

Recueil d' Exercices et Examens avec
Corrigés Détaillés
Partie 2
Première Année Tronc Commun
Sciences et Technologie

Marir Saliha

USTO, 2025

Avant-propos

Les mathématiques occupent une place prépondérante en sciences et l'enseignement doit en tenir compte. Dans les lycées, on reçoit une initiation dans la matière, cependant c'est à l'université, plus précisément, dans le premier cycle de l'enseignement supérieur qu'est faite une véritable étude des mathématiques. Cette étude est répartie sur les deux années du tronc commun.

Le présent polycopié est un recueil d'exercices corrigés d'algèbre et d'analyse à l'usage des étudiants en Mathématiques et Physique. Il s'adresse plus particulièrement aux étudiants de première année LMD Sciences et techniques.

Les exercices ont été regroupés en chapitres dont le sujet est indiqué en tête et ils sont, dans la mesure du possible, classés par ordre de difficulté croissante. On a donné explicitement la solution de tous les exercices proposés afin, en particulier, de faciliter le travail de l'étudiant isolé qui utilise cet ouvrage.

Ces exercices étant suivis de leur correction, il peut vérifier le bien fondé de son raisonnement et la justesse de ses calculs et de ses résultats.

Enfin les corrigés détaillés aideront précieusement à comprendre et à assimiler le cours que ce recueil ne prétend pas remplacer.

On espère que la pratique de ce document aidera les étudiants à assimiler plus rapidement les notions et méthodes nouvelles introduites au début des études supérieures en Analyse et Algèbre.

Il est conseillé de s'exercer à résoudre par soi-même les exercices sans avoir une solution à côté. C'est grâce à ce travail personnel indispensable que l'on peut aller loin dans la compréhension

et l'assimilation des notions mathématiques introduites. C'est la seule méthode connue à ce jour pour progresser en mathématiques. L'étudiant consciencieux travaillera la justification de chacune de ses réponses.

Rappelons que trouver la bonne réponse ne suffit pas en science, il faut aussi la justifier !

Mots clés : Application Linéaires, Matrices, Déterminants, systèmes Linéaires, Calcul Intégral

Table des matières

Avant-propos	1
1 Applications Linéaires	4
2 Matrices et Déterminants	24
3 Matrices et Applications Linéaires	39
4 Systèmes d'Équations Linéaires	50
5 Calcul Intégral	64
Bibliographie	82

Chapitre 1

Applications Linéaires

Exercices

Dans tout ce qui suit, le corps des scalaires $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires de E dans F :

- 1) $E = F = \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (x + y, 2 + x)$
- 2) $E = F = \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (x^2 + y, 2 + x)$
- 3) $E = F = \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (\frac{y}{x^2+1}, \frac{x}{x^2+y^2+2})$
- 4) $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (ye^z, y \sin(z))$
- 5) $E = F = \mathbb{R}^3$; $f(x, y, z) = (x - y, y, x - y + z)$

Exercice 2.

Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

Déterminer leur noyau et leur image ainsi que leurs dimensions.

Dire si f est bijective ?

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y, x + 3y, y)$
- 2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y - z)$
- 3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - z, z - y, y - z)$

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $\{e_1(1, 0), e_2(0, 1)\}$

- 1) On suppose qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie

$$f(e_1) = (2, 3); f(e_2) = (1, 4)$$

Trouver f , i.e. $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. Quel est le rang de f ?

3) Est ce que f est un automorphisme ?

Exercice 4. Soient $\{e_1, e_2\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

1) Donner l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$f(u_1) = e_1 + e_2, f(u_2) = 2e_1 - e_2, f(u_3) = e_1 - 2e_2,$$

2) Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ainsi que leurs dimensions.

3) f est-elle un isomorphisme ? justifier.

Exercice 5.

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ qui à tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe

$$f(x, y, z) = (x + z, -x + y, y + z, x + y + 2z)$$

1) L'application f est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

2) Déterminer $\operatorname{Im} f$. En déduire sa dimension ainsi que $\operatorname{rang}(f)$.

3) En déduire la dimension du noyau. Déterminer $\ker f$.

4) Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$H = \{(x, y, x + y, 2x + y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Est ce que $H = \operatorname{Im} f$? Si oui, justifier.

Solutions

Rappel de cours :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et f une application définie de E dans F .

Définition : f est dite application linéaire si :

1. $\forall X \in E, \forall Y \in E, f(X + Y) = f(X) + f(Y)$ (Stabilité par rapport à la loi interne).
2. $\forall X \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha.X) = \alpha.f(X)$ (Stabilité par rapport à la loi externe).

Ou bien de manière équivalente,
 $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \beta \in \mathbb{K}, \forall X \in E, \forall Y \in E,$

$$f(\alpha.X + \beta.Y) = \alpha.f(X) + \beta.f(Y).$$

Propriété importante : On note par 0_E et 0_F les éléments neutres par rapport aux lois internes des espaces vectoriels E et F respectivement. On a alors :

$$(f \text{ application linéaire de } E \text{ dans } F) \implies (f(0_E) = 0_F)$$

Exercice 1.

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $f(x, y) = (x + y, 2 + x)$.

On peut voir que

$$f(0, 0) = (0, 2) \neq (0, 0),$$

donc f n'est pas une application linéaire.

- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $f(x, y) = (x^2 + y, 2 + x)$.
 même réponse que 1).

- 3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $f(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + 1}, \frac{x}{x^2 + y^2 + 2}\right)$.

On peut voir que

$$f(0, 0) = (0, 0),$$

mais on ne peut rien conclure.

Contre-exemple : On prend $(x, y) = (2, 3)$ et $\alpha = 2$, on a

$$f(\alpha.(x, y)) = f(2.(2, 3)) = f(4, 6) = \left(\frac{6}{17}, \frac{4}{54}\right),$$

et

$$\alpha.f(x, y) = 2.f(2, 3) = 2.\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{15}\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{15}\right).$$

On voit bien que

$$f(\alpha.(x, y)) \neq \alpha.f(x, y),$$

donc f n'est pas une application linéaire.

4) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $f(x, y, z) = (ye^z, y \sin(z))$.

Là aussi, on a $f(0, 0, 0) = (0, 0)$, mais on ne peut rien déduire !

Contre-exemple :

On prend $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ et $\alpha = 2$, on a

$$f(\alpha.(x, y, z)) = f(2.(1, 2, 1)) = f(2, 4, 2) = (4e^2, 4 \sin(2)),$$

et

$$\alpha.f(x, y, z) = 2.f(1, 2, 1) = 2.(2e^1, 2 \sin(1)) = (4e^1, 4 \sin(1)).$$

On voit bien que

$$f(\alpha.(x, y, z)) \neq \alpha.f(x, y, z),$$

donc f n'est pas une application linéaire.

5) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, telle que $f(x, y, z) = (x - y, y, x - y + z)$.

a) Soient $X = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

On a :

$$\begin{aligned}
 f(X + Y) &= f(\underbrace{x_1 + x_2}_a, \underbrace{y_1 + y_2}_b, \underbrace{z_1 + z_2}_c), \\
 &= f(a, b, c), \\
 &= (a - b, b, a - b + c), \\
 &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + z_1 + z_2), \\
 &= (x_1 - y_1, y_1, x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2, y_2, x_2 - y_2 + z_2), \\
 &= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2), \\
 &= f(X) + f(Y).
 \end{aligned}$$

b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On a :

$$\begin{aligned}
 f(\alpha.X) &= f(\alpha.x, \alpha.y, \alpha.z), \\
 &= (\alpha.x - \alpha.y, \alpha.y, \alpha.x - \alpha.y + \alpha.z), \\
 &= \alpha.(x - y, y, x - y + z), \\
 &= \alpha.f(x, y, z), \\
 &= \alpha.f(X).
 \end{aligned}$$

De a) et b), on déduit que f est une application linéaire.

Exercice 2.

1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y) = (x - y, x + 3y, y)$.

a) f est linéaire ?

