

by

Submitted to the
in partial fulfillment of the requirements for the degree of

undefined

at the

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

degreemonth undefined degreeyear undefined

© Massachusetts Institute of Technology degreeyear undefined

Signature of Author

February 17, 2013

Accepted by

Contents

1	Introduction Générale	5
2	Représentation de solides par modèles géométriques	11
2.1	Introduction	12
2.2	Etat de l'art sur la construction des courbes et surfaces	14
2.2.1	Introduction	14
2.3	Interpolation Quaratique, Cubique et Spline Cubique	15
2.3.1	Interpolation quadratique (concept mathématique)	15
2.3.2	L'interpolation cubique (concept mathématique)	18
2.3.3	Polynôme d'interpolation de Lagrange (concept mathématique)	20
2.3.4	Interpolation par Splines cubiques (concept mathématique)	23
2.4	Approximation par l'approche de Bézier et B-Spline	27
2.4.1	Courbes de Bézier (Introduction)	27
2.4.2	Approche de De Casteljaou	29
2.4.3	Propriété des courbes de Bézier	33
2.4.4	Raccordements de courbes de Bézier	42
2.4.5	Conclusion sur les courbes	45
2.4.6	Surfaces ou carreaux de Bézier	45
2.4.7	Polynômes de Bernstein pour une surface	46
2.4.8	La notion de courbes B-Splines	48
2.4.9	Les courbes B-Splines	54
2.4.10	Comparaison entre courbes de Bézier et courbes B-Spline	57

2.4.11	Les surfaces B-Spline	59
2.4.12	Propriétés des surfaces B-spline	60
2.5	Approches pour la construction d'objets CAO	61
2.5.1	introduction	61
2.5.2	Algorithme de reconstruction	64
2.6	Conclusion	78
3	Méthodes d'Approximations de Problèmes Physiques	80
3.1	Introduction	81
3.2	Notion sur la théorie de l'élasticité linéaire	83
3.2.1	introduction	83
3.2.2	Approximation	87
3.3	Outils d'approximation	87
3.3.1	Méthode des résidus pondérés	89
3.4	Méthode des éléments finis	90
3.4.1	Introduction	90
3.4.2	Principale étapes de la méthode des élément finis	92
3.4.3	Conditions aux limite et assemblage	101
3.4.4	Utilisation d'éléments de type T3	104
3.4.5	Algorithme de mise en oeuvre de la méthode des éléments finis	107
3.5	Conclusion du chapitre	112
4	Déformation d'une structure composite a matrice polymère par absorption d'eau	113
4.1	Introduction	114
4.1.1	Matrice	114
4.1.2	Renfort	115
4.1.3	Propriétés de la matrice époxyde 914	116
4.2	Etude de l'absorption d'eau par les composites à matrice polymère	117
4.2.1	Introduction	117
4.2.2	Etude du couplage contraintes endommagement dans un polymère	118

4.2.3	Etude du couplage contraintes et concentration en eau dans un polymère	120
4.3	Couplage contrainte concentration cas d'un composite	126
4.3.1	Modele de microstructure adopté	126
4.3.2	Application d'une compression uniaxiale sur un composite endommagé	131
4.4	Conclusion	131
5	Simulations et Résultats	132
5.1	Introduction	133
5.2	Simulation du phénomène d'absorption	134
5.3	Reconstruction d'objets mécanique	137
5.3.1	Introduction	137
5.3.2	Conception de l'interface graphique GUI : [Graphical User Interface]	138
5.3.3	Essais de reconstruction d'un ensemble d'objets mécanique	141
5.4	Résumé du chapitre :	153
6	Conclusion générale	154

Chapter 1

Introduction Générale

En technologie, Les courbes et les surfaces sont présentes dans la majorité des applications faisant intervenir des images [11]. La plupart des situations réelles ou virtuelles sont composées, partiellement ou totalement, de courbes ou de surfaces. Le besoin de représenter les courbes et les surface se présentent dans deux situations principales :

- Modélisation d'un objet virtuel, à partir d'un modèle et sur la base d'une description mathématique ou d'une manière interactive.
- Modélisation d'un objet existant à partir de données issus de mesures, de capteurs ou tout simplement d'image en générale sous forme de points dans l'espace. L'objet est modélisé en utilisant plusieurs approximations à savoir :
 - approximations par des surfaces planes
 - approximations par des surfaces sphériques
 - approximations par tous autres modèles mathématiques simples (maillage).

Dans cette thèse nous allons aborder le problème de construction d'un modèle CAO (3D) en utilisant un ensemble de primitives. Ce problème se présente aussi bien en synthèse d'image qu'en conception de produit mécanique et d'autres.

Le problème de conception en générale et en génie mécanique et maritime en particulier est une activité qui a pour objectif de satisfaire des besoins spécifiés par ce qu'on appelle un cahier des charges rationnel en termes de solutions techniques. La conception est une activité qui ne se limite pas à la forme géométrique du produit, mais qui nécessite également l'intervention d'autre processus (outils) associés (que nous allons détailler par la suite). De ce fait, la conception d'un produit mécanique nécessite l'intervention de plusieurs métiers (Modélisation géométrique, calcul numérique, Fabrication, etc.) qui permettront une description globale et cohérente du produit. L'interférence entre les différents outils (métiers) qui étaient jusqu'à un passé proche, très procédurales et séquentielles, c'est-à-dire, qui se bornaient à suivre une certaine organisation de tâches relativement figées, tendent à devenir plus coopératives et dynamiques dans le but est d'assurer une meilleure connivence entre les différents outils. La conception, passe par deux principales phases interdépendantes, à savoir :

- la modélisation géométrique du produit (CAO)

- le calcul de dimensionnement et de validation du modèle proposé.

Le calcul de dimensionnement consiste à déterminer les dimensions en fonction des sollicitations, tandis que le calcul de validation consiste à vérifier si les dimensions choisies ou calculées permettent de résister aux sollicitations. Par comparaison de leurs performances le concepteur se permet de choisir les solutions technologiques et techniques, il est nécessaire d'utiliser des méthodes de calcul nécessitant un délai raisonnable tout en assurant une précision acceptable pour pouvoir choisir la solution la plus performante.

La physique en générale et en particulier la mécanique des milieux continus, le calcul scientifique se base sur la méthode des éléments finis (MEF). Elle a l'avantage de pouvoir s'appliquer à divers types de problèmes physiques. Se basant sur des équations aux dérivées partielles, l'intégration de cette méthode dans les outils de calcul et de fabrication assistée par ordinateur (CAO et FAO) est l'un des thèmes de recherche qui préoccupe un bon nombre de laboratoires de recherche dans le monde qui s'intéressent au domaine de la conception. Pour un meilleur compromis prix de revient – délai d'exécution – qualité du produit, une meilleure coordination entre les différents outils de la CAO et d'analyse s'impose. Cela pourrait conduire à une meilleure manipulation de plusieurs paramètres hétérogènes (géométrie, sollicitations, maillage, déformation, etc.) relatifs à l'objet. L'objectif recherché est de favoriser le partage des données entre les différents outils de conception afin de fluidifier les flux d'informations entre la CAO comme outil principal et l'outil de calcul, tout en garantissant la fiabilité et la traçabilité des données. L'interopérabilité des processus de conception et de calcul doit avoir un sens bilatéral, c'est-à-dire de la conception vers le calcul et inversement. Ainsi, notre travail de recherche qui s'intitule : "courbes et surfaces de Bézier pour la CAO application à l'absorption d'eau par un composite à matrice polymères" fait partie de l'esprit d'intégration de la méthode des éléments finis dans le processus de la CAO et la FAO. L'objectif de nos recherches est de développer des outils de reconstruction du modèle CAO à partir des résultats éléments finis (maillage déformé à cause des sollicitations). Cela donne au concepteur un moyen quantitatif (modèle CAO reconstruit en mode déformé) prêt à être injecté dans le mécanisme en vue d'une évaluation.

Par souci de bien embellir notre travail de recherche c'est à dire pour bien maître en évidence la notion de conception, nous allons étudier un problème faisant partie de la mécanique des milieux continus c'est celui du *couplage contraintes concentration en eau* (contrainte diffusion)

à l'équilibre thermodynamique dans le cas du gonflement d'une résine, à travers cette étude qui va nous permettre de calculer les profils de la concentration en eau, le calcul de contraintes (la pression moyenne induite par gonflement) ainsi que la déformation dans une résine pure représentant la matrice d'un composite. Avec le temps, le phénomène d'osmose d'eau a des conséquences fatales sur des pièces mécaniques conçues par de tels type de matériaux.

Après l'introduction générale dans laquelle on va tenter d'expliquer le but visé par ce travail de recherche. Cette thèse se subdivise en six chapitres,

Le deuxième chapitre se subdivise en deux sous chapitres, le premier est dédié à l'infographie en générale le second est dédié à la construction de modèles CAO.

Le premier sous chapitre consiste à faire le point sur l'état de l'art sur les courbes et les surfaces de Bézier, la relation entre les sommets des polygones (maillage de contrôle et les coefficients du polynôme correspondant), la jonction entre courbes de Bézier ainsi que les problèmes de continuité de différent ordre. La recherche du polygone de contrôle à partir des coefficients d'un polynôme générateur d'une courbe et la recherche des polygones ayant le moins de sommets se qu'on appelle critère de réductibilité. On traitera aussi les courbes et les surfaces Bspline et le problème de récursivité de la fonction Bspline. On introduira l'écriture matricielle qui va nous permettre de faire des calculs inverse. Nous citerons aussi, à titre indicatif d'autres outils tels que les B-splines rationnelles non uniformes, plus communément désignées par leur acronyme anglais NURBS et les surfaces de Coons.

Dans le deuxième sous chapitre, après une brève introduction sur une approche basique de reconstruction, on étudiera en détail l'approche composée se basant sur l'algorithme de Walton, ce dernier a été implémenté pour mettre en évidence le problème de construction de modèle CAO.

Ayant cerné le problème à résoudre dans cette thèse, à savoir la reconstruction du modèle CAO déformé à partir de maillage déformé issu du calcul par éléments finis, dans le troisième chapitre nous commençons par définir la notion de méthodes d'approximation en physique en générale et le problème de conception de produit en particulier. Ensuite, nous précisons la classification de calcul, ainsi que les outils susceptibles d'être utilisés en conception de produits mécaniques. Cela nous a permis de converger et d'avoir recourt à la méthode des éléments finis à travers des codes de calcul que nous avons réalisé pour le traitement des problèmes

unidimensionnel et bidimensionnels. Pour des raisons de coût et économie d'énergie, la tendance actuelle dans l'industrie est pour l'utilisation des matériaux légers que se soit des alliages ou des matériaux composites. Dans le présent travail de recherche nous avons utilisé la méthode des éléments fins pour les calculs des sollicitations est déformation (tenseur de déplacement) dans une plaque mince soumise à une ambiance humide à l'équilibre thermodynamique sur laquelle on applique une compression uniaxiale. Le résultat de cette étude figure au début du quatrième chapitre dédié a la simulation et résultats.

Le quatrième chapitre est d'idié à l'étude des matériaux composites et du phénomène physique sur lequel nous avons basé notre étude [4], celui de l'absorption et la diffusion d'eau dans un composite à matrice polymère et le phénomène de gonflement contrarié qui se produit dans ce dernier sous l'effet de la pression hydrique. On étudie le cas de composites isotropes dont la matrice polymère endommagée, renforcés par exemple par des particules sphérique ou des fibres (d'aluminium ou billes de verre) et soumis à une sollicitation externe. Les renforts n'absorbant pas d'eau, mais ils gênent (heureusement) le gonflement de la matrice polymère.

Le cinquième et avant dernier chapitre consacré à la simulation et aux résultats, est réparti en trois grandes sections d'idiée aux différents résultats et simulations.

La première section est d'idiée à la présentation des résultats qui ont fait l'objet de notre article. Nous présentons les courbes représentant le profile de concentration en fonction de l'humidité relative du milieu ambiant en faisant intervenir un certain nombre de paramètres comme le niveau d'endommagement et la fraction volumique des renforts Nous justifierons les résultats obtenus.

Dans la seconde section nous présentons les résultats des calculs réalisé par la méthodes éléments finis sur une plaque mince soumise à une compression uniaxial et sensée être dans une ambiance humide. la simulation est réalisée en utilisant en plus des codes réalisé, un logiciel spécialisé.

Dans la troisième et dernière section, en vue d'une validation de l'approche de reconstruction que nous avons proposé et pour être en harmonie avec le cahier des charges , cette section sera consacré au résultats de la reconstruction d'objets 3D à partir des résultats éléments finis par l'intermédiaire d'une interface graphique que nous avons réalisé spécialement pour cette étude, mais aussi de souligner les difficultés rencontrées lors de la reconstruction. Ces difficultés feront

aussi l'objet des perspectives de recherches issues de ce travail dans le chapitre conclusion générale.

Chapter 2

Représentation de solides par modèles géométriques

2.1 Introduction

Généralement, il existe trois modèles de représentation d'objet par ordinateur :

- représentation en utilisant la modélisation fil de fer ;
- représentation en utilisant la modélisation surfacique ;
- représentation en utilisant la modélisation solide.

Ces différents modes de représentation permettant de définir plus ou moins complètement un objet, présentent un certain nombre d'avantages et d'inconvénients. La dernière technique c'est la technique de représentation la plus utilisée car le solide se caractérise par son aspect homogène 3D (le solide occupe un espace fini), ses limites et ses frontières définissent un intérieur et un extérieur d'un volume. les principaux modèles de solide sont :

Modélisation solide de représentation par occupation spatiale : L'objet est représenté par un ensemble de cellules occupées par le volume de l'objet dans l'espace . Ces cellules sont des cubes de taille fixe appelés voxels, ils sont localisés le plus souvent par les coordonnées cartésiennes spatiales. Cette approche facilite le calcul des propriétés physiques d'un objet (volume, centre de gravité, etc ...). Elle reste invariante en translation, mais le ne l'est pas en rotation. Le principal inconvénient c'est qu'elle ne donne qu'une approximation plus ou moins grossière de l'objet, selon le niveau de résolution choisi, dont dépend également l'encombrement machine.

Modélisation solide de représentation par les frontières BREP (Boundary Representation): C'est une représentation qui s'apparente à la modélisation surfacique, avec deux techniques différentes, représentation facettisée et représentation par les frontières exactes. La frontière de l'objet est explicitement décrite, cette information est très utile en CFAO pour l'usinage des surfaces, le calcul rapide des masses, des centres de gravité etc ...,

Tous solide occupant un volume obéit à la loi d'Euler valable pour tout polyèdre régulier convexe simple :

$$S + F - A = 2 \tag{2.1}$$

- S : est le nombre de sommets,

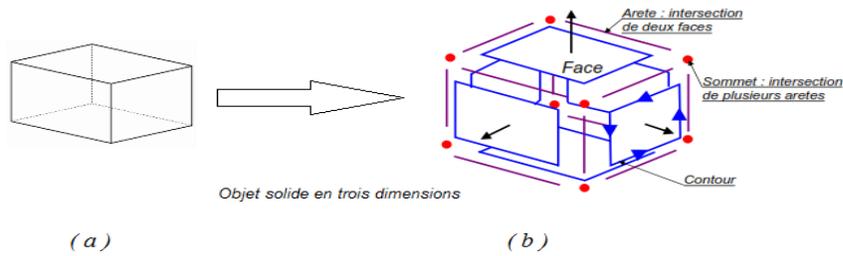


Figure 2-1: informations topologiques & géométriques d'un objet

- A : le nombre d'arêtes
- F : le nombre de faces

pour le cube de la figure 2-1 (a) en a $S = 8$, $F = 6$, $A = 12$, la relation est vérifié. Cette loi peut être généralisé pour les solides à géométrie complexe de la manière suivante:

$$S + F - E = 2 \cdot C + V - 2 \cdot T \quad (2.2)$$

- C : le nombre de composants disjoints dans le solide,
- T : le nombre de trous dans le solide
- V : le nombre de cavités dans une face.

Un objet est constitué de deux types d'information graphique

- l'informations géométriques : se résument dans la nature géométrique des surfaces et courbes porteuses des différentes faces et arêtes (face plane, courbe circulaire...).
- l'informations topologiques : sont les connectivités, les liens et les orientations des différentes entités (Faces, contours, arêtes et sommets).

La figure 2-1 (a) représente un corps solide, et les différentes informations topologiques et géométriques sur ce même corps solide en figure 2-1 (b) .

Dans nos travaux de recherche, on se propose de générer automatiquement le modèle BREP à partir des informations issues d'un maillage déformé (calcul par éléments finis) qui va constituer

ce qu'on va définir par la suite comme étant le réseau de contrôle. Dans ce qui suit, un résumé de l'état de l'art sur la construction des courbes et surfaces (nécessaires pour la modélisation d'un modèle BREP), est présenté,

2.2 Etat de l'art sur la construction des courbes et surfaces

2.2.1 Introduction

Les problèmes d'interpolation et d'approximation sont un vaste sujet qui s'étend de l'ajustement de mesures à la conception d'images de synthèse en passant par la création de polices de caractères. Au XVIII siècle Lagrange est le premier mathématicien qui s'est penché sur les problèmes de l'interpolation, mais il faut attendre l'arrivée des ordinateurs pour que le domaine se développe réellement. L'interpolation et l'approximation servaient surtout à relier ou approcher des mesures, l'intérêt était avant tout scientifique. Avec la révolution industrielle, et l'apparition des machines, il a fallu dessiner les pièces pour pouvoir les produire (l'intérêt est devenu technologique). Pour tracer, les dessinateurs utilisaient des méthodes manuelles qui reposaient sur :

- la déformation de lames de métal (ou latte de bois) pour des courbes,
- des gabarits étaient construits en trois dimensions pour les surfaces.

Puis au début des années cinquante, les machines à commandes numériques ont vu le jour, il devenait plus que nécessaire d'exprimer ces courbes à base d'outils mathématique. La première approche était de numériser le travail des dessinateurs mais cela était long et couteux (en terme d'encombrement mémoire), la nécessité de trouver des courbes capables d'être utilisés depuis la conception jusqu'à la réalisation s'est donc fait sentir. Les splines cubiques ont été la première méthode mise au point, puis les courbes de Bézier sont arrivées, avec une conception différente et plus souple. L'évolution s'est poursuivie avec les B-Splines (généralisation des courbes de Bézier), puis avec les NURBS (B-splines rationnelles non uniformes) dans les années 1980.

Avec l'apparition de l'informatique domestique les courbes et les surfaces ont vu leur domaine s'étendre de plus en plus. Des logiciels de dessin vectoriel en vu le jour utilisant les courbes de Bézier ainsi que les B-Splines. Ces courbes (surfaces) sont aussi à la base des images

de synthèse (jeux vidéo, etc ...). Certains concepts sont encore au stade de développement ou ne sont pas documentés. A titre d'exemple, il est impossible de connaître les algorithmes internes des programmes de conception en 3D à usage industriel. Nous nous efforcerons dans cette thèse de relier l'étude théorique de ces courbes et surfaces avec leurs applications pratiques au sein de notre travail de recherche. Nous verrons leurs avantages et leurs faiblesses.

Ce travail mêle théorie et programmation. En effet, nous illustrerons les différents concepts par de nombreux schémas. Pour chaque courbe ou surface étudiée théoriquement, nous avons réalisé un programme les dessinant pour deux raisons : la première c'est manipuler l'outil mathématique par un programme, de ce fait la maîtrise de l'outil est acquise, la seconde est de nous faciliter par la suite la réalisation des différents programmes de reconstruction que nous devrons réaliser dans le cadre de notre travail de recherche. Tous les exemples de courbes et surfaces inclus dans ce travail ont été tracés par les programmes réalisés dans cette étude. Dans une première phase nous nous pencherons d'abord sur les formes basiques d'interpolation, notamment l'interpolation quadratique, cubique, et de Lagrange. Puis dans une seconde phase nous verrons l'interpolation par splines cubiques, beaucoup plus performante. Ensuite dans une troisième et dernière phase nous expliquerons l'utilité d'approximer les points avec les courbes et les surfaces de Bézier et les B-Splines, plutôt que de les interpoler.

2.3 Interpolation Quadratique, Cubique et Spline Cubique

Lorsque nous voulons interpoler des points, la manière la plus simple consiste à les relier par des segments de droites (interpolation linéaire). Bien sûr, cette solution n'est pas du tout satisfaisante car elle n'est pas du tout harmonieuse. Pour avoir un résultat acceptable, il faudrait mettre les points très rapprochés les uns des autres. Il devient alors très lourd et difficile de manipuler l'ensemble des points. C'est pour ces raisons que nous cherchons des méthodes plus perfectionnées.

2.3.1 Interpolation quadratique (concept mathématique)

L'interpolation quadratique est l'une des méthodes les plus simples. Le but est de relier les points (à interpolés) par des courbes polynomiales du second degré. Mais si nous nous con-

tentons de faire passer une parabole par les trois premiers points puis une autre par les trois suivants, la courbe comportera des cassures. En effet, à la jonction de deux paraboles, la pente ne sera pas la même (discontinuité de la pente). Ce procédé ne présente donc aucun avantage sur l'interpolation linéaire. Pour supprimer ces cassures et obtenir une courbe fluide, on doit établir les conditions suivantes :

- la courbe doit passer par deux points imposés
- en un point, la pente du début de l'actuelle parabole doit être égale à la pente de la fin de la parabole précédente.

Pour construire un arc de parabole en va suivre la démarche suivante :

1. nous numérotions les points

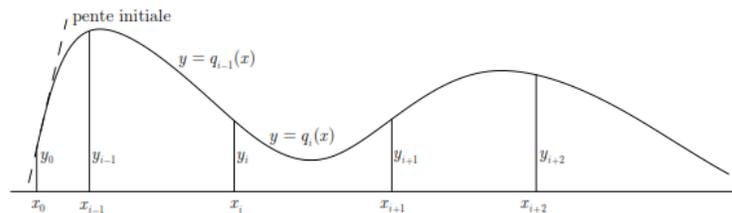
$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n) \quad (2.3)$$

2. et les coefficients a_i, b_i, c_i

3. dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ des paraboles sont construites tel que:

$$q_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, n-1 \quad (2.4)$$

La figure 2.3.1 illustre la situation expliquée ci-dessus



Principe de l'Interpolation Quadratique

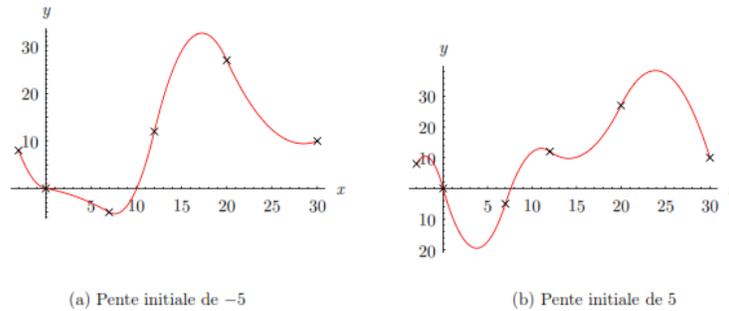
Pour construire l'arc entre P_i et P_{i+1} nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y_i &= a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i \\ y_{i+1} &= a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

et il faut que :

$$2a_i x_i + b_i = 2a_{i-1} x_i + b_{i-1} \quad (2.6)$$

Les deux premières équations font passer la parabole par les deux points $P_i(x_i, y_i)$ et $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ la troisième assure qu'en x_i la tangente de $q_i(x)$ sera la même que celle de $q_{i+1}(x)$. Pour le premier arc le terme de droite de (2.6) est choisi arbitrairement et la figure 2.3.1 montre les résultats de ce choix arbitraire sur la qualité de l'interpolation quadratique avec deux valeurs différentes pour la pente initiale.



Interpolation Quadratique pour deux différentes pentes

Limites de la méthode

Comme nous le voyons très bien avec la figure 2.3.1, le choix de la pente initiale est très important. La courbe peut avoir une allure complètement différente selon ce choix. De plus, la pente initiale influence toute la courbe. Ainsi, sur la figure 2.3.1, le passage de -5 à 5 comme pente initiale inverse totalement la courbe. Les arcs concaves deviennent convexes et inversement. Les courbes sont donc imprévisibles. Une parabole, ne possédant pas de points d'inflexion, ces derniers doivent absolument se trouver sur l'un des points P_i . Cela est aussi un inconvénient qui rend non envisageable toute utilisation pratique.

Les formes conçus par interpolation quadratique ne sont pas très « propre », le tracé ne correspond pas à ce que nous pourrions attendre par exemple dans un logiciel de dessin. Pour toutes ces raisons, l'interpolation quadratique n'est pratiquement pas utilisée. D'autres méthodes ont été élaborées afin de supprimer ces inconvénient, l'une d'elles est l'interpolation cubique.

2.3.2 L'interpolation cubique (concept mathématique)

L'interpolation cubique repose sur le même principe que l'interpolation quadratique. Les conditions sont les suivantes :

1. la courbe doit passer par deux points imposés, P_i et P_{i+1}
2. nous imposons les tangentes en ces deux points de façon clairvoyante, généralement, la tangente en un point doit être parallèle à la droite reliant le point précédent au point suivant c'est à dire P_{i-1} et P_{i+1} . La figure 2.3.2 illustre cette situation.
3. Nous numérotions les points :

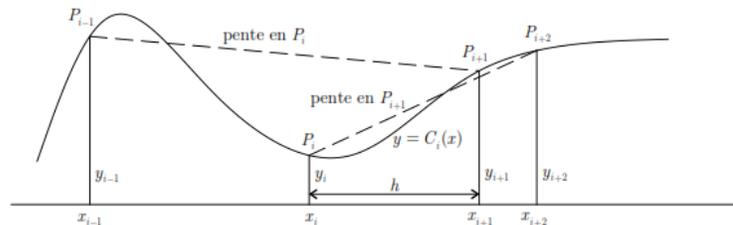
$$P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n) \quad \text{avec} \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad (2.7)$$

4. Nous notons y' la pente de la tangente en P_i .
5. Pour construire l'arc d'équation

$$C_i(x) = \alpha_i x^3 + \beta_i x^2 + \gamma_i x + \delta_i$$

entre les points P_i et P_{i+1} nous avons les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} C_i(x_i) &= y_i & ; & & C_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ C'_i(x_i) &= y'_i & ; & & C'_i(x_{i+1}) &= y'_{i+1} \end{aligned} \quad (2.8)$$



Principe de l'Interpolation Cubique

Pour plus de confort, au lieu de la variable x nous préférons utiliser une nouvelle variable t (valable aussi pour les B-Splines et les courbes de Bézier) tel que :

$$x = x_i + t \cdot h \quad \text{avec} \quad h = x_{i+1} - x_i \quad \text{et} \quad t \in [0, 1] \quad (2.9)$$

ce qui nous donne

$$C_i(x) = C_i(x_i + t \cdot h) = Q_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i \quad (2.10)$$

tel que:

$$Q'_i(t) = h \cdot C'_i(x_i + t \cdot h) = 3a_i t^2 + 2b_i t + c_i \quad (2.11)$$

Les conditions sont donc :

$$\begin{aligned} Q_i(0) &= d_i = y_i \\ Q_i(1) &= a_i + b_i + c_i + d_i = y_{i+1} \\ Q'_i(0) &= c_i = h \cdot y'_i \\ Q'_i(1) &= 3a_i + 2b_i + c_i = h \cdot y'_{i+1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Par mesure de simplification, nous prendrons

$$\begin{aligned} Q'_i(0) &= p_i \\ Q'_i(1) &= p_{i+1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

on aura donc :

$$\begin{aligned} a_i &= 2y_i - 2y_{i+1} + p_i + p_{i+1} \\ b_i &= 3y_{i+1} - 3y_i - p_{i+1} - 2p_i \\ c_i &= p_i \\ d_i &= y_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

A présent, le seul élément manquant pour construire l'arc est la détermination des tangentes. Comme nous l'avons supposé, la tangente au point P_i est parallèle à la droite reliant P_{i-1} et P_{i+1} . Par définition

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad \forall i \in [1, n-1] \quad (2.15)$$

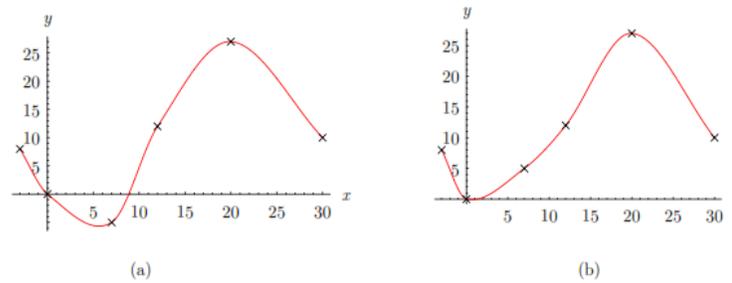
pour le premier et le dernier point, nous choisissons respectivement la pente de P_0 à P_1 et de P_{n-1} à P_n .

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad ; \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \quad (2.16)$$

sachant que :

$$p_i = h \cdot y'_i \quad , \quad p_{i+1} = h \cdot y'_{i+1} \quad (2.17)$$

nous pouvons trouver les coefficients a_i, b, c_i et d_i et construire les arcs cubiques.



Interpolation Cubique

La figure 2.3.2 montre les résultats avec deux valeurs différentes du troisième point

Limites et avantages de la méthode

L'inconvénient de cette interpolation est que si la pente ne possède pas de « cassure », il se peut que le rayon de courbure présente des « cassures » (la fonction obtenue est de classe C^1 mais pas de classe C^2). Cela nuit à la fluidité de la courbe. Il est possible de résoudre ce problème, mais cela sera au détriment de la « robustesse ».

L'interpolation cubique ne présente pas les mêmes défauts que l'interpolation quadratique. Ainsi des points d'inflexion sont possibles ($Q''(t) \neq 0$) ailleurs que sur les points d'interpolation. La courbe est très robuste par rapport à l'interpolation quadratique, le changement d'un point n'influence pas toute la courbe, cette propriété est très importante pour des utilisations pratiques.

2.3.3 Polynôme d'interpolation de Lagrange (concept mathématique)

Au lieu, d'interpoler des points par arcs de paraboles ou de cubiques, l'interpolation de Lagrange permet de relier tous les points à l'aide d'une seule et unique (courbe) fonction polynomiale.

Le problème est donc de trouver un polynôme qui vaut y_0 en x_0 , y_1 en x_1, \dots, y_n en x_n avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Pour un polynôme de degré au plus 1, le graphe passe par deux points différents. De même, il existe un polynôme de degré au plus 2 qui passe par trois points. Pour qu'on puisse interpoler tous les points notre polynôme doit donc être au plus de degré n c'est à dire pour qu'il puisse passer par $n + 1$ point. L'idée de la construction se base sur le fait que le monôme :

$$p_1(x) = \frac{(x - b)}{(a - b)} \quad \text{et que} \quad p_1(a) = 1 \quad (2.18)$$

et que le monôme

$$p_2(x) = x - a \quad \text{et que} \quad p_2(a) = 0 \quad (2.19)$$

Avec l'assemblage de ces deux propriétés nous obtenons le polynôme suivant :

$$l_i = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = x_i \\ 0 & \text{pour } x = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \end{cases} \quad (2.20)$$

En exploitant les propriétés du polynôme ci-dessus, nous arrivons au polynôme de Lagrange de degré au plus n qu'on cherché :

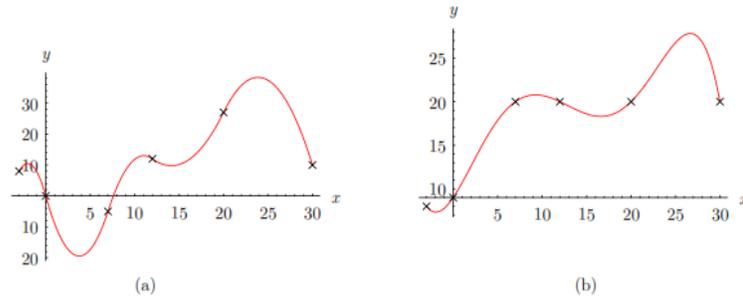
$$L(x) = y_0 \cdot l_0 + y_1 \cdot l_1 + \dots + y_n \cdot l_n \quad (2.21)$$

Nous pouvons démontrer que ce polynôme est unique et passe par $n + 1$ points. Il est aussi possible de l'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \iff Y = X \cdot A \quad (2.22)$$

Nous avons donc un système d'équations linéaires de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues, dont les solution sont uniques et que nous pouvons les obtenir soit par une méthode analytique (élim-

ination de Gauss par exemple) ou itérative (Gauss-Seidel par exemple).



Principe de l'interpolation de Lagrange

Avantages et inconvénients

L'avantage de l'interpolation de Lagrange est qu'elle est relativement simple, et qu'il est possible de relier beaucoup de points avec une seule fonction polynomiale et non plusieurs arcs comme c'était le cas pour l'interpolation quadratique et cubiques.

Mais le principal désavantage est que la courbe peut être complètement aberrante, cette situation est représentée sur la figure 2.3.3 (b) où la courbe continue d'osciller lorsque les points sont stables (variation d'amplitude négligeable). En effet, si nous essayons d'interpoler une fonction régulière comme :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (2.23)$$

par nature, plus les points choisis sur cette courbe sont rapprochés plus l'interpolation s'approche de la fonction donnée. Malheureusement, ce n'est pas le cas, plus nous prenons de points plus la courbe oscille entre ces points. L'interpolation de Lagrange n'est donc pas une très bonne méthode, et il est généralement préférable d'interpoler les points avec plusieurs arcs de degré moins élevé puis faire le raccordement. Ce problème est très gênant et explique que l'interpolation de Lagrange n'est pas très utilisée.

Un autre inconvénient est que le polynôme est de degré n , cela signifie que si nous avons un nombre important de points les manipulations peuvent devenir lourdes. C'est aussi une raison de préférer l'interpolation par bouts de cubiques.

