



PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF ORAN - MOHAMED BOUDIAF
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
كلية الرياضيات والاعلام الالي
قسم الرياضيات

Polycopié

Equations différentielles fractionnaires

Préparer par

Belmahi Naziha

Table des matières

Table des matières	1
1 Fonctions spéciales	4
1.1 Fonction Gamma d'Euler	4
1.2 Fonction Beta	6
1.3 Fonction Mittag-Leffler	6
1.4 Exercices	8
2 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	9
2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	9
2.2 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	13
2.3 Relations entre l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	17
2.4 La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov	19
2.5 Exercices	21
3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	23
3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	23
3.2 Propriétés des opérateurs fractionnaires	29
3.3 Exercices	30
4 Equations Différentielles Fractionnaires	32
4.1 La transformée de Laplace	32
4.2 La méthode de décomposition d'Adomian	38
4.3 La méthode de la perturbation d'homotopie	42
4.4 Exercices	47
Bibliography	50

Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension du calcul différentiel et intégral traditionnel qui permet de généraliser les concepts de dérivation et d'intégration à des ordres non-entiers. Cette théorie permet également de représenter de manière plus précise les phénomènes physiques ou biologiques qui ne suivent pas une évolution linéaire ou continue.

Le calcul fractionnaire trouve des applications dans divers domaines, tels que la physique, la mécanique des fluides, la biologie, l'économie et la finance. Les équations différentielles fractionnaires sont utilisées pour modéliser des phénomènes tels que la diffusion des fluides, la propagation des ondes, la croissance de populations, les processus de filtration, l'analyse des signaux, la dynamique de marché, etc.

Les équations différentielles fractionnaires peuvent être classées selon différents critères : linéaires ou non-linéaires, à coefficients constants ou variables, à une ou plusieurs variables, etc. La résolution de ces équations peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes, telles que la méthode de variation de la constante, la méthode de Laplace, la méthode de la transformée de Fourier, décomposition d'Adomian ou la méthode de la perturbation d'homotopie.

La résolution des équations différentielles fractionnaires peut être complexe, car les méthodes de résolution traditionnelles ne sont souvent pas directement applicables. Cependant, l'utilisation de techniques de calcul fractionnaire et de méthodes spécifiques de résolution permettent de trouver des solutions analytiques ou numériques à ces équations. En outre, les équations différentielles fractionnaires offrent des solutions plus générales et plus précises pour un large éventail de problèmes physiques et biologiques, ce qui les rend très utiles pour les chercheurs et les ingénieurs qui travaillent sur ces problèmes.

L'objectif de ce cours est de fournir une compréhension approfondie des concepts clés liés aux équations différentielles fractionnaires. Comprendre les concepts de base du calcul fractionnaire, y compris les définitions de la dérivation et de l'intégration fractionnaires, en particulier la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov et Caputo. Apprendre les méthodes de résolution pour les équations différentielles fraction-

naires, notamment les méthodes de transformée de Laplace, décomposition d'Adomian et la méthode de perturbation d'homotopie.

CHAPITRE 1

Fonctions spéciales

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés de certaines fonctions spéciales qui ont des propriétés intéressantes et utiles en physique, en mécanique, en ingénierie et dans d'autres domaines scientifiques. Elles apparaissent fréquemment dans la résolution d'équations différentielles et d'autres problèmes mathématiques complexes. Plus précisément, nous allons nous concentrer sur les fonctions Gamma d'Euler, Beta et Mittag-Leffler.

1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1. On appelle fonction Gamma (la fonction factorielle), la fonction définie par l'intégrale suivant, où la variable apparaît comme un paramètre:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \quad (1.1)$$

L'intégrale (1.1) est uniformément convergente pour tout $\alpha \in [a, b]$, avec $0 < a \leq b < \infty$.

Donc, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction continue pour tout $\alpha > 0$.

Une autre définition pour la fonction Gamma comme limite est donnée par:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\alpha-1}}{(\alpha)_n}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Où

$$\begin{aligned} (\alpha)_n &= \frac{(\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2) \dots (\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)!}{(\alpha - 1)!} \\ &= (\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2) \dots (\alpha + 1)\alpha \end{aligned}$$

Propriétés de fonction Gamma

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $\Gamma(n) = (n - 1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. $\Gamma(1) = 1$

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Preuve

1. En faisant une intégration par parties de (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= [-e^{-t}t^{\alpha-1}]_0^\infty + (\alpha-1) \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-2}dt \\ &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1), \quad \forall \alpha > 1.\end{aligned}$$

2. En particulier, quand $\alpha = n$ un entier positive, on utilise la première propriété, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)!\end{aligned}$$

3. Remplaçons α par 1, on obtient $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$

4. Posons $t = u^2$ dans (1.1), pour obtenir

$$\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2\alpha-1} du, \quad \alpha > 0,$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$.

Utilisons la première propriété, on peut obtenir $\Gamma(\frac{3}{2}), \Gamma(\frac{5}{2}), \Gamma(\frac{7}{2}), \dots, \Gamma(\frac{2n+1}{2})$.

Remarque 1. La fonction Gamma peut être aussi définie pour les valeurs négative de α comme suit:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$$

Propriétés:

1. $\frac{d}{dx} \ln(\Gamma(\alpha)) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$.

2. $\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$.

$$3. \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Exemples.

$$\int_0^\infty t^{10} e^{-t} dt = \Gamma(11).$$

$$\int_0^\infty t^{10} e^{-\frac{t}{7}} dt = 7^{11} \Gamma(11).$$

1.2 Fonction Beta

Définition 2. On appelle fonction Beta, notée par $B(\alpha, \beta)$, la fonction définie par l'intégrale:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+. \quad (1.2)$$

La fonction Beta peut être aussi définie par $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Propriétés:

1. $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.
2. $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.
3. $B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta)$.

Exemples.

$$\int_0^1 t^3 (1-t)^{\frac{3}{2}} dt = B(4, \frac{5}{2}).$$

$$\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$

1.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 3. On appelle fonction de Mittag-Leffler de paramètre α , la fonction définie par la somme

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

La généralisation de Mittag-Leffler á deux paramètre est donnée par la formule suivante

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad x, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

De la définition, on a:

- $E_{1,1} = e^x$,
- $E_{1,2} = \frac{1}{x}(e^x - 1)$,
- $E_{1,3} = \frac{1}{x^2}(e^x - x - 1)$,
- $E_{1,m} = \frac{1}{x^{m-1}} \left(e^x - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{x^k}{k!} \right)$.

Remarque 2. Sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique sont des cas particulier de la fonction Mittag-Leffler

$$E_{2,1}(x^2) = ch(x), \quad E_{2,2}(x^2) = \frac{1}{x} sh(x).$$

Propriétés de fonction Mittag-Leffler

1. $E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$.
2. $\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha x} \{ E_{\alpha,\beta-1}(x) - (\beta - 1) E_{\alpha,\beta}(x) \}$.

Preuve

1.

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= x \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Posons $I = \beta E_{\alpha, \beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha, \beta+1}(x)$

$$\begin{aligned}
 I &= \beta E_{\alpha, \beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \beta) x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
 &= E_{\alpha, \beta}(x).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'où $\frac{d}{dx} E_{\alpha, \beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x} \{E_{\alpha, \beta}(x) - (\beta) E_{\alpha, \beta+1}(x)\}$.

En remplaçant β par $\beta - 1$, on obtient le résultat.

Généralisation de la fonction Mittag-Leffler. Une généralisation de Mittag-Leffler est donnée par

$$E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k x^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\gamma)_k = \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\gamma)}.$$

1.4 Exercices

Exercice 1:

Montrer que

$$1. \quad (-1)^k \Gamma(k + n + 1) = k! \Gamma(n) (n + k) \binom{-n}{k}.$$

$$2. \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Exercice 2:

Montrer que $\frac{d^n}{dx^n} E_{\alpha, \beta}(x) = n! E_{\alpha, \beta+n\alpha}^{n+1}(x)$.

CHAPITRE 2

Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires de Riemann-Liouville sont des généralisations des opérateurs d'intégration et de dérivation classiques à des ordres non entiers. Ces opérateurs ont des applications importantes dans divers domaines scientifiques. Ils ont des propriétés intéressantes, telles que la linéarité, la règle de Leibniz et le théorème fondamental du calcul. Ils peuvent être utilisés pour résoudre des équations différentielles fractionnaires et pour modéliser des phénomènes physiques complexes.

