

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
D'ORAN MOHAMED BOUDIAF

FACULTE D'ARCITECTURE ET DE GENIE CIVIL
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT L.M.D 3^{eme} Cycle
Spécialité : **Génie Civil**
Option : **Construction et Stabilité des Structures**
Présentée par

BACHIR BOUIADJRA Rabbab

Sujet de thèse

Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques
Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques

Soutenue le

Devant le Jury composé de :

Mr. Mohamed TEHAMI	Professeur	U.S.T.O	Président
Mr. EL Abbas ADDA BEDIA	Professeur	U.D.L-SBA	Directeur de thèse
Mr. Djamel Nasr-Eddine NEDJAR	Professeur	U.S.T.O	Examineur
Mr. Zouaoui SEREIR	Professeur	U.S.T.O	Examineur
Mr. M'hamed BOUSLAMA	Professeur	E.N.P.d'ORAN	Examineur
Mr. Tahar HASSAINE DAOUADJI	MC A	U. TIARET	Examineur

Année Universitaire: 2014-2015

REMERCIEMENTS

Voilà venue une section très importante... la section des remerciements !!!

Peut-être est-ce la plus difficile dans un manuscrit ! En effet, chaque personne qui y est citée mérite la plus belle phrase ce qui nécessite des réels talents littéraires... Ainsi, comme tout un chacun, je vais essayer de faire au mieux et que tous les gens qui me liront sachent que ces quelques lignes ont été écrites avec tout mon cœur.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à M^r le Professeur **ADDA BEDIA EL ABASS** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à M^r **Abdelouahed TOUNSI**, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbés, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Monsieur le Professeur **TEHAMI Mohamed**, responsable du Doctorat « Constructions & Stabilité de Structures » de m'avoir donné l'opportunité de poursuivre des études en Doctorat et de m'avoir fait honneur de présider ce jury.

Je remercie tous les membres de mon jury à savoir Messieurs les Professeurs **Djamel NEDJAR**, **Zouaoui SEREIR** et **M'hamed BOUSLAMA** ainsi qu'au Maître de Conférences Monsieur **HASSAINE DAOUADJI Tahar** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je remercie ma famille, mon Mari ainsi que mes amies de m'avoir soutenu et supporter durant ces années et en particulier mes parents, mon frères et mes sœurs et tous les autres qui se reconnaîtront et qui ont su me soutenir pendant les moments difficiles que j'ai pu avoir et me faire profiter de leur bonne humeur.

Et pour finir, je tiens à remercier le Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'université de Sidi Bel Abbés ainsi que ces membres pour son aide matériel et les conditions de travail très agréables.

RESUME

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements en conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères. Ce travail de recherche est justement consacré à l'étude de la stabilité thermique des plaques épaisses en FGM avec ou sans la présence de fondation élastique. La surface neutre de telles plaques est déterminée et une théorie raffinée à ordre élevé sera proposée basée sur la position exacte de cette surface. Le nombre d'inconnus de la présente théorie est seulement quatre au lieu de cinq dans les autres théories de déformation de cisaillement. En plus, elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque.

Une comparaison entre les théories d'ordre élevé sera établie en se basant sur le tenseur de déformation de Von Karman qui prend en compte la non linéarité géométrique. Le principe des travaux virtuels sera utilisé pour déterminer les équations d'équilibre et les charges critiques de flambement seront aussi calculées à partir de ces équations. Les fondations élastiques seront modélisées en utilisant la théorie de Pasternak et une comparaison sera faite avec le modèle de Winkler. Des études paramétriques seront présentées pour souligner l'influence des différents paramètres sur la température critique de flambement.

Mots clé : Matériaux fonctionnellement gradués, théorie raffinée d'ordre élevé à deux variables, stabilité thermique, position exacte de la surface neutre, fondations élastiques.

ABSTRACT

Functionally graded materials (FGM's) are a new kind of composite materials which have a gradual and continuous variation of the volume fraction of each component (usually metal and ceramic) through the thickness direction, leading to changes of global thermo-mechanical properties of the structural element they represent. They were designed to overcome the problems caused by severe thermal environments. This research is precisely devoted to the study of thermal stability of functionally graded thick plates with or without the presence of elastic foundation. The neutral surface position for such plate is determined, and refined high- order theory will be proposed based on the exact position of this surface. The displacement field is chosen based on assumptions that the in-plane and transverse displacements consist of bending and shear components, and the shear components of in-plane displacements give rise to the quadratic distribution of transverse shear stress through the thickness in such a way that shear stresses vanish on the plate surfaces. Therefore, there is no need to use shear correction factor. Just four unknown displacement functions are used in the present theory against five unknown displacement functions used in the corresponding ones. A comparison between the theories of high order will be established based on Von Karman deformation tensor which takes into account the non-linear strain–displacement relations. The principle of virtual work will be used to determine the equilibrium equations and critical buckling temperature will be also calculated from of these equations. Elastic foundations will be modeled using the theory of Pasternak and a comparison will be made with the Winkler model. Parametric studies will be presented to highlight the influence of various parameters on the critical temperature of buckling.

Keywords: Functionally graded materials, refined plate theory, thermal stability, Exact position of the neutral surface, Elastic foundations.

ملخص

المواد متدرجة الخاصية هي مجموعة جديدة من المواد المركبة بحيث أن الخصائص تتغير وفق السمك و يؤدي ذلك الي ، إحداث تغييرات وفقا للخصائص الميكانيكية (عموما المعادن والسيراميك) وهي مصممة للتعويض عن المشاكل التي تسببها البيئات الحرارية الشديدة. هذا البحث مخصص لدراسة الاستقرار الحراري الصفائح السمكية المصنوعة من المواد متدرجة الخاصية مع أو بدون وجود أساس مرن. المساحة المحايدة لهذه الصفائح ستحدد باستعمال نظرية الترتيب العالي. عدد مجاهيل هذه النظرية أربعة فقط بدلاً من خمسة في نظريات أخرى تشوه القص . وبالإضافة إلى ذلك، هناك تشابه قوي مع النظرية الكلاسيكية و عدد المجاهيل سوى أربعة بدلاً من خمسة في غيرها من النظريات تشوه القص و لا تحتاج الى معامل التصحيح القص، ويعطي ذلك وصفا للإجهاد القص مكافئ عبر سمك.

سيتم إنشاء مقارنة بين نظريات الترتيب العالي استناداً إلى موتر فون كرمان الذي يأخذ في الاعتبار عدم الاستقامة الهندسية. سيتم استخدام مبدأ العمل الظاهري لتحديد معادلات التوازن كما سيتم تمثيل الأساس مرن باستخدام نظرية باسترناك. ستعرض دراسات بارامترية لتسليط الضوء على تأثير معاملات مختلفة في درجة الحرارة الحرجة.

الكلمات الرئيسية

المواد متدرجة الخاصية، نظرية المجاهيل الاربعه، الاستقرار الحراري، المساحة المحايدة، نظرية الترتيب العالي

TABLE DES MATIERES

Résumé

Abstract

Table des Matières

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Liste des Notations

Introduction Générale

Chapitre I	Généralité sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)	
I.1	Introduction	04
I.2	Concept des matériaux fonctionnellement gradués	05
I.3	Domaines d'applications des matériaux à fonctionnellement gradués	08
I.4	Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels	10
I.5	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	11
I.5.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	13
I.5.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	14
I.5.3	Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	15
I.6	Conclusion	15
Chapitre II	Théories des plaques	
II.1	Introduction	16
II.2	Modèles Analytiques des plaques	16
II.2.1	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchoff (CPT)	16
II.2.2	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)	17
II.2.3	La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	18
II.3	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	20
II.3.1	Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques	23

Chapitre III	Revue des travaux antérieurs sur les FGM	
III.1	Introduction	25
III.2	Etudes sur les contraintes résiduelles	25
III.3	Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques	26
III.4	Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique	27
III.5	Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM	29
III.6	Conclusion	31
Chapitre IV	Analyse de l'instabilité thermique des plaques épaisses en FGM	
IV.1	Introduction	32
IV.2	Formulation du problème	35
IV.2.1	Théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale de la plaque fonctionnellement graduée	36
IV.2.1.1	Hypothèse de la présente théorie	36
IV.2.1.2	Cinématique	37
IV.2.1.3	Relations constitutives	38
IV.2.1.4	Les équations de stabilité	39
IV.2.2	Solution trigonométrique du flambement thermique	42
IV.2.2.1	Flambement des plaques FG sous une variation de température uniforme	44
IV.2.2.2	Flambement des plaques FG sous une variation linéaire de température.	44
IV.2.2.3	Flambement des plaques FG sous une température variant de façon non linéaire à travers l'épaisseur	45
IV.3	Résultats & discussion	45
IV.3.1	Etude comparative	46
IV.3.2	Etude paramétrique	51
IV.4	Conclusion	56
Chapitre V	Modèle Théorique pour l'étude de l'instabilité Thermique des plaques épaisses en FGM sur Fondations élastiques	
V.1	Introduction	57
V.2	Formulation du problème	59

V.2.1	Surface neutre Physique	59
V.2.2	Modèle théorique	60
V.2.2.1	Hypothèses de la présente théorie	60
V.2.2.2	Cinématique	61
V.2.2.3	Relations constitutives	62
V.2.2.4	Les équations de stabilité	63
V.2.3	Solution trigonométrique pour le flambement thermique	66
V.2.3.1	Chargement thermique	68
V.3	Résultats Numériques & Discussion	68
V.3.1	Validation des résultats	69
V.3.2	Etude paramétrique	73
V.3.2.1	Effet de l'indice de puissance sur la position de la surface neutre	73
V.3.2.2	Effet du paramètre de Winkler	74
V.3.2.3	Effet du paramètre de Cisaillement de Pasternak	75
V.3.2.4	Effet de l'indice de puissance k sur la température critique de flambement	77
V.3.2.5	Effet du chargement thermique sur la température critique de flambement	80
V.4	Conclusion	81
Conclusion Générale & Perspectives		82
Bibliographie		84

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 :	Variation continue des propriétés	06
Figure I.2 :	Variation discrète des propriétés	06
Figure I.3 :	Variation continue de la microstructure (schématisée)	07
Figure I.4 :	Variation continue de la microstructure (photo)	07
Figure I.5 :	Les principaux domaines d'application des FGM	09
Figure I.6 :	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996)	10
Figure I.7 :	La distribution composante des matériaux (Yoshihisa 2004)	11
Figure I.8 :	Géométrie d'une plaque FGM	12
Figure I.9 :	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	13
Figure I.10 :	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	14
Figure I.11 :	Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	15
Figure II.1 :	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, 1997).	17
Figure II.2 :	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, 1997).	18
Figure II.3 :	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques	19
Figure IV-1 :	position des surfaces moyenne et neutre de la plaque fonctionnellement graduée (FGP)	35
Figure IV-2 :	Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG ($a/b=2$) en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs du rapport a/h .	52
Figure IV-3 :	Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG ($a/h=5$) en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs du rapport a/b .	53
Figure IV-4 :	Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG en fonction du rapport a/h pour différentes valeurs du paramètre de la non linéarité γ ($k=5$ et $a/b=2$)	55
Figure IV-5 :	Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG en fonction du rapport a/b pour différentes valeurs du paramètre de la non linéarité γ ($k=5$ et $a/h=10$)	55

Figure V-1 :	Système de coordonnées et géométrie de la plaque FGM reposant sur une fondation de Pasternak	60
Figure V-2 :	Variation de la position de la surface neutre en fonction de l'indice de puissance K	73
Figure V-3:	Effet du paramètre de la fondation de Winkler « K_w » sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport d'épaisseur a/h avec $k_g = 10$ and $k = 2$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ; (c) température non linéaire ($\gamma = 3$)	75
Figure V-4:	Effet du paramètre de la fondation de Pasternak « K_g » sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport d'épaisseur a/h avec $k_w = 10$ and $k = 2$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ; (c) température non linéaire ($\gamma = 3$)	77
Figure V-5 :	Effet de l'indice de puissance sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport « a/h » $k_w = k_g = 10$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ; (c) température non linéaire ($\gamma = 3$)	78
Figure V-6 :	Effet de l'indice de puissance sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport « a/b » $k_w = k_g = 10$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ; (c) température non linéaire ($\gamma = 3$)	79
Figure V-7 :	Température critique de flambement d'une plaque rectangulaire FG en fonction du rapport « a/h » pour des chargements uniforme, linéaire en non linéaire ($k_w = k_g = 10$ et $k = 5$)	80
Figure V-8 :	Température critique de flambement d'une plaque FG ($a/h = 10$) en fonction du rapport « a/b » pour des chargements uniforme, linéaire en non linéaire ($k_w = k_g = 10$ et $k = 5$)	80

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1:	comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	08
Tableau II.1 :	Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM	23
Tableau IV-1 :	Température critique de flambement d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance k et le rapport de dimension a/b pour une variation uniforme de température ($a/h=100$)	46
Tableau IV-2 :	Température critique de flambement d'une plaque FG carré en fonction de l'indice de puissance k et le rapport a/h pour une variation uniforme de température	47
Tableau IV-3 :	Température critique de flambement d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance k et le rapport de dimension a/b pour une variation linéaire de température ($a/h=100$)	47
Tableau IV-4 :	Température critique de flambement d'une plaque FG carré en fonction de l'indice de puissance k et le rapport a/h pour une variation linéaire de température	48
Tableau IV-5 :	Température critique de flambement d'une plaque FG sous un chargement non linéaire en fonction de l'indice de puissance k , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température γ avec $a/h=10$	49
Tableau IV-6 :	Température critique de flambement d'une plaque FG sous un chargement non linéaire en fonction de l'indice de puissance k , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température γ avec $a/h=5$	50
Tableau V-1 :	Différents modèles de déplacement et nombre de fonctions inconnus	69
Tableau V-2 :	Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG sans fondation soumise à une variation uniforme de température en fonction des rapports « a/h » et « a/b »	70
Tableau V-3 :	Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque rectangulaire FG soumise à une variation <i>uniforme</i> de température en fonction des rapports « a/h » et de l'indice de puissance « k »	71
Tableau V-4 :	Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque rectangulaire FG soumise à une variation <i>linéaire</i> de température en fonction des rapports « a/h » et de l'indice de puissance « k »	72
Tableau V-5 :	Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque rectangulaire FG soumise à une variation <i>non linéaire</i> ($\gamma=3$) de température en fonction des rapports « a/h » et de l'indice de puissance « k ».	72

LISTE DES NOTATIONS

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ,
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\Psi''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement

δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice

$T(x,y,z)$	Chargement thermique
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

INTRODUCTION
GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels. Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie. Depuis la nuit des temps, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une double démarche. Cette double démarche est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour sa vie matérielle d'une part et à son besoin intellectuel de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure d'autre part. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique. Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice dans laquelle sont enrobées des particules ou des fibres qu'on appelle « renfort ». Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués (en anglais : **F**unctionnally **G**raded **M**aterials) qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de

l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges multicritères, permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le transfert de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire, etc.

Ce sont les Japonais qui, en 1984, ont introduit pour la première fois cette nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants. Depuis, des recherches dans le domaine des FGM sont activement menées dans différents pays du monde.

Dans ce travail de recherche, une contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques FGM sera apportée, ces éléments structuraux étant les constituants de base des structures primaires et secondaires. Les matériaux à gradient fonctionnel étant des matériaux conçus à la base pour pallier aux problèmes induits par un environnement à très haute température. Deux objectifs seront visés à travers cette thèse.

Le premier objectif principal de ce travail a été de proposer un nouveau modèle analytique basé sur la théorie d'ordre supérieur à deux variables pour l'analyse de l'instabilité thermique des plaques épaisses FGM soumises à un chargement thermique et de confronter les résultats obtenus aux résultats des autres modèles d'ordre élevé proposés dans la littérature. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues pour la théorie proposée est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Cette théorie raffinée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Une attention particulière sera portée aux facteurs influant la température critique de flambement.

Le second objectif de cette thèse est l'étude de la stabilité au flambement des plaques épaisses en FGM reposant sur des fondations élastiques. Une théorie raffinée des plaques

d'ordre élevé sera utilisée. Une comparaison entre les théories d'ordre élevé sera établie en se basant sur le tenseur de déformation de Von Karman qui prend en compte la non linéarité géométrique. Le principe des travaux virtuels sera utilisé pour déterminer les équations d'équilibre et les charges critiques de flambement seront aussi calculées à partir des ces équations. Les fondations élastiques seront modélisées en utilisant la théorie de Pasternak et une comparaison sera faite avec le modèle de Winkler.

La présente thèse sera donc présentée selon l'organisation qui suit :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel (également appelés matériaux à gradient de propriétés ou matériaux fonctionnellement gradués) ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse, le premier chapitre sera consacré à une recherche bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application.

Le second chapitre sera dédié à un rappel sur les théories des plaques. Dans le troisième chapitre, on présente quelques travaux réalisés sur les structures en FGM pour souligner l'ampleur qu'a pris ces matériaux durant ces dernières décennies.

Le chapitre quatre quant à lui sera consacré à la formulation d'un modèle analytique de plaques épaisses basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse de la stabilité thermique des plaques FGM. La notion de la surface neutre est introduite dans la formulation des différentes équations. La charge critique de flambement est déterminée pour les trois cas de chargement thermique retenus.

Le cinquième chapitre est réservé à la présentation d'une théorie raffinée des plaques pour l'étude de la stabilité thermique des plaques épaisses sur des fondations élastiques. Les charges critiques de flambement seront déterminées et une étude paramétrique sera présentée. Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

CHAPITRE I
GENERALITES SUR LES F.G.M

I.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (**F**unctionnally **G**raded **M**aterials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto et al. 1999, Suresh et Mortensen 1998) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner et al. 2008). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux

interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil (Baron et Naili 2008).

Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement sous diverse sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Etant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM.

I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure I.1) ou discrète (figure I.2) à travers l'épaisseur (Hirai 1996). Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les

industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.



Figure I.1 : Variation continue des propriétés



Figures I.2 : Variation discrète des propriétés

La variation continue des propriétés (figures I.3 et I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

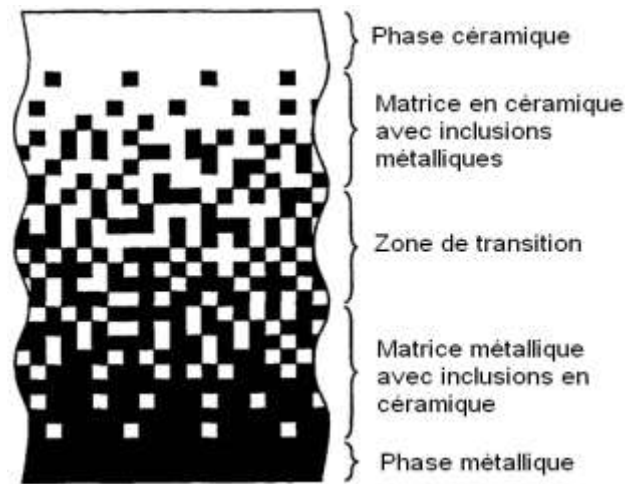


Figure I.3 : Variation continue de la microstructure (schématisée)



Figure I.4: Variation continue de la microstructure (photo)

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu ((Jian, Hashida *et al.* 1995), (Kawasaki et Watanabe 1997)).