2.3.4 Interpolation par Splines cubiques (concept mathématique)

Chez General Motors au tous début des années cinquante, que l'interpolation par splines a été développée pour subvenir aux besoins de l'industrie automobile. L'interpolation par splines cubiques repose sur le même principe que l'interpolation cubique, mais elle assure aussi la continuité du rayon de courbure en plus de la continuité de la pente. Pour une fonction f le rayon de courbure R en un point est donné par l'équation suivante :

$$R = \frac{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} \quad (2.24)$$

Nous voyons donc que la continuité de la dérivée ne suffit pas, il faut aussi imposer celle de la dérivée seconde. Ce type de fonction est dit de classe C^2 . On considère donc les points P_i tels que

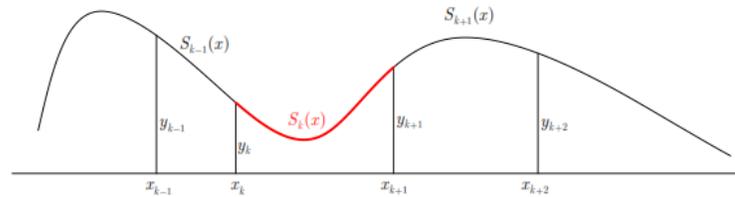
$$P_i \in \{P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)\} \quad (2.25)$$

avec

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad (2.26)$$

Nous voulons définir une spline cubique $S_k(x)$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour $k \in [0, n - 1]$, avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} S_k(x_k) &= y_k & \text{et} & & S_k(x_{k+1}) &= y_{k+1} \\ S'_k(x_k) &= S'_{k-1}(x_k) & \text{et} & & S'_k(x_{k+1}) &= S'_{k+1}(x_{k+1}) \\ S''_k(x_k) &= S''_{k-1}(x_k) & \text{et} & & S''_k(x_{k+1}) &= S''_{k+1}(x_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.27)$$



Principe d'interpolation Spline Cubiques

Par souci d'allégement des équations nous noterons $\varphi_k = S_k''(x_k)$. Comme $S_k(x)$ est de degré trois, $S_k''(x)$ est donc de degré un. Nous pouvons donc écrire :

$$S_k'' = \varphi_k \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \varphi_{k+1} \cdot \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (2.28)$$

Sachant que pour :

$$\varphi_k = S_k''(x_k) \quad \text{et} \quad \varphi_{k+1} = S_k''(x_{k+1}) \quad \text{il faut que} \quad \varphi_k = S_{k-1}''(x_k) \quad (2.29)$$

Par intégration de $S_k''(x)$ par rapport à l'unique variable x on aura :

$$\begin{aligned} S_k'(x) &= \frac{\varphi_k}{x_k - x_{k+1}} \cdot \frac{(x - x_{k+1})^2}{2} + \frac{\varphi_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot \frac{(x - x_k)^2}{2} + C_k \\ S_k(x) &= \frac{\varphi_k}{x_k - x_{k+1}} \cdot \frac{(x - x_{k+1})^3}{6} + \frac{\varphi_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot \frac{(x - x_k)^3}{6} + C_k \cdot x + D_k \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec C_k et D_k des constantes. Pour facilité les calculs on suppose que :

$$C_k \cdot x + D_k = A_k(x - x_k) + B_k(x_{k+1} - x) \quad (2.31)$$

d'où

$$S_k(x) = \frac{\varphi_k}{x_k - x_{k+1}} \cdot \frac{(x - x_{k+1})^3}{6} + \frac{\varphi_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot \frac{(x - x_k)^3}{6} + A_k(x - x_k) + B_k(x_{k+1} - x) \quad (2.32)$$

En se basant sur 2.27

$$\begin{aligned} y_k = S_k(x_k) &= \frac{\varphi_k}{x_k - x_{k+1}} \cdot \frac{(x_k - x_{k+1})^3}{6} + B_k(x_{k+1} - x_k) \\ y_{k+1} = S_k(x_{k+1}) &= \frac{\varphi_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \cdot \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6} + A_k(x_{k+1} - x_k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

De ces deux dernières équations on calcule A_k , et B_k et on remplace leurs valeurs dans la formule de $S_k(x)$ on aura la fonction :

$$\begin{aligned}
S_k(x) &= \frac{\varphi_k}{6} \cdot \frac{(x - x_{k+1})^3}{x_k - x_{k+1}} + \frac{\varphi_{k+1}}{6} \cdot \frac{(x - x_k)^3}{x_{k+1} - x_k} \\
&+ y_k \cdot \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\varphi_k}{6} (x_{k+1} - x_k)^3 (x_{k+1} - x) \\
&+ y_{k+1} \cdot \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\varphi_{k+1}}{6} (x_{k+1} - x_k)^3 (x - x_k)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Par dérivation nous obtenons :

$$\begin{aligned}
S'_k(x) &= \frac{\varphi_k}{6} \cdot \left(\frac{-3(x_{k+1} - x)^2}{x_k - x_{k+1}} + (x_{k+1} - x_k) \right) \\
&+ \frac{\varphi_{k+1}}{6} \cdot \left(\frac{3(x - x_k)^2}{x_{k+1} - x_k} - (x_{k+1} - x_k) \right) \\
&+ \frac{y_{k+1}}{(x_{k+1} - x_k)} - \frac{y_k}{(x_{k+1} - x_k)}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

par évaluation de la dérivé $S'_k(x)$ pour les valeurs de x_k et x_{k+1} on aura :

$$\begin{aligned}
S'_k(x_k) &= \frac{\varphi_k}{6} \cdot (-2(x_{k+1} - x_k)) + \frac{\varphi_{k+1}}{6} \cdot (-(x_{k+1} - x_k)) + \frac{y_{k+1} - y_k}{(x_{k+1} - x_k)} \\
S'_k(x_{k+1}) &= \frac{\varphi_k}{6} \cdot (x_{k+1} - x_k) + \frac{\varphi_{k+1}}{6} (2(x_{k+1} - x_k)) + \frac{y_{k+1} - y_k}{(x_{k+1} - x_k)}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

de l'équation 2.36, on peut écrire :

$$S'_{k-1}(x_k) = \frac{\varphi_{k-1}}{6} \cdot (x_k - x_{k-1}) + \frac{\varphi_k}{6} \cdot (2(x_k - x_{k-1})) + \frac{y_{k+1} - y_k}{(x_{k+1} - x_k)} \quad \forall k = 1, \dots, n-1$$

et d'après la condition $S'_k(x_k) = S'_{k-1}(x_k)$ de l'ensemble 2.27 et pour $k = 1, \dots, n-1$ on a :

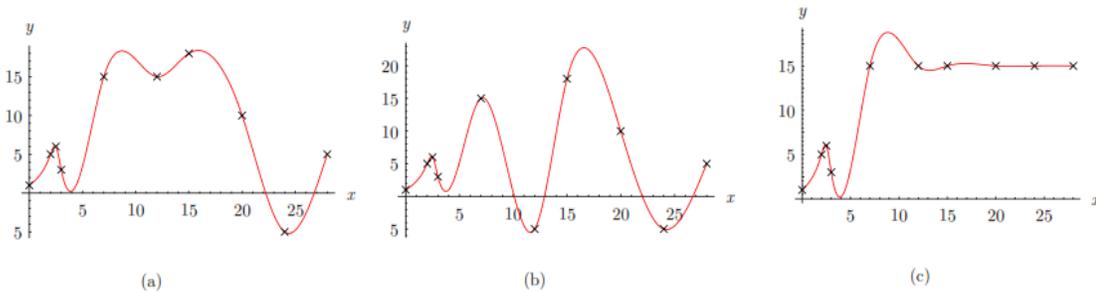
$$\varphi_{k-1} \cdot (x_k - x_{k-1}) + \varphi_k (2(x_{k+1} - x_{k-1})) + \varphi_{k+1} \cdot (x_{k+1} - x_k) = 6 \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{(x_{k+1} - x_k)} - 6 \cdot \frac{y_k - y_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})}$$

Nous avons donc un système à $n-1$ équations à $n+1$ inconnues. Pour pouvoir résoudre ce système, nous fixons arbitrairement φ_0 et φ_n . Généralement, nous choisissons

$$\varphi_0 = \varphi_n = 0 \tag{2.37}$$

ce qui correspond à une courbure nulle aux extrémités de la courbe. Ce type de splines cubiques est appelées splines naturelles par analogie à la déformation naturelle d'une lame de métal (latte de bois ou spline en anglais).

Avec la condition de l'équation 2.37, nous avons $n + 1$ équations avec $n + 1$ inconnues, il est donc possible de résoudre le système. Ensuite, il suffit de remplacer les φ_k dans l'équation $S_k(x)$ pour obtenir l'équation de la spline cubique entre deux points. Puis, nous assemblons ces arcs de cubiques pour avoir le tracé final. La figure 2.3.4 montre les résultats de l'interpolation par splines cubiques sur un exemple.



Interpolation Spline Cubique

Avantages et inconvénients

Comme nous le voyons sur la figure 2.3.4, les courbes sont très harmonieuses. Il n'y a effectivement pas de cassure du rayon de courbure. C'est pourquoi l'interpolation par splines cubiques peut être utilisée dans le cadre de programme de dessin sur ordinateur.

Le désavantage majeur est que la courbe est beaucoup moins robuste que l'interpolation cubique. En effet, tous les points sont liés, le changement d'un de ceux-ci influe sur tout le système d'équations, comme le montre la figure 2.3.4 (a) et 2.3.4(b). Le problème d'oscillation de l'interpolation de Lagrange n'est pas présent, comme nous pouvons le remarquer dans la figure 2.3.4 (c). Un autre inconvénient est que la résolution est beaucoup plus complexe que pour les autres types d'interpolation que nous avons vue. Il existe d'autre type de splines comme les *splines scellées* et les *splines périodique*.

2.4 Approximation par l'approche de Bézier et B-Spline

2.4.1 Courbes de Bézier (Introduction)

L'interpolation n'est pas toujours très adaptée pour certaines utilisations telles que la DAO (dessin assistée par ordinateur) et la CAO (conception assistée par ordinateur). C'est dans le domaine de la CAO que les courbes et les surfaces de Bézier ont été inventées et plus précisément dans l'industrie automobile. Dans les années soixante, les machines à commandes numériques sont apparues, il fallait donc décrire les formes (carrosserie, pièces mécanique etc ...) avec des équations mathématiques. Une des solutions était d'interpoler linéairement un grand nombre de points. Cette méthode a de nombreux inconvénients :

- Trop de paramètres pour les machines de l'époque .
- Il est impossible d'agrandir, de translater ou de déformer une partie d'une pièce sans agrandir, translater ou déformer le reste.
- Le placement des points n'est pas une tâche intuitive pour les designers.
- Il est très harassant de modifier la l'objet (courbe).

Un autre procédé était donc nécessaire pour exprimer une courbe ou une surface avec peu de paramètres. L'idée révolutionnaire des courbes et des surfaces de Bézier est l'utilisation de points de *contrôle* (peu nombreux) et non de points *d'interpolation*. Cela veut dire que la courbe (ou surface) ne passe pas les points donnés mais les approche. Les courbes (surfaces) de Bézier ne sont donc pas des *interpolations* mais des *approximations*. Il y a plusieurs avantages à cela :

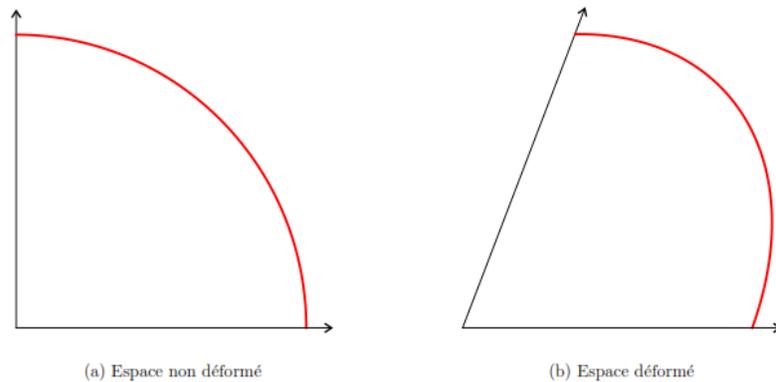
- La courbe (surface) est stable et facile à déformer sans risque d'avoir des résultats fortuits.
- Pour modifier la courbe, il faut modifier que les points de contrôle dont le nombre est petit par rapport aux nombre de points réels qui constitus la courbe ou la surface.
- Le placement des points de contrôle est une tâche relativement évidente.

- Avec des points de contrôle, il est plus facile d'avoir une courbe naturelle, fluide et plus stable qu'avec des points d'interpolation.

en plus de cet ensemble de propriétés, l'approche garde les avantages du modèle numérique (agrandissement, déformation, etc...).

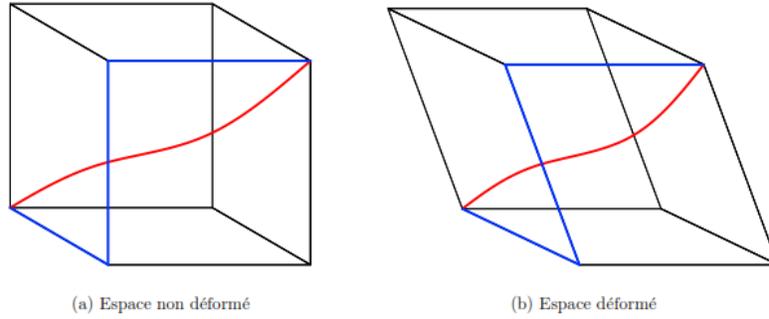
Bien que ce type de courbes porte le nom de Bézier, il n'est pas certain que ce dernier était le premier à les construire. Paul De Casteljaou, a développé le même type de courbes plus ou moins à la même époque bien que son approche diffère de celle de Bézier.

La méthode de Bézier repose sur la notion de déformation de l'espace. Nous partons d'une courbe simple (comme un quart de cercle pour simplifier) liée à un système d'axes. puis, on déforme l'espace, ce qui se répercute sur la courbe (la courbe change). Il est clair que la déformation d'un espace à deux dimensions ne permet pas d'avoir toutes les transformations que nous voudrions avoir sur la courbe, nous utilisons donc, un espace à trois dimensions. La figure 2.4.1 montre une déformation d'un quart de cercle suite à la déformation de l'espace auquel il appartient.



Déformation d'Espace à Deux Dimensions

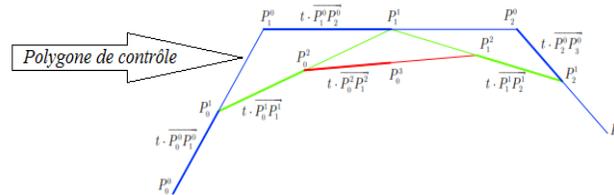
tandisque dans la figure 2.4.1 l'espace est de dimension 3, la courbe est tracée en rouge, les extrémités du trait bleu et cassures de ce dernier, correspondent aux points de contrôle (4 points de contrôles).



Déformation d'Espace 3 Dimension

2.4.2 Approche de De Casteljaou

Au lieu d'agir sur l'espace, l'algorithme de De Casteljaou est la manière la plus simple de dessiner et de manipuler une courbe de Bézier. Le concept est entièrement géométrique. Par exemple si nous voulons une courbe de Bézier avec quatre points de contrôle, nous devons procéder de la manière suivante :



Algo De Casteljaou 4 points de contrôle

La figure 2.4.2 montre le schéma de la construction de De Casteljaou (avec $t = 1/2$). Aux extrémités et aux cassures de la courbe représentant ce qu'on appelle le *polygone de contrôle*, il y a les points de contrôle.

Algorithme de De Casteljaou

1. Les points sont numérotés

$$P_0^0, P_1^0, P_2^0, \dots, P_{n-1}^0 \quad (2.38)$$

2. Nous prenons un paramètre $t \in [0, 1]$.

3. On calcule le point P_0^1 le barycentre de P_0^0 et P_1^0 de la manière suivante :

$$\vec{P}_0^1 = (1-t) \cdot \vec{P}_0^0 + t \cdot \vec{P}_1^0 \quad (2.39)$$

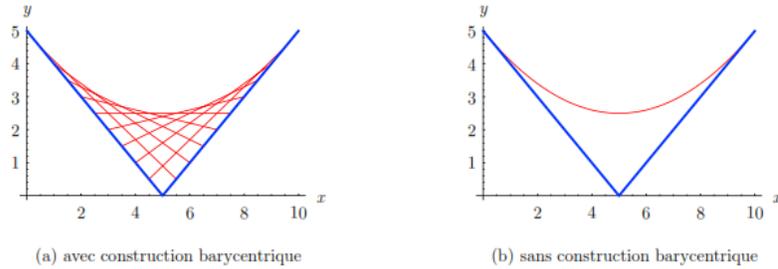
4. De la même manière on calcule \vec{P}_1^1 (le barycentre de \vec{P}_1^0 et \vec{P}_2^0) et \vec{P}_2^1 (le barycentre de \vec{P}_2^0 et \vec{P}_3^0).

5. Ensuite on calcule \vec{P}_0^2 (le barycentre de \vec{P}_0^1 et \vec{P}_1^1) puis \vec{P}_1^2 (le barycentre de \vec{P}_1^1 et \vec{P}_2^1).

6. Et finalement \vec{P}_0^3 (le barycentre de \vec{P}_0^2 et \vec{P}_1^2)

7. Ce dernier point (\vec{P}_0^3) est le point de la courbe de Bézier avec le paramètre t choisi

Nous prendrons pour O l'origine $(0;0)$ et pour simplifier la notation $P_n^i = \vec{P}_n^i$. Nous verrons plus tard que le choix de l'origine n'a aucune incidence sur la forme de la courbe. Si nous faisons varier le paramètre t de 0 à 1 nous obtenons un certain nombre de points appartenant à une certaine courbe qu'on nome *la courbe de Bézier*. La figure 2.4.2 (a) montre la construction d'une courbe de Bézier à trois points de contrôle $((0;5);(5;0);(10;5))$ avec t variant par pas de 0.1. La figure 2.4.2 (b) montre la même courbe mais sans les constructions barycentriques.



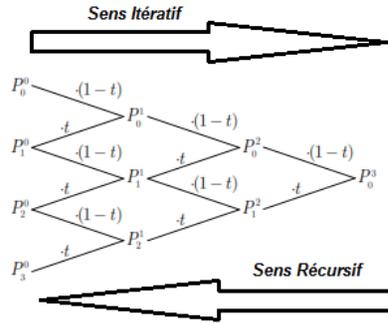
Courbe de Bézier à 3 Points de Contrôle

A présent, nous allons voir comment calculer les points d'une courbe de Bézier. Pour trouver le barycentre $P_0^1(x_0^1, y_0^1)$ entre deux points $P_0^0(x_0^0, y_0^0)$ et $P_1^0(x_1^0, y_1^0)$ nous utilisons la formule suivante :

$$\begin{aligned} x_0^1 &= t \cdot x_1^0 + (1-t) \cdot x_0^0 \\ y_0^1 &= t \cdot y_1^0 + (1-t) \cdot y_0^0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ainsi le barycentre se déplace entre P_0^0 et P_1^0 sur la droite les reliant. Comme nous l'avons vu, il faut répéter plusieurs fois l'opération pour obtenir le niveau P^3 . La figure 2.4.2 montre

le schéma de l'algorithme de De Casteljau (connu aussi sous le nom de schéma pyramidal de De Casteljau).



Pyramide pour 4 points de contrôles

Ce schéma est valable pour 4 points de contrôle. Comme nous pouvons le remarquer, le schéma dispose d'autant de niveaux qu'il y a de points de contrôle. Donc, pour changer de niveau (escalade de la pyramide), nous multiplions par t ou $(1 - t)$, notre courbe à 4 points de contrôle est de degré 3. Bien sur ce type d'arbre est aussi valable pour une courbe dont les points de contrôles est quelconque.

Expressions de la courbe de Bézier

Sachant que Le premier niveau est caractérisé par

$$P_0^0, P_1^0, P_2^0, \text{ et } P_3^0 \quad (2.41)$$

En utilisant le schéma de la figure 2.4.2 dans le sens itératif, on aura :

Pour le deuxième niveau :

$$\begin{aligned} P_0^1 &= P_0^0 \cdot (1 - t) + P_1^0 \cdot t \\ P_1^1 &= P_1^0 \cdot (1 - t) + P_2^0 \cdot t \\ P_2^1 &= P_2^0 \cdot (1 - t) + P_3^0 \cdot t \end{aligned} \quad (2.42)$$

Pour le troisième niveau :

$$\begin{aligned} P_0^2 &= P_0^1 \cdot (1 - t) + P_1^1 \cdot t \\ P_1^2 &= P_1^1 \cdot (1 - t) + P_2^1 \cdot t \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour le quatrième niveau :

$$P_0^3 = P_0^2 \cdot (1 - t) + P_1^2 \cdot t \quad (2.44)$$

Par assemblage des équations 2.42, 2.43 et 2.44 nous pouvons obtenir P_0^3 en fonction des points de contrôle. Nous avons alors l'expression suivante de la courbe de Bézier

$$P_0^3 = (1 - t)^3 \cdot P_0^0 + 3 \cdot t \cdot (1 - t)^2 \cdot P_1^0 + 3 \cdot t^2 \cdot (1 - t) \cdot P_2^0 + t^3 \cdot P_3^0 \quad (2.45)$$

Il est possible d'avoir le même résultat dans le sens récursif. D'après ce qui vient d'être présenté la courbe de Bézier d'ordre n , est générée à partir d'une ligne polygonale à $n + 1$ sommets, l'équation de la courbe peut être donc écrite sous la forme générale :

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot Q_i = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot t^i \cdot (1 - t)^{n-i} \cdot Q_i \quad (2.46)$$

Où :

n : l'ordre de la courbe de Bézier

$n + 1$: le nombre de sommets du polygone de contrôle

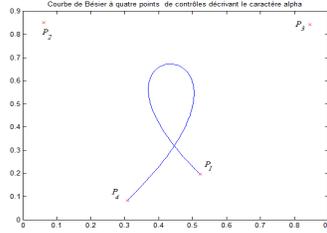
Q_i : le $i^{\text{ème}}$ sommet du polygone de contrôle

$$B(n, i, t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1 - t)^{n-i} \quad (2.47)$$

l'expression 2.47 (qu'on nomme, fonction de pondération) représente un polynôme appelé polynôme de Bernstein d'ordre n et C_n^i représentent les coefficients du binôme de Newton donnés par :

$$C_n^i = \frac{n!}{i! \cdot (n - i)!} \quad (2.48)$$

les $n + 1$ sommets du polynôme de contrôle qui peuvent être de coordonnées planes $Q_i(x_i, y_i)$ ou spatiale (courbe gauche) $Q_i(x_i, y_i, z_i)$.



Courbe de Bézier à 4 points de contrôles

Les courbes de Bézier sont toujours exprimées sous forme paramétrique car pour une utilisation pratique (dessin, CAO, etc.) il est nécessaire que la courbe puisse avoir des points d'inversion (rebroussement) . La figure 2.4.2 montre une courbe de Bézier à 4 points de contrôle et qui se croise. La courbe dessine un caractère α dans le sens de la verticale.

Les points de la courbe de Bézier sont tracés en calculant le centre de gravité des sommets du polygone de contrôle, pondéré par la fonction de Bernstein correspondante pour un paramètre $t \in [0, 1]$. Un segment de courbe de Bézier passe par les extrémités de la ligne polygonale de contrôle, mais pas nécessairement par les autres sommets. Le déplacement d'un seul sommet du polygone de contrôle, agit sur le segment de courbe de Bézier dans sa totalité, d'où la caractéristique de *contrôle globale*. Pour obliger une courbe de Bézier à ce rapproché d'un sommet du polygone de contrôle, il suffit alors de répéter ce dernier sommet plusieurs fois voire exemple.

2.4.3 Propriété des courbes de Bézier

Les courbes de Bézier présentent beaucoup de propriétés intéressantes et c'est pour leurs nombreuses propriétés que ces courbes et surfaces sont largement utilisées dans les logiciels de conception (CAO, CFAO). La plupart de ces propriétés sont très utiles voir indispensables pour toute conception ou fabrication assistée par ordinateur utilisant ces courbes et surfaces. parmi ces propriété nous pouvons citer:

- Indépendance de l'origine
- Interpolation aux extrémités
- Dérivée d'une courbe de Bézier

- Tangentes aux extrémités
- Invariance par transformation affine et rotation
- Propriété de l'enveloppe convexe
- Contrôle local
- Augmentation du degré

Indépendance de l'origine

Nous allons montrer qu'une courbe de Bézier est indépendante du repère. Nous devons tout d'abord montrer que :

$$\sum_{i=0}^n B(n, i, t) = 1 \quad (2.49)$$

Cette propriété des polynômes de Bernstein est intitulée *la partition de l'unité*. Si nous effectuons un changement de base, la nouvelle origine étant O' , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{O'M} &= \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \vec{O'P_i^0} = \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot \left(\vec{O'O} + \vec{OP_i^0} \right) \\ \vec{O'M} &= \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot \vec{O'O} + \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot \vec{OP_i^0} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Avec la propriété de la partition de l'unité, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \vec{O'M} &= \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot \vec{O'O} + \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot \vec{OP_i^0} \\ \vec{O'M} &= \vec{O'O} + \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot \vec{OP_i^0} = \vec{O'O} + \vec{OM} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Donc une courbe de Bézier est indépendante de l'origine. Dans le cas contraire, il aurait été très difficile d'utiliser ce modèle à des fins de conception.

Interpolation aux extrémités

Comme nous le voyons graphiquement, une courbe de Bézier passe par le premier et le dernier point figure 2.4.2. En effet, le premier point est multiplié par le polynôme de Bernstein $B(n, 0)$ tel que :

$$B(n, 0) = 1 \quad \forall t = 0 \quad (2.52)$$

donc en $t = 0$ la courbe passe par P_0^0 . Le dernier polynôme de Bernstein

$$B(n, n) = t^n = 1 \quad \forall t = 1 \quad (2.53)$$

donc à l'extrémité de la courbe en $t = 1$ la courbe passe par P_n^0 . Cette propriété est très importante car s'il n'est pas nécessaire de contrôler entièrement la courbe au milieu, il est primordiale de savoir d'où elle part et où elle arrive pour qu'on puisse la relier à d'autres courbes. Si nous voulons raccorder plusieurs courbes de Bézier, il est obligatoire de savoir où se trouvent les extrémités, car dans un logiciel de dessin, il est souvent nécessaire de relier plusieurs points avec une courbe, là encore, cette propriété est très utile.

Dérivée d'une courbe de Bézier

Il est relativement complexe de dériver une courbe de Bézier de degré n . Pour la dérivée première la démarche est la suivante :

- la dérivée première du polynôme de Bernstein est :

$$\frac{d}{dt}B(n, i, t) = \frac{d}{dt}C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} = n \cdot B(n-1, i-1, t) - n \cdot B(n-1, i, t) \quad (2.54)$$

- c'est à partir de la dérivée d'un polynôme de Bernstein 2.54 que nous pouvons obtenir celle de la courbe de Bézier :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{OM} &= \sum_{i=0}^n \frac{d}{dt}(B(n, i, t)) \cdot \vec{OP}_i^0 \\ &= n \cdot \sum_{i=0}^n B(n-1, i-1, t) \vec{OP}_i^0 - n \cdot \sum_{i=0}^n B(n-1, i, t) \vec{OP}_i^0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

- après un certain nombre de transformations et on posant $j = i - 1$ nous pouvons aboutir à la dérivée d'une courbe de Bézier de degré quelconque :

$$\frac{d}{dt}\vec{OM} = n \cdot \sum_{i=0}^n P_i^0 \vec{P_{i+1}^0} \cdot B(n-1, i, t) \quad (2.56)$$

Cette dernière relation est importante pour le calcul des tangentes et des rayons de courbures.

Tangentes aux extrémités

Il est possible de voir graphiquement que la tangente au début de la courbe correspond à la droite reliant P_0 à P_1 . La tangente à la fin de la courbe est égale à la droite reliant P_n à P_{n-1} . Cette constatation graphique peut être démontrée en utilisant la formule de la dérivée d'une courbe de Bézier calculée en 2.55.

Pour $t = 0$,

$$\frac{d}{dt}\vec{OM}(0) = n \cdot \sum_{i=0}^n P_i^0 \vec{P_{i+1}^0} \cdot B(n-1, i, 0) \quad (2.57)$$

on sait que le polynôme de Bernstein

$$B(n-1, i, 0) = 0 \quad \forall i \neq 0 \quad (2.58)$$

donc la tangente en $t = 0$ est donc égale à :

$$\frac{d}{dt}\vec{OM}(0) = n \cdot P_0^0 \vec{P_1^0} \quad (2.59)$$

ce qui correspond bien à la droite reliant P_0^0 à P_1^0 . Nous pouvons appliquer la même démarche pour $t = 1$ et nous trouvons que :

$$\frac{d}{dt}\vec{OM}(1) = n \cdot P_{n-1}^0 \vec{P_n^0} \quad (2.60)$$

ce qui correspond bien à la droite reliant P_{n-1}^0 à P_n^0 . Ce qui fait que les valeurs des tangentes aux extrémités de la courbe sont logiques ce qui facilite énormément l'utilisation de courbes de Bézier. Cette propriété est très intéressante pour joindre plusieurs courbes de Bézier sans

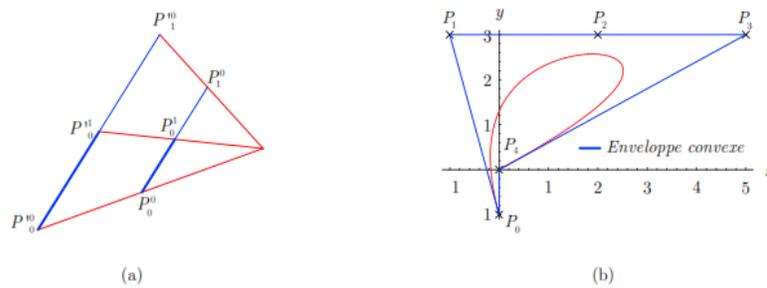
rupture de pente (continuité de la pente).

Invariance par transformation affine et rotation

Une courbe de Bézier ne change pas de forme si nous lui faisons subir une transformation affine (translation et homothétie) ou une rotation. Cela s'explique grâce à la construction géométrique de De Casteljau. Nous prendrons comme exemple une courbe de Bézier à 3 points de contrôle (P_0^0, P_1^0, P_2^0) qui subit une transformation sur $(P_0'^0, P_1'^0, P_2'^0)$. Si les trois points sont tradlatés, la courbe ne changera pas car la construction sera identique. Si les points de contrôle subissent une homothétie, il n'y aura pas de changement de la forme de la courbe, car les rapports entre $(P_0'^0, P_1'^0, P_0'^1)$ seront identiques à ceux entre (P_0^0, P_1^0, P_0^1) et c'est ce que démontre la loi de Chail (loi fondamentale en géométrie). Les rapports sont aussi respectés avec $(P_1'^0, P_2'^0, P_1'^1)$ et (P_1^0, P_2^0, P_1^1) . La situation est représentée sur la figure 2.4.3 (a).

La construction sera donc identique pour la rotation des points de contrôle, il n'y a évidemment pas de changement. En effet, lors de la construction pyramidale, la rotation du polygone de contrôle n'a pas d'influence sur la forme de la courbe. Les rapports entre $(P_0'^0, P_1'^0, P_0'^1)$ et (P_0^0, P_1^0, P_0^1) sont identiques.

Ces propriétés, qui sont plus ou moins évidentes, sont néanmoins primordiales. En effet, lors d'une utilisation pratique comme dans un logiciel de CAO, il est indispensable de pouvoir translater, agrandir (pour mieux voir les détails), faire subir une rotation (pour voir les faces cachées) à une pièce sans que cette dernière ne se déforme.



Homothétie et enveloppe convexe

Propriété de l'enveloppe convexe

L'enveloppe convexe d'une courbe de Bézier est le polygone passant par les points de contrôle d'une courbe de Bézier de sorte que le polygone soit le plus grand possible. La figure 2.4.3 (b) montre l'enveloppe convexe d'une courbe de Bézier. Une courbe de Bézier est toujours contenue dans son enveloppe convexe, c'est une conséquence du schéma pyramidale de De Casteljau. En effet, les barycentres se trouvent toujours à l'intérieur du polygone de contrôle.

La propriété de l'enveloppe convexe est aussi une conséquence de la partition de l'unité de la somme des polynômes de Bernstein. Cette propriété est parfois appelée la propriété des tests de collisions (propriété en robotique), en effet, si le bras d'un robot suit une courbe de Bézier, il ne sortira jamais de son enveloppe convexe. Il est donc possible de savoir très simplement si le robot va faire une collision ou pas (sachant que tous les obstacles sont à l'intérieur ou à l'extérieur de cette enveloppe).

Contrôle local

Comme nous l'avons expliqué, une courbe de Bézier n'est pas une interpolation mais une approximation et, de plus, le changement d'un point influence toute la courbe. Le terme de contrôle pseudo-local est plus approprié dans ce cas là. Nous prenons une courbe de Bézier de degré n et nous changeons un des points de contrôle de cette courbe. Ce changement affecte toute la courbe, il est néanmoins possible de savoir où la variation sera la plus importante, pour cela on va chercher les maximums du polynôme $B(n, i, t)$ de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt}B(n, i, t) = t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i-1} \cdot (i \cdot (1-t) - t \cdot (n-i)) = 0 \quad (2.61)$$

il est facile de vérifier que :

$$t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i-1} = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0 \quad \text{et} \quad t = 1 \quad (2.62)$$

et

$$(i \cdot (1-t) - t \cdot (n-i)) = 0 \quad \text{pour} \quad t = \frac{i}{n} \quad (2.63)$$

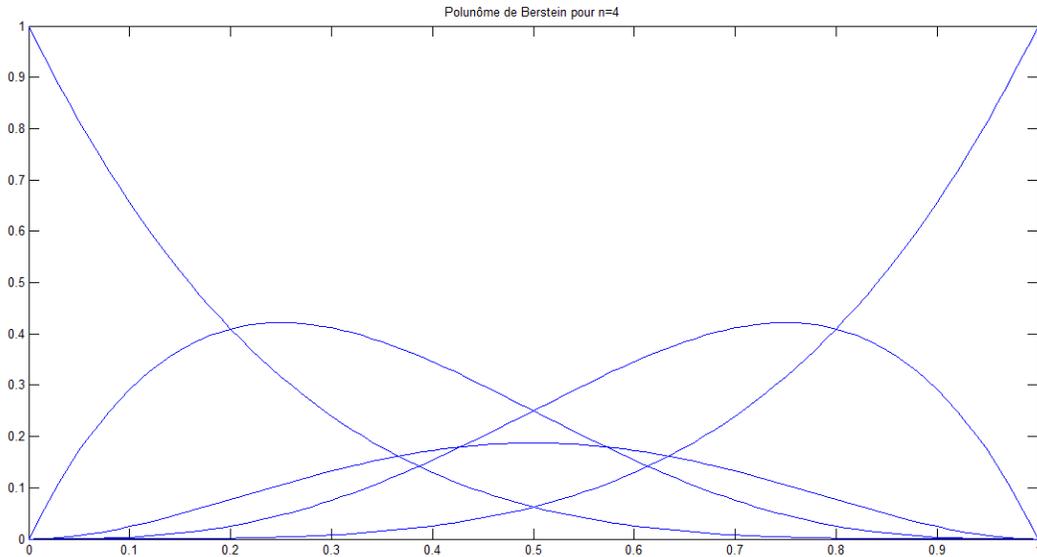


Figure 2-2: polynômes de Bernstein

le maximum est donc unique. Nous pouvons affirmer que c'est un maximum car les valeurs d'un polynôme de Bernstein sont toujours positives et nulles aux extrémités. Comme exemple on va prendre une courbe du second degré 2 c'est à dire :

$$\overrightarrow{OM} = B(2, 0, t) \cdot \overrightarrow{OP_0} + B(2, 1, t) \cdot \overrightarrow{OP_1} + B(2, 2, t) \cdot \overrightarrow{OP_2} \quad (2.64)$$

lorsqu'on fait varier le point P_1 La variation sera maximum lorsque le polynôme $B(2, 1, t)$ atteindra sa valeur maximum pour $t = \frac{1}{2}$, et dans le cas générale, si on fait varier le point P_i , la variation sera maximum en $t = \frac{i}{n}$. Cette propriété est très importante car elle permet de prévoir le comportement d'une courbe de Bézier lorsque ses points formant le polygone de contrôle changent voire figure 2-2.

Augmentation du degré

Il est possible de changer le degré d'une courbe de Bézier sans changer la forme de celle-ci et nous tenons à rappeler que nous parlons d'une augmentation et non pas une diminution du degré d'une courbe car cette dernière n'est possible qu'avec des cas très particuliers. L'augmentation du degré permet de rajouter des points de contrôles ou de dupliquer un ou plusieurs points de

contrôle (donc d'augmenter le degré) sans toucher à la forme de la courbe (déplacé des point de contrôle). A titre d'exemple nous prenons une courbe de degré $n = 3$ (4 points de contrôle), P_0, P_1, P_2, P_3 , au lieu de cette configuration, nous voulons avoir une configuration avec 5 points de contrôle P_0, Q_1, Q_2, Q_3, P_3 . Les points extrêmes ne changeant évidemment pas, voire figure 2-3

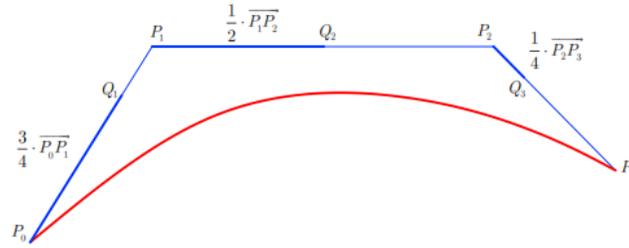


Figure 2-3: Augmentation du degré du polynôme

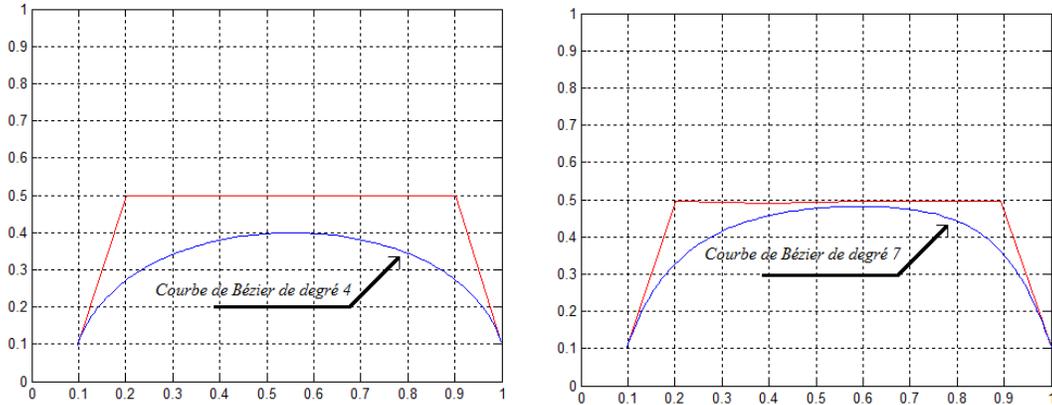
Les points Q_1, Q_2 , et Q_3 sont placés de la manière suivante :

$$\overrightarrow{P_0Q_1} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \quad \overrightarrow{P_1Q_2} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \quad \overrightarrow{P_2Q_3} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{P_2P_3} \quad (2.65)$$

généralement les points Q_k sont définis par la formule de récurrence suivante:

$$\overrightarrow{P_kQ_{k+1}} = \frac{n-k}{n+1} \cdot \overrightarrow{P_kP_{k+1}} \quad (2.66)$$

A chaque application de cette propriété un point de contrôle s'ajoute. Il est évidemment possible de répéter l'opération pour obtenir autant de points de contrôle que nous souhaitons. Avec l'augmentation du nombre de points de contrôle, la courbe devient plus difficile à manipuler, mais l'augmentation du degré est utilisée pour contrôler localement la courbe car il est difficile d'obtenir une courbe harmonieuse en plaçant manuellement de nombreux points de contrôle (figure 2.4.3).



Le passage du degré 4 au degré 7

Par exemple, la modification d'un point d'une courbe de degré 2 change toute la courbe. Si nous augmentons le degré de cette courbe pour obtenir 15 points de contrôle, il sera facile de faire des modifications qui ont essentiellement un caractère local (voire figure 2-4).

Comme conclusion nous pouvons dire que nous avons étudié les propriétés les plus importantes c'est à dire les propriétés qui ont une utilité pratique. Il existe d'autres propriétés que nous n'avons pas traité comme les dérivés d'ordre n ainsi que la notion des probabilités des courbes de Bézier.

