimentaux pour des tuyères coniques ou

profilées (cette région est appelée ainsi "zone d'interaction libre". En réalité, l'écoulement est provoquée seulement par le processus d'interaction entre couche limite et le choc de décollement. En revanche, il dépend essentiellement de la couche limite incidente. L'annulation du frottement pariétal correspond à la fin de cette zone ainsi au point de décollement. L'expérience [28] montre que l'augmentation de la pression statique s'effectue en grande partie (80 %) dans cette région.

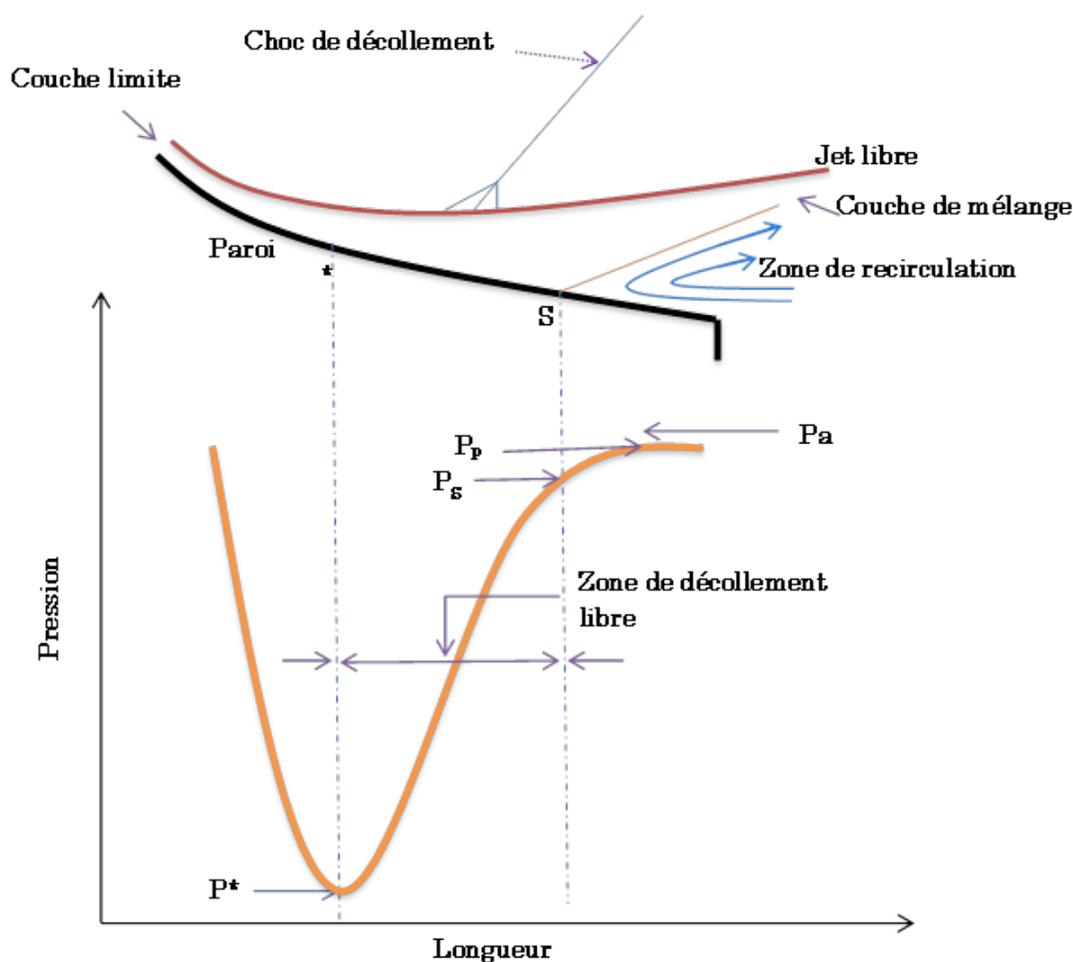


FIGURE 5.22. Schéma de principe d'un décollement libre. Les indices $*$ et S font référence, respectivement, au pied de décollement (point de séparation naissante), au point de séparation effective

5.3.2 *Décollement libre*

Le décollement dans une tuyère amorcée aura lieu dans le divergent en amont de la lèvre (la sortie de la tuyère) sous l'effet d'un gradient de pression adverse, le jet décollé libre débouche dans une atmosphère au repos. Dans le cas d'un écoulement surdétendu (figures. 5.23, 5.24, 5.25, 5.26), la couche limite décolle et s'étend librement jusqu'à la lèvre de sortie de la tuyère, la zone juste en aval est alors alimentée par l'air ambiant aspiré dans le divergent et se mélangeant par la suite avec le jet. La pression pariétale atteinte à la sortie est souvent légèrement inférieure à la pression ambiante (figure 5.27). La première déviation de la pression pariétale est appelée pression de la séparation naissante notée P^* ⁴, La pression pariétale augmente ensuite rapidement jusqu'à une pression dite "plateau" généralement plus faible que la pression ambiante P_a , ces variations de pression pariétale sont induites par l'interaction choc/couche limite. Le décollement effectif a lieu plus en aval, un peu avant le plateau. L'augmentation de pression entre P_p et P_a , due à la zone de recirculation, est beaucoup moins marquée. Une distribution typique pour le décollement libre est schématisée sur la figure 5.22. Nous remarquons que le décollement fait intervenir deux zones distinctes, l'une est régie par le saut de la pression P^*/P_p et l'autre par le saut P_p/P_a lié à l'écoulement ambiant aspiré dans la zone de recirculation.

4. Parfois notée P_i dans la littérature (pression au pied de décollement)

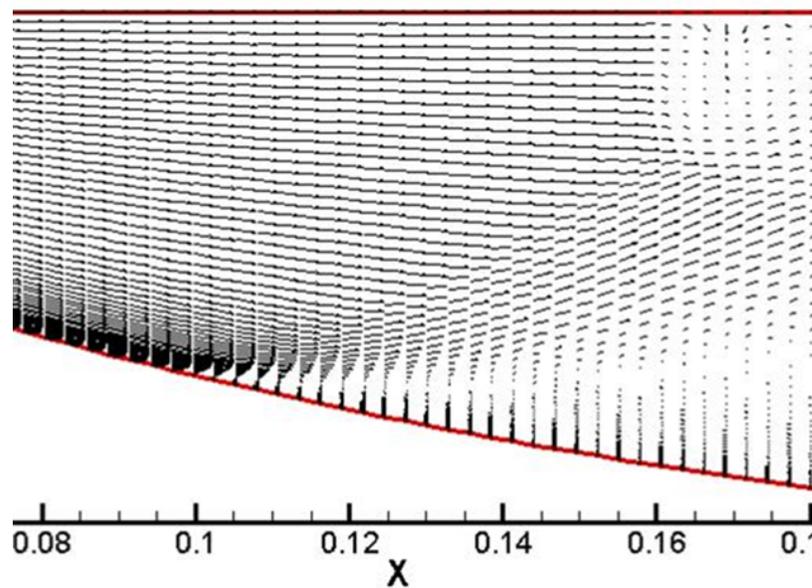


FIGURE 5.23. Distribution du champ de vitesse dans le divergent dans une tuyère TIC pour un rapport de pression $P_C/P_a = 25$, la température de la paroi est maintenue à $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$

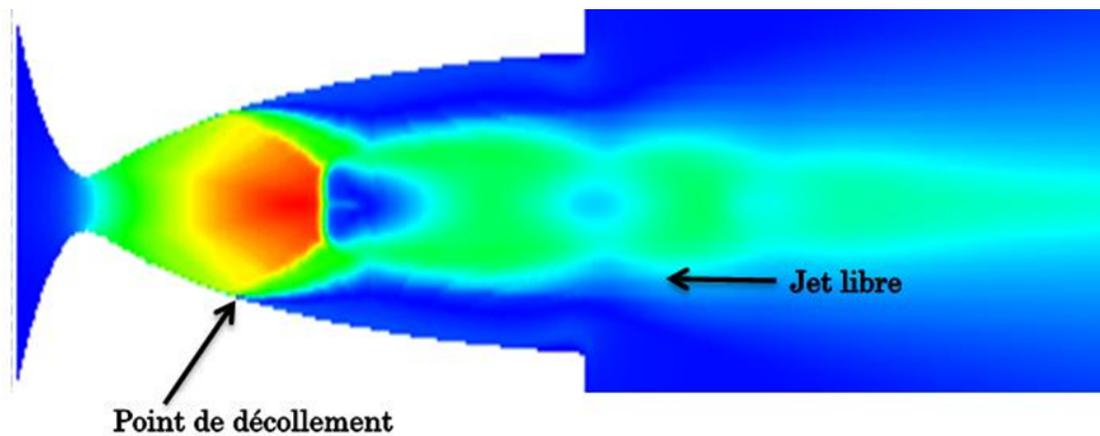


FIGURE 5.24. Décollement libre FSS (Free Shock separation) dans une tuyère TIC Nombre de Mach ($min = 0.0$, $max = 4.97$) pour un rapport de pression $P_C/P_a = 25$, $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$

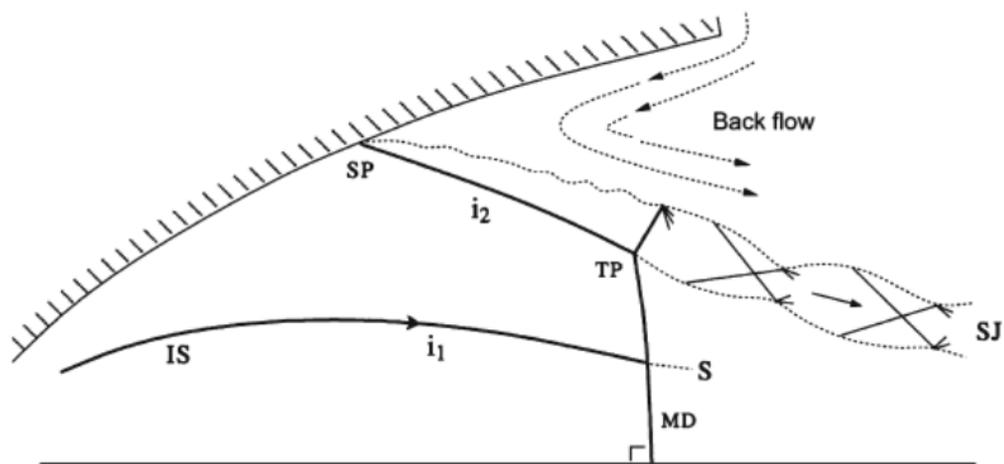


FIGURE 5.25. Représentation schématique du décollement libre FSS IS : choc interne, SJ : jet supersonique, SP : point de séparation, MD : disque de Mach, TP : point triple

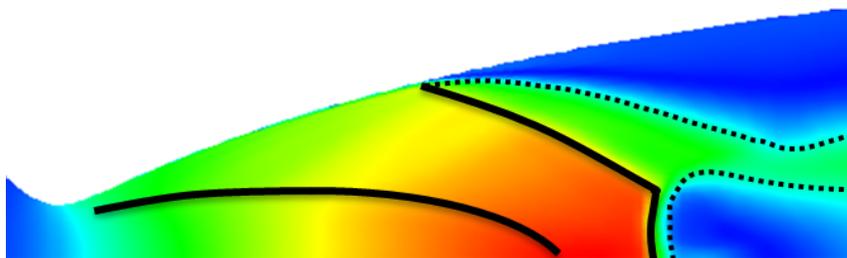


FIGURE 5.26. structure de Réflexion de Mach dans une tuyère idéale tronquée avec $P_C/P_a = 25$, $T_W = T_0/2$, $T_0 = 843K$

La figure 5.23 montre le champ de vitesse dans la tuyère et agrandie sur la région de la paroi du divergent. On observe très nettement dans cette figure une structure d'un décollement libre, d'où le rapport de détente est supérieur de celui de l'adaptation, une compression s'exerce sur la couche limite du jet où un choc se forme en un point qui correspond au point du pied de décollement (le point * sur la figure 5.22) dans le divergent de la tuyère, dans ce cas le gradient de pression adverse n'atteint pas la valeur nécessaire au décollement de la couche limite, et ne permet pas

au jet extérieur de pénétrer à l'intérieur de la tuyère (figure 5.24 à figure 5.27). Par conséquent, l'écoulement continu se détend jusqu'au point s (dite point de séparation ou de décollement figure 5.22) où l'intensité du choc devient de plus en plus importante et suffisante pour faire décoller la couche limite de la paroi sur laquelle elle s'était développée. La distribution de la pression pariétale dans ce cas (figure 5.27) est non-perturbée, qui atteint dans ces conditions d'une tuyère refroidie ($P_C/P_a = 25$, $T_W = T_0/2$ et $T_0 = 843K$) un asymptote correspond à la pression plateau (P_p voir figure 5.22) caractéristique de l'écoulement étendu. Le schéma représentatif de la structure de décollement libre obtenue par les calculs des équations de Navier-Stokes dans une tuyère idéale tronquée (figure 5.25) qui correspond à une réflexion de Mach, cette structure de choc est déjà expliquée précédemment sur la figure 5.21.

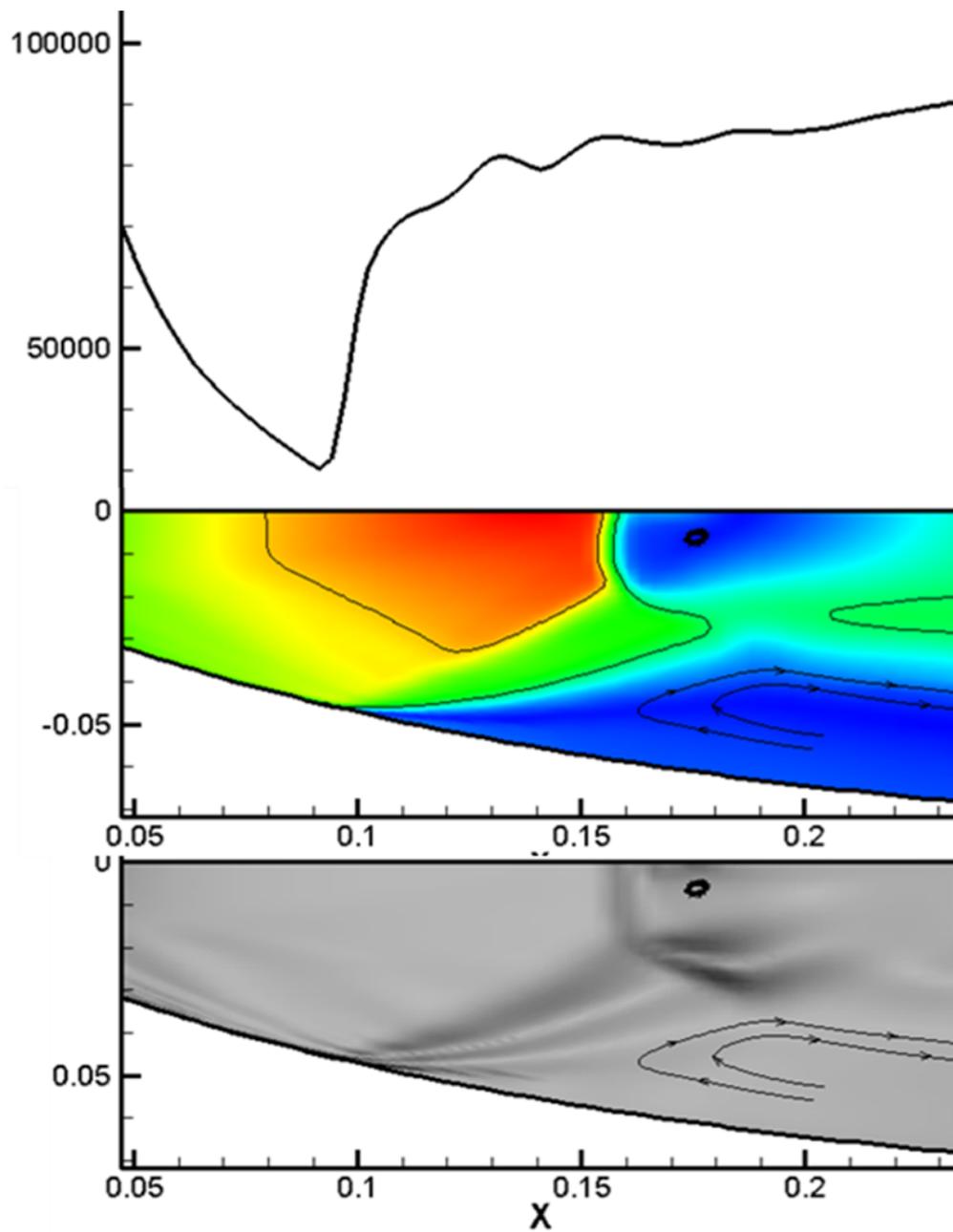


FIGURE 5.27. Décollement libre dans une tuyère TIC refroidie. Nombre de Mach ($\min = 0.0$, $\max = 4.97$) pour un rapport de pression $P_C/P_a = 25$, distribution de la pression pariétale (en haut), le champ de Mach (en milieu), Strioscopie numérique (en bas)

5.3.2.1 Etude de l'effet de la réalisabilité sur la position du point de décollement

Cette analyse est faite pour un écoulement compressible dans une tuyère à contour optimisé TOC de LEA de Poitier, car ce type de tuyère présente beaucoup de phénomènes complexes. La pression génératrice dans la chambre de combustion choisie est PNR=22 qui devance légèrement le commencement d'avoir un comportement de décollement restreint dans ce type de tuyère, cette situation nous permet de dégager une conclusion peut être pertinente sur l'effet des coefficients prises dans l'équation limitant c_μ pour éviter d'avoir un tenseur normal négatif.

Dans une première analyse, nous avons vu que juste près de la paroi de la tuyère (voir figure 5.28), le rapport entre la déformation sans dimension S sur la vorticité Ω , égale presque $\sqrt{2}$. Cette remarque, nous ont conduit de faire un petit changement sur l'équation de c_μ , et de proposer l'équation simplifiée suivante :

$$c_\mu = \min \left\{ c_{\mu,lim}, \frac{1}{A_0 + A_s S^a \left(1 + \frac{A_\Omega}{r^a}\right)^{1/a}} \right\} \quad (5.1)$$

avec $r = S/\Omega$

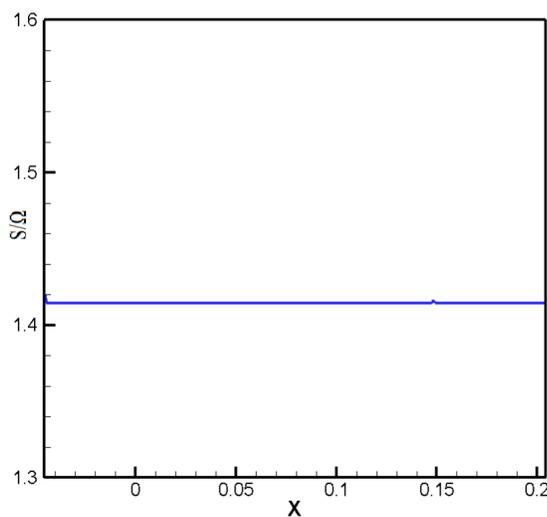


FIGURE 5.28. Rapport $r = S/\Omega$ sur la paroi de la tuyère LEA-TOC

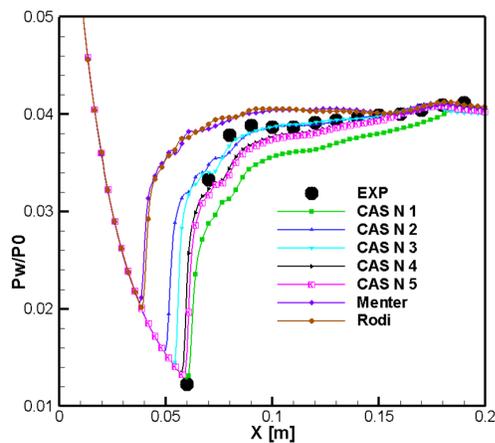


FIGURE 5.29. Validation de l'équation de la réalisabilité (5.1) proposée dans la présente étude pour l'amélioration de la prédiction de la pression pariétale)

	A_0	A_s	A_Ω	a	r
CAS N1	0	2.20	0	1	1.4138
CAS N2	0	2.48	0	1	1.4138
CAS N3	0	1.73	1	2	1.4138
CAS N4	0	1.63	1	2	1.4138
CAS N5 (équ.5.1)	0	1.63	1	2.1	S/Ω
Menter	0	3.23	0	1	1.4138
Rodi (ARSM)	2.85	1.77	1	2	1.4138

TABLE 5.1. coefficients dans l'équation de c_μ

Les coefficients dans l'équation de c_μ sont optimisés avec le calcul numérique (voir tableau 5.1), les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.29, la comparaison avec l'expérience et les modèles de littérature montre que l'équation 5.1 prédire avec précision la position du point de décollement. Notons ici, que plus le coefficient A_s diminue, plus que le point de décollement se déplace en aval. Ce qui est essentiel dans

cette paragraphe, c'est que les coefficients dans l'équation de la réalisabilité, ont un effet non-négligeable sur la position du point de décollement, cette partie nécessite une étude toute entière, qui prend en considération l'assurance de la réalisabilité, et la bonne prédiction du position de point de séparation. Car nous avons vu que la production de l'énergie cinétique turbulente est impliquée par la limitation de c_μ et par conséquent dans l'apparition d'un tenseur négatif. Dans la figure 5.46, la comparaison avec l'expérience dégage d'un accord très satisfaisant, la pression plateau est bien calculée avec des rapports de pression 15 et 16.

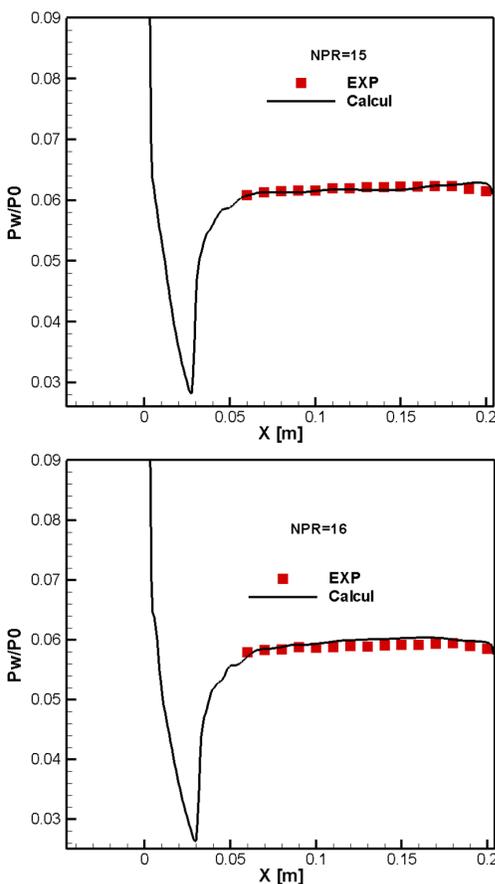


FIGURE 5.30. Décollement libre, comparaison avec l'expérience sur LEA-TOC pour des rapports de pression $NPR = P_0/P_a$ égal à 15 et 16

5.3.3 *Décollement restreint*

Quand on observe le jet supersonique de sur-détente provenant d'une tuyère de moteur-fusée fonctionnant au sol, on y voit des régions lumineuses qui traduisent l'existence de chocs intenses associés à un régime non-adapté de l'écoulement. Cette luminosité est due au rayonnement thermique des gaz portés à haute température lorsqu'ils sont décélérés lors de la traversée des chocs intenses. Grâce aux simulations numériques nous permettons des tracer des schémas appropriés décrivant l'ensemble de l'écoulement et les structures de chocs. Jusqu'à ici le décollement libre s'avère être le type ou la configuration la plus commune. Un autre régime stationnaire de sur-détente, autre que le décollement libre, peut intervenir spécifiquement dans les tuyères qui exigent l'existence d'un choc interne naissant près du col, ou un type de décollement engendrant une structure de chocs en chapeau comme les tuyères TOC. C'est le régime de décollement restreint (Restricted Shock Separation ou RSS, en anglais), ainsi dénommé lorsque le recollement de la couche limite intervient sur le divergent juste après le décollement (figure 5.31, 5.32). Ce type de décollement (décollement restreint) a été identifié expérimentalement pour la première fois lors des essais sur une maquette de tuyère optimisée du moteur J-2S [29]. L'existence d'un choc interne dans le divergent de la tuyère est lié à un changement brusque de la courbure, ce choc interne est généralement rencontré dans les tuyères fortement optimisées en poussée, au niveau du raccordement entre l'arc circulaire formant le col et le profil adopté pour rejoindre la section de sortie (figure 5.33). La détente initiale jusqu'au raccordement augmente avec l'angle de l'arc circulaire (r_c/r_{th}), dont la valeur est conditionnée par le profil adopté ensuite, et le nombre de Mach souhaité en sortie.