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

I.3 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.5 Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

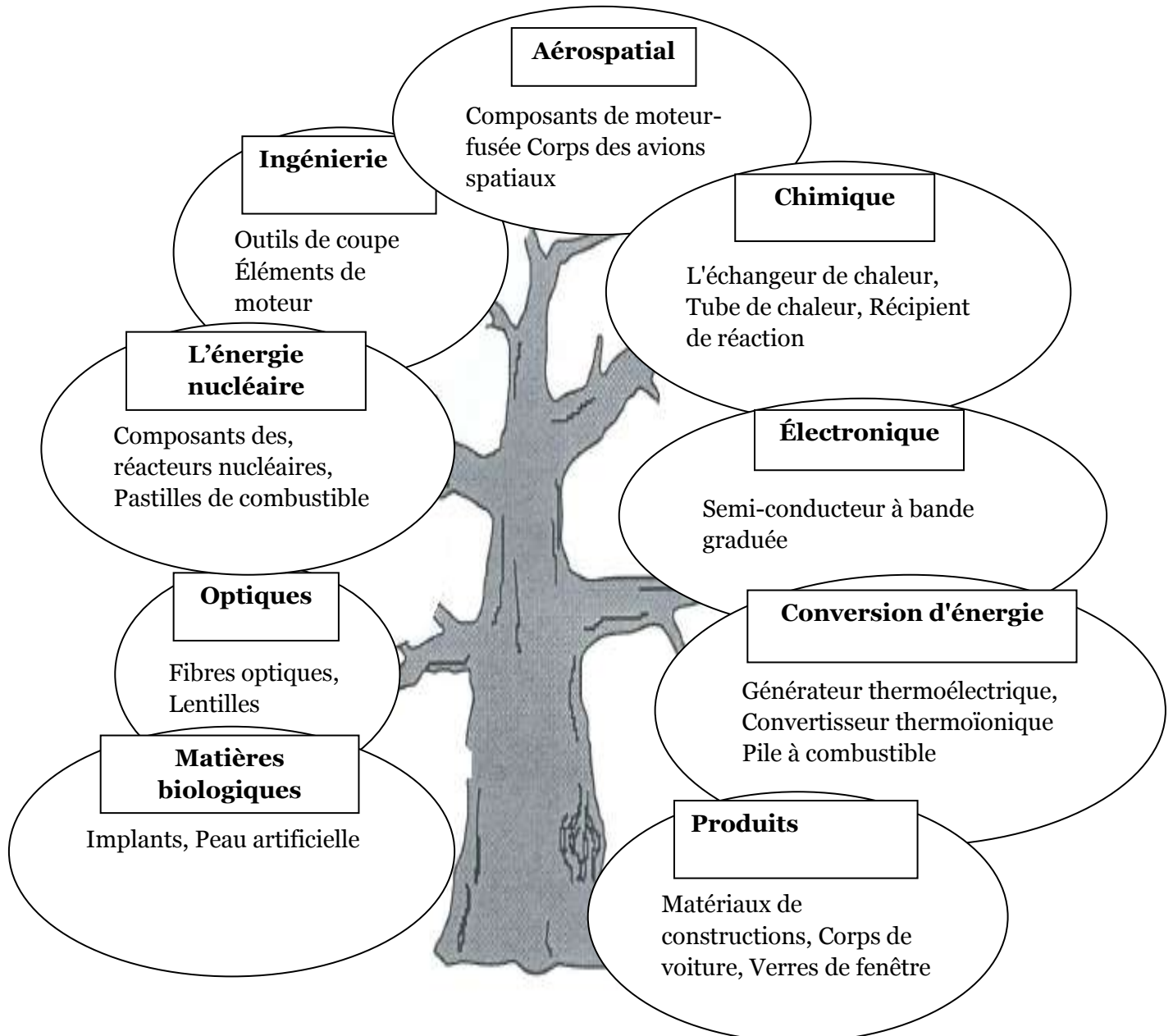


Figure I.5 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I-4 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.6) (Koizumi 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch *et al.* 1986).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

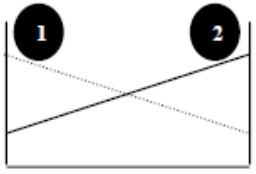
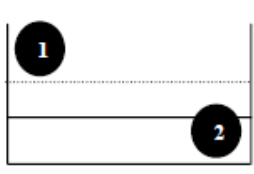
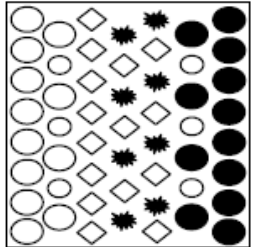
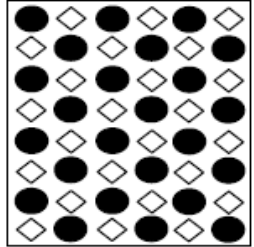
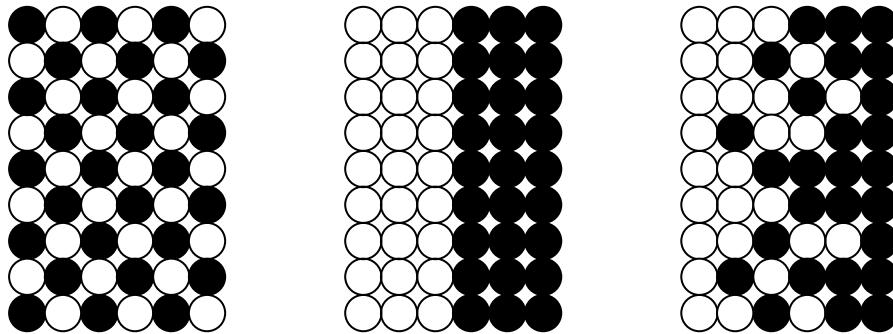
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.6 Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi 1996)

Yoshihisa (2004) a établie un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure I-7). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière

sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en terme de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué (c)

Figure I.7 La distribution composante des matériaux (Yoshihisa 2004).

I.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace.

Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen 2009)

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I-1})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I-2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{I-3})$$

Avec :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I-4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

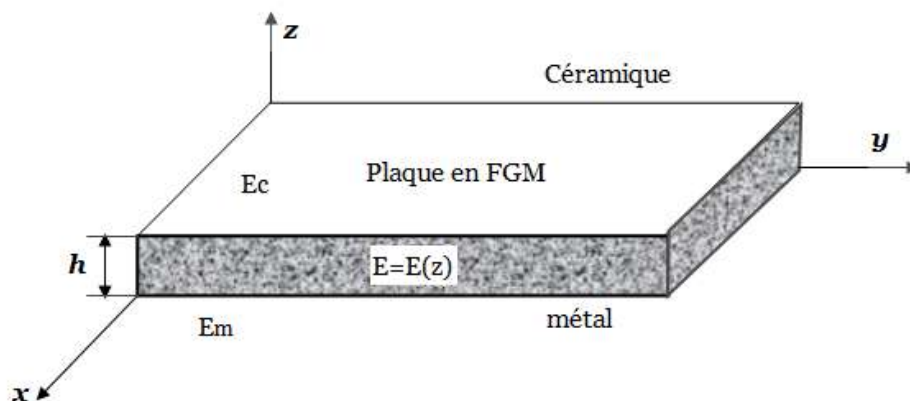


Figure I.8 : Géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

Jin et Batra (1996) indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I-5})$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I-6})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.9. Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

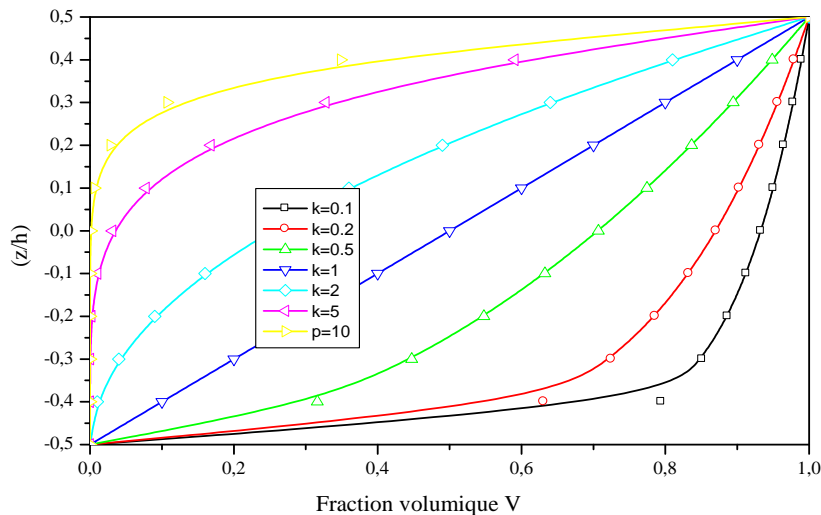


Figure I.9 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-6a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-6b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-7a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-7b})$$

La figure I.10 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I-6a) et (I-6b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

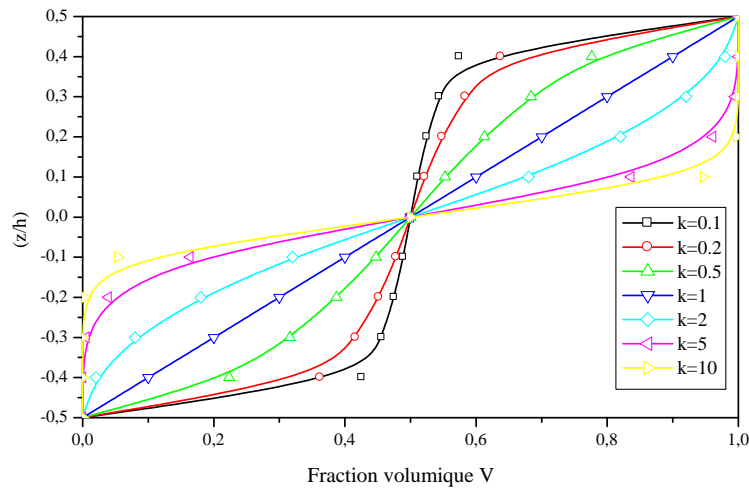


Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.5.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale et Erdogan 1983).

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I-8a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I-8b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.11.

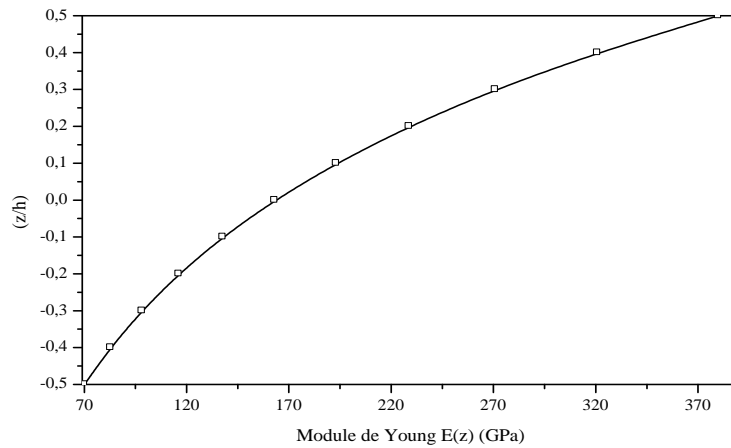


Figure I.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application.

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II
THEORIES DES PLAQUES

II.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2. Modèles analytiques des plaques

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger, (1959) et Reddy (1997,1999).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1a})$$

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1b})$$

$$\mathbf{w}(x, y, z) = \mathbf{w}_0(x, y) \quad (\text{II.1c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

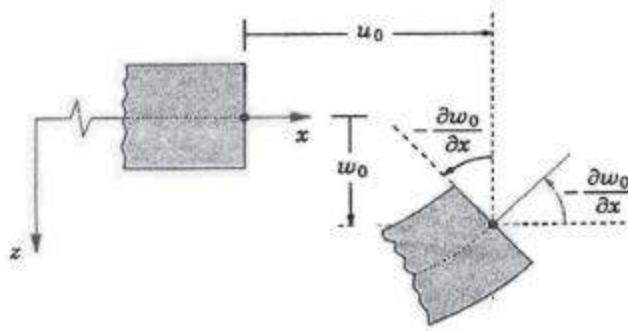


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouve dans les références (Reissner 1945; Mindlin 1951).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (\text{II-2a})$$

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.2b})$$

$$\mathbf{w}(x, y, z) = \mathbf{w}_0(x, y) \quad (\text{II.2c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et $(\phi_x$ et $\phi_y)$ sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement de

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

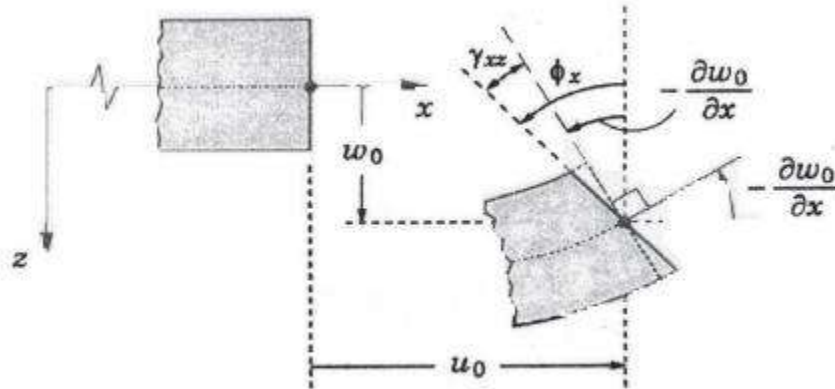


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997).

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et *al.* 1949; Naghdi 1957; Reissner, 1975; Reddy 1984; Kantet Swaminathan 2002).

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques matériaux à gradient de propriétés.

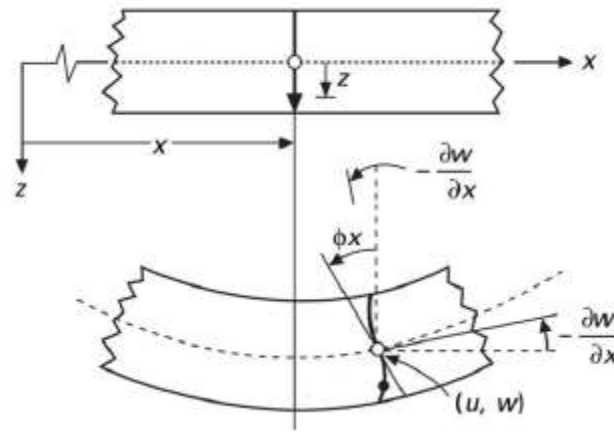


Figure II.3: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{II.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{II.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II.3c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Le champs de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy (1997,1999) est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. (2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. (2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.7})$$

II.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) (Whitney, 1973 ; Nelson, 1974 ; Lo, 1977 ; Touratier, 1991). Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan (1969) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- L'approche de Reissner Reissner (1945) avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de Levinson, Murthy Murthy (1981) et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant (Reddy, 1984). Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène (Duong, 2008).

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant (2002).

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur (Touratier, 1991). La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \cdot \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (1984). En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par Polit (1997) et Dau (2006).

Récemment, Afaq et al. (2003) proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$f(z) = z \cdot e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.12})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de Touratier (1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes (Duong, 2008).

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
CPT, Kirchoff (Kirchhoff, G.R. 1850 a) et (Kirchhoff, G.R. 1850 b)	Théorie classique des plaques	0	-----	-----	Plaques minces
FSDT, Mindlin (Mindlin. R.D 1951)	Théorie de déformation des plaques du 1 ^{er} ordre	z	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian (Ambartsumian, S.A. 1958)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner (Reissner. E 1975)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier (Touratier. M 1991)	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT, Karama et al. (Karama et al. 2003)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2(z/h)^2}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses

PSDPT, Levinson (Levinson, M. 1980), Reddy (Reddy. J.N, 1984)	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu (Aydogdu, M. 2009)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
El meiche, Tounsi et al. (El Meiche et al. 2011)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi) - z}{(\cosh(\pi/2) - 1)}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Ait Atmane et al. (Ait Atmane et al. 2010)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi (Shimpi, R.P. 2002)	Théorie raffinée des plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses

II.3.1 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques :

Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane *et al.* (2010) ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji *et al.* (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Dans la présente thèse, nous proposons l'utilisation de cette théorie raffinée pour l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM avec ou sans la présence de fondations élastique. En plus la position exacte de la surface neutre de telle plaque sera déterminée.

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

(II.13)

CHAPITRE III
REVUE DES TRAVAUX ANTERIEURS
SUR LES F.G.M

III.1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux composites formés de deux ou plusieurs phases constitutives avec une composition variable et continue dans l'espace. Ils possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent intéressants dans des applications potentielles, une réduction importante des contraintes dans le plan et à travers l'épaisseur, une meilleure répartition des contraintes résiduelles, des propriétés thermiques améliorées, une grande ténacité, et une réduction du facteur d'intensité de contrainte.

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés à ces matériaux et il est prudent de réduire la recherche bibliographique dans ce chapitre en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes liés aux plaques en FGM. Néanmoins, une partie minime de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermique et/ou thermomécanique du flambage. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

III.2 Etudes sur les contraintes résiduelles

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique qui surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujéti à un environnement haute-température.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drak *et al.* (1993) et Williamson *et al.* (1993). Ils ont alors considéré un spécimen en FGM (Al_2O_3 -Ni) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos *et al.* (1995) ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques. Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson *et al.* (1993) Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un

mélange $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Ni}$. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes. Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques. Finot *et al.* (1996) complétèrent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM. En 1995, Ravichandran (1995) a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un Système FGM sous haute température. Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin (2002) qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane.

III.3 Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques

Un système FGM conçu pour une application donnée doit prouver sa capacité à supporter simultanément des charges thermiques et mécaniques.

Praveen et Reddy (1998) ont présenté une analyse du comportement thermoélastique des plaques FGM rectangulaires incluant les effets non linéaires, les déformations en cisaillement transverse et l'inertie de rotation. Reddy *et al.* (1999) ont étendu cette théorie des plaques FGM rectangulaires à une formulation du premier ordre de plaques annulaires et circulaires en flexion. Des solutions pour la déflexion, les forces et moments résultants ont été présentées. La théorie originalement formulée par Praveen et Reddy (1998) a été par la suite étendue par Reddy (2000), à des relations plus générales des plaques FGM permettant de prendre en considération des déformations du troisième ordre. Reddy (2000) a également développé des modèles d'éléments finis en théorie de déformation du troisième ordre incluant les effets thermiques et non linéaires. Woo et Meguid (2001) ont publié une formulation des grandes déformations des plaques et coques minces en FGM sous des charges thermiques et mécaniques en utilisant la théorie classique des plaques. Vel et Batra (2002) étudièrent les petites déformations élastiques des plaques FGM avec des bords en appuis simples. Les champs de déplacements et de températures ont été générés en imposant individuellement ou simultanément des charges mécaniques et thermiques sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Ces champs sont pris sous forme de séries de Taylor et satisfont les équations constitutives d'un matériau thermoélastique isotrope linéaire ainsi que les conditions aux limites. La clé de cette hypothèse est qu'une plaque gradée suivant l'épaisseur a des propriétés de matériau qui varient très lentement et que la plaque est

supposée constituée de couches très minces, isotropes, homogènes et parfaitement collées. Les solutions obtenues par les séries en puissance ont alors été comparées à celles générées par les théories classiques, du premier ordre et du troisième ordre des plaques. . Reddy et Cheng (2001) ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques.

Récemment, Tounsi *et al.* (2013) ont développé une théorie raffinée à quatre (04) inconnus pour l'analyse thermoélastique de la flexion des plaques sandwiches en FGM

III.4 Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique

Le flambage des poutres, des plaques et des coques est un problème très important étudié par beaucoup de chercheurs. Ces éléments structuraux sont en général gradés de façon non symétrique par rapport au plan moyen. Il existe alors un couplage flexion-traction. Dû à ce fait, les charges critiques de flambage risquent d'être plus importantes que celles obtenues pour les mêmes membres structuraux en matériau homogène et symétrique. Le flambement des plaques FGM devient très dangereux lorsque celles-ci sont utilisées dans des systèmes de protection thermique.

L'une des premières études sur le flambement des structures FGM a été réalisée par Shen (2002). Il s'est intéressé au post-flambage des coques cylindriques dans un environnement thermique. La même année, Javaheri et Eslami (2002a) proposent des solutions exactes au flambement thermique des plaques FGM rectangulaires gradées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métal-céramique. Ils se sont basés sur la théorie classique des plaques. Les charges critiques de flambement sont influencées par les changements de température à travers l'épaisseur. Deux observations importantes ressortent de leur étude :

- La variation de la température critique de flambement d'une plaque FGM est inférieure à celle d'une plaque homogène.
- En augmentant l'indice k de la loi de distribution en puissance, la température critique de flambement est réduite.

Na et Kim (2005) analysèrent le flambement des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis. Le flambement thermique sous des changements de températures uniformes et non uniformes à travers l'épaisseur a été traité. Il ressort de cette étude que les caractéristiques du flambement thermique des plaques FGM sont très influencées par le champ de température, la distribution de la fraction volumique et les paramètres géométriques du système structural.

En 2004, Wu (2004) a analysé le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples. Il appliqua la théorie de déformation du premier

ordre. Les équations d'équilibre et de flambement ont été résolues analytiquement. Des conclusions identiques à celles de Na et Kim ont été tirées.