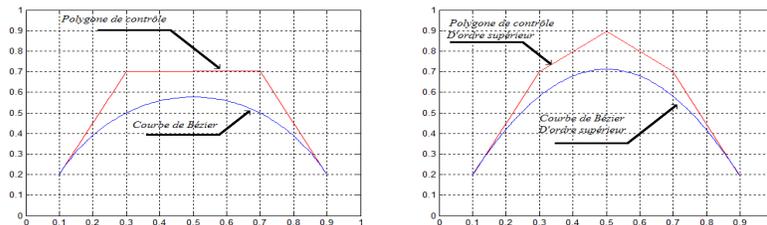


Figure 2-4: Effet de l'augmentation du degré du polynôme

Avantages et inconvénients

La plupart des avantages des courbes de Bézier ont déjà été cités, les propriétés de courbes de Bézier que nous avons vues sont presque toutes des avantages pour une utilisation pratique. Néanmoins, les courbes de Bézier ont quelques inconvénients dont on peut citer :

1. courbe ne passant pas par les points de contrôle

2. il peut être difficile de contrôler la courbe bien que, comme nous l'avons vu, l'utilisation de points de contrôle facilite souvent la conception.
3. le manque de contrôle local
4. le degré des courbes.

Ainsi, les courbes de Bézier ne seraient pas très efficaces pour tracer une courbe représentant des mesures. Pour ce type de problèmes, nous utilisons plus tôt l'interpolation cubique et les splines cubiques. Pour le troisième inconvénient, la modification d'un point fait bouger toute la courbe. Dans l'industrie de l'automobile par exemple, il est gênant que toute la pièce change de forme lorsque nous voulons seulement faire varier une partie de cette dernière. Au niveau des calculs, il faudra calculer à nouveau toute la pièce,

Pour une forme complexe, nous devons utiliser beaucoup de points de contrôle donc le degré de la courbe est élevé, cette dernière devient lourde et difficile à manipuler. C'est pour cette raison que nous préférons raccorder plusieurs segments de courbes de Bézier de degré moindre.

2.4.4 Raccordements de courbes de Bézier

Principe

Comme nous l'avons vu ci-dessus, il serait intéressant de raccorder plusieurs courbes de degré peu élevé pour former une courbe complexe. Généralement, nous utilisons des courbes de degré 3 car elles sont simples et permettent d'avoir des points d'inflexion. Il est évidemment nécessaire d'assurer la continuité entre les courbes. La continuité la plus simple et celle de classe C^0 , c'est à dire qu'il suffit que la courbe soit continue. Étant donné qu'une courbe de Bézier passe par les points de contrôle extrêmes, il suffit de dire que le dernier point de contrôle d'une courbe sera le premier de la courbe suivante. Nous noterons la première courbe \overrightarrow{OM} et la suivante $\overrightarrow{OM'}$. Dans de telles situations les raccordements ne sont pas du tout satisfaisants car, il y a des cassures (la première dérivée n'est pas continue).

Classes de continuité

Une courbe est de continuité géométrique de classe G^1 lorsque nous n'observons aucun changement de direction sur la courbe. Néanmoins la vitesse peut changer au raccord. La figure 2-5

montre le raccord entre deux courbes de degré 3. Comme la tangente au point P_3 est égale à une certaine valeur $\tau \cdot \overrightarrow{P_3P_2}$, pour que la pente de la courbe ne varie pas, il faut donc que :

$$\overrightarrow{P_3P_2} = \tau \cdot \overrightarrow{P'_1P_3} \quad (2.67)$$

Dans le cadre d'un raccordement de type G^1 les vecteurs dérivées ont la même direction mais pas forcément la même norme. Par fois il peut être gênant d'avoir de tels raccords pour certaines application industrielle pour lesquelles (comme en robotique) la vitesse doit être constante. Dans ce cas de figure on opte pour une continuité de classe C^1 (direction et la norme du vecteur dérivée sont continues), il n'y a donc pas de changement de vitesse avec un raccord de type C^1 . Celui-ci doit donc respecter la condition :

$$\overrightarrow{P_3P_2} = \overrightarrow{P'_1P_3} \quad (2.68)$$

On plus de l'avantages de garantir la continuité du vecteur vitesse. Comme on peut le constater sur la figure 2-5 , le point P'_1 est placé automatiquement à l'aide des deux point P_2 et P_3 . Avec des raccords de type G^1 le point P'_1 aurait pu être placé n'importe où sur la droite reliant P_2 à P_3 . Cette liberté rend les courbes plus difficiles à construire car nous ne savons pas où placer ce point sur la droite en question.

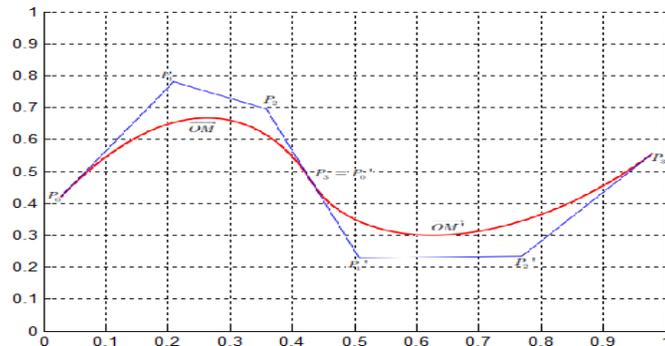


Figure 2-5: Raccord de deux courbes de Bézier

La figure 2-6 montre un exemple où le programme intercale de nouveaux points de contrôle dans la liste que nous lui avons fournie, et cela pour garantir une continuité de type C_1 . Puis

il calcule les points pour chaque arc. Nous avons fourni 8 points au programme. Il a du en rajouter 2 pour assurer la continuité C_1 (les points entourés en rouge). La courbe en rouge est composée de 3 arcs, ce type de courbes de Bézier est appelé courbes de Bézier composites car on a des points d'interpolation au milieu de la courbe (ce qui n'est pas le cas pour les courbes définies plus haut). Les raccords de type G^2 et C^2 sont semblables à G^1 et C^1 sauf qu'ils prennent en compte la dérivée seconde (pour assurer la continuité du rayon de courbure).

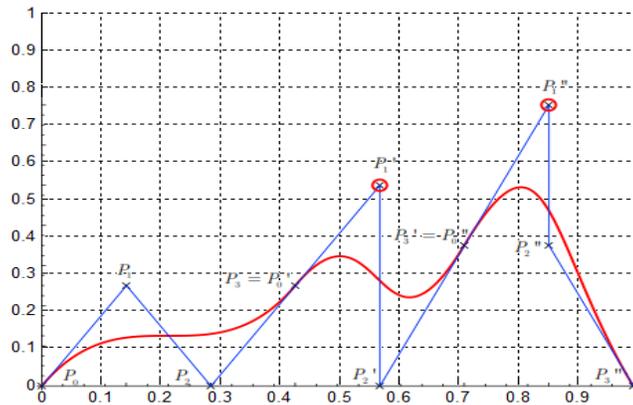


Figure 2-6: Raccord de 3 courbes de degré 3

Le principal avantage des courbes de Bézier composites est que le nombre de points de contrôle peut être très grand sans que la courbe ne devienne instable et difficile à manipuler. Il est aussi intéressant d'avoir des points d'interpolation au milieu de la courbe et pas seulement aux extrémités. Il est néanmoins difficile d'exploiter cette propriété car elle ne concerne que certains points. Un autre avantage des courbes de Bézier composites est la robustesse, en effet la modification d'un point ne fait pas bouger toute la courbe. La figure 2-7 illustre la situation.

Mais le principal inconvénient de ce type de courbe est que le modèle n'est pas optimal, c'est à dire certains points de contrôle peuvent être inutiles, car si nous regardons la figure 2-7, le point P'_0 peut être défini grâce à P_2 et P'_1 ou encore P'_1 avec P'_0 et P_2 . Un autre type de fonctions d'approximations permettent de résoudre de tels problèmes se sont les B-Splines.

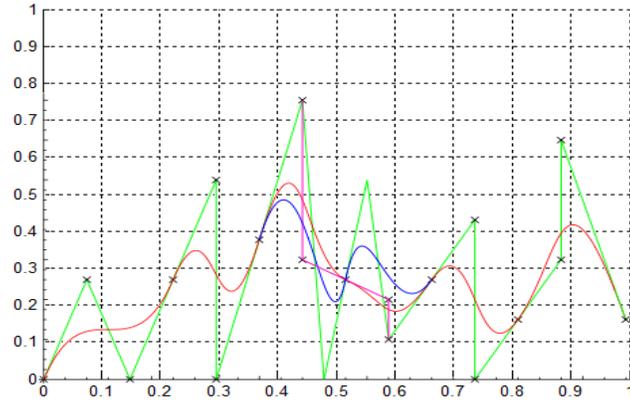


Figure 2-7: Robustesse dans le cas de raccordement

2.4.5 Conclusion sur les courbes

Ce qui vient d'être exposé jusqu'ici concerne exclusivement les courbes, pour nous permettre de bien maîtriser le concept mathématique les régissant. Pour le problème de CAO qui nous concerne, nous allons avoir presque exclusivement recouru aux surfaces pour la construction des surfaces (représentant des pièces) et la reconstruction des surfaces déformées en utilisant les résultats issus de la méthode des éléments finis (dont nous allons exposer la théorie au chapitre suivant). Toutes les caractéristiques que ce soit des avantages ou des inconvénients des courbes de Bézier que nous avons exposé ci-dessus, sont les mêmes pour les surfaces. Donc l'interpolation et l'approximation ne se limitent pas aux courbes. Il est possible de définir des surfaces et c'est ce qui va être expliqué ci-dessous.

2.4.6 Surfaces ou carreaux de Bézier

Definition 1 Les carreaux de Bézier sont des surfaces d'approximation définies à l'aide de courbes de Bézier. Il faut d'abord choisir des points de contrôle. Ceux-ci peuvent être vus comme un quadrillage. Les lignes sont numérotées i et les colonnes j . Ainsi, les points de contrôle sont de type

$$P_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i \in [0, n] \\ j \in [0, m] \end{cases} \quad (2.69)$$

pour $n = m$, on parle de *castrillage carré*

2.4.7 Polynômes de Bernstein pour une surface

Nous pouvons définir une surface par une courbe qui se déplace en changeant de forme. Disons que cette courbe est une courbe de Bézier de degré m . A chaque moment, la courbe est définie par un ensemble de points de contrôle. Le chemin d'un point de contrôle, est aussi une courbe de Bézier. Tous les points de contrôle suivent une courbe de même degré n .

La courbe qui se déplace peut être écrite de la manière suivante :

$$b_m(t) = \sum_{i=0}^n B(n, i, t) \cdot \overrightarrow{OP_i} \quad (2.70)$$

$\overrightarrow{OP_i}$ étant les points de contrôles. Chaque $\overrightarrow{OP_i}$ décrit une courbe de Bézier tel que:

$$\overrightarrow{OP_i} = \sum_{j=0}^m B(m, j, t) \cdot \overrightarrow{OP_{ij}} \quad (2.71)$$

$\overrightarrow{OP_{ij}}$ étant les points de contrôles de la courbe j variant de 0 à m . En combinant les deux équations, nous pouvons tirer l'équation de la surface de Bézier tel que :

$$\overrightarrow{OM}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B(n, i, t) \cdot B(m, j, t) \cdot \overrightarrow{OP_{ij}} \quad (2.72)$$

Comme pour les courbe de Bézier, Il existe un algorithme de De Casteljaou pour les surfaces de Bézier, il suffi de créer une surface bilinéaire, c'est-à-dire une surface de Bézier ou

$$m = n = 1$$

La figure f41 montre une surface de Bézier bilinéaire avec les points de contrôle suivants :

$$P_{0,0} = (0, 0, 0), \quad P_{0,1} = (1, 0, 0), \quad P_{1,0} = (1, 1, 1), \quad P_{1,1} = (1, 0, 1),$$

On remarque que la surface passe par les points de contrôle c'est pour cette raison que la surface est appelée interpolation bilinéaire. Nous avons vu que la construction géométrique de

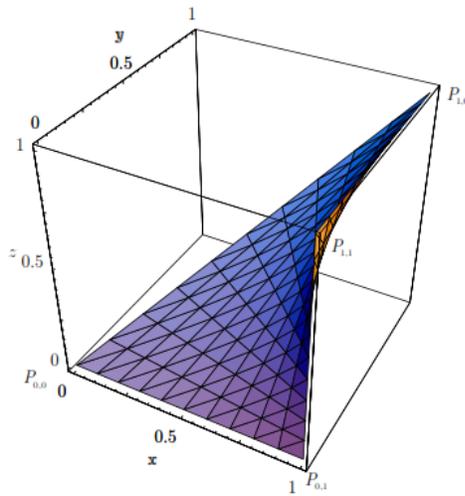


Figure 2-8: Carreau de Bézier bilinéaire

De Casteljau fait varier linéairement le barycentre de deux points. En trois dimension (pour les surfaces), l'idée reste la même, nous appliquons l'interpolation bilinéaire plusieurs fois jusqu'à ce que nous obtenons la surface de Bézier. La figure 2-9 (a) montre une surface de Bézier avec $n = m = 3$:

Le polygone de contrôle de la figure 2-9 (b) ou les points de contrôle ont été soigneusement placés. Il est aisé de voir que la surface passe par les quatre coins du polygone de contrôle. La surface est bien sûr attirée par les points de contrôle. Les points de contrôle atteignent 5 sur l'axe z et la surface atteint presque la valeur 3. La figure 2-10 représente une surface avec $n = m = 3$ et avec des points de contrôle générés de manière aléatoire.

Avec peu de points de contrôle, il est possible de réaliser des surfaces complexes. D'après les exemples qu'on vient d'exposer, on en tire les propriétés suivantes :

- une surface de Bézier se trouve toujours dans l'enveloppe convexe définie par ses points de contrôle.
- la surface interpole les coins du quadrillage :

$$P_{0,0}, \quad P_{0,m}, \quad P_{n,0}, \quad P_{n,m}.$$

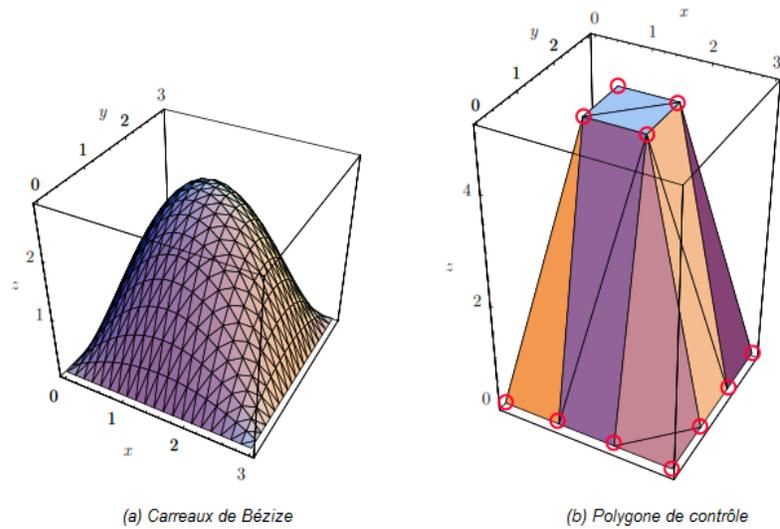


Figure 2-9: Carreaux de Bézier avec $n = m = 3$

- Les carreaux de Bézier sont aussi dérivables.
- Il est possible d'augmenter le nombre de points de contrôle sans modification importante de la surface.
- etc . . .

Il est bien entendu possible de raccorder des surfaces de Bézier, comme nous l'avons fait pour les courbes.

2.4.8 La notion de courbes B-Splines

Introduction

Il s'agit de réfléchir à un outil qui permet de fabriquer une courbe qui présente tous les avantages des courbes de Bézier mais sans les inconvénients. Ainsi, la courbe B-Splines devra :

- approximer les points de contrôle,
- être simple à manipuler,
- présenter les mêmes propriétés que les courbes de Bézier,

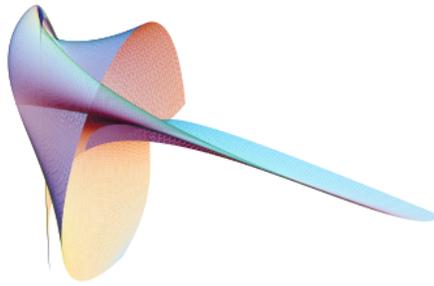


Figure 2-10: Surface de Bézier complexe

- le degré de la courbe ne devra pas être proportionnel au nombre de points de contrôle mais fixe.
- la modification d'un point ne doit pas affecter toute la courbe.
- etc ...

Les B-Splines ont été développée chez le constructeur d'avions Boeing dans les années 70 et 80. Comme un concept mathématique, les B-Splines existait déjà avant mais n'était pas utilisées et la théorie n'était pas finalisée.

le principe fondamental des B-Splines est de remplacer les polynômes de Bernstein par d'autres fonctions. Ensuite, on fait la sommation de ces fonctions avec les points de contrôles pour obtenir la courbe. Une B-Spline ne dépend pas uniquement des points de contrôle mais aussi d'un vecteur intitulé vecteur nœud.

Le concept mathématique des courbes B-Splines

On défini un vecteur nœud qu'on note

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \quad \text{avec} \quad t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \quad t_i \in \mathbb{R} \quad (2.73)$$

On défini également des points P_0, P_1, \dots, P_m . Le choix de l'origine O n'ayant pas d'importance on note

$$P_i = \overrightarrow{OP_i}$$

Nous voulons construire une courbe $X_0(t)$ telle que :

$$\begin{aligned} X_0(t_0) &= P_0 \\ X_0(t_1) &= P_1 \\ &\vdots \\ X_0(t_i) &= P_i \end{aligned} \quad \forall i \in [1, m] \quad (2.74)$$

La courbe définit par :

$$X_0(t) = P_i \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\quad (2.75)$$

satisfait les conditions et a la forme suivante :

$$X_0(t) = \sum_i B_{i,0}(t) \cdot P_i \quad (2.76)$$

ou :

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.77)$$

Cette solution n'est pas satisfaisante car la fonction ainsi construite est une fonction discontinue. Nous cherchons à approcher cette courbe discontinue $X_0(t)$ par une meilleure courbe que nous noterons $X_1(t)$ qui sera linéaire par morceaux, c'est à dire : soit quand $t \in [t_i, t_{i+1}[$, la fonction $X_1(t)$ parcourt la droite reliant P_{i-1} à P_i , ce qui peut se traduire par :

$$X_1(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \cdot P_{i-1} + \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) P_i \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\quad (2.78)$$

ou :

$$\begin{aligned} X_1(t_i) &= P_{i-1} \\ X_1(t_{i+1}) &= P_i \end{aligned} \quad (2.79)$$

Si $t_0 \neq t_1 \neq \dots, \neq t_m$, alors $X_1(t)$ est continue et peut être écrite sous la forme :

$$X_1(t) = \sum_i B_{i,1}(t) \cdot P_i \quad (2.80)$$

tel que :

$$B_{i,1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot B_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,0}(t) \quad (2.81)$$

Nous avons donc une définition de la fonction pour le de degré égale à 1 ($X_1(t)$), à partir de la fonction de degré 0 ($X_0(t)$). Par récurrence nous pouvons définir $X_k(t)$ à partir de $X_{k-1}(t)$ de la manière suivante :

$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t) \cdot P_i \quad (2.82)$$

la figure 2-11 nous donne le schéma récurssif pour le calcule des fonctions $B_{i,k}(t)$.

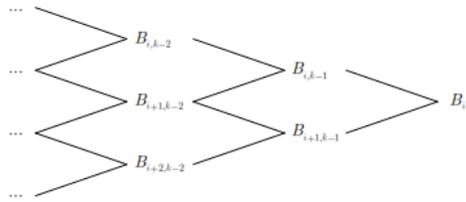


Figure 2-11: Pyramide réursive pour les $B_{i,k}(t)$.

Propriétés des fonctions de base

Pour $k = 1$: Les noeuds ont été placés de la manière suivante :

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2, \dots, t_6 = 6 \quad (2.83)$$

La figure 2-12 (a) montre les fonctions de base obtenues avec les noeuds placés en position abscisse $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La figure 2-12 (b) montre les fonctions de base avec les noeuds placés en position abscisse $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, nous pouvons aisement voir que dans les deux cas les courbes atteignent des maximums en 1. Pour 7 noeuds nous avons obtenu 5 courbes : $B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{3,1}, B_{4,1}$.

On voit que les courbes partant de t_0 arrivent en t_2 , c'est à dire qu'on générale :

partant de t_i arrivent en t_{i+2}

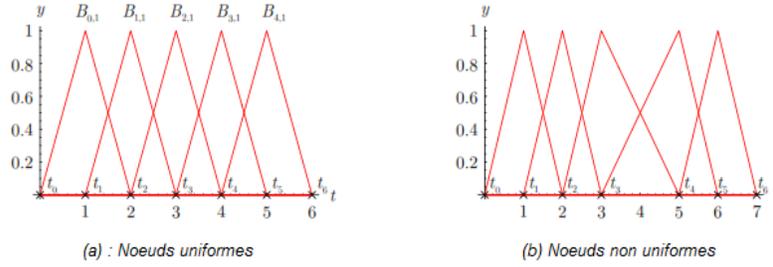


Figure 2-12: Fonction de base pour $k = 1$

Pour $k = 2$: Nous plaçons les noeuds comme dans pour $k = 1$

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_6 = 6$$

Dans le cas ou les noeuds placés en position abscisse $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, nous obtenons le résultat représenté sur al figure 2-13 (a). La la figure 2-13 (b) est obtenu pour le vecteur noeud $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Sur ces deux dernière figures, nous voyons que le maximum des courbes ne se trouve plus à 1 mais approximativement à 0.75, si les noeuds sont uniformément répartis. Le maximum varie si les noeuds ne sont pas uniformément répartis et les courbes ne sont plus symétriques. Dans ce cas là nous avons quatre courbes $B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{3,2}$ (au lieu de cinq) qui partent en t_i et arrivent en t_{i+3} .

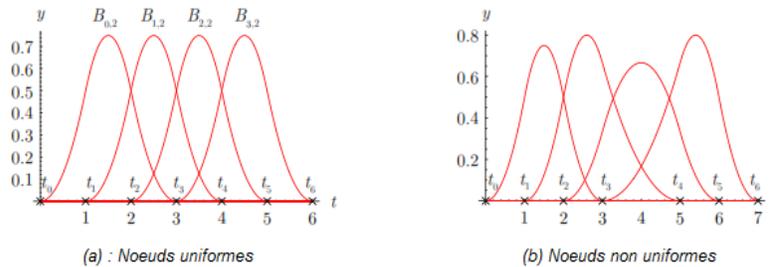


Figure 2-13: Fonction de base pour $k = 2$

Pour $k = 3$: Nous allons particulièrement étudier ce dèrnier cas ($k = 3$). En effet, comme nous l'avons déjà vu, le degré 3 est particulièrement intéressant pour les courbes d'interpolation

et d'approximation (existence de points d'inflexions). La figure figure 2-14 (a) montre les $B_{i,3}$ avec les noeuds suivants : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ avec $m = 8$, la figure 2-14 (b) montre les fonctions de base avec des noeuds nonuniformes. Il aisé de voir que les courbes s'étalent de t_i à t_{i+4} . Nous pouvons généraliser en disant qu'une courbe part de t_i et arrive à t_{i+k+1} . et que $i \in [0, m - k - 1]$, il y a donc $m - k$ fonctions B .

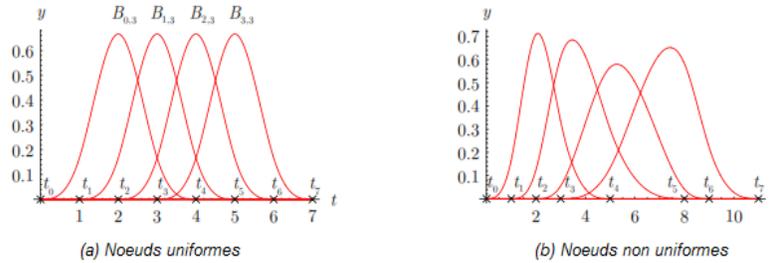


Figure 2-14: Fonction de base pour $k = 3$

Multiplicité d'un noeud

La figure 2-15 (a) montre le résultat avec les noeuds $\{0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5\}$ c'est à dire $m = 8$, (le noeud 3 est de multiplicité 3). Nous voyons que la courbe atteint 1 au point 3. Cela nous permet de faire la constatation suivante :

$$si \quad t_{i+1} = t_{i+2}, \dots, = t_{i+k} \quad (2.84)$$

ce noeud est de multiplicité k . Alors $B_{i,k}$ aura un maximum en t_{i+1} qui vaudra 1. Cette propriété n'est pas valable pour le premier et le dernier noeud. Il est aussi facile de constater sur la figure 2-15 (a) au niveau du noeud 3 que la fonction n'est pas dérivable, et cela peut être expliqué de la manière suivante :

la dérivabilité des fonctions $B_{i,k}$ est égale à $k - \lambda$, ou λ le nombre de multiplicité

$$si \quad k = \lambda \quad B_{i,k} \text{ n'est pas dérivable}$$

$$si \quad k < \lambda \quad B_{i,k} \text{ est discontinue}$$

Pour les extrémités, il faut répéter $k + 1$ fois les noeuds pour avoir un maximum égale à 1 voire figure 2-15 (b)

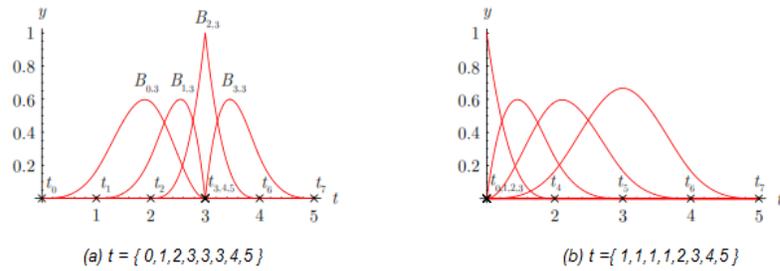


Figure 2-15: Multiplicité des noeuds

2.4.9 Les courbes B-Splines

Dans cette étude nous nous intéressons au cas ou $k = 3$. Une courbe B-Spline est définie de la manière suivante :

$$X_k = \sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) \cdot P_i \quad (2.85)$$

les P_i étant les points de contrôle de la courbe. le vecteur noeud $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ sera tel que :

$$m = n + k + 1 \quad (2.86)$$

Nous allons donc nous intéresser au degré 3, bien que les démarches peuvent être généralisées. Si nous voulons placer n points de contrôle, nous devons avoir $n + 4$ noeuds. On choisissant les noeuds $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de la figure 2-14 (a) pour tracer la courbe B-Splines avec les points de contrle suivants:

$$\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 1\},$$

nous obtenons le résultat présenté à la figure 2-16. ou $t \in \{0, 7\}$, le polygone de contrôle étant dessiné en bleu, la courbe obtenue est très étrange. Elle ne passe pas par le premier et dernier point de contrôle, mais part et arrive à l'origine. Nous pouvons justifier ce résultat comme suite : au niveau de la figue 2-14 (a) nous pouvons constater que pour $t = 0$ et $t = 7$ les $B_{i,3}$ sont

nuls, donc la courbe B-Splines sera également nulle, une telle courbe n'est pas très intéressante car elle part et s'achève toujours à l'origine. Pour supprimer cet inconvénient, il suffit de faire varier le paramètre $t \in [3, 4]$ (voire figure 2-17 représentant la partition unité) c'est à dire la où

$$\sum_i B_{i,k} = 1$$

nous obtenons donc uniquement la partie verte de la courbe de la figure 2-16.

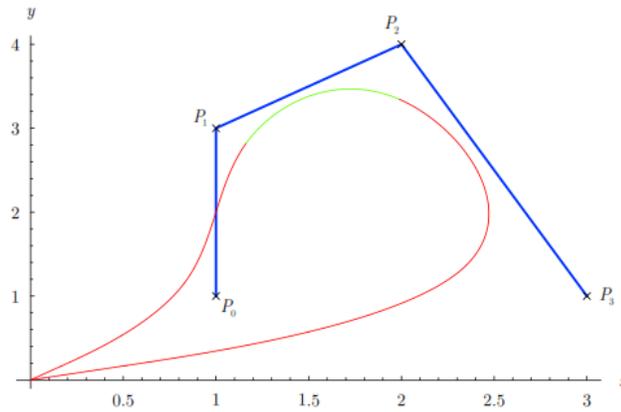


Figure 2-16: Courbe B-Spline pour $k = 3$

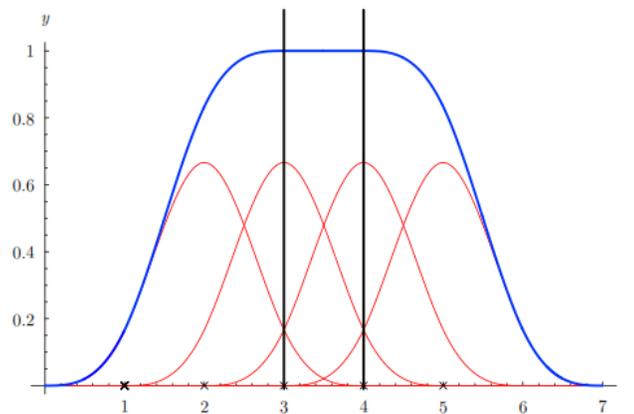


Figure 2-17: Partition de l'unité

Il serait intéressant aussi et utile d'avoir des courbes B-Splines qui passe par les points de

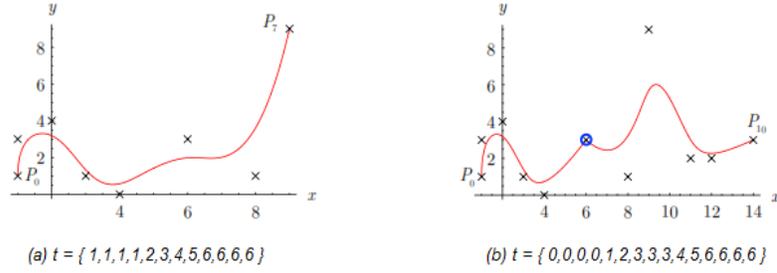


Figure 2-18: B-Spline avec multiplicité des noeuds pour $k = 3$

contrôle extrêmes. Il suffit de répéter $(k + 1)$ fois (dans notre cas 4 fois pour $k = 3$), les premiers et derniers noeuds. Comme nous pouvons le voir à la figure 2-15 (b), en effet si nous répétons 4 fois le premier, la somme :

$$\sum B_{i,3} = 1 \quad \text{pour} \quad t = t_0 \quad (2.87)$$

nous pouvons en déduire que :

$$X_3(t_0) = P_0$$

de la même manière si nous répétons 4 fois le dernier noeud, par le même raisonnement nous arrivons à :

$$X_3(t_{m-4}) = P_m \quad (2.88)$$

En conclusion, quand un noeud est répété 4 fois pour $(k = 3)$ dans les extrémités, nous avons ce que nous appelons un *noeud ouvert* et en même temps la courbe B-Splines correspondante est à noeud ouvert. La figure 2-18 (a) montre ce cas là.

Le vecteur noeud dans ce cas là est : $\{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6\}$. Le choix uniforme des noeuds au milieu $(2, 3, 4, 5)$ n'est pas obligatoire bien qu'il n'y a pas un grand intérêt à choisir des noeuds non-uniformes. On tient à préciser également qu'une courbe avec les noeuds $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ sera la même que celle avec $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. En effet, quand on examine la formule :

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad (2.89)$$

doubler ou tripler les t_i n'a aucune influence sur la courbe.

Il est aussi possible de faire passer la courbe par un point en répétant ce point 3 fois (bien sûr pour $k = 3$). Nous prenons 9 noeuds distincts et choisissons

$$P_1 = P_2 = P_3 \quad (2.90)$$

on calcule :

$$X_3(t_4) = B_{1,3} \cdot P_1 + B_{2,3} \cdot P_2 + B_{3,3} \cdot P_3$$

les autres bases éléments de la base

$$B_{4,3} = B_{5,3}, \dots = 0 \quad \text{pour } t = t_4$$

nous pouvons donc écrire

$$X_3(t_4) = (B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3}) \cdot P_1 \quad (2.91)$$

la partition de l'unité nous permet de dire que

$$B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3} = 1 \quad (2.92)$$

donc

$$X_3(t_4) = P_1 \quad (2.93)$$

Cette manière d'interpoler les points de contrôle n'est pas meilleure que de tripler les noeuds. En effet, comme le montre la figure 2-19, la courbe n'est pas dérivable au point de contrôle interpolé.

2.4.10 Comparaison entre courbes de Bézier et courbes B-Spline

Les courbes de Bézier sont un cas particulier des B-Splines, ceci peut être démontré comme suite : En effet, si nous dessinons les fonctions de base avec les noeuds suivant

$$t = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$$

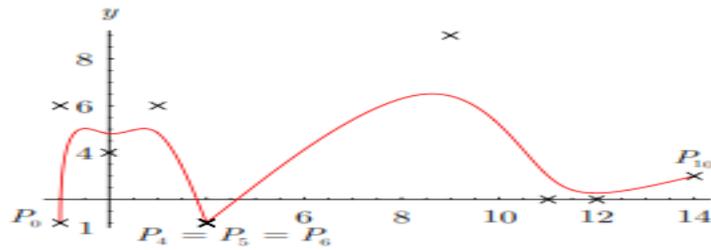


Figure 2-19: Interpolation des points de contrôle par répétition des points

les fonctions de base $B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3}$ deviennent les polynômes de base de Bernstein $B(n, i)$ pour $n = 3$ et $i \in [1, 3]$, et c'est ce qui est représenté dans la figure 2-20 (a).

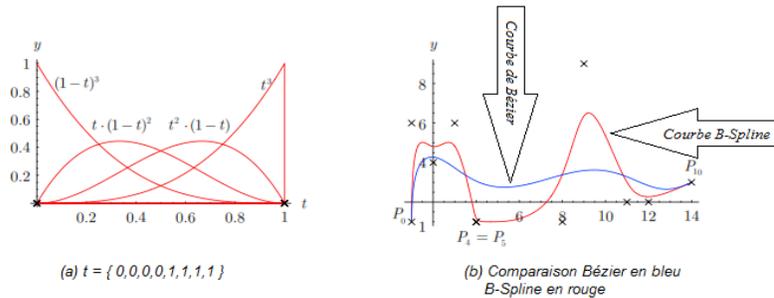


Figure 2-20: Correspondance Bézier - B-Splines

Nous pouvons dire que les courbes de Bézier sont moins souples que les B-Splines. La figure 2-20 (b) représente cette situation. La B-Spline est tracée en rouge, la courbe de Bézier en bleue. Elles ont les mêmes points de contrôle, et les noeuds sont $\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8\}$. Il est aisé de constater que la courbe de Bézier est beaucoup moins attirée par les points de contrôle. La B-Spline passe presque par le point $P_4 = P_5(4; 1)$ répété deux fois alors que la courbe de Bézier en reste très loin. Si une véritable interpolation n'est pas nécessaire, il est intéressant de répéter deux fois un point pour une B-Spline. La courbe s'approche très fortement du point tout en gardant la continuité de la dérivée.

En conclusion on peut dire que les B-Splines résolvent les problèmes que nous avons constaté pour les courbes de Bézier, il est possible de contrôler les B-Splines localement et l'ajout de

points n'augmente pas le degré de la courbe. De plus, il est possible d'interpoler les points de contrôle même si ce n'est pas très concluant. Le principal inconvénient des B-Splines est leur complexité. En effet, il n'est pas facile de calculer les fonctions de base. Les points de contrôle ne sont plus les seuls paramètres des courbes, il y a aussi le vecteur noeud. Il est difficile de gérer les points et les noeuds en même temps. C'est pour cette raison, nous ne faisons que varier les points de contrôle, les noeuds sont généralement ouverts aux extrémités et uniforme au milieu.