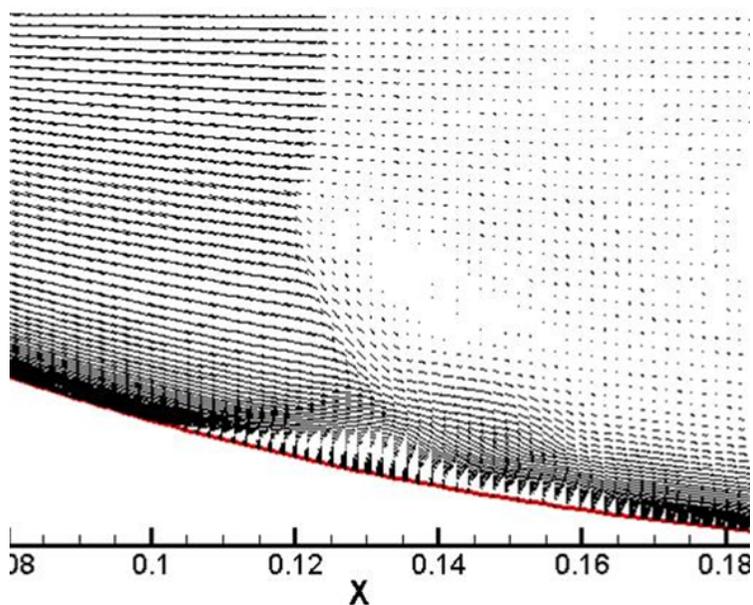


FIGURE 5.31. *Distribution du champ de vitesse dans le divergent dans une tuyère TOC pour un rapport de pression $P_c/P_a = 25$, la température de la paroi est maintenue à $T_w = T_0/2$, $T_0 = 843K$*

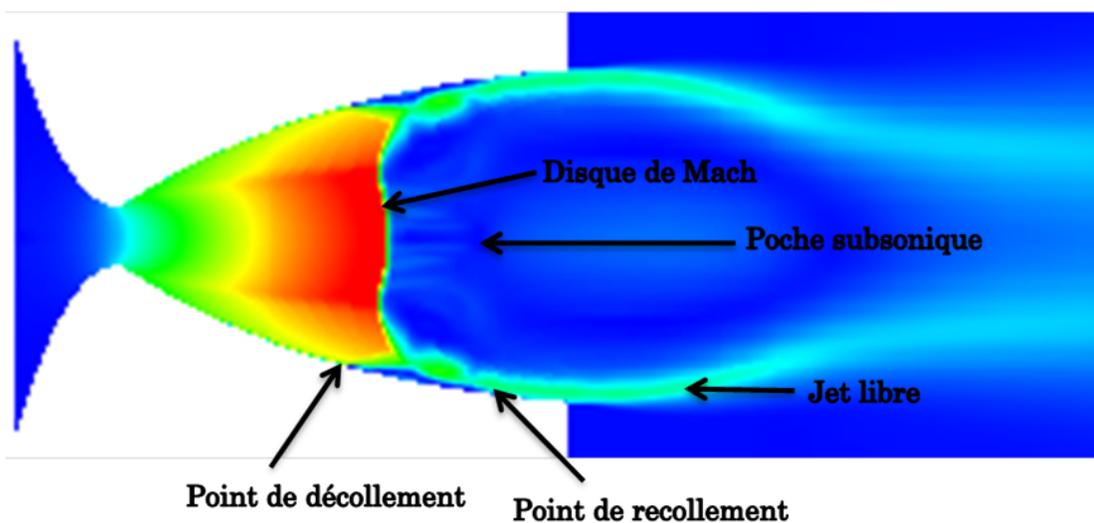


FIGURE 5.32. *Décollement restreint RSS (Restricted Shock Separation) dans une tuyère TOC Nombre de Mach ($min = 0.0$, $max = 5.26$) pour un rapport de pression $P_c/P_a = 25$, $T_w = T_0/2$, $T_0 = 843K$*

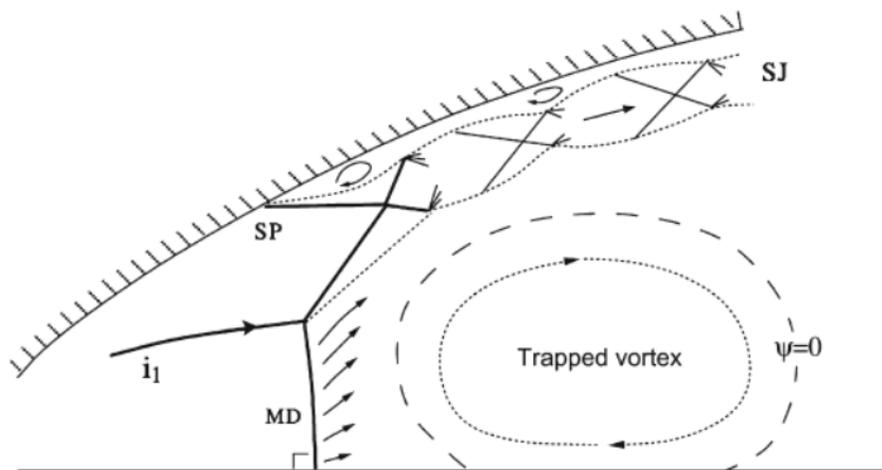


FIGURE 5.33. Représentation schématique du décollement restreint RSS
 IS : choc interne, SJ : jet supersonique, SP : point de séparation, MD :
 disque de Mach, TP : point triple

L'examen de la distribution de la pression pariétale obtenue pour les conditions ($P_c/P_a = 25$, $T_w = T_0/2$, $T_0 = 843K$) fait clairement apparaître des pics de pression dépassant la valeur de la pression ambiante (P_a) (figure 5.34) a été interprétée comme associée à un régime de décollement restreint, où la couche limite recolle sur le divergent immédiatement après avoir traversé un premier choc (figure 5.35). Il est à noter ici que les distributions de la pression pariétales de la tuyère TOC sont différentes suivant la nature du décollement, libre ou restreint. Pour un rapport P_c/P_a correspondant à un décollement restreint (dans notre cas, pour une tuyère TOC refroidie et avec les conditions de travail déjà citées) la couche limite recolle après avoir subi un décollement sous l'effet de choc, c'est le cas d'un décollement restreint caractérisé à la paroi par un point de décollement suivi d'un point de recollement. Le décollement restreint est associé à une allure très perturbée du profil de pression, après une brusque élévation de pression à la traversée du pied de choc, on observe tout d'abord une courte région de plateau correspondant à la poche de fluide décollé, suivie d'une succession rapide d'augmentation et de diminution de la pression qui

traduit les ondes de choc et de détente présentes dans le jet supersonique annulaire qui a recollé à la paroi.

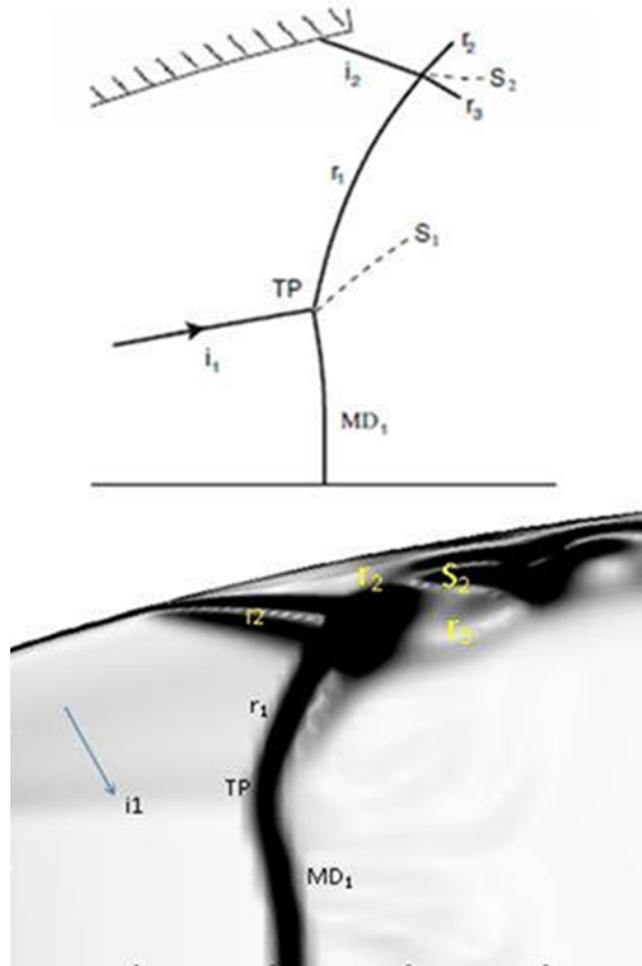


FIGURE 5.34. confrontation du schéma de principe de RSS dans le cas théorique (en haut) et calcul numérique (en bas) i_1 choc interne, i_2 choc incident, r choc de réfléchi, TP point triple, S ligne de glissement

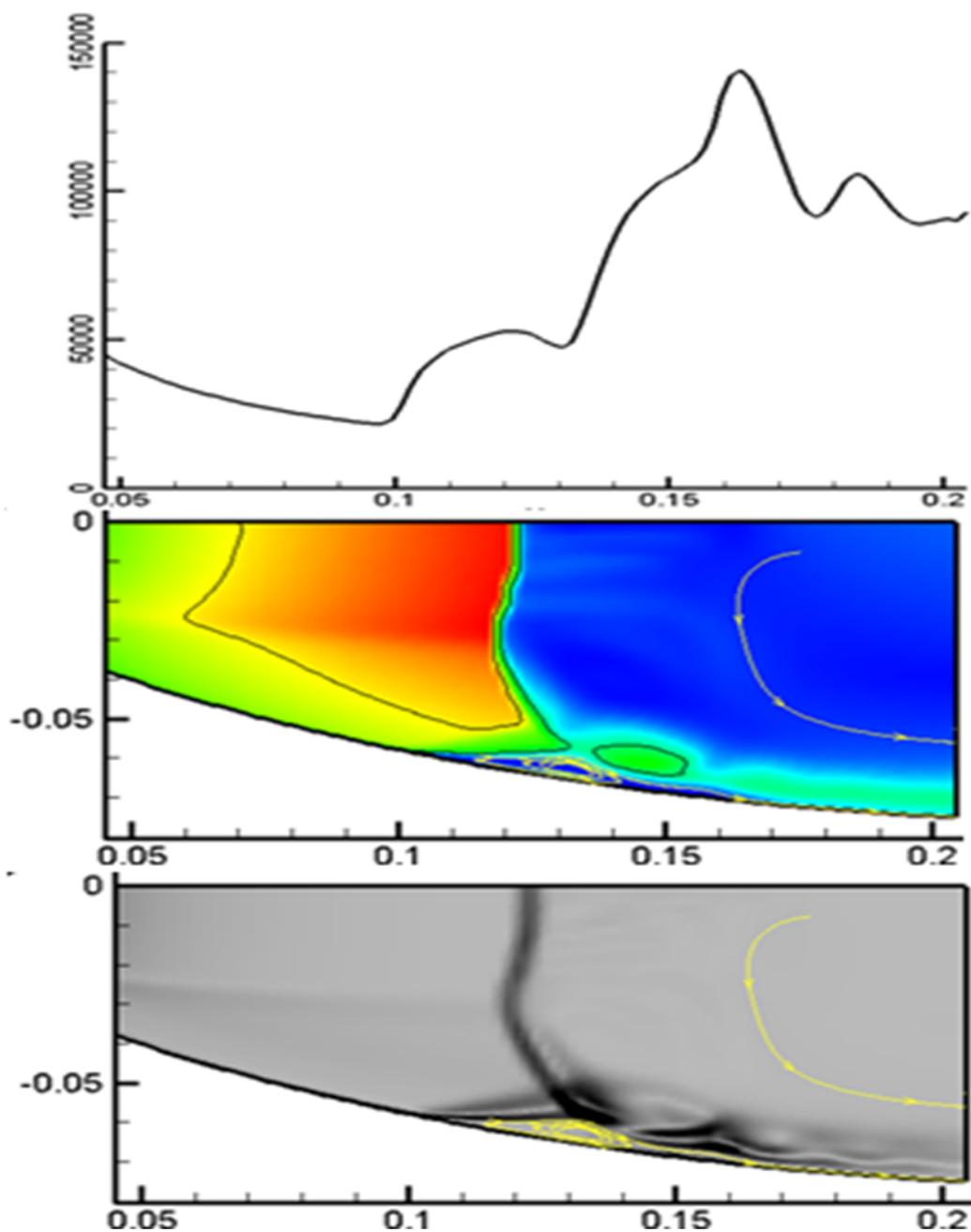


FIGURE 5.35. Décollement restreint dans une tuyère TOC refroidie. Nombre de Mach ($\min = 0.0$, $\max = 5.26$) pour un rapport de pression $P_c/P_a = 25$, distribution de la pression pariétale (en haut), le champ de Mach (en milieu), Strioscopie numérique (en bas)

En particulier, la pression en aval du point de séparation a montré un comportement instable avec de fortes oscillations, et, enfin, grimpé à des valeurs très supérieures à la pression ambiante. Les chercheurs ont attribué ce comportement au recollement de l'écoulement séparé à la paroi de la tuyère, et en raison de l'extension limitée de cette région séparée, ils l'ont appelé la séparation de choc restreint (RSS). Ces calculs ont révélé un tourbillon piégé derrière le choc de ré-compression (figure 5.37). Plus tard Nasuti et Onofri ([30]-[33]) ont souligné le rôle joué par le tourbillon sur la génération des charges latérales et ont suggéré une explication possible de sa formation principalement basée sur le rôle clé joué par les gradients de l'écoulement en amont du disque de Mach dans la tuyère. Selon cette explication, un mécanisme non-visqueux est la principale cause de la génération de la vorticité. En particulier, le rôle de conduite est joué par l'écoulement non-uniforme impactant le disque de Mach. Et à cause de cet écoulement non-uniforme en amont et à cause de la pression tout à fait uniforme en aval (figure 5.38), la force de choc ne peut pas être constante le long de sa surface et sa forme prend un profil courbé, au lieu d'un plat. En conséquence, un écoulement rotationnel se produit derrière le disque de Mach (figure 5.42) avec des gradients de vitesse et d'entropie, qui deviennent plus grands pour augmenter la non-uniformité d'écoulement en amont et peuvent produire ainsi des structures tourbillonnaires. Le tourbillon d'axe, dont sa grandeur et son taux de croissance sont principalement contrôlés par les effets visqueux, agit comme un obstacle épuisant pour le jet principal, qui dévie donc vers la paroi. En conséquence, une composante radiale d'écoulement s'est produite derrière le choc, qui tend à ré-attaché la région séparée de la paroi, en changeant ainsi la structure de l'écoulement de la région séparée du type FSS (décollement libre) au RSS (décollement restreint). Derrière le point de recollement, et en raison de l'impact du jet sur la paroi, une augmentation soudaine de la pression pariétale se produit. En résumé, la non-uniformité de l'écoulement peut produire un profil de choc courbé avec un tourbillon piégé en aval (aussi appelé "choc en chapeau") qui agit comme un conducteur pilote pour la transition FSS   RSS

produisant les plus haut pics de pression pariétales. Cette conclusion est prouvée en grande partie par les expériences [34]-[40]. Concernant les causes de la génération de la région de recirculation, une différente interprétation a été donnée par Hagemann et Frey [37], qu'ils l'ont indiqué comme une conséquence de la réflexion directe ou inverse de Mach du choc interne qui caractérise typiquement le champ de l'écoulement dans les tuyères à profil optimisé. Suite à ce point de vue, ils ont suggéré que les tuyères idéales à contour tronqué seraient un meilleur choix pour éviter les charges latérales intenses [36],[41],[42]. Cependant, des expériences récentes [43],[44] ont montré que même dans les tuyères TIC, à des régimes de basse pression, une grande amplitude de charges latérales peut notamment se produire.

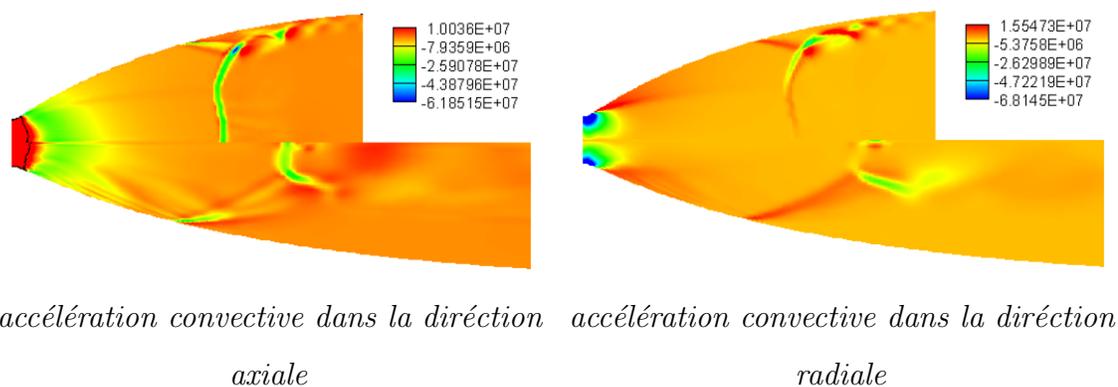


FIGURE 5.36. Accélération convective représentée par $\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$

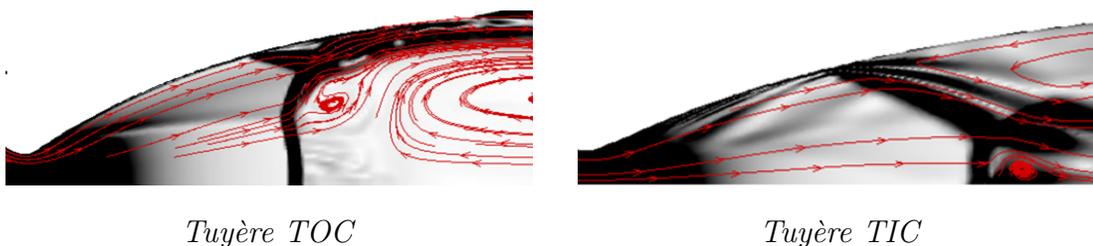


FIGURE 5.37. Comparaison par striscopie numérique entre la tuyère TOC et TIC, mêmes conditions opératoires

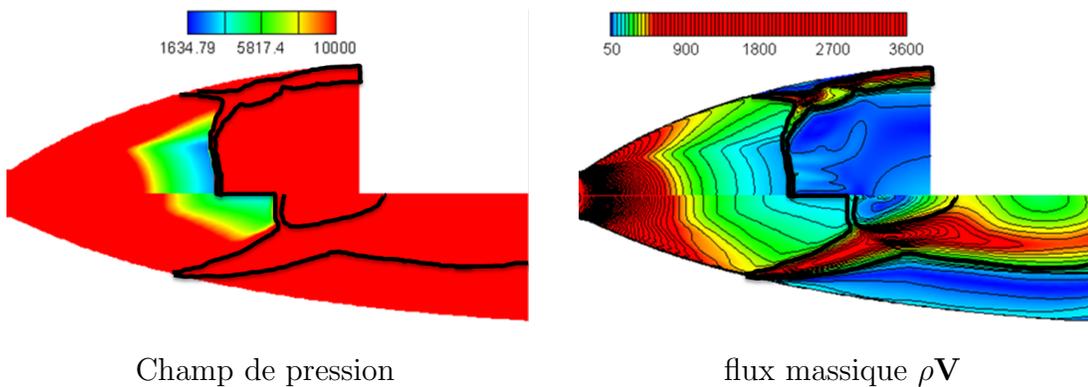


FIGURE 5.38. tuyère TOC(en haut) et TIC(en bas)

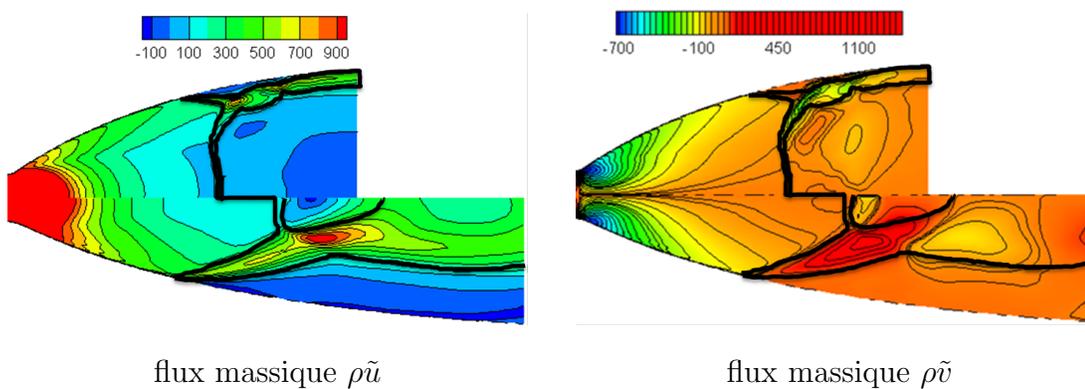


FIGURE 5.39. Champ de flux massique ρu , ρv

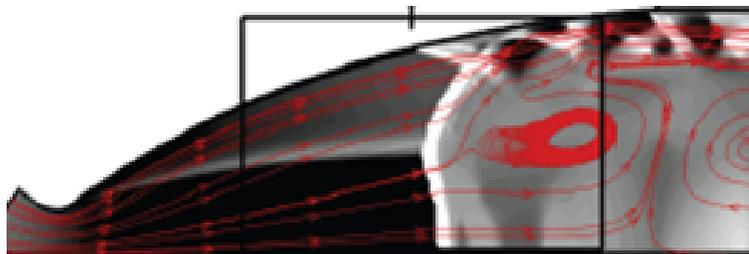


FIGURE 5.40. Structure de décollement RSS (Schlieren image) et lignes de courant pour la tuyère LEATOC, référence [45], avec un schéma au second ordre MUSCL

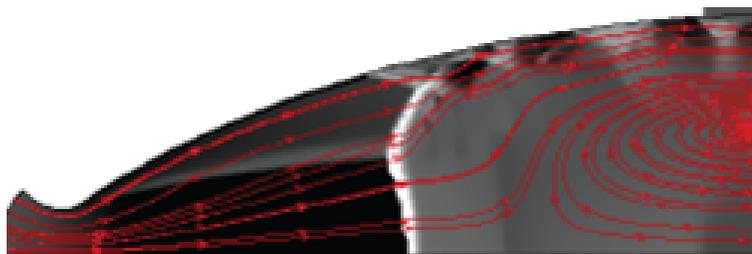


FIGURE 5.41. *Structure de décollement RSS (Schlieren image) et lignes de courant pour la tuyère LEATOC , référence [45], avec un un schéma WENO à l'ordre 5*

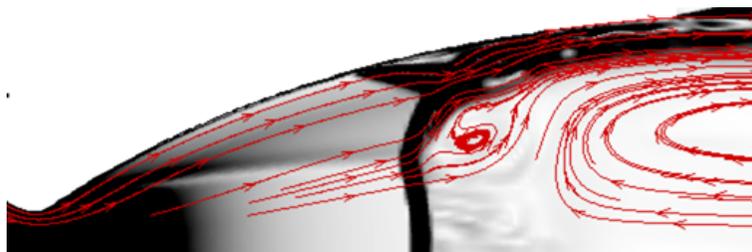
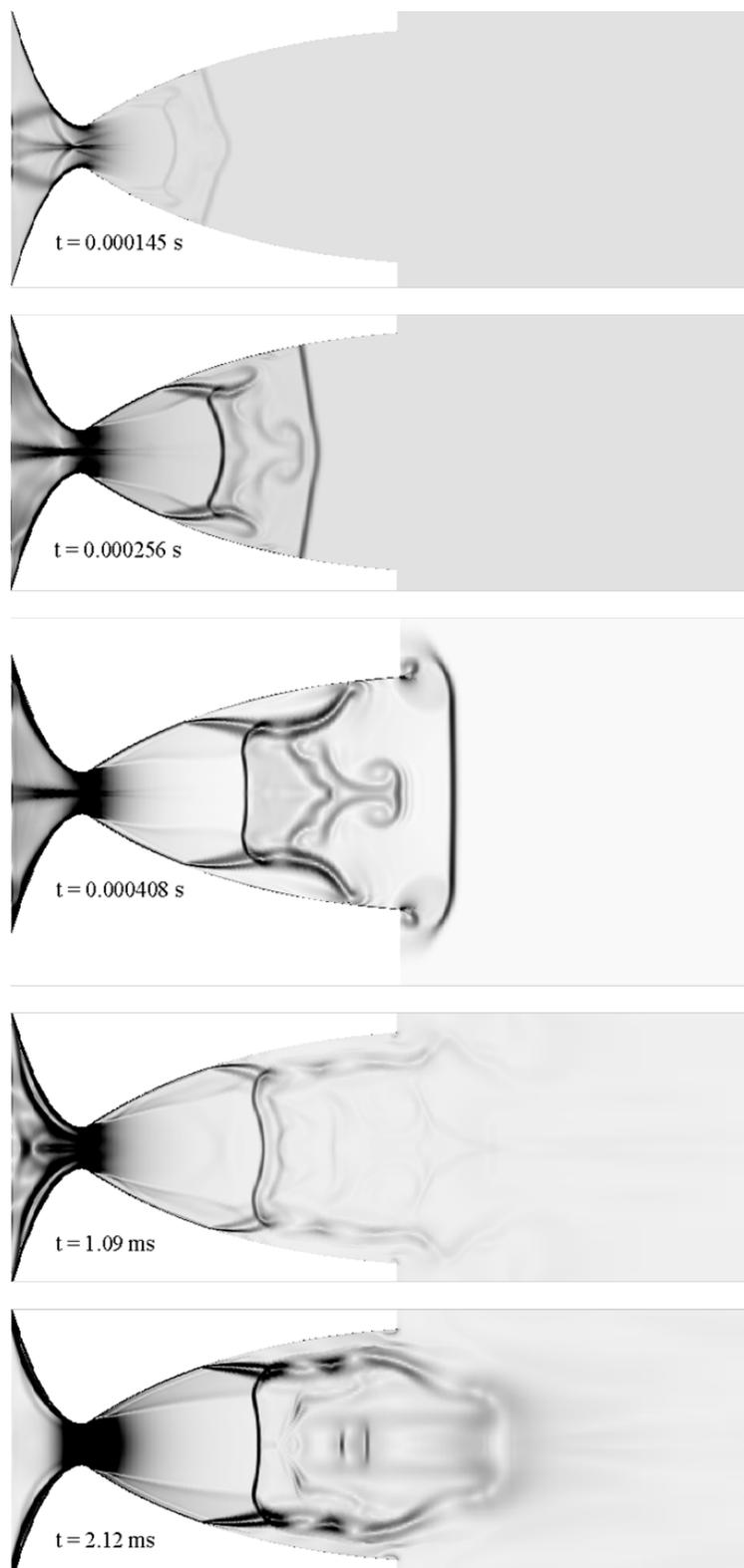


FIGURE 5.42. *Structure de décollement RSS (Schlieren image) et lignes de courant pour la tuyère LEATOC , présente étude*

La comparaison des résultats obtenus avec le modèle SST-V Menter figure 5.42 contre la figure 5.41, donne un accord très satisfaisant, la structure de choc est bien capturée, la référence [45] utilise un schéma WENO à l'ordre 5. On peut conclure qu'un schéma au second ordre en temps et en espace peut être suffisant pour le calcul de l'ensemble de structure de l'interaction turbulence/choc dans de telle situation, mais il est incapable de prédire la totalité des phénomènes, comme par exemple, le schéma WENO présente légèrement le petit vortex derrière le point triple, contrairement au schéma au deuxième ordre, alors un schéma d'ordre supérieur est préférable.