2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, notons par $J_a^1 f$ la primitive f qui s'annule en a ,

$$\forall t \in [a, b], \quad J_a^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

L'itération de $J_a^1 f$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} (J_a^1 f(t))^2 &= (J_a^1 f) \circ (J_a^1 f)(t) = \int_a^t \int_a^u f(\tau) d\tau du \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $(J_a^1 f)^n$ la n -ième itération de $J_a^1 f$, une récurrence directe montre que

$$(J_a^1 f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Généralisons cette dernière par la fonction Gamma, quand n est réel, on obtient

$$J_a^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur J_a^n défini sur $L_1[a, b]$ par

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad a \leq x \leq b$$

est appelé l'opérateur d'intégrale fractionnaire au sens de R-L d'ordre n .

Par convention, pour $n = 0$, on écrit $J_a^0 = I$, où I désigne l'opérateur identité.

Il est évident que l'intégrale au sens de R-L coïncide avec la définition classique de J_a^n dans le cas $n \in \mathbb{N}$ sauf qu'on a prolonger le domain de fonctions intégrables au sens de Riemann aux fonctions Lebesgue intégrable.

En plus, dans le cas $n \geq 1$, il est claire que l'intégrale $J_a^n f$ existe pour tout $x \in [a, b]$ car c'est le produit d'une fonction f intégrable et une fonction continue $(x - \cdot)^{n-1}$. Pour le cas $0 < n < 1$, la situation est compliqué.

Théorème 1. Soit $f \in L_1[a, b]$ et $n > 0$, alors $J_a^n f(x)$ existe pour tout $x \in [a, b]$.

De plus, la fonction J_a^n elle même est un élément de $L_1[a, b]$.

Remarque 3. La définition de l'intégrale de R-L à deux types basée sur les limites d'intégration:

- ${}_a J_x^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$, l'intégrale à gauche.
- ${}_x J_b^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (\tau - x)^{n-1} f(\tau) d\tau$, l'intégrale à droite.

Théorème 2. Soit $n, m \geq 0$ et $\phi \in L_1[a, b]$ alors

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^{m+n} \phi, \quad p.p \text{ sur } [a, b],$$

si, de plus $\phi \in C[a, b]$ or $m + n \geq 1$.

L'identité est satisfaite partout sur $[a, b]$.

Preuve

On a

$$J_a^m J_a^n \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x (x - t)^{m-1} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} \phi(\tau) d\tau dt$$

Ce intégrale existe car $\phi \in L_1[a, b]$ donc $J_a^n \phi \in L_1[a, b]$, et alors $J_a^m \phi \in L_1[a, b]$ et par le théorème de Fubini, on peut interchanger les ordres de l'intégration

$$\begin{aligned} J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \left(\int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} dt \right) d\tau. \end{aligned}$$

Faisant le changement de variable $t = \tau + s(x - \tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \int_0^1 (x-\tau)^{m-1} (1-s)^{m-1} s^{n-1} (x-\tau)^{n-1} (x-\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) (x-\tau)^{n+m-1} \int_0^1 (1-s)^{m-1} s^{n-1} ds d\tau \\ &= \frac{B(n, m)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) (x-\tau)^{n+m-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+m)} \int_a^x \phi(\tau) (x-\tau)^{n+m-1} d\tau \\ &= J_a^{m+n} \phi(x), \end{aligned}$$

presque partout sur $[a, b]$.

Théorème 3. Les opérateurs $\{J_a^n : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b], n \geq 0\}$ forment une semi groupe commutative avec élément neutre J_a^0 .

Théorème 4. Soit $n > 0$, on assume que $(f_k)_{k=1}^\infty$ est une suite de fonctions uniformément convergente sur $[a, b]$ alors on peut interchanger entre l'intégrale fractionnaire et la limite, i.e.,

$$\left(J_a^n \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k) \right) (x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (J_a^n f_k)(x).$$

En particulier, la suite $(J_a^n f_k)_{k=1}^\infty$ est uniformément convergente.

Preuve

On note la limite de $(f_k)_{k=1}^\infty$ par f , il est clair que f est continue, on a

$$\begin{aligned}
 |J_a^n f_k(x) - J_a^n f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x |f_k(t) - f(t)| (x-t)^{n-1} dt \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(n)} \|f_k - f\|_\infty \int_a^x (x-t)^{n-1} dt \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} \|f_k - f\|_\infty (x-a)^n \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} \|f_k - f\|_\infty (b-a)^n
 \end{aligned}$$

qui converge vers zéro quand k tend vers ∞ pour tout $x \in [a, b]$.

Corollaire 5. Soit f une fonction analytique sur $(a-h, a+h)$ pour quelque valeurs de $h > 0$, et $n > 0$ alors

$$J_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{k+n}}{k!(n+k)\Gamma(n)} \cdot D^k f(x),$$

pour $a \leq x \leq a + \frac{h}{2}$ et

$$J_a^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+n}}{\Gamma(n+k+1)} \cdot D^k f(a),$$

pour $a \leq x \leq a+h$.

En particulier, $J_a^n f$ est analytique en $(a, a+h)$.

Applications

1. Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $\beta > -1$ et $n > 0$ alors

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} (t-a)^\beta dt,$$

Posons $t = a + s(x-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{n+\beta} \int_0^1 s^\beta (1-s)^{n-1} ds \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} (x-a)^{n+\beta}.
 \end{aligned}$$

2. Soit $f(x) = c$, avec c une constante arbitraire

$$\begin{aligned} J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} c dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(n)} (x-a)^n. \end{aligned}$$

3. Calculer l'intégrale de R-L ${}_{-\infty}J_x^n f(x)$ pour $n > 0$ de la fonction e^{bx}

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}J_x^n f(x) &= {}_{-\infty}J_x^n e^{bx} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{n-1} e^{bt} dt. \end{aligned}$$

Posons $t = x - s$, alors

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}J_x^n e^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty s^{n-1} e^{b(x-s)} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} e^{bx} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-bs} ds. \end{aligned}$$

Set $u = bs$, donc

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}J_x^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} e^{bx} \int_0^\infty \left(\frac{u}{b}\right)^{n-1} e^{-u} \frac{1}{b} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{e^{bx}}{b^n} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du \\ &= b^{-n} e^{bx}. \end{aligned}$$

2.2 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définition de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, Grunwall-Letnikov et Caputo qui sont les plus utilisées.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Si $n > 0$, on note $[n]$ la partie entière de n où $[n]$ est le seul entier qui vérifie $[n] \leq n < [n] + 1$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, en s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ J_a^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq n < 1$ par

$$\frac{d^n}{dt^n} = \frac{d}{dt} \circ J_a^{1-n},$$

Plus généralement, si $n > 0$ et $m = [n] + 1$, on peut poser

$$\frac{d^n}{dt^n} = \frac{d^m}{dt^m} \circ J_a^{m-n}.$$

On obtient la dérivée de R-L définie par

Définition 5. Soit $n > 0$, $m = [n] + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de R-L à gauche de la fonction f d'ordre n est donné par $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} D_a^n f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^m \circ J_a^{m-n} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-\tau)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De plus, la définition d'intégrale à droite était associée à $-\frac{d}{dx}$. Ce raisonnement conduit à la définition suivante $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} D_b^n f(x) &= \left(\frac{-d}{dx} \right)^m \circ J_b^{m-n} f(x) \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dx^m} \int_x^b (\tau-x)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville,

Définition 6. Soit $n > 0$, $m = [n] + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de R-L à gauche de la fonction f d'ordre n est donné par $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_+^n f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^m \circ J_a^{m-n} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{-\infty}^x (x-\tau)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De plus, la définition d'intégrale á droite était associée á $-\frac{d}{dt}$. Ce raisonnement conduit á la définition suivante $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_-^n f(x) &= \left(\frac{-d}{dx} \right)^m \circ J_b^{m-n} f(x) \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} \int_x^{+\infty} (\tau - x)^{m-n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 4. 1. Pour $n = 0$, $m = 1$, on a $D_a^n f(x) = \frac{d}{dx} (J_a^1) = f(x)$

2. Toutes ces dérivée coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers.

Théorème 6. On assume que $n_1, n_2 \geq 0$, de plus soit $\phi \in L_1[a, b]$ et $f = J_a^{n_1+n_2} \phi$. Alors

$$D_a^{n_1} D_a^{n_2} f = D_a^{n_1+n_2} f.$$

Il n'est pas nécessaire de savoir la forme explicite de la fonction, c'est suffisant de savoir quelle exists.