Il existe d'autres types de splines d'approximation que les B-Splines, comme les B-Splines rationnelles plus connues sous le nom de NURBS (non uniform rational B-Splines). Avec ces dernières on peut représenter précisément une surface de révolution ou conique (cercle, ellipse, hyperbole et parabole), ce qui n'est pas le cas pour les B-Spline. Les NURBS ajoute ce qu'on appelle un *poide* aux points de contrôle et utilise les fractions rationnelles. Les NURBS sont souvent utilisées au détriment des B-Splines dans des domaines tels que les images de synthèse, les jeux vidéo etc

2.4.11 Les surfaces B-Spline

Les surface B-splines c'est le domaine ou la variation des paramètres est un rectangle issu du produit tensoriel de deux fonctions B-Splines (produit cartésien de deux intervalles), une selon chaque coordonnée curviligne de manière semblable à la surface de Bézier. On se donne deux vecteurs tels que

$$t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad \text{et} \quad s \in \{s_0, s_1, \dots, s_n\} \quad (2.94)$$

On se donne, à la place d'un polygone de contrôle, un réseau de contrôle des points P_{ij} indexés par les couples de noeuds tels que :

$$i \in [0, \dots, n] \quad \text{et} \quad j \in [0, \dots, m] \quad (2.95)$$

donc la surface B-spline de bidegré (k, l) associée aux vecteurs de noeuds t et s et au réseau de contrôle P et dont la surface paramétrée est donnée par :

$$X(t, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,k}(t) B_{j,l}(s) P_{ij} \quad (2.96)$$

dans le cas particulier où les deux vecteurs de noeuds sont de la forme $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, on parle de carreau de Bézier. Si on se donne en plus un poids w_{ij} pour chaque point de contrôle, la surface B-spline rationnelle de bidegré (k, l) associée à toutes les données (citée ci-dessus), est la surface paramétrée donnée par

$$X_r(t, s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_{i,k}(t) B_{j,l}(s) P_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_{i,k}(t) B_{j,l}(s)} \quad (2.97)$$

2.4.12 Propriétés des surfaces B-spline

Parmi les propriétés on peut citer :

- la restriction d'une telle surface paramétrée à toute droite du plan (t, s) parallèle à l'un des axes de coordonnées est une courbe B-spline (ou B-spline rationnelle selon le type choisi), cette propriété n'est pas vérifiée pour le cas des droites obliques.
- il y a des généralisations des surfaces B-splines aux dimensions supérieures, en effet, il y a une théorie des fonctions B-splines en plusieurs variables, qu'on nomme les splines polyédrales,
- Soit $X_{k,l}$ la surface B-spline de bidegré (k, l) associée aux vecteurs de noeuds t et s et au réseau de contrôle P . Supposons que :

$$t_0 = t_1 = \dots = t_k \quad (2.98)$$

est un noeud de multiplicité $k+1$. En tout point (t_0, s) , les dérivées partielles par rapport

t c'est à dire

$$\left. \frac{\partial X_{k,l}}{\partial t} \right|_{(t_0,s)} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 X_{k,l}}{\partial t^2} \right|_{(t_0,s)} \quad (2.99)$$

coïncident avec les valeurs en s de deux courbes B-splines de degré l associées aux polygones de contrôle:

$$R_j^1 = \frac{k}{u_{k+1} - u_0} (P_{1j} - P_{0j}) \quad \text{et} \quad R_j^2 = \frac{k(k-1)}{(u_{k+1} - u_0)(u_{k+2} - u_0)} (P_{2j} - 2P_{1j} - P_{0j}) \quad (2.100)$$

c'est à dire qu'on associe à la fonction dérivé B-Spline $\left. \frac{\partial X_{k,l}}{\partial t} \right|_{(t_0,s)}$ le réseau de contrôle R_j^1 et R_j^2 pour $\left. \frac{\partial^2 X_{k,l}}{\partial t^2} \right|_{(t_0,s)}$. Cette propriété est importante quand il s'agit de faire le raccordement entre deux surfaces B-spline pour assurer la continuité de la surface au niveau des raccordement pour qu'il n'y est pas de cassure.

2.5 Approches pour la construction d'objets CAO

2.5.1 introduction

Dans cette section nous allons présenter une approche qui permet d'élaborer un algorithme de construction de forme complexe (plusieurs faces et arêtes) à partir d'un nuage de points de coordonnées spatiales (x, y, z) . Cet algorithme englobe les différents cas de reconstruction d'un modèle CAO à partir des résultats d'une étude éléments finis dans le cadre de la mécanique du solide.

Notre étude concerne le comportement des objets dans le domaine de la mécanique du solide. Lors de la déformation d'un objet mécanique plusieurs cas de déformations peuvent se présenter (figure (2-21)), nous n'allons étudier que deux :

1. déformation sans changements de topologie, ni de géométrie : dans ce cas là le nombre et la géométrie des différentes primitives constituant l'objet tel que faces, contours, arêtes et sommets initiale reste constant ainsi que les connectivités, ce cas de figure est rencontré lors des essais de traction où de compression d'une pièce mécanique.

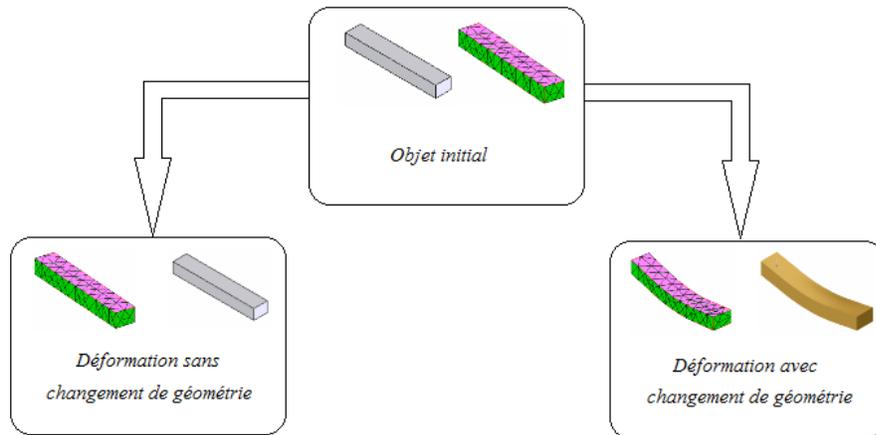


Figure 2-21: Différents cas de déformations

2. déformation sans changements de topologie, mais avec des changements de la géométrie de l'objet : dans ce cas la géométrie des différentes primitives constituant l'objet tel que faces, contours, d'arêtes et sommets initiale change en gardant leurs nombres et leurs connectivités. Ce cas de figure est rencontré lors des essais de flexion de pièce mécanique.

Dans une première phase l'algorithme (figure (2-22)) consiste à chercher la topologie et identifier les différentes entités géométriques du modèle en comparaison avec le modèle initial (non déformé). La seconde phase, consiste à reconstruire les primitives identifiées.

Dans l'algorithme ci-dessus, le bloc reconstruction avec ou sans changement de géométrie contient les étapes suivantes (figure (2-23)):

Les deux étapes principales de l'algorithme sont la recherche de la topologie dans le cas où elle est modifiée et la reconstruction de la géométrie. Dans la plupart des cas envisageables en mécanique du solide, le changement de la topologie est dû à une application d'une condition aux limites sur l'objet mécanique, or les conditions aux limites sont positionnées sur des primitives faisant partie de la topologie (faces, arêtes et sommets). Donc ces dernières (faces, arêtes et sommets) doivent être créées dès le début (avant l'étude éléments finis) pour que l'application des conditions aux limites devienne possible.

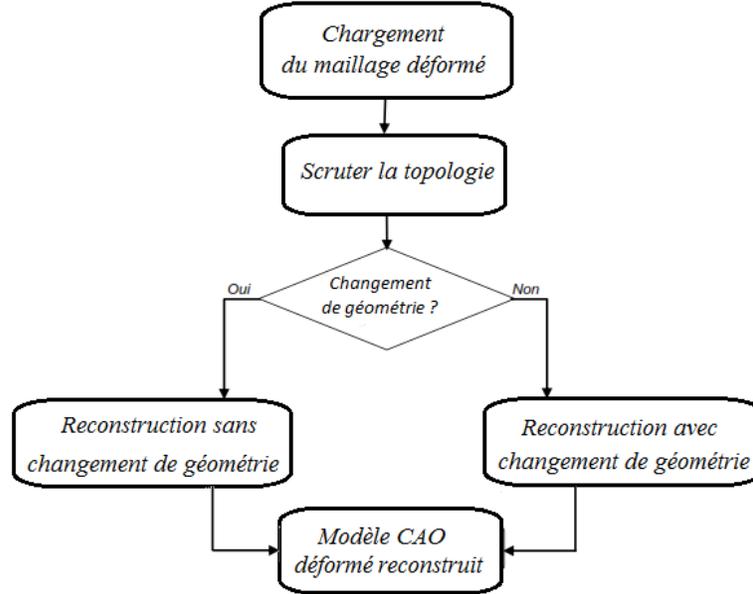


Figure 2-22: Algorithme général de reconstruction

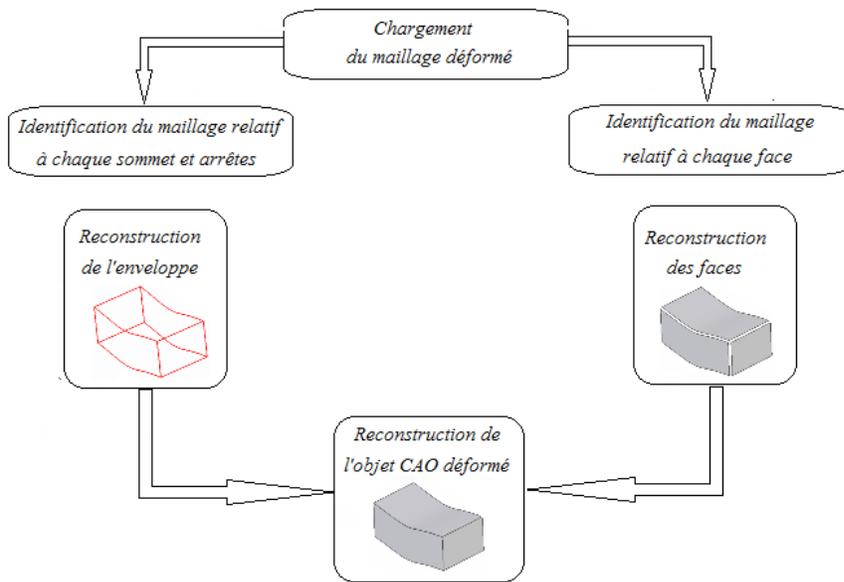


Figure 2-23: Organigramme de reconstruction

2.5.2 Algorithme de reconstruction

Pour la reconstruction d'un objet CAO, la littérature fait état de plusieurs approches, dans ce qui suit nous allons décrire une première approche intitulée, approche machinale, juste pour mettre en évidence la méthodologie ou le concept de reconstruction. Une deuxième approche plus performante, que nous avons implémenté dans notre programme de reconstruction.

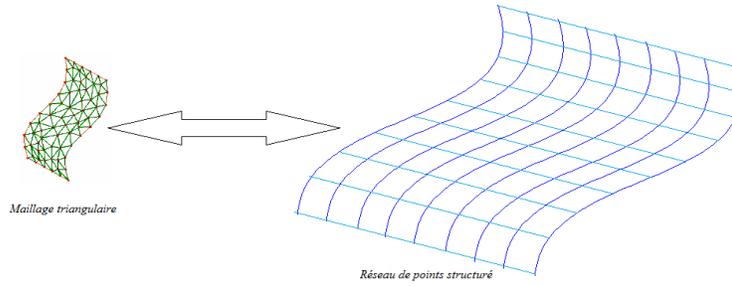
Approche machinale

Le problème de reconstruction dans cette approche machinale est trivial, il s'agit de reconstruire l'objet CAO déformé ou non, à partir des résultats éléments finis en considérant chaque maille comme étant une face plane avec un contour triangulaire. Le nombre de faces de l'objet reconstruit est égal au nombre des éléments $2D$ du maillage des faces tandis que toutes les arêtes sont de type droit et le nombre de sommets de l'objet est égal au nombre de nœuds sur la peau de maillage. Ce modèle reconstruit peut être utilisé pour calculer certaines propriétés de l'objet mécanique comme le volume, la masse etc... mais cette approche reste une solution limitée pour les raisons suivantes :

- pour appliquer une condition aux limites (pression, déplacements imposés...) sur une face de l'objet, il faut faire cela sur toutes les faces élémentaires planes reconstruites (triangles) correspondants à la face en question ce qui représente un tâche pénible.
- le modèle reconstruit demeure toujours un modèle approché et ne définit pas le modèle réel à cause des nombreux raccordement réalisés (problèmes de continuité) entre les surfaces élémentaires (triangle).
- le modèle est manipulable pour des objets dont le maillage est grossier ou le nombre de faces (triangle) n'est pas important.

Approche composée

Cette deuxième approche se compose de trois étapes d'où le nom "composée". Le concept de base de cette approche est l'évaluation et la reconstruction d'une surface (la géométrie d'une face) à partir de la triangulation correspondante c'est-à-dire remplacer l'ensemble des surfaces élémentaires (triangle) d'une face par une seule et unique surface.



première étape Cette phase consiste à construire un réseau de points structuré (réseau de contrôle), ce dernier est un support d'interpolation pour la surface porteuse de la face déformée (généralement en utilise des surface B-spline).

Le maillage étudié est de type tétraédrique c'est-à-dire triangulaire (en 2D) sur les faces. Ainsi, la triangulation d'une face (le maillage d'une face) n'est autre qu'un nuage de points irrégulièrement disposés. Les points sont liés les uns aux autres par des segments de droites pour former des triangles. On considère que les points sont régulièrement dispersés pour qu'ils puissent être interpolés. Le problème revient à construire un support de points structuré sur la surface à partir d'une triangulation, (voir figure (2.5.2)).

Algorithme de reconstruction associé L'algorithme est celui de la figure (2-24) :

ce dernier se base sur le paramétrage de la surface avant déformation (maillage initiale) et la solution éléments finis (les valeur de déplacements aux noeuds) [8], [6]. Un réseau sous forme de support de points structuré est construit par interpolation de la solution éléments finis, et dont les différentes phases de l'algorithme sont les suivantes :

(Phase 1) : Construire un réseau de points structuré sur la face non déformée

: Dans cette étape, un réseau de points est créé dans l'espace paramétrique (figure (2-25)) de coordonnées (u, v) qui correspond à un réseau de points dans l'espace réel (x, y, z) .

Les cordonnées dans l'espace paramétrique sont déterminés comme suit :

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i-1} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{n} \\ v_i &= v_{i-1} + \frac{v_{\max} - v_{\min}}{m} \end{aligned} \tag{2.101}$$

$u_{\max}, u_{\min}, v_{\max}$ et v_{\min} sont déterminés à partir des coordonnées paramétriques des noeuds

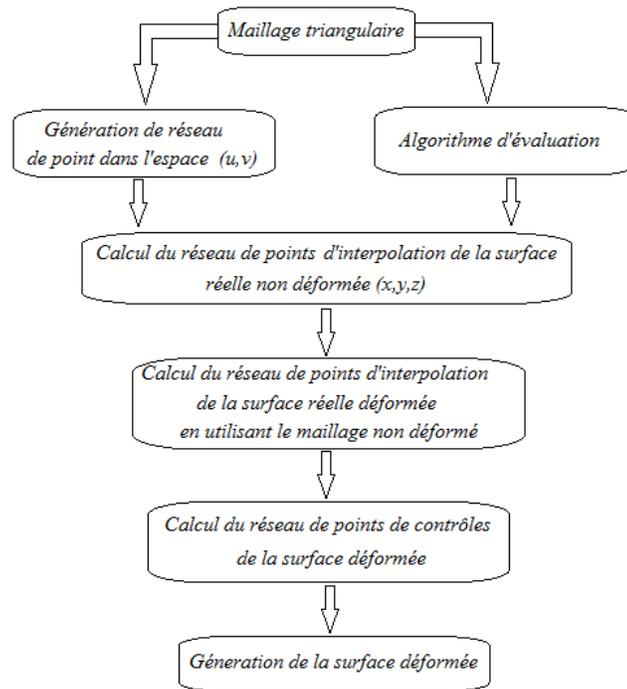


Figure 2-24: Algorithme de reconstruction à partir d'un maillage non déformé

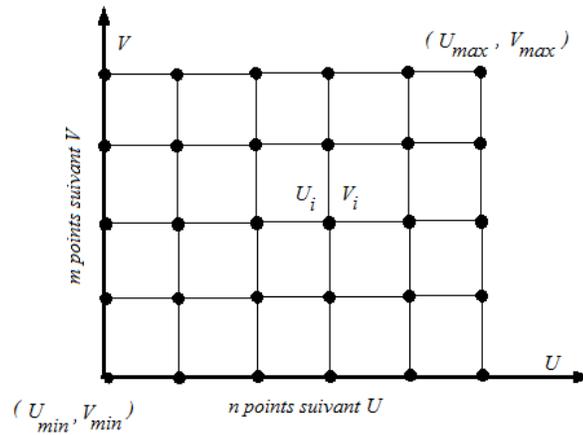


Figure 2-25: Réseau de points dans l'espace paramétrique

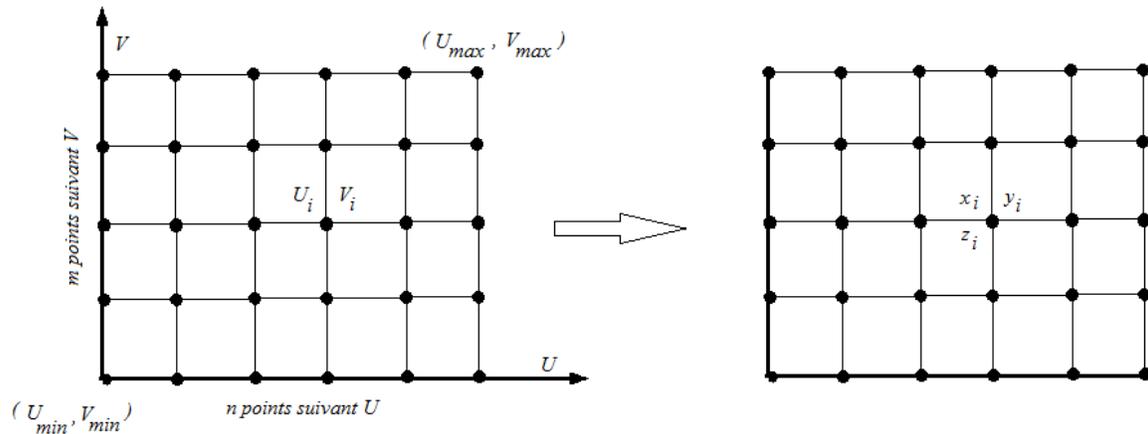


Figure 2-26: Passage de l'espace u, v à l'espace x, y, z

du maillage issues du modèle intégré qui contient les informations sur les différents noeuds. Le choix des nombres de subdivision n et m suivant u et v se fait intuitivement.

(Phase 2) : Projection de ce support de points sur le maillage non déformé :

Dans cette étape, le support de points est déterminé dans l'espace réel (x, y, z) correspondant au réseau crée dans la première phase. Pour obtenir le support de points est déterminé dans l'espace réel (x, y, z) , onutilise un algorithme d'évaluation [6], ce dernier permet de calculer les coordonnées (x, y, z) en utilisant les coordonnées de l'espace paramétrique (u, v) . Cette situation est représentée sur la figure (2-26)

A la fin de cette deuxième étape, on obtient un réseau de points structuré dans l'espace réel de la surface comme représenté sur la figure (2-27) c'est-à-dire les coordonnées (x, y, z) sont connues pour chacun des points dans l'espace réel.

(Phase 3) : Recherche du triangle auquel appartient la projection de chaque points et calcule des coordonnées locales de ces points dans le triangle trouvé : Le résultats de la solution éléments finis de type déplacements est interpolée sur le nuage de points de la deuxième phase de la manière suivante :

1. le réseau de points calculé dans l'étape précédente est projeté sur le maillage de la face non déformée (figure (2-28)). Donc chaque point est projeté dans un triangle.

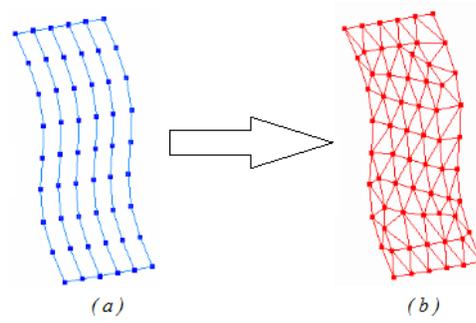


Figure 2-27: (a) Réseau de points structurés, (b) Maillage 2D triangulaire

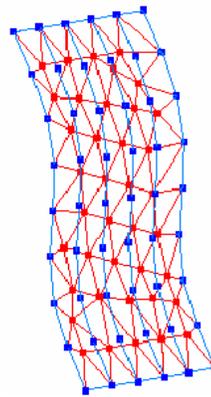


Figure 2-28: Projection du réseau de points structurés sur le maillage

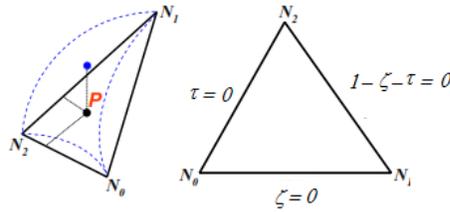


Figure 2-29: Projection d'un point sur un triangle

2. les coordonnées locales $(\zeta, \tau, 1 - \zeta - \tau)$ de la projection de chacun des points dans le triangle correspondant sont calculés (figure (2-29)). ensuite ces coordonnées sont utilisées comme fonctions pour calculer le réseau de points d'interpolation de la surface déformée avec ζ et τ les coordonnées du point P dans le triangle.
3. le réseau de points d'interpolation de la surface déformée est calculé en utilisant les fonctions d'interpolation calculées précédemment $(\zeta, \tau, 1 - \zeta - \tau)$ et la solution éléments finis de type déplacements. Soit un triangle dont les sommets sont N_0, N_1 et N_2 et dans lequel on a projeté un point, les coordonnées de ce dernier dans le réseau d'interpolation de la surface déformée sont calculées de la manière suivante :

$$Coord(P_{def}) = Coord(P_{nondef}) + \zeta \cdot Deplac(N_1) + \tau \cdot Deplac(N_2) + (1 - \zeta - \tau) \cdot Deplac(N_0) \quad (2.102)$$

- P_{def} : le point d'interpolation de la surface déformée
 P_{nondef} : le point d'interpolation de la surface avant déformation
 N_0, N_1 et N_2 : les noeuds du triangle auquel appartient le point P
 ζ et τ : les coordonnées du point P dans le triangle.

(Phase 4) : Détermination des coordonnées du point dans le support déformé en se basant sur les coordonnées initiales avant déformation, les coordonnées locales du point dans le triangle et les déplacements des nœuds (representant la solution éléments finis) : Une fois le support structuré des points de la surface déformée qui sont les points d'interpolation sont obtenus, la quatrième phase détermine les points de contrôle P_{ij} de

la surface déformée à partir des points d'interpolation Q_{kl} par résolution du système inverse de l'équation suivante [7]:

$$Q_{kl} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot N_{j,q}(\bar{v}_l) \cdot P_{ij} \quad (2.103)$$

N_{ip} : représente ce qu'on appelle les fonctions de bases [6] définies par (2.104) ci-dessous
 \bar{u}_k et \bar{v}_l : les vecteurs noeuds

$$N_{i,p}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} \cdot N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(u)$$

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.104)$$

l'équation (2.103) peut être écrite sous la forme :

$$Q_{k,l} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot \left(\sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) \cdot P_{ij} \right) \quad (2.105)$$

ou sous forme matricielle

$$Q = N_u \times (N_v \times P) \quad (2.106)$$

avec:

- Q : La matrice des points d'interpolation
- P : La matrice des points de contrôle
- N_u : La matrice des fonctions de base suivant u .
- N_v : La matrice des fonction de base suivant v

de l'équation (2.106) si on pose :

$$R = N_v \times P \quad (2.107)$$

alors :

$$R = N_u^{-1} \times Q \quad \text{et} \quad P = N_v^{-1} \times R \quad (2.108)$$

ou alors :

$$Q_{k,l} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot R_{i,l} \quad \forall k \in [0, \dots, n] \quad \text{et} \quad \forall l \in [0, \dots, m] \quad (2.109)$$

Où les valeurs des paramètres u_i sont définies par :

$$\begin{cases} \bar{u}_i = \bar{u}_{i-1} + \frac{|Q_i - Q_{i-1}|^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=0}^m |Q_j - Q_{j-1}|^{\frac{1}{2}}} \\ \bar{u}_0 = 0 \\ \bar{u}_1 = 1 \end{cases} \quad (2.110)$$

Pour un ordre $p = 3$, le système (2.109) devient :

$$\begin{bmatrix} N_{0,3}(\bar{u}_0) & N_{1,3}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{n,3}(\bar{u}_0) \\ N_{0,3}(\bar{u}_1) & N_{1,3}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n,3}(\bar{u}_1) \\ N_{0,3}(\bar{u}_2) & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,3}(\bar{u}_n) & N_{1,3}(\bar{u}_n) & \cdots & N_{n,3}(\bar{u}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{0,0} & R_{0,1} & \cdots & R_{0,m} \\ R_{1,0} & R_{1,1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ R_{n,0} & \cdots & \cdots & R_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & \cdots & Q_{0,m} \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,0} & \cdots & \cdots & Q_{n,m} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

avec :

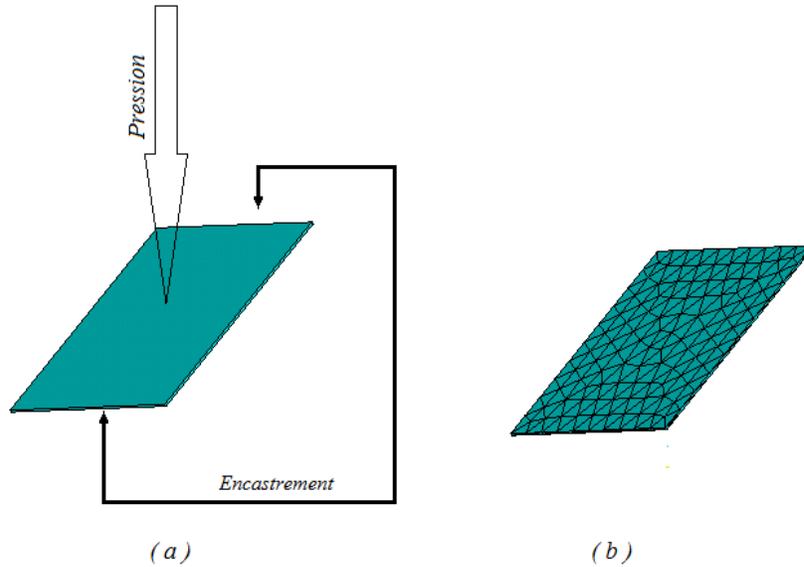
$$R_{i,l} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) \cdot P_{i,j} \quad \forall i \in [0, \dots, n] \quad \text{et} \quad \forall j \in [0, \dots, m] \quad (2.112)$$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_{0,3}(\bar{u}_0) & N_{1,3}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{n,3}(\bar{u}_0) \\ N_{0,3}(\bar{u}_1) & N_{1,3}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n,3}(\bar{u}_1) \\ N_{0,3}(\bar{u}_2) & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,3}(\bar{u}_n) & N_{1,3}(\bar{u}_n) & \cdots & N_{n,3}(\bar{u}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,m} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,0} & \cdots & \cdots & P_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{0,0} & R_{0,1} & \cdots & R_{0,m} \\ R_{1,0} & R_{1,1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ R_{n,0} & \cdots & \cdots & R_{n,m} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

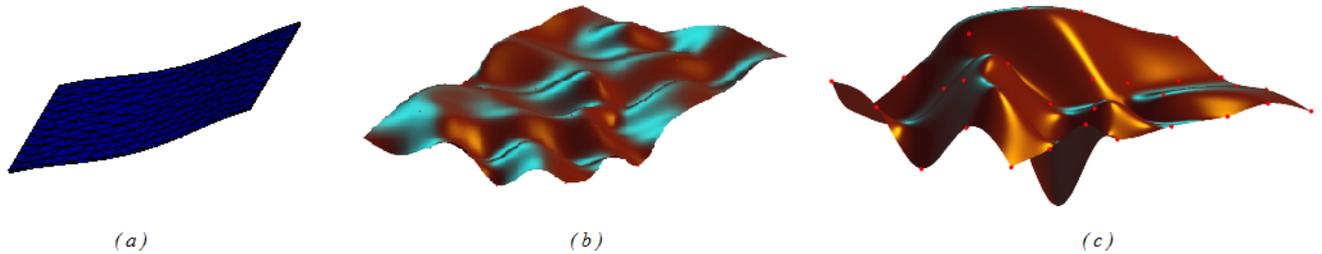
où P est la matrice des $P_{i,j}$ représentant le réseau de contrôle de la surface porteuse de la primitive déformée.

Essai de l'algorithme Pour s'assurer de la fiabilité de l'algorithme un essai de reconstruction est effectué (figure ??)



Surface en flexion

Après reconstruction de la surface on aura:



(a) Surface déformée, (b) Surface déformée reconstruite, degré 2, (c) Surface déformée reconstruite, degré 4,

D'après ce qui vient d'être expliquer, Deux paramètres peuvent avoir de l'influence sur la précision et sur la qualité de la surface reconstruite:

- **le nombre de points d'interpolation suivant les deux coordonnées paramétriques u et v** : quelque soit le nombre de points suivant u et v , la surface reconstruite contient des distorsions (singularités), ces dernière deviennent importantes avec le nombre de points u, v

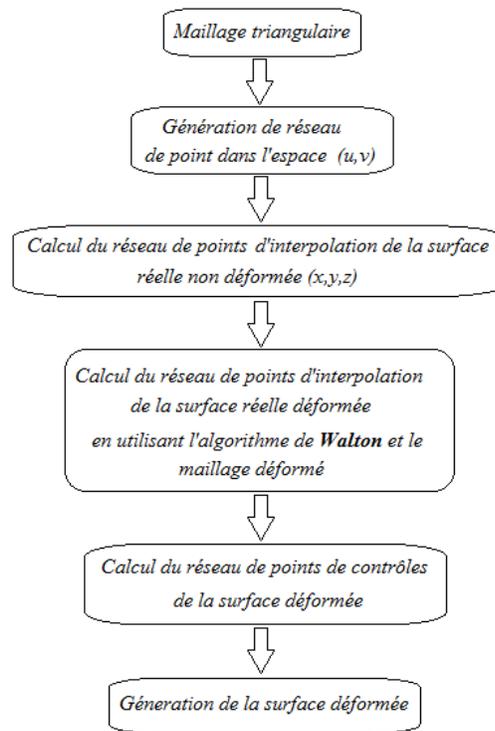


Figure 2-30: Algorithme de reconstruction à partir d'un maillage déformé

- **le degré de la surface** : le même phénomène (de distorsion) est remarqué, en augmentant le degré de la surface, figure 2.5.2

Pour palier à ce phénomène on a eu recours à la deuxième étape.

Deuxième étape Sachant que les points d'interpolations de la surface reconstruite sont situés sur le maillage déformé, la surface doit être calculée, au voisinage du maillage lors de la construction du réseau de points d'interpolation. Dans cette deuxième étape, l'algorithme de reconstruction de la surface déformée présenté dans la première étape (2-24) reste le même sauf dans la troisième phase. Cette dernière consiste à calculer le réseau de points d'interpolation de la surface déformée. Pour pallier aux problèmes de la première phase, le calcul de points d'interpolation de la surface déformée fait appel à un algorithme d'évaluation (figure (2-30)) de la surface reconstruite à partir du maillage déformé. L'algorithme est le suivant :

Algorithme de Walton :

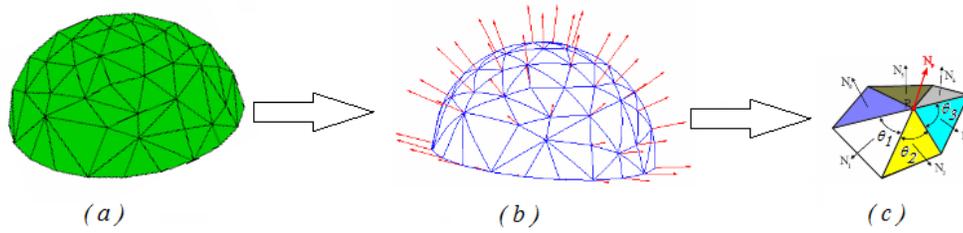


Figure 2-31: Vecteur normal à la surface au noeud P



Figure 2-32: (a) Vecteur normaux, (b) courbe frontière de la surface triangulaire

Le calcul de la surface déformée à partir du maillage déformé se base sur l'algorithme de Walton [8] pour l'évaluation de la surface porteuse d'un triangle dans un maillage triangulaire. L'algorithme consiste à calculer pour chaque triangle trois vecteurs normaux à la surface porteuse de triangle. A partir de ces derniers et des coordonnées des trois points du triangle, la surface de ce dernier est évaluée. Le vecteur normal (figure (2-31 (c))) se calcule de la manière suivante:

$$N_p = \sum_{i=1}^n N_i \cdot w_i \quad \text{et} \quad w_i = \frac{\theta_i}{\sum_{i=1}^n \theta_i} \quad (2.114)$$

avec:

θ_i : les angles au point P des triangles qui ont comme sommet le point P

w_i : les coefficients de pondération associés aux normales N_i

N_i : les normales aux triangles qui ont comme sommet le noeud P ,

n : le nombre de triangles appartenant à la surface qui ont comme sommet le noeud P

Les courbes frontières de la surface triangulaire porteuse de triangle (figure (2-32)), sont

calculées par la formule :

$$C_i(t) = V_{i,0} \cdot B_{0,3}(t) + V_{i,1} \cdot B_{1,3}(t) + V_{i,2} \cdot B_{2,3}(t) + V_{i,3} \cdot B_{3,3}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad i \in [0, 2] \quad (2.115)$$

avec :

$B_{i,n}$: le polynôme de Bernstein défini plus haut, ce qui signifi que $C_i(t)$ est une courbe de Bézier

$V_{i,j}$: points de contrôle des courbes frontières tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{i,0} = P_i \\ V_{i,1} = V_{i,0} + \xi_i \cdot \frac{6\Upsilon_i - 2\phi_i N_i + \lambda_i N_{i+1}}{18} \\ V_{i,2} = V_{i,3} - \xi_i \cdot \frac{6\Upsilon_i + 2\phi_i N_i + 2\lambda_i N_{i+1}}{18} \\ V_{i,3} = P_{i+1} \end{array} \right. \quad (2.116)$$

ξ_i : la distance enter P_i et P_{i+1} tel que:

$$\xi_i = \|V_{i,3} - V_{i,0}\| \quad (2.117)$$

Υ_i : vecteur normal suivant la direction $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$

$$\Upsilon_i = \frac{V_{i,3} - V_{i,0}}{\|V_{i,3} - V_{i,0}\|} \quad (2.118)$$

si on note :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_i = N_i \cdot N_{i+1} \quad \text{Produit scalaire des vecteur } N_i \text{ et } N_{i+1} \\ \chi_{i,0} = N_i \cdot \Upsilon_i \\ \chi_{i,1} = N_{i+1} \cdot \Upsilon_i \end{array} \right. \quad (2.119)$$

on a alors ϕ_i et λ_i sont définies de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_i = 6 \cdot \frac{2\chi_{i,0} + \chi_i \chi_{i,1}}{4 - \chi_i^2} \\ \lambda_i = 6 \cdot \frac{2\chi_{i,1} + \chi_i \chi_{i,0}}{4 - \chi_i^2} \end{array} \right. \quad (2.120)$$

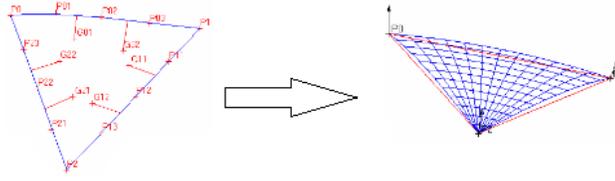


Figure 2-33: points de contrôles et surface de Bézier correspondente

on défini aussi la tangente :

$$C'_i(t) = 3 \cdot \sum_{k=0}^2 W_{i,k} \cdot B_{k,2}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad i \in [0, 2] \quad (2.121)$$

et :

$$W_{i,k} = V_{i,k+1} - V_{i,k} \quad k \in [0, 2] \quad (2.122)$$

ce qui fait que les points de contrôle de la surface triangulaire de Béziérs sont composés de deux :

- **1** - Les points de contrôle sur les frontières définis directement à partir des points de contrôle des courbes frontières $V_{i,j}$ tel que :

$$P_{i,j} = \frac{(j \cdot V_{i,j+1} + (4-j) \cdot V_{i,j})}{4} \quad i \in [0, 2] \quad j \in [0, 4] \quad (2.123)$$

- **2** - Les points de contrôle en plein milieu de la surface du triangle de Bézier figure (2-33) $P_{1,1,2}, P_{1,2,1}$ et $P_{2,1,1}$ dépendent des coordonnées paramétrique locale u, v et w tel que :

$$\begin{cases} P_{1,1,2} = \frac{u \cdot G_{2,2} + v \cdot G_{0,1}}{u+v} \\ P_{1,2,1} = \frac{w \cdot G_{0,2} + u \cdot G_{1,1}}{u+w} \\ P_{2,1,1} = \frac{w \cdot G_{0,2} + v \cdot G_{1,1}}{w+v} \end{cases} \quad (2.124)$$

pour $i \in [0, 2]$ et $j \in [1, 2]$ on calcule:

$$\begin{aligned} G_{i,1} &= \frac{1}{2} (P_{i,1} + P_{i,2}) + \frac{2}{3}\alpha_{i,0}W_{i,1} + \frac{1}{3}\alpha_{i,1}W_{i,0} + \frac{2}{3}\beta_{i,0}A_{i,1} + \frac{1}{3}\beta_{i,1}A_{i,0} \\ G_{i,2} &= \frac{1}{2} (P_{i,2} + P_{i,3}) + \frac{2}{3}\alpha_{i,0}W_{i,2} + \frac{1}{3}\alpha_{i,1}W_{i,1} + \frac{2}{3}\beta_{i,0}A_{i,2} + \frac{1}{3}\beta_{i,1}A_{i,1} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Les vecteurs $G_{i,j}$, assurent la continuité de la surface triangulaire sur sa frontière de la manière suivante:

$G_{0,j}$: assurent la continuité sur la frontière définie entre P_0 et P_1

$G_{1,j}$: assurent la continuité sur la frontière définie entre P_1 et P_2

$G_{2,j}$: assurent la continuité sur la frontière définie entre P_2 et P_0

ces pour cette raison que les points de contrôles définis à l'intérieur de la surface ($P_{1,1,2}, P_{1,2,1}$ et $P_{2,1,1}$) sont calculés par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire des vecteur $G_{i,j}$. Les $A_{i,j}$ sont les vecteurs qui définissent, avec les $W_{i,j}$ les plans tangents à la surface triangulaire de Béziérs désirée afin d'assurer la continuité, de type C^1 , de cette surface avec les surfaces voisins.