L'analyse du post-flambage des plaques avec des propriétés dépendant de la température a été abordée par Shen (2007). Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre supérieur incluant les effets thermiques. Les imperfections géométriques initiales sont prises en considération. Les résultats publiés concernent le post-flambage thermique du plan moyen des plaques FGM symétriques.

Bodaghi et Saidi (2010) ont analysé le flambement d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en se servant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy et d'une méthode analytique. Les auteurs ont développé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à résoudre. Pour les conditions imposées, deux côtés de la plaque sont en appuis simples et la plaque est soumise à différents types de chargements en plan. Les auteurs ont ensuite aisément résolu le problème en se servant de la méthode de Levy (1899).

D'autres études intensives sur le flambement des plaques FGM ont été entreprises par Javaheri et Eslami (2002b, 2002c), Shariat *et al.* (2005, 2006 et 2007).

Bouderba *et al.* (2013) ont étudiés la réponse en flexion thermomécanique des plaques FG sandwichs reposants sur fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de cisaillement trigonométrique. En utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, Yaghoobi H et Yaghoobi P (2013) ont présentés une étude analytique pour l'analyse du flambement des plaques FG sandwichs symétriques sur fondation élastique et soumises à un chargement mécanique. Tounsi et son groupe de travail (Houari *et al.* 2011, Merdaci *et al.* 2011, Bourada *et al.* 2012, Tounsi *et al.* 2013) ont mis au point de nouvelles théories de plaque raffinés pour la réponse de flexion et flambement des plaques FG sandwichs avec seulement quatre fonctions inconnues. Saidi *et al.* (2013) ont développé une solution analytique pour la flexion thermomécanique des plaques sandwichs fonctionnellement graduées en utilisant une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Ils ont utilisés un nouveau champ de déplacement en incluant l'effet « *stretching* ».

III.5 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques.

Nous rappelons que le problème de vibration des plaques FGM n'a pas été traité dans le cadre de cette thèse. Nous le présentons juste dans le but de monter l'importance que la communauté scientifique donne à ces nouveaux matériaux ce qui justifie le nombre important de recherches traitant les structures faites à partir de ces matériaux sous diverses sollicitations.

Praveen et Reddy (1998) ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. Reddy (2000) a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

Yang et Shen (2001) ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'indice de la fraction volumique, de la rigidité du support élastique, du rapport d'élanement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM.

Reddy et Chen (2003) ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

En 2004, Huang et Shen (2004) ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par Vel et Batra (2004) pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. Les résultats ont montré l'effet

de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (h/a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. Qian, Batra *et al.* (2004) ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur.

En 2006, les travaux de Ferreira *et al.* (2006) ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites.

C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger. Uymaz et Aydogdu (2007) ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li *et al.* (2008). La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés. L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM. L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'indice des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse.

Matsunaga (2008), a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM.

Ait Atmane *et al.* (2010) ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier.

Hasani Baferani *et al.* (2011) ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'indice de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration.

Hadji *et al.* (2011) ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'étude de la vibration des plaques FG sandwiches.

Benachour *et al.* (2011) ont utilisé la même théorie développée par Hadji *et al.* (2011) pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire. Autrement dit, ils ont pris deux indices de puissance différents entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité.

II.6 Conclusion

Suite à cette recherche bibliographique, nous remarquons que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche relativement nouveau, que depuis l'apparition du concept FGM, beaucoup de chercheurs s'y sont intéressés et d'innombrables travaux ont été publiés mais qu'il reste encore beaucoup à faire.

CHAPITRE IV

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE
L'INSTABILITE THERMIQUE DES
PLAQUES EPAISSES
EN F.G.M

IV.1 Introduction

L'utilisation croissante des matériaux avancés dans les éléments de structures a éveillée l'intérêt des chercheurs à l'étude de la réponse des plaques fonctionnellement graduées (FG) utilisées dans des domaines à fort gradient thermique.

Les FGM sont des matériaux où les propriétés varient continuellement à travers l'épaisseur à partir de la surface de la céramique exposée à de fortes températures à celle du métal. Les propriétés mécaniques varient graduellement à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. Du moment où la plupart des applications des FGM se sont concentrées dans des environnements à température élevée, les recherches ont été limitées à l'analyse des contraintes thermiques, le flambement thermique, les fractures mécaniques et l'optimisation. Plusieurs investigations sur le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées (FGP) ont été publiées et ont vues le jour ces dernières années. Les propriétés mécaniques non homogènes des FGP sont décrites par une simple loi de distribution variable suivant l'épaisseur.

Les équations d'équilibre basées sur la théorie d'ordre élevé d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduées soumise à un chargement thermique ont été décrites par Javaheri et Eslami (2002a). Le système des équations différentielles partielles a été établi par l'utilisation de la méthode variationnelle. Les équations d'équilibre et de stabilité des FGP obtenues sont identiques à celles des plaques composites. Une analyse du flambement d'une FGP sous quatre charges thermique a été présentée. Na et Kim (2004) ont étudiés le flambement tridimensionnel d'une FGP sandwich composée de trois couches, céramique, FGM et métal sous un chargement thermomécanique. Ils se sont penchés sur le comportement de ces plaques du au rapport d'épaisseur, la distribution de la fraction volumique et le système des paramètres géométrique.

Le flambement thermique des plaques FGM circulaires a fait l'objet d'étude par Najafizadeh et Heydaru (2004). En supposant que les propriétés matérielles changent comme une simple loi de puissance suivant l'ordonnée « z » et par l'utilisation de la méthode variationnelle, le flambement des plaques circulaires fonctionnellement graduées sous diverses charges thermiques a été analysé. Les équations d'équilibre des plaques rectangulaires épaisses sous un chargement thermique ont été obtenues par Lanhe (2004). Un chargement thermique sous forme d'un gradient uniforme de température à travers l'épaisseur a été retenu. L'influence de l'indice de la fraction volumique et du cisaillement transverse sur la température critique du flambement a été discutée. Bouazza et al. (2010) étudièrent le flambement thermoélastique des FGP en utilisant la théorie de cisaillement du premier ordre. Les effets du changement des caractéristiques des plaques, la composition matérielle et la fraction volumique des constituants sur la température critique du flambement des

plaques simplement appuyées ont été aussi discutées. Shariat et Eslami (2005) présentaient une analyse du flambement thermique des plaques rectangulaires FGP avec des imperfections géométriques en se basant sur la théorie classique des plaques. Trois chargements thermiques ont été retenus : variation uniforme, non linéaire à travers l'épaisseur et axiale. Le flambement thermique des plaques FG présentant une inclinaison et simplement appuyées a fait l'objet d'étude basée sur la théorie du premier ordre par Ganapathi (2006). Une variation linéaire et non linéaire a été prise comme chargement suivant l'épaisseur. Une étude paramétrique sur les effets des rapports longueur/ largeur (a/b) et rapport d'épaisseur (a/h) ainsi que l'indice matériel sur la température critique a été menée. Morimoto et al. (2006) exposaient une analyse du flambement thermique des plaques FG assujetties à une source de température partielle dans le plan et un chargement thermique suivant l'épaisseur. Le coefficient de dilatation thermique et le module de Young ont été pris comme variant individuellement suivant l'épaisseur selon une loi de puissance. Les chercheurs se sont intéressés aux effets de la non homogénéité matérielle, le rapport (a/b) et la région chauffée sur la température critique du flambement. Le flambement thermique d'une FGP sous l'effet combiné d'une température élevée et d'un chargement aérodynamique a été étudié par Ibrahim et al. (2007). Ils ont trouvés que l'augmentation de la température a un effet inverse sur les caractéristiques des FGP par la réduction de la pression dynamique critique. Sohn et Kim (2008) s'intéressaient à la stabilité des panneaux fonctionnellement gradués (FG) soumis aux effets combinés de température et d'un chargement aérodynamique. Ils utilisaient la théorie du premier ordre pour simuler les charges aérodynamiques supersoniques agissant sur les panneaux. Matsunaga (2009) utilisait la théorie de déformation d'ordre élevé pour l'étude du flambement thermique des FGP. Par l'utilisation d'une méthode de série de puissance des composantes de déplacement, un nombre d'équations des plaques rectangulaire FG a été trouvé. Kazerouni et al. (2010) présentaient une analyse du flambement thermique des plaques minces fonctionnellement gradués sollicitées par deux chargements thermique suivant l'épaisseur : uniforme et non linéaire. Récemment, Kettaf et al. (2013) étudiaient le comportement du flambement thermique des plaques sandwiches en utilisant un nouveau modèle hyperbolique du déplacement.

La surface neutre d'une plaque fonctionnellement graduée peut ne pas coïncider avec sa surface moyenne géométrique. Ceci est dû à la variation des propriétés matérielle à travers son épaisseur ce qui conduit à un couplage membrane-flexion. Par conséquent, les déformations de membrane et de flexion sont couplées. Quelques chercheurs (Morimoto et al. 2006, Abrate 2008, Zhang et Zhou 2008, Saidi et Jomehzadeh 2009) ont montrés que ce couplage dans les équations constitutives n'aura pas lieu si la surface de référence est

proprement sélectionnée. Dernièrement, Bodaghi et Saidi (2011) étudiaient le flambement thermique des plaques minces FG soumise à un chargement non uniforme dans le plan. Pour cela, ils ont utilisés le concept de la surface neutre et ils ont démontrés que les équations de stabilité basées sur la théorie classique des plaques peuvent être réduites à une seule équation qui peut être résolue par l'emploi de la méthode de série de puissance.

Le but de ce chapitre est de développer une théorie de déformation de cisaillement raffiné basée sur la position exacte de la surface neutre et ce pour l'étude et analyse du l'instabilité thermique des plaques épaisses en FGM. Cette théorie est fondée sur la supposition que le déplacement transversal consiste en deux composantes l'une de flexion et l'autre de cisaillement pour lesquelles celle de flexion ne contribue pas dans les forces de cisaillement et la composante de cisaillement ne contribue pas avec le moment de flexion. Contrairement à la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale conventionnelle (Zenkour et Mashat 2010), la théorie proposée ne contient que quatre inconnus. Les propriétés matérielles de la plaque sont supposées variées selon l'épaisseur suivant une simple loi de puissance en termes de la fraction volumique des constituants.

Les propriétés matérielles effectives sont estimées en utilisant la loi de mélange. Comme ces propriétés varient suivant l'épaisseur, La surface neutre de telle plaque ne coïncide pas avec sa surface moyenne géométrique (Yahoobi et Feraidoon 2010). En plus, Zhang et Zhou (2008), Ould Larbi et al. (2013), Bouremana et al. (2013), Khalfi et al. (2013) et Bousahla et al. (2013) ont démontrés que le couplage membrane-flexion dans les équations constitutives de la plaque FG est inexistant si le système de coordonnées est situé dans la surface physique neutre de la plaque.

Par conséquent, les équations qui régissent le comportement de la plaque FG peuvent être simplifiées. En se basant sur la présente théorie, la position exacte de la surface neutre et le principe des travaux virtuels, les équations qui gouvernent la plaque sont obtenues. Trois cas de chargement thermique sont retenus à travers l'épaisseur de la plaque, uniforme, linéaire et non linéaire. Les résultats de la présente méthode sont comparés et validés avec d'autre issus de la littérature et une étude paramétrique est présentée.

IV.2 Formulation du problème

Considérons une plaque en FGM d'épaisseur h de longueur a et de largeur b . Cette dernière est constituée d'un mélange de deux matériaux distincts (métal et céramique). Les coordonnées x et y sont suivant le plan et l'axe z est dirigé selon l'épaisseur. La surface supérieure est faite entièrement en céramique tandis que celle inférieure est en métal. Pour de telle plaque, la surface neutre ne coïncide pas avec la surface moyenne géométrique. Les forces de compression appliquées peuvent ne pas être supposées agir au niveau de la surface moyenne de la plaque, mais les contraintes résultantes dans le plan agissent le long de la surface neutre.

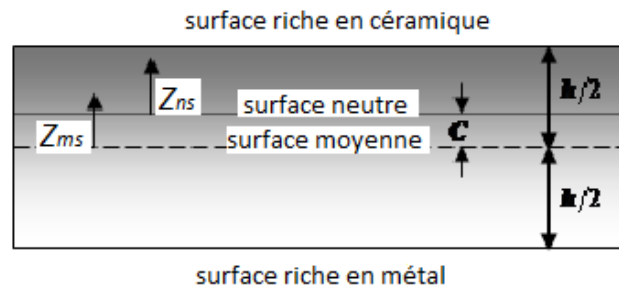


Figure IV-1 : position des surfaces moyenne et neutre de la plaque fonctionnellement graduée (FGP)

Deux différents repères sont utilisés pour la mesure de l'ordonnée z , appelés z_{ms} et z_{ns} qui sont mesurés à partir de la surface moyenne et neutre de la plaque respectivement.

La fraction volumique du céramique V_c est exprimée en terme des coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{IV-1})$$

Où k est l'indice matériel qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. C est la distance entre les deux surfaces moyenne et neutre. Les propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée peuvent être obtenues par le biais de la loi de mélange de Voigt (Suresh et Mortensen 1998). Ainsi, en utilisant l'équation (IV-1), les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FG notées P , en fonction de la coordonnée d'épaisseur deviennent :

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (\text{IV-2})$$

Avec P_M et P_C sont les propriétés correspondant au métal et au céramique.

Dans le présent chapitre, nous considérons que le module d'élasticité « E » et le coefficient de dilatation thermique « α » sont décrits par l'équation (IV-2), tandis que le coefficient de Poisson « ν » est considéré comme constant à travers l'épaisseur.

La position de la surface neutre de la plaque FG est déterminée de telle manière que le moment par rapport au module de Young soit égal à zéro comme suit (Zhang et Zhou 2008) :

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (IV-3)$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue par :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (IV-4)$$

IV.2.1 Théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale de la plaque fonctionnellement graduée

Contrairement à la théorie de déformation de cisaillement conventionnelle (Zenkour et Mashat 2010), le nombre d'inconnus de la présente théorie qui est basée sur la position exacte de la surface neutre est seulement quatre (04). En plus, cette théorie ne nécessite pas un coefficient de correction de cisaillement est satisfait la condition de contraintes de cisaillement nulles aux bords de la plaque.

IV.2.1 .1 Hypothèses de la présente théorie

Les hypothèses retenues pour la présente théorie s'énoncent comme suit :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, par conséquent, les contraintes générées sont infinitésimales ;
- Le déplacement transversal « w » comprend deux composantes, une de flexion « w_b » et l'autre de cisaillement « w_s » et ces dernières sont fonction des coordonnées x , et y seulement :

$$w(x, y, z_{ms}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (IV-5)$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes en plan σ_x et σ_y .

- Les déplacements « u » et « v » dans les directions x et y respectivement consiste en composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (IV-6)$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires à celles données par la théorie classique des plaque. Ainsi, les expressions de u_b et v_b sont données par :

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (IV-7)$$

Les composantes de cisaillement « u_s » et « v_s » induisent, avec la composante « w_s », une variation parabolique des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et par conséquent les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} sont nulles aux bords de la plaque. Par conséquent, les expressions de « u_s » de « v_s » peuvent être données par :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (IV-8)$$

Où :

$$f(z_{ns}) = \left(z_{ns} + C - \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi(z_{ns} + C)}{h} \right) \quad (IV-9)$$

IV.2.1.2 Cinématique

En se basant sur les hypothèses présentées dans la section précédente, le champ de déplacement est obtenu en utilisant les éqs. (IV-5) à (IV-9) comme suit :

$$u(x, y, z_{ns}) = u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (IV-10a)$$

$$v(x, y, z_{ns}) = v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (IV-10b)$$

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (IV-10c)$$

Les équations non linéaires déplacement-déformation de Von Karman sont formulées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z_{ns}) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (IV-11)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV-12a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-12b})$$

Et

$$g(z_{ns}) = 1 - \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} = \cos\left(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h}\right) \quad (\text{IV-12c})$$

IV.2.1.3 Relations constitutive

La plaque est sujette à un chargement thermique $T(x, y, z_{ns})$. Les relations constitutives linéaires sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-13})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont respectivement les composantes de contraintes et de déformations. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (IV-2), les coefficients de rigidités peuvent être exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV-14a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV-14b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV-14c})$$

IV.2.1 .4 Les équations de stabilité

L'énergie potentielle totale de la plaque FG peut être exprimée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left[\sigma_x (\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y (\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \right] dz_{ns} dy dx, \quad (IV-15)$$

Le principe des travaux virtuels est appliqué dans le présent travail et est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \iint \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \right. \\ \left. + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (IV-16)$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (IV-17a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xz}^s, & S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}. \quad (IV-17b)$$

En utilisant l'équation (IV-13) dans (IV-17), les efforts résultants dans la plaque FG peuvent être reliés aux déformations totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (IV-18)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (IV-19a)$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \quad (IV-19b)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (IV-19c)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & 0 \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & 0 \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV-19d})$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^s & \mathbf{B}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{B}_{12}^s & \mathbf{B}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^s & \mathbf{D}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{D}_{12}^s & \mathbf{D}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^s & \mathbf{H}_{12}^s & 0 \\ \mathbf{H}_{12}^s & \mathbf{H}_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{IV-19e})$$

$$\mathbf{S} = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad \mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{44}^s & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{IV-19f})$$

Avec \mathbf{A}_{ij} , \mathbf{D}_{ij} , etc., sont définies comme étant les rigidités de la plaque et sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_{11}^s & \mathbf{D}_{11}^s & \mathbf{H}_{11}^s \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{B}_{12}^s & \mathbf{D}_{12}^s & \mathbf{H}_{12}^s \\ \mathbf{A}_{66} & \mathbf{D}_{66} & \mathbf{B}_{66}^s & \mathbf{D}_{66}^s & \mathbf{H}_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \mathbf{Q}_{11}(1, z^2, f(z_{ns}), z_{ns}, f(z_{ns}), f^2(z_{ns})) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{IV-20a})$$

Et

$$(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{D}_{22}, \mathbf{B}_{22}^s, \mathbf{D}_{22}^s, \mathbf{H}_{22}^s) = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{B}_{11}^s, \mathbf{D}_{11}^s, \mathbf{H}_{11}^s), \quad (\text{IV-20b})$$

$$\mathbf{A}_{44}^s = \mathbf{A}_{55}^s = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (\text{IV-20c})$$

Les efforts et les moments résultants, $\mathbf{N}_x^T = \mathbf{N}_y^T$, $\mathbf{M}_x^{bT} = \mathbf{M}_y^{bT}$, et $\mathbf{M}_x^{sT} = \mathbf{M}_y^{sT}$ dus au chargement thermique sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_x^T \\ \mathbf{M}_x^{bT} \\ \mathbf{M}_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{1-\nu} \boldsymbol{\alpha}(z_{ns}) \mathbf{T} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{IV-21})$$

Les équations de stabilités de la plaque peuvent être décrites par le critère de l'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque FG sous le chargement thermique est définit en termes des composantes de déplacement (u_0^0 , v_0^0 , w_b^0 , w_s^0). Les composantes de déplacement d'un état adjacent stable diffère par (u_0^1 , v_0^1 , w_b^1 , w_s^1) par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, le déplacement total d'un état adjacent est donné par :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^0 + \mathbf{u}_0^1, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^0 + \mathbf{v}_0^1, \quad \mathbf{w}_b = \mathbf{w}_b^0 + \mathbf{w}_b^1, \quad \mathbf{w}_s = \mathbf{w}_s^0 + \mathbf{w}_s^1 \quad (\text{IV-22})$$

Où l'indice « 1 » désigne l'état de stabilité et « 0 » l'état de condition d'équilibre.