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $X = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a :

$$\begin{aligned}
f(\alpha.X + \beta.Y) &= f(\underbrace{\alpha.x_1 + \beta.x_2}_a, \underbrace{\alpha.y_1 + \beta.y_2}_b), \\
&= f(a, b), \\
&= (a - b, a + 3b, b), \\
&= (\alpha.x_1 + \beta.x_2 - \alpha.y_1 - \beta.y_2, \alpha.x_1 + \beta.x_2 + 3\alpha.y_1 + 3\beta.y_2, \alpha.y_1 + \beta.y_2), \\
&= \alpha.(x_1 - y_1, x_1 + 3y_1, y_1) + \beta.(x_2 - y_2, x_2 + 3y_2, y_2), \\
&= \alpha.f(x_1, y_1) + \beta.f(x_2, y_2), \\
&= \alpha.f(X) + \beta.f(Y)
\end{aligned}$$

D'où f est une application linéaire.

b) Déterminer $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$?

Rappel de cours :

E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- **Noyau de f :** $\ker f = \{X \in E, f(X) = 0_F\}$.
 f injective $\iff \ker f = \{0_E\} \iff \dim(\ker f) = 0$.
- **Image de f :** $\text{Im } f = \{f(X) \in F, X \in E\}$.
 f surjective $\iff \text{Im } f = F \iff \dim(\text{Im } f) = \dim(F)$.
- $\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)$.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, on a
 f bijective $\iff f$ injective $\iff f$ surjective

- **$\ker f$?**

On sait que

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{X \in E, f(X) = 0_F\}, \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (0, 0, 0)\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x, y) = (0, 0, 0) &\iff (x - y, x + 3y, y) = (0, 0, 0), \\
&\iff \begin{cases} x - y &= 0 \\ x + 3y &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$\ker f = \{(0, 0)\},$$

par suite,

$$\dim(\ker f) = 0.$$

On déduit alors que f est injective.

• **Im f ?**

Méthode 1 :

On sait que

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f),$$

alors

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{=2} = \underbrace{\dim(\ker f)}_{=0} + \dim(\operatorname{Im} f),$$

d'où

$$\dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{f(X) \in F, X \in E\}, \\
&= \{f(x, y) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.
\end{aligned}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= (x - y, x + 3y, y), \\
&= (x, x, 0) + (-y, 3y, y), \\
&= \underbrace{x(1, 1, 0)}_{u_1} + \underbrace{y(-1, 3, 1)}_{u_2}, \\
&= x.u_1 + y.u_2.
\end{aligned}$$

Alors $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Comme $\dim(\text{Im } f) = 2$ et les vecteurs qui engendrent $\text{Im } f$ sont aussi au nombre de 2, donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\text{Im } f$.

Méthode 2 :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - y, x + 3y, y), \\ &= (x, x, 0) + (-y, 3y, y), \\ &= x(1, 1, 0) + y(-1, 3, 1), \\ &= \underbrace{x(1, 1, 0)}_{u_1} + \underbrace{y(-1, 3, 1)}_{u_2}, \\ &= x.u_1 + y.u_2. \end{aligned}$$

Alors $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Est ce que $\{u_1, u_2\}$ est libre ?

$\{u_1, u_2\}$ est libre si et seulement si

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha.u_1 + \beta.u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha = \beta = 0.$$

Soient α et β deux réels tels que : $\alpha.u_1 + \beta.u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\begin{aligned} \alpha.u_1 + \beta.u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff (\alpha - \beta, \alpha + 3\beta, \beta) = (0, 0, 0), \\ &\iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \\ &\implies \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre.

En conclusion, on déduit que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\text{Im } f$, donc $\dim(\text{Im } f) = 2$.

Comme $\dim(\text{Im } f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors f n'est pas surjective.

c) f est bijective ?

l'application f est injective mais non surjective,
alors f n'est pas bijective.

Réponse2 : comme $\dim \mathbb{R}^2 \neq \dim \mathbb{R}^3$, alors f n'est pas bijective.

2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (2x + z, x - y - z)$.

a) f est linéaire ? (même raisonnement).

b) Déterminer $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$?

• $\ker f$?