Preuve

Utilisons l'hypothèse de f et la définition de la dérivée au sens de R-L, et pour $m_1 = [n_1] + 1$, $m_2 = [n_2] + 1$ on obtient

$$\begin{aligned} D_a^{n_1} D_a^{n_2} f &= D_a^{n_1} D_a^{n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi \\ &= D^{m_1} J_a^{m_1-n_1} D^{m_2} J_a^{m_2-n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi. \end{aligned}$$

En utilisant, la propriété de semi groupe de J_a^n , on trouve

$$\begin{aligned} D_a^{n_1} D_a^{n_2} f &= D^{m_1} J_a^{m_1-n_1} D^{m_2} J_a^{m_2+n_1} \phi \\ &= D^{m_1} J_a^{m_1-n_1} D^{m_2} J_a^{m_2} J_a^{n_1} \phi \\ &= D^{m_1} J_a^{m_1-n_1} J_a^{n_1} \phi \\ &= D^{m_1} J_a^{m_1} \phi \\ &= \phi. \end{aligned}$$

D'autre part, $D_a^{n_1+n_2} f = \phi$.

Théorème 7. Soit $n \geq 0$, alors pour tout $f \in L_1[a, b]$

$$D_a^n J_a^n f = f.$$

Preuve

Pour $n = 0$, c'est évident car D_a^n, J_a^n sont les opérateurs identité.

Pour $n > 0$, soit $m = [n] + 1$. Alors par la définition de D_a^n et la propriété de semi groupe de J_a^n et que pour m entier naturel $D^m J^m f = f$, on obtient

$$\begin{aligned} D_a^n J_a^n f &= D^m J_a^{m-n} J_a^n f \\ &= D^m J_a^m f \\ &= f. \end{aligned}$$

Théorème 8. Soit $n > 0$, on assume que $(f_k)_{k=1}^\infty$ est une suite de fonctions continues, uniformément convergente sur $[a, b]$ et que $D_a^n f_k$ exist pour tout k . De plus, assume que $(D_a^n f_k)_{k=1}^\infty$ converges uniformément sur $[a + \varepsilon, b]$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors pour tout $x \in (a, b]$ on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (D_a^n f_k)(x) = \left(D_a^n \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k) \right) (x).$$

En particulier, la suite $(J_a^n f_k)_{k=1}^\infty$ est uniformément convergente.

Preuve

Rappelons que $D_a^n f = D^m J_a^{m-n} f$, et on $(J_a^{m-n} f_k)_{k \geq 1}$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, et on peut interchanger l'intégrale fractionnaire et la limite et par hypothèse D^m de cette série converges uniformément sur chaque compact semi-intervalle de $[a, b]$. D'où par un théorème standard de l'analyse, on peut interchanger entre la limite et l'opérateur dérivé pour $a < x \leq b$.

Corollaire 9. Soit f une fonction analytique dans $(a - h, a + h)$ pour quelque $h > 0$, et

soit $n > 0$ alors $D_a^n f(x) = \sum_{k=0}^\infty \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} D^k f(x)$, pour $a < x < a + \frac{h}{2}$.

$$D_a^n f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} D^k f(a), \text{ pour } a < x < a + h.$$

En particulier, $D_a^n f$ est analytique sur $(a, a + h)$.

Remarque 5. Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ sont définies par

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Applications

1. Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $\beta > -1$ et $n > 0$ alors

$$D_a^n f(x) = D^m J_a^{m-n} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-n+\beta+1)} D^m (x-a)^{m-n+\beta},$$

On calcule $D^m (x-a)^{m-n+\beta}$ par réccurence, on obtient

$$D_a^n f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} D^m (x-a)^{\beta-n}.$$

2. Soit $f(x) = e^{\lambda x}$, avec $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} D_a^n f(x) &= D^m J_a^{m-n} f(x) \\ &= D^m J_a^{m-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} \\ &= D^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} J_a^{m-n} x^k \\ &= D^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{m-n+k}}{\Gamma(m-n+k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)}. \end{aligned}$$

2.3 Relations entre l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'étude des dérivées et intégration de Riemann-Liouville séparément, c'est claire que D_a^n est l'inverse à gauche de J_a^n et le théorème suivant prouve que dans certain conditions, D_a^n est aussi l'inverse à droite.

Théorème 10. Soit $n > 0$, s'il existe $\phi \in L^1[a, b]$ / $f = J_a^n \phi$, alors

$$J_a^n D_a^n f = f, \text{ p.p.}$$

Preuve

Par définition de f et l'effet que D_a^n est l'inverse à gauche de J_a^n , on a

$$\begin{aligned} J_a^n D_a^n f &= J_a^n (D_a^n J_a^n \phi) \\ &= J_a^n \phi \\ &= f. \end{aligned}$$

Si f ne satisfait pas les conditions du théorème, alors on obtient une présentation différente pour $J_a^n D_a^n f$.

Théorème 11. Soit $n > 0$ et $m = [n] + 1$, on assume que f est une fonction qui vérifie que $J_a^{m-n} f \in A^m[a, b]$, alors

$$J_a^n D_a^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{\Gamma(n-k)} \lim_{z \rightarrow a^+} D^{m-k-1} J^{m-n} f(z).$$

Développement de Taylor

Le théorème de Taylor joue un rôle très important dans l'analyse mathématique, ce théorème est généraliser dans le calcul fractionnaire.

Théorème 12. (Cas classique) Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

1. $f \in A^m[a, b]$
2. Pour tout $x, y \in [a, b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-y)^k}{k!} D^k f(y) + J^m D^m f(x).$$

Théorème 13. (Cas fractionnaire) Sous les hypothèses du théorème précédent, on a

$$f(x) = \frac{(x-a)^{n-m}}{\Gamma(n-m+1)} \lim_{z \rightarrow a^+} J_a^{m-n} f(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^{k+n-m}}{\Gamma(k+n-m+1)} \lim_{z \rightarrow a^+} D^{k+n-m} f(z) + J_a^n D_a^n f(x).$$

Exemples 14. Soit $f(x) = x^3$, $a = 0$, $n = 2.8$, $m = 3$.

$$J_0^{3-2.8}(z^3) = J_0^{0.2}(z^3) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4.2)} z^{3.2}$$

D'ou $J_0^{3-2.8}(z^3) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0^+$.

$$D^{k-0.2}(z^3) = \frac{3!}{\Gamma(3-k+0.2+1)} z^{3-k+0.2} = \frac{3!}{\Gamma(3.2-k)} z^{3.2-k}$$

D'ou $D^{k-0.2}(z^3) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0^+$ (car $3.2 - k > 0$).

Alors $f(x) = J_0^{2.8} D_0^{2.8}(x^3) = x^3$.

Théorème 15. La formule de Liebniez pour les opérateurs R-L, soit $n > 0$, et soit f, g des fonctions analytiques sur $(a-h, a+h)$ pour quelque $h > 0$. Alors

$$D_a^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{[n]} \binom{n}{k} (D^k f)(D_a^{n-k} g)(x) + \sum_{k=0}^{[n]} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x),$$

pour $a < x < a + \frac{h}{2}$.

Preuve

Utilisons la formule dans corollaire (9), on obtient

$$\begin{aligned} D_a^n(fg)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} D^k(fg)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n}{l+j} \frac{(x-a)^{j+l-n}}{\Gamma(j+l-n+1)} \binom{l+j}{j} D^l g(x) \end{aligned}$$

Utilisant la relation suivante $\binom{n}{j} \binom{n-j}{l} = \binom{l+j}{j} \binom{n}{l+j}$, on obtient

$$D_a^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{[n]} \binom{n}{k} (D^k f)(D_a^{n-k} g)(x) + \sum_{k=0}^{[n]} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x).$$

2.4 La dérivée fractionnaire de Grünwald–Letnikov

Dans le calcul différentiel, il est bien connu que la dérivée peut être exprimé comme quotient différentielle. La dérivée d'ordre 1 d'une fonction f est définie par

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Appliquons cette définitions deux fois donne la dérivée seconde

$$D^2 f(x) = f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2},$$

et par induction, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh).$$

Notation.

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh).$$

On conclure le résultat suivant.