En substituant les équations (IV-11) et (IV-22) dans l'équation (IV-16) et intégrant par parties, et par la suite égalant à zéro séparément les coefficients δu_0^1 , δv_0^1 , δw_b^1 et δw_s^1 , les équations de stabilité sont obtenues pour la théorie de déformation de cisaillement comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N} &= 0 \end{aligned} \quad (IV-23)$$

Avec :

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (IV-24)$$

Où les termes N_x^0 et N_y^0 sont les efforts de pré-flambement résultants qui sont définis par :

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-\frac{h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} \frac{\alpha(z_{ms}) E(z_{ms}) T}{1-\nu} dz_{ms} \quad (IV-25)$$

Les équations de stabilité en terme de composantes de déplacement peuvent être obtenues par la substitution de l'équation (IV-18) dans l'équation (IV-23). Les équations résultantes sont celles de stabilité basées sur la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x \partial y} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (IV-26a)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0^1}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial y^2} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s^1}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (IV-26b)$$

$$-D_{11} \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b^1}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s^1}{\partial y^4} + \bar{N}^1 = 0 \quad (IV-26c)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_{11}^s \frac{\partial^3 \mathbf{u}_0^1}{\partial x^3} + (\mathbf{B}_{12}^s + 2\mathbf{B}_{66}^s) \frac{\partial^3 \mathbf{u}_0^1}{\partial x \partial y^2} + (\mathbf{B}_{12}^s + 2\mathbf{B}_{66}^s) \frac{\partial^3 \mathbf{v}_0^1}{\partial x^2 \partial y} + \mathbf{B}_{22}^s \frac{\partial^3 \mathbf{v}_0^1}{\partial y^3} - \mathbf{D}_{11}^s \frac{\partial^4 \mathbf{w}_b^1}{\partial x^4} - 2(\mathbf{D}_{12}^s + 2\mathbf{D}_{66}^s) \frac{\partial^4 \mathbf{w}_b^1}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - \mathbf{D}_{22}^s \frac{\partial^4 \mathbf{w}_b^1}{\partial y^4} - \mathbf{H}_{11}^s \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s^1}{\partial x^4} - 2(\mathbf{H}_{12}^s + 2\mathbf{H}_{66}^s) \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s^1}{\partial x^2 \partial y^2} - \mathbf{H}_{22}^s \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s^1}{\partial y^4} + \mathbf{A}_{55}^s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s^1}{\partial x^2} + \mathbf{A}_{44}^s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s^1}{\partial y^2} + \bar{\mathbf{N}}^1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-26d})$$

IV.2.2 Solution trigonométrique du flambement thermique

Les plaques rectangulaires sont généralement classées par rapport au support utilisé (conditions d'appuis). Nous nous intéressons dans ce qui suit à la solution exacte de l'équation (IV-26). Les conditions aux limites suivantes sont retenues pour la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$\mathbf{v}_0^1 = \mathbf{w}_b^1 = \mathbf{w}_s^1 = \frac{\partial \mathbf{w}_s^1}{\partial y} = \mathbf{N}_x^1 = \mathbf{M}_x^{b1} = \mathbf{M}_x^{s1} = 0 \text{ at } x=0, a, \quad (\text{IV-27a})$$

$$\mathbf{u}_0^1 = \mathbf{w}_b^1 = \mathbf{w}_s^1 = \frac{\partial \mathbf{w}_s^1}{\partial x} = \mathbf{N}_y^1 = \mathbf{M}_y^{b1} = \mathbf{M}_y^{s1} = 0 \text{ at } y=0, b. \quad (\text{IV-27b})$$

La solution approximative suivante satisfait à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^1 \\ \mathbf{v}_0^1 \\ \mathbf{w}_b^1 \\ \mathbf{w}_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \mathbf{V}_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ \mathbf{W}_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \mathbf{W}_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-28})$$

Où \mathbf{U}_{mn}^1 , \mathbf{V}_{mn}^1 , \mathbf{W}_{bmn}^1 , et \mathbf{W}_{smn}^1 sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$. En substituant l'équation (IV-28) dans (IV-26), nous aurons :

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = 0,$$

Où $\{\Delta\}$ est un vecteur donné par :

$$\{\Delta\} = \{ \mathbf{U}_{mn}^1, \mathbf{V}_{mn}^1, \mathbf{W}_{bmn}^1, \mathbf{W}_{smn}^1 \}^t \quad (\text{IV-30})$$

Et $[\mathbf{K}]$ est une matrice symétrique donnée par :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} \\ \mathbf{a}_{14} & \mathbf{a}_{24} & \mathbf{a}_{34} & \mathbf{a}_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV-31})$$

Dans la quelle :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\
 a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\
 a_{13} &= 0 \\
 a_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\
 a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\
 a_{23} &= 0 \\
 a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\
 a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2) \\
 a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2) \\
 a_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2)
 \end{aligned} \tag{IV-32}$$

Par l'application de l'approche de condensation pour éliminer les coefficients associés avec les déplacements en plan, l'équation (IV-29) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}^{11}] & [\mathbf{K}^{12}] \\ [\mathbf{K}^{12}]^T & [\mathbf{K}^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV-33}$$

Avec:

$$[\mathbf{K}^{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, [\mathbf{K}^{12}] = \begin{bmatrix} 0 & a_{14} \\ 0 & a_{24} \end{bmatrix}, [\mathbf{K}^{22}] = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{IV-34a}$$

$$\Delta^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{mm}^1 \\ \mathbf{V}_{mm}^1 \end{Bmatrix}, \Delta^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_{bmm}^1 \\ \mathbf{W}_{smm}^1 \end{Bmatrix} \tag{IV-34b}$$

L'équation (IV-33) représente une paire d'équations matricielles

$$[\mathbf{K}^{11}]\Delta^1 + [\mathbf{K}^{12}]\Delta^2 = 0 \tag{IV-35b}$$

$$[\mathbf{K}^{12}]^T \Delta^1 + [\mathbf{K}^{22}]\Delta^2 = 0$$

Résolvant l'équation (IV-35a) pour Δ^1 et remplaçant le résultat dans l'équation (IV-35b), la solution suivante est ainsi obtenue :

$$[\bar{\mathbf{K}}^{22}]\Delta^2 = 0 \tag{IV-36}$$

Où:

$$[\bar{\mathbf{K}}^{22}] = [\mathbf{K}^{22}] - [\mathbf{K}^{12}]^T [\mathbf{K}^{11}]^{-1} [\mathbf{K}^{12}] = \begin{bmatrix} \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{bmatrix} \tag{IV-37a}$$

Et

$$\bar{a}_{33} = a_{33}, \quad \bar{a}_{34} = a_{34}$$

$$\bar{a}_{43} = a_{34}, \quad b_{44} = a_{44} - a_{14} \frac{b_1}{b_0} - a_{24} \frac{b_2}{b_0} \quad (\text{IV-37b})$$

$$b_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad b_1 = a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}, \quad b_2 = a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14}$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice de l'équation (IV-36) doit être nul. Ceci nous donne l'expression suivante de la charge thermique de flambement.

$$N_x^0 = N_y^0 = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2}{a_{33} + a_{44} - 2a_{34}} \quad (\text{IV-38})$$

IV.2.2.1 Flambement des plaques FG sous une variation de température uniforme

La température initiale est T_i . La température augmente d'une manière uniforme pour atteindre une valeur finale de T_f , température pour laquelle la plaque flambe. La variation de température est $\Delta T = T_f - T_i$. En utilisant cette distribution de température, la variation de température critique de flambement ΔT_{cr} devient en utilisant les équations (IV-24) et (IV-38)

$$\Delta T_{cr} = \frac{1}{\bar{\beta}_1 (\lambda^2 + \mu^2)} \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2}{a_{33} + a_{44} - 2a_{34}} \quad (\text{IV-39a})$$

Où

$$\bar{\beta}_1 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} dz_{ns}. \quad (\text{IV-39b})$$

IV.2.2.2 Flambement des plaques FG sous une variation linéaire de température

Pour ce cas, la variation de température est supposée être linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

$$T(z_{ns}) = \Delta T \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right) + T_M, \quad (\text{IV-40})$$

Où la variation de température de flambement $\Delta T = T_c - T_M$ dans laquelle T_c et T_M sont respectivement les températures de la surface supérieure riche en céramique et la surface inférieure qui est en métal.

De manière similaire, la température critique de flambement est donnée par :

$$\Delta T_{cr} = \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2 + T_M \bar{\beta}_1 (\lambda^2 + \mu^2) (a_{33} + a_{44} - 2a_{34})}{\bar{\beta}_2 (\lambda^2 + \mu^2) (a_{33} + a_{44} - 2a_{34})} \quad (\text{IV-41a})$$

Avec:

$$\bar{\beta}_2 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right) dz_{ns} \quad (\text{IV-41b})$$

IV.2.2.3 Flambement des plaques FG sous une température variant de façon non linéaire suivant l'épaisseur

Nous supposons que T_M est la température de la surface supérieure et que la température varie de T_M , suivant une loi de puissance à travers l'épaisseur, à T_C pour la quelle la température flambe. Dans ce cas, la température suivant l'épaisseur de la plaque est donnée par :

$$T(z_{ns}) = \Delta T \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_M, \quad (\text{IV-42})$$

Où la différence de température de flambement est $\Delta T = T_C - T_M$, et γ est l'exposant de température ($0 < \gamma < \infty$). Notant que la valeur de $\gamma = 1$, représente une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur. Tandis que pour des valeurs de γ qui diffèrent de l'unité, nous aurons une variation non linéaire.

La variation de température est obtenue en utilisant les équations (IV-25) et (IV-38) et est formulée comme suit :

$$\Delta T_{cr} = \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2 + T_M \bar{\beta}_1 (\lambda^2 + \mu^2) (a_{33} + a_{44} - 2a_{34})}{\bar{\beta}_3 (\lambda^2 + \mu^2) (a_{33} + a_{44} - 2a_{34})} \quad (\text{IV-43a})$$

Avec

$$\bar{\beta}_3 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma dz_{ns} \quad (\text{IV-43b})$$

IV.3 Résultats et discussion

Dans le but d'obtenir des résultats numériques, une plaque fonctionnellement graduée Al/Al₂O₃ composée d'Aluminium et d'Alumina est considérée. Le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de l'Aluminium sont $E_M = 70$ GPa, $\alpha_M = 23 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ et ceux de l'Alumina sont $E_C = 380$ GPa, $\alpha_C = 7.4 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$. Le coefficient de Poisson est supposé constant selon l'épaisseur est vaut « 0.3 ».

Pour les variations de température linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur, la température augmente de 5°C dans la surface de la plaque riche en métal ($T_m = 5$ °C).

IV.3.1 Etude comparative

Afin de démontrer la validité de la présente méthode, quelques comparaisons des résultats issus du présent modèles avec ceux de la littérature sont réalisées. Dans les tableaux IV-1 et IV-2, la variation de la température critique de flambement obtenue par la présente méthode de déformation sinusoïdale de cisaillement est comparée avec celle reportée par Javaheri et Eslami (2002b) qui est basée à la fois sur la théorie d'ordre élevé (HPT) et la théorie classique des plaques (CPT) d'une part et les travaux de Zenkour et Mashat (2010) qui sont basé sur la théorie sinusoïdale des plaques (SPT) d'autre part. Pour cela, une variation uniforme de température a été retenue.

A partir de ces tableaux, il est clair que les résultats ont une très grande concordance.

Tableau IV-1 : Température critique de flambement d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance k et le rapport de dimension a/b pour une variation uniforme de température ($a/h=100$)

k	Théories	$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$	$a/b = 5$
0	Présente méthode	17.08	42.68	85.25	144.64	220.67
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	17.08	42.68	85.25	144.64	220.66
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	17.08	42.68	85.25	144.65	220.67
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	17.09	42.74	85.49	145.34	222.28
1	Présente méthode	7.93	19.83	39.62	67.25	102.63
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	7.94	19.85	39.71	67.52	103.26
5	Présente méthode	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	7.26	18.16	36.32	61.75	94.45
10	Présente méthode	7.46	18.63	37.20	63.06	96.11
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	7.46	18.63	37.20	63.06	96.12
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	7.46	18.63	37.20	63.06	96.11
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	7.46	18.67	37.34	63.48	97.10

Tableau IV-2 : Température critique de flambement d'une plaque FG carré en fonction de l'indice de puissance k et le rapport a/h pour une variation uniforme de température

k	Théories	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	Présente méthode	1618.82	421.54	106.49	47.42	26.69	17.08
	Javaheri et Eslami (2002b) : HPT	1617.48	421.52	106.49	47.42	26.69	17.08
	Javaheri et Eslami (2002b) : CPT	1709.91	427.47	106.87	47.49	26.71	17.09
1	Présente méthode	758.47	196.26	49.50	22.03	12.40	7.94
	Javaheri et Eslami (2002b) : HPT	757.89	196.26	49.50	22.03	12.40	7.94
	Javaheri et Eslami (2002b) : CPT	794.37	198.59	49.64	22.06	12.41	7.94
5	Présente méthode	678.94	178.50	45.21	20.14	11.34	7.26
	Javaheri et Eslami (2002b) : HPT	678.92	178.53	45.21	20.14	11.34	7.26
	Javaheri et Eslami (2002b) : CPT	726.57	181.64	45.41	20.18	11.35	7.26
10	Présente méthode	692.54	183.13	46.45	20.70	11.65	7.46
	Javaheri et Eslami (2002b) : HPT	692.52	183.14	46.45	20.70	11.65	7.46
	Javaheri et Eslami (2002b) : CPT	746.92	186.73	46.68	20.74	11.67	7.46

Dans les tableaux IV-3 et IV-4, Une autre étude comparative est conduite pour l'évaluation de la température critique de flambement entre la présente théorie qui est basée sur la position exacte de la surface neutre et les solutions développées par Javaheri et Eslami (2000b) basée sur HPT, et celle de Zenkour et Mashat (2010) fondée sur la SPT. La plaque est sujette à une variation linéaire de température à travers l'épaisseur. A partir de ces résultats, on constate l'existence d'une grande concordance.

Tableau IV-3 : Température critique de flambement d'une plaque FG en fonction de l'indice de puissance k et le rapport de dimension a/b pour une variation linéaire de température ($a/h=100$)

k	Théories	$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$	$a/b = 5$
0	Présente méthode	24.17	75.37	160.51	279.30	431.34
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	24.17	75.37	160.50	279.29	431.33
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	24.17	75.37	160.51	279.30	431.34
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	24.19	75.49	160.99	280.68	434.57
1	Présente méthode	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	5.52	27.86	65.11	117.25	184.30
5	Présente méthode	3.89	22.60	53.70	97.07	152.51
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	3.89	22.60	53.71	97.07	152.51
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	3.89	22.60	53.70	97.06	152.50
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	3.89	22.65	53.92	97.69	153.97
10	Présente méthode	4.36	24.16	57.06	102.89	161.46
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	4.36	24.16	57.06	102.90	161.47
	Zenkour et Mashat (2010): SPT	4.36	24.16	57.06	102.89	161.46
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	4.37	24.23	57.32	103.64	163.20

Tableau IV-4 : Température critique de flambement d'une plaque FG carré en fonction de l'indice de puissance k et le rapport a/h pour une variation linéaire de température

k	Théories	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	Présente méthode	3227.36	833.07	202.98	84.84	43.38	24.17
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	3224.96	833.03	202.98	84.84	43.38	24.17
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	3409.82	844.95	203.73	84.99	43.43	24.19
1	Présente méthode	1412.96	358.71	83.46	31.95	13.88	5.51
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	1412.02	358.69	83.46	31.95	13.88	5.51
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	1480.45	363.07	83.73	32.00	13.90	5.52
5	Présente méthode	1160.68	298.70	69.21	26.06	10.91	3.89
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	1160.02	298.69	69.21	26.06	10.91	3.89
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	1242.03	304.05	69.55	26.13	10.93	3.89
10	Présente méthode	1218.63	315.68	73.46	27.82	11.79	4.36
	Javaheri et Eslami (2002b): HPT	1218.32	315.67	73.46	27.82	11.79	4.36
	Javaheri et Eslami (2002b): CPT	1314.74	322.04	73.86	27.90	11.82	4.37

En plus, dans les tableaux (IV-5 et IV-6) une autre comparaison intéressante entre les résultats de la présente théorie et ceux de la solution analytique développée par Javaheri et Eslami (2000b) basée sur HPT, et celle de Zenkour et Mashat (2010) basée sur SPT. Ces tableaux présentent la différence de température critique $t_{cr} = 10^{-3}T_{cr}$ pour différentes valeurs du rapport a/b , de l'exposant de température γ et de l'indice de puissance k sous un chargement de température non linéaire ($a/h=5$ et 10).

Ces tableaux indiquent que nos résultats sont très satisfaisants.

Tableau IV-5 : Température critique de flambement d'une plaque FG sous un chargement non linéaire en fonction de l'indice de puissance k , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température γ avec $a/h=10$

k	Théories	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	Présente	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.17	20.01	40.03	73.39
	Théorie 1	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.16	20.00	40.01	73.35
	Théorie 2	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.17	20.01	40.03	73.39
	Théorie 3	5.11	10.22	18.75	12.80	25.61	46.96	25.63	51.26	93.99
1	Présente	2.10	4.31	8.19	4.95	10.14	19.25	8.97	18.38	34.87
	Théorie 1	2.1066	4.31	8.19	4.95	10.14	19.24	8.96	18.38	34.86
	Theory 2	2.1068	4.31	8.19	9.95	10.14	19.25	8.97	18.38	34.87
	Théorie 3	2.20	4.52	8.58	5.53	11.35	21.53	11.09	22.73	43.12
5	Présente	1.59	2.84	4.99	3.64	6.51	11.43	6.36	11.36	19.93
	Théorie 1	1.59	2.85	5.00	3.65	6.52	11.44	6.37	11.38	19.97
	Théorie 2	1.59	2.84	4.99	3.64	6.51	11.43	6.36	11.36	19.93
	Théorie 3	1.70	3.04	5.35	4.28	7.65	13.43	8.58	15.33	26.90
10	Présente	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.53	11.24	18.60
	Théorie 1	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	Théorie 2	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.53	11.24	18.60
	Théorie 3	1.80	3.11	5.14	4.54	7.81	12.92	9.09	15.64	25.88

Théorie 1 : Zenkour et Mashat (2010) basée sur HPT

Théorie 2 : Zenkour et Mashat (2010) basée sur SPT

Théorie 3 : Zenkour et Mashat (2010) basée sur CPT

Tableau IV-6 : Température critique de flambement d'une plaque FG sous un chargement non linéaire en fonction de l'indice de puissance k , le rapport de dimension a/b et de l'exposant de température γ avec $a/h=5$

k	Théories	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	Présente	16.74	33.48	61.38	32.89	65.79	120.62	48.65	97.30	178.39
	Théorie 1	16.73	33.47	61.36	32.86	65.72	120.49	48.53	97.07	177.97
	Théorie 2	16.74	33.48	61.38	32.89	65.79	120.62	48.65	97.30	178.39
	Théorie 3	20.50	41.00	75.18	51.28	102.56	188.03	102.57	205.15	376.12
1	Présente	7.45	17.28	28.99	15.09	30.93	58.68	22.97	47.08	89.30
	Théorie 1	7.45	15.28	28.98	15.08	30.90	58.62	22.92	46.98	89.11
	Théorie 2	7.45	15.28	28.99	15.09	30.93	58.68	22.97	47.08	89.30
	Théorie 3	8.87	18.18	34.48	22.19	45.49	86.30	44.41	91.02	172.65
5	Présente	5.36	9.57	16.81	10.14	18.10	31.77	14.49	25.87	45.40
	Théorie 1	5.37	9.59	16.83	10.16	18.15	31.85	14.52	25.93	45.51
	Théorie 2	5.36	9.57	16.81	10.14	18.10	31.77	14.49	25.87	45.40
	Théorie 3	6.86	12.26	21.52	17.18	30.68	53.85	34.39	61.39	107.75
10	Présente	5.53	9.52	15.75	10.23	17.61	29.13	14.35	24.69	40.85
	Théorie 1	5.54	9.53	15.76	10.24	17.62	29.15	14.34	24.68	40.82
	Théorie 2	5.53	9.52	15.75	10.23	17.61	29.13	14.35	24.69	40.85
	Théorie 3	7.27	12.51	20.70	18.20	31.31	51.80	36.41	62.65	103.64

Théorie 1 : Zenkour et Mashat (2010) basée sur HPT

Théorie 2 : Zenkour et Mashat (2010) basée sur SPT

Théorie 3 : Zenkour et Mashat (2010) basée sur CPT

Finalement, l'étude comparative menée montre que les résultats de la méthode proposée sont en très grande concordance avec ceux des méthodes analytiques existantes dans la littérature ce qui valide la précision de cette approche. Il est à noter que cette théorie de déformation de cisaillement qui est basée sur la position exacte de la surface neutre comprend quatre inconnus contre cinq dans le cas conventionnel SPT (Zenkour et Mashat (2010)) et HPT (Javaheri et Eslami (2002b)).