On défini un autre ensemble de vecteurs $D_{i,j}$ assurant la continuité des plans tangents au triangle de Béziérs désiré avec ses voisins,

$$\begin{aligned} D_{0,j} &= P_{1,j,3-j} - \frac{1}{2} (P_{0,j+1,3-j} + P_{0,j,4-j}) \\ D_{1,j} &= P_{j,3-j,1} - \frac{1}{2} (P_{j+1,3-j,0} + P_{j,4-j,0}) \\ D_{2,j} &= P_{j,1,3-j} - \frac{1}{2} (P_{j+1,0,3-j} + P_{j,0,4-j}) \end{aligned} \quad (2.126)$$

cela veut dire que la dérivé de la surface, à gauche de la courbe frontière est la même que la dérivé à droite de la courbe de frontière. La surface de Béziérs sous forme triangulaire est évaluée à partir d'un triangle par l'équation surface dans l'espace paramétrique (u, v, w) tel que:

$$S(u, v, w) = \sum_{i+j+k=4} P_{i,j,k} \frac{4!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad \left\{ \begin{array}{l} u, v, w \geq 0 \\ u + v + w = 1 \\ i, j, k \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.127)$$

L'algorithme (de Walton [8]) qu'on vien de développer consiste à évaluer localement la surface pour chaque triangle du maillage. Donc, pour chacun des points d'interpolation, la troisième phase de notre premier algorithme revient à mettre en oeuvre les étapes suivantes :

1. calculer les coordonnées locales du point (support non déformé) projeté dans le triangle

du maillage non déformé u, v et w ($\varsigma, \tau, 1 - \varsigma - \tau$).

2. insérer un point qui a comme coordonnées u, v et w dans le même triangle du maillage déformé.
3. à partir du point inséré précédemment, nous déterminons le point du support d'interpolation déformé, qui doit être sur la surface reconstruite, par évaluation de cette dernière en utilisant l'algorithme de Walton

Troisième étape Cette troisième étape est dédiée aux problèmes du à d'éventuels contours intérieurs, en effet pour contrôler une surface porteuse d'un maillage d'une face qui contient des contours intérieurs lors de la projection du réseau de points sur un maillage qui contient un contour intérieur :

– si le point est projeté sur un triangle du maillage, le point d'interpolation de la surface déformée est déterminé par évaluation, en utilisant l'étape ci-dessus.

– si le point est projeté dans le vide (absence de matière, c'est-à-dire le point est au milieu d'un trou sur la surface), le point d'interpolation est obtenu par projection sur la surface de COONS (Mortenson 1985) représentée à partir du contour intérieur, de la surface, en question.

Conclusion sur l'algorithme de reconstruction

L'algorithme développé dans cette approche reste le même, en ajoutant à la troisième phase de cet algorithme la méthode développée pour les contours intérieurs. Les résultats sont améliorés dans le cas où la face contient des contours intérieurs. Les exemples que nous avons exposés dans cette étape représentent des cas extrêmes, dans la plupart des cas, il y a apparition d'erreurs dans la définition des contours intérieur de la face la où la surface de COONS est ajoutée par l'évaluation de la surface porteuse de la face déformée.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, en plus des concepts mathématiques relatives à certaines courbes et surfaces qui existent en CAO nous avons présenté les différentes approches et algorithmes développés pour la reconstruction des entités topologiques et géométriques d'un modèle CAO. Quelques

résultats, à titre indicatif, de ces différentes approches sont aussi présentés. Ces derniers ont montrés que les meilleurs résultats sont obtenus pour la reconstruction des surfaces est celui de la deuxième approche basée sur l'algorithme de Walton.

Chapter 3

Méthodes d'Approximations de Problèmes Physiques

3.1 Introduction

Les produits technologiques modernes, (véhicules, structures, équipements électriques ou électroniques) sont de plus en plus complexes et doivent répondre à des exigences de performance, de qualité et de fiabilité de plus en plus sévères. Par exemple pour le calcul de structures, les besoins sont toujours plus étendus, afin réduire les risques et d'optimiser les coûts. Ceci demande des simulations de plus en plus fines du comportement afin d'en garantir la fiabilité. La modélisation numérique du problème physique, la mise en œuvre de solutions et leur intégration dans le processus de conception sont souvent traitées dans des environnements très spécifiques. Pour cela plusieurs industriels et laboratoires de recherche ont collaboré pour développer de nombreux outils dans ce domaine.

Les différentes étapes pour l'analyse d'un problème en physique se classent suivant l'organigramme de la figure 3-1. On partant d'un problème physique, le cadre précis de l'étude est défini par des hypothèses simplificatrices qui permettent de déterminer le modèle mathématique approprié. La difficulté pour un concepteur est de savoir choisir parmi les lois de la physique, celles dont les équations interprètent avec précision la réalité du problème physique. Un bon choix doit donner une réponse acceptable pour des coûts de mise en œuvre raisonnables.

Tous concepteur en technologie devra passer par un certain nombre d'étapes décrites ci-dessous et apporter des solutions pour les différents problèmes suivants:

- Quel modèle mathématique utiliser (mise en équations)?
- Dans le cas où on ne peut avoir de solutions analytiques, quel modèle numérique doit-on lui associer ?
- Quelle est l'erreur d'approximation commise (marge d'erreur sur l'approximation) ?
- Quelle est l'erreur numérique commise (acceptable ou non) ?
- Si le modèle numérique ne donne pas de bons résultats, peut-on l'améliorer ?
- Si le modèle mathématique ne traduit pas la réalité physique du problème, faut-il le changer ?

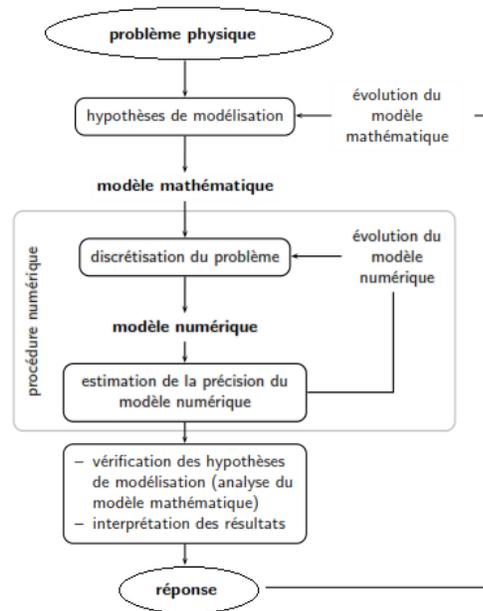


Figure 3-1: Organigramme utilisant un modèle numérique

Dans le but d'apporter des réponses à toutes ces questions, la figure 3-2 illustre un support. Pour définir la notion de modèle, trois modélisations possibles sont à retenir.

Chacune des modélisations représentée ci-dessus, correspond à un modèle mathématique différent et par quelle approche il doit être résolu. Le choix de ce dernier se fait grâce à un compromis que le concepteur doit faire entre :

- la grandeur à calculer et avec quelle précision
- les moyens mis à sa disposition pour y répondre.

En fait, les équations du modèle retenu sont soumises à un certain nombre d'hypothèses basées sur un certain nombre de connaissances technologiques et il faut connaître leur domaine de validité pour pouvoir vérifier que la solution obtenue est satisfaisante. Si le modèle mathématique n'admet pas de solution analytique, il est alors nécessaire de chercher une solution numérique de ce modèle. Dès lors, la discrétisation du problème est plus que nécessaire.

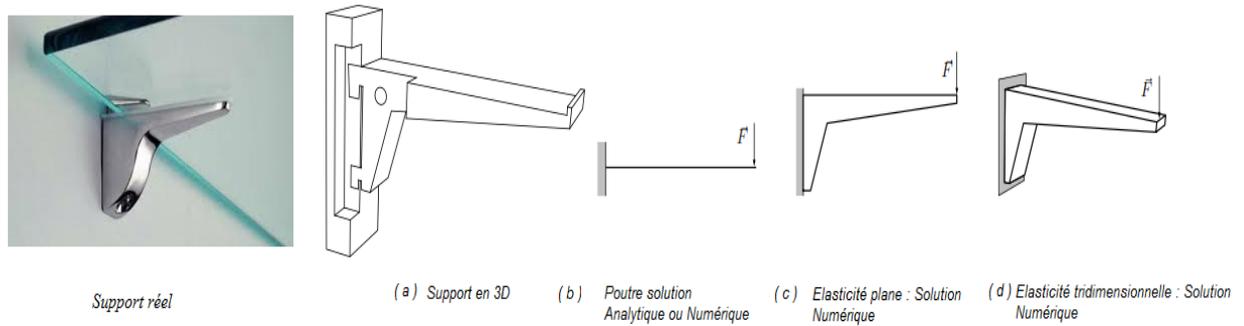


Figure 3-2: Différents modèles mathématiques pour le même problème de mécanique

Il est important de noter qu'un problème physique peut être formulé de façon équivalente en un système d'équations différentielles ou sous une formulation variationnelle (formulation faible). Mais avant de montrer comment passer de l'une à l'autre on a besoin de faire un bref rappel sur la théorie de l'élasticité linéaire pour qu'on puisse comprendre les notions à venir.

3.2 Notion sur la théorie de l'élasticité linéaire

3.2.1 introduction

Cette section est consacrée à un bref rappel de l'élasticité linéaire dans le but de bien définir le cadre, ainsi que le problème du modèle considéré et les notations utilisées. On s'intéresse à l'état d'équilibre statique d'un corps solide déformable S occupant dans sa configuration non déformée un domaine borné D contenu dans l'espace affine R^n ($n = 1, 2$ ou 3 en pratique) (figure 3-3). L'espace R^n est muni d'un repère affine orthonormé $\{O, e_1, \dots, e_n\}$. Les coordonnées d'un point $x \in R^n$ sont notées (x_1, \dots, x_n) . Tout vecteur u de l'espace vectoriel sous-jacent aura pour composantes (u_1, \dots, u_n) définies dans la base orthonormée $\{O, e_1, \dots, e_n\}$. Le corps S est soumis à une densité volumique d'efforts f , à une densité surfacique de traction ou de compression g sur une partie de sa frontière Γ_σ et à un déplacement imposé u_0 sur l'autre partie de sa frontière Γ_u . On suppose que:

$$\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma \quad \Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset \quad \Gamma_u \neq \emptyset \quad (3.1)$$

La condition (3.1) est nécessaire afin d'éviter tout mouvement de corps rigide. Sous l'action

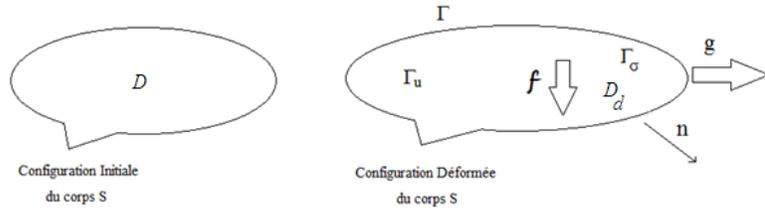


Figure 3-3: Corps élastique en équilibre sous chargement externes

des efforts extérieurs, le corps S se déforme et occupe un nouveau domaine Ω_d de R^n , appelée la configuration déformée.

Si on ne considère que les petites perturbations (Hypothèse de Petite Perturbation), c'est-à-dire, petits déplacements, petites rotations et petites déformations, on ne distingue plus les deux configurations initiales D et déformée D_d du corps S , les équations dérivant de son équilibre statique sont écrites donc sur D sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 Div\sigma(x) + f(x) &= 0 & \forall x \in D & & \textit{traduit l'équilibre des efforts} \\
 \sigma(x) \bullet n(x) &= g & \forall x \in \Gamma_\sigma & & (3.2) \\
 \sigma(x) &= ((\sigma(x))^t & \forall x \in D & & \textit{traduit l'équilibre des moments}
 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= [\sigma_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n} & & \textit{le tenseur de contraintes d'ordre 2} \\
 Div\sigma(x) &= Tr(D_x\sigma(x)) & \textit{avec} & (Div\sigma(x))_i = \partial_{x_j}\sigma_{ij}(x) & \forall i = 1, \dots, n & (3.3)
 \end{aligned}$$

Comme le même chargement externe appliqué à des matériaux différents induit des déformations différentes, les équations d'équilibre (3.2) ne permettent pas la détermination complète de l'état d'équilibre du corps déformable S , il faut y ajouter la loi de comportement du matériau constituant S . Due à l'hypothèse de petite perturbation (H.P.P) citée ci-dessus. Le tenseur des déformations linéarisées :

$$\varepsilon(x) = [\varepsilon_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n} \quad (3.4)$$

est linéairement lié au champ de déplacement $u : D \longrightarrow R^n$ comme suit:

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(D_x u + D_x^T u) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j) \quad (3.5)$$

en supposant par ailleurs que D est constitué d'un matériau élastique linéaire, la loi de comportement, qui relie le tenseur des contraintes σ à celui des déformations ε , est celle de Hooke donnée par:

$$\sigma(x) = C(x) : \varepsilon(x) \quad \text{ou encore} \quad \sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x) : \varepsilon_{kl}(x) \quad (3.6)$$

où C est le tenseur d'ordre 4 d'élasticité vérifiant les propriétés de symétries suivante :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{klij} && : \text{Symétrie majeure} \\ C_{ijkl} &= C_{jikl} = C_{jilk} && : \text{Symétrie mineure} \end{aligned} \quad (3.7)$$

On note que la symétrie majeure est due à l'élasticité et la symétrie mineure est due à la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations. Pour un matériau homogène, C ne dépend pas de x . Pour un matériau isotrope, C est uniquement déterminé par deux constantes strictement positives λ et μ , appelées coefficients de Lamé et liées au module de Young E et au coefficient de Poisson ν tel que :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où δ_{ij} est le symbole de *Kronecker* tel que :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si} & i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si} & i \neq j \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans ce cas, la relation de comportement (3.6) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \lambda \text{tr}(\varepsilon(x)) \bullet I + 2\mu \varepsilon(x) && \text{avec} && \sigma_{ij}(x) = \lambda \varepsilon_{kk}(x) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(x) \\ \varepsilon(x) &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma(x) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma(x)) \bullet I && \text{avec} && \varepsilon_{ij}(x) = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij}(x) - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}(x) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour conclure, en choisissant le champ de déplacement u comme inconnue du problème et

en regroupant les équations d'équilibre (3.2), la définition des déformations linéarisées (3.5) et la loi de comportement (3.8), on aboutit à la formulation forte ou locale d'équilibre de notre problème modèle d'élasticité linéaire statique :

Conclusion 2 *Etant donné D un corps élastique dont les déformations sont définies par (3.5) et le comportement est régi par la relation (??), $f : D \rightarrow R^3$, $g : \Gamma_\sigma \rightarrow R^3$ et $u_0 : \Gamma_u \rightarrow R^3$, trouver $u : \Omega \rightarrow R^3$ tel que:*

$$\begin{cases} \text{Div}\sigma(x) + f(x) = 0, & \forall x \in D \\ u = u_0 & \forall x \in \Gamma_u \\ \sigma(x) \bullet n(x) = g & \forall x \in \Gamma_\sigma \end{cases} \quad (3.11)$$

Tous les champs qui interviennent dans cette formulation seront supposés avoir une régularité suffisante, au sens où l'on peut donner un sens à toutes leurs dérivées afin que le problème mécanique soit bien défini. On suppose également que la frontière $\Gamma = \partial D$ du corps D possède une régularité suffisante, au sens où l'on peut y définir presque partout un vecteur unitaire normal sortant $n(x)$. Voir figure 3-3. On peut établir, pour un matériau homogène et isotrope, les équations de Navier suivante :

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div}(u)) + f = 0 \quad \text{dans} \quad D \quad (3.12)$$

$$(\Delta u)_i = \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}, \quad \text{div}(u) = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad (\text{grad}\varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (3.13)$$

Les équations (3.12) montrent que le problème de l'élasticité est régi par un système elliptique d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Ces équations se prêtent si bien au calcul analytique qu'à l'approximation numérique par la méthode des différences finies. Or la complexité des conditions aux limites et de la forme géométrique des corps solides rend en général une solution analytique impossible à obtenir et fait que l'on préfère en général la méthode des éléments finis à la méthode des différences finies qui exige en effet d'un domaine bien structuré.

3.2.2 Approximation

Un corps solide réel est toujours tridimensionnel. Néanmoins, sous certaines hypothèses liées à la géométrie de D , aux caractéristiques de chargements externes, etc., certains problèmes d'équilibre tridimensionnels peuvent être simplifiés et se réduisent en un problème bidimensionnel, voire unidimensionnel. Il existe trois types de problèmes $2D$,

- déformations planes (DP),
- contraintes planes (CP)
- axisymétrie.

Si le problème $3D$ est simplifié en un problème $2D$ défini dans le plan (e_1, e_2) , on a alors

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad DP \quad (3.14)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad CP \quad (3.15)$$

en base cylindrique le cas axisymétrique suppose que :

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0 \quad (3.16)$$

A l'heure actuelle, pour la discrétisation des modèles de phénomènes physiques complexes, les concepteurs disposent de méthodes d'approximation permettant de résoudre la plupart des problèmes pour lesquels il n'existe pas de solution analytique. Toutes les méthodes d'approximation ont un même objectif, remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équations différentielles ou intégrales) par un problème mathématique discret (équation matricielle) de dimension finie que l'on sait résoudre numériquement. La figure 3-4 représente une classification qui permet de distinguer la méthode en fonction de la démarche utilisée.

3.3 Outils d'approximation

Toutes les méthodes d'approximation ont un même objectif, remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équations différentielles ou intégrales) par un problème

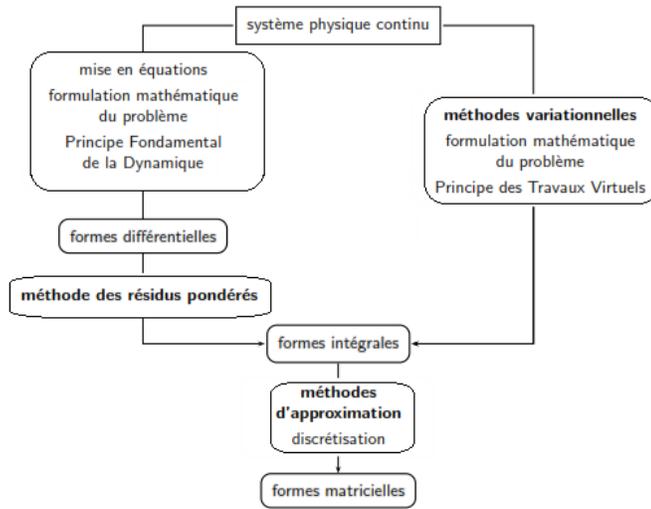


Figure 3-4: Méthode en fonction de la démarche

mathématique discret (équation matricielle) de dimension finie que l'on sait résoudre numériquement. Une des classifications des méthodes de résolution est donnée sur la figure 3-4. Il est important de noter qu'un problème physique peut être formulé de façon équivalente en un système d'équations différentielles ou sous une formulation variationnelle.

1. **Approximation par système d'équations différentielles ou ce qu'on appelle, la méthode des résidus pondérés (ou annulation d'erreur)** : se basant sur les équations locales et les conditions aux limites du problème. Les équations sont des équations différentielles définies sur l'intérieur du domaine, les conditions aux limites sont définies sur la frontière du domaine.
2. **Approximation par les méthodes variationnelles** : se basant sur le principe variationnel qui est une formulation mathématique du problème utilisant des considérations énergétiques. La formulation obtenue dépend bien entendu des hypothèses de modélisation et du problème physique à résoudre.

Dans ce qui suit en va donner un bref aperçu sur la méthode des résidus pondérés, puis on expliquera avec plus ou moins de détail les méthodes variationnelles sur lesquelles est basée la méthode des élément finis.

3.3.1 Méthode des résidus pondérés

Soit $u(M)$ un champ scalaire représentant l'inconnu d'un problème physique défini sur un domaine D . On cherche à résoudre le modèle mathématique défini par les équations différentielles locales à l'intérieur du domaine D , et en tenant compte des conditions aux limites sur la frontière du domaine Γ . Ces équations sont :

$$\begin{aligned} F(u) &= f(M, t) & \forall M \in D & \quad \text{équation à l'intérieur du domaine} \\ H(u) &= h(M, t) & \forall M \in \Gamma & \quad \text{équation sur la frontière du domaine (condition aux limites)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

où F et H sont des opérateurs agissant sur l'inconnue u qui dépend des variables courantes M (position) et t (temps). Le résidu est l'erreur commise lorsqu'on utilise une approximation u^* du champ u pour écrire les équations 3.17 du problème. donc le résidu R est alors défini par l'erreur sur l'équation locale, c'est-à-dire :

$$R(u^*) = F(u^*) - F(u) = F(u^*) - f(M, t) \quad \forall M \in D \quad (3.18)$$

par mesure de simplification, considérons dans un premier temps que les conditions aux limites du problème sont homogènes, c'est-à-dire

$$H(u) = H(u^*) = 0 \quad (3.19)$$

Si $P_i(M)$ est un ensemble de fonctions dites de test ou de pondération définies sur le domaine D . La méthode des résidus pondérés consiste à annuler l'erreur commise sur le résidu, en la pondérant sur le domaine D par un nombre fini de fonctions $P_i(M)$. Ce qui correspond à des équations sous forme intégrale telles que :

$$\int_D P_i(M) R(u^*) dV = 0 \quad \forall P_i(M) \quad (3.20)$$

Ne sachant pas résoudre ce problème analytiquement, on cherche une approximation en restreignant les $P_i(M)$ à n fonctions de pondération. Pour une approximation u^* à n paramètres, nous choisirons n fonctions de pondération afin d'obtenir autant d'équations intégrales que de

paramètres inconnus, c'est-à-dire un système matriciel d'ordre n . Soit donc le système matriciel :

$$u^* = \sum_{i=1}^n W_i(M)q_i(t) = W(M)^T q(t) \quad (3.21)$$

Les fonctions $W_i(M)$ sont des fonctions dites de forme et les $q_i(t)$ les paramètres de l'approximation. On remplaçant (3.21) dans (3.20) aura les n équations sous la forme :

$$\int_D P_i(M)R(W(M)^T q(t))dV = 0 \quad \forall i \in [1, n] \quad (3.22)$$

Si on admet que le problème est à caractère stationnaire linéaire, l'équation matricielle est alors sous forme :

$$Kq = \mathbf{F} \quad (3.23)$$

Avec

$$K = \int_D P(M)F(W(M))dV \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \int_D P(M)f(M)dV \quad (3.24)$$

Si les n fonctions P_i conduisent à des équations indépendantes, la solution q du système (3.24) fournit les paramètres de l'approximation. En général l'utilisation de la méthode des résidus pondérés se limite à deux sous méthodes, à savoir

- **la méthode de collocation par point:** cette méthode consiste à utiliser comme fonctions de pondération des fonctions de Dirac.
- **la méthode de Galerkin:** cette méthode consiste à utiliser comme fonctions de pondération les fonctions d'approximation.

3.4 Méthode des éléments finis

3.4.1 Introduction

L'idée fondamentale de cette méthode est la discrétisation du problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes de calcul en élasticité linéaire (pour notre étude) présentées ci-dessus. Il ne reste alors qu'à

assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme que nous allons aborder le problème. Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis (statique ou dynamique, élastique ou plastique, thermique, le type de matériaux, les charges appliquées). Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons toutes ces conditions remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes :

1. **Analyse du problème** : cette analyse doit fixer les paramètres du calcul pour conduire à la réalisation d'un maillage. Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté majeure essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses, et à effectuer un certain nombre de choix qui auront une influence sur les résultats.
2. **Choix du modèle** : en calcul de structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel etc . . à ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis relatifs à chaque situation.
3. **Choix du type d'éléments** : est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible. On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.
4. **Choix du maillage** : il dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées, locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils dont on dispose pour réaliser ce maillage.
5. **Hypothèses de comportement** : elles consistent à :
 - quel est le modèle à retenir pour représenter le comportement du matériau (voire figure 3-2) ?

- le problème est-il linéaire ?
 - le matériau est-il hétérogène ou composite ?
 - peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation ?
 - peut-on traduire l'incompressibilité du milieu ?
 - etc ..
6. **Création et vérification des données** : cette étape dépend du logiciel utilisé (commercial ou de conception personnel). La syntaxe utilisée pour définir le jeu de données est définie dans le mode d'emploi du bloc fonctionnel correspondant. En sortie, un fichier est créé contenant toutes les informations nécessaires à l'exécution des calculs.
7. **Exécution du calcul** : c'est la partie la plus coûteuse en temps machine. Un fichier de résultats permet de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées. Ce fichier peut contenir également les résultats du calcul (déplacements, résidus, contraintes. . .) ce qui lui confère dans ce cas un volume généralement très important.

3.4.2 Principales étapes de la méthode des éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, sont les suivantes :

- 1. discrétisation géométrique du milieu continu en sous domaines ;
- 2. construction de l'approximation nodale par sous domaine ;
- 3. calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- 4. assemblage des matrices élémentaires ;
- 5. prise en compte des conditions aux limites ;
- 6. résolution du système d'équations.

Discrétisation géométrique du milieu

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines :

$$D = \sum_{e=1}^{n_e} D_e \quad \text{tel que} \quad \lim_{e \rightarrow 0} (\cup_e D_e) = D \quad (3.25)$$

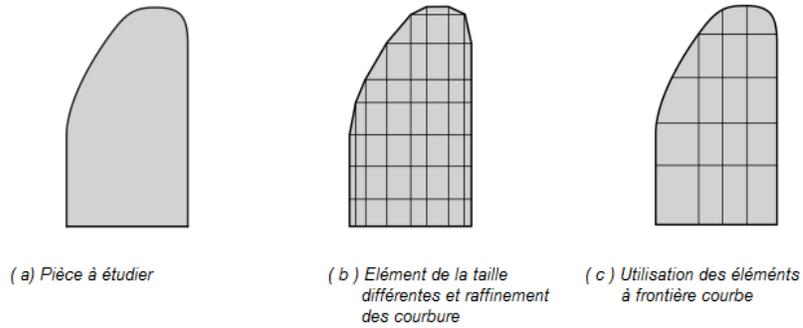


Figure 3-5: Erreur de discrétisation géométrique

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de formes géométriques simples. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant la même frontière commune. Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette dernière doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure 3-5. Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.

Construction de l'approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction d'une approximation u^* du champ des variables u par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

Definition 3 *L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire D_e*

$$u^*(M) = N(M)u_n \quad \forall M \in D_e \quad (3.26)$$

où $u^*(M)$ représente la valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément et N , la matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément u_n variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

En général le champ à approcher est un champ vectoriel. Nous utilisons alors la notation matricielle représenté dans 3.26 . Les nœuds M_i sont des points de l'élément pour lesquels on cherche à d'identifier l'approximation u^* à la valeur du champ de variables u , ce qui nous permet d'écrire

$$u^*(M_i) = u_i \quad \forall M_i \quad (3.27)$$

soit pour l'approximation nodale

$$N_j(M_i) = \delta_{ij} \quad \forall M_i \quad (3.28)$$

Approximation nodale linéaire L'interpolation nodale est construite à partir d'une approximation générale :

$$u^*(M) = \Psi(M)\mathbf{a} \quad \forall M \quad (3.29)$$

Ψ : est une base de fonctions polynomiale connues indépendantes, pouvant être complètes ou incomplètes . Le vecteur \mathbf{a} , représente le vecteur des paramètres de l'approximation aussi appelés paramètres généralisés, qui n'ont pas de signification physique.

1. Bases polynomiales complètes

(a) i. Une dimension

- – 1. (a) Linéaire $(1, x)$: deux variables
- (b) Quadratique $(1, x, x^2)$: trois variables

1. (a) i. Deux dimension

- – 1. (a) Linéaire $(1, x, y)$: trois variables
- (b) Quadratique $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$: six variables

1. (a) i. Trois dimension

- – 1. (a) Linéaire $(1, x, y, z)$: quatre variables
- (b) Quadratique $(1, x, y, z, x^2, xy, y^2, xz, z^2, yz)$: dix variables

Pour utiliser une base polynomiale complète, le nombre de termes doit être égal au nombre de variables nodales à identifier. Si on est dans l'incapacité d'utiliser un polynôme complet, le meilleur choix consiste à respecter la symétrie des monômes conservés.

1. Bases polynomiales incomplètes

(a) deux dimensions : bi - linéaire » $(1, x, y, xy)$: quatre variables

(b) trois dimensions : tri - linéaire » $(1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz)$: huit variables

En identifiant aux nœuds l'approximation u^* à la valeur du champ de variables u , nous pouvons exprimer le vecteur des paramètres de l'approximation \mathbf{a} en fonction des variables nodales u de la manière suivante :

$$u_n = u^*(M_n) = \Psi(M_n)\mathbf{a} \quad (3.30)$$

par inversion du système

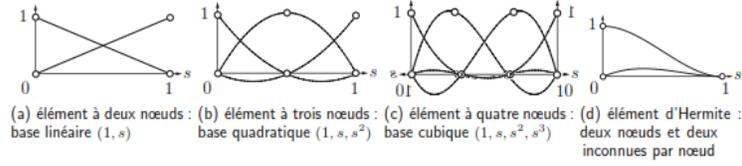
$$\mathbf{a} = Tu_n \quad (3.31)$$

Pour éviter des erreurs importantes du modèle, la matrice à inverser doit être régulière et bien conditionnée (diagonale dominante). Le conditionnement est lié au choix de la base polynomiale et à la géométrie des éléments. En reportant ce résultat dans l'approximation (3.29) nous obtenons la matrice des fonctions d'interpolation :

$$N(M) = \Psi(M)T \quad (3.32)$$

Construction des fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple, à frontière rectiligne par exemple, pour lequel l'approximation nodale est construite en suivant la démarche expliquée ci-dessus. Le passage de l'élément de référence (théorique) à l'élément réel (élément quelconque du domaine réel discrétisé) sera réalisé par une transformation géométrique. Deux grandes familles d'éléments sont souvent présentées :

- Éléments de type Lagrange : ou en augmente le nombre de nœuds en conservant une seule variable nodale



- Éléments de type Hermite : ou en augmente le nombre de variables nodales, en retenant par exemple les valeurs des dérivées du champ aux nœuds

Éléments à une dimension : Pour une variable $s \in [0, 1]$, les éléments à une dimension $(1, s)$ s'écrivent de la manière suivante (figure 3.4.2 (a)):

$$N_1(s) = L_1 = 1 - s, \quad \text{et} \quad N_2(s) = L_2 = s \quad (3.33)$$

Cette base est utilisée pour la création des l'éléments barres et génère une discontinuité au niveau des champs de déformations et de contraintes au passage d'un élément à son voisin. Une autre base un peu plus riche (figure 3.4.2 (b)), constituée de polynômes d'ordre 2 peu aussi être utilisée :

$$N_1(s) = L_1(2L_1 - 1), \quad N_2(s) = 4L_1L_2 \quad N_3(s) = L_2(2L_2 - 1) \quad (3.34)$$

Le passage à l'ordre supérieur donne la base de la figure 3.4.2 (c) où N_1 et N_2 sont respectivement les symétriques de N_3 et N_4 respectivement à par rapport à $s = \frac{1}{2}$

$$N_1(s) = \frac{L_1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \quad (3.35)$$

$$N_2(s) = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1) \quad (3.36)$$

$$N_3(s) = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1) \quad (3.37)$$

$$N_4(s) = \frac{L_2}{2}(3L_2 - 1)(3L_2 - 2) \quad (3.38)$$

L'élément associé est construit avec autres noeuds et une variable par noeud. Il est possible, avec la même base polynomiale, de construire un élément à deux noeuds ayant deux variables par noeud, c'est un élément de type Hermite illustré sur la figure 3.4.2 (d) : pour N_1 et N_2 : de la même manière que précédemment, les fonctions N_3 et N_4 se trouvent par symétrie.

Éléments sous forme triangulaire (deux dimension) : L'approximation utilisée pour ce type d'élément est la base polynomiale linéaire $(1, s, t)$, L'élément de référence (aussi dit parent) est un triangle rectangle à trois noeuds de type $T3$. L'approximation quadratique quant à elle utilise la base $(1, s, t, s^2, st, t^2)$.

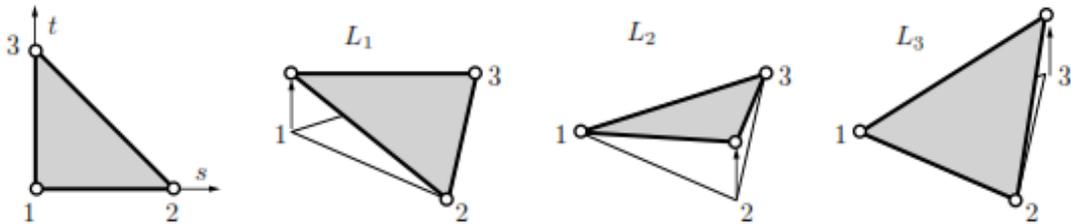


Figure 3-6: Fonction interpolant linéairement le triangle

L'élément de référence est un triangle rectangle à six noeuds de type $T6$. Si on suppose que :

$$L_1 = 1 - s - t \quad L_2 = s \quad L_3 = t \quad (3.39)$$

on a pour les trois noeuds sommet, les fonctions de forme s'écrivent :

$$N_i = L_i(2L_i - 1) \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.40)$$

les trois noeuds d'interface

$$N_{i+3} = 4L_jL_k \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad \forall i \neq j \quad \forall k \neq i, j \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.41)$$

Sur la figure 3-7 deux des fonctions d'interpolation quadratique sont représentées. Les autres s'obtiennent par permutation des indices (par rotation).

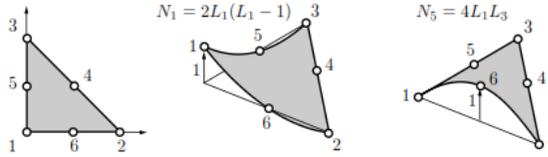


Figure 3-7: Fonctions d'interpolation quadratique

Éléments à deux dimension rectangulaire : L'approximation bi-linéaire est déduite de la base polynomiale $(1, s, t, st)$ avec $(s, t) \in [-1, 1]$. L'élément de référence est un carré à quatre noeuds de type $Q4$. Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \end{cases} \quad (3.42)$$

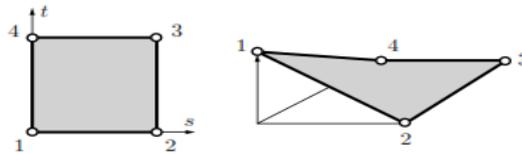


Figure 3-8: Fonction d'interpolation du quadrangle N_1

Sur la figure 3-8, seule la fonction N_1 est représentée, les autres s'obtenant par permutation (Les autres sont obtenues par rotation). De la même façon, on peut construire, à partir d'une base polynomiale complète, les fonctions d'interpolation des éléments rectangulaires à neuf noeuds, pour une approximation quadratique, et à seize noeuds pour une approximation polynomiale cubique. Ces éléments ont respectivement un et quatre noeuds internes. Du point de vue pratique, on construit des éléments ayant un minimum de noeuds internes, car ces noeuds ne sont pas connectés aux noeuds des autres éléments. On utilise donc des bases polynomiales incomplètes mais symétriques. Par exemple le $Q8$ est construit à partir de la base $(1, s, t, s^2, st, t^2, s^2t, st^2)$ et le $Q12$ est construit à partir de la base $(1, s, t, s^2, st, t^2, s^3, s^2t, t^2s, t^3, s^3t, st^3)$.

Principe des Travaux Virtuels

Introduction Afin de présenter la démarche générale utilisée pour construire les formes matricielles et vectorielles sur chaque élément, nous utiliserons comme point de départ la forme intégrale du *Principe des Travaux Virtuels* associée à un problème de mécanique des structures. Cette forme intégrale est de même type que celles pouvant être déduites des méthodes variationnelles et la généralisation à des problèmes de physique est donc simple.

Matrices masse et raideur Soit la forme intégrale du principe des travaux virtuels (PTV) :

$$\int_D \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} dV = - \int_D \underline{\sigma} : \delta \underline{\varepsilon} dV + \int_D \vec{f} \delta \vec{u} dV + \int_{\delta D} \vec{T} \cdot \delta \vec{u} dS \quad \forall \delta \vec{u} \quad (3.43)$$

Sur chaque élément nous utilisons l'approximation nodale pour exprimer le champ des déplacements \vec{u} et le champ des déplacements virtuels $\delta \vec{u}$. Ainsi le produit scalaire s'écrit de la manière suivante:

$$\ddot{\vec{u}}(M) \cdot \delta \vec{u}(M) = \delta u_n^T N(M)^T N(M) \ddot{u}_n \quad (3.44)$$

d'où le premier terme :

$$\int_{D_e} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} dV = \delta u_n^T M_e \ddot{u}_n \quad (3.45)$$

avec :

$$M_e = \int_{D_e} N(M)^T \rho N(M) dV \quad \text{matrice masse élémentaire} \quad (3.46)$$

Pour exprimer le second terme les deux tenseurs sont représentés par des vecteurs nous permettant de remplacer le produit doublement contracté par un simple produit scalaire.