Théorème 16. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n[a, b]$ et $a < x \leq b$, alors

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \Delta_h^n f(x).$$

La dérivée de Grünwald–Letnikov est une généralisation de la dérivée donnée dans le théorème précédent.

$$\begin{aligned} D_a^n f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f(x - kh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(n+1)}{k! \Gamma(n-k+1)} f(x - kh). \end{aligned}$$

Tanque $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$, $n \in \mathbb{N}$, supposons que h prend les valeurs $h_N = \frac{x-a}{N}$, $N = 1, 2, \dots$ Alors

$$D_a^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h_N^{-n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{\Gamma(n+1)}{k! \Gamma(n-k+1)} f(x - kh_N).$$

Tanque $N \rightarrow \infty$ quand $h_N \rightarrow 0$, la définition suivante est justifier.

Définition 7. Soit $n > 0$, $f \in C^{[n]}[a, b]$ et $a < x \leq b$, alors

$$\tilde{D}_a^n f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h_N^n} \Delta_{h_N}^n f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h_N^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh_N)$$

est appelée la dérivée de Grünwald–Letnikov d'ordre n de la fonction f .

Théorème 17. Soit $n > 0$, $f \in C^{[n]}[a, b]$ et $a < x \leq b$, alors

$$\tilde{D}_a^n f(x) = D_a^n f(x).$$

Théorème 18. Soit $n > 0$, $f \in C[a, b]$ et $a < x \leq b$ avec $h_N = \frac{x-a}{N}$, on a

$$\tilde{J}_a^n f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} h_N^n \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{-n}{k} f(x - kh_N).$$

2.5 Exercices

Exercice 1:

Calculer l'intégrale de R-L $J_0^n f(x)$ pour $n > 0$ des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \sin(\omega x)$, $\omega > 0$.
2. $f(x) = \cos(\omega x)$, $\omega > 0$.
3. $f(x) = (1 + x)^{-1}$.

Exercice 2:

Soit $n > 0$, $p > \max\{1, \frac{1}{n}\}$ et $\phi \in L_p[a, b]$. Alors $J_a^n \phi(x) = o((x - a)^{n - \frac{1}{p}})$.

Exercice 3:

Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$ telque $D_a^n f_1$ et $D_a^n f_2$ exists presque partout.

Montrer que pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $D_a^n(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D_a^n f_1 + c_2 D_a^n f_2$.

Exercice 4:

Calculer la dérivée de R-L $D_0^n f(x)$ pour $n > 0$ des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \sin(\omega x)$, $\omega > 0$.
2. $f(x) = \cos(x)$.
3. $f(x) = (1 + x)^{-2}$.

Exercice 5:

Soit $f \in A^1[a, b]$, $0 < n < 1$. Alors $D_a^n f$ exists presque partout sur $[a, b]$.

De plus, $D_a^n f \in L_p[a, b]$ pour $1 \leq p < \frac{1}{n}$ et $D_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \left(\frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{d}{dx} \int_a^x f'(t) \frac{(x-t)^{1-n}}{1-n} dt \right)$

Exercice 6

Déterminer le developpement de Taylor dans les cas suivants

1. $f(x) = x^3$, $a = 0$, $n = 2.8$.
2. $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $n = 1.2$.

CHAPITRE 3

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est une autre généralisation de l'opérateur de dérivation classique à des ordres non entiers. Cette dérivée possède également des propriétés intéressantes, telles que la linéarité, la règle de Leibniz et le théorème fondamental du calcul. Elle peut être aussi utilisée pour résoudre des équations différentielles fractionnaires avec des conditions initiales ou des conditions aux limites non locales. En comparaison avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo est souvent préférée car elle est mieux adaptée à la modélisation de phénomènes physiques réels, et elle permet d'obtenir des solutions plus régulières. Cependant, la dérivée fractionnaire de Caputo est plus difficile à calculer en pratique que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 8. Soit $n \geq 0$, et $m = [n]$, alors on définit l'opérateur $\hat{D}_a^n$ par

$$\hat{D}_a^n f = J_a^{m-n} D^m f, \quad D^m f \in L^1[a, b]$$

Commençons par le cas classique pour $n \in \mathbb{N}$, dans ce cas $m = n$ et la définition implique que $\hat{D}_a^n f = J_a^0 D^n f = D^n f$, i.e., pour $n \in \mathbb{N}$ la définition de $\hat{D}_a^n$ coïncide avec le cas classique. Analysons ce opérateur dans le cas fractionnaire $n \notin \mathbb{N}$ avec un exemple simple.

Exemples 19. Soit $f(x) = (x - a)^\beta$, $\beta \geq 0$, alors

$$\hat{D}_a^n (x - a)^\beta = J_a^{m-n} D^m (x - a)^\beta, \quad n > 0.$$

$$D^m(x-a)^\beta = \begin{cases} 0, & \beta < m, \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(x-a)^{\beta-m}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\hat{D}_a^n(x-a)^\beta = \begin{cases} 0, & \beta \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Application. $f(x) = x^2$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 1$ et $a = 0$

$$\hat{D}^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}.$$

Théorème 20. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$, supposons que $f \in A^m[a, b]$ alors

$$\hat{D}_a^n = D_a^n(f - T_{m-1}[f : a]), \quad p.p$$

$T_{m-1}[f : a]$ est le developpement de Taylor de degré $m-1$ de la fonction f centrée en a .

Preuve

On a par définition:

$$\begin{aligned} D_a^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (t-a)^k \right) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m J_a^{m-n} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau. \end{aligned}$$

Utilisons intégration par parties, et notons $g(\tau) = f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (\tau-a)^k$ on obtient

$$\begin{aligned} J_a^{m-n}(g(t)) &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau \\ &= \left[\frac{(t-\tau)^{m-n}}{\Gamma(m-n+1)} g(\tau) \right]_a^t + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-n}}{\Gamma(m-n+1)} \frac{d}{d\tau} g(\tau) d\tau \\ &= J_a^{m-n+1} \frac{d}{dt} g(t). \end{aligned}$$

De même façon pour m fois:

$$\begin{aligned}
J_a^{m-n}(g(t)) &= J_a^{m-n+m} \frac{d^m}{dt^m} g(t) \\
&= J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} g(t) \\
&= J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\
&= J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} f(t), \text{ car } \frac{d^m}{dt^m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (t-a)^k \right) = 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
D_a^n(f(t) - T_{m-1}[f : a](t)) &= \frac{d^m}{dt^m} J_a^{m-n}(f(t) - T_{m-1}[f : a](t)) \\
&= \frac{d^m}{dt^m} J_a^{m-n} g(t) \\
&= \frac{d^m}{dt^m} J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} f(t) \\
&= J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} f(t) \\
&= D_{*a}^n f(t).
\end{aligned}$$

Définition 9. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$, f une fonction telque $D_a^n(f - T_{m-1}[f : a])$ exists, alors on définit

$$D_{*a}^n f := D_a^n(f - T_{m-1}[f : a])$$

l'opérateur D_{*a}^n est appelé l'opérateur différentielle fractionnaire d'ordre n de Caputo.

Lemme 21. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$, supposons que f est définie telque $D_{a,*}^n f$ et $D_a^n f$ exists, alors

$$D_{*a}^n f(x) = D_a^n f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-n+1)} (x-a)^{k-n}.$$

Preuve

Soit $n > 0$, $m = \lceil n \rceil$, par la définition de Caputo:

$$\begin{aligned}
D_{*a}^n f(x) &= D_a^n f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} D_a^n[(\cdot - a)^k](x) \\
&= D_a^n f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-n+1)} (x-a)^{k-n}.
\end{aligned}$$

Exemples 22. 1. $f(x) = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 1$

$$D_{*a}^n x^0 = J_0^{1-\frac{1}{2}} D^1 x^0 = J_0^{\frac{1}{2}} 0 = 0.$$

2. Soit $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$ et $a = 0$

$$\begin{aligned} D_{*0}^n e^{\lambda x} &= D_0^n e^{\lambda x} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k e^{\lambda x}|_{x=0}}{\Gamma(k-n+1)} (x-0)^{k-n} \\ &= D_0^n e^{\lambda x} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)}, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_{*0}^n e^{\lambda x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+m} x^{k+m-n}}{\Gamma(k+m-n+1)} \\ &= \lambda^m x^{m-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(k+m-n+1)} \\ &= \lambda^m x^{m-n} E_{1, m-n+1}(\lambda x). \end{aligned}$$

Lemme 23. Sous les hypothèses du lemme précédent, on a

$$D_{*a}^n f = D_a^n f$$

si et seulement si $D^k f(a) = 0$, $\forall k = \overline{0, m-1}$.