IV.3.2 Etude paramétrique

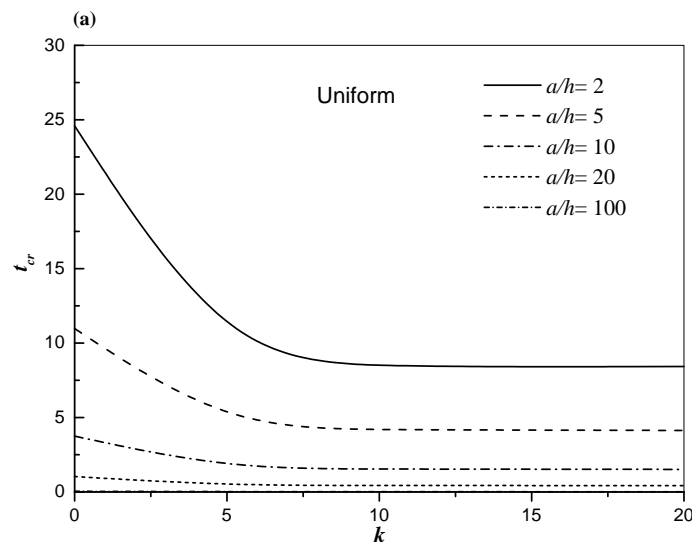
Dans cette section, afin d'étudier les effets des différents paramètres de la plaque et du chargement thermique sur la réponse de la plaque en terme de température critique de flambement, divers résultats sont présentés sur les figures IV-2 à IV-5.

La variation de la température critique de flambement d'une plaque FG Al/Al₂O₃ simplement appuyée et soumise à trois différents chargements thermiques est illustrée aux figures IV-2 et IV-3 en fonction de l'indice de puissance k , du rapport a/h et du rapport de dimension a/b respectivement.

A partir de ces figures, on constate que la température critique de flambement décroît rapidement dans la zone de $k=0$ (plaque entièrement en céramique) à $k=5$. En suite, plus l'indice k prend des valeurs supérieures, ces températures gardent des valeurs sensiblement constantes pour $k = \infty$ (plaque entièrement en métal).

Aussi, il est à noter que la différence de température critique de flambement t_{cr} décroît avec l'augmentation des valeurs du rapport a/h et inversement par rapport au rapport de dimension a/b .

La température critique de flambement de la plaque entièrement en céramique est supérieure à celle en FGM. Ceci s'explique par le fait que, la plaque en céramique est plus rigide que les autres. Les différences entre les types de chargement décroissent avec l'augmentation de a/h parce que la plaque devient de plus en plus mince.



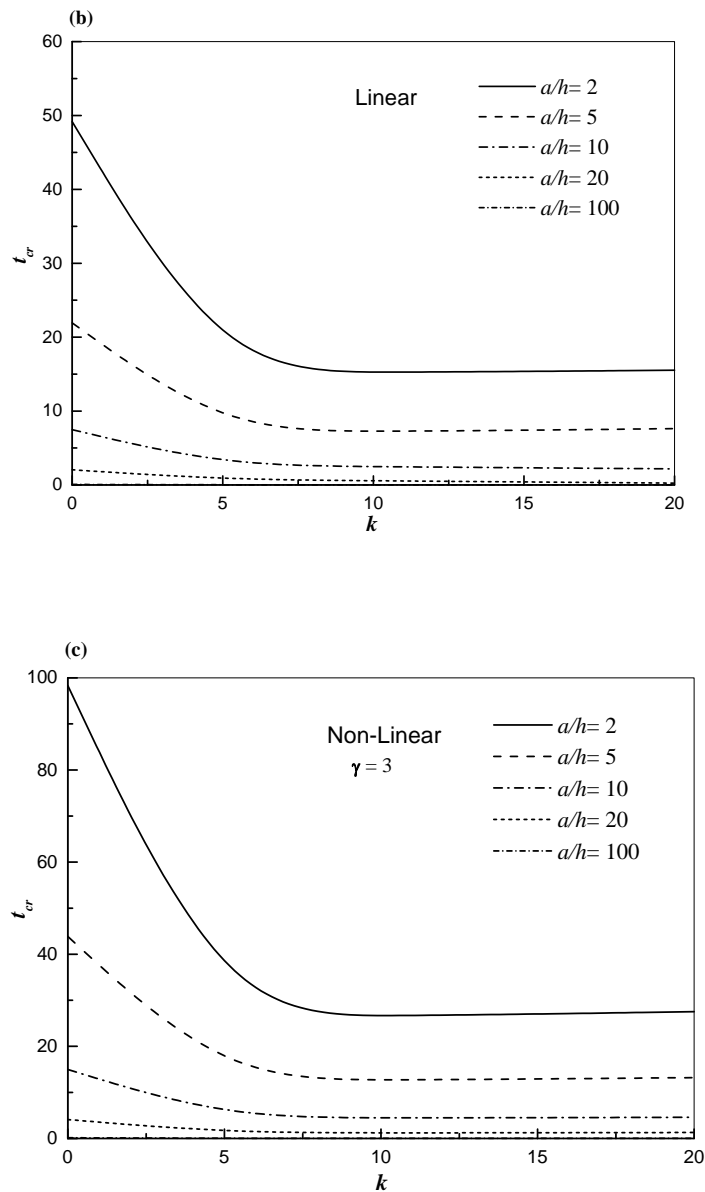
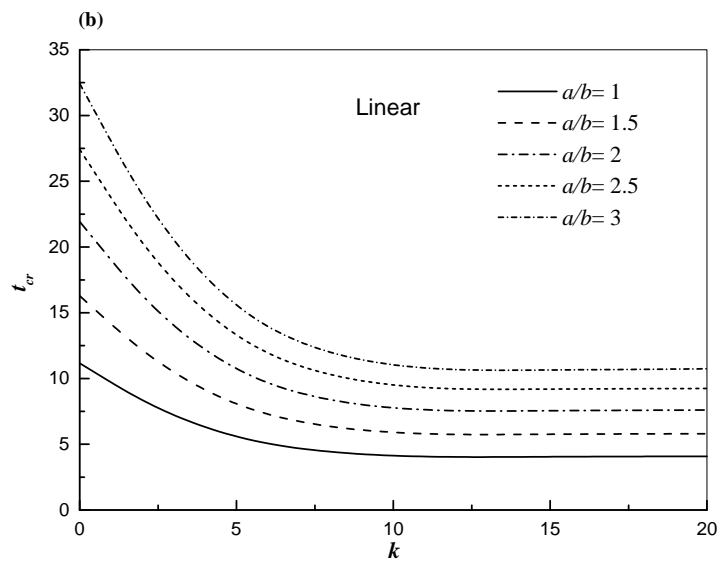
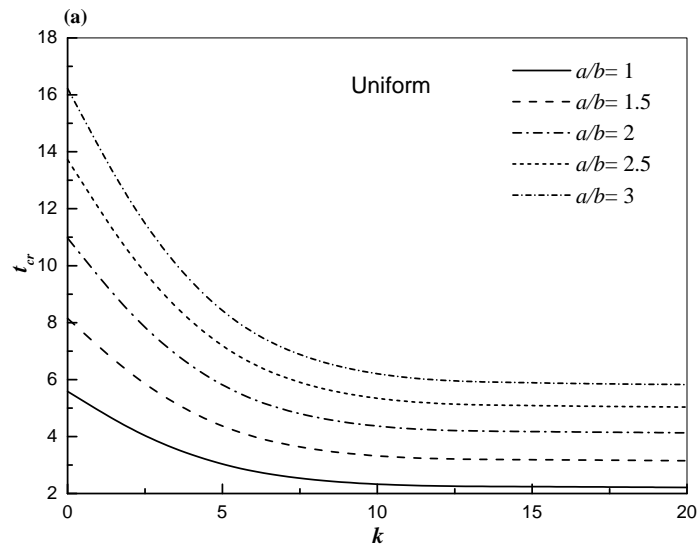


Figure IV-2 : Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG ($a/b=2$) en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs du rapport a/h .



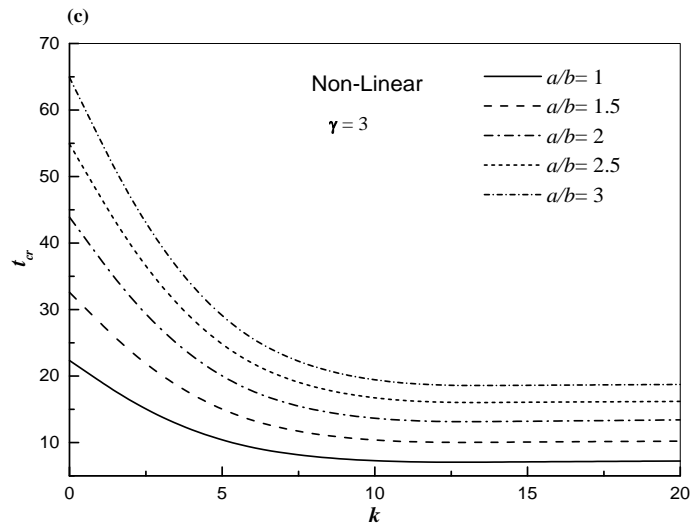


Figure IV-3 : Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG ($a/h=5$) en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs du rapport a/b .

La variation de la température critique de flambement t_{cr} en fonction des rapports a/h est a/b d'une plaque FG sollicitée par différents chargement thermique est indiquée sur les figures IV-4 et IV-5. Il est a constaté que mise à part le type de chargement, la différence de température critique de flambement t_{cr} décroît avec l'augmentation des valeurs du rapport a/h et la réduction des valeurs du rapport a/b . En plus, les valeurs de t_{cr} augmentent avec celles du paramètre de la non linéarité γ .

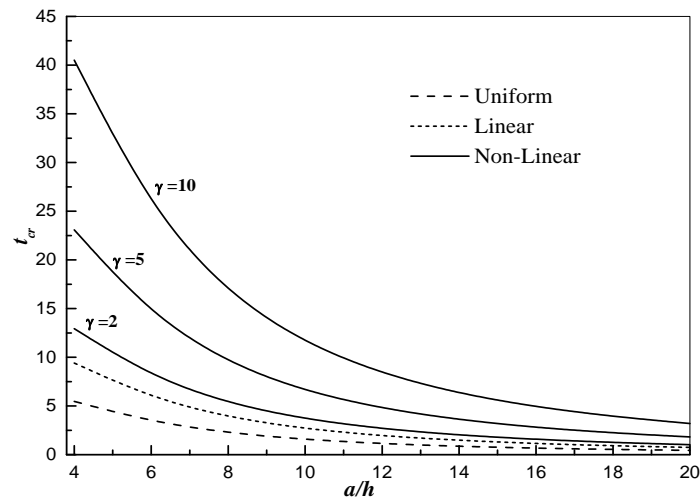


Figure IV-4 : Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG en fonction du rapport a/h pour différentes valeurs du paramètre de la non linéarité γ ($k=5$ et $a/b=2$)

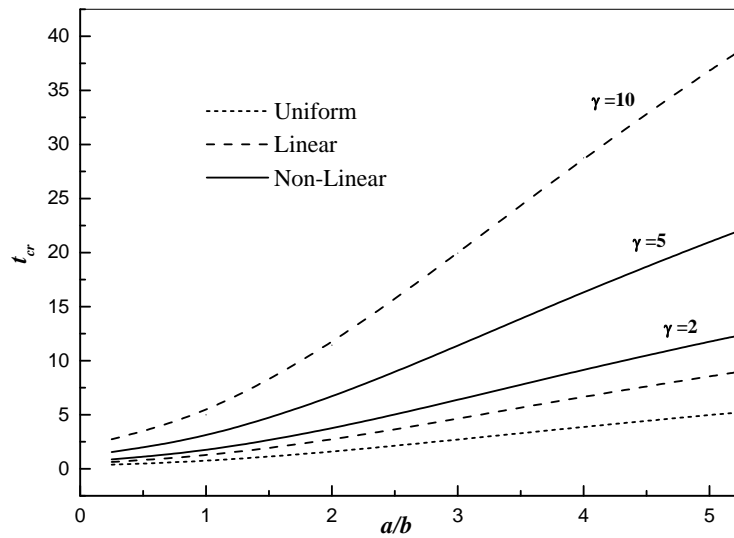


Figure IV-5 : Différence de température critique de flambement t_{cr} due aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire d'une plaque FG en fonction du rapport a/b pour différentes valeurs du paramètre de la non linéarité γ ($k=5$ et $a/h=10$)

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la stabilité au flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées sujettes aux variations de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur a été étudiée sur la base de la théorie sinusoïdale de déformation de cisaillement. Par la division du déplacement transversal en deux composantes une de flexion et l'autre de cisaillement, le nombre d'inconnus et des équations d'équilibre a été réduit à quatre. Les propriétés matérielles de la plaque ont été considérées comme variant selon l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. La position exacte de la surface neutre de la plaque a été déterminée. Une très bonne corrélation a été trouvée entre les résultats de la présente méthode et ceux de la littérature. Plusieurs études paramétriques ont été menées pour monter les effets des différents paramètres sur la température critique de flambement. Finalement, il est à noter que la solution proposée est non seulement fiable mais aussi une approche facile pour simuler le comportement au flambement des plaques FG. La formulation est aussi fiable pour les simulations en éléments finis (Curiel Sosa et al. 2013).

CHAPITRE V

MODELE THEORIQUE POUR L'ETUDE DE L'INSTABILITE THERMIQUE DES PLAQUES EPAISSES EN FGM SUR FONDATIONS ELASTIQUES

V.1 Introduction

Les plaques sur des fondations élastiques sont courantes dans les structures civiles. Pour décrire l'interaction entre la plaque et la fondation, plusieurs types de modèles de fondations ont été proposés. Le plus simple d'entre eux, c'est le modèle à un seul paramètre ou appelé encore modèle de Winkler (1867) Cependant, ce modèle est incapable de prendre en compte la continuité ou la cohésion du sol. Aussi, l'hypothèse qui stipule qu'il n'y a pas d'interaction entre les ressorts adjacents résulte de la négligence de l'influence du sol sur les bords de la plaque. Pour surmonter cet handicap, plusieurs modèles à deux paramètres ont été proposés. Un exemple d'entre eux, celui de Pasternak (1954) qui a ajouté une couche de cisaillement pour prendre en compte l'interaction entre les ressorts du modèle de Winkler (1867). Ce modèle est très utilisé pour décrire le comportement mécanique de l'interaction structure-fondation. Benyoucef et al. (2010) étudièrent la réponse en flexion des plaques FG épaisses reposant sur des fondations élastiques de Pasternak. Ait Atmane et al. (2010) ont présentés une analyse en vibration libre des plaques FG reposant sur fondation élastique à deux paramètres en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement des plaques.

Dans les structures composites traditionnelles, des plis sont stratifiés pour obtenir des propriétés mécaniques et thermiques supérieures. Cependant, le changement brutal des propriétés (mécaniques et thermiques) à l'interface entre les différents plis peut conduire à des contraintes inter-laminaires provoquant un délaminage, fissures et autres types d'endommagement mécaniques. Pour remédier à de tels défauts, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) avec des propriétés variant graduellement ont été proposées (Koizumi, 1997).

Ces nouveaux matériaux posent des thématiques intéressantes pour la mécanique de structures telle que le comportement au flambement et post flambement des structures FG sollicitées aux chargements mécanique, thermique et thermomécanique. Eslami et son groupe de travail (Javaheri et Eslami 2002a, Javaheri et Eslami 2002b, Javaheri et Eslami 2002c, Samsam et al. 2007, Samsam et al. 2005a, Samsam et al. 2006, Samsam et al. 2005b) ont traités une série de problèmes reliés au flambement linéaire des plaques FG rectangulaires sous chargement thermique et mécanique. Par l'utilisation d'une approche analytique, ils ont trouvés des expressions approchées pour les charges de flambement. Lanhe (2004) analyse la température critique et la différence de température critique des plaques épaisses simplement appuyées sur la base de la théorie de déformation du premier ordre dans le sens Von Karmen. Pour des plaques modérément épaisses, il a été trouvé que la déformation de cisaillement transverse a des effets considérables sur la différence de température critique de flambement. Le Flambement thermique de plaques obliques FG

simplement appuyées a été étudié en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre par Ganapati et Prakash (2006). Les effets du rapport d'épaisseur, de l'indice matériel et de l'angle d'inclinaison sur la différence de température critique de flambement ont été présentés.

Na et Kim (2006) investiguèrent le post-flambement thermique des plaques FG par l'utilisation de la méthode des éléments finis en 3D. Zhao et al. (2009) et Zhao et Liew (2009) étudièrent le comportement au flambement et post-flambement des plaques FG par l'utilisation de la méthode kp-Ritz. Matsunaga (2009) présente une théorie de déformation à ordre élevé pour l'analyse du flambement thermique des plaques. En utilisant la méthode de développement en série de puissance, un ensemble d'équations fondamentales de plaques FG rectangulaires a été dérivé.

La théorie de déformation de cisaillement trigonométrique des plaques a été employée par Zenkour et Sobhy (2011) pour étudier le flambement thermique des plaques reposant sur une fondation élastique de Pasternak. Bouazza et al. (2010) étudièrent le flambement thermo-élastique d'une plaque FG par l'utilisation de la théorie des plaques du premier ordre. Les effets du changement des caractéristiques des plaques, la composition matérielle et la fraction volumique des constituants sur la différence de température critique du flambement d'une plaque simplement appuyée ont été aussi étudiées.

Les propriétés matérielles des plaques fonctionnellement graduées varient à travers l'épaisseur, la surface neutre de telles plaques peut ne pas coïncider avec sa surface médiane géométrique. Par conséquent, les déformations de flexion et celles de membrane sont couplées. Quelques chercheurs (Morimoto et al., Abrate 2008, Zhang et Zhou 2008, Saidi et Jomehzadeh 2009) ont montré qu'il n'y a pas de couplage flexion-membrane dans les équations constitutives si la surface de référence est bien choisie.

Le but de ce chapitre est de développer une théorie de déformation de cisaillement efficace basée sur la position exacte de la surface neutre pour l'analyse de l'instabilité (flambement) thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (modèle de Pasternak). Par l'introduction de la surface neutre physique, le terme de couplage flexion-membrane est éliminé dans les équations différentielles. Cette théorie raffinée est basée sur l'hypothèse que le déplacement transversal consiste en de composantes de flexion et de cisaillement pour les quelles celle de flexion ne contribue pas dans les forces de cisaillement et vice versa. Seulement quatre termes de déplacements inconnus sont utilisés dans la présente théorie contre cinq dans les autres travaux.

Les propriétés matérielles sont graduées à travers l'épaisseur selon une simple loi de distribution en fonction de la fraction volumique des constituants. Comme dans le chapitre précédent, Les propriétés matérielles effectives sont estimées en utilisant une loi de mélange.

La précision des résultats de la présente méthode est vérifiée par leurs comparaisons avec d'autres issus de la littérature. En outre, une étude paramétrique est menée pour examiner les effets de l'indice de puissance, le rapport d'épaisseur, les coefficients de rigidité de la fondation et les types de chargement thermique sur la température critique de flambement des plaques rectangulaires.

V.2. Formulation du problème

V.2.1 Surface neutre physique

Dans cette section, la même plaque FGM utilisée dans le chapitre précédent est retenue dans la présente étude. Nous rappelons toute fois que cette plaque est faite d'un mélange de céramique et de métal.

La fraction volumique est définie de la même manière que le chapitre IV et est donnée par :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (V-1)$$

Les indices k , z_{ms} et z_{ns} gardent les mêmes définitions.