FIGURE 5.43. *Transition FSS/RSS*

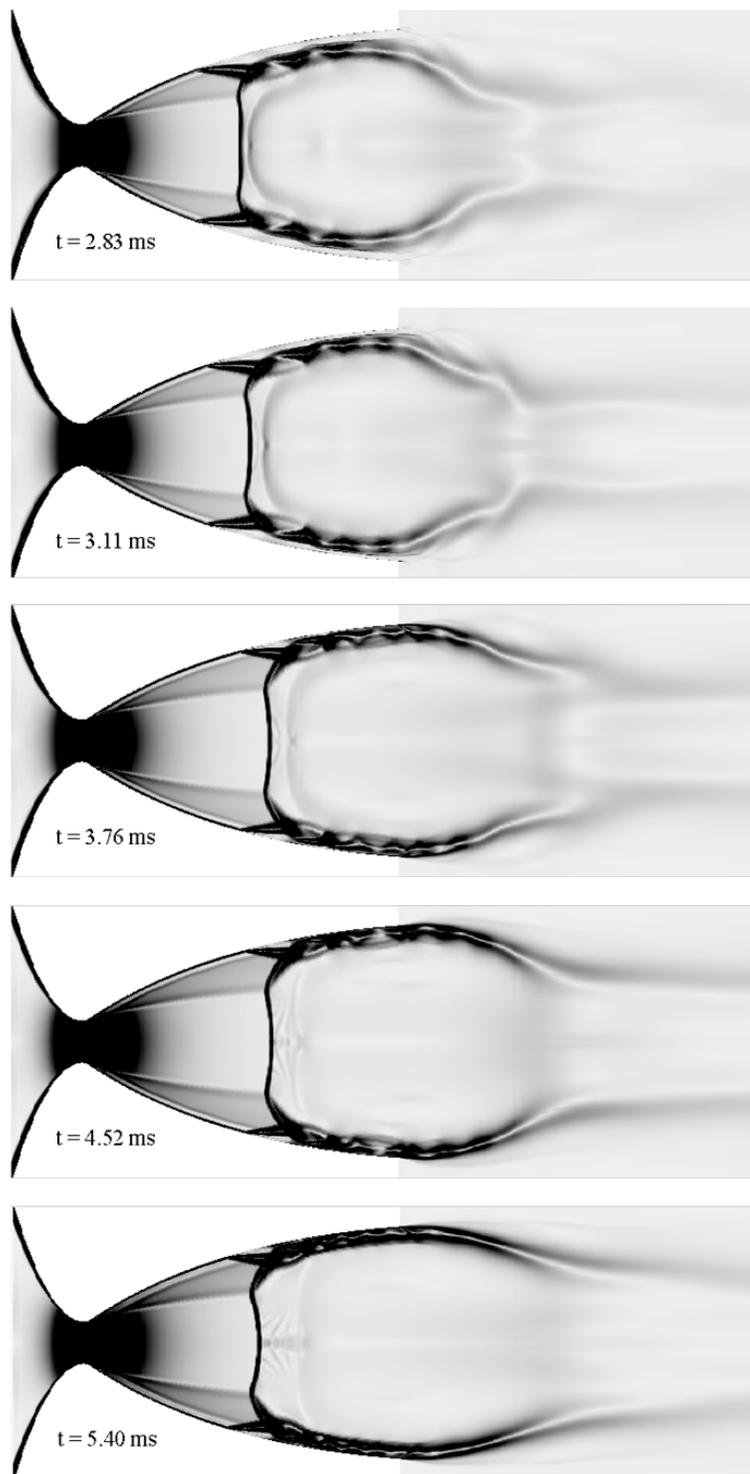


FIGURE 5.44. *Transition FSS/RSS (suite)*

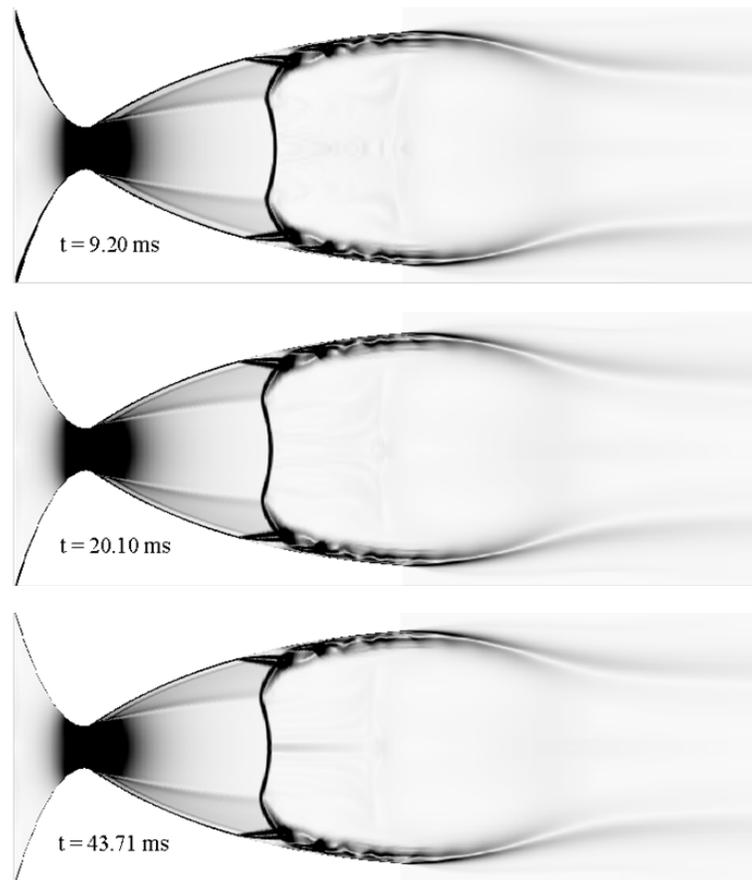


FIGURE 5.45. *Transition décollement libre/décollement restreint de la tuyère LEATOC avec $NPR = 24.9558$ et $T_0 = 276.282K$ (suite)*

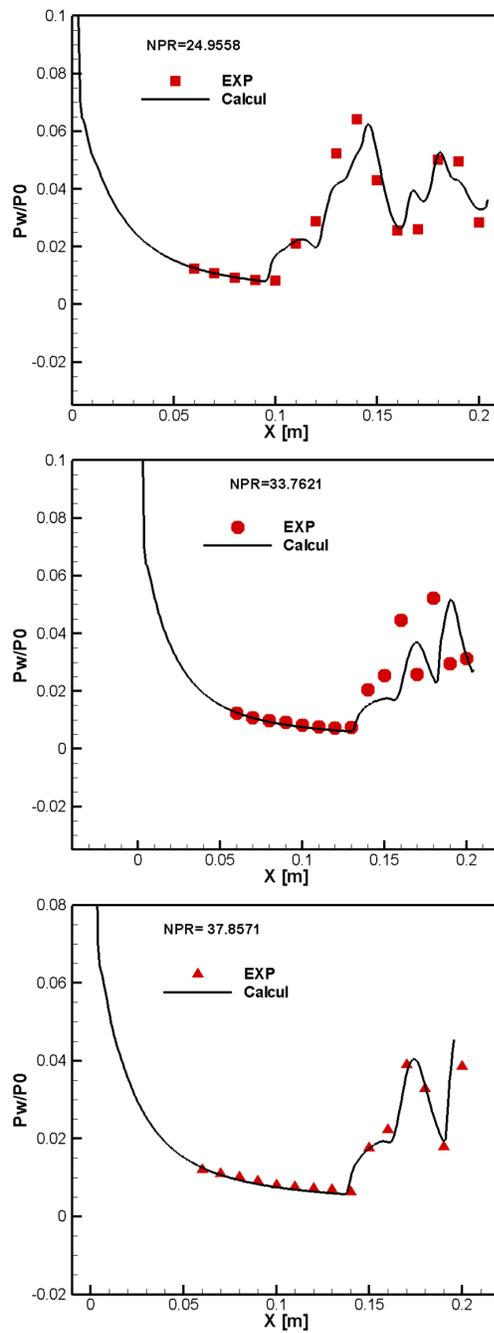


FIGURE 5.46. Décollement restreint, comparaison avec l'expérience sur LEA-TOC pour des rapports de pression $NPR = P_0/P_a$ égal à 25, 33 et 37

Pour la validation de l'évolution de la pression pariétale pendant le phénomène RSS, en réalité la capture de ce phénomène est déjà un bon signe pour valider le modèle et les schémas numériques utilisés, même avec des méthodes sophistiqués telle que la LES, la comparaison n'est plus toujours satisfaisante, est-ce dû à la nature complexe de l'écoulement dans de telle situation. La figure 5.46 donne un accord satisfaisant en comparaison avec l'expérience. Pour le cas de NPR=25, l'origine de la zone d'interaction onde de choc/couche limite débute à une distance $x = 0,098m$. Le choc induisant la séparation se déplace en amont, ce qui provoque une montée brusque de la pression pariétale superposée sur le niveau correspondant à l'écoulement de la tuyère non perturbée. AFAQUE [45] a montré les fluctuations de pression le long de la paroi, les pics positifs des signaux correspond au temps d'intermittence de la présence de choc de séparation dans la région tranquille attachée. Les fluctuations de pression présentent un comportement plus aléatoire lorsque le seuil de séparation est presque atteint dans la zone de recirculation à une distance ($x = 0,108m$). Près de la région de recollement, où s'effectue l'interaction de la région visqueuse et le choc de recollement, les signaux de pression indiquent un comportement similaire à celui observé dans l'interaction primaire $x = 0,098m$, avec des pics positifs distincts. La seule différence est que, ces pics se produisent à présent par intermittence, en plus de signaux aléatoires de base dans la zone de recirculation. En aval de cette interaction secondaire, le signal de pression semble être plus aléatoire en raison de l'interaction successive des ondes de choc et de la détente dans le jet supersonique annulaire fixé à la paroi de la tuyère ($x = 0,138m$). à une distance $x = 0,159m$, qui se trouve dans la troisième zone d'interaction (avant l'endroit de séparation secondaire), le même comportement intermittente de signaux de pression est observé. Dans ce cas, l'interaction, au niveau des signaux de pression en amont aléatoires est relativement élevée et la présence de pics positifs semble être moins dominant par comparaison avec les cas précédents, $x = 0,098 m$ et $0,01183 m$, respectivement.

Pour la visualisation du phénomène complexe de décollement restreint RSS, nous

avons créé une vidéo pour monter l'interaction de la turbulence et les ondes de chocs dans la tuyère et dans le jet supersonique, car les vidéos de ce phénomène sont rares, et pour bien comprendre la création et la propagation des ondes de chocs, et ainsi l'ensemble de l'écoulement dans la tuyère LEA-TOC, notons que les conditions de fonctionnement dans la chambre de combustion pour cette vidéo sont, $P_0 = 25bars$ et $T_0 = 276K$. Le lien de la vidéo sur youtube est *https : //www.youtube.com/watch?v = DN0j76r8LbA*.

5.4 Etude paramétrique du décollement

5.4.1 Influence de la forme de la tuyère

l'influence de l'angle de la tuyère sur le point de séparation est une question qui a été étudiée depuis le début des mesures de la séparation. La figure 5.47 donne la position du décollement A_D/A_c en fonction de la pression de chambre sur pression aval P_c/P_a . Cette figure est relative à des tuyères coniques de 20° et 6° (angle du divergent), avec un rapport de section fixe des deux tuyères ($A_s/A_c = 6$), telle que A_s est la section de sortie et A_c représente la section au col. Il est difficile de prendre un jugement nette est clair de l'influence de l'angle du divergent sur la position du point de décollement. Le décollement est légèrement précoce plus que l'angle est plus grand. Ce résultat est en accord avec l'expérience, qui montre qu'il n'y a pas d'influence nette de l'angle du divergent dans des tuyères coniques de rapport de section 10. La simulation numérique donne aussi des résultats identiques pour des tuyères coniques de rapport de section 40. Nos résultats sont aussi en accord avec les résultats compilés dans [16] présentés sur la figure 5.48, pour des angle du divergent $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ et 30° , ces résultats montre que pour un nombre de Mach au pied du décollement égal d'environ 3, la tuyère de 10° se sépare plus tard que celle de 20° ce qui signifie un rapport de pression de séparation inférieur que celui du 20° . La tuyère de 15° d'angle du divergent est en accord avec cette tendance, les résultats pour 30°

se trouve situés entre 10° et 20° , les données pour un nombre de Mach au pied de décollement d'environ 4 ne montrent aucune influence à la variation de l'angle du divergent. Cela conduit à la conclusion que l'effet d'angle du divergent sur le point de séparation est faible.

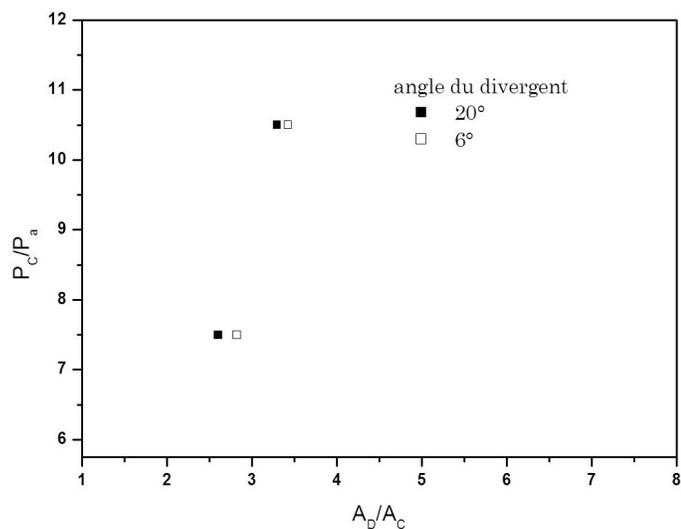


FIGURE 5.47. *Corrélation $P_C/P_a = f(A_D/A_C)$ influence de l'angle du divergent dans des tuyères coniques de 20° et 6° avec un rapport de section égale à 6*

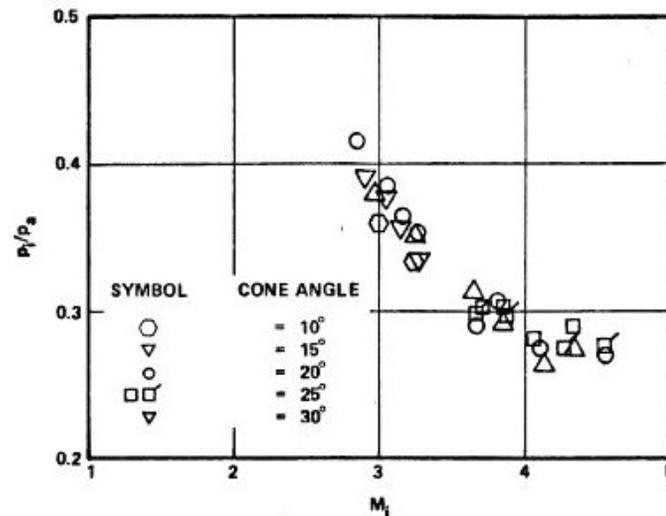


FIGURE 5.48. Corrélation $P_i/P_a = f(M_i)$ (l'indice i correspond au point au pied de décollement ou point de séparation naissante) (photo tirée de [16])

5.4.2 Influence du rapport des chaleurs spécifiques γ

Afin d'analyser l'effet de γ sur la position de séparation, en fait, il est difficile de prendre en compte le seul effet du rapport des chaleurs spécifiques γ , car de nombreuses variables sont impliquées ; deux gaz avec le même γ peuvent avoir des différentes chaleurs spécifiques C_p et C_v , de masses molaires et de chimies différentes. Et pour approcher l'effet de γ , une température froide $T_0 = 300K$ est nécessaire pour éviter la dépendance des chaleurs C_p et C_v de la température. Le tableau 5.2 ci-dessous résume les différents paramètres des gaz choisis. Dans la figure 5.49, la position de séparation indiquée par le rapport A_{sep}/A_{th} en fonction du rapport de pression de stagnation sur la pression de sortie de la tuyère P_0/P_a . Pour éviter aussi l'effet de la viscosité, une loi de puissance est utilisée pour calculer la viscosité de chaque gaz $\mu/\mu_0 = (T/T_0)^n$. Il est clair d'après les résultats obtenus d'observer l'effet combiné de γ et C_p et C_v , et pour tirer une comparaison valable, il semble intéressant d'en prendre cette comparaison entre l'AIR et le N_2O , parce que ces deux gaz ont des

chaleurs spécifiques proches. On observe que lorsque γ diminue, le point de séparation se déplace en aval avec une légère augmentation de pression de séparation. Cette observation est plus prononcée avec P_0 croissante. Ces résultats confirment l'influence de γ sur la position de séparation comme indiqué dans [15]. La figure 5.50 présente la distribution de la pression statique le long de la paroi de la tuyère, cette figure montre que la pression de paroi augmente avec la diminution de γ

Gaz	γ	$R[m^2s^{-2}K^{-1}]$	$C_v[JKg^{-1}K^{-1}]$	n
Air	1.4	287	717.5	0.67
Cl_2	1.34	117	344.1	1
CH_4	1.32	518	1618.7	0.87
N_2O	1.31	189	609.6	0.89

TABLE 5.2. Les propriétés physiques des différents gaz

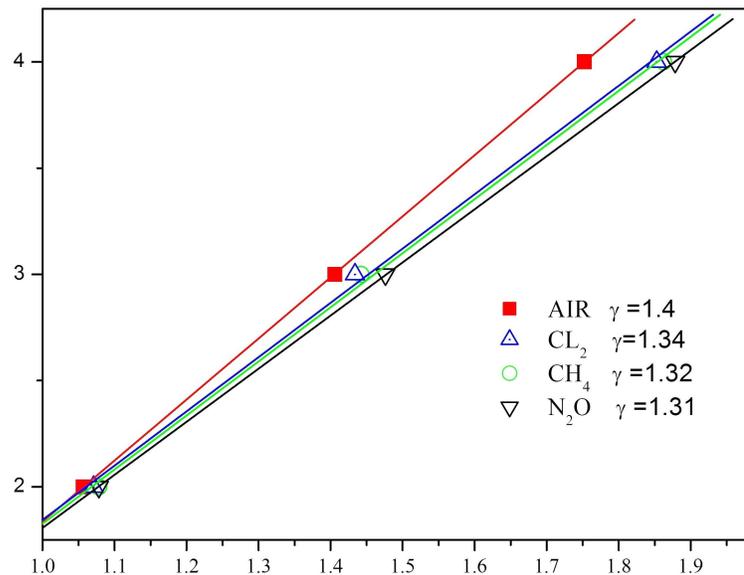


FIGURE 5.49. effet de γ sur la position de séparation, $P_0/P_a = f(A_{sep}/A_{th})$

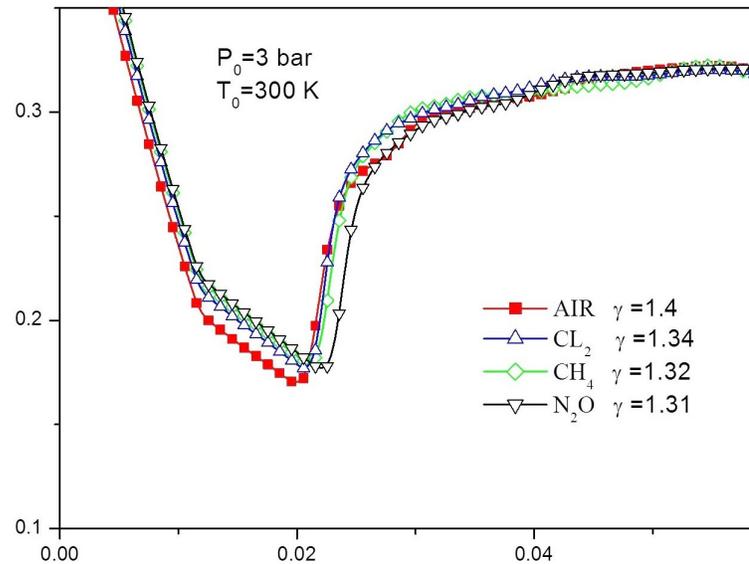


FIGURE 5.50. effet de γ sur la distribution de la pression pariétale, $P_w/P_0 = f(x)$

5.4.3 Influence de la pression génératrice

Avec le changement de pression dans la chambre (pression génératrice, P_0) ou la pression ambiante, la région de séparation modifie sa position. La répartition de la pression de paroi P_w normalisée par la pression de la chambre est présentée sur les figures 5.51 et 5.52 l'expérience et le calcul numérique montrent que le rapport P_w/P_0 présente le même profil dans la région non séparée. A une pression génératrice qui donne une pression de paroi à la sortie plus faible que la pression ambiante, une séparation de la couche limite est établie. une augmentation de la pression génératrice P_0 déplace la région de séparation en aval vers la sortie de la tuyère. La zone de mélange diminue tandis que la longueur d'interaction de la zone de séparation devient plus importante depuis l'épaisseur de couche limite se développe le long de la paroi. La position de la première montée en pression est une fonction du rapport de pression P_c/P_a .

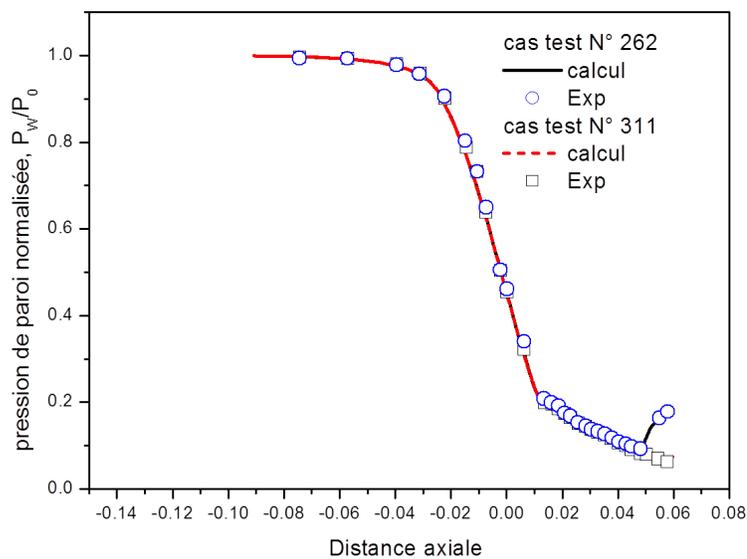


FIGURE 5.51. comparaison calcul-expérience de rapport P_w/P_0 , cas test 262 ($P_0=51.8 \text{ N/cm}^2, T_0=843 \text{ k}$), cas test 311 ($P_0=174.9 \text{ N/cm}^2, T_0=572 \text{ k}$)

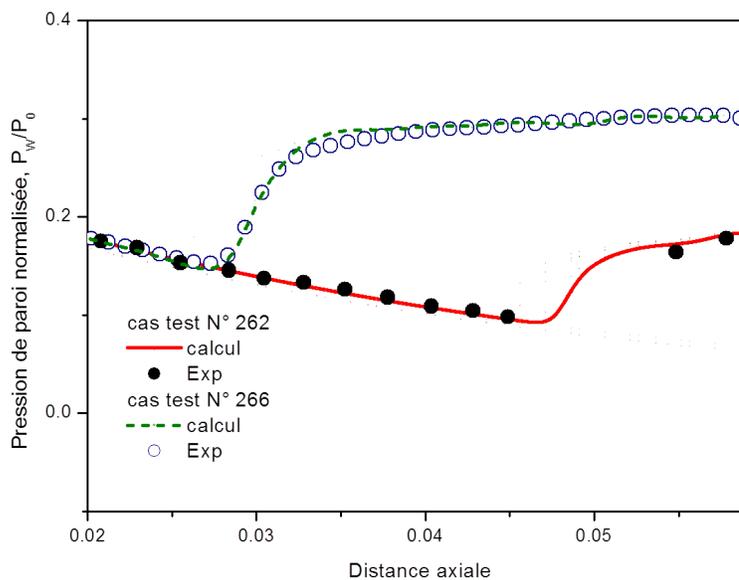


FIGURE 5.52. comparaison calcul-expérience de rapport P_w/P_0 , cas test 262 ($P_0=51.8 \text{ N/cm}^2, T_0=843 \text{ k}$), cas test 266 ($P_0=30.8 \text{ N/cm}^2, T_0=835 \text{ k}$)

5.4.4 Influence de la température de la paroi

La figure 5.53 montre les pressions pariétales dans une tuyère surdétendue. Le rapport de pression au pied de décollement P^* adimensionnée par la pression génératrice P_0 en fonction de l'abscisse longitudinale de l'origine d'interaction x^* adimensionnée par le diamètre du col D_{th} à une température de paroi variable ($T_w/T_0 = 0.3$ et $T_w/T_0 = 0.6$) pour une tuyère conique de la référence [1]. La pression p^* présente la pression de la première déviation du cas non séparé. la pression en amont P_0 étant variée de 3, 4, 5 et 6 bars, tandis que la pression en aval est constante et égale à la pression ambiante P_a . Les résultats montrent que plus la pression génératrice P_0 est importante plus que la position x^* au pied de décollement se déplace en aval vers la sortie de la tuyère. Dans les mêmes conditions, à rapport de pression P^*/P_0 fixé, 6 bars par exemple, la position x^* est plus précoce avec l'augmentation de la température de la paroi. Toutefois, la variation de la pression obéisse à une loi de similitude qui peut être donnée par :

$$\frac{P^*}{P_0} = A \left(\frac{x^*}{D_{th}} \right) + B$$

avec $A = -0.13$ et $B = 0.22$

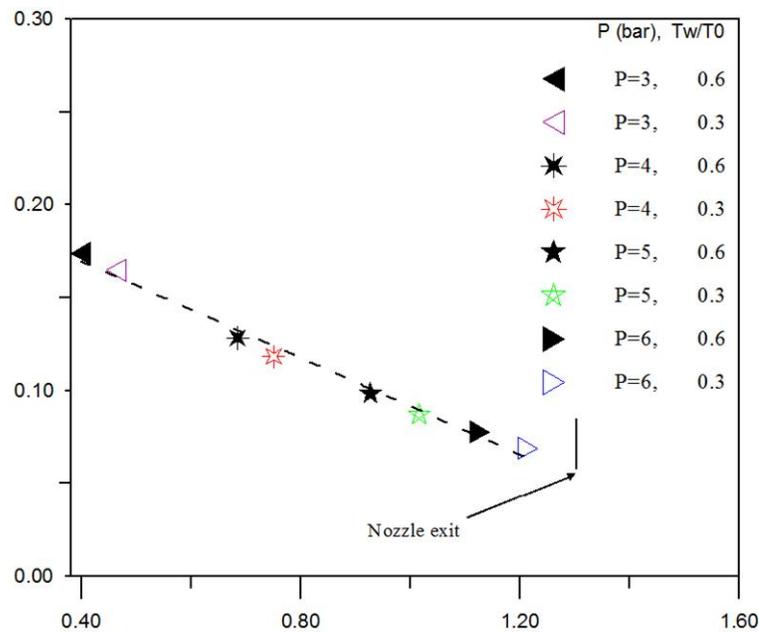


FIGURE 5.53. *Corrélation $P^*/P_0 = f(x^*/D_{th})$, influence de la température de paroi T_w et de la pression génératrice P_0 sur la pression P^* et l'abscisse x^* du pied de décollement*

Il semble que cette variation avait une pente d'environ ($A = -0.13$), cette répartition linéaire est bien marqué, des augmentations plus P_0 , la différence entre les deux positions axiales successives diminue, nous pouvons voir que la position x^* ne se comportent pas exactement linéairement avec la pression de stagnation, c'est à dire si en fait nous augmentons la pression de 1 bar la position de la séparation ne devrait pas suivre l'expression linéaire, de sorte que nous ne pouvons pas dire que cette relation linéaire dégage une similitude cohérente. Les figures 5.54 et 5.55 montrent la même tendance de la figure 5.53, lorsque la pression de stagnation (P_0) augmente, la position de séparation augmente. A la même pression de stagnation de la position de X_{sep} de séparation augmente avec la diminution de la température T_w paroi. La même pente d'environ ($-0,17$) est observée à la fois pour la température de la paroi.

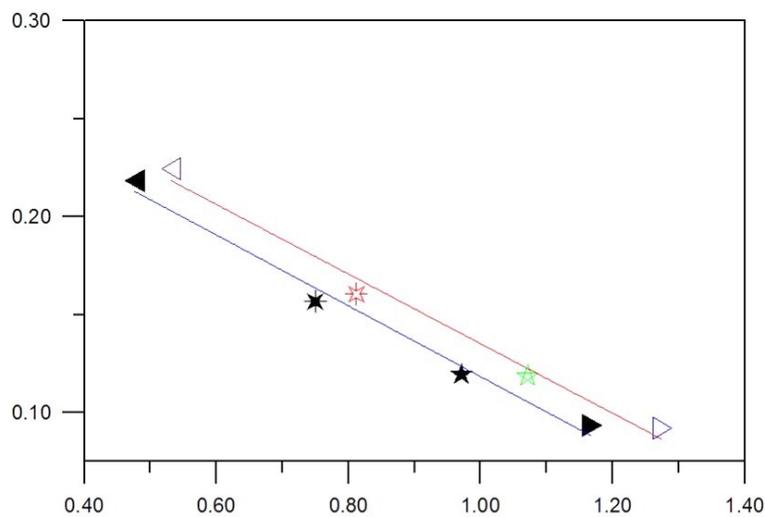


FIGURE 5.54. Corrélation $P_{sep}/P_0 = f(x_{sep}/D_{th})$, influence de la température de paroi T_w et de la pression génératrice P_0 sur la pression P_{sep} et l'abscisse x_{sep} de séparation

$$\frac{P_{sep}}{P_0} = A_1 \left(\frac{x_{sep}}{D_{th}} \right) + B_1$$

avec $A_1 = -0.177$ et $B_1 = 0.30$

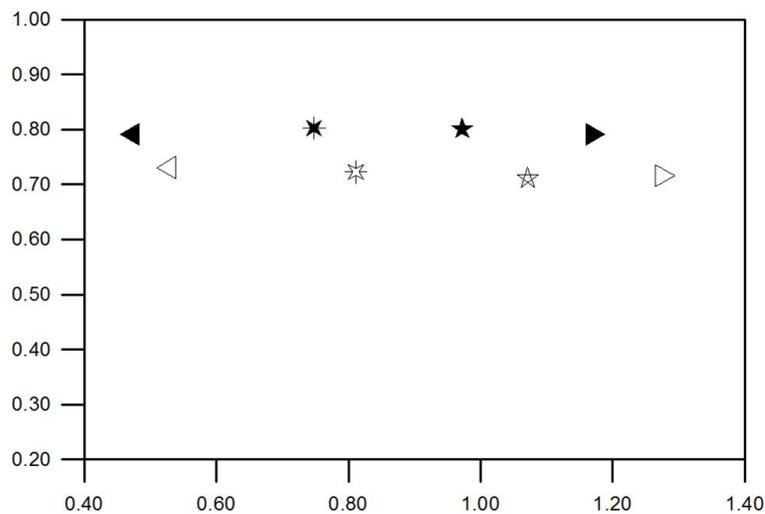


FIGURE 5.55. Corrélation $P^*/P_{sep} = f(x_{sep}/D_{th})$, influence de la température de paroi T_w sur le rapport de la pression P^*/P_{sep}

5.4.5 Influence de la géométrie du divergent

A même rapport de section et de pression, la tuyère avec un divergent profilé donne une détente plus importante (pression faible) que la tuyère avec un divergent conique, ce qui peut exposer au risque de décollements précoces ; le nombre de Mach résultant est important, favorisant la formation de phénomènes de disque de Mach. En réalité, la tuyère profilée offre, dans des conditions de fonctionnement nominales, plus de poussée. En régime transitoire (allumage et extinction), il apparaît un décollement important sur le divergent accompagné d'un disque de Mach de grande taille. Ces phénomènes dégradent considérablement les performances propulsives de la tuyère.