Exemples 24. $f(x) = x^5$, $a = 0$, $n = \frac{5}{2}$ donc $m = 3$

$$D_a^n f(x) = D_0^{\frac{5}{2}} x^5 = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\frac{5}{2})} x^{5-\frac{5}{2}},$$

$$D_{*a}^n f(x) = D_{*a}^{\frac{5}{2}} x^5 = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\frac{5}{2})} x^{5-\frac{5}{2}}.$$

Théorème 25. Si f est continue et $n \geq 0$ alors

$$D_{*a}^n J_a^n f = f.$$

Preuve

Soit $\phi = J_a^n f$, on a $D^k \phi(a) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$. Alors

$$D_{*a}^n J_a^n f = D_{*a}^n \phi = D_a^n \phi = D_a^n J_a^n f = f.$$

Encore, on trouve que la dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de R-L intégrale.

Théorème 26. Soit $n > 0$, avec $m = \lceil n \rceil$, et $f \in A^m[a, b]$ alors

$$J_a^n D_{*a}^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Preuve

On a

$$D_{*a}^n f = \hat{D}_a^n f = J_a^{m-n} D^m f.$$

Appliquons J_a^n et utilisons la propriété de semi groupe de l'intégrale de R-L, on obtient d'une part

$$J_a^n D_{*a}^n f = J_a^n J_a^{m-n} D^m f = J_a^m D^m f. \quad (3.1)$$

Et d'autre part, le developpement de Taylor classique nous donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k + J^m D^m f(x). \quad (3.2)$$

Alors de (3.1) et (3.2), on obtient le résultat.

Corollaire 27. (Taylor expansion pour la dérivée de Caputo) Soit $n > 0$, avec $m = \lceil n \rceil$, et $f \in A^m[a, b]$ alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k + J_a^n D_{*a}^n f(x).$$

Lemme 28. Soit $f \in C^k[a, b]$ pour quelque $a < b$ et $k \in \mathbb{N}$, de plus soit $n, \epsilon > 0$ telque $\exists l \in \mathbb{N}$ avec $l \leq k$ et $n, n + \epsilon \in [l-1, l]$ alors:

$$D_{*a}^\epsilon D_{*a}^n f = D_{*a}^{n+\epsilon} f.$$

Remarque 6. 1. Ce résultat ne peut pas être vérifié en général si la dérivée de Caputo à été remplacé par R-L.

Exemples 29. $f(x) = 1$, $n = 1$ et $\epsilon = \frac{1}{2}$, $a = 0$

$$D_0^{\frac{1}{2}} D_0^1 1 = D_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} x^{-1} = D_0^{\frac{1}{2}} 0 = 0,$$

$$D_0^{\frac{1}{2}+1} 1 = D_0^{\frac{3}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\frac{1}{3})} x^{-\frac{3}{2}}.$$

2. La condition d'existence de l avec les propriétés mentionner dans ce lemme sont nécessaire

Exemples 30. $f(x) = x$, $n = \epsilon = \frac{7}{10}$ et $n < 1 < n + \epsilon = \frac{7}{5}$, $a = 0$

$$D_{*a}^{\frac{7}{10}} f(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{13}{10})} x^{\frac{3}{10}},$$

$$D_{*a}^{\frac{7}{10}} \left(D_{*a}^{\frac{7}{10}} f(x) \right) = D_{*a}^{\frac{7}{10}} \left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{13}{10})} x^{\frac{3}{10}} \right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5})} x^{-\frac{2}{5}},$$

mais

$$D_{*a}^{\frac{7}{5}} x = J_0^{\frac{7}{5}-2} D^2 x = J_0^{\frac{7}{5}-2} 0 = 0.$$

Théorème 31. La formule de Liebniez pour les opérateurs de Caputo, soit $0 < n < 1$, et soit f, g des fonctions analytiques sur $(a-h, a+h)$ pour quelque $h > 0$. Alors

$$D_{*a}^n (fg)(x) = \frac{(x-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)} g(a)(f(x) - f(a)) + (D_{*a}^n g(x))f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x),$$

pour $a < x < a + \frac{h}{2}$.

Preuve

Appliquons la définition de Caputo, on obtient

$$\begin{aligned} D_{*a}^n (fg)(x) &= D_a^n (fg(x) - f(a)g(a)) \\ &= D_a^n (fg(x)) - f(a)g(a)D_a^n [1], \end{aligned}$$

appliquons la formule de Liebniz pour R-L

$$D_{*a}^n(fg)(x) = (D_{*a}^n g(x))f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x) - f(a)g(a)D_a^n[1],$$

on ajoute et soustracte $f(x)g(a)D_a^n[1]$,

$$\begin{aligned} D_{*a}^n(fg)(x) &= f(x)(D_a^n(g(x) - g(a))) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x) + g(a)(f(x) - f(a))D_a^n[1] \\ &= f(x)D_{*a}^n g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x) + g(a)(f(x) - f(a))D_a^n[1], \end{aligned}$$

Remplaçons $D_a^n[1] = \frac{(x-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)}$, on trouve

$$D_{*a}^n(fg)(x) = \frac{(x-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)} g(a)(f(x) - f(a)) + (D_{*a}^n g(x))f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x).$$

3.2 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques: la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre donne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent très bien avec les transformées de Fourier et Laplace.

Linéarité. Les opérateurs de la différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires pour n'importe quelle approche.

Intégration par parties. La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. On va présenter ici une version simplifiée avec des conditions explicites.

Corollaire 32. Soit $n > 0$, et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m = \lceil n \rceil$. Soit $f \in C^m([a, b])$ et $g \in C^m([a, b])$ alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)D_{a+}^n g(t)dt &= \int_a^b D_{b-}^n f(t)g(t)dt, \\ \int_a^b f(t)D_{b-}^n g(t)dt &= \int_a^b D_{a+}^n f(t)g(t)dt. \end{aligned}$$

Transformée de Fourier. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ peut-être définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi} dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$$

Ce résultat se généralise aux opérateurs fractionnaires définis sur $\mathbb{R}$.

Lemme 33. Soit $0 < n \leq 1$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $D^{k+n-m}f \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq m$. Alors

$$\mathcal{F}[J^n f](\xi) = (\pm i\xi)^{-n} \mathcal{F}[f](\xi).$$

Corollaire 34. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathcal{F}[D^n f](\xi) = (\pm i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi).$$

3.3 Exercices

Exercice 1:

Donner des exemples pour que la dérivée fractionnaire

$$D_a^{n_1} D_a^{n_2} \neq D_a^{n_2} D_a^{n_1}, \quad D_a^{n_1+n_2} \neq D_a^{n_1} D_a^{n_2}.$$

Exercice 2:

Calculer la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre n des fonctions suivantes avec $n > 0$:

1. $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = e^{\omega x}$, $\omega > 0$.

3. $f(x) = (1+x)^{-1}$.

Exercice 3:

Montrer que pour $n_1, n_2 > 0$, si $f(t) \in C^k([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$ et s'il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq k$ et $n_1, n_1 + n_2 \in [m - 1, m]$ alors

$$(D_{*a}^{n_1} D_{*a}^{n_2} f)(t) = (D_{*a}^{n_1+n_2} f)(t).$$

Exercice 4:

Montrer que, pour $m - 1 < n \leq m$ et $C_j \in \mathbb{R}$,

1. $D_a^n f(t) = D_a^n g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^m C_j t^{n-j},$
2. $D_{*a}^n f(t) = D_{*a}^n g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^m C_j t^{n-j}.$

Exercice 5:

Montrer que pour $f \in A^m([a, b])$, pour $n > 0$ et $m = \lceil n \rceil$, si $D_{*a}^n f = 0$ alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^m C_k (x - a)^k, \quad C_k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6:

Montrer que, pour $n > 0$ et $m = \lceil n \rceil$, si f est une fonction telle que $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ alors

les dérivées fractionnaires de R-L et Caputo coïncident, i.e.,

$$D_{*a}^n f = D_a^n f.$$

Exercice 7:

Montrer la formule de Leibniz' pour les opérateurs de Caputo.