Les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FG notées P , en fonction de la coordonnée d'épaisseur sont données par :

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (V-2)$$

La définition de la position de la surface neutre reste la même et est formulée comme suit :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (V-3)$$

V.2.2 Modèle théorique

Considérons une plaque en FGM d'épaisseur h de longueur a et de largeur b reposant sur une fondation élastique à deux paramètres (modèle de Pasternak). (Voir figure V-1)

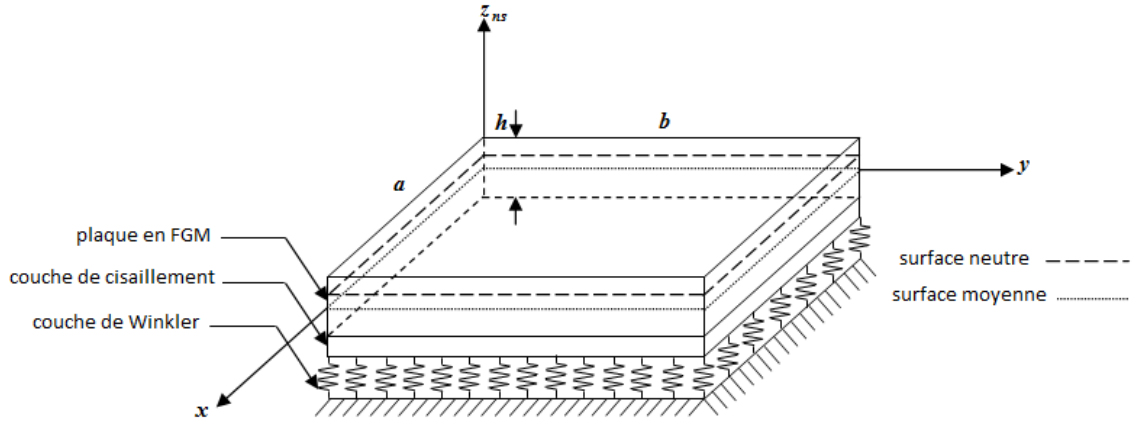


Figure V-1 : Système de coordonnées et géométrie de la plaque FGM reposant sur une fondation de Pasternak

V.2.2.1 Hypothèses de la présente théorie

Les hypothèses retenues pour la présente théorie sont la même que celle du chapitre précédent et s'énoncent comme suit :

- L'origine du système de coordonnées cartésien est pris au niveau de la surface neutre.
- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, par conséquent, les contraintes générées sont infinitésimales ;
- Le déplacement transversal w comprend deux composantes, une de flexion w_b et l'autre de cisaillement w_s et ces dernières sont fonction des coordonnées x , et y seulement :

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (V-4)$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes en plan σ_x et σ_y .
- Les déplacements « u » et « v » dans les directions x et y respectivement consiste en composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (V-5)$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires à ceux données par la théorie classique des plaques. Ainsi, les expressions de u_b et v_b sont données par :

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (V-6)$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s induisent, avec la composante w_s , une variation parabolique des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et par conséquent des contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} sont nulles aux bords de la plaque. Par conséquent, les expressions de u_s de v_s peuvent être données par :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (V-7)$$

Où :

$$f(z_{ns}) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h}(z_{ns} + C)\right) - (z_{ns} + C)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (V-8)$$

V.2.2.2 Cinématique

En se basant sur les hypothèses énumérées précédemment, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations (V-4 à V-8) comme suit :

$$u(x, y, z_{ns}) = u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (V-9a)$$

$$v(x, y, z_{ns}) = v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (V-9b)$$

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (V-9c)$$

Les équations non linéaires déplacement-déformation de Von Karman sont formulées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z_{ns}) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (V-10)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (V-11a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (V-11b)$$

Et

$$g(z_{ns}) = 1 - \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} \quad (V-11c)$$

V.2.2.3 Relations constitutive

La plaque est soumise à un chargement thermique $T(x, y, z_{ns})$. Les relations constitutives linéaires sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (V-12)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont respectivement les composantes de contraintes et de déformations. Les coefficients de rigidités peuvent être exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2}, \quad (V-12a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1-\nu^2}, \quad (V-12b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}, \quad (V-12c)$$

V.2.2.4 Les équations de stabilité

Les équations d'équilibre d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique type Pasternak sous un chargement thermique peuvent être trouvées sur la base de l'énergie potentielle stationnaire. L'énergie potentielle totale de la plaque FG « V », peut être exprimée comme suit :

$$V = U + U_F \quad (V-13)$$

U est l'énergie de déformation totale de la plaque qui est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} [\sigma_x (\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y (\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dz ns dy dx, \quad (V-14)$$

U_F est l'énergie de déformation due à la fondation élastique de Pasternak, qui est formulée comme suit (Ait Atmane 2010) :

$$U_F = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b f_e (w_b + w_s) dy dx \quad (V-15)$$

Avec « f_e » la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation de Pasternak, elle est donnée par :

$$f_e = K_w (w_b + w_s) - K_g \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (V-16)$$

« K_w » est la rigidité de la fondation de Winkler et « K_g » est une constante indiquant l'effet de l'interaction de cisaillement.

En utilisant les équations (V-10), (V-11) et (V-12) et en appliquant le principe des travaux virtuels pour minimiser l'énergie potentielle totale résultant dans les expressions des équations d'équilibre de la plaque reposant sur une fondation élastique de Pasternak, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} - f_e &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} - f_e &= 0 \end{aligned} \quad (V-17)$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right] \quad (V-18)$$

et

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (V-19a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}. \quad (V-19b)$$

En utilisant l'équation (V-12) dans l'équation (V-19), les efforts résultants de la plaque FG peuvent être reliés aux déformations par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (V-20)$$

Où :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (V-21a)$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \quad (V-21b)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (V-21c)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (V-21d)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (V-21e)$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (V-21f)$$

Avec A_{ij} , D_{ij} , etc., sont définies comme étant les rigidités de la plaque et sont données par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} Q_{11} \left(1, z^2, f(z_{ns}), z_{ns}, f(z_{ns}), f^2(z_{ns}) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (V-22a)$$

Et

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (V-22b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (V-22c)$$

Les efforts et les moments résultants, $N_x^T = N_y^T$, $M_x^{bT} = M_y^{bT}$, et $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ dus au chargement thermique sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h-c}{2}}^{\frac{h-c}{2}} \frac{E(z_{ns})}{1-\nu} \alpha(z_{ns}) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (V-23)$$

En appliquant le même principe cité au chapitre IV (critère de l'équilibre adjacent, paragraphe IV-2-1-4, équation IV-22) et en utilisant les équations (V-17) et (IV-22), les équations de stabilité deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \end{aligned} \quad (V-24)$$

Avec

$$\bar{N}^1 = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (V-25a)$$

$$f_e^1 = K_w (w_b^1 + w_s^1) - K_g \nabla^2 (w_b^1 + w_s^1) \quad (V-25b)$$

Les termes N_x^0 , N_y^0 et N_{xy}^0 sont les forces de pré-flambement résultantes.

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ms})E(z_{ms})T}{1-\nu} dz_{ms}, \quad N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{V-26})$$

V.2.3 Solution trigonométrique pour le flambement thermique

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la solution de l'équation (V-24), pour cela les conditions aux limites suivantes sont utilisées :

$$v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \quad \text{at } x=0, a, \quad (\text{V-27a})$$

$$u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \quad \text{at } y=0, b. \quad (\text{V-27b})$$

La solution approximative suivante satisfait à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{V-28})$$

Où U_{mn}^1 , V_{mn}^1 , W_{bmn}^1 , et W_{smn}^1 sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$. En substituant l'équation (IV-28) dans (IV-26), nous aurons :

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = 0, \quad (\text{V-29})$$

Où $\{\Delta\}$ est un vecteur donné par :

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1, W_{smn}^1\}^t \quad (\text{V-30})$$

Et $[\mathbf{K}]$ est une matrice symétrique donnée par :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{V-31})$$

Dans la quelle :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\
 a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\
 a_{13} &= 0 \\
 a_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\
 a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\
 a_{23} &= 0 \\
 a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\
 a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w) \\
 a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w) \\
 a_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 + \\
 &\quad K_g(\lambda^2 + \mu^2) + K_w)
 \end{aligned} \tag{V-32}$$

Par l'application de l'approche de condensation pour éliminer les coefficients associés avec les déplacements en plan, l'équation (V-29) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{V-33}$$

Avec:

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, [K^{12}] = \begin{bmatrix} 0 & a_{14} \\ 0 & a_{24} \end{bmatrix}, [K^{22}] = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{V-34a}$$

$$\Delta^1 = \begin{Bmatrix} U_{mm}^1 \\ V_{mm}^1 \end{Bmatrix}, \Delta^2 = \begin{Bmatrix} W_{bmn}^1 \\ W_{smn}^1 \end{Bmatrix} \tag{V-34b}$$

L'équation (V-33) représente une paire d'équations matricielles

$$\begin{aligned}
 [K^{11}]\Delta^1 + [K^{12}]\Delta^2 &= 0 \\
 [K^{12}]^T\Delta^1 + [K^{22}]\Delta^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{V-35b}$$

Résolvant l'équation (V-35a) pour Δ^1 et remplaçant le résultat dans l'équation (V-35b), la solution suivante est ainsi obtenue :

$$[\bar{K}^{22}]\Delta^2 = 0 \tag{V-36}$$

Où:

$$\left[\bar{\mathbf{K}}^{22} \right] = \left[\mathbf{K}^{22} \right] - \left[\mathbf{K}^{12} \right]^T \left[\mathbf{K}^{11} \right]^{-1} \left[\mathbf{K}^{12} \right] = \begin{bmatrix} \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{b}_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{V-37a})$$

Et

$$\begin{aligned} \bar{a}_{33} &= a_{33}, \quad \bar{a}_{34} = a_{34} \\ \bar{a}_{43} &= a_{34}, \quad \bar{b}_{44} = a_{44} - a_{14} \frac{b_1}{b_0} - a_{24} \frac{b_2}{b_0} \\ b_0 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad b_1 = a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}, \quad b_2 = a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14} \end{aligned} \quad (\text{V-37b})$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice de l'équation (V-36) doit être nul. Ceci nous donne l'expression suivante de la charge thermique de flambement.

$$N_x^0 = N_y^0 = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} \frac{a_{33}b_{44} - a_{34}^2}{a_{33} + a_{44} - 2a_{34}} \quad (\text{V-38})$$

V.2.3.1 Chargement thermique

La plaque FG est soumise au même cas de chargement décrit au chapitre IV et qui varient suivant l'épaisseur. Ils sont donnés respectivement par les équations IV-39a, IV-40 et IV-41a pour le chargement uniforme, linéaire et non linéaire.

V.3. Résultats Numérique et Discussion

La plaque FG est faite d'un mélange d'Aluminium et d'Alumina. Les propriétés matérielles sont les suivantes :

- Metal (Aluminium, Al): $E_M = 70 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\alpha_M = 23.10^{-6} / ^\circ\text{C}$; $k_M = 204 \text{ W/mK}$.
- Ceramic (Alumina, Al_2O_3): $E_C = 380 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\alpha_C = 7.4 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$; $k_C = 10.4 \text{ W/mK}$.

Pour les variations de température linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur, la température augmente de 5°C dans la surface de la plaque riche en métal ($T_m = 5^\circ\text{C}$).

Le coefficient de correction de cisaillement pour la théorie FPT est pris égal à $5/6$.

Les paramètres adimensionnels de Winkler et Pasternak de la fondation élastique ainsi que la différence de température critique de flambement utilisés dans la présente étude sont donnés par :

$$k_w = \frac{a^4}{D} K_w, \quad k_g = \frac{a^2}{D} K_g, \quad T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr}$$

Avec $D = E_C h^3 / [12(1-\nu^2)]$

V.3.1 Validation des résultats

Dans le but de démontrer la précision de la présente méthode, la corrélation entre la présente théorie et les théories d'ordre élevé, du premier ordre et la théorie classique des plaques est établie. La description des différents modèles de déplacement est présentée dans le tableau V-1.

Tableau V-1 : Différents modèles de déplacement et nombre de fonctions inconnus

Modèles	Théories	Nombre de fonctions inconnus
CPT	Théorie classique des plaques (Classical plate theory)	3
FPT	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First-order shear deformation theory) (Zenkour et Sobhy 2011)	5
TPT	Théorie de déformations de cisaillement trigonométrique (trigonometric shear deformation plate theory) (Zenkour et Sobhy 2011)	5
HPT	Théorie de déformations de cisaillement d'ordre élevé (Higher order shear deformation theory) (Zenkour et Sobhy 2011, Reddy 2000)	5
Présente théorie	Présente théorie hyperbolique	4

Une comparaison des résultats de la présente méthode à quatre (04) fonctions inconnus avec d'autre théorie où le nombre d'inconnus est égal à cinq (05) est présentée dans le tableau V-2. La plaque est en FGM ($k=1$) sans fondation, et soumise à une variation uniforme à travers son épaisseur.

Il est clair que les résultats du présent modèle sont identiques aux autres, ce qui confirme la grande précision de la présente formulation

Tableau V-2 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG sans fondation soumise à une variation uniforme de température en fonction des rapports « a/h » et « a/b »

a/b	Théories	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
1	Présente	0.758423	0.196267	0.049501	0.022037	0.0124029	0.0079400
	TPT (1)	0.758451	0.196269	0.049502	0.022037	0.012403	0.007940
	HPT (1)	0.758396	0.196265	0.049502	0.022037	0.012403	0.007940
	CPT (1)	0.794377	0.198594	0.049649	0.022066	0.012412	0.007944
2	Présente	1.77567	0.482196	0.123208	0.054983	0.0309729	0.0198359
	TPT (1)	1.775899	0.482206	0.123209	0.054984	0.030973	0.019836
	HPT (1)	1.775555	0.482184	0.123208	0.054984	0.030973	0.019836
	HPT (2)	1.7756	0.48218	0.12321	0.05498	0.03097	0.01984
	FPT (3)	1.8072	0.48451	0.12336	0.05501	0.03098	0.01984
	CPT (1)	1.985943	0.496486	0.124121	0.055165	0.031030	0.019859
3	Présente	3.212203	0.937430	0.244617	0.109608	0.0618316	0.0396248
	TPT (1)	3.213338	0.937475	0.244620	0.109609	0.061838	0.039625
	HPT (1)	3.211975	0.937389	0.244614	0.109608	0.061831	0.039625
	CPT (1)	3.971886	0.992972	0.248243	0.110330	0.062061	0.039719
4	Présente	4.81864	1.53365	0.411643	0.185484	0.1048428	0.0672509
	TPT (1)	4.822477	1.533805	0.411650	0.185485	0.104843	0.067251
	HPT (1)	4.818675	1.533556	0.411634	0.185482	0.104842	0.067251
	HPT (2)	4.8187	1.5336	0.41163	0.18548	0.10484	0.06725
	FPT (3)	5.0530	1.5571	0.41333	0.18583	0.10495	0.06730
	CPT (1)	6.752207	1.688052	0.422013	0.187561	0.105503	0.067522

- (1) TPT : (Zenkour et Sobhy 2011)
 (1) HPT : (Zenkour et Sobhy 2011)
 (1)CPT : (Zenkour et Sobhy 2011)
 (2)HPT: (Samsam Shariat et M. R. Eslami 2007)
 (3) FPT : (Lanhe 2004)

Une autre étude comparative pour l'évaluation de la température critique de flambement entre l'actuelle méthode qui est fondée sur la position exacte de la surface neutre et celle développée par Zenkour et Sobhy (2011) utilisant TPT, FPT et CPT est présentée aux tableaux V-3 à V-5 pour différents chargement thermique. En plus, ces tableaux donnent les valeurs de la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG sans ou avec fondation élastique en fonction du rapport « a/h » et de l'indice de puissance « k ». A partir des résultats présentés, on constate qu'il ya une très bonne concordance. Plus encore, les valeurs de T_{cr} de cette formulation sont très proches de celle fournis par HPT et des différences significatives sont enregistrées entre les théories de déformation de cisaillement et la théorie classique des plaques soulignant l'effet de déformation de cisaillement.

Finalement, l'étude comparative menée révèle que les résultats obtenus à partir de la présente méthode sont en très grande concordance avec ceux de la littérature ce qui valide sa

précision. En plus, cette dernière ne comprend que quatre (04) inconnus au lieu de cinq (05) pour les autres.

Tableau V-3 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque rectangulaire FG soumise à une variation *uniforme* de température en fonction des rapports « a/h » et de l'indice de puissance « k »

		$k_w = 0, k_g = 0$			$k_w = 10, k_g = 0$			$k_w = 0, k_g = 10$		
k	Théories	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20
0	TPT	5.58556	1.61882	0.42154	5.76109	1.66270	0.43252	9.22610	2.52896	0.64908
	HPT	5.58344	1.61868	0.42154	5.75899	1.66257	0.43251	9.22398	2.52882	0.64907
	FPT	5.58069	1.61862	0.42153	5.75622	1.66251	0.43251	9.22123	2.52876	0.64907
	CPT	6.83964	1.70991	0.42748	7.01519	1.75380	0.43845	10.48019	2.62005	0.65501
	Présente	5.58393	1.61875	0.42154	5.75947	1.66263	0.43251	9.22448	2.52888	0.64907
1	TPT	2.67241	0.75845	0.19627	2.83603	0.79935	0.20649	6.06558	1.60674	0.40834
	HPT	2.67153	0.75840	0.19627	2.83515	0.79930	0.20649	6.06470	1.60669	0.40835
	FPT	2.67039	0.75837	0.19626	2.83400	0.79930	0.20649	6.06356	1.60667	0.40834
	CPT	3.17751	0.79438	0.19859	3.34112	0.83528	0.20882	6.57068	1.64267	0.41067
	Présente	2.67173	0.758423	0.19626	2.83534	0.79932	0.20649	6.06491	1.60671	0.40834
5	TPT	2.27131	0.67895	0.17851	2.49808	0.73564	0.19268	6.97440	1.85472	0.47245
	HPT	2.27501	0.67931	0.17854	2.50179	0.73600	0.19271	6.97810	1.85508	0.47248
	FPT	2.35948	0.68678	0.17905	2.58625	0.74348	0.19322	7.06257	1.86255	0.47229
	CPT	2.90629	0.72657	0.18164	3.13305	0.78326	0.19582	7.60938	1.90234	0.47559
	Présente	2.27935	0.679719	0.17856	2.50612	0.73641	0.19273	6.98244	1.85549	0.47250
10	TPT	2.27551	0.69254	0.18313	2.53146	0.75653	0.19913	7.58356	2.01955	0.51489
	HPT	2.27678	0.69269	0.18314	2.53273	0.75668	0.19914	7.58483	2.01970	0.51490
	FPT	2.36822	0.70108	0.18373	2.62417	0.76507	0.19972	7.67626	2.02809	0.51548
	CPT	2.98770	0.74693	0.18673	3.24365	0.81091	0.20273	8.29575	2.07394	0.51848
	Présente	2.27936	0.69295	0.18316	2.53530	0.75694	0.19915	7.58740	2.01996	0.51491

Tableau V-4 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque rectangulaire FG soumise à une variation *linéaire* de température en fonction des rapports « a/h » et de l'indice de puissance « k »

		$k_w = 0, k_g = 0$			$k_w = 10, k_g = 0$			$k_w = 0, k_g = 10$		
k	Théories	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20
0	TPT	11.16112	3.22764	0.83309	11.51220	3.31541	0.85503	18.44220	5.04791	1.28816
	HPT	11.15688	3.22736	0.83307	11.50796	3.31513	0.85501	18.43797	5.04764	1.28814
	FPT	11.15138	3.22725	0.833306	11.50246	3.31502	0.85501	18.43246	5.04752	1.28814
	CPT	13.66929	3.40982	0.84496	14.02036	3.49759	0.86690	20.95037	5.23009	1.30002
	Présente	11.15787	3.22750	0.83308	11.5089	3.31527	0.85502	18.43896	5.04777	1.28814
1	TPT	5.00264	1.41307	0.35872	5.30948	1.48978	0.37789	11.36642	3.00402	0.75645
	HPT	5.00099	1.41297	0.35871	5.30784	1.48968	0.37789	11.36477	3.00391	0.75645
	FPT	4.99885	1.41292	0.35871	5.30570	1.48964	0.37789	11.36263	3.00387	0.75645
	CPT	5.94993	1.48045	0.36308	6.25678	1.55716	0.38226	12.31372	3.07140	0.76082
	Présente	5.00137	1.41302	0.358715	5.30822	1.48973	0.37789	11.36515	3.00396	0.756451
5	TPT	3.90098	1.6006	0.28966	4.29132	1.25765	0.32306	11.99637	3.18391	0.80462
	HPT	3.90735	1.16069	0.29871	4.29770	1.25827	0.32310	12.00275	3.18453	0.80467
	FPT	4.05274	1.17354	0.29959	4.44308	1.27113	0.32399	12.14816	3.19739	0.80555
	CPT	4.99396	1.24204	0.30405	5.38430	1.33962	0.32845	13.08936	3.26588	0.81002
	Présente	3.91482	1.16138	0.29875	4.30516	1.25897	0.32315	12.01022	3.18523	0.80471
10	TPT	4.02350	1.21837	0.31566	4.47705	1.33176	0.34401	13.42969	3.56992	0.90355
	HPT	4.02576	1.21864	0.31568	4.47930	1.33203	0.34403	13.43194	3.57019	0.90357
	FPT	4.18778	1.23350	0.31672	4.64132	1.34688	0.34506	13.59396	3.58504	0.90460
	CPT	5.28555	1.31474	0.32204	5.73910	1.42813	0.35039	14.691174	3.66629	0.90993
	Présente	4.03031	1.21910	0.31571	4.48386	1.33249	0.34406	13.43650	3.57065	0.90360