5.4.6 Influence de l'état de surface

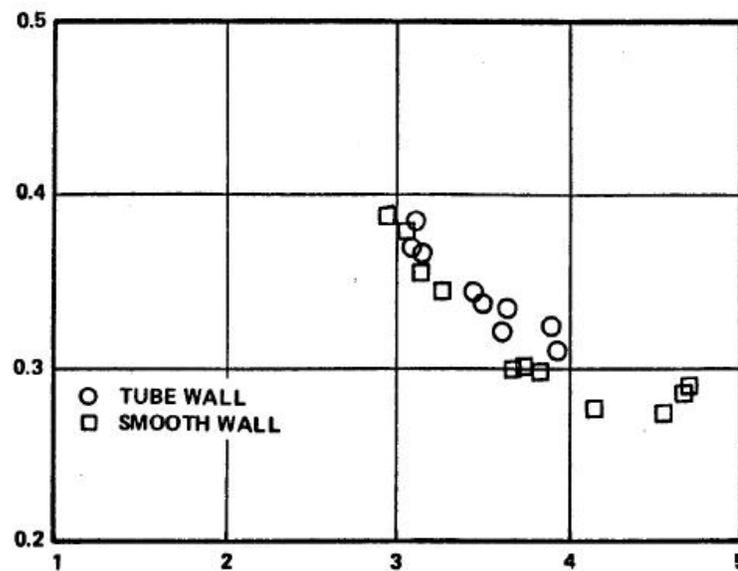


FIGURE 5.56. Corrélation $P^*/P_a = f(M^*)$, influence de l'état de surface sur la position de décollement

L'influence de l'état de surface d'après la figure 5.56 de la référence [16] n'est pas bien marquée. Deux types de paroi sont considérés, une paroi constituée de tubes

juxtaposés destinés au refroidissement par passage d'un fluide cryogénique et une paroi lisse. Ces deux types de paroi engendrent des états de surface différents. A rapport de pression P^*/P_a constante, on observe une très légère tendance pour les parois tubées à engendrer un décollement en aval, ou autrement dit, un décollement précoce pour les parois lisses.

5.4.7 Influence de l'état de la couche limite

Les premières analyses expérimentales et théoriques du décollement supersonique de la couche limite [27] avaient clairement mis en évidence l'effet de la nature de la couche limite sur la transition de la pression pariétale. Les calculs réalisés sur une tuyère conique pour un rapport de pression $P_0/P_a = 20$, montrent un décollement plus rapide avec une couche limite laminaire (voir hadjadj [46]). L'expérience montre qu'une couche limite laminaire, moins énergétique, peut se transitionner vers la turbulence [27], Reijasse [35] a montré pour une tuyère décollée, l'apparition d'un fort gradient de pression dans la zone décollée. Carrière [27] a distingué deux autres formes d'évolution de pression correspondant à des cas transitionnels. La transition de la couche limite au voisinage du point de décollement a un rôle important sur la position du point de décollement. A l'échelle des moteurs réels, le nombre de Reynolds est assez élevé pour considérer un décollement du type IV pleinement turbulent. Il est donc nécessaire, lors d'essais, de faire déclencher la transition près de la région du col. En plus, le déclenchement n'est pas toujours symétrique et pourrait être une source de décollement dissymétrique.

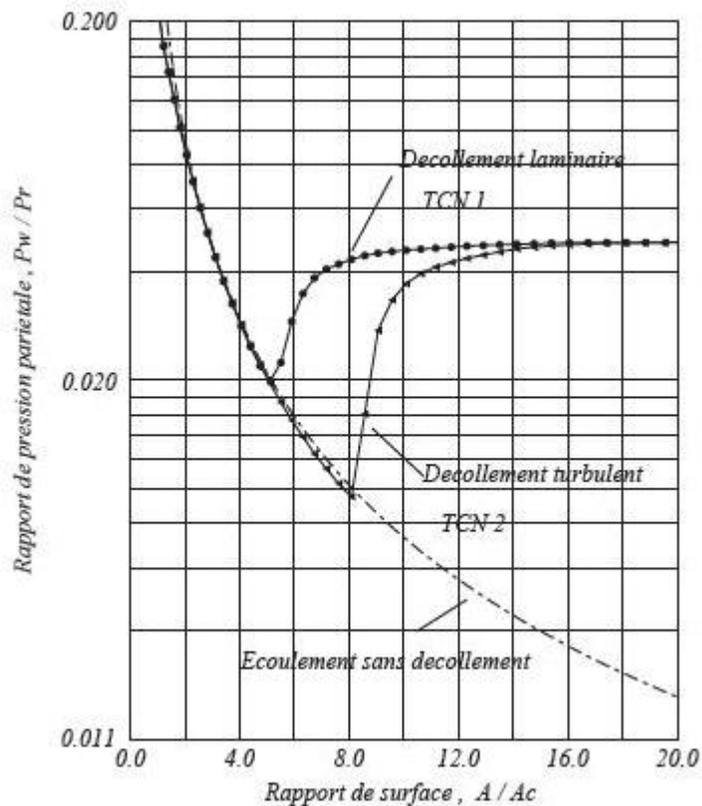


FIGURE 5.57. Distribution de la pression pariétale, photo tirée de [46]

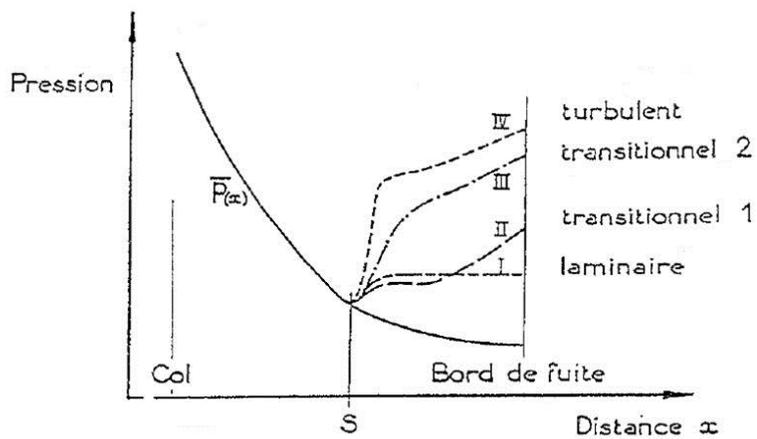


FIGURE 5.58. Types de décollement libre [27]

5.5 Étude du transfert thermique dans les tuyères

La tuyère permet d'accélérer les gaz résultant de la combustion portés à des pressions et des températures très élevés en leur imprimant une vitesse suivant l'axe de la fusée. La tuyère a la forme d'un convergent puis divergent qui permet aux gaz de franchir la vitesse du son; en amont du col la vitesse du gaz est subsonique et en aval supersonique. En présence d'atmosphère la poussée est optimale lorsque la pression des gaz en sortie de tuyère est égale ou inférieure à la pression ambiante.

Les parois de la chambre de combustion ainsi que celles de la tuyère sont portées à des températures très élevées et doivent être refroidies car il n'existe aucun alliage pouvant résister à de telles températures. De nombreux moteurs fonctionnent avec au moins un ergol stocké à très basse température pour qu'il reste sous forme liquide. Ces ergols, dits cryotechniques, sont l'oxygène, l'hydrogène et le méthane. La méthode la plus courante pour maintenir la paroi de la chambre de combustion à une température acceptable consiste à faire circuler un de ces ergols à l'intérieur de la paroi de la chambre qui à cet effet est creuse ou constitué de tubes jointifs. Selon l'architecture du moteur l'ergol utilisé pour le refroidissement peut être réinjecté dans la chambre de combustion (cycle fermé ou régénératif) ou moins performant être éjecté en extrémité de la tuyère (cycle ouvert, refroidissement par fluide perdu). L'espace dans lequel circule l'ergol refroidissant est constitué de fines canalisations, soit fraisées dans paroi ou circulant dans les conduits assemblés au moteur. Le but est recouvert d'une enveloppe généralement faite d'acier ou d'un alliage de titane.

Afin d'assurer l'intégrité des tuyères des moteurs fusées à propergol solide, des calculs précis de flux thermiques pariétaux s'avèrent nécessaires. Ils permettent d'optimiser le dimensionnement thermo-ablatif des matériaux isolants et protecteurs dont sont revêtues les parois des tuyères. Les tuyères des moteurs fusées à propergol solide sont soumises à des flux thermiques très intenses, qui résultent des conditions thermodynamiques sévères auxquelles se produit la combustion. Les parois sont at-

taquées chimiquement par les gaz éjectés (phénomène d'ablation) et subissent une érosion mécanique par impact de particules d'alumine issues de la combustion. Afin d'assurer leur intégrité, les tuyères sont revêtues de matériaux isolants et protecteurs. Il est donc nécessaire de calculer avec précision les flux thermiques pariétaux pour le dimensionnement thermo-ablatif. De plus, dans les programmes actuels, le développement des propulseurs à propergol solide doit s'effectuer à coût réduit. Le nombre d'essais de mise au point est limité et les itérations sur la définition sont quasiment impossibles : il faut faire bon du premier coup. Ce contexte se traduit par une double conséquence :

- D'une part les architectures des propulseurs sont extrapolées de l'existant en maîtrisant au mieux les risques de développement, ce qui limite les sauts technologiques.
- D'autre part la modélisation numérique prend une part de plus en plus importante dans la justification du dimensionnement en compensation de la diminution du nombre des essais.

Il apparaît donc clairement que pour les programmes futurs, l'utilisation intense de modèles numériques décrivant de mieux en mieux les phénomènes physiques, sera un des éléments indispensables à la réalisation de sauts technologiques en propulsion solide.

La prédiction exacte du transfert thermique de parois dans les chambres de combustion et les tuyères est l'un des principaux défis pour les concepteurs de moteurs fusées. Dans le cas de combustion refroidie (régénération ou circuit de décharge), le calcul de transfert thermique peut être encore plus complexe dans le cas des phénomènes de changement de phase se produisant à parois métalliques sur le liquide de refroidissement et/ou sur le côté gaz chaud. Eventuels phénomènes de changement de phase peut être triée en tenant compte des conditions locales de fonctionnement.

Actuellement, il y a un intérêt largement répandu de la fusée en plein cycle nucléaire utilisée comme un dispositif de propulsion pour les véhicules spatiaux. Une

étude préliminaire de conception de refroidissement de tuyères de fusée nucléaire avec de l'hydrogène en tant que fluide de travail est présentée en référence [47]. Cette étude a montré qu'un flux de chaleur très élevé peut être attendu dans la région du col de la tuyère. Cette analyse préliminaire a également montré que l'hydrogène, qui est attrayant en tant que liquide de refroidissement en raison de sa haute conductivité thermique et la capacité calorifique importante, peut avoir une capacité de refroidissement marginale lorsqu'il est utilisé comme liquide de refroidissement régénératif. Il est donc impératif que, pour des conditions marginales, des estimations précises du flux de chaleur local ou le coefficient de transfert thermique globale est prévisible tout au long de la tuyère.

Dans l'étude de l'écoulement et la conception des tuyères, une théorie unidimensionnelle est couramment utilisée ([48],[49]). Cette théorie n'est pas satisfaisante lorsque la solution exacte de l'écoulement est nécessaire, ou si la géométrie de la tuyère est caractérisée par un faible rayon de courbure et de grands angles d'expansion et de contraction [50]. Dans de tels cas, les effets radiaux doivent être pris en compte.

Toutes les techniques de prédiction n'ont pas réussi à produire un accord satisfaisant avec les pics prédit expérimentalement des coefficients de transfert de chaleur. Les résultats expérimentaux indiquent que la loi de puissance $1/7$ pour une couche limite turbulente n'a pas décrit la couche limite thermique dans la partie supersonique de la tuyère. La plupart des analyses classiques de la couche limite turbulente en écoulements supersoniques accélérés utilisent l'empirisme provenant d'études avec accélération près de zéro. Cependant, diverses analyses donnent des prédictions largement divergentes du développement de la couche limite turbulente des écoulements supersoniques dans une tuyère, surtout si ces écoulements concernent le transfert de chaleur.

Les résultats de la référence [51] ont indiqué que les extrêmes différences dans l'épaisseur de la couche limite de la vitesse à l'entrée de la tuyère ont produit une différence négligeable dans le transfert de chaleur au niveau de col. En revanche, les

différences dans l'épaisseur de la couche limite thermique à l'entrée de la tuyère ont eu comme conséquence différents taux de transfert de chaleur du col. Afin de fournir une prévision simple de transfert de chaleur une analyse différentielle a été développée ; cette méthode échouée dans la partie subsonique de tuyère et exige, dans la sortie de la tuyère, le calcul complet de la couche limite. La théorie intégrale de la couche limite turbulente [47] est la méthode la plus souvent utilisée pour prédire le transfert de chaleur dans les écoulements en tuyères ; cette méthode fournit des prévisions raisonnables de transfert de chaleur lorsque l'épaisseur de quantité de mouvement est remplacée par l'épaisseur d'énergie.

5.6 Formulation de transfert de chaleur

Les distributions de transfert de chaleur calculées dans les écoulements compressibles supersoniques dans les tuyères sont présentées en termes de coefficient de transfert de chaleur basé sur la différence d'enthalpie qui est donnée par l'équation suivante :

$$h = \frac{q_w}{(I_{aw} - I_w)} \quad (5.2)$$

On considère que le c_p est constant sur la gamme de température, puis $(I_{aw} - I_w) \cong c_p(T_{aw} - T_w)$. Là où la valeur de la température adiabatique de la paroi peut être exprimée en fonction du facteur de récupération (recovery factor) égal à 0.9 et au nombre de Mach de bord de la couche limite par la relation suivante :

$$T_{aw} = T_0 \frac{1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} \quad (5.3)$$

T_{aw} est la température adiabatique de la paroi pour un flux thermique nul, q_w est le flux thermique local normal à la paroi de la tuyère. Le facteur de récupération dépend de plusieurs paramètres [3] et pour une couche limite turbulente est égal au $Pr^{1/3}$.

Pour étudier les effets des entrées non refroidies avec différents rapports de section, deux types de conduites d'entrée ont été employées. L'entrée 2 est la plus grande et a eu un diamètre de 16.51 cm et de 43 cm de longueur, qui a fourni un rapport nominal de contraction de section de l'ordre de 18.8. Pour un rapport de section réduit, le diamètre a été réduit à 7.8 cm, cette entrée 1 fourni un rapport de contraction de section d'environ 4.2 et un longueur de 45 cm (voir figure 5.59).

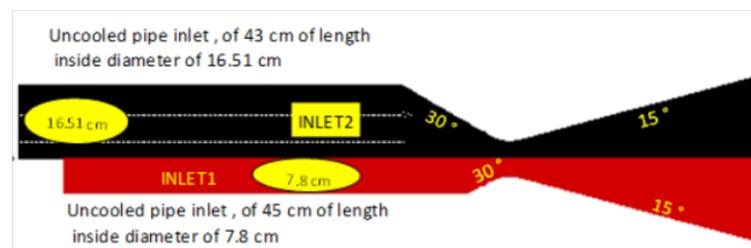


FIGURE 5.59. Géométrie de la tuyère et configurations des deux entrées 1 et 2, référence [51]

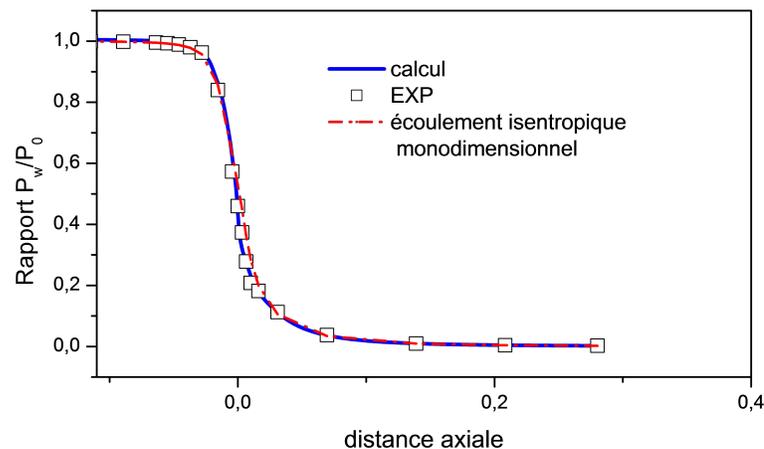


FIGURE 5.60. La distribution de la pression statique le long de la paroi (entrée 2)

Le rapport de la pression statique sur la pression génératrice P_0 dans la chambre le long de la paroi de la tuyère est montré sur la figure 5.60, à la température génératrice

$T_0 = 539K$ et pression génératrice $P_0 = 20.8$ bars, le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = 1.382$ est utilisé dans ce cas, la pression d'échappement (milieu ambiant) de l'ordre de $P_a = 1.4N/cm^2$, était suffisante pour empêcher la séparation de la couche limite de la paroi. Les calculs prédisent exactement l'évolution de la pression statique sur la paroi de la tuyère. Aussi bien, le nombre de Mach de paroi calculé est en excellent accord avec les mesures expérimentales (voir figure 5.61)

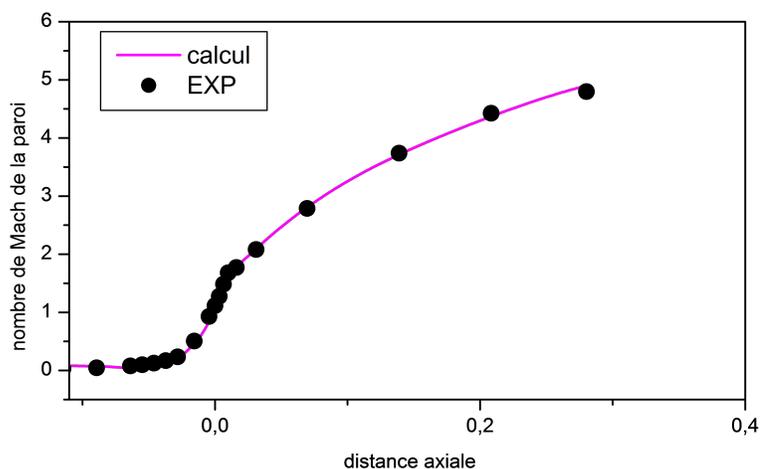


FIGURE 5.61. La distribution du nombre de Mach le long de la paroi (entrée 2)

La prédiction avec exactitude du coefficient de transfert thermique dépend directement de la connaissance exacte et précise de la température adiabatique T_{aw} de la paroi, de la température de la paroi T_w , et du gradients températures (q_w) le long de la paroi, comme l'indique l'équation 5.2. Etant donné que le taux de transfert de chaleur (q_w) dépend de la couche limite turbulente et thermique avec une température de paroi prescrite, la précision dans la calcul de h est proportionnelle à la prédiction avec exactitude de la température adiabatique de la paroi T_{aw} et le rapport approprié de T_w/T_0 . Afin d'assurer une interprétation précise et d'isoler l'effet de T_{aw} sur la prédiction du taux de transfert thermique, la température adiabatique T_{aw} calculée à partir de l'équation 5.3 avec $r = 0.9$ a été comparée avec les données expérimentales

disponibles dans la référence de Back et al [31], comme présenté sur la figure 5.62, ce résultat montre que T_{aw} est en excellent accord avec les mesures et n'est pas sensible aux conditions d'entrée avec l'utilisation d'une conduite refroidie ou non refroidie placé en amont de l'entrée de la tuyère.

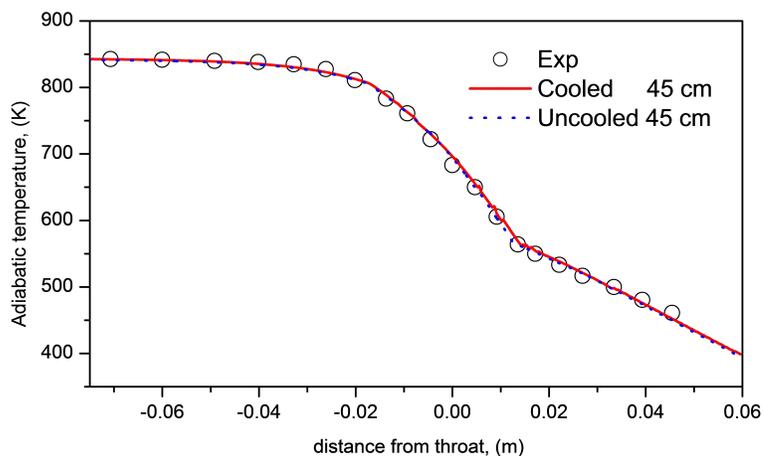


FIGURE 5.62. *Température de la paroi adiabatique calculée*

Une condition essentielle est de posséder une modélisation empirique ou analytique de la température de la paroi T_w en fonction des variables calculables du problème, pour éviter à chaque fois d'avoir un besoin de la possession d'un profil expérimental de T_w . Tong [52] et autres chercheurs ont examiné l'effet de l'utilisation d'une température de paroi constante $T_w = 0.5T_0$ contre un profil expérimental de T_w . Les conclusions importantes constatées sont :

- Le pic maximum du coefficient de transfert de chaleur avec l'utilisation d'un profil expérimental de température de paroi est inférieur de l'ordre de 30 % le pic avec $T_w = 0.5T_0$.
- Les détails dans le calcul du transfert de chaleur ont une sensibilité importante au profil de la température de la paroi.

En fait, il est difficile de séparer l'effet combiné de température de paroi sur le taux de transfert de chaleur. Les mesures expérimentales du rapport T_w/T_0 dans des

tuyères avec différentes conditions d'exploitation sont variables de 0.3 à 0.9 ; on peut conclure à partir de ces larges variations que le choix du rapport T_w/T_0 approprié est très important pour une prévision numérique précise des taux de transfert de chaleur le long d'une paroi d'une tuyère supersonique. Ce rapport est déterminé sur la base d'optimisation de calcul numérique ; notons que trois rapports de 0.4 et 0.45 et de 0.5 ont été examinés dans cette comparaison. Une comparaison entre résultats expérimentaux et le calcul du coefficient de transfert de chaleur en fonction de la distance axiale le long de la paroi de la tuyère pour l'entrée 2 avec des rapports de température de paroi à la température totale T_w/T_0 de 0,4, 0,45 et 0,5 sont représentés sur les figures 5.64, 5.65 et 5.66 respectivement.

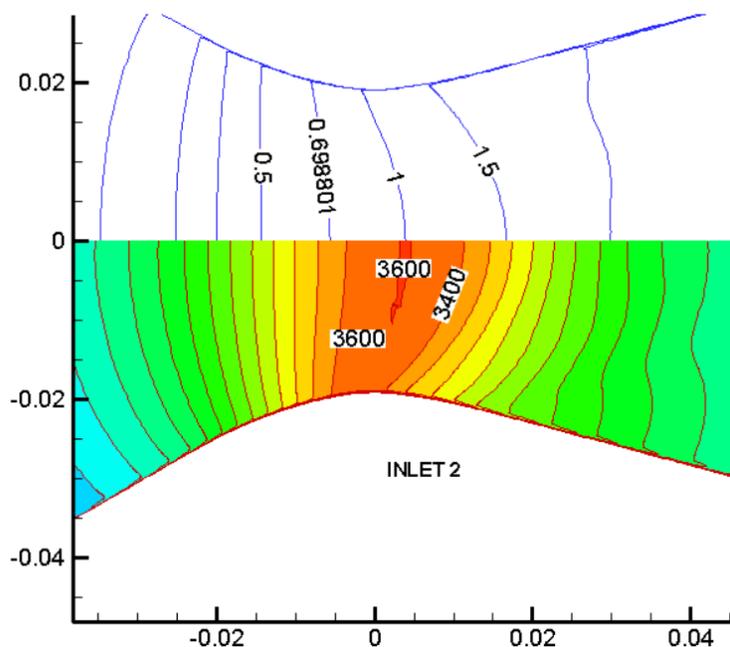


FIGURE 5.63. Iso-contours calculés, en haut : nombre de Mach et en bas : débit massique

Le coefficient de transfert de chaleur est bien déterminé avec les trois rapports de T_w/T_0 , le maximum du pic du taux de transfert de chaleur est bien localisé juste en amont du col de la tuyère, ce qui est expliqué avec le maximum du débit massique

(figure 5.63).