CHAPITRE 4

Equations Différentielles

Fractionnaires

Les équations différentielles fractionnaires sont des équations qui impliquent des dérivées d'ordre non entier. Elles peuvent être utilisées pour modéliser des phénomènes physiques tels que la diffusion et la conduction thermique, ainsi que pour d'autres applications en sciences et en biologie. Les méthodes de résolution pour les équations différentielles fractionnaires sont similaires à celles utilisées pour les équations différentielles ordinaires, mais avec des techniques supplémentaires pour traiter les dérivées fractionnaires. Dans ce chapitre, quelques méthodes courantes de résolution des équations différentielles fractionnaires sont présentés.

4.1 La transformée de Laplace

la méthode de la transformée de Laplace a l'avantage de donner directement la solution d'équations différentielles avec des conditions initiales ou aux bord sans nécessité de trouver une solution générale, puis d'en évaluer les constantes arbitraires. De plus, le tableau prêt des transformées de Laplace réduit le problème de la résolution des équations différentielles à une manipulation plus algébrique

Définition 10. La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, $t \geq 0$ est définie par

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s).$$

La fonction $f(t)$ est appelée la transformée inverse de $F(s)$, noté $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Shift remplaçant s par $s - a$ dans la transformée

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

La transformée de Laplace des dérivées et intégrales

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Quelques fonctions et leurs transformées de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}f(t)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^\alpha, \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(bt)$	$s > 0, \frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$s > 0, \frac{b}{s^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$s > a, \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\sin(bt)$	$s > a, \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$t^n e^{at}, n = 1, 2, \dots$	$s > a, \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Propriétés.

1. $\mathcal{L}tf(t) = -F'(s)$
2. $\mathcal{L}t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(s)$
3. $\mathcal{L}(f * g)(t) = F(s)G(s)$, where $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Si $f(t)$ est discontinue at $t = 0$: $\mathcal{L}f'(t) = s\mathcal{L}f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$.

Exemples 35. Soit l'équation suivante

$$y' + y = te^{-t}, \quad y(0) = -3 \tag{4.1}$$

Appliquons la transformée de Laplace en (4.1)

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{te^{-t}\}$$

alors

$$s\mathcal{L}\{y\} - y(0) + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

après simplification, on obtient $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

$$Y(s)(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2} - 3$$

D'où

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{3}{s+1}$$

Appliquons la transformée inverse de Laplace, on trouve

$$y(t) = t^2 e^{-t} - 3e^{-t}.$$

Exemples 36. Considérons l'équation suivante:

$$y'' - 2y' + 2y = \cos(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (4.2)$$

Appliquons la transformée de Laplace en (4.2)

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\cos(t)\}$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 - 2s + 2)} + \frac{s - 2}{s^2 - 2s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{5} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)} - \frac{2}{(s^2 + 1)} + \frac{4(s - 1)}{s^2 - 2s + 2} - \frac{2}{s^2 - 2s + 2} \right]$$

Appliquons la transformée inverse de Laplace, on trouve

$$y(t) = \frac{1}{5} [\cos(t) - 2\sin(t) + 4e^t \cos(t) - 2e^t \sin(t)].$$

La transformée de Laplace de l'intégrale au sens de Riemann-Liouville.

On a

$$J^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

où $n > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Remarquons que $J^n f(t)$ est la convolution de la fonction $t \mapsto t^{n-1}$ et f , alors

$$\mathcal{L}\{J^n f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n)} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-n} F(s), \quad s > 0.$$

Où $F(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

Exemples 37. 1. $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, $n > 0$.

$$\mathcal{L}\{J^n t^\alpha\} = s^{-n} \mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{n+\beta+1}}.$$

2. $f(t) = e^{at}$ $n > 0$.

$$\mathcal{L}\{J^n e^{at}\} = s^{-n} \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s^n} \frac{1}{s-a}.$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Rappelons que la transformée de Laplace de $f^{(m)}$, m entier, est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\} &= s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - \dots - f^{(m-1)}(0) \\ &= s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k f^{(m-k-1)}(0).$$

On sait que la dérivée fractionnaire au sens de R-L d'une fonction f est pour $n > 0$, $D^n f(t) = D^m J^{m-n} f(t)$, où $m = \lceil n \rceil$ et $f \in L^1[a, b]$.

Maintenant, si on assume que la transformée de Laplace de f exists, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{D^n f(t)\} &= \mathcal{L}\{D^m J^{m-n} f(t)\} \\
&= s^m \mathcal{L}\{J^{m-n} f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{m-k-1} \{J^{m-n} f(0)\} \\
&= s^m [s^{n-m} F(s)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{m-k-1} \{D^{n-m} f(0)\} \\
&= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{n-k-1} f(0) \\
&= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k-1} D^{n-k} f(0), \quad s > 0.
\end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

La dérivée fractionnaire de Caputo de $f(t)$, is given:

for $n > 0$, $m = \lceil n \rceil$

$$D_*^n f(t) = J^{m-n} D^m f(t).$$

Alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de $f(t)$ est donnée par

$$\mathcal{L}\{D_*^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{n-k-1} D^k f(0), \quad s > 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{D_*^n f(t)\} &= \mathcal{L}\{J^{m-n} D^m f(t)\} \\
&= s^{-m+n} \mathcal{L}\{D^m f(t)\} \\
&= s^{-m+n} \left[s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \right] \\
&= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

Théorème 38.

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}, \quad s^\alpha > a.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma\alpha k + \beta} \int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha k + \beta - 1}dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma\alpha k + \beta} \mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}\} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma\alpha k + \beta} \frac{\Gamma\alpha k + \beta}{s^{\alpha k + \beta}} \\
&= \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k \\
&= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}, \quad s^\alpha > a.
\end{aligned}$$

Exemples 39. Soit l'équation suivante

$$y''(t) + D_0^{\frac{3}{2}}y(t) + y(t) = \phi(t)$$

Appliquons la transformée de Laplace, Posons $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ et $\psi(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{D_0^{\frac{3}{2}}y(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + [s^{\frac{3}{2}}Y(s) - s^{\frac{1}{2}}y(0) - s^{\frac{-1}{2}}y'(0)] + Y(s) = \psi(s)$$

$$(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1)Y(s) = \psi(s) + y(0)(s + s^{\frac{1}{2}})y(0) + (s^{\frac{-1}{2}} + 1)y'(0)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1} \cdot \left(\psi(s) + y(0)(s + s^{\frac{1}{2}})y(0) + (s^{\frac{-1}{2}} + 1)y'(0) \right)$$

$$Y(s) = y(0) \left(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k+1}}{(s^2 + 1)^{k+1}} + \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}}}{(s^2 + 1)^{k+1}} \right) +$$

$$y'(0) \left(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}}}{(s^2 + 1)^{k+1}} + \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k}}{(s^2 + 1)^{k+1}} \right) + \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \psi(s) \frac{s^{\frac{3}{2}k}}{(s^2 + 1)^k}.$$

Utilisons la transformée inverse de Laplace, on trouve

$$y(t) = y(0) \left(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k t^{\frac{1}{2}k} E_{2, \frac{1}{2}(k+2)}^{(k+1)}(-t^2) + \sum_{k=0}^\infty (-1)^k t^{\frac{1}{2}(k+1)} E_{2, \frac{1}{2}(k+3)}^{(k+1)}(-t^2) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + y'(0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{1}{2}(k+3)} E_{2, \frac{1}{2}(k+5)}^{(k+1)}(-t^2) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{1}{2}(k+2)} E_{2, \frac{1}{2}(k+4)}^{(k+1)}(-t^2) \right) \\
& + \int_0^t \phi(t-\tau) \tau^{\frac{1}{2}(k+2)} E_{2, \frac{1}{2}(k+4)}^{(k+1)}(-\tau^2) d\tau.
\end{aligned}$$

Exercice. Résoudre les équations suivantes

- $D_{*0}^{0.7} y(t) - y(t) = t^3 - 2, y(0) = 2.$
- $y'(t) - D_{*0}^{1.3} y(t) = \exp(t) - 1, y(0) = 0.$

$y(t)$	$\mathcal{L}y(t)$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha+1}}$
$\frac{t^{\alpha-1} e^{-at}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$
$t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(at^\alpha)$	$\frac{1}{s^\alpha - a}$
$E_\alpha(-at^\alpha)$	$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$
$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$	$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$
$t^\alpha E_{\alpha, \beta}(at^\alpha)$	$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$
$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$t E_\beta(at) - \beta E_{\beta+1}(at)$	$\frac{1}{s^\beta (s-a)^2}$
$t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{(\gamma)}(-at^\alpha) - \beta E_{\beta+1}(at)$	$\frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha + a)^\gamma}$

4.2 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian est une méthode analytique pour résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires. Cette méthode est basée sur la décomposition de la solution en une série de fonctions Adomian. Ces fonctions sont calculées en utilisant une série d'opérateurs différentiels et de fonctions de base. Cette méthode est une méthode puissante car elle peut résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires sans avoir besoin de simplifications ou d'approximations. Cependant, cette méthode peut être difficile à appliquer pour certaines équations complexes. De plus, la méthode de décomposition d'Adomian ne garantit pas toujours la convergence

de la solution et peut nécessiter des itérations pour obtenir une solution précise.