Tableau V-5 : Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque rectangulaire FG soumise à une variation *non linéaire* ($\gamma = 3$) de température en fonction des rapports « a/h » et de l'indice de puissance « k »

		$k_w = 0, k_g = 0$			$k_w = 10, k_g = 0$			$k_w = 0, k_g = 10$		
k	Théories	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20	$a/h = 5$	10	20
0	TPT	22.32223	6.45528	1.66618	23.02439	6.63082	1.71006	36.88440	10.09582	2.57631
	HPT	22.31376	6.45473	1.66614	23.01592	6.63027	1.71003	36.87594	10.09527	2.57628
	FPT	22.30276	6.45450	1.66614	23.00491	6.63003	1.71002	36.86493	10.09527	2.57627
	CPT	27.33857	6.81964	1.68991	28.04073	6.99518	1.73380	41.90074	10.46019	2.60005
	Présente	22.31575	6.45501	1.66616	23.01791	6.63055	1.71004	36.87792	10.09555	2.57629
1	TPT	10.00817	2.82696	0.71764	10.62205	2.98043	0.75601	22.73943	6.00978	1.51334
	HPT	10.00488	2.82676	0.71763	10.61875	2.98022	0.75600	22.73614	6.00957	1.51333
	FPT	10.00060	2.82667	0.71763	10.61447	2.98014	0.75600	22.73185	6.00948	1.51333
	CPT	11.90332	2.96176	0.72637	12.51719	3.11523	0.76474	24.63458	6.14457	1.52207
	Présente	10.00565	2.82686	0.71763	10.61952	2.98033	0.75600	22.73691	6.00967	1.51334
5	TPT	6.77655	2.01520	0.51882	7.45464	2.18472	0.56120	20.83942	5.53091	1.39775
	HPT	6.78763	2.01628	0.51889	7.46571	2.18580	0.56127	20.85050	5.53199	1.39782
	FPT	7.04019	2.03861	0.52043	7.71827	2.20813	0.56281	21.10305	5.55433	1.39936
	CPT	8.67523	2.15759	0.52819	9.35331	2.32711	0.57057	22.73809	5.67331	1.40711
	Présente	6.80061	2.01749	0.51897	7.47869	2.18701	0.56135	20.86347	5.53321	1.39790
10	TPT	6.92562	2.09717	0.54335	7.70631	2.29235	0.59214	23.11642	6.14487	1.55531
	HPT	6.92950	2.09763	0.54338	7.71019	2.29281	0.59218	23.12029	6.14533	1.55531
	FPT	7.20839	2.12321	0.54516	7.98908	2.31838	0.59396	23.39918	6.17091	1.55709
	CPT	9.09798	2.26306	0.55433	9.87867	2.45823	0.60312	25.28877	6.31075	1.56625
	Présente	6.93735	2.09843	0.54344	7.71804	2.29360	0.59223	23.12814	6.14613	1.55536

Remarque : Dans les tableaux V-3 au V-5, TPT, HPT, FPT et CPT sont données par (Zenkour et Sobhy 2011)

V.3.2 Etude paramétrique

Dans cette section, pour examiner les effets des différents paramètres de la plaque et de la fondation élastique sur la température du flambement thermique, des résultats sous forme de graphes explicite sont présentés sur les figures V-2 à V-8.

V.3.2.1 Effet de l'indice de puissance sur la position de la surface neutre

Dans le but de mieux comprendre la position de la surface neutre, la variation du paramètre adimensionnel C/h en fonction de l'indice de puissance K est exposée sur la figure V-2. Il a constaté que lorsque l'indice K prend des valeurs de zéro (plaque entièrement en céramique) ou tendent vers l'infini (plaque entièrement métallique), la position de la surface neutre coïncide avec celle de la surface moyenne.

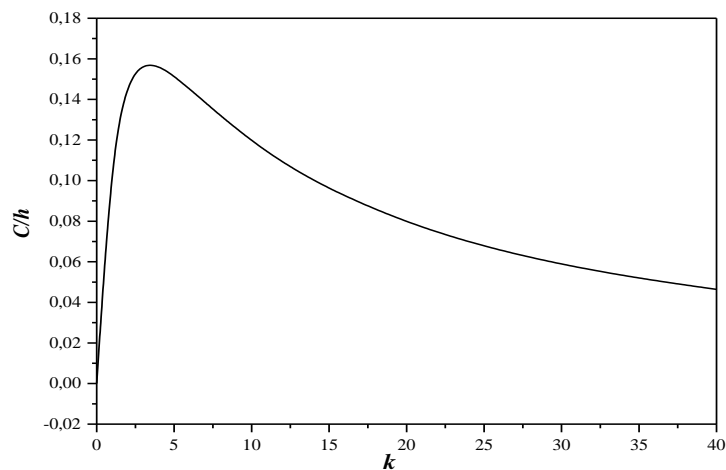
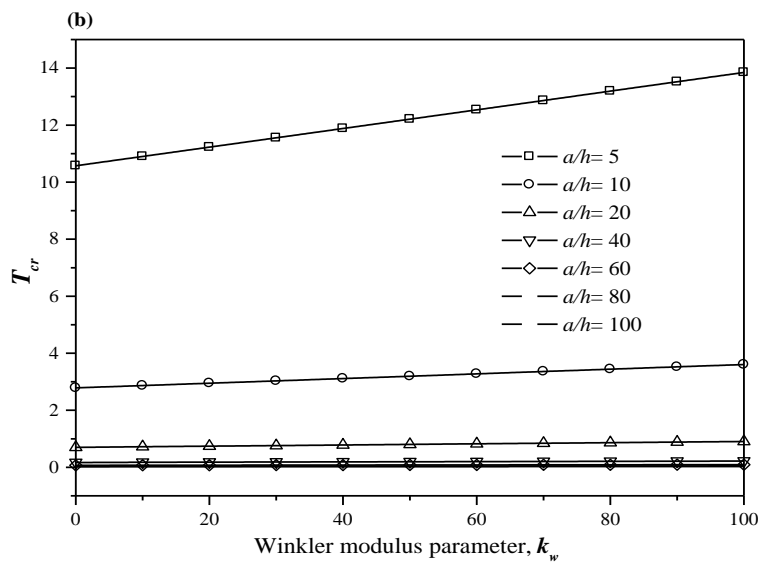
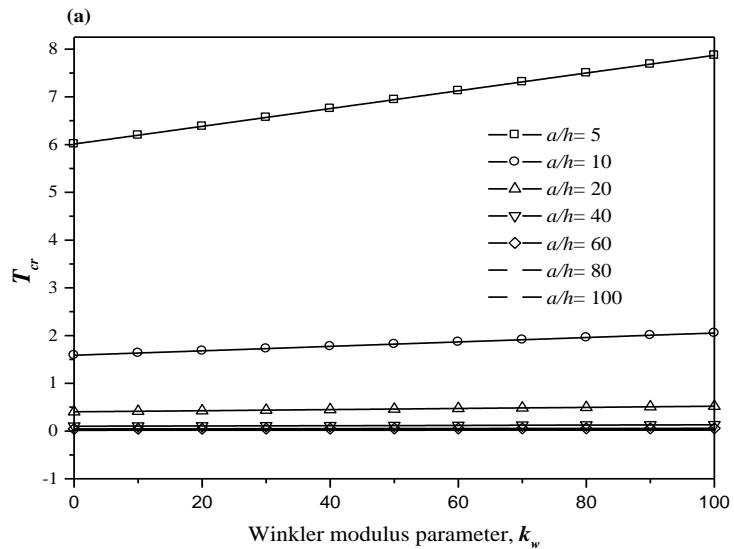


Figure V-2 : Variation de la position de la surface neutre en fonction de l'indice de puissance K

V.3.2.2 Effet du paramètre de Winkler

Sur la figure V-3, on représente les effets du rapport d'épaisseur a/h et du paramètre de Winkler K_w sur la température critique de flambement. Ces résultats sont obtenus pour des valeurs de $k=2$ et $K_g=10$.



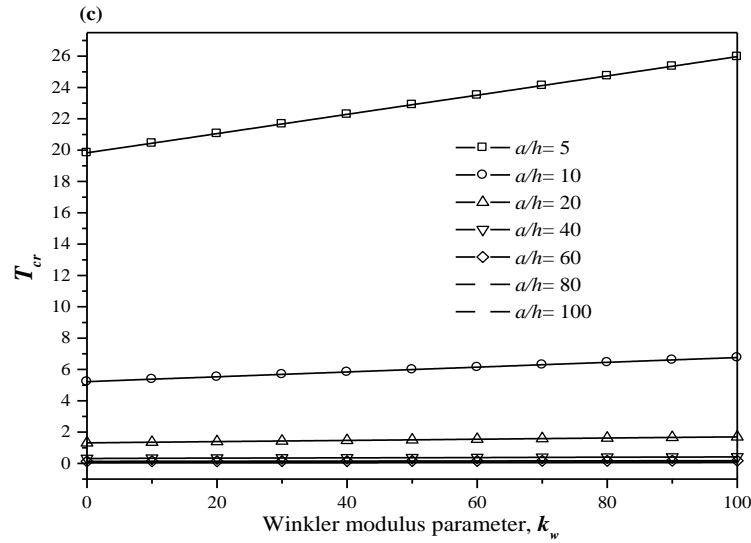


Figure V-3: Effet du paramètre de la fondation de Winkler « K_w » sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport d'épaisseur a/h avec $k_g = 10$ and $k = 2$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ; (c) température non linéaire ($\gamma = 3$)

A partir de ces figures, on constate que, quelque soit le type de chargement, la température critique de flambement augmente avec l'augmentation du paramètre K_g pour toutes les valeurs du rapport a/h de la plaque rectangulaire FG et plus particulièrement lorsque celle-ci est épaisse. Ceci implique que pour une plaque FG, il y aurait beaucoup de changement des valeurs de température critique de flambement à partir d'un support élastique souple à un autre dur.

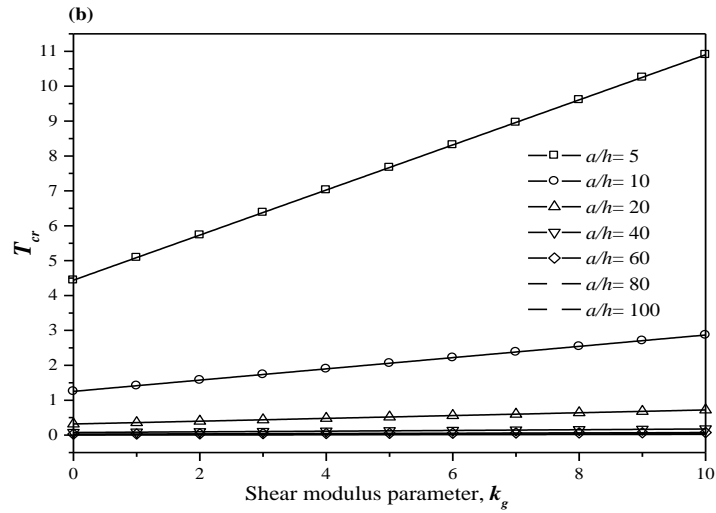
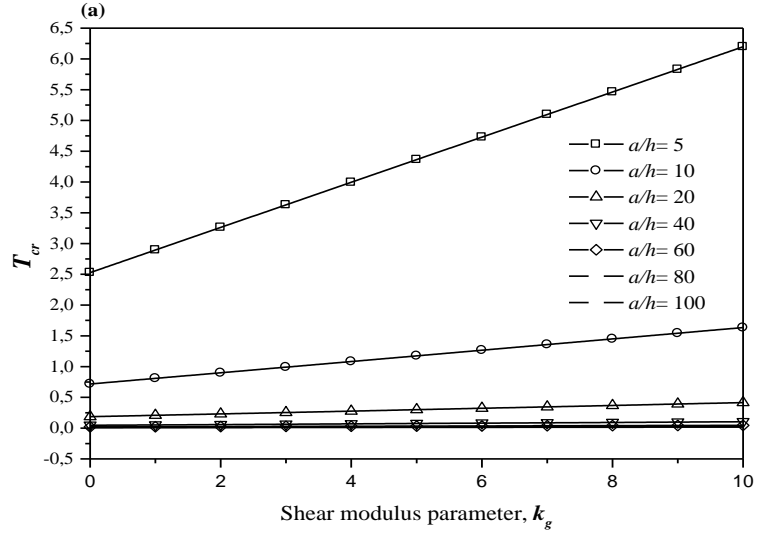
En plus, la variation de la température critique de flambement est plus affectée par le rapport a/h . Pour une plaque mince, la température critique de flambement est moins affectée par le paramètre K_g comparativement à une autre plus épaisse.

V.3.2.3 Effet du paramètre de cisaillement de Pasternak

La figure V-4 montre l'effet du rapport d'épaisseur « a/h » sur la réponse en terme de température critique de flambement d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique type Pasternak. Le paramètre de Winkler $K_w=10$ et l'indice de puissance $k=2$.

Il est remarqué que, l'augmentation des valeurs du paramètre K_g entraîne l'accroissement de T_{cr} et ce quelque soit le chargement retenu. Une relation de linéarité existe, comme c'est le cas pour une fondation type Winkler, entre la variation de la température critique de

flambement et le paramètre K_g . En plus, cette dernière est très affectée par le rapport « a/h ».



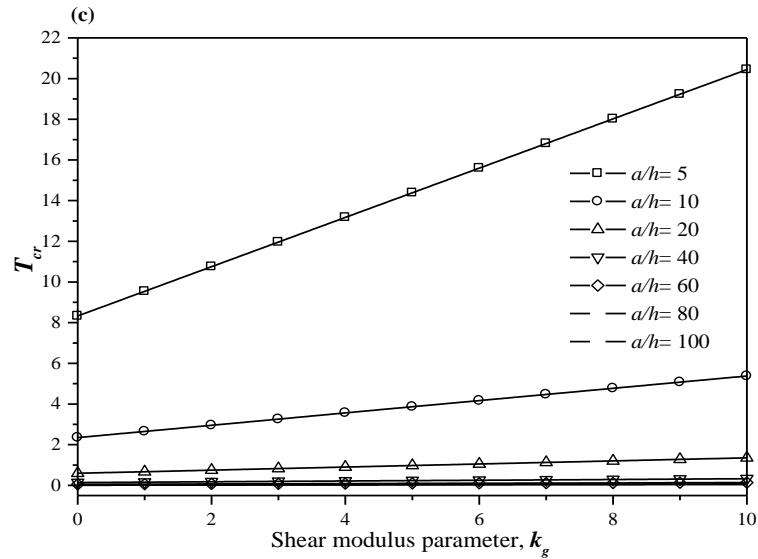


Figure V-4: Effet du paramètre de la fondation de Pasternak « K_g » sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport d'épaisseur a/h avec $k_w = 10$ and $k = 2$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ; (c) température non linéaire ($\gamma = 3$)

V.3.2.4 Effet de l'indice de puissance k sur la température critique de flambement

Pour étudier l'influence de l'indice de puissance k sur la température critique de flambement, les figures V-5 et V-6 sont présentées pour différentes valeurs des rapports « a/h » et « a/b ». On suppose que la plaque repose sur une fondation type Pasternak avec $K_w = K_g = 10$. En général, la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de l'indice k . ceci s'explique par le fait que, l'accroissement des valeurs de k entraîne celui de la fraction volumique du métal. Aussi, la température T_{cr} diminue avec l'accroissement du rapport « a/h » et inversement par rapport au rapport « a/b »

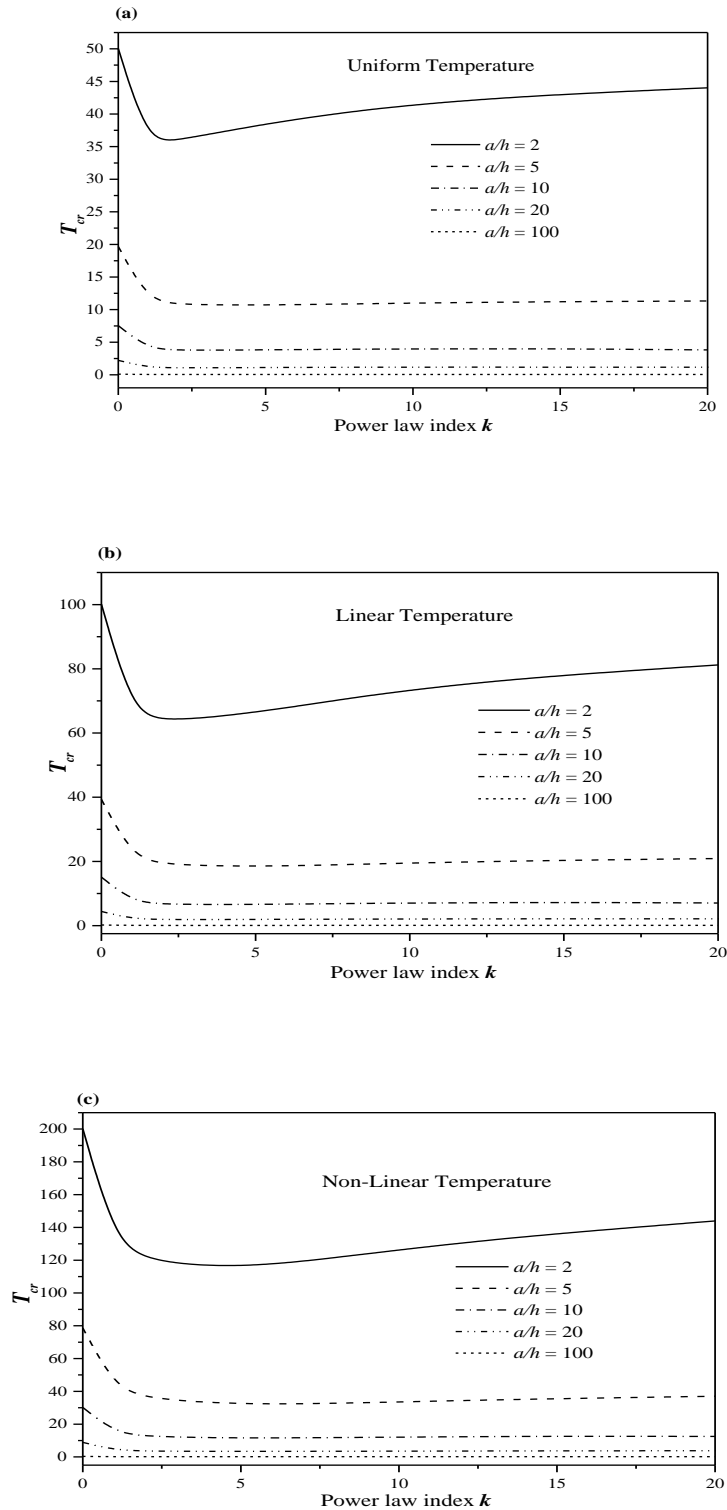


Figure V-5 : Effet de l'indice de puissance sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport « a/h » $k_w = k_g = 10$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ; (c) température non linéaire ($\gamma = 3$)