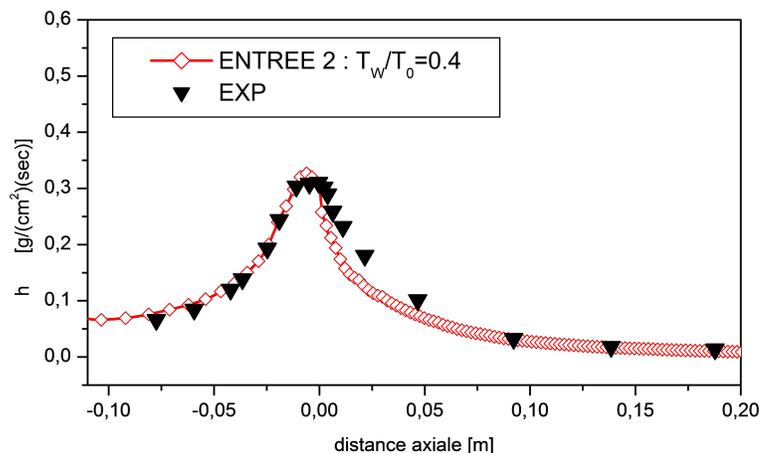


FIGURE 5.64. Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 2 avec $T_w/T_0 = 0.4$

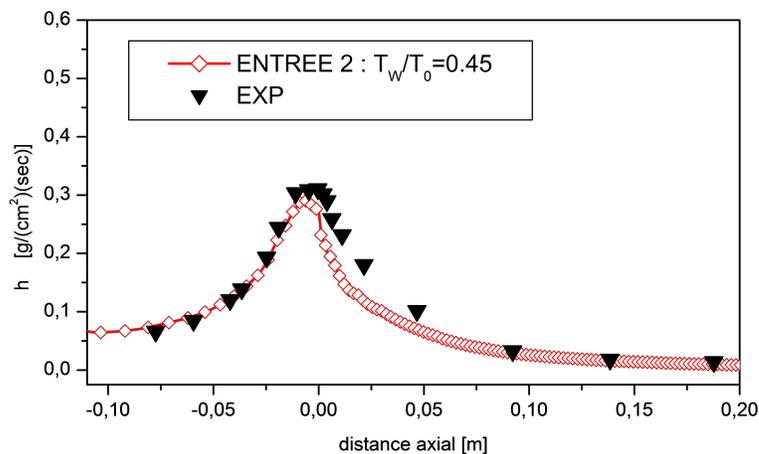


FIGURE 5.65. Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 2 avec $T_w/T_0 = 0.45$

L'erreur maximum dans la prédiction du coefficient de transfert de chaleur ce qui s'est produite en amont du col était approximativement 4%, 7% et 13% pour les rapports T_w/T_0 0.4, 0.45 et 0.5 respectivement pour l'entrée 2; et 1%, 18% et 25%

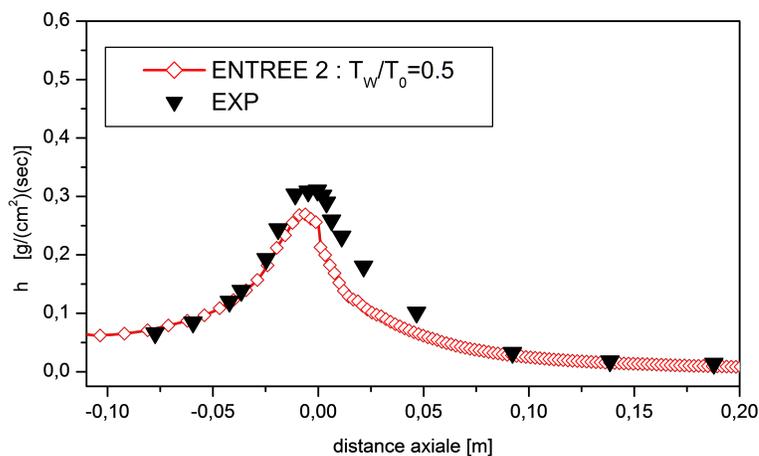


FIGURE 5.66. Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 2 avec $T_w/T_0 = 0.5$

respectivement pour l'entrée 1 présentés sur les figures 5.67, 5.68 et 5.69. Sur les figures 5.67 à 5.69, le coefficient de transfert de chaleur à l'entrée de la tuyère est surestimé par rapport aux résultats expérimentaux, il s'agit en vérité en raison d'une augmentation de pression provenant d'une rotation de l'écoulement et est censé être associé au changement de direction de quantité de mouvement de l'air en passant de l'entrée de la conduite circulaire juste dans la zone convergente à travers un angle aigu, alors une rotation plus progressive de l'écoulement est nécessaire pour empêcher l'augmentation de la pression et donc la température. Pour développer et valider le modèle de turbulence et la procédure numérique pour des tuyères galbées (courbées), des données expérimentales disponibles ont été présentées dans la référence [53], les conditions de fonctionnement ont été fixées à $266.8N/cm^2$ pour la pression génératrice et $888.88k$ pour la température génératrice (voir Bensayah et al 2014 [64]), le gaz (l'air) pourrait être traité comme un gaz caloriquement parfait avec un rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = 1.345$, la tuyère a un rayon de courbure égal à deux fois le rayon au col, la tuyère est refroidie par un bain d'eau en quantité suffisante, la pression à la sortie de la tuyère est d'environ $1.4N/cm^2$ pour éviter la séparation

de l'écoulement, les prédictions sont comparées avec le cas de non-perturbation de l'écoulement en amont de la tuyère. Le rapport T_w/T_0 dans cette expérimentation est variable de 0.43 à 0.82.

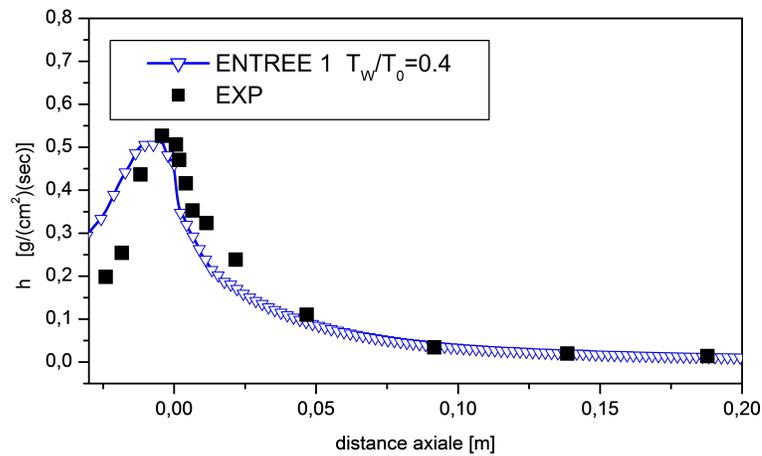


FIGURE 5.67. Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 1 avec $T_w/T_0 = 0.4$

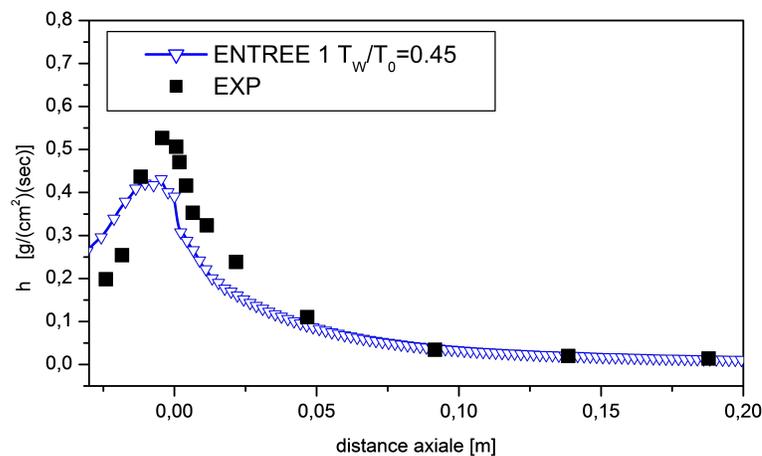


FIGURE 5.68. Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 1 avec $T_w/T_0 = 0.45$

La distribution de la pression statique de la paroi adimensionnée par la pression

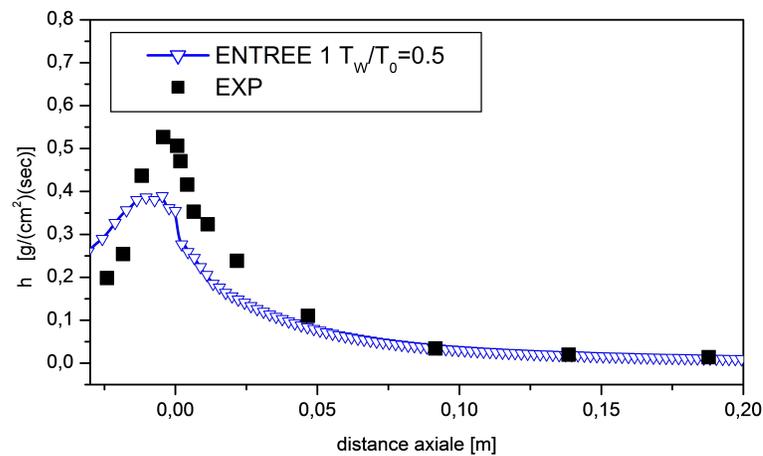


FIGURE 5.69. Coefficient de transfert de chaleur pour l'entrée 1 avec $T_w/T_0 = 0.5$

totale génératrice de la tuyère galbée pour le cas de non-perturbation de l'écoulement en amont de la tuyère est présentée sur la figure 5.70.

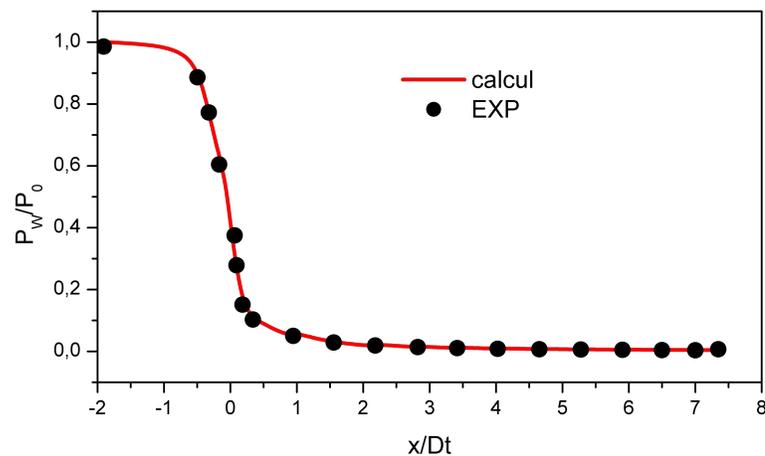


FIGURE 5.70. Rapport P_w/P_0 le long de la paroi de la tuyère citée dans la référence [53]

Les prédictions numériques sont en excellent accord avec les données expérimentales. Dans la figure 5.71, le débit massique calculé sur le bord de la couche limite est présenté, la valeur maximale du débit de masse a eu lieu à $x = 3mm$ en amont du

col de la tuyère. Cet endroit correspond à l'intersection du contour de la paroi de la tuyère et la ligne sonique ainsi illustré sur la figure 5.63.

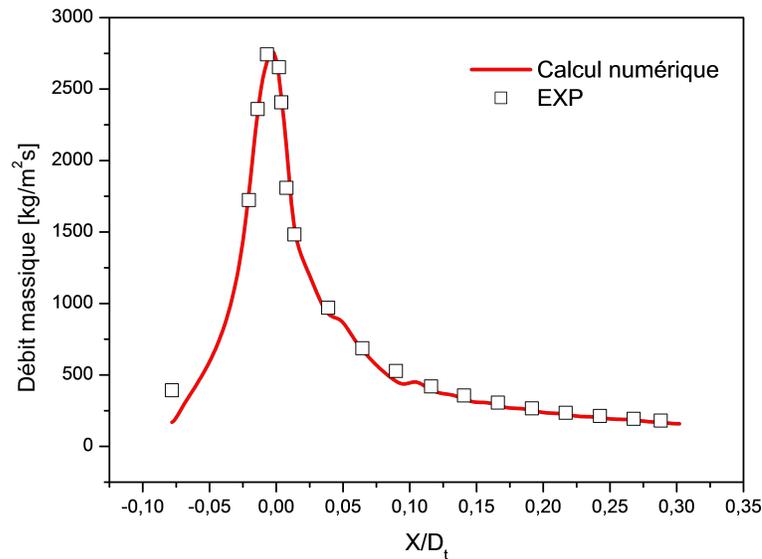


FIGURE 5.71. La distribution de débit massique au bord de la couche limite de la tuyère citée dans la référence [53]

Une forte décroissance du débit massique a eu lieu juste en aval du col de la tuyère. La prédiction numérique est en bon accord avec les mesures expérimentales. Le rapport $T_{W_{\max}}/T_0$ expérimental est de l'ordre de 0.8125 qui représente le double du rapport que nous avons utilisé. Il est intéressant de noter que la distribution du coefficient de transfert de chaleur prédit numériquement montrée sur la figure 5.72 est en bon accord avec les données expérimentales, cette distribution est bien calculée dans les trois zones de la tuyère (la partie convergente, le col et la partie de divergent), le maximum du coefficient de transfert de chaleur h est localisé juste en amont du col de la tuyère. L'erreur dans la prédiction du pic de h est d'environ 3%. Peu de résultats obtenus à proximité du col sont légèrement dispersés que dans le reste de la tuyère. Bartz a cité en référence [49] que la courbe moyenne présentée dans la référence originale de [53] est omis, en raison de l'incertitude dans la région du col de

la tuyère.

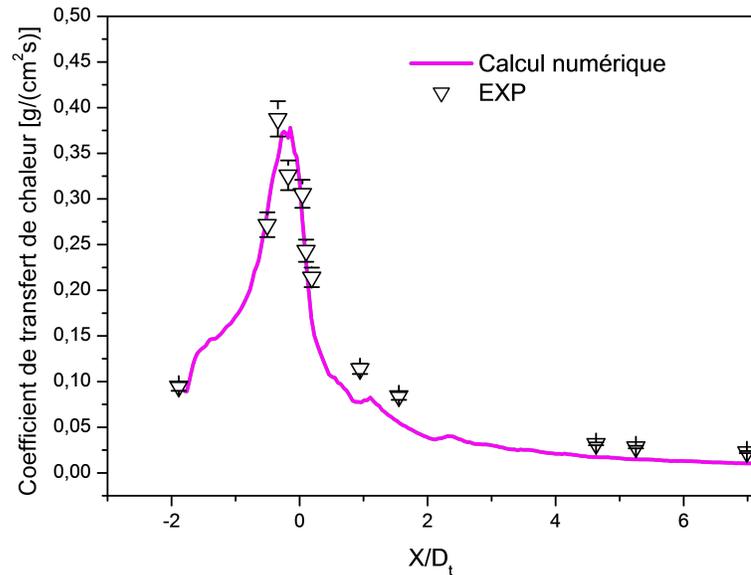


FIGURE 5.72. *Distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la paroi de la tuyère citée dans la référence [53]*

L'erreur maximale obtenue est 30% à environ 4cm en aval du col, ceci peut être expliqué par le fait que le contour expérimental est non lisse, et qui présente une certaine rugosité et qui est bien capturé par nos calculs sur la figure 5.73, la figure 5.73a est une strioscopie numérique basée sur la dérivation de la densité ($\partial\rho/\partial x_j$) et la figure 5.73b représente la divergence de la vitesse calculée sur l'ensemble de la tuyère. Deux ondes de choc internes sont localisées, la première onde se situe juste en aval du col à $x = 4cm$ et coupant l'axe à $x = 24cm$, et la seconde démarre à $x = 9cm$ coupant l'axe à $x = 40cm$.

Le flux de chaleur est en ordre de grandeur plus faible dans les sections convergentes et divergentes qu'au col de la tuyère. Les valeurs plus basses du flux de chaleur dans les sections convergentes et divergentes rendent ces sections faciles à refroidir, lorsque l'ensemble de la tuyère est refroidie par régénération, plusieurs situations peuvent exister qui nécessitent une prédiction précise tout le long de la tuyère. Tout

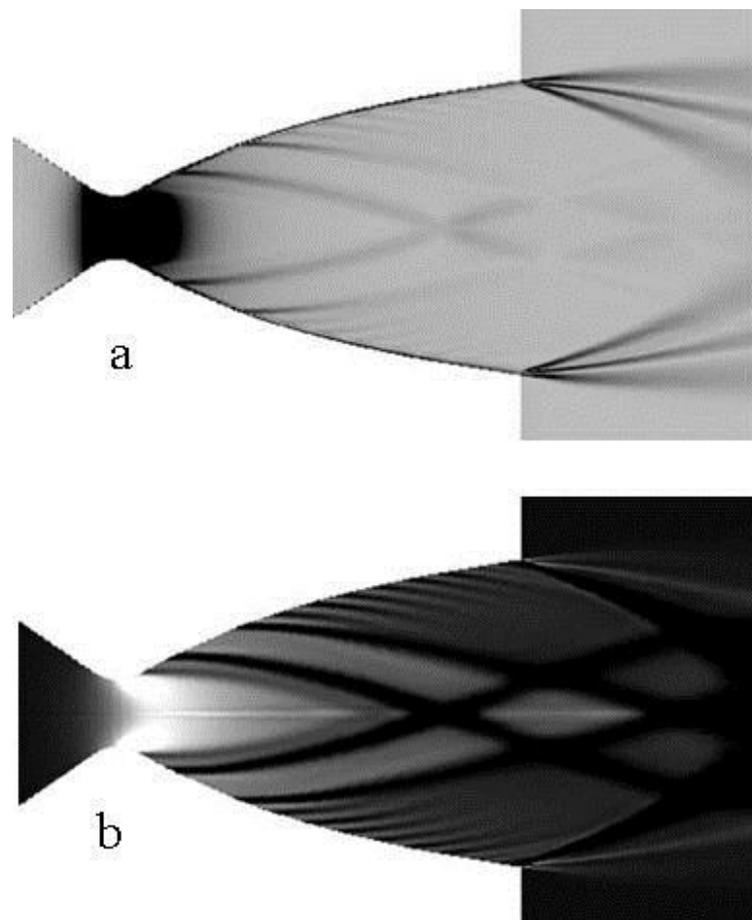


FIGURE 5.73. *En haut : strioscopie numérique et en bas : divergence de la vitesse*

d'abord, la quantité de chaleur transférée au liquide de refroidissement n'est plus petite dans la partie divergente de la tuyère en raison de grandes surfaces impliquées. L'énergie totale transférée à la paroi par unité de longueur de passage de liquide de refroidissement, dans la partie divergente peut être égale à environ 25 à 50% de l'énergie transférée au niveau du col, si le rapport de surface est suffisamment grand. Il est donc possible d'utiliser le divergent comme échangeur de chaleur. D'autre part, dans une tuyère régénérativement refroidie, la température du liquide de refroidissement dans n'importe quelle position axiale dépend de la quantité de chaleur totale

précédemment ajoutée au liquide de refroidissement. Ainsi, il est possible que des erreurs dans la prédiction du flux thermique dans la section divergente soient manifestées dans les régions de la tuyère qui sont plus difficiles à refroidir

5.7 Effet de la température de paroi

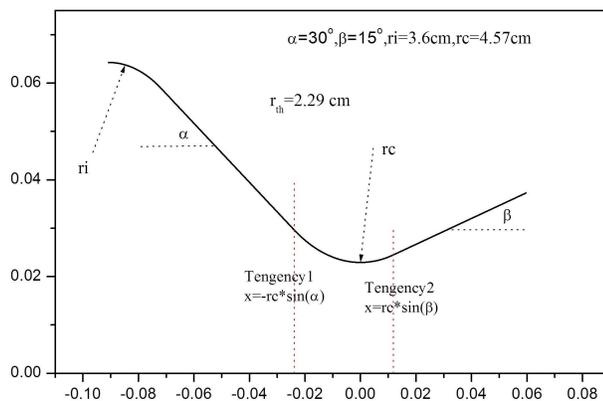


FIGURE 5.74. Géométrie de la tuyère de la référence [1]

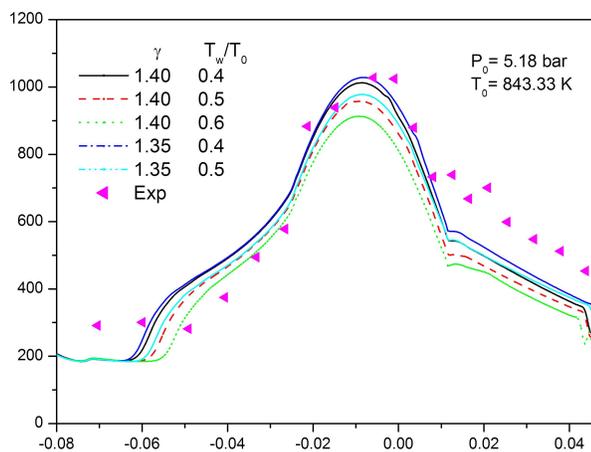


FIGURE 5.75. Effet de la température de paroi et du rapport de la chaleur spécifique γ sur la distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la tuyère de la figure 5.74

L'effet de la température de paroi sur le transfert de la chaleur a été évalué en faisant varier la distribution axiale ou la valeur de la température de la paroi (T_w) tout en fixant tous les autres paramètres. Trois valeurs de température de paroi $337K$, $421K$ et $505K$ ont été considérées. Les résultats de cette comparaison sont présentés dans la figure 5.75 comme des distributions axiales du coefficient de transfert de chaleur. L'effet sur le coefficient, une diminution de la température de paroi de $505K$ à $337K$ entraîne une augmentation du coefficient de transfert thermique de l'ordre de 11% au niveau du pic de h juste en amont du col de la tuyère.

5.8 Effet de nombre de Prandtl turbulent

le Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent, Moin et al. (1991) [54] ont réalisé des simulations numériques directes de THI (Turbulence Homogène Isotrope), de cisaillement homogène et de canal turbulent pour étendre le modèle de Smagorinsky dynamique de Germano et al. (1991) [55] à des cas compressibles. Ils calculent le nombre de Prandtl de sous-maille dans ces trois configurations et montrent qu'il dépend fortement de l'écoulement considéré. Les valeurs sont globalement entre 0.4 et 0.6 pour les écoulements de THI et de cisaillement homogène. Dans le canal turbulent, le Prandtl de sous-maille varie en fonction de la distance à la paroi. Au centre du canal, il est d'environ 0.5; au paroi, il atteint des valeurs de l'ordre de 1 pour un nombre de Prandtl laminaire de 0.7. Ainsi, une procédure dynamique est recommandée pour l'évaluation de Pr_t . En pratique, Pr_t est souvent considéré comme étant constant avec des valeurs comprises entre 0.6 et 1.1 selon les applications. Sa valeur est fixée à 0.9. Si cette valeur est discutable pour les écoulements libres, nous nous intéressons à l'écoulement proche d'une paroi. En conséquence, nous avons gardé cette valeur de $Pr_t = 0.9$. Dans ce calcul nous essayons de tester l'effet de variation de Pr_t sur le coefficient de transfert thermique à la paroi, ces calculs sont menés pour illustrer seulement l'effet de Pr_t , car une valeur constante de Pr_t n'est plus une

valeur appropriée pour l'ensemble de l'écoulement. La figure 5.76 montre l'évolution axiale des coefficients de transfert de chaleur, on peut voir clairement que le Prandtl turbulent a eu un effet significatif sur le transfert de chaleur, spécialement sur la région subsonique, peut être observée avec un Pr_t égal à 0.7 le maximum du coefficient de transfert chaleur est mieux calculé, ce qui est cohérent avec l'étude numérique de Xiao et al [8] et de l'écoulement supersonique sur une plaque plane faite par Sommer et al [56] et [57] qui ont atteint une valeur de Pr_t proche de 0.5 sur la paroi et qui augmente à 1.6, puis atteint une valeur asymptotique d'environ 0.9. Le nombre de Prandtl turbulent a un comportement très variable dans la région très proche de paroi. Il augmente à partir d'une valeur d'environ 0.5 à un maximum d'environ 1.6 mur, puis diminue à environ 0.75 avant de revenir à une valeur de 0.9 à $y^+ = 200$. Par la suite, Pr_t reste assez constant à une valeur de 0.9.

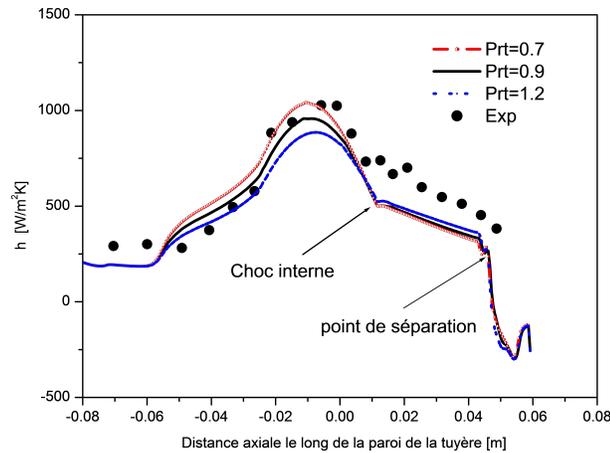


FIGURE 5.76. Effet du nombre de Prandtl turbulent sur la distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la tuyère de la figure 5.74

Pour un nombre de Prandtl turbulent variable dans tout le domaine de calcul à partir de l'équation :

$$Pr_t = 0.67 \frac{1 + 0.67f}{1 + 0.5f} (1 + 0.167f) \quad (5.4)$$

avec

$$\begin{cases} f = \min\left(\frac{R_t}{3.72R_k}, 1\right) \\ R_t = \frac{k^2 l}{\varepsilon \mu}, \quad R_k = \frac{\sqrt{k} y l}{\mu} \end{cases}$$

Cette équation est utilisée comme développée par Ljuboja et Rodi [59] à partir d'une analyse de l'équation de $\widetilde{v''T''}$. Dans une couche limite $f \rightarrow 1$ ce qui donne un $Pr_t \approx 0.86$ $Pr_{rt} \approx 0.86$ tel qu'il est utilisé dans la plupart des calculs. Dans la région extérieure de la couche limite $f \rightarrow 0$ conduit à $Pr_t \approx 0.67$ ce qui est cohérent avec certaines mesures (Townsend [60]). L'équation de Pr_t a été utilisée sans modification dans la présente étude bien que d'autres mesures (Fielder [61], Chambers [62]) indiquent que le nombre de Prandtl turbulent dans une couche de mélange turbulent devrait être encore inférieur de $Pr_t \approx 0.5$ appelant à un changement des constantes dans la formule de Pr_t .

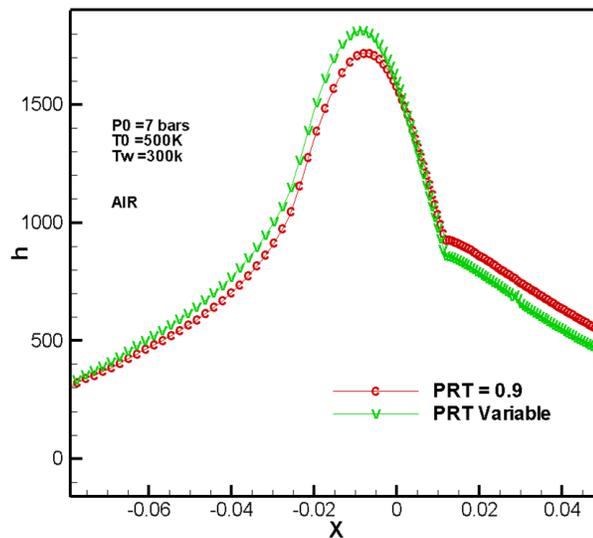


FIGURE 5.77. Effet du nombre de Prandtl turbulent variable sur la distribution du coefficient de transfert de chaleur le long de la tuyère de la figure 5.74

La figure 5.77 représente la distribution du coefficient de transfert de chaleur

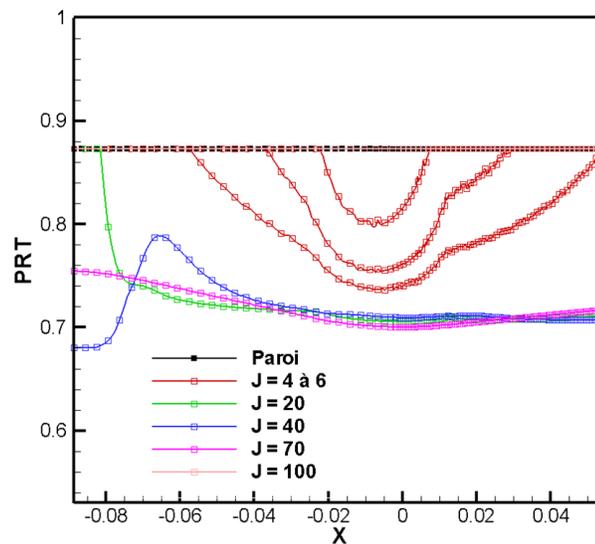


FIGURE 5.78. Variation du nombre de Prandtl turbulent près de paroi, à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite

pariétale, le nombre de Prandtl turbulent est variable selon l'équation 5.4. Dans la partie subsonique de la tuyère un petit changement se produit, car la région de la couche limite n'est pas affectée que par une légère diminution du nombre de Prandtl turbulent tout en avançons vers le col. La plus grande différence est observée en amont du col de l'ordre de 5% qui commence vite à diminuer en entrant dans le divergent, ce changement est traduit par une diminution de Pr_t plus qu'en s'éloigne de la paroi jusqu'à $Pr_t = 0.7$ qui remonte à une valeur constante très loin de la couche limite (voir figure 5.78). La partie supersonique est affectée similairement que celle subsonique. On peut conclure que la formule 5.4 telle qu'elle est ne peut pas donner le nombre Pr_t souhaiter pour une interaction couche limite turbulente/onde de choc. En fait, il est difficile de donner une formulation consistante qui peut traduire la variation réelle du nombre de Prandtl turbulent défini par $Pr_t = \nu_t/\alpha_t$, car la diffusion turbulente α_t reste une autre variable à définir avec précision de plus la difficulté de la viscosité turbulente ν_t . Une formulation basée sur l'introduction d'une nouvelle échelle thermique turbulente $R_t = \overline{t^2}/\varepsilon_t$ en plus de l'échelle dynamique de

turbulence $R_d = k/\varepsilon$, présente un outil de puissance dans la formulation du nombre de Pr_t , la diffusion turbulente dans ce cas est donnée par :

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda k (k/\varepsilon)^{-1} \left(\overline{t^2}/\varepsilon_t \right)^2$$

Où $\overline{t^2}$ est la variance de la température ou d'enthalpie et ε_t son taux de dissipation (voir Bensayah et al [63]).