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^T \\ \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (3.47)$$

De plus le vecteur des déformations s'exprime en fonction du champ des déplacements. Ces relations géométriques font apparaître des opérateurs différentiels appliqués à \vec{u} , que nous

notons sous forme matricielle :

$$\varepsilon(M) = LN(M)u_n = B(M)u_n \quad (3.48)$$

ou $B(M)$ est la matrice représentant l'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation. Les lois de comportement permettent d'exprimer le vecteur des contraintes en fonction du vecteur des déformations de la manière suivante :

$$\sigma(M) = D(M)\varepsilon(M) = D(M)B(M)u_n \quad (3.49)$$

d'où le second terme, écrit dans la base de discrétisation :

$$\int_{D_e} \underline{\sigma} : \underline{\delta \varepsilon} dV = \delta u_n^T K_e u_n \quad (3.50)$$

avec :

$$K_e = \int_{D_e} B(M)^T D(M) B(M) dV \quad \text{matrice raideur élémentaire} \quad (3.51)$$

Après ce développement, l'analyse du problème soit complète, il nous reste à exprimer le travail virtuel des efforts. En pratique, on considère d'une part les efforts donnés et d'autre part les efforts inconnus qui sont les efforts nécessaires pour assurer les liaisons cinématiques. Sur chaque élément, nous utilisons l'approximation du champ de déplacement pour exprimer le travail virtuel de ces efforts.

Travail des efforts 1- Efforts imposés

Leur travail virtuel élémentaire s'exprime de la manière suivante :

$$\delta T_{d_e} = \int_{D_e} \vec{f}_d \cdot \delta \vec{u} dV + \int_{\partial D_e} \vec{T}_d \cdot \delta \vec{u} dS \quad (3.52)$$

d'où le travail virtuel discrétisé s'écrit :

$$\delta T_{d_e} = \delta u_n^T F_{d_e} \quad (3.53)$$

ou :

$$F_{d_e} = \int_{D_e} N(M)^T f_d dV + \int_{\partial D_e} N(M)^T T_d dS \quad (3.54)$$

l'équation ci-dessus \vec{f}_d et \vec{T}_d sont écrits dans une base cohérente avec le choix de la discrétisation de $\delta \vec{u}$ et deviennent alors respectivement f_d et T_d .

2- Efforts inconnus

D'une manière similaire, leur travail virtuel élémentaire s'écrit :

$$\delta T_{i_e} = \int_{\partial D_e} \vec{T}_i \cdot \delta \vec{u} dS \quad (3.55)$$

sous forme discrète:

$$\delta T_{i_e} = \delta u_n^T F_{i_e}$$

En pratique les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré. On y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et éventuellement pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure. Comme nous le verrons lors de l'assemblage des équations, les noeuds internes non chargés sont des systèmes mécaniques en équilibre, ce qui entraîne que le torseur des actions mécaniques de tous les efforts élémentaires des éléments connectés à un même noeud est nul. Reportons dans la forme intégrale les résultats obtenus pour chaque élément, nous obtenons une équation matricielle de la forme :

$$M_e + K_e = F_{d_e} + F_{i_e} \quad \forall D_e \quad (3.56)$$

3.4.3 Conditions aux limite et assemblage

Les règles d'assemblage sont définies par la relation suivante :

$$D \simeq \sum_{e=1}^{n_e} D_e \quad (3.57)$$

Assemblage des matrices

L'assemblage des matrices élémentaires de masse M_e et de raideur K_e s'effectue selon les mêmes règles. Ces règles sont définies par sommation des termes correspondant au travaux virtuels calculés pour chaque élément, à savoir :

$$\sum_{e=1}^{n_e} \delta u_n^T M_e \ddot{u}_n = \delta U^T M \ddot{U} \quad \text{et} \quad \sum_{e=1}^{n_e} \delta u_n^T K_e u_n = \delta U^T K U \quad (3.58)$$

La forme quadratique associée à l'ensemble du domaine est la somme des formes quadratiques des sous-domaines. Cette opération consiste à ranger (Les algorithmes de rangement dépendent de la taille du système, du type d'équations à résoudre et d'autres paramètres) dans une matrice globale les termes des matrices élémentaires. La forme de cette matrice dépend bien évidemment de l'ordre dans lequel sont définies les variables globales de U .

Assemblage des efforts imposés L'assemblage ne pose pas de problème, il est défini par sommation des termes correspondant aux travaux virtuels calculés pour chaque élément. Si l'effort est appliqué à un noeud de la structure, il se place sur la ligne correspondant au degré de liberté correspondant au vecteur force généralisée tel que :

$$\sum_{e=1}^{n_e} \delta u_n^T F_{d_e} = \delta U^T F_d \quad (3.59)$$

Assemblage des efforts inconnus L'assemblage peut être fait de la même manière. Cependant, si les liaisons entre les éléments sont parfaites la somme des efforts inconnus aux noeuds internes de la structure est nulle. Nous pouvons en tenir compte pour simplifier l'expression du travail virtuel des efforts inconnus, en ne calculant que le travail virtuel des efforts correspondants aux liaisons cinématiques imposées à la structure, et à celui des liaisons non parfaites. Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle du principe des travaux virtuels de la manière suivante :

$$M \ddot{U} + K U = F_d + F_i \quad (3.60)$$

Sous cette forme, nous avons N équations avec $N + P$ inconnues. Pour résoudre le système, il faut tenir compte des P conditions aux limites cinématiques associées aux P composantes

inconnues du vecteur F_i , avec la supposition que les liaisons sont parfaites pour éviter d'autres inconnues supplémentaires au problème déjà complexe.

Réalisation des calculs

Généralement la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre des problèmes complexes de type industriel, ou le recours à un logiciel spécialisé est plus que nécessaire. Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Parmi ces logiciels spécialisés on peut citer : Ansys, Castem 2000, Samcef etc ...les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses tel que :

- analyse linéaire ou non linéaire d'un système physique continu
- analyse statique ou dynamique
- prise en compte de lois de comportement complexes
- prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, plasticité, écoulement etc . . .) pouvant être couplés
- problèmes d'optimisation, etc ...

Il peut arriver que le calcul échoue. Les principales sources d'erreurs généralement observées à ce niveau sont données dans le ci-dessous.

Erreurs	Causes	Remèdes
Singularité de K	Eélément mal définis, Existence de mode rigides Intégration numérique	Modifier la topologie du maillage, Modifier les liaisons Modifier le nombre de points d'intégration
Résolution des équations	Arrondi numérique, Non Convergence	Travailler en mode double précision, Changer d'algorithme Augmenter le nombre d'itération

3.4.4 Utilisation d'éléments de type T3

Pour présenter les calculs relatifs à cet élément, nous avons volontairement choisi de suivre la démarche « numérique » en utilisant les notions d'élément de référence et de transformation géométrique [9]. L'élément est un triangle rectangle à trois noeuds qui utilise la base polynomiale $(1, s, t)$. Dès lors nous savons que le champ des déformations en même temps celui des contraintes seront constants sur les éléments. L'approximation s'écrit :

$$u^*(s, t) = [1 \quad s \quad t] \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

sachant que pour:

$$\begin{cases} u^*(0, 0) = u_1 & \text{Noeud 1} \\ u^*(1, 0) = u_2 & \text{Noeud 2} \\ u^*(0, 1) = u_3 & \text{Noeud 3} \end{cases}$$

on en déduit que

$$\begin{cases} p_1 = u_1 \\ p_2 = u_2 - u_1 \\ p_3 = u_3 - u_1 \end{cases}$$

soit pour l'approximation nodale

$$u^*(s, t) = [1 - s - t \quad s \quad t] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = N(s, t)U_e$$

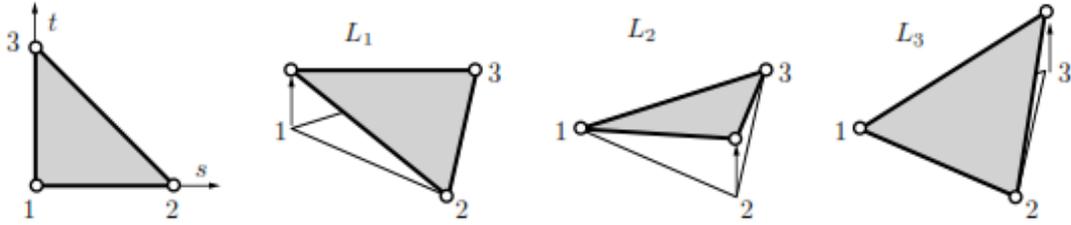


Figure 3-9: Eléments de type T3

Pour le champ de déplacement dans le plan (2D), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Ces fonctions d'interpolation sont représentées sur la figure (3-9) ci-dessous. L'élément triangulaire à trois noeuds est un élément iso-paramétrique, ces fonctions sont utilisées pour définir l'élément réel à partir de l'élément de référence.

Calculons la matrice jacobienne de cette transformation géométrique :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_g}{\partial s} \\ \frac{\partial N_g}{\partial t} \\ \frac{\partial N_g}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n & Y_n & Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

autrement dit :

$$J = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}$$

cette matrice est formée d'éléments constants, les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation sont obtenues par inversion de J tel que :

$$J^{-1} = \frac{1}{2S_r} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

ou S_r représente l'aire de l'élément réel. Le jacobien étant constant, nous pouvons intégrer analytiquement les termes des matrices masse et raideur. Dans les expressions qui suivent, nous avons noté e l'épaisseur uniforme de l'élément. Pour la matrice masse on a :

$$M_e = \int_{D_e} N(x, y)^T \rho N(x, y) dV = e \int_0^1 \int_0^{1-s} N(s, t)^T \rho N(s, t) 2\alpha ds dt$$

tous les monômes à intégrer sont d'ordre inférieur ou égal à 2. En ce qui concerne la matrice raideur on a :

$$K_e = \int_{D_e} B(M)^T D(M) B(M) dV = e \int_0^1 \int_0^{1-s} B(s, t)^T D B(s, t) 2\alpha ds dt$$

sachant que :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = B(M)U_e$$

alors :

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix}$$

sachant que aussi :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}$$

alors :

$$B(s, t) = \frac{1}{2S_r} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{12} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{12} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Comme pour la matrice masse les termes de la matrice raideur sont des constantes, leurs integration ne pose donc aucun problème (B étant constante, les champs des déformations et des contraintes sont constants sur les éléments). Les résultats du calcul analytique de ces matrices sont donnés dans [9], [10]. Le résultat de ces calculs peuvent être utilisés directement dans un code éléments finis, mais il est aussi possible de calculer numériquement et de façon exacte ces matrices.

3.4.5 Algorithme de mise en oeuvre de la méthode des éléments finis

1. Lecture des données

- (a) *coordonnées de chaque noeud*
- (b) *définition des éléments « mailles »*
- (c) *caractéristiques mécaniques*
- (d) *chargements*
- (e) *définition des conditions aux limites*

2. contrôles

- (a) *visualisation du maillage*
- (b) *ouverture du fichier résultat en mode écriture*

3. Calcul

- (a) *calcul des matrices et vecteurs et résolution du système d'équations pour chaque élément du maillage*
- (b) *calcul des matrices élémentaires (comportement, sollicitations)*
- (c) *assemblage dans les matrices globales*

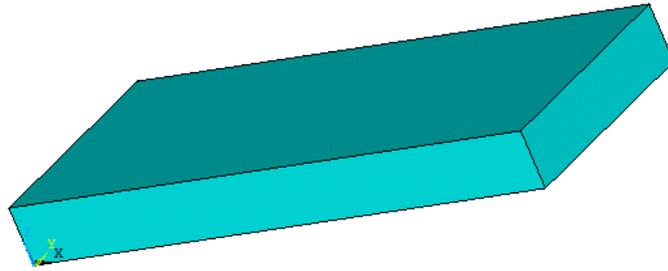


Figure 3-10: Plaque mince

4. résolution

- (a) *prise en compte des sollicitations nodales*
- (b) *prise en compte des conditions aux limites*
- (c) *résolution finale et stockage dans le fichier résultats*
- (d) *calcul des variables secondaires σ, ε et μ (contrainte, déformation et déplacement)*

5. visualisation

Pour l'application de la méthode des éléments finis à notre problème de conception (CAO), il est impérativement nécessaire de définir le modèle à retenir pour représenter le comportement du matériau. En plus d'un certain nombre de pièces sur lesquelles nous avons testé les différents outils que nous avons réalisés, notre modèle principal est une plaque mince de dimensions (L, l, e) , c'est-à-dire une longueur L , une largeur l et une épaisseur e tel que (voir figure (3-10)):

$$L \gg e \quad \text{et} \quad l \gg e \quad (3.61)$$

Si on considère l'hypothèse donnée par l'équation 3.61, en équilibre thermodynamique, notre modèle obéit à la théorie de l'élasticité plane (contraintes et déformations planes). Nous rappelons dans un premier temps les principales hypothèses pour la modélisation et l'expression de la loi de comportement

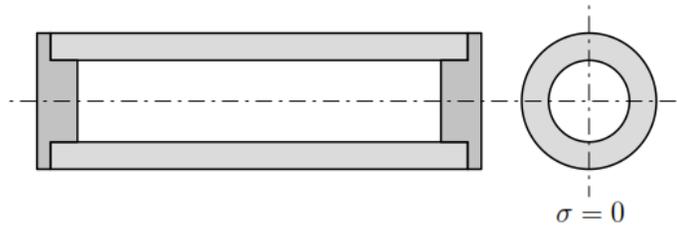


Figure 3-11: Modèle en contraintes planes

Contraintes

Le champ des contraintes dans le milieu peut être représenté par le tenseur suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\sigma}}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Physiquement, ce type d'hypothèse s'applique à notre cas c'est-à-dire une pièces chargées transversalement dont les faces sont libres. Ce cas peut être aussi rencontrer par exemple dans les :

plaques et coques minces : l'état de tension sur les surfaces est nul, de plus l'épaisseur étant supposée petite, on considère que l'état de contrainte à l'intérieur du domaine est voisin de l'état de contrainte sur les surfaces (même contraintes dans toute la structure ce qui facilite énormément la modélisation et les calculs), donc plan par rapport à la normale à la surface.

capacité sans effet de fond à bords libres : ce problème visualisé par la figure (3-11) peut être modélisé par un problème en contraintes planes en négligeant les contraintes longitudinales dans la structure.

Sachant que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = E \underline{\underline{\varepsilon}}$$

ou E représente le module de Young. L'écriture inverse de la loi de Hooke pour déterminer le

tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à partir du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}$$

ou $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur identité. Nous ne conserverons que les termes dont le travail est non nul:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Si nous inversons cette relation nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons la forme simplifiée de la loi de comportement des modèles contraintes planes. La déformation ε_{33} qui n'est pas prise en compte dans la loi de comportement, peut être calculée à posteriori par la relation :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Déformations

Nous supposons que le champ des déformations dans le milieu peut être représenté par un tenseur de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Ce type d'hypothèse s'applique à des pièces chargées transversalement dont les deux extrémités sont bloquées par des appuis supposés infiniment rigides, ou pour les pièces massives dont les déformations longitudinales seront suffisamment faibles pour être négligées, par ex-



Figure 3-12: Modèle en déformations planes

emple, une capacité sans effet de fond à bords appuyés. Ce problème représenté sur la figure (3-12) (que nous allons le traiter numériquement dans la section reconstruction) peut être modélisé par un problème en déformations planes en négligeant les déformations longitudinales de la structure. Écrivons la loi de Hooke pour déterminer le tenseur des contraintes à partir du tenseur des déformations. Nous ne conservons que les termes à travail non nul :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons la forme simplifiée de la loi de comportement des modèles déformations planes. De la même manière la contrainte σ_{33} qui n'est pas prise en compte dans la loi de comportement, peut être calculée à posteriori par

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

donc, la matrice d'élasticité pour ces deux modèles précédent est de la forme suivante:

$$D = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu-a\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-a\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-a\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu-a\nu)}{2(1-a\nu)} \end{bmatrix}$$

ou a est un coefficient dont la valeur:

$$\begin{cases} a = 0 & \text{contraintes planes} \\ a = 1 & \text{déformations planes} \end{cases}$$

3.5 Conclusion du chapitre

Le calcul numérique permet à l'ingénieur d'effectuer des simulations numériques de phénomènes physiques. Le calcul occupe une place stratégique avec la CAO et les autres technologies de simulation dans le développement d'un produit complexe qui touche à différents domaines de la physique. Cela concerne les industries automobiles, navales, aéronautiques, ferroviaires, mais aussi les industries lourdes: centrales électriques, plates-formes pétrolières, et le génie civil etc ..., le calcul est indispensable lorsque l'on cherche à obtenir une solution optimisée pour réduire les coûts et les délais de fabrication. Grâce au calcul, même simplifié, l'ingénieur peut tester plusieurs configurations pour optimiser le comportement d'un modèle à une prestation donnée. Cela évite de multiplier les prototypes et les tests réels, les supports physiques (prototypes) ne servent plus à chercher une solution, ils permettent de la valider. Le calcul s'applique aussi dans les domaines du « process ». Les procédés de fabrication tels que l'emboutissage, l'usinage grande vitesse, les dépôts de peinture, l'assemblage de tôlerie, la mise en forme des plastiques, peuvent être aussi modélisés par éléments finis, cette dernière est une bonne représentation du comportement du phénomène physique qui sera recherchée pour pouvoir vérifier et valider un procédé de fabrication d'une pièce.

Enfin le calcul de conception dans les bureaux d'études, c'est sans doute le plus répandu car grâce aux outils de calcul simplifié dont disposent les logiciels de CAO modernes, la simulation numérique fait partie des outils de conception pour obtenir un comportement défini à priori qui détermine le dimensionnement, donc le dessin, des pièces mécaniques. La méthode des éléments finis est de toutes les méthodes de discrétisation la plus utilisée car :

- elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe.
- elle couvre de nombreux domaines de la physique.
- les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation) la rende facile à maitre en oeuvre.
- de nombreux logiciels dédiés à cette méthode sont disponibles sur le marché.

Chapter 4

Déformation d'une structure composite a matrice polymère par absorption d'eau

4.1 Introduction

Un matériau composite est constitué de deux différentes phases non miscibles nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases.

Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. Armature ou squelette, il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité) généralement de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Lie les fibres renforts, répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou une résine organique.

L'arrangement des fibres, leurs orientations permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application visée. Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite.

4.1.1 Matrice

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Ces résines existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone, des températures de 2200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 4-1.

Matrice organique thermodurcissables

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau 4-1

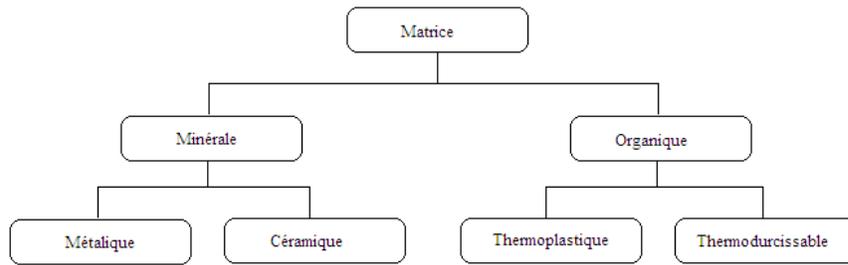


Figure 4-1: Différents types de matrices

Résines	$T(c^\circ)$	kg/m^3	$t^R (\%)$	$t^R (GPa)$	$c^R (GPa)$	$E (GPa)$
polyesters	60 à 100	1140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2.8 à 3.6
Phénoliques	120	1200	2.5	40	250	3 à 5
Epoxydes	290	1100 à 1500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

tableau 4-1 : Caractéristique des résines thèrmodurcissables

Les thermoplastiques Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles, elles sont solides et nécessitent une transformation à très haute température comme les PVC, ces dernières sont présentées dans le tableau 4-2:

Résines	$T(c^\circ)$	kg/m^3	$t^R (\%)$	$t^R (GPa)$	$c^R (GPa)$	$E (GPa)$
polyamides	65 à 100	1140		60 à 85		1.2 à 2.5
polypropylène	900	1200		20 à 35		1 à 1.4

tableau 4-2 : Caractéristiques des résines thèrmodurcissables

4.1.2 Renfort

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite. La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure (4-2):

Caractéristiques mécaniques des renforts

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus (4-2), il existe différents types de renfort. Ils peuvent être scindées en deux groupes, les renforts à haut module dont la résistance thermique est faible

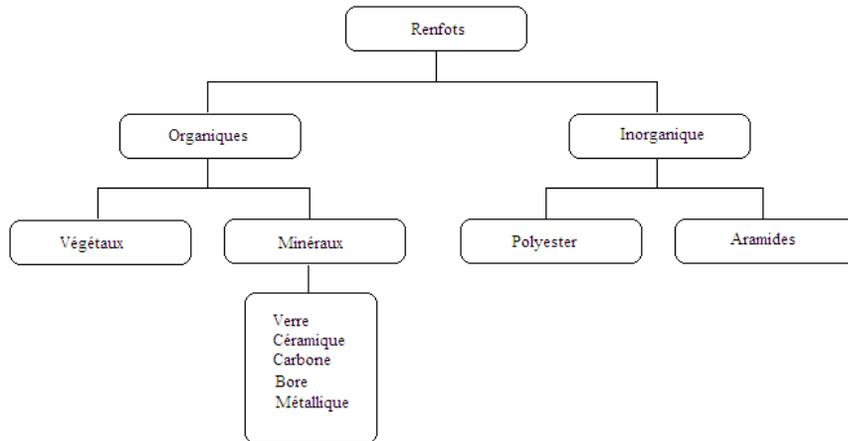


Figure 4-2: Différents types de renforts

et les renforts à haute résistance thermique dont le module est faible.

Renforts	kg/m^3	t^R (GPa)	c^R (GPa)	E (GPa)
AS4	1800		3599	235
T300	1700	1.2	3654	
IM6		0.88	1460	231
IM8	1800		5171	310
Kevlar	1440	2.5	3620	124
Verre E	2580	3.5	3450	69

tableau 4-3 : Caractéristiques mécaniques des renforts

4.1.3 Propriétés de la matrice époxyde 914

Les propriétés de la résine sont supposées être constantes dans chaque phase. Le tableau 1 présente les propriétés de la résine époxyde 914 dans deux états : vitreux et caoutchoutique. L'indice m indique que le paramètre qui se rapporte à la matrice, et les exposants g et r représentent respectivement l'état vitreux et caoutchoutique :

<i>Etat vitreux</i>		<i>Etat caoutchoutique</i>	
$E_m^g [CPa]$	3.9	$E_m^r [GPa]$	$4.17 \cdot 10^{-2}$
$\nu_m^g [-]$	0.4	$\nu_m^r [-]$	0.497
$\alpha_m^g [1/^\circ C]$	$5 \cdot 10^{-5}$	$\alpha_m^r [1/^\circ C]$	$1.25 \cdot 10^{-4}$
$G_m^g [GPa]$	1.39	$G_m^r [GPa]$	$1.39 \cdot 10^{-2}$
$K_m^g [GPa]$	6.50	$K_m^r [GPa]$	2.60

Tableau 4-4 : Propriétés mécaniques de la matrice époxyde 914 dans deux états

Propriétés des fibres de carbone T300	Symbole [Unité]	Valeur
Masse volumique	$\rho_f [Kg/m^3]$	1760
Module de Young	$E_f [GPa]$	231
Module de cisaillement	$G_f [GPa]$	92.1
Module de compressibilité	$K_f [GPa]$	123
Coefficient de Poisson	$\nu_f [-]$	0.2
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_f [1/^\circ C]$	$1.9 \cdot 10^{-5}$

Tableau 4-5 : Propriétés de la fibre de carbone T300

Dans la section suivante on va détailler le modèle qui a été utilisé dans notre travail et qui à fait l'objet de notre publication (note en bas de page). Le modèle exploite les conséquences qu'a le gonflement hydrique (mais il pourrait en fait s'agir de tout autre solvant) dans un polymère ou dans un composite lorsque des contraintes sont présentes. Ces conséquences sont de deux types : ce sont à la fois la teneur en eau à l'équilibre et la loi de diffusion qui sont modifiées. Mais nous ne traitons que la première.

4.2 Etude de l'absorption d'eau par les composites à matrice polymère

4.2.1 Introduction

Pour répondre au cahier des charges que nous nous sommes fixés, nous avons estimé qu'il sera préférable que notre travail (conception assistée par ordinateur) de recherche soit appliqué à l'étude qui a fait l'objet de notre publication. Dans cette étude (dont nous allons détailler

ci-dessus) nous nous sommes penché sur l'étude de l'absorption d'eau par un composite à matrice polymère avec un éventuel endommagement. Le comportement mécanique des matériaux composites à matrice polymère, dépend fortement de l'endommagement et du taux d'humidité. Le besoin de modèles mathématiques fiables pour la prédiction du comportement mécanique est d'une nécessité extrême pour les concepteurs de structures (CAO). Le comportement de ces dernières est altéré par des paramètres liés à l'environnement comme la température et le niveau d'hygrométrie. Dans des applications particulières comme le transport de fluides ou dans les cas d'exposition à l'humidité en général que se soit dans le domaine maritime ou dans le domaine de l'aéronautique, ces paramètres sont pris en considération dans les modèles. Il s'agit donc d'établir des relations contrainte-déformation et concentration-endommagement on faisant intervenir des couplages entre les propriétés mécanique et physique. Le sujet traité ici a fait l'objet de nombreuses études [17], [13], [14], [15].

4.2.2 Etude du couplage contraintes endommagement dans un polymère

L'introduction d'une variable représentant la dégradation mécanique pose un problème difficile, une telle variable représente le degré de dégradation du matériau et son évolution avec le temps, c'est l'endommagement notée $d(t)$. Considérons un polymère endommagé dans le lequel on a isolé un élément de volume fini d'une taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu considéré. Soit Ω l'aire d'un élément de volume repéré par son vecteur normal \vec{n} . Si $\tilde{\Omega}$ représente l'aire résistante effective des concentrations de contraintes, on a :

$$\Omega_d = \Omega - \tilde{\Omega} > 0 \quad (4.1)$$

Ω_D : est l'aire total de l'ensemble des traces des défauts corrigée des effets de concentration de contrainte et d'interaction. Par définition [34] :

$$d_n = \frac{\Omega_d}{\Omega} \quad (4.2)$$

d_n est la mesure mécanique de l'endommagement local (variable mécanique représentant l'endommagement) relatif à une certaine direction \vec{n} . Physiquement d_n représente donc l'aire relative des fissure et cavités coupées par le plan normal à la direction \vec{n} . D'un point de vue

mathématique la variable d_n représente la densité surfacique (relative) des discontinuités de la matière dans le plan normal à \vec{n}

d_n : est la mesure mécanique de l'endommagement telle que :

$d_n = 0$: correspond à l'état non endommagé ou vierge

$d_n = 1$: correspond à l'élément de volume rompu en deux parties selon le plan normal \vec{n}

$0 < d_n < 1$: caractérise l'état d'endommagement

Dans le cadre de notre travail on considère *que l'endommagement est isotrope* c'est-à-dire que les fissures et cavités ont une orientation de distribution uniforme dans toute les directions.

Notion de contrainte effective

L'introduction d'une variable d'endommagement représentant une densité surfacique de discontinuité, conduit directement à introduire la notion de contrainte effective c'est-à-dire la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. Dans le cas unidimensionnel , si F est une force appliquée sur la section Ω de l'élément de volume, on a

$$\sigma = \frac{F}{\Omega} \quad (4.3)$$

représentant la contrainte usuelle qui satisfait les équations d'équilibre [34]. Dans le cas d'un endommagement isotrope de coefficient d , la section résistante effective est:

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \Omega_d = \Omega(1 - d) \quad (4.4)$$

d'où la contrainte effective est donnée par :

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \quad \text{soit} \quad \tilde{\sigma} = \sigma \frac{1}{(1 - d)} \quad (4.5)$$

Cas stationnaire

Généralement la déformation totale d'un matériau est donnée par :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_d + \varepsilon_{an} \quad (4.6)$$

où ε_d est la déformation (permanente) dû à l'endommagement et ε_{an} est la deformation

anelastique telles que

$$\varepsilon_{an} = \varepsilon_v + \varepsilon_e \quad (4.7)$$

où ε_e est une déformation élastique et ε_v est une déformation visqueuse. Si σ est la contrainte appliquée, d le niveau d'endommagement du matériau et E le module de Young, la relation reliant l'endommagement et le taux de déformation élastique s'écrit sous la forme suivante

$$d = \frac{dE}{E} \quad (4.8)$$

D'après la loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{et que} \quad \tilde{\sigma} = \frac{E\varepsilon}{(1-d)} \quad (4.9)$$

ce qui donne

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}(1-d)}{E} \quad (4.10)$$

finalement

$$\dot{\varepsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E(1-d)} + \frac{\sigma \dot{d}}{E(1-d)^2} \quad (4.11)$$

La déformation élastique génère un endommagement qui a la particularité de présenter un seuil par rapport à une contrainte critique σ_c en dessous de laquelle en a $\dot{d} = 0$, donc :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_e &= \frac{\dot{\sigma}}{E(1-d)} & \text{si} & \quad (1-d)\sigma < \sigma_c & \quad \text{c'est à dire} & \quad d = \text{const} \\ \dot{\varepsilon}_e &= \frac{\dot{\sigma}}{E(1-d)} + \frac{\sigma \dot{d}}{E(1-d)^2} & \text{si} & \quad (1-d)\sigma = \sigma_c \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.2.3 Etude du couplage contraintes et concentration en eau dans un polymère

Soit un élément de volume V_I (volume initial) d'un polymère isotrope assez petit pour que les contraintes ainsi que la teneur en eau puissent y être considérées comme étant uniformes dans tout le volume considéré. Pour le couplage entre les deux variables c et σ (contraintes et la teneur en eau), on adopte la démarche suivante. Par définition la concentration massique en

eau est donnée par

$$c = \frac{n_w M_w}{n_p M_p} \quad (4.13)$$

où

n_w, n_p : le nombre de moles de l'eau et du polymère respectivement

M_w, M_p : la masse molaire de l'eau et du polymère respectivement

l'état du polymère peut être défini par la teneur en eau c et le tenseur de déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$, de l'élément de volume considéré. Quand la prise d'eau dans un polymère produit un gonflement de ce dernier, il ya apparition de contraintes qui se manifestent sous forme de pression hydrostatique tel que

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = -k \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (4.14)$$

ou $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseurs de contraintes due principalement à:

- un éventuel chargement extérieur qu'on note p_{ext}
- un gonflement contrarié par la structure (la matrice) qu'on note p_m
- - un gonflement contrarié par les renforts (dans le cas d'un composite) qu'on note p_r
- ou les trois ontribution ensemble, c'est -à-dire

$$p = \sum_i p_i = p_{ext} + p_m + p_r \quad (4.15)$$

Dans le cas d'un gonflement isotropique, le tenseur de déformation du au gonflement (élastique) est donné par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^g = \eta c \underline{\underline{I}} \quad (4.16)$$

ou

η : le coefficient de gonflement linéique

c : la teneur en eau dans le polymère

$\underline{\underline{I}}$: le tenseur identité du second ordre

Si V_g est l'augmentation du volume de la matrice polymère, le volume totale V_T devient

$$V_T = V_I + V_g = V_I(1 + 3\eta c) \quad \text{sachant que} \quad \frac{V_g}{V_I} = 3\eta c \quad (4.17)$$

c'est à dire pour une concentration nulle ($c = 0$, polymère sec) le gonflement n'a pas lieu. Sachant que le tenseur de déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ est donnée par:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^g \quad (4.18)$$

le tenseur de contrainte sera donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = k_p(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) - 3\eta c)\underline{\underline{I}} + 2G_p\underline{\underline{\varepsilon}}_d \quad (4.19)$$

les constante k_p et G_p (constante d'élasticité) sont respectivement, les modules de compression et de cisaillement du polymère, $\underline{\underline{\varepsilon}}_d$ et la partie déviatorique de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Le Couplage entre contraintes et concentration en eau dans un polymère se fait en introduisant la notion de *potentiel chimique généralisé* et la notion *d'enthalpie libre totale* à l'équilibre. Suposant que le volume initial V_I est soumis à une ambiance humide, l'énergie libre du système (énergie de *Helmoltz*) en fonction de la concentration en eau et la déformation totale (qu'on doit imposé) est donnée par

$$\begin{aligned} E(c, \underline{\underline{\varepsilon}}) &= E_0 + E_{el} + E_{wp} \\ &= E_0 + V_I\varphi(c, \underline{\underline{\varepsilon}}) + n_p h_w(c) \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec :

- E_0 : énergie libre du polymère sec
- $\varphi(c, \underline{\underline{\varepsilon}})$: énergie élastique par unité de volume du polymère
- $h_w(c)$: énergie libre due à l'interaction entre eau et polymère par mole de polymère sec

$$\varphi(c, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{k_p}{2}(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} - 3\eta c)^2 + G_p\underline{\underline{\varepsilon}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d \quad (4.21)$$

Le potentiel chimique généralisé (qu'on note \bar{u}_w) due à l'absorption d'eau par le polymère, est défini comme étant la dérivée partielle de l'énergie libre (l'enthalpie libre) par rapport au nombre de moles d'eau à deformation total constante, c'est à dire

$$\bar{u}_w = \left. \frac{\partial E(c, \underline{\varepsilon})}{\partial n_w} \right|_{\underline{\varepsilon}} = \left. \frac{\partial E(c, \underline{\varepsilon})}{\partial c} \right|_{\underline{\varepsilon}} \frac{\partial c}{\partial n_w} \quad (4.22)$$

si on considère que la prise d'eau n'a aucune incidence sur les constantes d'élasticité du polymère ($k_p = const$ et $G_p = const$), le potentiel chimique généralisé en fonction du potentiel chimique de l'eau dans le polymère $u_w(c)$, est donné par:

$$\bar{u}_w = \frac{3\omega_w \eta}{\rho_p} p + u_w(c) = \alpha p + \beta \quad (4.23)$$

qui dépend linéairement de la pression p . Quand à l'enthalpie libre H , fonction d'état la plus appropriée pour l'étudier des équilibres chimiques réalisés à la température T et à pression p_w constantes, elle se comporte comme une fonction potentielle et traduit le comportement du milieu extérieur (le milieu ambiant du matériau). Physiquement, un équilibre est atteint lorsque l'énergie est minimale, cela veut dire que

$$\partial H = 0 \quad (4.24)$$

Considérant que le volume élémentaire V_I subit une pression partielle de l'aire humide ambiant p_w (voire figure ??) à une température T , à l'équilibre (après échange de matière au niveau de l'interface volume élémentaire, air ambiant), l'enthalpie libre totale des deux milieu est donnée par

$$H = n_{air} h_{air} + n'_w h'_w + n_w h_w + n_p h_p$$

où

n_{air} : le nombre de mole d'air dans l'environnement du polymère
et h_{air} l'enthalpie molaire correspondante

n'_w : le nombre de mole d'eau dans l'air et h'_w , l'enthalpie molaire
correspondante

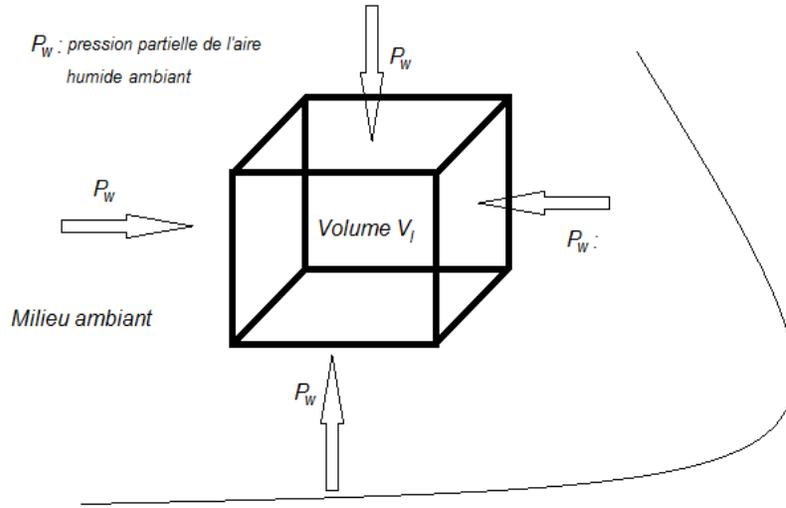


Figure 4-3: Elément de volume sous la pression de l'air humide ambiant

à l'équilibre on a :

$$dH = h'_w dn'_w + h_w dn_w = dn_w (h_w - h'_w) = 0 \quad \text{car} \quad dn_w = -dn'_w \quad (4.25)$$

D'après la définition du potentiel chimique (4.22) citée ci-dessus:

$$\begin{aligned} \bar{u}_w &= h_w & \text{dans le polymère} \\ u'_w &= h'_w & \text{dans le l'air} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Si on considère que la loi des gaz parfaits est applicable à l'air humide (non saturé) dans le voisinage du polymère et en assimilant l'activité de l'eau dans le polymère à la concentration on peut écrire

$$\begin{aligned} u'_w &= u'_0 + RT \ln\left(\frac{p_w}{p_0}\right) & \text{dans le l'air} \\ \bar{u}_w &= \bar{u}_0 + RT \ln\left(\frac{c}{c_0}\right) & \text{dans le polymère} \end{aligned} \quad (4.27)$$

à l'équilibre on a $\bar{u}_w = u'_w$, on trouve que la concentration en eau dans un polymère soumis à une pression partielle de vapeur d'eau dans l'air ambiant p_w est donnée par

$$c = S p_w \left(1 - \frac{3\omega_w \eta}{RT \rho_p} p\right) \quad \text{avec} \quad S = c_0 \exp\left(\frac{u'_0 - u_0}{RT}\right) \quad (4.28)$$

ou S (une constante) représente la solubilité de l'eau dans le polymère. Pour que $c > 0$, on considère que $RT\rho_p/3\omega_w\eta \gg p$. D'après l'équation ci-dessus, si le gonflement n'est pas contrarié ($p = 0$) la concentration en eau dans le polymère est donnée par la relation

$$c = Sp_w \quad (4.29)$$

qui représente une isotherme de sorption suivant la loi de *Henry*. Dans le cas où $p \neq 0$ (présence de contraintes), la concentration en eau suit toujours la même loi mais avec une solubilité S^c différente telle que:

$$S^c = S\left(1 - \frac{3\omega_w\eta}{RT\rho_p}p\right) \quad (4.30)$$

où S^c est la solubilité de l'eau dans la structure contrariée. Pour mieux mettre en évidence le couplage entre concentration et contrainte, on préfère écrire l'équation (4.28) autrement. Si on introduit une grandeur représentant une contrainte de référence σ_0 définie par :

$$\sigma_0 = \frac{RT\rho_p}{\eta\omega_w} \quad (4.31)$$

la concentration en eau s'écrit donc sous la forme suivante

$$c = Sp_w\left(1 - \frac{3}{\sigma_0}p\right) \quad (4.32)$$

dans le cas d'une compression uniaxiale on a $p = \frac{1}{3}\sigma$ d'où

$$c = Sp_w\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_0}\right) \quad (4.33)$$

d'après ce dernier résultat, pour que l'effet des contraintes soit notable, il faut que le coefficient de gonflement ainsi que la masse molaire de la matière qui diffuse soient importants. Dans le cas d'un éventuel chargement extérieur unidirectionnel tel que

$$p_{ext} \gg p_m + p_r \quad (4.34)$$

et en considérant que la matrice polymère a un coefficient d'endommagement d , on peut écrire

la formule de la concentration en eau dans la matrice contrariée de la manière suivante:

$$c = Sp_w \left(1 + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0}\right) = Sp_w \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_0(1-d)}\right) \quad (4.35)$$

en considérant que l'endommagement est sous forme de cavités (absence de matière).