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$Lu + Ru + Nu = g. \quad (4.3)$$

Où L est un opérateur linéaire inversible R est le reste de l'opérateur linéaire et N est l'opérateur nonlinéaire. Alors

$$L^{-1}Lu + L^{-1}Ru + L^{-1}Nu = L^{-1}g. \quad (4.4)$$

Et, on a $L^{-1}Lu = u - \phi$, donc $u = \phi + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$, où ϕ apparaitre de condition initiale.

La méthode de décomposition d'Adomian suppose que la solution u s'écrit de la forme d'une série comme suit

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

remplaçons dans l'équation (4.3), on obtient la récurrence suivante

$$\begin{cases} u_0 = \phi + L^{-1}g, \\ u_n = -L^{-1}Ru_{n-1} - L^{-1}Nu_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

On décompose le terme nonlinéaire Nu en séries $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, où les A_n depends en $u_0, u_1, \dots, u_n$ sont appelés les polynomes d'Adomian.

Cherchons d'une solution u de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Soit $V = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i$

$$N(V(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i\right) \right]_{\lambda=0} \lambda^n.$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i\right) \right]_{\lambda=0} = A_n(u_0, u_1, \dots, u_n).$$

$$A_0 = N(u_0).$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{d\lambda} N(u_0 + u_1\lambda + \dots) \right]_{\lambda=0} = u_1 N'(u_0).$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} N(u_0 + u_1\lambda + \dots) \right]_{\lambda=0} = u_2 N'(u_0) + \frac{u_1^2}{2} N''(u_0).$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{d\lambda^3} N(u_0 + u_1\lambda + \dots) \right]_{\lambda=0} = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N^{(3)}(u_0).$$

$$\vdots$$

$$\text{Alors } N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Exemples 40. Pour l'opérateur $Ny = f(y)$

$$A_0 = f(y_0).$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0).$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0).$$

$$A_3 = y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{y_1^3}{3!} f^{(3)}(y_0).$$

$$A_4 = y_4 f'(y_0) + (y_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2!}) f''(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} y_2 f^{(3)}(y_0) + \frac{y_1^4}{4!} f^{(4)}(y_0).$$

$$\vdots$$

Exemples 41. Pour l'opérateur $Ny = y^2$

$$A_0 = y_0^2.$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0) = 2y_1 y_0.$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0) = 2y_0 y_2 + y_1^2.$$

$$\vdots$$

Exercice:

$$y'(t) + y^2(t) = -1, \quad y(0) = 0.$$

La solution exacte est $y(t) = \tan(-t)$.

$$y'(t) = -y^2(t) - 1, \quad L = \frac{d}{dt}, \quad Ny = y^2.$$

$$\begin{cases} y_0 = -t, \\ y_n = -J(A_{n-1}), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

$$y_0 = y(0) - J\{1\} = -t.$$

$$y_1 = -J\{A_0\} = \frac{-t^3}{3}.$$

$$y_2 = -J\{A_1\} = \frac{-2t^5}{15}.$$

$$y_3 = -J\{A_2\} = \frac{-17t^7}{315}.$$

$$\vdots$$

D'où $y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$

La solution analytique des équations différentielles fractionnaires linéaires à coefficients constants

Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = f(t) \quad (4.5)$$

$y^i = 0$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Où $D^\beta = D_{0,t}^\beta$, $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < n \leq \beta_n < n+1$ et $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ est une constante réelle.

Appliquons l'opérateur inverse $D^{-\beta_n}$ à l'équation (4.5), on obtient

$$y(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t) = \frac{1}{a_n} D^{-\beta_n} f(t).$$

Utilisons la méthode de décomposition d'Adomian, on obtient la récurrence suivante

$$y_0(t) = \frac{1}{a_n} D^{-\beta_n} f(t).$$

$$y_1(t) = - \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t) \right) y_0(t).$$

$$y_2 = (-1)^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t) \right)^2 y_0(t).$$

$$\vdots$$

$$y_s = (-1)^s \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t) \right)^s y_0(t).$$

Ajoutons les termes de récurrence, on obtient la solution par la de décomposition d'Adomian

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} y_s(t) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t) \right)^s y_0(t) \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t) \right)^s D^{-\beta_n} f(t). \end{aligned}$$

Exercice:

Considérons l'équation fractionnaire de Riccati

$$\begin{cases} D_{*0}^{\alpha} y(t) = -y^2(t) + 1, & 0 < \alpha \leq 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Appliquons le schéma d'Adomian

$$\begin{cases} y_0 = y(0) + J^{\alpha}\{1\} = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha+1}}, \\ y_{n+1} = -J^{\alpha}(A_{n-1}), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Où les A_n sont les polynomes d'Adomian de $f(y) = y^2$.

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{t^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha+1}}. \\ y_1 &= -J^{\alpha}\{y_0^2\} = -\frac{\Gamma_1 + 2\alpha}{\alpha^2 \Gamma_1 + 3\alpha} t^{3\alpha}. \\ y_2 &= -J^{\alpha}\{2y_0 y_1\} = -\frac{16\Gamma_2 \alpha \Gamma_4 \alpha}{\alpha \Gamma_1 + 3\alpha \Gamma_1 + 5\alpha} t^{5\alpha}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Alors

$$y(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha+1}} - \frac{\Gamma_1 + 2\alpha}{\alpha^2 \Gamma_1 + 3\alpha} t^{3\alpha} - \frac{16\Gamma_2 \alpha \Gamma_4 \alpha}{\alpha \Gamma_1 + 3\alpha \Gamma_1 + 5\alpha} t^{5\alpha} + \dots$$

4.3 La méthode de la perturbation d'homotopie

La méthode de perturbation d'homotopie est une méthode numérique pour résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires. Cette méthode consiste à introduire un petit paramètre dans l'équation différentielle fractionnaire et à considérer

l'équation comme une série de puissance de ce paramètre. Ensuite, cette série de puissance est résolue en utilisant la méthode d'homotopie pour trouver une solution approchée de l'équation originale. Enfin, en augmentant progressivement la valeur du paramètre, la solution est améliorée jusqu'à ce que la solution finale soit atteinte.

Pour utilisée l'idée principale de cette méthode, on considère l'équation nonlinéaire suivante:

$$A(u) + f(r) = 0, r \in \Omega, \quad (4.6)$$

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, r \in \Gamma. \quad (4.7)$$

où A est un opérateur différentielle générale. B est l'opérateur au frontière, $f(r)$ est une fonction analytique et Γ est la frontière du domain Ω .

En générale, l'opérateur A peut être écrits en deux parties L et N , où L est la partie linéaire et N est la partie nonlinéaire de l'équation, donc on peut l'écrire comme

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (4.8)$$

définissons la homotopie: $V(x, \rho) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$H(V, \rho) = (1 - \rho)[L(V) - L(u_0)] + \rho[L(V) + N(V) - f(r)] = 0. \quad (4.9)$$

Où

$$H(V, \rho) = L(V) - L(u_0) + \rho L(u_0) + \rho[N(V) - f(r)] = 0. \quad (4.10)$$

Où $r \in \Omega$, $\rho \in [0, 1]$ et u_0 est la condition initiale approximative de (4.9) et (4.10), on a :

$$H(V, 0) = L(V) - L(u_0) = 0,$$

$$H(V, 1) = L(V) + N(V) - f(r) = 0.$$

Le changement de ρ de zero vers l'unité est juste que $V(r, \rho)$ passes de $u_0(r)$ vers $u(r)$, dans la topologie, on appelle ça une déformation.