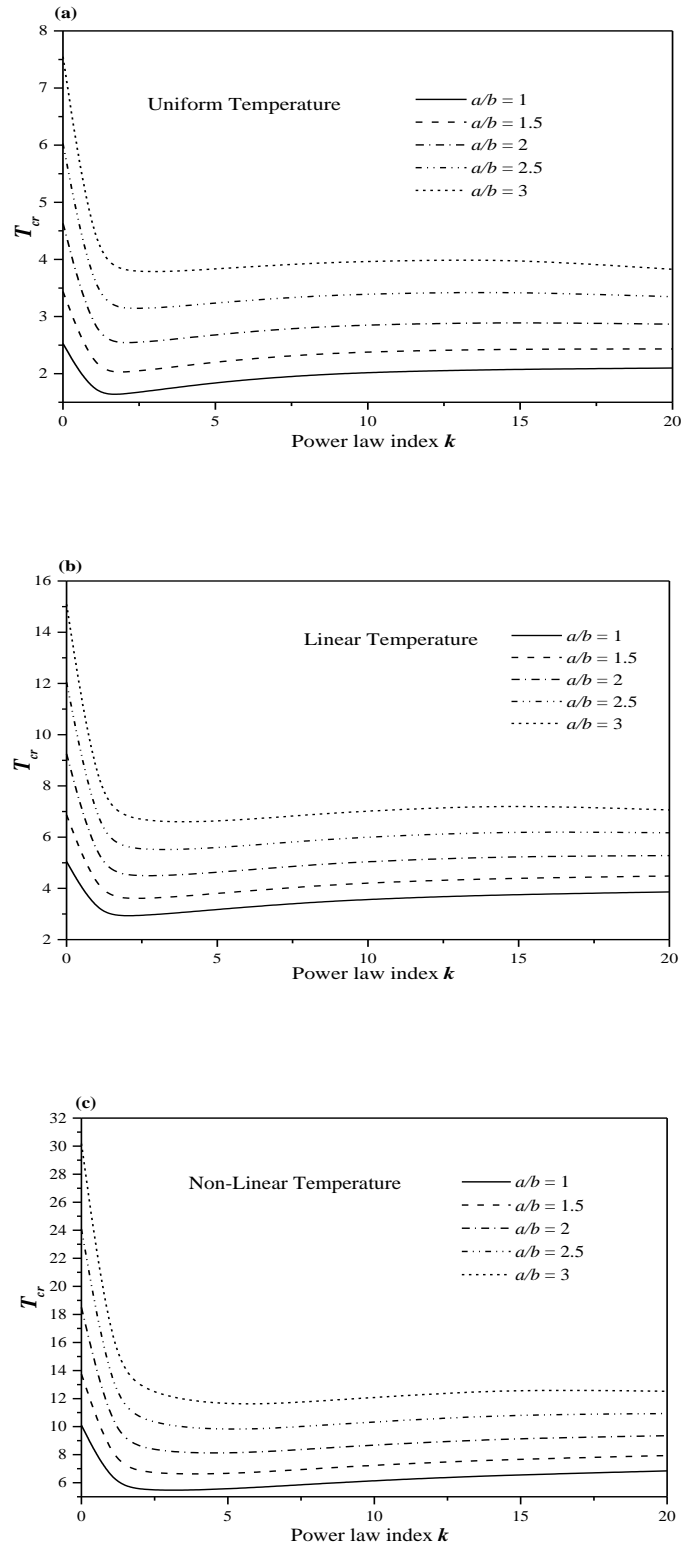


Figure V-6 : Effet de l'indice de puissance sur la température critique de flambement d'une plaque FG en fonction du rapport « a/b » $k_w = k_g = 10$ (a) température uniforme ; (b) température linéaire ;(c) température non linéaire ($\gamma = 3$)

V.3.2.5 Effet du chargement thermique sur la température critique de flambement

Afin d'étudier l'influence du type de chargement sur la température critique de flambement, nous traçons sur les figures V-7 et V-8 respectivement, la variation des rapports « a/h » et « a/b » en fonction de T_{cr} pour différents cas de chargement.

Les températures critiques de flambement T_{cr} les plus faibles sont obtenues pour un chargement uniforme et les plus élevées sont celles pour le cas non linéaire. En plus, les valeurs de T_{cr} sont très sensibles à la variation de l'exposant « γ ».

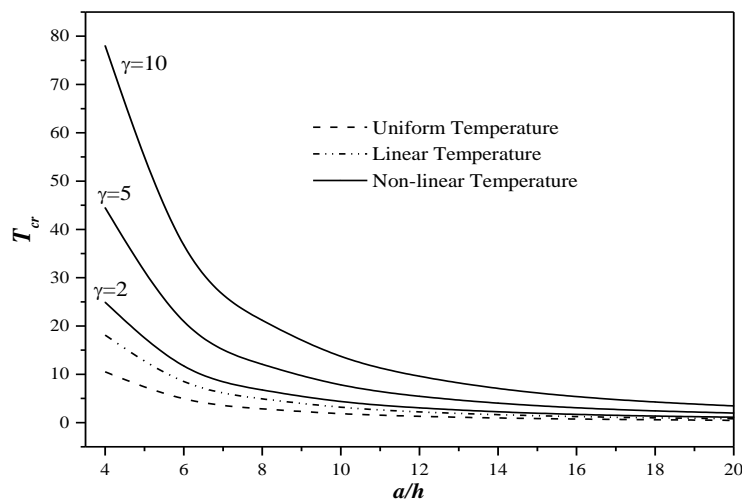


Figure V-7 : Température critique de flambement d'une plaque rectangulaire FG en fonction du rapport « a/h » pour des chargements uniforme, linéaire en non linéaire ($k_w = k_g = 10$ et $k = 5$)

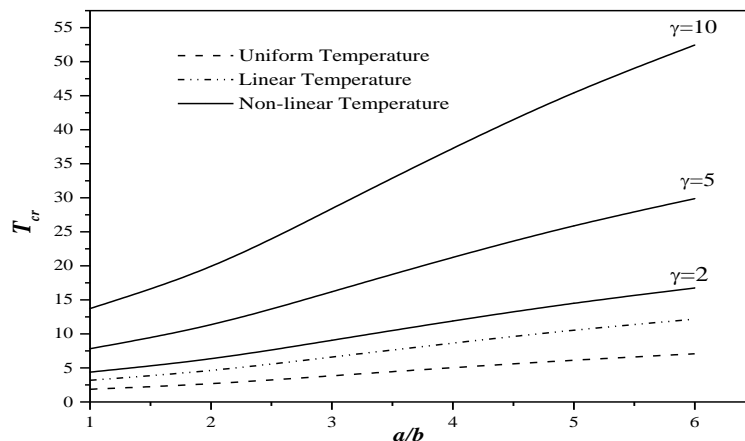


Figure V-8 : Température critique de flambement d'une plaque FG ($a/h = 10$) en fonction du rapport « a/b » pour des chargements uniforme, linéaire en non linéaire ($k_w = k_g = 10$ et $k = 5$)

V.4. Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de l'instabilité (flambement) thermique de plaques rectangulaires fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique type Pasternak a été présentée. Les propriétés mécaniques de la plaque ont été prises comme variant à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. La position de la surface neutre de la plaque a été déterminée. Une théorie de plaque hyperbolique efficace basée sur la position exacte de la surface neutre a été utilisée pour déterminer les équations de base de la plaque FG sur fondation élastique. L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur où un excellent accord a été observé. En outre, l'influence de certains paramètres de la plaque comme l'indice de puissance, rapport d'épaisseur, les coefficients de rigidité de la fondation et les types de chargement thermique sur la température critique de flambement de plaque rectangulaire FG ont été minutieusement étudiés.

**CONCLUSION GENERALE
&
PERSPECTIVES**

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'étude de la stabilité thermique des plaques épaisses en FGM avec ou sans la présence de fondations élastiques.

Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie d'ordre élevé à deux variables pour l'analyse de la stabilité thermique des plaques FGM soumises à un chargement thermique. la notion de la surface neutre a été utilisée. Pour valider ce modèle, nous l'avons comparé avec à des autres issus de la littérature. Toutes les études comparatives ont démontrées que les charges critiques de flambement obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes d'instabilité des plaques FGM.

Deuxièmement, une théorie raffinée hyperbolique de plaque basée sur la position exacte de la surface neutre a été utilisée pour déterminer les équations de base de la plaque FG sur fondation élastique. L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur où un excellent accord a été observé. L'étude paramétrique menée a démontrée que la géométrie de la plaque représentée par les rapports d'épaisseur, le type de la charge thermique, le paramètre de la non linéarité thermique ainsi que les paramètres de fondation ont une très grande influence sur la température critique de flambement.

Dans l'application de technologie, l'étude de ce phénomène est très essentielle pour choisir des paramètres de matériau appropriés pour s'assurer que ces plaques FGM ne remet pas l'intégrité structurale en question une fois soumise à champ de température élevé.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures FGM sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence des défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des plaques FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements thermiques.

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

- Abrate, S. (2008)**, “Functionally graded plates behave like homogeneous plates”, *Composites Part B: Engineering*, 39(1), 151-158.
- Afaq. K.S, (2003)**. « Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord”. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.
- Ait Atmane. H, A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010)**. “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- Ambartsumian. S.A, (1969)**. “Theory of anisotropic plate”. Technomic Publishing Co.
- Ambartsumian, S.A. (1958)**, "On theory of bending plates", *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*, 5, 69–77.
- Aydogdu, M. (2009)**, "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, 94–101.
- Baron. C, Naili. S. (2008)**, “Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide”, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730.
- Bao. G, Wang. L. (1995)**, “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- Benyoucef. S, Mechab. I, Tounsi. A, Fekrar. A, Ait Atmane. H, and El Abbas Adda Bedia (2010)** “Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 4, 425 – 434.
- Benachour, A., Hassaine Daouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S. A. (2011)** ”A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient” *Composites: Part B* 42, 1386–1394
- Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa (1986)** “casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites”.
- Bodaghi, M. et Saidi, A.R., (2010)**, "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematical Modelling*, 3659–3673.
- Bodaghi, M., Saidi, A.R. (2011)**, “Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates”, *Archive of Applied Mechanics*, 81, 1555-1572.
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, E.A., Megueni, A. (2010)**, “Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach”, *Computational Materials Science*, 49, 865–870.

Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations“, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandwich Struct. Mater.*, 14(1), 5-33.

Bouremana, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Kaci, A., Adda Bedia, E.A. (2013), “A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures, An Int'l Journal* Vol. 15 No. 5

Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2013), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, (In press).

Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), “Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.

Curiel Sosa, J.L., Anwar Bég, O., Liebana Murillo, J.M. (2013), “Finite element analysis of structural instability using a switching implicit-explicit technique”, *Int. J. Comp. Methods Eng. Sci. Mechanics* Volume 14, Issue 5, pages 452-464

Delale. F, Erdogan. F. (1983), “The crack problem for a non homogeneous plane”. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

Dau. F, O. Polit, and M. Touratier, (2006). “C1 plate and shell finite elements for geometrically non linear analysis of multilayered structures”. *Computers and Structures*, 84:1264-1274.

Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H. (1993), "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction", *Journal of Applied Physics*, 74, 1321-1326.

El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia (2011), E.A., "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, 237–247.

Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge , R., (2006), "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Composite Structures*, 75, 593–600.

Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S. (1996), "Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al 2 O 3 Multi-Layered Material", *Materials Science and Engineering*, 205, 59-71.

Ganapathi, M. (2006), “Thermal buckling of simply supported functionally graded skew plates”, *Composite Structures*, 74, 247–50.

Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson, M. (1995), "Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients", *Acta Metallurgica et Materialia*, 43, 1335-1354.

Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942.

Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. and Ehteshami, H., (2011), "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Composite Structures*, 1842–1853.

Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). “Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells”. NACA T. N. N°:1833.

Hill, R. et Lin, W. (2002), "Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124, 185-191.

Hirai, T. (1996), "Functional gradient materials", *Processing of ceramics—Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341.

Houari, M.S.A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A. and Adda bedia, E.A. (2011), “Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Thermal Stresses*, 34(4), 315-334.

Huang, X.-L. and Shen, H.-S., (2004), "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments", *International Journal of Solids and Structures*, 41, 2403–2427.

Ibrahim, H.H., Tawfik, M., Al-Ajmi, M. (2007), “Thermal buckling and nonlinear flutter behavior of functionally graded material panels”, *Journal Aircraft*, 44, 1610–8.

Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002a), “Thermal buckling of functionally graded plates”, *AIAA Journal*, 40, 162–9.

Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002b), “Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory”, *J. Therm. Stress.*, 25(1), 603-625.

Javaheri. R and Eslami. M. R (2002c), “Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading,” *ZAMM*, 82, No. 4, 277-283.

Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", *Composites Engineering*, (1995), 879–889.

Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339.

Kant.T, K. Swaminathan, (2002). “Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory”. *Composite Structure*; 56 (4): 329-344.

Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.

Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B, Engineering*, 29–35.

Kazerouni, S.M., Saidi, A.R., Mohammadi, M. (2010), “Buckling Analysis of Thin Functionally graded Rectangulare Plates with Two Opposite Edges Simply Supported”, *International Journal of Engineering Transactions B: Applications*, 23, 179- 192.

Koizumi, M. (1996),“FGM activities in Japan”, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.

Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model” *Steel and Composite Structures, An Int'l Journal* Vol. 15 No. 4.

Khalfi, Y., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation” *International Journal of Computational Methods*, (In press).

Kirchhoff, G.R. (1850 a), "Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 40, 51-88.

Kirchhoff,G.R. (1850 b), "Uber die Schwingungen Einer Kriesformigen Elastischen Scheibe", *Poggendorffs Annalen*,, 81, 258–264.

Koizumi. M (1997), “FGM Activities in Japan”, *Compos. Part B*, vol. 28, pp. 1–4.

Lanhe, W. (2004), “Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate”, *Composite Structures*, 64, 211–218.

Levinson, M. (1980), "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, 343–350.

Levy, M.,(1899), "Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 3, 219–306.

Li, Q., Iu, V.P. and Kou, K.P., (2008), "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *Journal of Sound and Vibration*, 498-515.

Love, A.E.H. (1888), "On the small free vibrations and deformations of elastic shells", London: *Philosophical trans. of the Royal Society*.

Lo. K.H & R.M. Christensen, (1977). “A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plate’s” .journal of applied mechanics, Vol.44, N° 4, pages 669-676.

Matsunaga, H., (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, 499–512.

Matsunaga, H. (2009), “Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory”, *Composite Structures*, 90, 76–86.

Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Mechab, I., Hebali, H. and Benyoucef, S. (2011), “Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates”, *Arch. Appl. Mech.*, 81(11), 1507-1522.

Mindlin. R.D, (1951). “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38.

Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". *Processing and Applications*.

Morimoto, T., Tanigawa, Y., Kawamura, R. (2006), “Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(9), 926–37.

Murthy. M.V.V, (1981). “An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique”, NASA.

Naghdi. P. M, (1957). “On the theory of thin elastic shells”. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.

Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974). “A refined theory for laminated orthotropic plates”. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177-183.

Na, K.S., Kim, J.H. (2004), “Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials”, *Composites Part B*, 35, 429–37.

Na, K.S. et Kim, J.H., (2005),"Three-Dimensional Thermomechanical Buckling of Functionally Graded Materials", *AIAA Journal*, 47, 1605-1612.

Najafizadeh, M.M., Heydaru, H.R. (2004), “Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23, 1085–100.

Na. K. S and Kim. J. H (2006), “Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method,” *Finite Elem. Anal. Des.*, 42, 749-756.

Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.

Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of

functionally graded beams”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421 – 433.

Pasternak PL (1954) “On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”. *Gosuedarstvennoe Izadatelstvo Literatim po Stroitelstvu i Arkhitekture* 1:1–56.

Polit. O and M. Touratier, (1997). “A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses”. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44.

Praveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates", *International Journal of Solids and Structures*, 44:4457-4476.

Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M., (2004), "Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method", *Composite: Part B*, 685-697.

Rashidi, M.M, Shoostari, A, Anwar Bég, O. (2012), “Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates”, *Computers and Structures*, 106/107, 46 – 55.

Ravichandran, K.S. (1995), "Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System", *Materials Science and Engineering*, A-201, 269-276.

Reddy. J.N, (1984). “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.

Reddy. J.N, (1997). “Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis”, CRC Press, Boca Raton.

Reddy. J.N, (1999). “Theory and Analysis of Elastic plates”, Taylor & Francis, Philadelphia.

Reddy. J. N. (2002), “Analysis of Functionally Graded Plates”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 47, pp. 663–684.

Reddy, J. N, Cheng, Z. Q, (2001), “Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates”, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855.

Reddy, J.N., Wang, C.M. and Kitipornchai, S., (1999) "Axisymmetric Bending of Functionally Graded Circular and Annular Plates", *European Journal of Mechanics and Solids*, 18, 185-199.

Reissner.E, (1945). “The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates”. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77.

Reissner. E, (1975). “On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation”, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.

Saidi, H., Houari, M. S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures*, Vol. 15, No.2, 221-245.

Samsam Shariat. B. A, Javaheri. R, and M. R. Eslami (2005), “Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading,” *Thin-Wall. Struct.*, 43, 1020-1036.

Samsam Shariat. B. A and Eslami. M. R (2006), “Thermal buckling of imperfect functionally graded plates,” *Int. J. Solids Struct.*, 43, 4082-4096.

Samsam Shariat, B.A. et Eslami, M.R. (2007), "Buckling of Thick Functionally Graded Plates Under Mechanical and Thermal Loads", *Composite Structures*, (2007), 78, 433-439.

Saidi, A.R., Jomehzadeh, E. (2009), “On analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported”, *Proc. IMechE, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223, 2009-2016.

Shariat, BAS., Eslami, M.R. (2005), “Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates”, *Journal of Thermal Stresses*, 28, 1183–98.

Shen, H.-S., (2002), "Postbuckling Analysis of Axially-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments", *Composite Science and Technology*, 62, 977-987.

Shen, H.-S., (2007), "Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties", *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 466-478.

Shen, H.-S. (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137–146.

Sohn, K.J., Kim, J.H. (2008), “Structural stability of functionally graded panels subjected to aero-thermal loads”, *Composite Structures*, 82, 317–25.

Suresh, S., Mortensen, A. (1998), “Fundamentals of Functionally Graded Materials”, (IOM Communications Ltd., London).

Timoshenko, S. (1921), "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, Vol. 41 (series 46) p. 744–746.

Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger, (1959). “Theory of Plates and Shells”. McGraw-Hill, New York.

- Tounsi, A., Houari Mohammed, S. A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A. (2013)**, “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24, 209–220.
- Touratier. M, (1991)**. “An efficient standard plate theory”. *Engng Sci*, vol. 29, no 8, pages 901-916.
- Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010)**, "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 626–633.
- Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011)**, "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.
- Uflyand, Y.S. (1948)**, "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates", 12, 287–300.
- Uymaz, B. and Aydogdu, M., (2007)**, "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions", *Composites of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863.
- Vel, S.S. et Batra, R.C. (2002)**, "Exact Solution for Thermo elastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates", *AIAA Journal*, 40, 1421-1433.
- Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Drake, J.T. (1993)**, "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part I: Model Description and Geometrical Effects", *Journal of Applied Physics*, 74, 1310-1320.
- Whitney. J.M, (1973)**. “Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads”. *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304.
- Winkler E. (1867)**, “Die lehre von der elasticitaet und festigkeit”. Prag Dominicus.
- Woo, J. and Meguid, S.A. (2001)**, "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells", *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7409-7421.
- Wu, L., (2004)**, "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate", *Composite Structures*, 64, 211–218.
- Yaghoobi, H., and Feraidoon, A. (2010)**, “Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load”, *World Applied Sciences Journal*, 10(3), 337 – 341.
- Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013)**, “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach”, *Meccanica* , 48:2019–2035.
- Yang, J. and Shen, H.-S., (2001)**, "Dynamic response of initially stressed functionally graded", *Composite Structures*, 497-508.
- Yoshihisa Uchida (2004)**, “Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications”, 39-51-B, Vol. 39-B.

Zenkour, A.M, Mashat, D.S. (2010), “Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates”, *Natural Sciences*, 2, 968-978.

Zenkour. A. M and Sobhy. M (2011), “Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory”, *Journal of Thermal Stresses*, 34, 1119–1138.

Zhang, D.G., Zhou, Y.H. (2008), “A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface”, *Computational Materials Science*, 44, 716-720.

Zhao. X and Liew. K.M (2009), “Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method,” *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 198, 2796-2811.

Zhao. X, Lee. Y. Y, and K. M. Liew (2009), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates,” *Compos. Struct.*, 90, 161-171.