4.3 Couplage contrainte concentration cas d'un composite

Le matériau composite est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Le nouveau matériau ainsi obtenu possède des propriétés que les éléments initiaux ne possèdent pas. Ce phénomène, qui permet d'améliorer la qualité de la matière (légèreté, rigidité, résistance à un effort, etc.) face à une certaine utilisation, explique l'utilisation croissante des matériaux composites dans différents secteurs industriels. Néanmoins, la description fine des composites reste complexe du point de vue mécanique.

4.3.1 Modèle de microstructure adopté

Le modèle que nous avons adopté dans notre étude (article) se base sur l'étude d'un empilement de sphères, figure (4-4)(modèle de Hashin [35]).

Au center d'une enveloppe sphérique de polymère de rayon interne a et de rayon externe b , se trouve un renfort sphérique (aluminium, verre, ...) de rayon a (la forte adhésion l'oblige). Le polymère est à *élasticité linéaire isotrope* parfaitement plastique ayant pour critère de plasticité le critère de *Von Mises* [36]. On cherche donc à obtenir une solution analytique du modèle d'assemblage de sphères c'est-à-dire une solution correspondant à une teneur en eau uniforme dans toute la matrice. Le gonflement induisant l'augmentation uniforme du volume de la matrice polymère permet d'avancer l'hypothèse que le bord extérieur est libre $\sigma_{rr}(r=b) = 0$. Du moment que le volume étudié est à symétrie sphérique, constitué d'un matériau homogène et isotrope, les conditions aux limites possèdent aussi la symétrie sphérique. On est donc amené à chercher une solution dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , tel que les champs de déplacement $\underline{\underline{\mu}}$, le tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ soient respectivement sous la

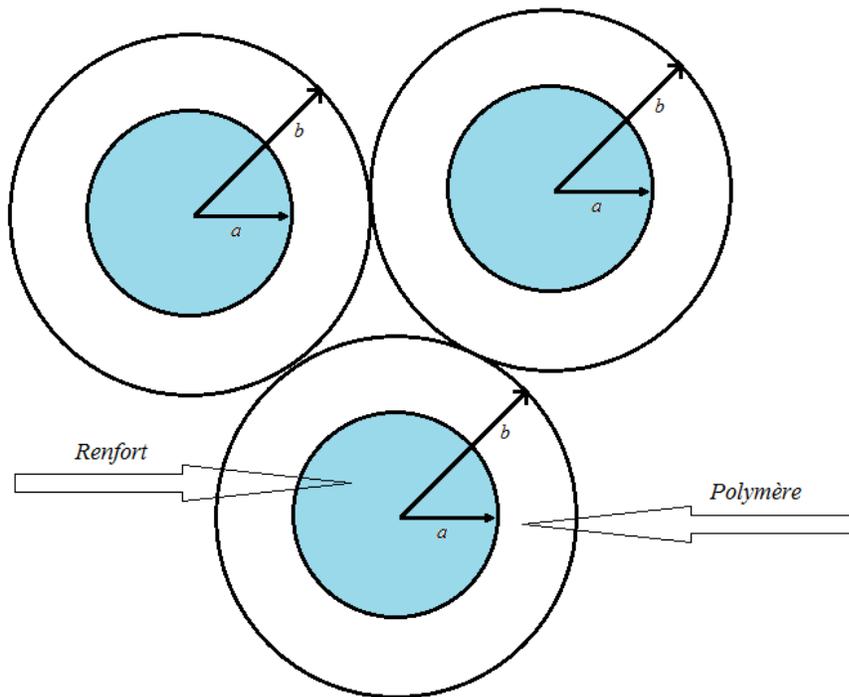


Figure 4-4: Modèle de Hashin pour la définition d'un composite

forme

$$\begin{aligned}
\mu_r &= h(r) & \mu_\theta &= \mu_\phi = 0 \\
\sigma_{rr} &= f_1(r) & \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} &= g_1(r) & \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} &= 0 \\
\varepsilon_{rr} &= f_2(r) & \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} &= g_2(r) & \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{\theta\phi} &= 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

c'est-à-dire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Les conditions d'équilibre se réduisent à :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \tag{4.38}$$

on se servant des équations cinématiques données par (4.36) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mu_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_r}{r} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda + 2\nu)\frac{\partial\mu_r}{\partial r} + 2\lambda\frac{\mu_r}{r} \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda\frac{\partial\mu_r}{\partial r} + 2(\lambda + \nu)\frac{\mu_r}{r} \end{cases} \tag{4.39}$$

et des conditions aux limites statiques:

$$\sigma_{rr}(r = b) = 0 \quad \sigma_{rr}(r = a) = -p \tag{4.40}$$

et de la loi d'élasticité de *Hooke*, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d_r^2\mu}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\mu_r}{dr} - \frac{2}{r^2}\mu_r = 0 \tag{4.41}$$

la solution de cette équation aura la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mu_r &= C_1 r + \frac{C_2}{r^2} & \text{dans la matrice} \\
\mu_r &= C_3 r & \text{dans le renfort}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

on remplaçant dans (4.39) on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= C_1 - \frac{2C_2}{r^3} && \text{Dans le polymère} \\
\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} &= C_1 + \frac{C_2}{r^3} && \text{Dans le polymère} \\
\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} &= C_3 && \text{Dans le renfort}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Si on note par k_p et G_p respectivement le module de compression et le module de cisaillement de la matrice (polymère) et par k_r et G_r respectivement le module de compression et le module de cisaillement des renfort et on appliquant la loi de *Hook*, le tenseur de contrainte dans le polymère est donné par

$$\underline{\underline{\sigma}} = (k_p - \frac{2}{3}G_p)tr(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^e)\underline{\underline{I}} + 2G_p(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^e) \tag{4.44}$$

le tenseur de contrainte dans les renforts (ne subissant pas de gonflement) est donné par

$$\underline{\underline{\sigma}} = (k_r - \frac{2}{3}G_r)tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2G_r\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{4.45}$$

on peut obtenir pour la matrice polymère

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 3k_p(C_1 - \eta c_p) - 4G_p \frac{C_2}{r^3} \\
\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} &= 3k_p(C_1 - \eta c_p) + 24G_p \frac{C_2}{r^3}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

ou c_p est la teneur en eau dans la matrice. Dans le renforts ou $c_r = 0$ (les renforts n'absorbent pas d'eau) on a

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 3k_r C_3 \tag{4.47}$$

Les constantes C_1, C_2 et C_3 s'obtiennent à partir des conditions aux limites (4.36) citées ci-dessus

- pour $r = a$ la continuité du déplacement et du vecteur contrainte à l'interface renfort-matrice est assurée

- pour $r = b$ ou le vecteur contrainte est nul, ainsi

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\eta c}{\varpi} \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{b^3 - a^3}{b^3} \right) \frac{G_p}{k_r} \right] \\
C_2 &= \frac{\eta c}{\varpi} a^3 \\
C_3 &= \frac{4}{3} \left(\frac{b^3 - a^3}{b^3} \right) \frac{G_p}{k_r} \frac{\eta c}{\varpi}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

avec ϖ un facteur sans unité qui vaut

$$\varpi = 1 + \frac{4}{3} G_p \left[\frac{b^3}{a^3 k_p} + \frac{b^3 - a^3}{b^3 k_r} \right] \tag{4.49}$$

la pression dans la matrice en l'absence de chargement extérieur est donnée par

$$p \simeq p_r = \vartheta \eta c \quad \text{avec} \quad \vartheta = \frac{12a^3}{\frac{b^3}{G_p} + 4 \left(\frac{a^3}{k_p} + \frac{b^3 - a^3}{k_r} \right)} \tag{4.50}$$

c'est la pression hydrostatique dans la matrice due au gonflement contrarié par les renforts. Cette pression est uniforme dans toute la matrice ainsi que dans le noyau. l'interface renfort-matrice peut subir une décohésion si le gonflement est important (ceci va faire partie d'une étude). L'uniformité de la pression dans le composite cela implique aussi une teneur en eau uniforme dans toute la structure (matrice) qui peut être calculée en remplaçant la formule de la pression dans un composite à l'équilibre (4.50) dans l'équation (4.28) on aura dans la matrice polymère

$$c = \frac{S p_w}{1 + \frac{3\omega_w S \vartheta \eta^2}{RT \rho_p} p_w} = \frac{\alpha' p_w}{1 + \beta' p_w} \tag{4.51}$$

on constate dans ce cas là que la concentration en eau dans un composite ne suit plus la loi de *Henry*, mais celle de *Langmuir*. Si la fraction massique en renforts ζ dans le composite, est

donnée par

$$\zeta = \frac{m_r}{m_r + m_p} \tag{4.52}$$

la teneur en eau par contre à l'équilibre est donnée par

$$c_c = (1 - \zeta)c \tag{4.53}$$

il est aisé de voir que pour $m_r = 0$ on retrouve la formule de c

4.3.2 Application d'une compression uniaxiale sur un composite endommagé

Prenons le cas de la compression selon un axe de telle sorte que cette dernière s'ajoute à σ_{rr} . La compression correspond à des forces s'exerçant perpendiculairement, elle est dite uniaxiale car les côtés de la pièce ne sont pas contraints, toutes les forces sont sur un même axe. La contrainte appliquée oscille entre zéro et un maximum croissant. Dans le cas où on applique une compression uniaxiale tel que

$$p_{ext} \gg p_m + p_r \quad (4.54)$$

il est intéressant de rappeler que quelque soit l'axe sur lequel on applique p_{ext} , cette dernière est toujours dans le sens des deux autres contributions p_m et p_r . On tenant compte des équations (4.35) (4.54) (4.53), on peut donc écrire la teneur en eau dans un composite de la manière suivante:

$$c_c = (1 - \zeta) \frac{Sp_w}{1 + \frac{3\omega_w S \Gamma \eta^2}{RT \rho_p} p_w} \quad : \text{ Dans la matrice sans endommagement}$$

$$c_c = (1 - \zeta) \frac{Sp_w}{1 + \frac{3\omega_w S \Gamma \eta^2}{RT \rho_p (1-d)} p_w} \quad : \text{ Dans la matrice avec endommagement}$$

4.4 Conclusion

Il est bien connu que le comportement hydro-mécanique des composites dépend de plusieurs facteurs, y compris la fraction volumique de renforts, le niveau d'endommagement et la nature du polymère constituant la matrice. Ce travail représente une contribution développée dans cette perspective. Nous avons présenté un modèle de couplage entre la contrainte et la concentration de l'eau dans un composite soumis à une compression uniaxiale. L'endommagement est uniquement accessible par le comportement qu'il engendre dans le composite. Nous avons constaté qu'il y a une forte influence de l'endommagement sur le comportement hydro-mécanique des matériaux composites soumis à une compression uniaxiale. Nous avons également constaté que la fraction volumique de renfort joue un rôle dans la limitation de la concentration de l'eau dans la matrice. Dans une prochaine étude, on va mettre en évidence l'influence de la variation de température ainsi que la teneur en eau à l'équilibre sur l'interface renfort/matrice.

Chapter 5

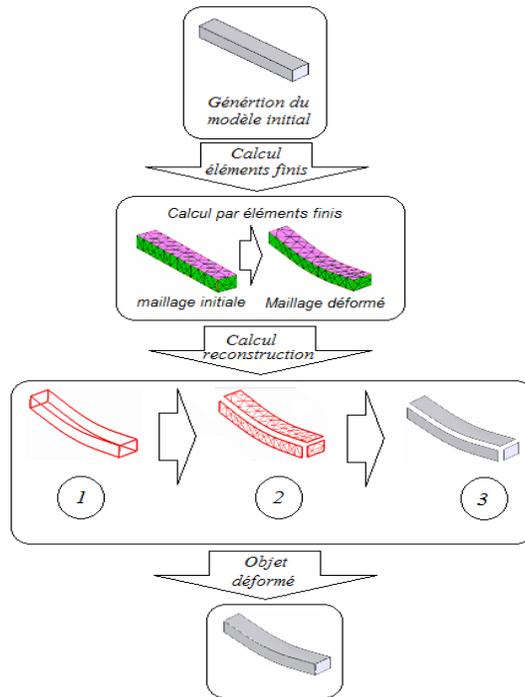
Simulations et Résultats

5.1 Introduction

Notre travail de recherche s'articule autour deux grande axes, chacun des deux axes met en évidence un des aspects de la conception assistée par ordinateur (CAO) :

1. **Le premier axe** : l'étude du gonflement d'un matériau composite à matrice polymère par l'absorption d'eau, cette dernière est l'une des sollicitations que peut subir un matériau composite à matrice polymère dans son environnement (milieu marin par exemple). Dans une première phase, on donne les résultats de la simulation de l'absorption pour différents niveaux d'endommagement et voir ainsi l'influence de ce dernier sur la concentration à l'intérieur du composite à l'équilibre. Dans une seconde phase, une interprétation physique du phénomène constaté est donnée [4].
2. **Le deuxième axe** : se subdivise en deux sections
 - (a) la première partie consiste à simuler les sollicitations (contraintes) créée par le gonflement hydrique dans toute la structure en utilisant l'outil approprié pour ce genre de situation, la méthode des éléments finis (dont nous avons donné un aperçu théorique au chapitre trois de cette thèse). En plus des contraintes dû au gonflement hydrique, nous allons simuler d'autre types de sollicitation (compression, traction, flexion) sur différents matériaux représentant différents objets mécanique, pour tester les différents codes éléments finis réalisés (maillage, calcul de contraintes et de déplacement) pour le calcul de structures
 - (b) la deuxième partie consite à tester la fiabilité de l'outil de reconstruction de l'objet déformé en utilisant les résultats éléments finis pour la représentation en trois dimension ($3D$) de la structure déformée en se basant sur :
 - i. des outils d'infographie (courbes et surfaces de Bézier, courbes et surfaces Bspline) que nous avons conçu spécialement pour cette étude sur lesquels nous nous sommes penché avec plus ou moins de détail au chapitre deux de cette thèse.
 - ii. l'algorithme de reconstruction de Walton sur lesquels nous nous sommes aussi penché avec plus ou moins de détail au chapitre deux de cette thèse.

Après génération du modèle CAO initiale, l'organigramme de la figure (5.1) représente les différents étapes que nous venons d'expliquer ci-dessus

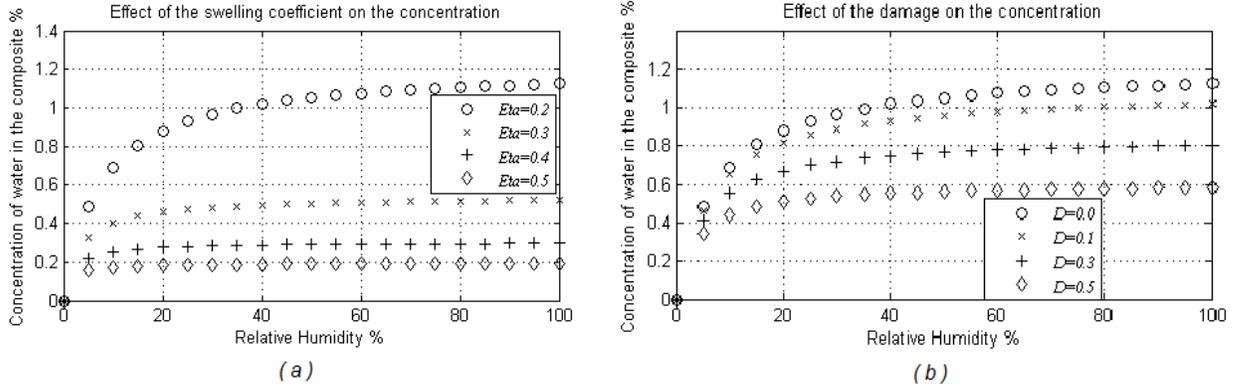


Algorithme générale de la conception assistée par ordinateur

5.2 Simulation du phénomène d'absorption

Dans ce travail, on s'est intéressé à un composite carbone epoxy T300/914 avec des propriétés et des caractéristiques mécanique connues, ce qui varie se sont la fraction volumique des renforts ainsi que le niveau d'endommagement de la matrice.

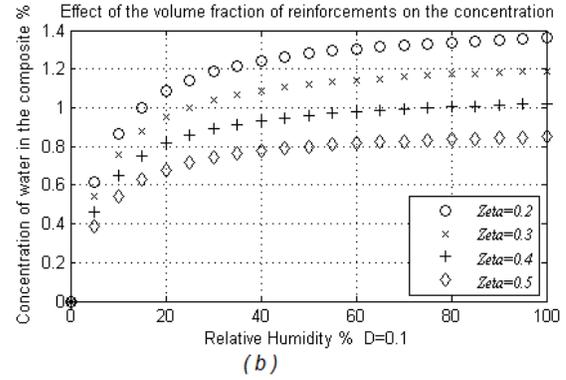
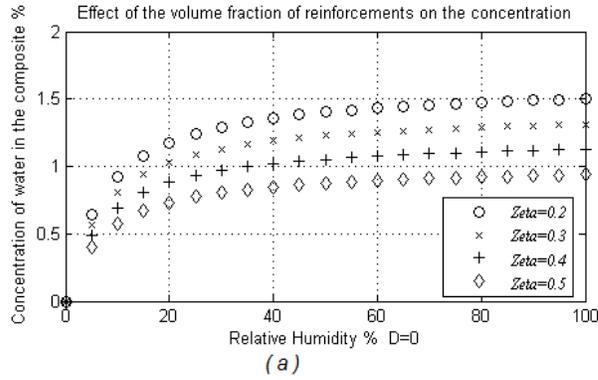
La figure 5.2 (a) représente la variation de la concentration en eau dans le composite à l'équilibre en fonction de l'humidité relative du milieu ambiant, on peut constater aisement que la concentration en eau diminue avec l'augmentation du coefficient de gonflement linéique η . ce qui confirme les résultats [17]



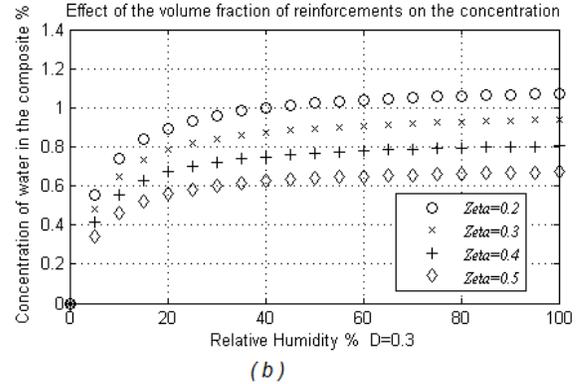
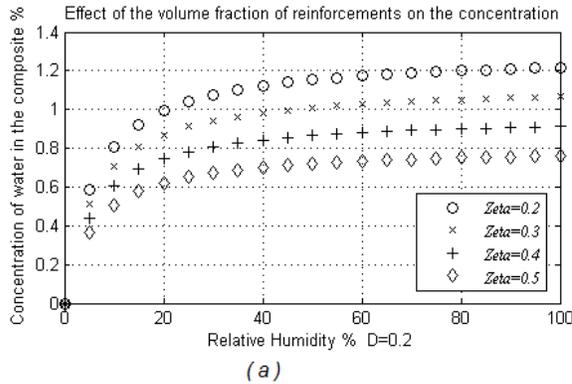
Influence of linear swelling coefficient on concentration in the composite.

La figure 5.2 (b) représente la variation de la concentration en eau dans le composite à l'équilibre en fonction de l'humidité relative du milieu ambiant pour des niveaux d'endommagement de plus en plus importants. L'endommagement dans la matrice polymère par définition est l'absence de matière cette dernière doit être logiquement remplacée par de l'eau ce qui va induire une augmentation de la concentration de ce dernier dans la matrice, mais dans notre cas c'est le phénomène inverse qui se produit. L'interprétation est que la diminution de Ω_d l'aire résistante effective des concentrations de contraintes induit une augmentation de ces dernières qui vont à leur tour s'opposer à la diffusion d'eau à l'intérieur de la matrice polymère ce qui a pour conséquence la diminution de la concentration c . On remarque que cette dernière diminue au fur et à mesure que le niveau d'endommagement d augmente. C'est un résultat propre à notre étude (article tem).

Quant à elles les figures 5.2 et 5.2 permettent de mettre en évidence la relation entre le niveau d'endommagement d d'une part et la fraction volumique des renforts ζ d'autre part sur la concentration en eau dans la matrice du composite. La concentration a tendance à diminuer avec l'augmentation de ζ . Ce qui confirme aussi les résultats [17]



Influence of the damage on the concentration in the composite.



The combined influence of the damage and the rate of reinforcement on the concentration

en récapitulatif, il est bien connu que le comportement hygro-mécanique des composites dépend de plusieurs facteurs, y compris la fraction volumique de renforts, le niveau d'endommagement, et la nature du polymère constituant la matrice. Notre travail représente une contribution supplémentaire développé dans cette perspective. Nous avons présenté un modèle de couplage entre les contraintes et la concentration de l'eau dans un composite soumis à une compression uniaxiale. L'endommagement n'est uniquement accessibles que par le comportement qu'il engendre dans le composite. Nous avons constaté qu'il ya une forte influence de l'endommagement sur le comportement hygro-mécanique des matériaux composites soumis à une compression uniaxiale. Nous avons également constaté que la fraction volumique de renfort joue aussi un rôle dans la limitation de la concentration de l'eau dans la matrice (voir figure 5.3.3 et 5.3.3 (b)).

5.3 Reconstruction d'objets mécanique

5.3.1 Introduction

Dans cette section qui représente le noyau de notre travail de recherche, nous allons tester les algorithmes de calcul éléments finis et de reconstruction conçu. Ces derniers englobes les différents cas de reconstruction d'un modèle CAO à partir des résultats d'une étude éléments finis.

D'après ce qui vient d'être présenter jusqu'ici, notre travail concerne l'étude de comportement des objets dans le domaine de la mécanique du solide. L'étude s'intéresse au comportement en petites déformations sans oublier de maitre l'accent sur les grandes déformation (élasticité et élastoplasticité). Lors de la déformation d'un objet mécanique trois cas sont à prendre en considération.

1. déformation sans changements de topologie, ni de géométrie du modèle, c'est-à-dire le nombre de faces, de contours, d'arêtes et de sommets reste le même ainsi que leurs types géométriques et leurs connectivités. Ce cas de figure se présente lors d'une étude élastique dans le cas de traction où de compression d'une pièce mécanique [4].
2. déformation sans changements de topologie, mais avec des changements géométriques du modèle. C'est-à-dire la nature des faces, des arêtes et des sommets change tout en conservant leurs nombres et leurs connectivités. Ce cas de figure est très fréquent en mécanique, il se présente dans le cas des essais de flexion [4].
3. déformation avec changements de topologie et de géométrie du modèle. C'est-à-dire la nature, le nombre et les connectivités des différentes entités changent. Ce cas de figure se présente lors de la propagation d'une fissure dans une pièce ou dans les procédés d'emboutissage et de pliage etc ..., ce type de déformation ne sera pas pris en compte dans notre étude.

Pour la materialisation des outils matématique développés au chapitre deux est trois à savoir :

- les outils de de calcul de structures mécanique (méthode des éléments finis)

- et les outils de reconstruction de modèle CAO

une implémentation de ces derniers sous la plateforme Matlab est réalisée. Pour la validation des codes réalisés des essais sur des différentes pièces existantes dans l'industrie sont réalisés. Les pièces sont choisies en rapport avec leurs complexités topologiques.

- Dans une première phase, le calcul éléments finis est réalisé pour déterminer les solutions éléments finis représentant le maillage déformé (variable déplacement). Pour des raisons liées à l'algorithme de reconstruction (algorithme de Walton), les éléments utilisés pour le maillage des différentes pièces est de type $T3$ c'est-à-dire, élément tétraédrique (triangulaire) à trois noeuds
- Dans une seconde phase, le maillage déformé est utilisé pour reconstruire le modèle CAO déformé (objet déformé).

Pour chaque pièce reconstruite, on détermine

1. l'ensemble de noeuds sur les frontières (faces et arêtes), ces noeuds sont utilisés pour reconstruire le contour (Boundary representation **Brep**) des différentes faces constituant le modèle CAO.
2. le nombre de faces de modèle.
3. le temps de calcul éléments finis en plus le temps de reconstruction du modèle.

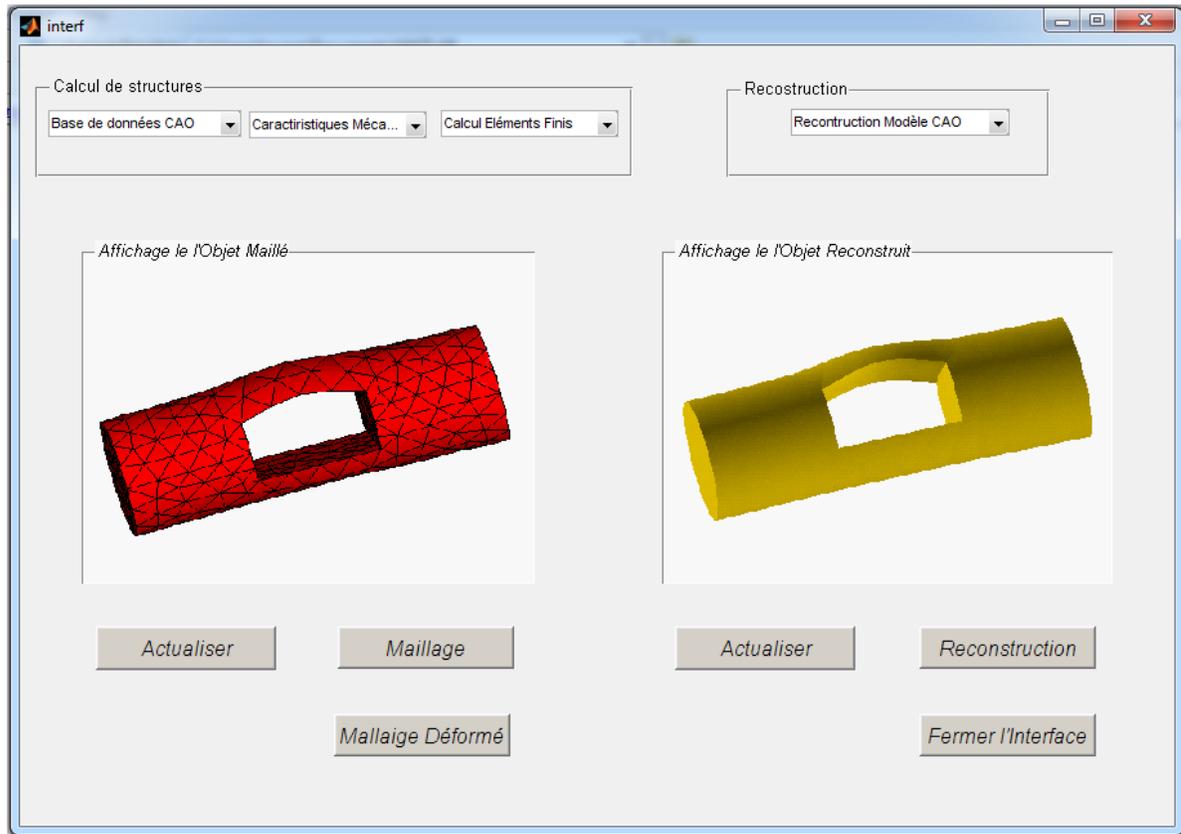
Remarque : En tien à rappeler que l'exécution des différents codes est faite sur une machine HP de micro-processeur AMD Turion(tm) II Dual-Core Mobile $M5002.20Ghz$ et de mémoire RAM $4Go$

5.3.2 Conception de l'interface graphique GUI : [Graphical User Interface]

il serai invraisemblable de faire une thèse en CAO (calcul mécanique, représentation graphique) sans la création d'un environnement utilisateur sous forme d'une interface graphique qui permet en plus à un utilisateur de basculer entre plusieurs applications sans trop perdre de temps, de créer les modèles (création des modèles), les solliciter (chargement), calculer (contraintes,

déformation, déplacement), reconstruction du model (éventuellement déformés). pour cela on a eu recours à la création d'une interface graphique (GUI) que nous avons baptisé < *interf* > qui permet à l'utilisateur d'avoir un contacte interactif avec les différents outils réaliser que se soit des outils de calcul de structure (méthodes des éléments finis) ou des outils de reconstruction d'un modèle CAO (courbes et surface de Bézier et B-Spline).

Sur la base de l'organigramme représenté dans la figure 5.1 que nous avons réalisé l'interface graphique représenté sur la figure (5.3.2) et a travers laquelle nous allons exposé les résultats des différentes simulation réalisés dans le cadre de cette thèse.



Interface graphique utilisateurs

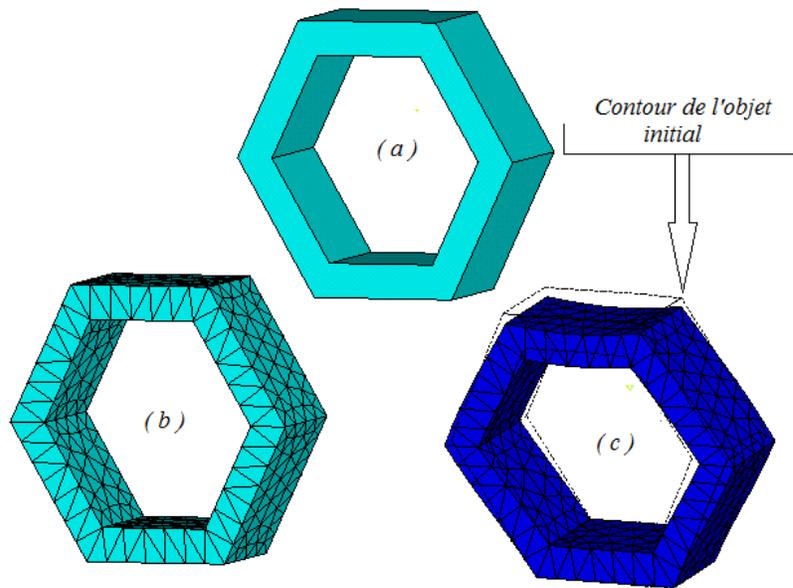
Desription de l'interface garphique

L'interface utilisateur de l'outil de reconstruction contient les rubriques suivantes.

1. La première rubrique consiste à faire appelle à un objet mécanique réalisé avec un outil de DAO (dessin assisté par ordinateur) et stocké dans un fichier dant le chemin d'accès

est connu.

2. La deuxième rubrique fait appel au calcul élément finis (maillage, condition aux limites etc ...). La solution éléments finis de type déplacements est choisie pour construire le maillage déformé (chaque solution de type déplacement est liée au coordonnées de nœud correspondant dans le maillage non déformé, pour trouver sa nouvelle position dans le maillage déformé).
3. La troisième rubrique de l'interface représente l'outil de reconstruction de l'objet initial ou de l'objet déformé suivant le maillage utilisé. Dans cette rubrique on peut choisir entre approche machinale et approche composée comme outil de reconstruction d'une part et courbes et surfaces de Bézier ou courbes et surfaces B-plines comme moyens de reconstruction d'autre part.



Pour tester la fiabilité de de l'algorithme de reconstruction que nous avons conçu, un ensemble de test de reconstruction est réalisé sur un ensemble de pièce de forme géométrique différentes pouvant faire partie de pièces existantes dans l'industrie. Les pièces sont choisies en rapport avec leurs complexités topologiques. Dans une première étape, le calcul éléments finis est réalisé pour déterminer les solutions éléments finis suivant la pièce choisie et suivant le type de sollicitation à laquelle elle est soumise. Par la suite le maillage déformé est calculé et

représenté graphiquement figure 5.3.2. Ce dernier est utilisé pour reconstruire le modèle CAO déformé car il constitue le pseudo réseau de contrôle avec lequel nous allons reconstruire la pièce en utilisant comme moyens de reconstruction, soit les courbes et les surfaces de Bézier si la pièce est de complexité réduite soit les courbes et les surfaces B-Spline dans le cas où la pièce présente une complexité d'ordre supérieur. Pour chaque cas de reconstruction, on détermine :

- l'ensemble des nœuds sur les frontières pour la reconstruction des faces et des arêtes du modèle CAO.
- le nombre de faces du modèle CAO.
- le temps de reconstruction.
- l'ordre de déplacements des nœuds.

Pour les différentes simulations que nous avons réalisées pour différentes pièces, nous avons utilisé différents types de maillage : maillage fin et maillage grossier en utilisant un maillage de type T3 (triangulaire) que nous avons détaillé ci-dessus.

5.3.3 Essais de reconstruction d'un ensemble d'objets mécanique

Reconstruction d'une plaque mince sous ambiance humide

Dans cet essai, on s'intéresse à l'étude de la reconstruction d'une plaque mince après avoir été soumise à un environnement humide (figure 5.3.3 (a)). Par effet d'absorption d'eau il y a apparition de deux types de contraintes,

- contraintes qui tentent de donner du volume à la plaque mince du fait de l'absorption d'eau
- contraintes qui tentent de contrarier le gonflement de la plaque dû aux renforts en effet, comme ceux-ci ne gonflent pas et à condition que l'interface renfort/matrice soit parfaite pour pouvoir transmettre les efforts, ils vont contrarier le gonflement de la matrice du composite pendant le régime transitoire mais aussi à saturation. Ce gonflement contrarié va à son tour agir sur la diffusion via le couplage hygromécanique. Dans cet essai, on a

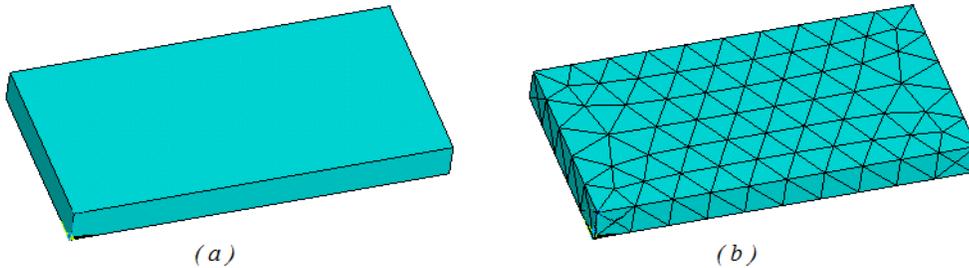
choisit comme matériau un composite à matrice polymère le T300 / 914 dans son domaine élastique est dont les caractéristiques sont les suivante:

<i>Matrice epoxyde</i>		<i>Renfort verre E</i>	
Masse volumique Kg/m^3	1200	Masse volumique Kg/m^3	2600
Module de Young E	4500	Module de Young E	74000
Module de cisaillement G	1600	Module de cisaillement G	30000
Coef de poisson	0.4	Coef de poisson	0.25
Coef de dilat thermique	$11 \cdot 10^{-5}$	Coef de dilat thermique	$0.5 \cdot 10^{-5}$

Tableau : Caractéristique du composite T300/914

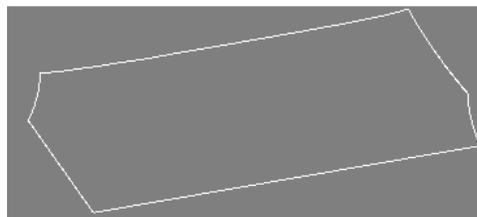
1 - Maillage grossier

la figure 5.3.3 (b) représente l'objet CAO sous forme d'une plaque de dimensions $(100 \times 50 \times 2)$ mm, avec un maillage grossier. Après simulation des pression internes le maillage déformé est créé, de ce fait on se retrouve avec un modèle CAO lié à deux maillages.