5.9 Effet du facteur de récupération r

La température adiabatique a été calculée en prenant le facteur de récupération $r = 0,89$ et avec un facteur de récupération calculé dans le cas d'une tuyère avec paroi adiabatique en utilisant la formule 5.2, comme indiqué dans la figure 5.79.

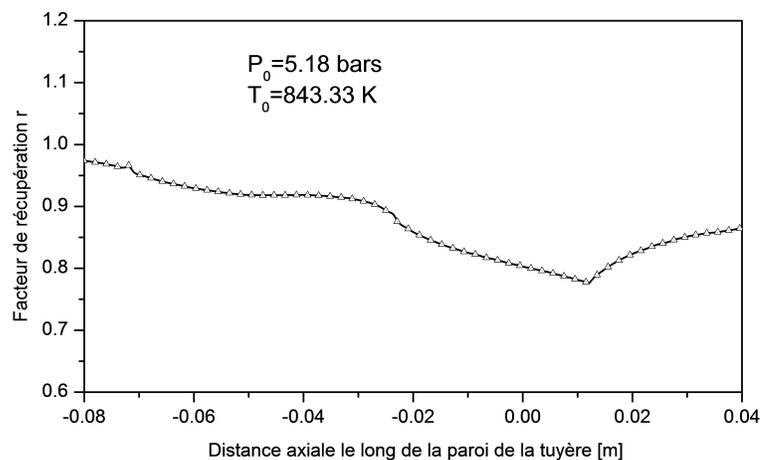


FIGURE 5.79. Facteur de récupération le long de la paroi de la tuyère de la figure 5.74

Le facteur r de récupération est connu pour être en fonction de nombreux paramètres [3]. Dans la partie subsonique de la tuyère le facteur de récupération diminue légèrement et affiche un minimum juste après le col de la tuyère, cette position correspondant à la position du choc interne qui se trouve juste en aval du col, et

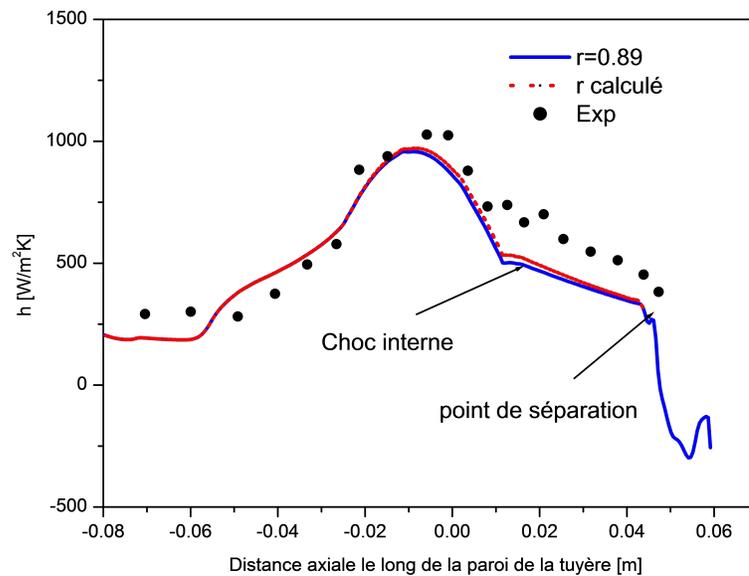


FIGURE 5.80. *Effet du facteur de récupération sur le transfert thermique pariétal*

augmentant rapidement (ceci peut être interpréter par une détente plus importante en dehors de la couche limite qu'à l'intérieure) jusqu'à une valeur moyenne qui est en conformité avec la corrélation bien connue. La figure 5.80 montre le coefficient de transfert de chaleur le long de paroi de la tuyère dans des conditions génératrices ($P_0 = 5.18\text{bars}$, $T_0 = 843.33\text{K}$) et avec un facteur de récupération calculé et prescrit, le coefficient de transfert de chaleur est légèrement différent juste après le choc interne dans la partie supersonique, donc on peut noter qu'avec ces mêmes conditions de fonctionnement que l'utilisation de la formule de r en fonction du nombre de Prandtl $r = Pr^{1/3}$ donne de bon résultats pour le calcul du coefficient du transfert thermique pariétal.

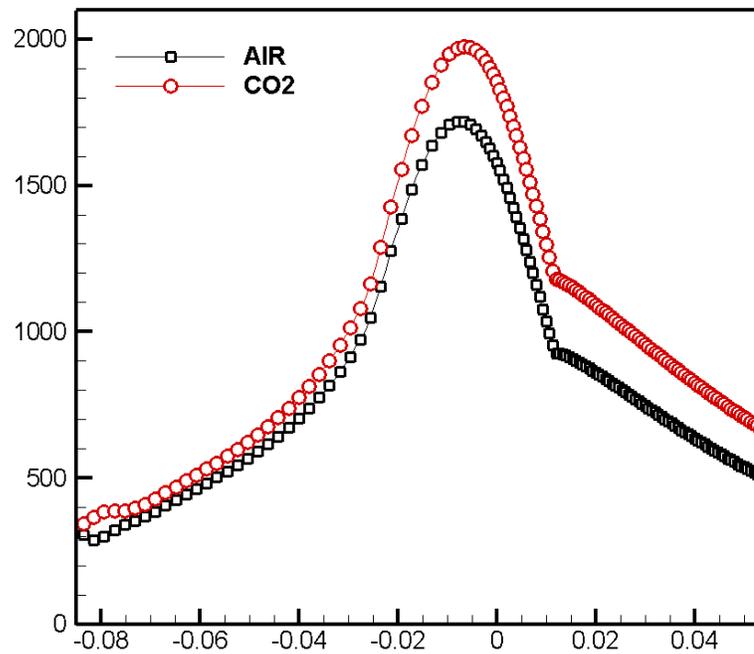


FIGURE 5.81. Effet de γ sur le transfert thermique pariétal, $h[W/m^2] = f(x[m])$

5.10 Effet de γ

gaz	P_0	T_0	C_p	C_v	R	γ	μ
AIR	7 bars	500 k	1029.5	742.4	287	1.387	Sutherland
CO ₂	7 bars	500 k	1014	825	189	1.229	$\mu = A + BT + CT^2$

Avec $A = 11.811E - 7$, $B = 4.9738E - 8$ et $C = -1.0851E - 11$

Pour tenter de simuler l'effet de la nature de gaz sur le taux de transfert thermique à la paroi de la tuyère, tel que l'effet du rapport des chaleurs spécifiques C_p et C_v ; pour cela nous avons choisi deux gaz de différent γ et qui ont des chaleurs spécifiques proches, ces deux gaz sont l'air et le dioxyde de carbone CO_2 , la viscosité de l'air est prise variable suivant la loi de Sutherland tandis que celle de CO_2 suit une loi de puissance comme le montre le tableau ci-dessus. Les conditions génératrices à l'entrée de la tuyère de référence [1] sont $P_0 = 7bars$ et $T_0 = 500K$, la température de la paroi est prise égale à $T_w = 300K$. La figure 5.81 montre que la différence entre

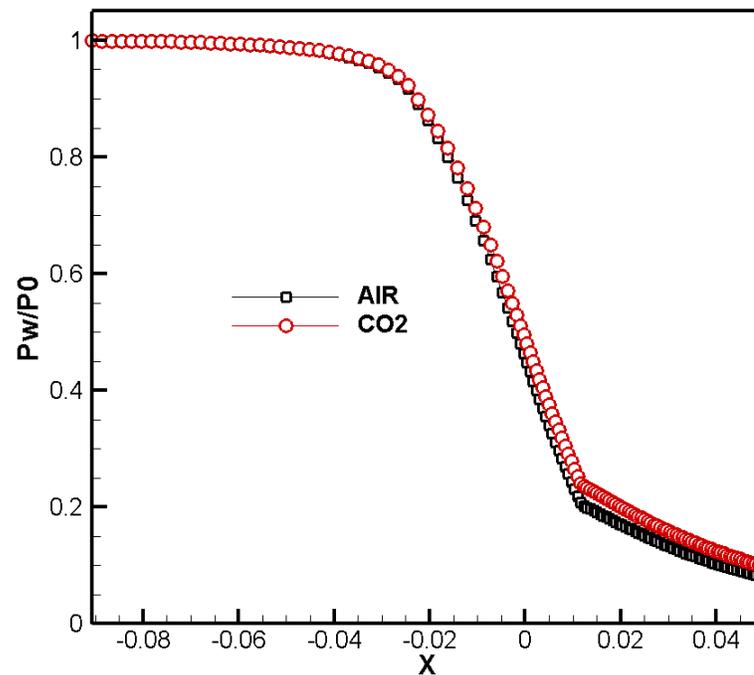


FIGURE 5.82. *Effet de γ sur la pression pariétale*

les coefficients de transfert thermiques est minimale dans la partie subsonique de la tuyère de l'ordre de 9%, cette différence commence à être appréciable juste en amont du col de la tuyère, qui correspond à la position du maximum du taux de transfert thermique pariétal, et au maximum du flux massique qui est de l'ordre de 15%. La différence suivra son augmentation jusqu'à un point d'inflexion qui correspond à la position du choc interne (position de connexion du col avec le divergent) la pression augmente et diminue rapidement dans cette position, la différence est égale à environ 21%, qui continue à augmenter légèrement et graduellement jusqu'à 24% de différence comme le montre la figure 5.83. La figure 5.82 montre que la pression pariétale n'est pas affectée par le changement de γ dans la partie subsonique de la tuyère, mais il y a plus de détente tout en augmentant γ ceci est bien clair avec un cas de décollement de la couche limite, où la pression de séparation augmente avec la diminution de γ . On peut conclure mais pas définitivement que le rapport des chaleurs spécifiques γ

a un effet clair sur le taux de transfert thermique dans le cas traité, le coefficient de transfert thermique pariétal augmente avec la diminution de γ , cette constatation est claire à certain pourcentage. Cependant, cette analyse numérique est incomplète car le niveau d'enthalpie peut induire des effets de gaz réels avec notamment des variations locales de γ . L'effet de la température de la paroi est ainsi en combinaison avec l'effet de γ , car dans la pratique, la distribution de la température de la paroi n'est plus la même que celle retenue.

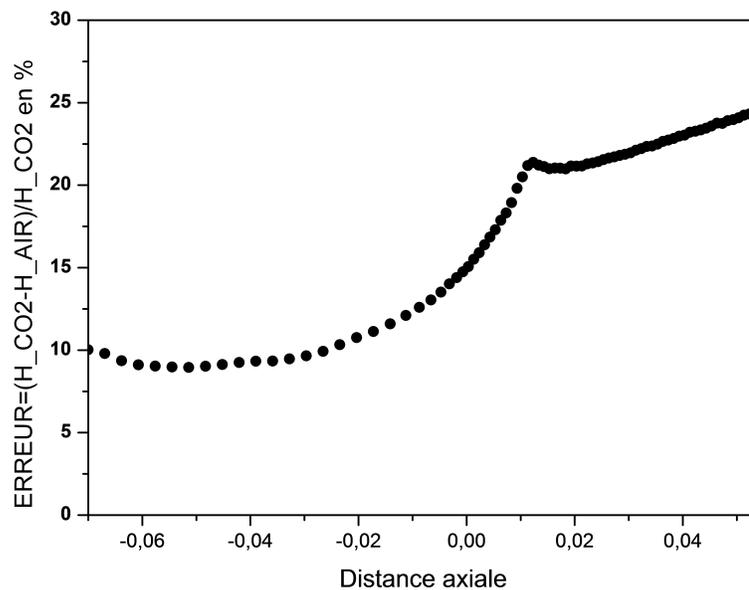


FIGURE 5.83. *Effet de γ sur la pression pariétale*

5.11 Effet de la température de stagnation T_0

L'effet de la température de stagnation (T_0) à l'entrée de la tuyère sur le transfert de la chaleur n'est pas bien clair, avec les tendances fonction de plusieurs paramètres. Même les simulations faites en gardant la même pression de stagnation de l'ordre de $P_0 = 7bars$, et avec le même rapport de température $T_w/T_0 = 0.6$. Ceci implique une combinaison de l'effet de plusieurs paramètres telles que la température

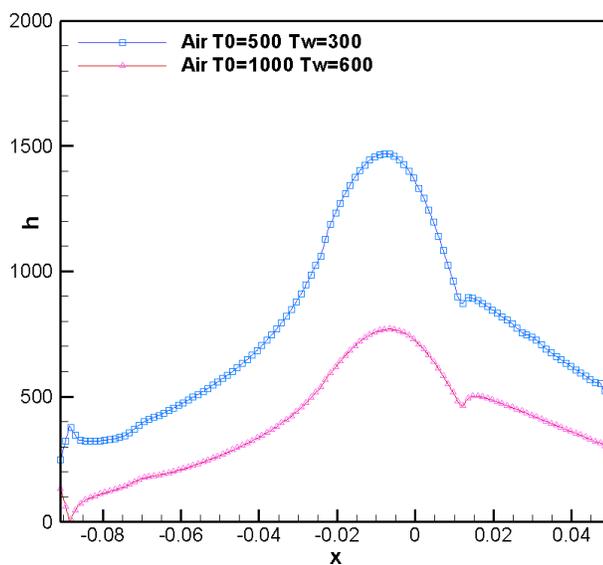


FIGURE 5.84. *Effet de la température de stagnation sur le transfert thermique pariétal pour l'AIR*

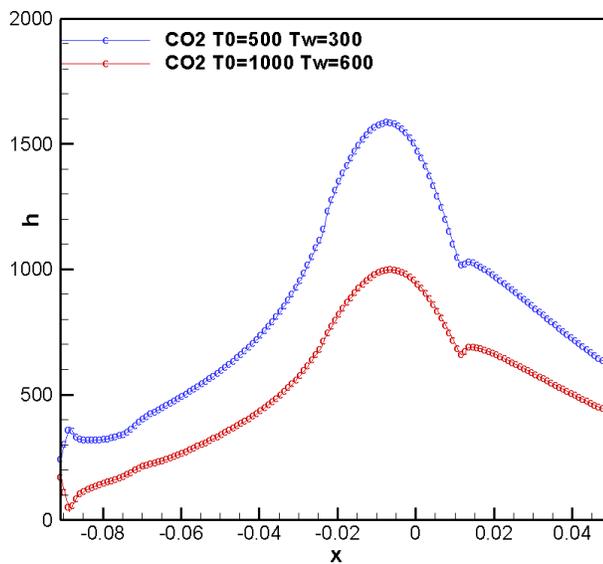


FIGURE 5.85. *Effet de la température de stagnation sur le transfert thermique pariétal pour le CO₂*

de paroi qui égale $T_w = 600$ K pour $T_0 = 1000$ K et $T_w = 300$ K pour $T_0 = 500$ K, aussi l'effet du rapport des chaleurs spécifiques γ est présent, avec $\gamma = 1.336$ pour

$T_0 = 1000k$ et $\gamma = 1.376$ pour $T_0 = 600k$. Notons qu'avec l'effet multiple de plusieurs variables essentiellement (T_w, γ) , nos calculs trouvent une même tendance des mesures expérimentales de Back et al [1], qui montre que le coefficient de transfert thermique pariétal diminue avec l'augmentation de la température de stagnation T_0 comme le montre la figure 5.84 avec l'air, et cet effet est similaire pour le dioxyde de carbone CO_2 comme le montre la figure 5.85. On note que l'écoulement est plus énergétique pour le dioxyde de carbone CO_2 , et qui possède un γ plus faible que l'Air.

5.12 Effet de la pression de stagnation P_0

Des effets intéressants résultant d'une variation dans le nombre de Reynolds ont été observés dans l'étude de transfert thermique dans les tuyères propulsives. Pour une même géométrie et température totale T_0 , le nombre de Reynolds peut être contrôlé en ajustant la pression totale à l'entrée de la tuyère. Le coefficient du transfert thermique (figure 5.86) augmente, avec l'augmentation de la pression totale P_0 en raison de l'augmentation du flux de masse (figure 5.87). La valeur maximale du coefficient de transfert thermique h se produit juste en amont du col de la tuyère.

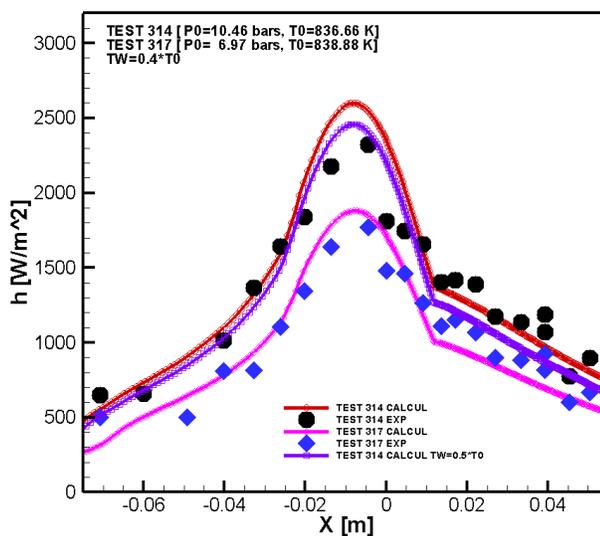


FIGURE 5.86. Effet de la pression P_0 sur le transfert thermique pariétal, $h[W/m^2] = f(x[m])$, expérimental de la référence [1]

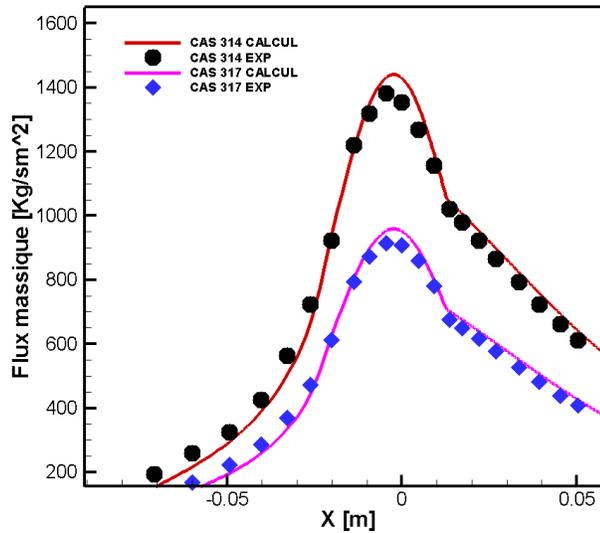


FIGURE 5.87. Effet de la pression P_0 sur le flux de masse au bord de la couche limite, expérimental de la référence [1]

5.13 Effet de l'angle du convergent

La comparaison des résultats expérimentaux compilés dans [58], dans cette référence l'étude est menée sur deux tuyères d'angle de convergent différent de $30^\circ-15^\circ$ et $60^\circ-15^\circ$. Pour des conditions de fonctionnement identiques, la pression génératrice est de $P_0 = 207N/cm^2$ et la température de stagnation $T_0 = 538K$, avec une conduite d'entrée de longueur $43.2cm$ non refroidie. La figure 5.88 montre l'évolution axiale le long de la paroi de la tuyère, la valeur maximale du coefficient de transfert de chaleur pour la tuyère $60^\circ-15^\circ$ est d'environ 50% plus élevée que celle de la tuyère $30^\circ-15^\circ$.

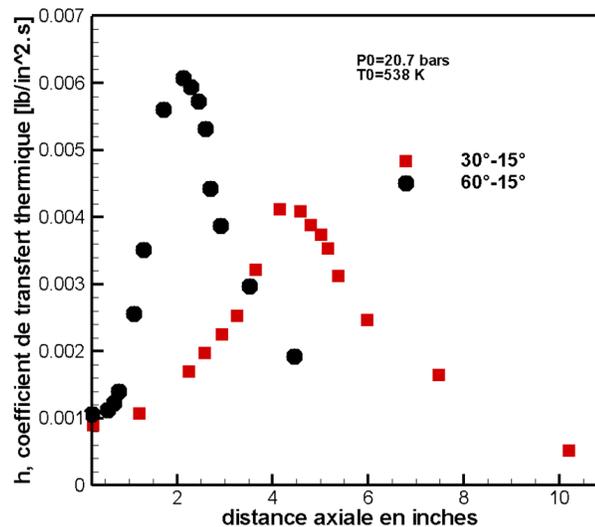


FIGURE 5.88. Distributions expérimentales du coefficient de transfert de chaleur dans les tuyères $30^\circ-15^\circ$ et $60^\circ-15^\circ$ avec une conduite d'entrée non refroidie de 43.2 cm de longueur, réf [58].

RÉFÉRENCES

- [1] L. H. Back, P. F. Massier, H. L. Gier, Convective Heat Transfer in a Convergent-Divergent Nozzle, *Int. J. Heat Mass Transfer* (1964) Vol.7, PP. 549-568.
- [2] E. Lutum, J. von Wolfersdorf, K. Semmler, J. Dittmar, B. Weigand, An experimental investigation of film cooling on a convex surface subjected to favourable pressure gradient flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 44 (2001) 939-951.
- [3] V. P. Lebedev, V. V. Lemanov, V. I. Terekhov, Film-Cooling Efficiency in a Laval Nozzle Under Conditions of High Freestream Turbulence, *Journal of Heat Transfer*, vol. 128 (2006) 571-579.
- [4] L. H. Back, P. F. Massier, H. L. Gier, Comparison of Measured and Predicted Flows through Conical Supersonic Nozzles, with Emphasis on the Transonic Region, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 9, Sept. (1965), pp. 1606-1614.
- [5] R. F. Cuffel, L. H. Back, and P. F. Massier, Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature, December, *AIAA paper* (1968) Vol7, N7 PP 1364-1366.
- [6] J.C. Delise, M.H.N. Naraghi, Comparaison Studies of Convective Heat Transfer Models for Rocket Engines, *AIAA* (1995)-2499.
- [7] J. Xu, C. Zhao, Two-dimensional numerical simulations of shock waves in micro convergent-divergent nozzles, *Int J Heat Mass Transfer* 50(2007)2434-2438.
- [8] X. Xiao, H. A. Hassan, J. R. Edwards, Role of Turbulent Prandtl Numbers on Heat flux at Hypersonic Mach Numbers, *AIAA* 45, No 4, April (2007) 806- 813.
- [9] R. Sauer, General Characteristics of the Flow Through Nozzles at Near Critical Speeds, *NACA* (1947)TM-1147.
- [10] K. Oswatitsch, W. Rothstein, Flow Pattern in a Converging-Diverging Nozzle, *NACA* (1949) TM-1215.