$L(V) - L(u_0)$ et $L(V) + N(V) - f(r)$ sont homotopies. L'hypothèse de base est que la solution de (4.9) ou (4.10) est

$$V = V_0 + \rho V_1 + \rho^2 V_2 + \dots$$

La solution approximative de notre problème peut être exprimé comme

$$u = \lim_{\rho \rightarrow 1} V = v_0 + V_1 + V_2 \dots$$

Exemples 42. On considère l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, & t \geq 0, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

La solution exacte est $u(t) = \frac{1}{1+t}$.

Dans la vue de HPM, on construit l'homotopie suivante

$$(1 - \rho)(v' - u'_0) + \rho(v' + v^2) = 0, \quad \rho \in [0, 1], \quad t \in \Omega. \quad (4.11)$$

Par HPM, définissons l'homotopie: $V : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 = 1$.

La solution est

$$V = V_0 + \rho V_1 + \rho^2 V_2 + \dots \quad (4.12)$$

De (4.11) et (4.12), on obtient

$$\begin{aligned} \rho^0 : V'_0 &= u'_0 \\ \rho^1 : V'_1 + u'_0 + V_0^2 &= 0, \quad V_1(0) = 0 \\ \rho^2 : V'_2 + 2V_0V_1 &= 0, \quad V_2(0) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Appliquons l'opérateur intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned} V_0(t) &= 1 \\ V_1(t) &= -t \\ V_2(t) &= t^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution est

$$\begin{aligned} V &= v_0 + V_1 + V_2 \dots \\ &= 1 - t + t^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1-t}. \end{aligned}$$

Résolution d'un problème fractionnaire par la méthode de perturbation d'homotopie

Soit le problème fractionnaire suivant

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Le problème peut s'écrire de la forme

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) + Ly(t) + Ny(t) = g(t) \\ y^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Où les c_k sont les conditions initiales, L est l'opérateur linéaire qui peut contenir d'autres opérateurs fractionnaires.

Dans la vue de la méthode de perturbation d'homotopie, on construit l'homotopie suivante

$$D^\alpha y(t) + \rho [Ly(t) + Ny(t) - g(t)] = 0, \quad \rho \in [0, 1]. \quad (4.13)$$

Si $\rho = 0$ alors $D^\alpha y(t) = 0$.

Si $\rho = 1$ alors l'équation revient au problème initial.

Utilisons le paramètre ρ , on écrit la solution de la forme

$$y(t) = y_0(t) + \rho y_1(t) + \rho^2 y_2(t) + \dots \quad (4.14)$$

Posons $Ny(t) = h(y)$, et remplaçons (4.14) dans (4.13) et ramassons les termes du même

ordre de ρ , on obtient

$$\begin{aligned}\rho^0 : D^\alpha y_0(t) &= 0. \\ \rho^1 : D^\alpha y_1(t) &= -Ly_0(t) - h_1(y_0) + g(t). \\ \rho^2 : D^\alpha y_2(t) &= -Ly_1(t) - h_2(y_0, y_1). \\ \rho^3 : D^\alpha y_3(t) &= -Ly_2(t) - h_3(y_0, y_1, y_2). \\ &\vdots\end{aligned}$$

Où les fonctions $h_1, h_2, \dots$ satisfont l'équation suivante

$$h(y_0(t) + \rho y_1(t) + \rho^2 y_2(t) + \dots) = h_1(y_0) + \rho h_2(y_0, y_1) + \rho^2 h_3(y_0, y_1, y_2) + \dots$$

Appliquons l'opérateur J^α l'inverse de D^α , les premiers termes de la HPM solution sont

$$\begin{aligned}y_0(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{t^k}{k!}, \quad n = \lceil \alpha \rceil \\ y_1(t) &= -J^\alpha(Ly_0(t)) - J^\alpha(h_1(y_0)) + J^\alpha(g(t)). \\ y_2(t) &= -J^\alpha(Ly_1(t)) - J^\alpha(h_2(y_0, y_1)). \\ y_3(t) &= -J^\alpha(Ly_2(t)) - J^\alpha(h_3(y_0, y_1, y_2)). \\ &\vdots\end{aligned}$$

Exemples 43. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} D_{*0}^\alpha y(t) = -y(t), & 0 < \alpha \leq 2, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

On peut construire l'homotopie suivante

$$D_{*0}^\alpha y(t) + \rho y(t) = 0 \tag{4.15}$$

Remplaçons (4.14) dans (4.15) et ramassons les termes du même ordre de ρ , on obtient

$$\rho^0 : D^\alpha y_0(t) = 0.$$

$$\rho^1 : D^\alpha y_1(t) = -y_0.$$

$$\rho^2 : D^\alpha y_2(t) = -y_1.$$

$$\rho^3 : D^\alpha y_3(t) = -y_2.$$

$$\vdots$$

Appliquons l'opérateur J^α l'inverse de D^α , les premiers termes de la HPM solution sont

$$y_0(t) = 1$$

$$y_1(t) = -J^\alpha(y_0(t)) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

$$y_2(t) = -J^\alpha(y_1(t)) = -J^\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}.$$

$$y_3(t) = -J^\alpha(y_2(t)) = -\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}.$$

$$\vdots$$

Alors la solution est donnée par

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)}.$$

4.4 Exercices

Exercice 1:

Résoudre les equations suivantes en utilisant la transformée de Laplace

$$1. \ y'(t) + 2y(t) = 4te^{-2t}, \ y(0) = -3.$$

$$2. \ y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \cos(t), \ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

Exercice 2:

Résoudre les equations différentielles fractionnaires suivantes en utilisant la transformée de Laplace

1. $y''(t) + D_0^{\frac{3}{2}}y(t) + y(t) = \phi(t)$.
2. $D_{*0}^ny(t) - y(t) = f(t)$, $y(0) = 2$ et $0 < n \leq 1$.
3. $D_{*0}^{\frac{3}{2}}y(t) + y(t) = t^2$, $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.

Exercice 3:

Résoudre les equations différentielles suivantes en utilisant la decomposition d'Adomian

1. $y'(t) + y^2(t) = 1$, $y(0) = 0$.
2.
$$\begin{cases} D_{*0}^ny(t) + Ay(t) = f(t), & t > 0, \\ y^k(0) = 0, k = \overline{0, m-1}, & m-1 < n \leq m. \end{cases}$$

Exercice 4:

Considérons l'equation différentielle fractionnaire de Ricati:

$$\begin{cases} D_{*0}^ny(t) = -y^2(t) + 1, & 0 < n \leq 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Résoudre cette equation en utilisant la decomposition d'Adomian.

Exercice 5:

Résoudre l'equation différentielle suivante en utilisant HPM:

$$\begin{cases} D_{*0}^ny(t) = -y(t), & 0 < n \leq 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Conclusion

En conclusion, les équations différentielles fractionnaires sont une extension importante des équations différentielles ordinaires qui trouvent des applications dans de nombreux domaines scientifiques et techniques, tels que la physique, l'ingénierie, la finance et la biologie. Les équations différentielles fractionnaires présentent des défis uniques pour leur résolution, car elles impliquent des dérivées d'ordre non entier qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes standard pour les équations différentielles ordinaires.

Dans ce polycopié, nous avons présenté les bases du calcul fractionnaire, y compris les dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous avons également discuté des différentes méthodes de résolution des équations différentielles fractionnaires, notamment la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode de perturbation d'homotopie et la méthode de transformée de Laplace.

Nous avons également introduit les fonctions spéciales qui apparaissent souvent dans les solutions des équations différentielles fractionnaires, telles que les fonctions de Mittag-Leffler, les fonctions Gamma-Euler et Beta. Ces fonctions sont importantes car elles permettent de décrire de manière précise et efficace les solutions des équations différentielles fractionnaires.

Ce polycopié a pour objectif de fournir une introduction aux équations différentielles fractionnaires et à leurs méthodes de résolution, tout en soulignant l'importance de ce domaine de recherche qui actif, avec de nombreux défis théoriques et numériques restant à relever.

Bibliography

- [1] Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations (Vol. 2004). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2>
- [2] Podlubny, I. (1998). Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Elsevier.
- [3] El-Borai, M. M., El-Sayed, W. G., and Jawad, A. M. (s. d.). Adomian Decomposition Method For solving Fractional Differential Equations. 02(06).

Ces ouvrages fournissent des introductions détaillées aux concepts de base du calcul fractionnaire et des équations différentielles fractionnaires, ainsi que des méthodes de résolution.