(a) Objet CAO initial, (b) maillage non déformé du même objet avec un maillage grossier

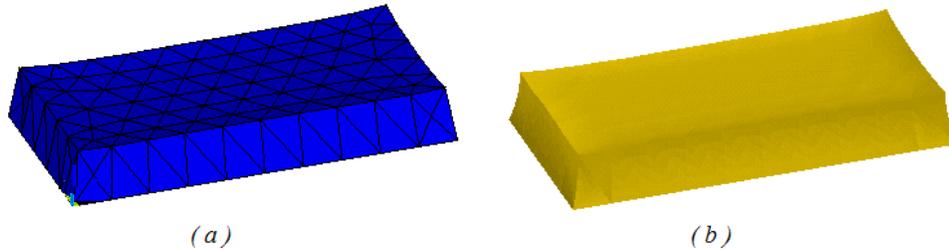
Avant la reconstruction de l'objet déformé dans sa totalité, en commence par la reconstruction des primitives représentant les contours et les arêtes de l'objet déformé à partir des noeuds sur les différentes forntières de l'objet. Ces primitives représente les supports des différentes faces constituant l'objet CAO (voir figure 5.3.3) .



contours et arrêtes de l'objet CAO

le reste des contours est arêtes sont obtenus par rotation d'un angle de 180°

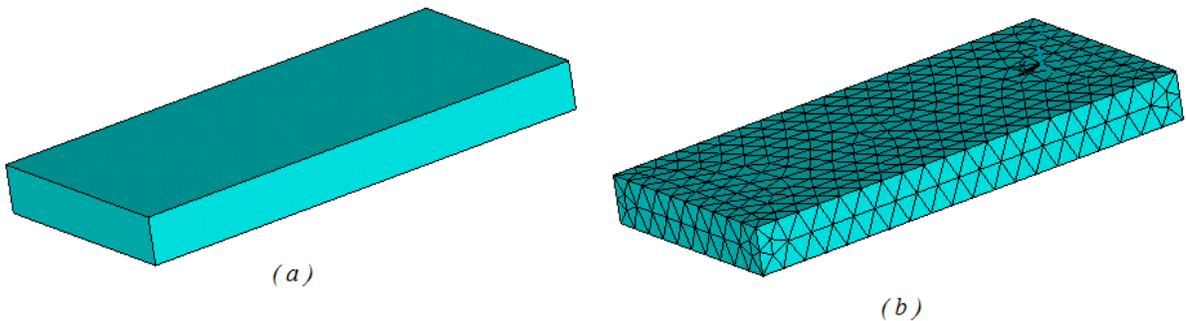
Après lancement de la procédure de reconstruction on obtient la forme reconstruite représenté sur la figure 5.3.3



(a) Maillage grossier déformé d'un objet CAO, (b) même objet CAO, reconstruit

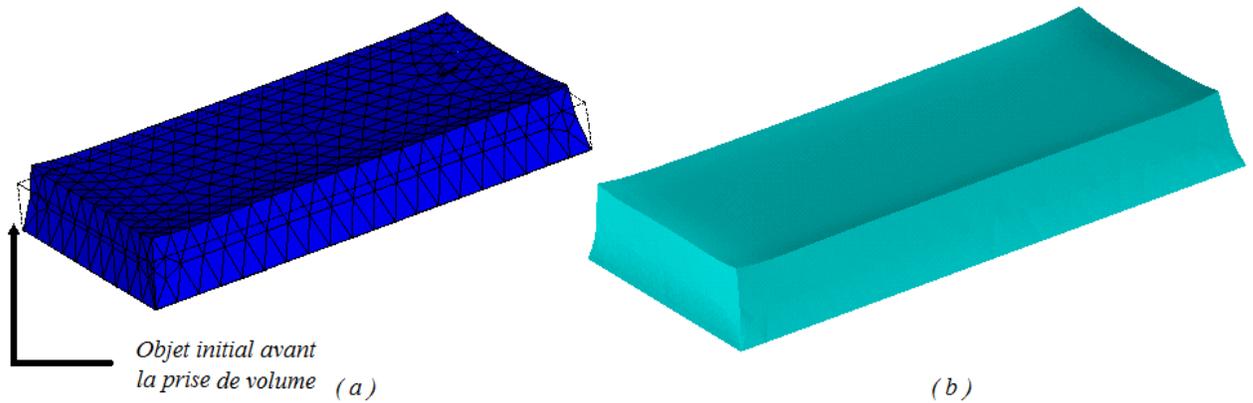
2 - Maillage Moyennement grossier

la figure 5.3.3 (b) représente le même l'objet CAO de la figure 5.3.3 (a), mais avec un maillage moyennement grossier. De la même manière que précédemment, après la création de maillage déformé, on se retrouve avec un modèle CAO lié à deux maillages.



(a) Objet CAO initial, (b) maillage non déformé du même objet avec un maillage moyennement grossier

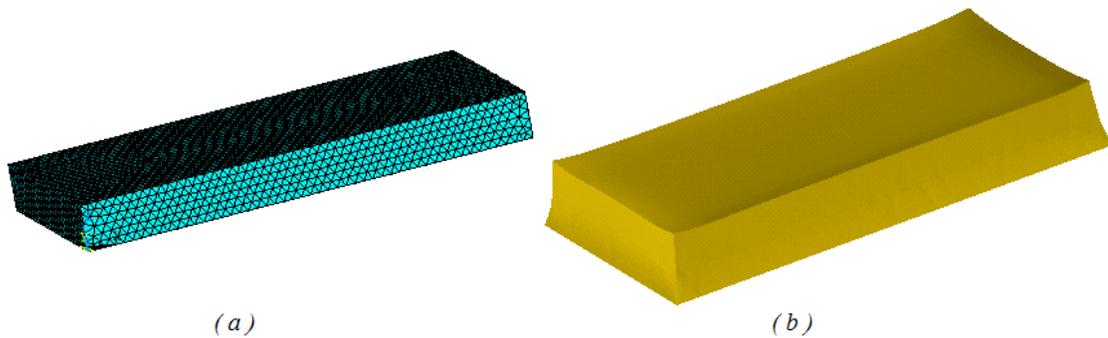
Après lancement de la procédure de reconstruction on obtient la forme reconstruite représenté sur la figure ??



(a) Maillage moyennement grossier déformé d'un objet CAO, (b) même objet CAO, reconstruit

2 - Maillage fin

Dans le cas d'un maillage fin le resultat de la reconstruction est illustré sur la figure 5.3.3 (b)



(a) Maillage fin déformé d'un objet CAO, (b) même objet CAO, reconstruit

Après ce premier essai avec différents types de maillages dans lequel on simule le gonflement d'une plaque mince d'un composite à matrice polymère par absorption d'eau, deux constatations sont à faire :

- Même avec un maillage grossier en arrive à obtenir une bonne reconstruction de l'objet CAO

- L'absorption d'eau produit une déformation non uniforme dans la structure et cela peut être expliqué d'une part par le fait que les bords de la structure sont en permanence en contact avec l'air ambiant chargé d'humidité d'autre part le rôle des renforts et beaucoup plus prépondérant à l'intérieur de la structure que sur les bords de cette dernière.

Remarque : pour que le phénomène de gonflement soit visible à l'œil nu on a dû multiplier les différentes dimension par un facteur de 20.

Pour les trois dernier essais en à le tableau récapitulatif suivant :

Maillage	N_n	N_f	N_a	N_c	$T_r[s]$
Grossier	877	6	4	2	2
Moyennement grossier	1425	6	4	2	5
fin	19123	6	4	2	9

avec :

N_n : Nombre de noeuds

N_f : Nombre de faces

N_a : Nombre de arêtes

N_c : Nombre de contours

T_r : Temps de reconstruction

Pour maître évidence le processus de reconstruction d'objets 3D, des essai de reconstruction de différente pièces mécanique soumises à différente sollicitation sont effectués

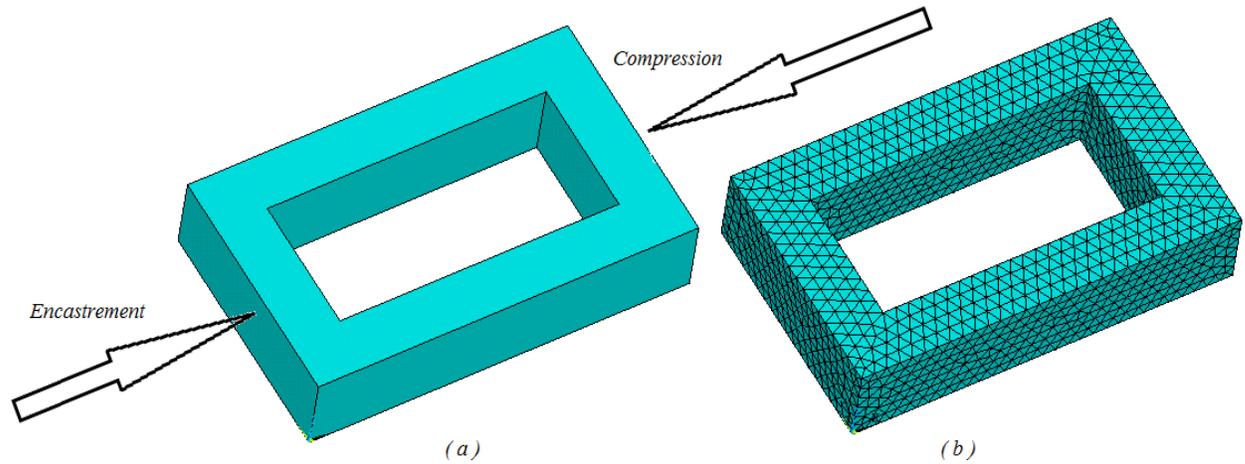
Reconstruction d'un objet prismatique en compression

Dans le but de diversifier les essais de reconstruction, pour cet exemple, on a choisit comme matériau un acier allié inoxydable dont les caractéristiques sont représentés dans le tableau :

<i>Acier inoxydable</i>	
Masse volumique Kg/m^3	7300
Module de Young E	$1.9 \cdot 10^{11}$
Module de cisaillement G	$7.8 \cdot 10^{10}$
Coef de poisson	0.26
Coef de dilat thermique	$1.5 \cdot 10^{-5}$

Tableau : Caractéristique d'un acier inoxydable

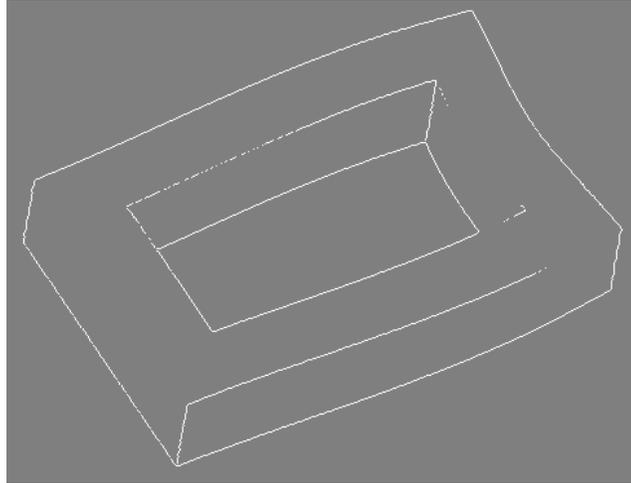
La pièce est étudiée dans son domaine élastique. La pièce prismatique est soumise à une compression sur le coté indiqué sur la figure 5.3.3 (a) et encastrée par le coté opposant, les deux autres cotés de l'objet prismatique sont libres. Le maillage utilisé est tétraédrique moyennement grossier figure 5.3.3 (b)



(a) Objet prismatique, (b) maillage non déformé du même objet

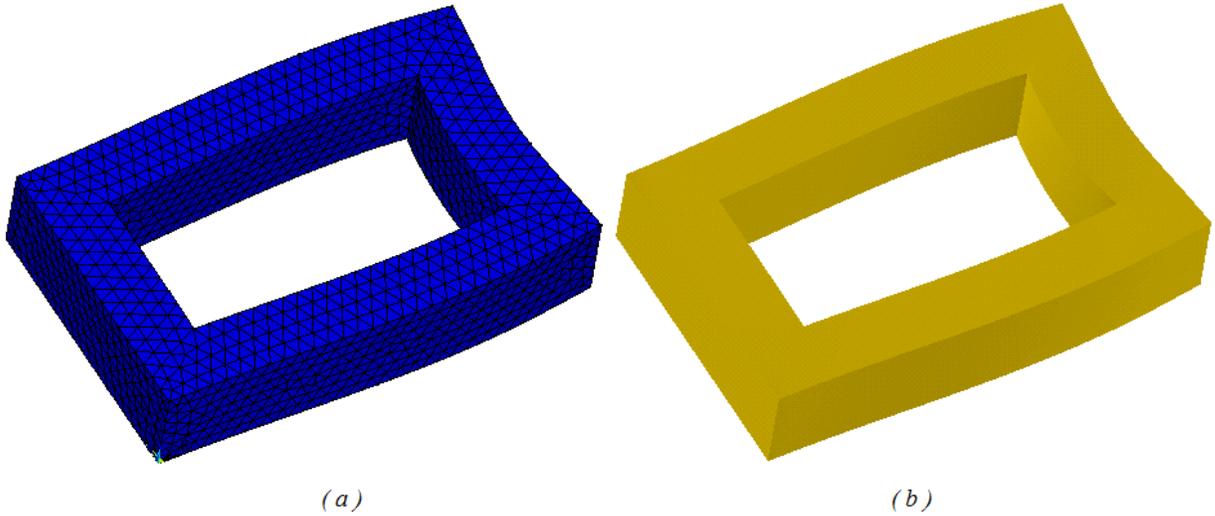
Comme pour la plaque mince, avant la reconstruction de l'objet déformé dans sa totalité, en commence auusi par la reconstruction des primitives représentant les contours et les arêtes de l'objet déformé à partir des noeuds sur les différentes forntières de l'objet. Ces primitives représente les supports des différentes faces constituant l'objet CAO (voir figure 5.3.3) .

Remarque : La discontinuité du contour dans certains endroit de la figure est du à la définition de la carte graphique du système:



Contours et arrêtes de l'objet prismmatique

Une fois le calcul éléments finis achevé on obtient le maillage de l'objet déformé de la figure 5.3.3 (a)



(a) Maillage déformé d'un objet prismatique, (b) même objet reconstruit

Les résultats de la reconstruction sont résumés dans le tableau suivant

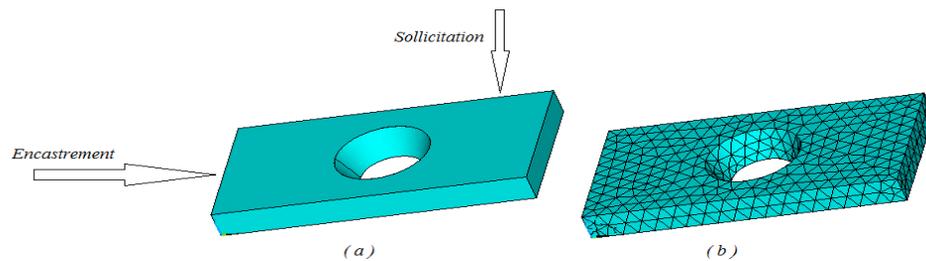
Nombre de noeuds	13082
Nombre de faces	10
Nombre de arêtes	8
Nombre de contours	4
Temps de reconstruction	6 secondes
Tau de déformation	$0 \leq \mu \leq 3.075 \text{ mm}$
Moyens de reconstructions	Courbes et surfaces de Bézier

Tableau : Résultats de reconstruction d'un objet prismatique en compression

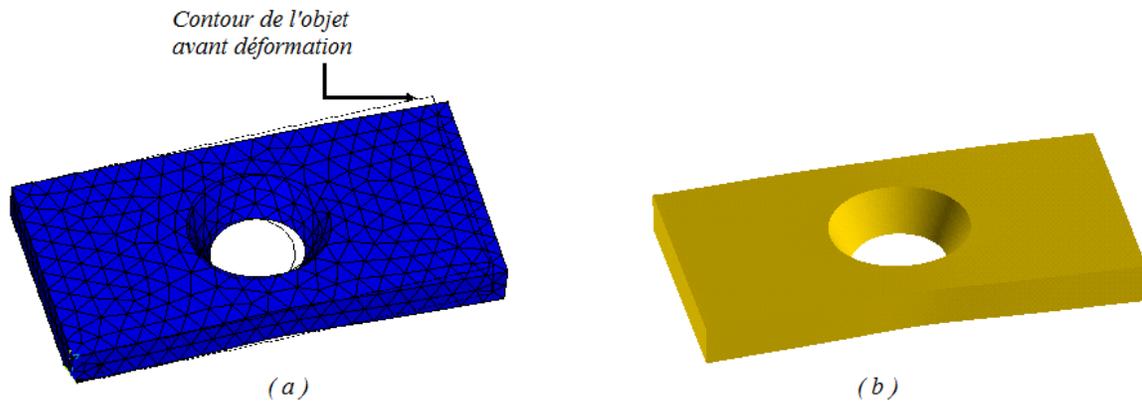
Remarque : Seuls les noeuds sur les frontières et les faces latérales servent à la reconstruction de l'objet CAO.

Reconstruction d'un objet prismatique en flexion

Dans cet exemple, une étude d'une pièce en flexion est présentée (figure 5.3.3 (a)). L'objet est toujours une pièce prismatique avec un trou au milieu pour fragiliser la structure. La pièce est étudiée dans son domaine élastique. Le matériau de l'objet est une résine époxyde dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessus



(a) Objet CAO initial, (b) Objet CAO maillé



Les résultats de la reconstruction sont résumé dans le tableau suivant

Nombre de noeuds	7026
Nombre de faces	8
Nombre de arêtes	6
Nombre de contours	4
Temps de reconstruction	4.5 secondes
Tau de déformation	$0 \leq \mu \leq 1.268 \text{ mm}$
Moyens de reconstructions	Courbes et surfaces de Bézier

Tableau : Résultats de reconstruction d'un objet prismatique troué en flexion-compression

Reconstruction d'un cylindre en flexion

La pièce étudiée est un cylindre dont le rayon de chaque section $R = 40 \text{ mm}$ et de hauteur $z = 150 \text{ mm}$ (figure 5.3.3 (a)). Le cylindre est encastré par les deux bouts et une pression négative est appliquée sur une partie de la surface latérale, la pièce est étudiée dans son domaine élastique. Le maillage utilisé est tétraédrique (triangle) moyennement grossier figure 5.3.3 (b)

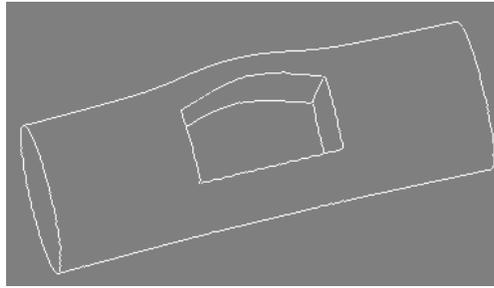
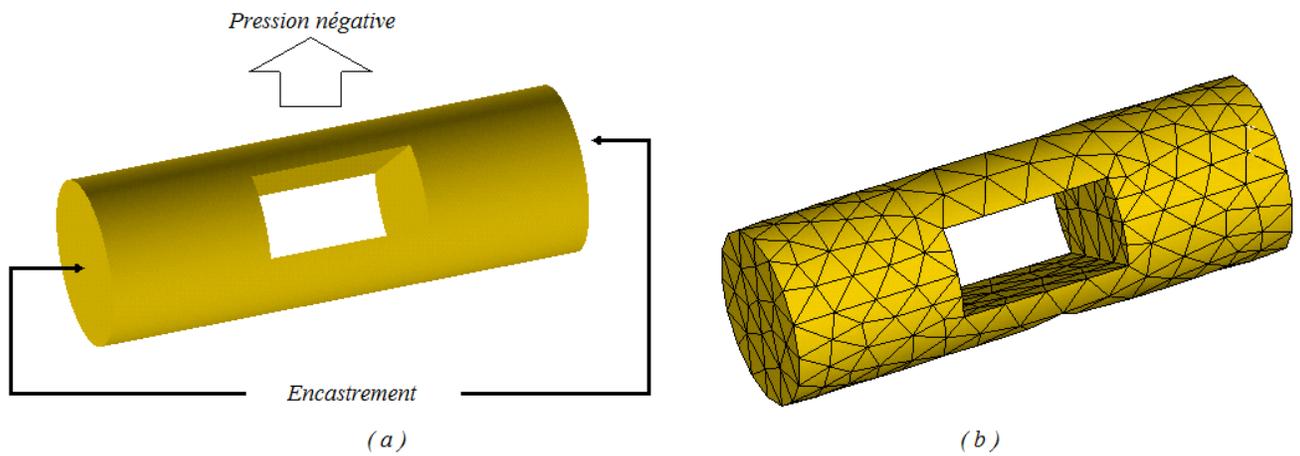


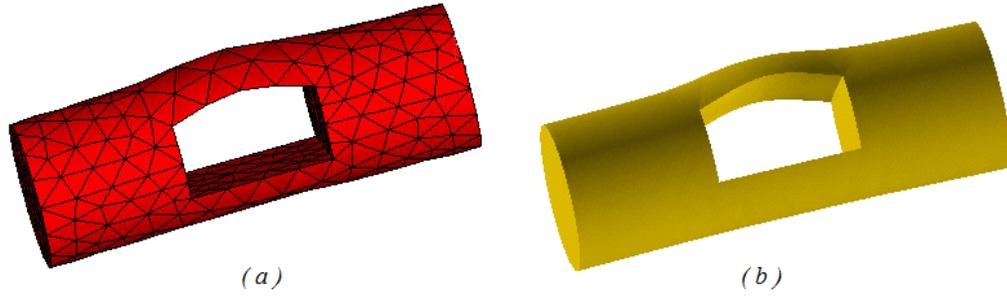
Figure 5-1: Countours et arrêtes de l'objet cylindrique



(a) Pièce cylindrique, (b) Maillage moyennement grossier

Comme pour la plaque mince et l'objet prismatique, avant la reconstruction de l'objet déformé dans sa totalité, en commence aussi par la reconstruction des primitives représentant les contours et les arêtes de l'objet déformé à partir des noeuds sur les différentes fornières de l'objet. Ces primitives comme on l'a déjà expliqué représente les supports des différentes faces constituant l'objet CAO (voir figure 5-1) .

Une fois le calcul éléments finis achevé on obtient le maillage de l'objet déformé de la figure 5.3.3 (a), l'objet reconstruit est représenté dans la figure 5.3.3 (b)



(a) Maillage déformé de la pièce cylindrique, (b) Pièce déformée reconstruite

Les résultats de la reconstruction sont résumé dans le tableau suivant :

Nombre de noeuds	4159
Nombre de faces	8
Nombre de arêtes	4
Nombre de contours	4
Temps de reconstruction	4 secondes
Tau de déformation	$0 \leq \mu \leq 1.581 \text{ mm}$
Moyens de reconstructions	Courbes et surfaces B-spline

Tableau : Résultats de reconstruction d'un objet cylindre flexion

Reconstruction d'une pièce en forme de U en flexion

Dans cet exemple, une étude d'une pièce en forme de U en flexion est présentée (figure 5-2 (a)). L'objet est choisi pour la complexité de sa reconstruction car il présente des contours non fermés. L'objet est étudiée dans son domaine élastique. Le matériau de l'objet est une résine époxyde dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessus

Une fois le calcul éléments finis achevé on obtient le maillage de l'objet déformé de la figure 5-3 (a), l'objet reconstruit est représenté dans la figure 5-3 (b)

Le tableau ci-dessous résume les données de la reconstruction :

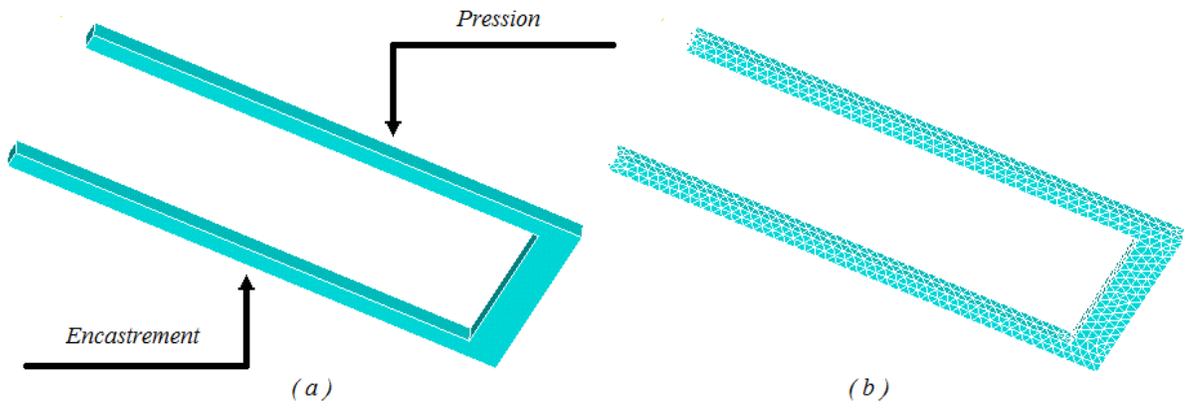


Figure 5-2: (a) Objet en forme de U, (b) Maillage fin de l'objet en forme de U

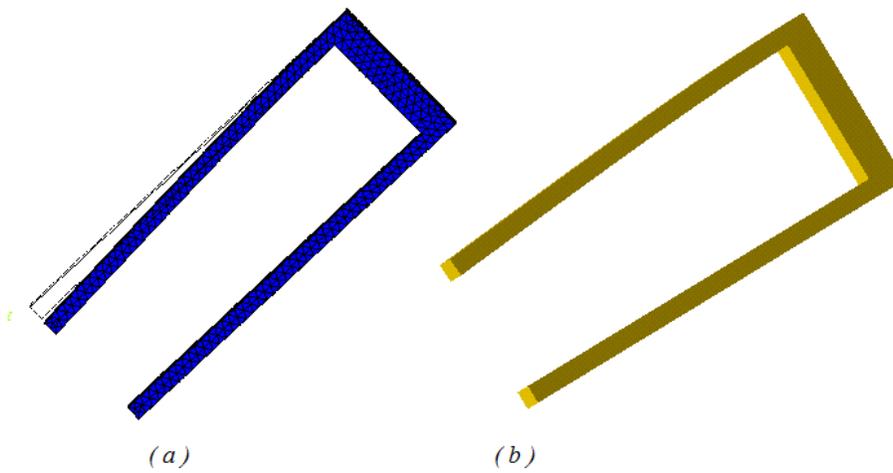


Figure 5-3: (a) Maillage déformé de l'objet en forme de U, (b) Objet en forme de U reconstruit

Nombre de noeuds	6068
Nombre de faces	10
Nombre de arêtes	4
Nombre de contours	4
Temps de reconstruction	8.5 secondes
Tau de déformation	$0 \leq \mu \leq 4.614 \text{ mm}$
Moyens de reconstructions	Courbes et surfaces B-spline

Tableau : Résultats de reconstruction d'un objet en forme de U en flexion

5.4 Résumé du chapitre :

Dans ce chapitre, en plus des résultats relatifs à l'absorption d'eau par un copolymère à matrice polymère, l'algorithme de reconstruction a été testé sur plusieurs exemples de pièces mécaniques. Ces derniers étaient choisis pour leurs différentes formes géométriques. Les essais de déformation ont été réalisés dans le domaine élastique en petite et moyenne déformation, et on a montré que la reconstruction de l'objet déformé est réalisable pour différentes situations, objets possédant des faces minces dont le nombre de noeuds nécessaires pour la reconstruction est assez réduit (figure 5.3.3 (a)), objets possédant des faces contenant des contours intérieurs (figure 5.3.3 (a)), objets possédant des faces de révolution (figure 5.3.3 (a)) et objet à faces possédant des contours non fermés en U (figure 5-2 (a)). Les exemples ainsi étudiés ont permis de tester les performances de l'algorithme de reconstruction en temps et en précision. On peut dire aussi que le temps de reconstruction augmente avec l'augmentation du nombre de noeuds essentiellement sur les faces et les arêtes.

Chapter 6

Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons présenté un outil de reconstruction de modèles CAO de type BREP à partir de résultats éléments finis (maillage déformé). L'outil développé constitue une contribution dans le domaine de la CFAO.

Cette thèse est structurée en quatre chapitres rédigés comme suit :

Dans la première phase de cette thèse, nous avons abordé le contexte général de la conception assistée par ordinateur. Pour ce faire nous avons commencé par introduire ce que nous entendons par les aspects de conception et de calcul mécanique. Cela a permis de mieux cerner notre contexte de travail, à savoir une démarche de conception simultanée qui fait interagir les différents outils de la conception d'une manière parallèle et non séquentielle. Par ailleurs, nous nous sommes limités à la méthode de calcul par éléments finis.

Cette phase été également sujet de définition formelle de notre problème de recherche. Celui-ci consiste à reconstruire des modèles CAO déformés à partir de résultats éléments finis. Cela peut éventuellement servir à simuler des assemblages avec des comportements réalistes des pièces.

Au début de la seconde phase, nous nous sommes focalisés sur la structure interne d'un modèle CAO. Pour cela, nous avons commencé par présenter les différentes informations topologiques et géométriques au sein d'un modèle CAO de type BREP. Ces informations sont identifiées afin de servir la reconstruction du modèle BREP. Cette reconstruction fait appel à des méthodes et techniques délicates. Afin de mettre en évidence ces méthodes et techniques, un état de l'art sur les moyens de reconstruction du modèle CAO comme les courbes et la surface ont été développés. La reconstruction se base sur des informations géométriques comme les surfaces, les courbes, les faces et les arêtes. Cette reconstruction est basée sur des informations récupérées du maillage (nœuds, triangulation. . .). Dans cette deuxième phase, nous nous sommes consacrés au développement de l'algorithme de reconstruction de Walton. Ce dernier est composé de plusieurs étapes, à savoir : L'identification de la topologie, la reconstruction des surfaces porteuses des faces, la reconstruction des arêtes et des contours, l'ajout des contours aux surfaces pour obtenir les faces et finalement la reconstruction des modèle CAO. L'algorithme de reconstruction nous a permis d'avoir des résultats satisfaisants

Dans la troisième phase nous nous sommes consacré à la au deuxième volet de la CAO, les méthodes d'approximation pour le calcul de structures. Toutes les méthodes d'approximation

ont un même objectif, remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équations différentielles ou intégrales) par un problème mathématique discret (équation matricielle) de dimension finie que l'on sait résoudre numériquement. Tout problème de physique peut être formulé de façon équivalente en un système d'équations différentielles (méthode des résidus pondérés ou annulation d'erreur), ou sous une formulation variationnelle (méthodes des éléments finis). L'idée fondamentale de cette méthode est la discrétisation du problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes de calcul en élasticité linéaire. Pour des raisons liées à l'algorithme de reconstruction les éléments utilisés sont de forme géométrique triangulaire. L'implémentation de cette méthode (malgré les nombreuses difficultés), nous a permis de bien contrôler le processus de reconstruction et avoir des résultats tels qu'on les a présentés au dernier chapitre.

Dans la dernière phase consacrée à tester notre algorithme de reconstruction sur plusieurs exemples de pièces mécanique. A travers les différents les essais de déformation réalisée dans le domaine élastique en petite et moyenne déformation, on a montré que la reconstruction de l'objet déformé est réalisable pour différentes situations. A la lumière de ce travail, nous pouvons dire que notre contribution est originale dans la mesure ou elle permet de donner au concepteur un résultat quantitatif comme résultat de calcul.

Les perspectives que nous pouvons envisager pour notre travail de recherche font partie des frontières auxquelles nous somme parvenu dans ce travail telle que

L'étude de l'effet de l'absorption d'eau par un composite à matrice polymère sur l'interface renfort/matrice.

Parfois lors de la reconstruction du modèle CAO de reconstruction par manque d'informations au niveau des arêtes. Ce manque d'informations empêche la fermeture de modèle CAO. Dans ce cas la, il serait possible en reconstruction de développer des algorithmes qui permettent d'ajouter de l'information lors de la reconstruction des faces. En effet, lorsqu'un cas pareil se présente, il devient essentiel d'ajouter des points d'interpolation (de contrôle) pour améliorer la précision de la surface porteuse de face reconstruite. Ces points peuvent être calculés par évaluation de la surface avant la reconstruction où par utilisation de la surface de subdivision.

Bibliography

- [1] Alexandre Ern; Aide-mémoire Éléments finis, Dunod, Paris, 2005 ISBN 2 10 007303 6
- [2] Jean-Louis Merrien; Dunod, Analyse Numérique avec Matlab, Paris, 2005 ISBN 978-10-050863-1
- [3] Ionut Danaila, Pascal Joly, Sidi Mahmoud Kaber et Marie Postel; Introduction au calcul scientifique par la pratique, Dunod, Paris, 2005 ISBN 2 10 0048709 4
- [4] L. Temimi, D. Remaoun, N. Belkaid, A. Boudghen Stambouli, Study of the Water Intake by a Damaged Matrix Composite Subjected to a Uniaxial Compression, International review of physics (IREPHY) Vol 6 N° 1 ISSN 1971-680 February 2012.
- [5] Jean-Louis Batoz, Gouri Dhatt, Modélisation des structures par éléments finis, Editions Hermès, 1995.
- [6] L.A. Piegl and W. Tiller, The NURBS book, Springer-Verlag, 1997.
- [7] H. B. Jung and K. Kim, A New Parameterisation Method for NURBS Surface Interpolation, The International journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 16, 2000, p. 784-790.
- [8] D J Walton and D S Meek, " A triangular G1 patch from boundary curves ", Computer Aided Design, Vol. 28, 1996, p. 113-123.
- [9] Dubigeon S. Mécanique des milieux continus. Tech&Doc, 1998. seconde édition. 39, 41, 43, 55, 57

- [10] Batoz J.L. and Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Hermès, 1990. Volume 1 : Solides élastiques, Volume 2 : Poutres et plaques, Volume 3 : Coques. 43, 44, 45, 57
- [11] Philippe Schweizer, Infographie, Tome 1 et 2, Collection Informatique, Presses Polytechniques Romandes, 1987
- [12] Carl de Boor, A pratical guide to Spline, Springer-Verlag. Inc, 1978.
- [13] Weitsman, Y, Effects of fluids on polymeric composites–A review. *Comprehensive Composite, Materials*, 2:369–401. 2000
- [14] Xiao, G. et Shanahan, M, Swelling of DGEBA/DDA epoxy resin during hygrothermal ageing. *Polymer*, 39(14):3253–3260. 1998
- [15] Derrien, K. et Gilormini, P, Interaction between stress and diffusion in polymers. *Defect and Duffusion Forums*, 258-260:447–452; 2006
- [16] N. Aifaoui, Intégration CAO/Calcul, une approche par les features de calcul, Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes, Juillet 2003.
- [17] A. L. Durrier, Contribution à l'étude de l'intéraction contraintes-diffusion dans les polymères, Thèse de doctorat 2008.
- [18] Steven J. Owen, David R. White " Mesh-based geometry", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, Issue 2, 2003, p. 375-395.
- [19] Batoz J.L. and Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Hermès, 1990. Volume 1 : Solides élastiques, Volume 2 : Poutres et plaques, Volume 3 : Coques. 43, 44, 45, 57
- [20] BARTLE (R.), *A Modern Theory of Integration*, vol. 32 (coll. Graduate Studies in Mathematics). American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [21] BRAESS (D.), *Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, RoyaumeUni, 2e édition, 1997.

- [22] Louhichi. B, Intégration CAO/Calcul par reconstruction du modèle CAO à partir des résultats éléments finis; Thèse de doctorat, 2008.
- [23] W. Gander, J. Hrebíček, Solving problems in scientific computing using Maple and MATLAB, Springer-Verlag, 2004, 4 ed
- [24] P. Lascaux et R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Masson, 1986, t. 1 et 2.
- [25] D. Marsh, Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Springer-Verlag, 1999.
- [26] M. Mokhtari, A. Mesbah, Apprendre à maîtriser Matlab, Springer-Verlag, 1997 .
- [27] C. B. Moler, Numerical computing with MATLAB, SIAM, 2004.
- [28] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri Méthodes numériques pour le calcul scientifique : Programmes en Matlab , Springer-Verlag, 2006.
- [29] J. Rappaz, M. Picasso, Introduction à l'analyse numérique, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- [30] D. Salomon, Curves and Surfaces for Computer Graphics, Springer-Verlag, 2006.
- [31] K. Sigmon, Matlab Aide-Mémoire, Springer-Verlag, 1999.
- [32] E. Süli, D. Mayers, An introduction to numerical analysis, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [33] Timoshenko S. P, Résistance des matériaux, Tome 1 et 2, Dunod, ISBN, 204-010268-X, Paris 1968
- [34] J. Le Maître et J. L. Chaboche, Mécanique des matériaux, Edition Dunod, 1989
- [35] Z. Hashin. The elastic Moduli of heterogeneous materials, L. App. Mech 29.143.150.(1962)
- [36] Samuel Forest, Michel Amestoy, Sabine Cantournet, Gilles Damamme, Serge Kruch, Mécanique des Milieu Continus, Ecole des Mines de Paris 2005 / 2006.