- [11] I. M. Hall, Transonic Flow in Two-Dimensional and Axially Symmetric Nozzles, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XV, Pt. 4, (1962), pp. 487-508
- [12] W.W. Liou, G. Huang, T.H. Shih., 2000, Turbulence model assessment for shock wave/turbulent boundary-layer interaction in transonic and supersonic flows, Computers and Fluids, 29, p. 275299.
- [13] SPALART, P. R. ALLMARAS, S. R., 1994, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, La Recherche Aerospaciale, 1, p. 521.
- [14] MENTER, F. R., 1992, Improved two-equation k-w turbulence models for aerodynamic flow, NASA, Rapport Technique 103975.
- [15] M.V. Herbert, R.J. Herd, Boundary-layer Separation in supersonic propelling nozzles, NGTE report No. 3421, 1964.
- [16] R. B. Schmucker, Status of flow separation prediction in liquid propellant rocket nozzles, NASA TM X-64890, nov 1974.
- [17] H.W. Liepmann and A. Roshko. Elements of gasdynamics. John Wiley and sons, 1957.
- [18] G. Hagemann, M. Terhardt, M. Frey, P. Reijasse, M. Onofri, F. Nasuti, and J. Ostlund, Flow separation and side-loads in rocket nozzles. In Proc. of the 4th International Symposium on Liquid Space Propulsion, 2000.
- [19] E. Carafoli. High speed aerodynamics. Editura tehnica, Bucharest, 1956.
- [20] H.O. Amann. Experimental study of the starting process in a reflection nozzle. Phys. Fluids Supplement, 12 :150153, 1967.
- [21] J. Ostlund. Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads. Technical Report 09, Royal Institute of Technology, Sweden, May 2002.
- [22] G. Ben-Dor, M. Ivanov, E.I. Vasilev, and T. Elperin. Hysteresis processes in

- the regular reflection? Mach reflection transition in steady flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 38 :347387, 2002.
- [23] A. Chpoun, D. Passerel, H. Li, and G. Ben-Dor. Reconsideration of oblique shock wave reflections in steady flows. part 1 : Experimental investigation. *J. Fluid Mech.*, 301 :1935, 1995.
- [24] M. Frey and G. Hagemann. Status of flow separation prediction in rocket nozzles. *AIAA Paper 98-3619*, 1998.
- [25] D.R. Chapman, D.M. Luehn, H.K Karson, Investigation of separated flow in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition, Report 1356, NACA, 1958.
- [26] A. Mager, On the model of the free, shock-separated, turbulent boundary layer, *Journal of Aeronautical Sciences*, 1956.
- [27] P. Carrière, Recherches sur les décollements dans les tuyères propulsives, Communication présentée au Symposium sur l'effet Coanda - Institut de Mécanique des Fluides "Traian Vuia" Bucarest, 22-25 juin 1967.
- [28] M. Summerfeld, C. R. Foster and W. C. Swann, Flow separation in overexpanded supersonic exhaust nozzles, *ARS Journal*, p.319, sept/oct, 1954.
- [29] L. Nave, G. Coffey. Sea level side loads in high-area-ratio rocket engines. *AIAA/SAE 9th propulsion Conference*, Nov. 1973, Las Vegas, Nevada. *AIAA-73-1284*.
- [30] F. Nasuti, M. Onofri : Viscous and inviscid vortex generation during start-up of rocket nozzles. *AIAA J.* 36(5), 809815 (1998)
- [31] F. Nasuti, M. Onofri : Viscous and Inviscid Vortex Generation During Nozzle Flow Transients. *AIAA Paper 96-0076*, 34th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (1996)
- [32] M. Onofri, F. Nasuti, M. Bongiorno : Shock Generated Vortices and Pressure

- Fluctuations in Propulsive Nozzles. AIAA Paper 98-0777, 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (1998)
- [33] M. Onofri, F. Nasuti : The Physical Origin of Side Loads in Rocket Nozzles. AIAA Paper 99-2587, 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference (1999)
- [34] J. Mattsson, U. Hogman, L. Torngren : A Sub Scale Test Programme on Investigation of Flow Separation and Side Loads in Rocket Nozzles. In : Proceedings of the 3rd European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles, pp. 373378. 2426 November 1998, ESTEC, ESA SP-426, Noordwijk, The Netherlands (1998)
- [35] P. Reijasse, P. Servel, R. Hallard : Synthesis of the 1998-1999 ONERA Works in the FSCD Working Group. Tech. Rep. RTS 49/4361 DAFE/Y, ONERA, Chatillon Cedex, France (1999)
- [36] M. Frey, R. Stark, H.K. Ciezki, F. Quessard, W. Kwan : Subscale Nozzle Testing at the P6.2 Nozzle Stand. AIAA Paper 2000- 3777, 36thAIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference (2000)
- [37] M. Frey, G. Hagemann : Restricted shock separation in rocket nozzles. *J. Propuls. Power* 16(3), 478484 (2000)
- [38] Hagemann, G., Frey, M. : Shock pattern in the plume of rocket nozzles : needs for design consideration. *Shock Waves* 17(6), 387395 (2008)
- [39] M. Terhardt, G. Hagemann, M. Frey : Flow Separation and Side- Load Behavior of the Vulcain Engine. AIAA Paper 99-2762, 35th AIAA/ ASME/ SAE/ ASEE Joint Propulsion Conference (1999)
- [40] J. Ostlund, M. Jaran : Assessment of Turbulence Models in Overexpanded Rocket Nozzle Flow Simulations. AIAA Paper 99-2583, 35th AIAA/ ASME/ SAE/ASEE Joint Propulsion Conference (1999)

- [41] S. Girard, T. Alziary de Roquefort : Study of flow separation in overexpanded rocket nozzles. Fourth FrenchRussianItalian Uzbek Workshop, Marseille, France (1997)
- [42] S. Deck, P. Guillen : Numerical Simulation of Side Loads in an Ideal Truncated Nozzle. *J. Propuls. Power* 18(2), 261-269 (2002)
- [43] W. Kwan, R. Stark : Flowseparation phenomena in subscale rocket nozzles. AIAA 2002-4229, 38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit (2002)
- [44] R. Stark, B. Wagner : Experimental study of boundary layer separation in truncated ideal contour nozzles. *ShockWaves*, present Issue (2009)
- [45] AFAQUE SHAMS, contribution to the numerical simulation of turbulent shock-induced separated flows : application to supersonic over-expanded nozzle flow. PhD thesis, ENSMA , 2010.
- [46] A. Hadjadj. Analyse physique et simulation numérique des écoulements compressibles applications aux tuyères de propulseur. PhD thesis, Université de Rouen, 1997.
- [47] Bartz. Donald R : An Approximate Solution of Compressible Turbulent Boundary- Layer Development and Convective Heat Transfer in Convergent-Divergent Nozzles. *Trans. ASME*, vol. 77, no. 8, Nov. 1955, pp. 1235-1245.
- [48] D. R. Bartz, A Simple Equation for Rapid Estimation of Rocket Nozzle Convective Heat Transfer Coefficients, *Jet Prop.*, vol. 21, pp. 49-51, 1957.
- [49] D. R. Bartz, Turbulent Boundary-Layer Heat Transfer from Rapidly Accelerating Flow of Rocket Combustion Gases and of Heated Air, *Advances in Heat Transfer*. Vol. 2. James P. Hartnett and Thomas F. Irvine, Jr., eds., Academic Press, pp. 1-108, 1965.
- [50] R. H. Schmucker, A procedure for calculation of boundary layer trip protuberances in over-expanded rocket nozzle, NASA TM X-54843, 1973.

- [51] D. R. Boldman, J. F. Schmidt and R. C. Ehlers, Effect of Uncooled Inlet Length and Nozzle Convergence Angle on the Turbulent Boundary Layer and Heat Transfer in Conical Nozzles Operating With Air, *J. Heat Transfer*, vol. 89, pp. 341-350, 1967.
- [52] X. L. Tong, E. Luke, Turbulence Models and Heat Transfer in Nozzle Flows, *AI-AA journal*, vol.42. pp. 2391-2393, 2004.
- [53] A. Fortini and R.C. Ehlers, comparison of experimental to predicted heat transfer in a bell-shaped nozzle with upstream flow disturbances, *NASA TN D-1743*, 1963.
- [54] P. MOIN, K. SQUIRES, W. CABOT, S. LEE, 1991 A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Phys. Fluids* 3 (11), 2746-2757.
- [55] M. GERMANO, U. PIOMELLI, P. MOIN, W. CABOT, 1991 A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids* 3 (7), 1760-1765.
- [56] T. P. Sommer, R. M. C. So, H. S. Zhang, A Near Wall Four-Equation Turbulence model For Compressible Boundary Layers, *NASA Contractor Report (1992) (NASA-CR-4436)*. Arizona State Univ.
- [57] T. P. Sommer, R. M. C. So, H. S. Zhang, A Near Wall Variable Turbulent-Prandtl-Number Turbulence Model For Compressible Flows, *AIAA(1993)Vol 31. N 1,27-35*.
- [58] Donald R. BOLDMAN, Harvey E. NEUMANN and James F. SCHMIDT, Heat transfer in 30° and 60° nozzles with various diameter uncooled pipe inlets, *Lewis Research Center, NASA TN D-4177*, (1967).
- [59] M. LJUBOJA, W. RODI, Prediction of Horizontal and Vertical Turbulent Buoyant Wall Jets, *ASME : Journal of Heat Transfer Vol.103*, pp.343- 349 (1981).
- [60] A. A. TOWNSEND, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, Great Britain, ISBN 0521 20710 X ISBN 0521 29819 9 (1976).

- [61] H. E. FIEDLER, Transport of heat across a plane turbulent mixing layer, *Adv. Geophys* 18, 93-109 (1974).
- [62] A. J. CHAMBERS, R. A. ANTONIA, L. FULACHIER, Turbulent Prandtl number and spectral characteristics of a turbulent mixing layer, *Int. Journal Heat Mass Transfer* Vol.28, No 8, pp.1461- 1468 (1985).
- [63] K. BENSAYAH, A. BENCHATTI, M. AOUISSI, A. BOUNIF, Scalar turbulence model investigation with variable turbulent Prandtl number applies in hot axisymmetric turbulent round jet, *Int J Heat Tech.* 25 : 49-56 (2007).
- [64] K. BENSAYAH, A. HADJADJ, A. BOUNIF, Heat Transfer in Turbulent Boundary Layers of Conical and Bell Shaped Rocket Nozzles with Complex Wall Temperature, *Journal : Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, Volume 66, Issue 3, August 2014, pages 289-314

Chapitre 6

CONCLUSION

Le travail de cette thèse porte essentiellement sur la simulation numérique des écoulements turbulents compressibles dans différents types de tuyère, que soit conique, à contour idéal, ou à contour optimisé. Le modèle de turbulence utilisé pour cet effet est le modèle $k - \omega$ SST de Menter, développé pour l'étude des écoulements avec un fort gradient de pression, pour simuler des écoulements avec décollement de la couche limite de la paroi. Ce modèle en ce sens permet de calculer l'interaction de la couche limite et les ondes de choc au sein d'un écoulement compressible. L'extension au modèle SST-V (limitation du terme de production de l'énergie cinétique de turbulence k) donne un modèle assez équilibré reproduisant assez correctement les écoulements interne de couche limite en présence d'un gradient de pression adverse.

L'objectif principal après un bon choix et validation du modèle retenu, était d'examiner par voie numérique les écoulements turbulents compressibles dans les tuyères dans le but d'appréhender la physique des différents paramètres qui gouvernent ces écoulements.

De plus, afin de pouvoir traiter le transfert thermique dans une tuyère à paroi refroidie, un traitement implicite de la condition à la paroi initialement adaptée pour le cas adiabatique, a été implanté pour tenir en compte une température ou un flux de chaleur imposés à cette frontière de surface.

Avant de passer à l'étude de la physique d'écoulements compressibles avec ou sans présence de transfert de chaleur, le modèle a été testé sur un type d'écoulement présentant des flux internes dans la région transsonique derrière le col. le cas test retenu est celui de Cuffel et al qui contient de nombreuses données pour la tuyère avec un rapport $r_c/r_{th} = 0.625$. L'analyse des résultats de comparaison obtenus montre

une grande robustesse du modèle de turbulence retenu pour le calcul des interactions turbulence/onde de choc. Notons que les écarts entre le calcul numérique et l'expérience ne sont cependant pas forcément imputables au modèle de turbulence. Le maillage et la méthode numérique, des effets tridimensionnels de l'écoulement, peuvent être responsables de certains écarts enregistrés.

Les écoulements avec décollement de la couche limite induites par chocs jouent un rôle fondamental dans la conception et le fonctionnement des navettes aérospatiales à grande vitesse et des systèmes de propulsion, dans les configurations aérodynamiques internes et externes. Ils provoquent des interactions complexes entre les ondes de choc ou les ondes de détente avec des couches limite et de cisaillement, qui peuvent conduire à des modifications spectaculaires de leur topologie globale, selon les conditions d'entrée ou de sortie. Ils donnent un comportement instable à basse fréquence qui peut induire une pression dangereuse et charges thermiques. Malgré tels types d'écoulements ont été le domaine d'intérêt depuis plusieurs décennies, les mécanismes physiques qui entraînent cette instabilité demeurent toujours un problème alors qu'une prédiction totalement fiable de leurs caractéristiques instables échappe encore à la communauté de la recherche. La complexité des phénomènes mis en jeu nous ont conduit d'acquérir et de développer des outils de calculs fiables et des modèles adéquats pour tenir en compte de la physique réelle de ces écoulements.

La première partie de cette thèse s'est focalisée sur l'analyse physique des facteurs influençant la position du point de décollement et la distribution de la pression pariétale dans un écoulement décollé libre (régime FSS), les résultats essentiels sont résumés ci-dessous :

- Le décollement est légèrement précoce plus que l'angle de divergent est plus grand. Cette tendance est plus visible pour de grands rapports de section.
- Le rapport des chaleurs spécifiques γ a peu d'influence sur la position du point de décollement, les calculs montrent que lorsque γ diminue, le point de séparation

se déplace en aval avec une légère augmentation de pression de séparation. Cette observation est plus prononcée avec P_0 croissante.

- Le point de séparation se déplace plus en aval avec l'augmentation de la pression dans la chambre ou par la diminution de la pression à l'extérieur.
- Pour une tuyère sur-détendue, à des conditions de fonctionnement identiques, la position de décollement se déplace légèrement en aval avec une diminution de la température de la paroi (T_w).
- Pour l'influence de la forme du divergent de la tuyère que soit conique ou galbée, il s'est trouvé que cette forme affecte la distribution de la pression. Pour un divergent à contour profilé, la détente est plus importante, donc un nombre de Mach plus important, il apparaît une structure avec un disque de Mach.
- En ce qui concerne l'influence de l'état de la surface sur la position du point de séparation, la différence n'est pas bien marquée. La comparaison entre une paroi lisse et paroi constituée de tubes juxtaposés, montre un décollement précoce pour la paroi lisse.
- L'état de la couche limite amont (laminaire, turbulente ou presque turbulente) et le niveau de l'intensité de la turbulence à l'entrée de la tuyère jouent un rôle prépondérant sur le point de décollement et peuvent conduire à une dissymétrie du jet surtout en régime transitionnel. La transition de la couche limite au voisinage du point de décollement a un rôle important sur la position du point de décollement (une couche limite laminaire moins énergétique est plus instable qu'une couche limite turbulente).

- Les coefficients de la formule de la réalisabilité joue aussi un rôle sur la position du point de décollement, on a remarqué essentiellement l'influence du coefficient A_s sur la limitation de la viscosité turbulente et par conséquent sur le niveau d'énergie cinétique dans les zones fortement cisillées, cette tendance est plus que A_s diminue, la position du point de décollement se déplace plus en aval. .

L'étude du transfert de la chaleur en situation d'écoulements turbulents compressibles a ensuite été abordée en détail dans le cas des tuyères refroidies, avec contours coniques ou profilés.

Les résultats obtenus sont comparés avec les données expérimentales d'où on trouve un accord très satisfaisant. Les principales conclusions de ce travail sont résumées comme suites. Tout d'abord, en l'absence de choc induit par séparation de l'écoulement, l'effet de la température de la paroi sur la répartition de la pression statique pariétale se trouve être négligeable. Dans ce cas, l'utilisation d'une température fixe appropriée de paroi est une bonne approximation pour prédire le coefficient de transfert thermique. Deuxièmement, les résultats ont révélé que la diminution de la température de paroi conduire à une augmentation du flux de masse, dont la valeur est prononcée en amont du col de la tuyère. Ce qui est important, le coefficient de transfert de chaleur dans la tuyère ayant un grand diamètre de la conduite d'entrée non refroidie s'avère plus faible qu'avec une conduite ayant un diamètre plus petit. Un examen attentif des coefficients de transfert de chaleur, par rapport à leurs rapports respectifs de température de paroi sur la température totale, montrent que le coefficient de transfert de chaleur augmente en ordre de grandeur avec la diminution de la température de paroi et par conséquent avec augmentation de nombre de Mach près de la paroi. Le maximum du coefficient de transfert thermique est situé juste en amont du col de la tuyère, qui correspondent à l'endroit où le flux de masse est maximum. Cette étude montre également qu'une simple relation linéaire entre la température de la paroi et la température totale est capable de prédire avec une précision accep-

table la distribution du coefficient de transfert thermique dans les tuyères ayant des conduites d'entrée non refroidie avec différents diamètres. En outre, le rapport des températures T_w/T_0 d'environ 40 pour cent donne un bon accord pour la prédiction du pic du coefficient de transfert thermique.

Il devrait être évident, d'après le résumé très succinct des différents résultats mentionnés ci-dessus que l'étude de tous les paramètres influençant le transfert de chaleur est extrêmement difficile, malgré les progrès remarquables dans le calcul numérique et de l'expérimentation. Des travaux supplémentaires sont nécessaires pour obtenir des informations sur les couches limites thermiques et de vitesse dans une tuyère convergente-divergente et dans la mesure qu'ils soient prévisibles par une simple analyse ou similitude. Sur la base de ce qui précédemment mentionné, des suggestions sont faites là où peuvent se concentrer les efforts futurs sur l'investigation des écoulements compressibles de tuyères.

- Il reste encore beaucoup d'effort à faire sur la recherche des phénomènes d'ondes de choc comportant différents types d'interaction de choc dans les tuyères. D'un intérêt particulier, le taux transfert thermique dans les tuyères coniques ou galbées présentant un choc interne résultant de la montée en pression juste en aval du col de la tuyère.
- L'utilisation d'une relation simple de la température de la paroi en fonction de la température totale donne de bons résultats pour les tuyères ont un ratio R_u supérieure ou égale à l'unité, selon les résultats expérimentaux, la température de la paroi prend une forme similaire à celle du transfert de chaleur de paroi, donc une formulation analytique précis est nécessaire, il est proposé ici, après les résultats préliminaires obtenus pour modéliser cette quantité selon la température du premier point proche de la paroi ou en fonction du coefficient de frottement qui en résulte ainsi que certains théorie suggère.
- La recherche d'une formulation adéquate pour tenir en compte de réelles variations de nombre de Prandtl turbulent dans l'ensemble de l'écoulement.

- Une autre tâche est celle liée à l'étude de transfert thermique dans des situations et des configurations plus complexes, comme pour une structure d'un choc induisant un écoulement séparé, et dans des tuyères qui montrent un basculement de choc libre de séparation (FSS), dans lequel la couche limite se sépare de la paroi de la tuyère et ne se rattache jamais, à un décollement restreint (RSS), caractérisé par une bulle de recirculation fermée, en aval du point de séparation, avec ré-attachement à la paroi et un taux de transfert élevé dans la région de paroi entre la séparation et le recollement. Et dans la situation lorsque la séparation a eu lieu et à l'intérieur de la tuyère, juste en aval du col, lorsque les ondes de choc réfléchies sont incidents sur la paroi, le transfert de chaleur dans la région de séparation dépasse parfois la valeur du col lorsque la couche limite est laminaire au niveau du col. Cela est censé être causé par l'interaction entre de multiples ondes de choc (pseudo-choc) et l'écoulement près de la paroi. Cette interaction augmente le mélange entre l'air ambiant frais et le courant chauffé, et a augmenté le transfert de chaleur.
- La validation est nécessaire également pour l'étude de la variation du transfert de chaleur selon la structure de la couche limite à l'entrée de la tuyère et sur la façon que l'accélération affecte cette structure. A une basse pression de stagnation, lorsque la couche limite est laminaire et le transfert de chaleur étaient identiques à ceux trouvés avec une épaisse couche limite turbulente. Une laminarisation s'est produite près de la paroi de la tuyère avec une basse pression de chambre. Toute modification du gradient de vitesse local modifierait le gradient de température dans cette région. Cependant, la stabilisation de la couche de vitesse inhiberait la convection des tourbillons turbulents dans le jet libre. En théorie, la perte ou la diminution de cette source de turbulence auraient tendance à réduire le niveau de turbulence dans l'écoulement libre. La diffusivité thermique turbulente est liée au niveau de la diffusivité de quantité de mouvement tourbillonnaire dans l'écoulement à l'extérieure de la couche limite. On

peut donc conclure que les régions près de la paroi et d'extérieure contribuent à la réduction du transport turbulent de chaleur lorsque la relaminarisation de la couche de vitesse survient.

- Il serait très instructif de simuler le transfert thermique conjugué à travers les parois d'une tuyère, et cela nécessite l'étude complète de l'interaction fluide/structure ou fluide/paroi, pour prendre en compte les effets de l'épaisseur et le type du matériau de la tuyère, l'épaisseur et la nature du fluide de refroidissement, qui se révèlent être d'une importance capitale pour la compréhension et la prédiction du transfert thermique et pour une meilleure conception de ces organes de propulsion.

Annexe A

A.1 Coordonnées généralisées

La formulation des opérateurs implicites en coordonnées généralisées se fonde sur le calcul effectué en cartésien. Le passage des opérateurs cartésiens aux opérateurs en coordonnées généralisées se fait en introduisant une matrice de rotation. Notons (x, y) (resp. (ξ, η)) les coordonnées cartésiennes (resp. généralisées)

Soit T la transformation associant un point de coordonnées x et y du plan (x, y) à un point de coordonnées ξ et η du plan (ξ, η) :

$$(x, y) \xrightarrow{T} \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \xrightarrow{T^{-1}} (x, y)$$

Le système à résoudre s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (\text{A.1})$$

soit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = S \quad (\text{A.2})$$

où

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

de même :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

il vient alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

où $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$ est le déterminant de la matrice jacobienne.

les dérivées suivant x et y peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

avec pour la surface $\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (n_x)_{j+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (n_y)_{j+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

pour la surface $\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (m_x)_{i+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (m_y)_{i+\frac{1}{2}} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La discrétisation aux dérivées partielles s'effectue selon la surface à travers laquelle le flux est évalué. Nous donnons ici le cas de $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$

Sur la surface $\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\tilde{u}_{i+1,j+l} - \tilde{u}_{i-1,j+l}}{2} \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} &= \tilde{u}_{i,j+1} - \tilde{u}_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

et Sur la surface $\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right)_{i+\frac{1}{2},j} &= \tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j} \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right)_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\tilde{u}_{i+l,j+1} - \tilde{u}_{i+l,j-l}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Pour trouver l'expression pour le vecteur $\delta G_{\nu\eta}$, on applique l'opérateur δ à (4.61). En compte tenue de l'hypothèse de la couche mince, et par conséquent, les dérivées croisées dans le bilan des flux visqueux en implicite sont négligées. On obtient finalement :

$$\delta G_{\nu\eta} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial \eta} + \mu_{ef} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial y} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial x} n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{v}}{\partial \eta} \\ \mu_{ef} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} n_x - \frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial \eta} + \mu_{ef} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} n_x + \frac{4}{3} \frac{\partial \eta}{\partial y} n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{v}}{\partial \eta} \\ \left(\begin{aligned} &\mu_{ef} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} \tilde{u} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \tilde{v} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \tilde{u} n_y - \frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} \tilde{v} n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial \eta} + \\ &\mu_{ef} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial y} \tilde{u} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial x} \tilde{v} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial x} \tilde{u} n_y + \frac{4}{3} \frac{\partial \eta}{\partial y} \tilde{v} n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{v}}{\partial \eta} + \\ &\lambda_{ef} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} n_y \right) \frac{\partial \delta \tilde{e}}{\partial \eta} \\ &\mu_{kef} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} n_y \right) \frac{\partial \delta k}{\partial \eta} \\ &\mu_{\omega ef} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} n_y \right) \frac{\partial \delta \omega}{\partial \eta} \end{aligned} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Par l'introduction des termes sources et des flux visqueux dans l'équation 4.57, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
& \delta U_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{+n} \delta U_{i,j}^n + A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{-n} \delta U_{i+1,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \\
& - \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{+n} \delta U_{i-1,j}^n + A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{-n} \delta U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{+n} \delta U_{i,j}^n + B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{-n} \delta U_{i,j+1}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| \\
& - \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{+n} \delta U_{i,j-1}^n + B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{-n} \delta U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \\
& - \Delta t \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta \ j+\frac{1}{2}}^n (\delta U_{i,j+1}^n - \delta U_{i,j}^n) \\
& + \Delta t \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta \ j-\frac{1}{2}}^n (\delta U_{i,j}^n - \delta U_{i,j-1}^n) - \Delta t H_{i,j}^n \delta U_{i,j}^n \\
& = - \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i,j}^n + A_{\xi \ i+\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i+1,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i-1,j}^n + A_{\xi \ i-\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \\
& - \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j}^n + B_{\eta \ i,j+\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j+1}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j-1}^n + B_{\eta \ i,j-\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{\nu \xi \ i+\frac{1}{2},j}^n |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - F_{\nu \xi \ i-\frac{1}{2},j}^n |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\nu \eta \ i,j+\frac{1}{2}}^n |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - G_{\nu \eta \ i,j-\frac{1}{2}}^n |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \right) + \Delta t S_{0i,j}^n
\end{aligned} \tag{A.12}$$

En groupant les accroissements implicites δU par indices dans l'équation (A.12), il vient :

$$\begin{aligned}
& \left(I + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} (A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| + \right. \\
& B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| + \\
& \left. \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j+\frac{1}{2}}^n + \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j-\frac{1}{2}}^n) - \Delta t H_{i,j}^n \right) \delta U_{i,j}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \delta U_{i+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \delta U_{i-1,j}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{-n} |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j+\frac{1}{2}}^n \right) \delta U_{i,j+1}^n - \\
& \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{+n} |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| + \frac{|\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}|^2}{\mathcal{V}_{i,j}} \mathcal{M}_{\eta j-\frac{1}{2}}^n \right) \delta U_{i,j-1}^n \\
& = -\frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i,j}^n + A_{\xi i+\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i+1,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{+n} U_{i-1,j}^n + A_{\xi i-\frac{1}{2},j}^{-n} U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \\
& - \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j}^n + B_{\eta i,j+\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j+1}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{+n} U_{i,j-1}^n + B_{\eta i,j-\frac{1}{2}}^{-n} U_{i,j}^n \right) |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{\nu\xi i+\frac{1}{2},j}^n |\vec{\mathcal{S}}_{i+\frac{1}{2}}| - F_{\nu\xi i-\frac{1}{2},j}^n |\vec{\mathcal{S}}_{i-\frac{1}{2}}| \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\nu\eta i,j+\frac{1}{2}}^n |\vec{\mathcal{S}}_{j+\frac{1}{2}}| - G_{\nu\eta i,j-\frac{1}{2}}^n |\vec{\mathcal{S}}_{j-\frac{1}{2}}| \right) + \Delta t S_{0i,j}^n
\end{aligned}$$

(A.13)

où I est la matrice identité

Annexe B

B.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont primordiales pour pouvoir résoudre numériquement le système différentiel. Les équations d'Euler forment un système hyperbolique que l'on peut exprimer sous forme caractéristiques. Ce formalisme est exprimé par l'existence des invariants le long des caractéristiques, le système complet de Navier-Stokes est confronté à des conditions mixtes (parabolique, hyperbolique, elliptique) suivant la nature de l'écoulement.¹

La zone visqueuse occupe en général une faible partie de l'écoulement dans la majorité des problèmes, par conséquent, on peut sans commettre une erreur trop importante supposer une condition d'un écoulement non-visqueux. Le système est parabolique dans les couches limites, on peut étendre le formalisme d'Euler dans cette zone en imposant une condition qui permet l'assurance de la cohérence de la condition de raccordement.

B.1.1 Conditions d'entrée

Leur choix est fortement lié à la nature de l'écoulement, selon qu'il est subsonique ou supersonique, il autorise une remontée ou non de l'information aval amont.

En termes des variables caractéristiques le système suivant ξ peut être écrit sous la forme suivante :

1. Pour un cas instationnaire, le système est soit hyperbolique, ou parabolique.

$$\begin{pmatrix} \delta\bar{\rho} - \frac{1}{c^{*2}}\delta p^* \\ \bar{\rho}c^*\delta\tilde{u}_\xi + \delta p^* \\ \delta\tilde{v}_\xi \\ -\bar{\rho}c^*\delta\tilde{u}_\xi + \delta p^* \\ \delta k \\ \delta w \end{pmatrix} = S_X \begin{pmatrix} \delta\bar{\rho} \\ \delta\bar{\rho}\tilde{u} \\ \delta\bar{\rho}\tilde{v} \\ \delta\bar{\rho}\tilde{e}_t \\ \delta\bar{\rho}k \\ \delta\bar{\rho}w \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

où $\tilde{u}_\xi = \tilde{u}m_x + \tilde{v}m_y$ et $\tilde{v}_\xi = -\tilde{u}n_y + \tilde{v}n_x$. L'équation de propagation d'une onde unidimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = 0 \quad (\text{B.2})$$

où θ est l'invariant transporté par la caractéristique de vitesse de propagation λ . En fait appel à la matrice (4.29) qui donne les vitesses de propagation des caractéristiques (B.1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} - \frac{1}{c^{*2}}\frac{\partial p^*}{\partial t} &= -\tilde{u}_\xi \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\xi} - \frac{1}{c^{*2}}\frac{\partial p^*}{\partial\xi} \right) \\ \frac{\partial p^*}{\partial t} + \bar{\rho}c^*\frac{\partial\tilde{u}_\xi}{\partial t} &= -(\tilde{u}_\xi + c^*) \left(\frac{\partial p^*}{\partial\xi} + \bar{\rho}c^*\frac{\partial\tilde{u}_\xi}{\partial\xi} \right) \\ \frac{\partial\tilde{v}_\xi}{\partial t} &= -\tilde{u}_\xi\frac{\partial\tilde{v}_\xi}{\partial\xi} \\ \frac{\partial p^*}{\partial t} - \bar{\rho}c^*\frac{\partial\tilde{u}_\xi}{\partial t} &= -(\tilde{u}_\xi - c^*) \left(\frac{\partial p^*}{\partial\xi} - \bar{\rho}c^*\frac{\partial\tilde{u}_\xi}{\partial\xi} \right) \\ \frac{\partial k}{\partial t} &= -\tilde{u}_\xi\frac{\partial k}{\partial\xi} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\tilde{u}_\xi\frac{\partial w}{\partial\xi} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

On notera que les grandeurs de k et ω sont figées à l'entrée. La valeur de la vitesse \tilde{v} est déduite à partir de la pente à l'entrée par :

$$\tilde{v}_\xi = \tilde{u}_\xi \tan\Theta \quad (\text{B.4})$$

L'expression (B.2) est discrétisée dans le plan d'entrée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \theta_{1,j}^{n+1} - \theta_{1,j}^n &= -\lambda_{1,j}^n (\theta_{2,j}^n - \theta_{1,j}^{n+1}) \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \\ &= -\lambda_{1,j}^n (\theta_{2,j}^n - \theta_{1,j}^{n+1}) \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{1,j}} |\vec{\mathcal{S}}_{1+\frac{1}{2}}| \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

On pose $\hat{\lambda}_{1,j}^n = \lambda_{1,j}^n \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{1,j}} |\vec{\mathcal{S}}_{1+\frac{1}{2}}|$, il vient alors :

$$\delta\theta_{1,j}^n = \theta_{1,j}^{n+1} - \theta_{1,j}^n = -\frac{\hat{\lambda}_{1,j}^n}{1 - \hat{\lambda}_{1,j}^n} (\theta_{2,j}^n - \theta_{1,j}^n) \quad (\text{B.6})$$

B.1.1.1 Cas supersonique

Ce cas est le plus simple, toutes les caractéristiques sont dites descendantes, l'écoulement amont ne peut en aucun cas être modifié par son comportement aval, ce qui signifie que l'information se propage uniquement de l'amont vers l'aval. Il se trouvera donc entièrement dépendant de ces conditions d'entrée et de la géométrie. Dans ce cas, une prescription stricte des variables suffira pour établir les conditions à l'entrée.

B.1.1.2 Cas subsonique

Lorsque l'écoulement est subsonique, l'aval influe sur le comportement du fluide en amont. Il y a une remontée d'information de l'aval vers l'amont (associée à la valeur propre $\tilde{u}_\xi - c^*$). Nous supposons que la pression totale p_0 est figée. On néglige l'influence de la turbulence et l'on considère que l'écoulement est isentropique.

L'équation caractéristique correspond à la vitesse de propagation $\tilde{u}_\xi - c^*$ est donnée par :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \bar{\rho} \tilde{c} \frac{\partial \tilde{u}_\xi}{\partial t} = -(\tilde{u}_\xi - \tilde{c}) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} - \bar{\rho} \tilde{c} \frac{\partial \tilde{u}_\xi}{\partial \xi} \right) \quad (\text{B.7})$$

Où $\tilde{c} = \sqrt{\gamma r \tilde{T}}$. A partir de (B.6), on peut écrire :

$$\delta \bar{p}_{1,j}^n - \bar{\rho}_{1,j}^n \tilde{c}_{1,j}^n \delta \tilde{u}_{\xi 1,j}^n = \mathcal{R}_{1,j}^n \quad (\text{B.8})$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,j}^n &= -\frac{\hat{\lambda}_{1,j}^n}{1 - \hat{\lambda}_{1,j}^n} (\bar{p}_{2,j}^n - \bar{p}_{1,j}^n - \bar{\rho}_{1,j}^n \tilde{c}_{1,j}^n (\tilde{u}_{\xi 2,j}^n - \tilde{u}_{\xi 1,j}^n)) \\ \hat{\lambda}_{1,j}^n &= (\tilde{u}_{\xi 1,j}^n - \tilde{c}_{1,j}^n) \frac{\Delta t}{V_{1,j}} |\vec{\mathcal{S}}_{1+\frac{1}{2}}| \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Pour un écoulement isentropique à pression constante, on peut écrire :

$$p_0 = \bar{p} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (1 + \tan^2 \Theta) \frac{\tilde{u}_\xi^2}{\tilde{c}_c^2} \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{B.10})$$

où \tilde{c}_c est la vitesse du son critique (quand le nombre de Mach égal à 1)

$$\tilde{c}_c = \sqrt{2\gamma \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} c_v T_0} \quad (\text{B.11})$$

où T_0 est la température totale (condition de réservoir). L'équation (B.10) est donnée sous forme différentielle par :

$$\delta\bar{p} + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0 (1 + \tan^2\Theta) \tilde{u}_\xi}{\tilde{c}_c^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (1 + \tan^2\Theta) \frac{\tilde{u}_\xi^2}{\tilde{c}_c^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \delta\tilde{u}_\xi = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\delta\bar{p} + \psi\delta\tilde{u}_\xi = 0$$

L'équation (B.12) discrétisée sur le plan d'entrée s'écrit :

$$\delta\bar{p}_{1,j}^n + \psi_{1,j}^n \delta\tilde{u}_{\xi 1,j}^n = 0 \quad (\text{B.13})$$

avec

$$\psi_{1,j}^n = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0 (1 + \tan^2\Theta) \tilde{u}_{\xi 1,j}^n}{\tilde{c}_c^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (1 + \tan^2\Theta) \frac{\tilde{u}_{\xi 1,j}^{n 2}}{\tilde{c}_c^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{B.14})$$

La résolution de (B.14) en utilisant l'expression (B.8). Ainsi on a :

$$\delta\tilde{u}_{\xi 1,j}^n = \frac{-\mathcal{R}_{1,j}^n}{\bar{\rho}_{1,j}^n \tilde{c}_{1,j}^n + \psi_{1,j}^n} \quad (\text{B.15})$$

$$\tilde{u}_{\xi 1,j}^{n+1} = \tilde{u}_{\xi 1,j}^n + \delta\tilde{u}_{\xi 1,j}^n$$

On aura pour les autres variables :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\xi 1,j}^{n+1} &= \tilde{u}_{\xi 1,j}^{n+1} \tan\Theta \\ \bar{p}_{1,j}^{n+1} &= \bar{p}_{1,j}^n + \frac{\mathcal{R}_{1,j}^n \psi_{1,j}^n}{\bar{\rho}_{1,j}^n \tilde{c}_{1,j}^n + \psi_{1,j}^n} \\ \tilde{T}_{1,j}^{n+1} &= T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (1 + \tan^2\Theta) \frac{\tilde{u}_{\xi 1,j}^{n+1 2}}{\tilde{c}_c^2} \right) \\ \bar{\rho}_{1,j}^{n+1} &= \bar{p}_{1,j}^{n+1} / r \tilde{T}_{1,j}^{n+1} \\ k_{1,j}^{n+1} &= k_{1,j}^n \\ \omega_{1,j}^{n+1} &= \omega_{1,j}^n \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

B.1.2 Conditions à la frontière supérieure

La frontière supérieure peut représenter une ligne de glissement ou une frontière libre ou encore une paroi :

B.1.2.1 Cas d'une ligne de glissement

On fixera $\partial U / \partial \eta = 0$ sauf pour la composante \tilde{v}

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{\eta i, JL}^n &= \tilde{u}_{\eta i, JL-1}^n \\
 \tilde{v}_{\eta i, JL}^n &= -\tilde{v}_{\eta i, JL-1}^n \\
 \bar{p}_{i, JL}^n &= \bar{p}_{i, JL-1}^n \\
 \bar{\rho}_{i, JL}^n &= \bar{\rho}_{i, JL-1}^n \\
 \tilde{T}_{i, JL}^n &= \tilde{T}_{i, JL-1}^n \\
 k_{i, JL}^n &= k_{i, JL-1}^n \\
 \omega_{i, JL}^n &= \omega_{i, JL-1}^n
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Elles peuvent être données aussi par :

$$\delta U_{i, JL}^n = T'' \delta U_{i, JL-1}^n \tag{B.18}$$

$$T'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 - n_x^2 & -2n_x n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En regroupe les matrices d'accroissements implicites en JL avec celles liées aux accroissements en $JL - 1$, avec l'utilisation de l'équation (4.71), la discrétisation causée par le changement pour tel type de condition au limite est donnée par :

$$\hat{A}_{i,JL-1} = \hat{A}_{i,JL-1} + \hat{B}_{i,JL-1}T'' \quad (\text{B.19})$$

B.1.2.2 Cas d'une frontière libre

Cette condition se traduit par :

$$U_{i,JL}^n = U_{i,JL-1}^n \text{ et donc } \delta U_{i,JL}^n = \delta U_{i,JL-1}^n$$

$$\text{avec } U = (\tilde{u}, \tilde{v}, \bar{\rho}, \bar{p}, \tilde{T}, k, \omega)$$

d'où

$$\hat{A}_{i,JL-1} = \hat{A}_{i,JL-1} + \hat{B}_{i,JL-1} \quad (\text{B.20})$$

Le cas d'une paroi sera étudié séparément.

B.1.3 Conditions de sortie

L'équation (B.2) discrétisée dans le plan de sortie s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta_{IL,j}^{n+1} - \theta_{IL,j}^n &= -\lambda_{IL-1,j}^n (\theta_{IL,j}^{n+1} - \theta_{IL-1,j}^n) \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \\ &= -\lambda_{IL-1,j}^n \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{IL,j}} |\vec{\mathcal{S}}_{IL-\frac{1}{2}}| (\theta_{IL,j}^{n+1} - \theta_{IL-1,j}^n) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

on pose $\hat{\lambda}_{IL-1,j}^n = \lambda_{IL-1,j}^n \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{IL,j}} |\vec{\mathcal{S}}_{IL-\frac{1}{2}}|$, on obtient :

$$\delta \theta_{IL,j}^n = \theta_{IL,j}^{n+1} - \theta_{IL,j}^n = -\frac{\hat{\lambda}_{IL-1,j}^n}{1 + \hat{\lambda}_{IL-1,j}^n} (\theta_{IL,j}^n - \theta_{IL-1,j}^n) \quad (\text{B.22})$$

B.1.3.1 Sortie supersonique

Les valeurs propres sont alors toutes positives, donc toutes les informations viennent de l'amont, une condition de gradient nul est alors suffisante dans ce cas.

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{\xi IL,j}^{n+1} &= \tilde{u}_{\xi IL-1,j}^n \\
 \tilde{v}_{\xi IL,j}^{n+1} &= \tilde{v}_{\xi IL-1,j}^n \\
 \bar{p}_{IL,j}^{n+1} &= \bar{p}_{IL-1,j}^n \\
 \bar{\rho}_{IL,j}^{n+1} &= \bar{\rho}_{IL-1,j}^n \\
 \tilde{T}_{IL,j}^{n+1} &= \tilde{T}_{IL-1,j}^n \\
 k_{IL,j}^{n+1} &= k_{IL-1,j}^n \\
 \omega_{IL,j}^{n+1} &= \omega_{IL-1,j}^n
 \end{aligned}$$

B.1.3.2 Sortie subsonique

Si on suppose qu'il n'y a pas d'écoulement rentrant, l'information vient seule de l'extérieur. Cette grandeur est en général la pression (c'est parfois le nombre de Mach). Dans ce cas, deux caractéristiques viennent du domaine de calcul, reliées aux valeurs propres \tilde{u}_ξ et $\tilde{u}_\xi + c$, et une vient de l'extérieur, associée à la valeur propre $\tilde{u}_\xi - c$. la pression du plan de sortie est imposée, $\bar{p}_{IL,j}^{n+1} = \bar{p}_{IL,j}^n = p_e$.

On pose :

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_{1\ IL-1,j}^n &= \tilde{u}_{\xi IL-1,j}^n \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{IL,j}} \left| \vec{\mathcal{S}}_{IL-\frac{1}{2}} \right| \\
 \hat{\lambda}_{2\ IL-1,j}^n &= (\tilde{u}_{\xi IL-1,j}^n + c_{IL-1,j}^n) \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{IL,j}} \left| \vec{\mathcal{S}}_{IL-\frac{1}{2}} \right|
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

Le système correspondant est alors :

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\rho}_{IL,j}^n - \frac{1}{c^{*n2}_{IL-1,j}} \delta p^*_{IL,j} &= \mathcal{R}_{1IL,j}^n \\
\delta p^*_{IL,j} + \bar{\rho}_{IL-1,j}^n c^{*n}_{IL-1,j} \delta\tilde{u}_{\xi IL,j}^n &= \mathcal{R}_{2IL,j}^n \\
\delta\tilde{v}_{\xi IL,j}^n &= \mathcal{R}_{3IL,j}^n \\
\delta k_{IL,j}^n &= \mathcal{R}_{4IL,j}^n \\
\delta\omega_{IL,j}^n &= \mathcal{R}_{5IL,j}^n
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{1IL,j}^n &= -\frac{\hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n}{1 + \hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n} \left(\bar{\rho}_{IL,j}^n - \bar{\rho}_{IL-1,j}^n - \frac{1}{c^{*n2}_{IL-1,j}} (p^*_{IL,j} - p^*_{IL-1,j}) \right) \\
\mathcal{R}_{2IL,j}^n &= -\frac{\hat{\lambda}_{2IL-1,j}^n}{1 + \hat{\lambda}_{2IL-1,j}^n} (p^*_{IL,j} - p^*_{IL-1,j} + \bar{\rho}_{IL-1,j}^n c^{*n}_{IL-1,j} (\tilde{u}_{\xi IL,j}^n - \tilde{u}_{\xi IL-1,j}^n)) \\
\mathcal{R}_{3IL,j}^n &= -\frac{\hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n}{1 + \hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n} (\tilde{v}_{\xi IL,j}^n - \tilde{v}_{\xi IL-1,j}^n) \\
\mathcal{R}_{4IL,j}^n &= -\frac{\hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n}{1 + \hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n} (k_{IL,j}^n - k_{IL-1,j}^n) \\
\mathcal{R}_{5IL,j}^n &= -\frac{\hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n}{1 + \hat{\lambda}_{1IL-1,j}^n} (\omega_{IL,j}^n - \omega_{IL-1,j}^n)
\end{aligned} \tag{B.25}$$

La pression à la sortie est fixée à p_e , l'incrément $\delta p^*_{IL,j}$ devient nul, les deux premières équations du système (B.24) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\rho}_{IL,j}^n &= R_{1IL,j}^n \\
\delta\tilde{u}_{\xi IL,j}^n &= \frac{R_{2IL,j}^n}{\bar{\rho}_{IL-1,j}^n c^{*n}_{IL-1,j}}
\end{aligned}$$

A l'instant $n+1$ les variables en sortie sont données par :

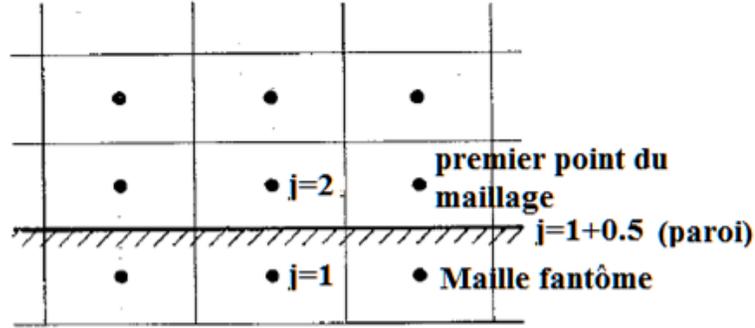
$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{\xi IL,j}^{n+1} &= \tilde{u}_{\xi IL,j}^n + \delta \tilde{u}_{\xi IL,j}^n \\
\tilde{v}_{\xi IL,j}^{n+1} &= \tilde{v}_{\xi IL,j}^n + \delta \tilde{v}_{\xi IL,j}^n \\
k_{IL,j}^{n+1} &= k_{IL,j}^n + \delta k_{IL,j}^n \\
\omega_{IL,j}^{n+1} &= \omega_{IL,j}^n + \delta \omega_{IL,j}^n \\
\bar{p}_{IL,j}^{n+1} &= p_e \\
\bar{\rho}_{IL,j}^{n+1} &= \bar{\rho}_{IL,j}^n + \delta \bar{\rho}_{IL,j}^n \\
\tilde{T}_{IL,j}^{n+1} &= \frac{p_e}{r \bar{\rho}_{IL,j}^{n+1}}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

B.1.4 Conditions de paroi

Elles sont de deux types, cinématique et thermodynamique. Les premières sont imposées pour les vitesses et les secondes sont liées aux conditions imposées sur le transfert de chaleurs.

Pour les conditions cinématiques, il existe deux types de conditions de parois, une que l'on qualifera de fluide parfait, et l'autre de fluide visqueux (réel). La particularité de la condition du fluide parfait est d'imposer une non-pénétration de la matière (appelée aussi condition de glissement), soit $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$, alors que pour un fluide visqueux une condition d'adhérence est imposée à la paroi ($\vec{U} = 0$). La technique de discrétisation utilisée est de type volume fini, ceci se traduit par :

$$\begin{aligned}
\vec{U} \cdot \vec{n}_{i,1} &= -\vec{U} \cdot \vec{n}_{i,2} && \text{condition de glissement} \\
U_{i,1} &= -U_{i,1} && \text{condition de non-glissement}
\end{aligned}$$

FIGURE B.1. *maillage à la paroi*

La condition d'adhérence est utilisée dans cette étude pour décrire un écoulement visqueux avec couche limite près des surfaces solides (parois), la maille fantôme (fictive) en $j = 1$ sert à imposer la condition associée à la paroi située réellement au niveau de la surface $\vec{S}_{i,1+\frac{1}{2}}$ entre les mailles $j = 1$ et $j = 2$. Le vecteur de vitesse projeté sur le repère lié à la surface s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_\eta &= \tilde{u}n_y - \tilde{v}n_x \\ \tilde{v}_\eta &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y\end{aligned}\tag{B.27}$$

Les conditions d'adhérence sur une paroi adiabatique se traduisent dans la maille fictive $j = 1$ par :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\eta i,1}^n &= -\tilde{u}_{\eta i,2}^n \\ \tilde{v}_{\eta i,1}^n &= -\tilde{v}_{\eta i,2}^n \\ \bar{p}_{i,1}^n &= \bar{p}_{i,2}^n \\ \bar{\rho}_{i,1}^n &= \bar{\rho}_{i,2}^n \\ \tilde{T}_{i,1}^n &= \tilde{T}_{i,2}^n \\ k_{i,1}^n &= -k_{i,2}^n \\ \omega_{i,1}^n &= -\omega_{i,2}^n\end{aligned}\tag{B.28}$$

L'opérateur implicite nécessite quelques aménagements à la fois sur sa partie eulérienne et sa partie visqueuse. L'équation (4.71) est discrétisée pour la maille en $j = 2$ pour l'obtention du flux eulérien à travers cette surface (paroi) qui peut se mettre sous la forme.

$$-B_{\eta i,1+\frac{1}{2}}^{-n} \delta U_{i,2}^n - B_{\eta i,1+\frac{1}{2}}^{+n} \delta U_{i,1}^n \quad (\text{B.29})$$

Comme il n'y a pas de flux qui traverse la surface de la maille en ($j = 1$), l'expression précédente se réduit à :

$$-B_{\eta p i,1+\frac{1}{2}}^{-n} \delta U_{i,2}^n \quad (\text{B.30})$$

$$B_{\eta p i,1+\frac{1}{2}}^{-n} = \frac{\partial}{\partial U} \begin{pmatrix} 0 \\ p^* n_x \\ p^* n_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Avec

$$p^* = \beta (\rho \tilde{e}_t - \rho \alpha - \rho \Gamma k) \quad (\text{B.32})$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (p^* n_x)}{\partial (\rho \tilde{e}_t)} &= \beta n_x & \frac{\partial (p^* n_x)}{\partial (\rho k)} &= -\beta \Gamma n_x \\
\frac{\partial (p^* n_y)}{\partial (\rho \tilde{e}_t)} &= \beta n_y & \frac{\partial (p^* n_x)}{\partial (\rho k)} &= -\beta \Gamma n_y
\end{aligned}
\tag{B.33}$$

On obtient :

$$B_{\eta p i, 1 + \frac{1}{2}}^{-n} = \frac{\partial}{\partial U} \begin{pmatrix} 0 \\ p^* n_x \\ p^* n_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta n_x & -\beta \Gamma n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta n_y & -\beta \Gamma n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\tag{B.34}$$

où $\alpha = \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2}$, $\beta = \gamma - 1$ et $\Gamma = 1 - \frac{2}{3\beta}$

Sur la même surface, le flux visqueux s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\eta 1 + \frac{1}{2}}^n (\delta U_{i,2}^n - \delta U_{i,1}^n)
\tag{B.35}$$

Suite aux relations (B.28), on peut écrire :

$$\delta U_{i,1}^n = T' \delta U_{i,2}^n
\tag{B.36}$$

aussi sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \delta(\rho) \\ \delta(\rho\tilde{u}) \\ \delta(\rho\tilde{v}) \\ \delta(\rho\tilde{e}_t) \\ \delta(\rho k) \\ \delta(\rho\omega) \end{pmatrix}_{i,1}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(\rho) \\ \delta(\rho\tilde{u}) \\ \delta(\rho\tilde{v}) \\ \delta(\rho\tilde{e}_t) \\ \delta(\rho k) \\ \delta(\rho\omega) \end{pmatrix}_{i,2}^n \quad (\text{B.37})$$

L'expression (B.35) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\eta p 1+\frac{1}{2}}^n \delta U_{i,2}^n \\ \mathcal{M}_{\eta p 1+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{M}_{\eta 1+\frac{1}{2}}^n (I - T') \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\mathcal{M}_{\eta p 1+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{\mu_{ef}}{\bar{\rho}} \left(\frac{4}{3}n_x^2 + n_y^2\right) & 2\frac{\mu_{ef}}{\bar{\rho}} \frac{1}{3}n_x n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{\mu_{ef}}{\bar{\rho}} \frac{1}{3}n_x n_y & 2\frac{\mu_{ef}}{\bar{\rho}} \left(n_x^2 + \frac{4}{3}n_y^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{\mu_{kef}}{\bar{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{\mu_{\omega ef}}{\bar{\rho}} \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'écoulement avec transfert thermique à la paroi, les modifications proposées considèrent le cas d'une paroi isotherme de température fixée T_w . On peut écrire :

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 \rightarrow \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2 \frac{\tilde{T}_2}{2T_w - \tilde{T}_2}$$

Les conditions de non glissement et d'équilibre thermique de paroi imposent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}_1 = r\bar{\rho}_2 \\ (\bar{\rho}\tilde{u})_1 = -r(\bar{\rho}\tilde{u})_2 \\ (\bar{\rho}\tilde{v})_1 = -r(\bar{\rho}\tilde{v})_2 \\ (\bar{\rho}k)_1 = -r(\bar{\rho}k)_2 \\ (\bar{\rho}\omega)_1 = -r(\bar{\rho}\omega)_2 \end{array} \right. \quad (\text{B.39})$$

avec

$$r = \frac{\tilde{e}_2}{\tilde{e}_1} = \frac{\tilde{e}_2}{(2\tilde{e}_w - \tilde{e}_2)} = \frac{\tilde{T}_2}{2T_w - \tilde{T}_2}$$

d'où

$$\bar{\rho}_1\tilde{e}_{t1} = \bar{\rho}_2\tilde{e}_{t2} + (r-1)\bar{\rho}_2\alpha_2 - (r+1)\bar{\rho}_2k_2 \quad (\text{B.40})$$

En utilisant les relations différentielles :

$$\delta \left(\frac{\tilde{e}_2}{\tilde{e}_1} \right) = \delta r = \frac{-r^2}{\tilde{e}_2} \delta\tilde{e}_1 + \frac{r}{\tilde{e}_2} \delta\tilde{e}_2 \quad (\text{B.41})$$

La condition de l'énergie interne sur la paroi s'écrit :

$$\tilde{e}_1 = 2\tilde{e}_w - \tilde{e}_2 \rightarrow \delta\tilde{e}_1 = -\delta\tilde{e}_2 \quad (\text{B.42})$$

On obtient :

$$\delta \left(\frac{\tilde{e}_2}{\tilde{e}_1} \right) = \delta r = \frac{r}{\tilde{e}_2} (r+1) \delta\tilde{e}_2 = b\delta\tilde{e}_2 \quad (\text{B.43})$$

Le traitement est similaire, nous utilisant l'expression (B.37), nous montrons un exemple de traitement pour la détermination de la première ligne de la matrice T' .

$$(\delta\rho)_1 = (T'_{1,L})(\delta\rho)_2 \text{ et } L = 1 \text{ à } 6$$

nous avons

$$\begin{cases} \rho_1 = r\rho_2 \\ \frac{(\delta\rho)_1}{(\delta\rho)_2} = \frac{\delta r}{\delta\rho_2}\rho_2 + r\frac{\delta\rho_2}{\delta\rho_2} \end{cases}$$

Dans ce cas on a besoin d'écrire r en fonction des variables $(\rho, \rho\tilde{u}, \rho\tilde{v}, \rho\tilde{e}_t, \rho k, \rho\omega)_2$, nous avons aussi $\delta r = b\delta\tilde{e}_2$ et $\delta\tilde{e}_2$ doit être ainsi exprimée en fonction des mêmes variables.

nous avons $(\rho\tilde{e})_2 = (\rho\tilde{e}_t)_2 - (\rho\alpha)_2 - (\rho k)_2$, la différentiation de cette expression est donnée par :

$$\delta\tilde{e}_2 = \frac{1}{\bar{\rho}_2} (a\delta\bar{\rho} - \tilde{u}\delta(\bar{\rho}\tilde{u}) - \tilde{v}\delta(\bar{\rho}\tilde{v}) + \delta(\bar{\rho}\tilde{e}_t) - \delta(\bar{\rho}k))_2 \quad (\text{B.44})$$

On aura pour $\bar{\rho}_1 = r\bar{\rho}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\bar{\rho}_1}{\delta\bar{\rho}_2} &= r + b\bar{\rho}_2 \frac{(\alpha - \tilde{e})_2}{\bar{\rho}_2} = r + ab \\ a &= (\alpha - \tilde{e})_2 \end{aligned}$$

on déduit :

$$T' = \begin{pmatrix} r + ab & -b\tilde{u}_2 & -b\tilde{v}_2 & b \\ -ab\tilde{u}_2 & b\tilde{u}_2^2 - r & b\tilde{u}_2\tilde{v}_2 & -b\tilde{u}_2 \\ -ab\tilde{v}_2 & b\tilde{u}_2\tilde{v}_2 & b\tilde{v}_2^2 - r & -b\tilde{v}_2 \\ \alpha(1 - r + c) - \tilde{e}_2c & -\tilde{u}_2(1 - r + c) & -\tilde{v}_2(1 - r + c) & 1 + c \\ -abk_2 & b\tilde{u}_2k_2 & b\tilde{v}_2k_2 & -bk_2 \\ 2\omega_w(r + ab) - ab\omega_2 & b\tilde{u}_2(\omega_2 - 2\omega_w) & b\tilde{v}_2(\omega_2 - 2\omega_w) & b(2\omega_w - \omega_2) \\ & & -b & 0 \\ & & b\tilde{u}_2 & 0 \\ & & b\tilde{v}_2 & 0 \\ & & -(r + 1 + c) & 0 \\ & & -r + bk_2 & 0 \\ & & b(\omega_2 - 2\omega_w) & -r \end{pmatrix}$$

avec $a = \alpha - \tilde{e}$, $c = b(\alpha - k)$ et $\omega_w = 60\nu/\beta_1 y_2^2$

Dans le cas d'un écoulement sur paroi adiabatique, le calcul est rendu plus aisé :

$\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2$ d'où $r = 1$ et $\delta r = 0$ et donc $b = c = 0$