On sait que

$$\begin{aligned} \ker f &= \{X \in E, f(X) = 0_F\}, \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (0, 0)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (0, 0) &\iff (2x + z, x - y - z) = (0, 0), \\ &\iff \begin{cases} 2x + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z &= -2x \\ y &= 3x \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} X = (x, y, z) \in \ker f &\iff X = (x, 3x, -2x), \\ &\iff X = x \underbrace{(1, 3, -2)}_u, \\ &\iff X = x.u. \end{aligned}$$

D'où $\{u\}$ est une famille génératrice de $\ker f$; comme le vecteur $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\{u\}$ constitue une base de $\ker f$.

Par suite,

$$\dim(\ker f) = 1.$$

L'application f n'est pas injective puisque $\dim(\ker f) \neq 0$.

• **Im f ?**

Méthode1 :

On sait que

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f),$$

alors

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{=3} = \underbrace{\dim(\ker f)}_{=1} + \dim(\operatorname{Im} f),$$

d'où

$$\dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(X) \in F, X \in E\}, \\ &= \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (2x + z, x - y - z), \\ &= (2x, x) + (0, -y) + (z, -z), \\ &= x(2, 1) + y(0, -1) + z(1, -1), \\ &= \underbrace{x(2, 1)}_{u_1} + \underbrace{y(0, -1)}_{u_2} + \underbrace{z(1, -1)}_{u_3}, \\ &= x.u_1 + y.u_2 + z.u_3. \end{aligned}$$

Alors $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Comme $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, les vecteurs qui engendrent $\operatorname{Im} f$ ne sont pas libres car une base de $\operatorname{Im} f$ doit contenir exactement deux vecteurs. On peut facilement voir que

$$u_1 = -3u_2 + 2u_3,$$

ce qui implique que $\{u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$, c'est aussi une famille libre car elle est constituée par deux vecteurs.

En conclusion, $\{u_2, u_3\}$ est une base de $\text{Im } f$.

Méthode 2 :

$\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

$\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de $F = \mathbb{R}^2$, alors

$$\dim \text{Im } f \leq 2,$$

ceci implique que $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas une famille libre.
Après avoir remarqué que

$$u_1 = -3u_2 + 3u_3,$$

on déduit que $\{u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

On se pose la question : est ce que $\{u_2, u_3\}$ est libre ?

Soient α et β deux réels tels que : $\alpha.u_2 + \beta.u_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{aligned} \alpha.u_2 + \beta.u_3 = 0_{\mathbb{R}^2} &\iff (\beta, -\alpha - \beta) = (0, 0), \\ &\iff \begin{cases} \beta &= 0 \\ -\alpha - \beta &= 0 \end{cases} \\ &\implies \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\{u_2, u_3\}$ est libre.

En conclusion, on déduit que $\{u_2, u_3\}$ est une base de $\text{Im } f$, donc $\dim(\text{Im } f) = 2$.

L'application f est surjective puisque $\dim(\text{Im } f) = \dim \mathbb{R}^2$.

c) f est bijective ?

f n'est pas injective puisque $\dim(\ker f) \neq 0$,
alors f n'est pas bijective.

3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) = (x - z, z - y, y - z)$.

a) f est linéaire ? A faire !

b) Déterminer $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$?

• **$\ker f$?**

On sait que

$$\begin{aligned}\ker f &= \{X \in E, f(X) = 0_F\}, \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x, y, z) = (0, 0, 0) &\iff (x - z, z - y, y - z) = (0, 0, 0), \\ &\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ z - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$X = (x, y, z) \in \ker f \iff X = (x, x, x) = x \underbrace{(1, 1, 1)}_u,$$

alors $\ker f$ est engendré par $\{u\}$, et comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, on déduit que c'est une base de $\ker f$.

Par suite,

$$\dim(\ker f) = 1.$$

l'application f n'est pas injective, puisque $\dim(f) \neq 0$.

• **$\text{Im } f$?**

Méthode1 :

On sait que

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f),$$

alors

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=2} = \underbrace{\dim(\ker f)}_{=1} + \dim(\text{Im } f),$$

d'où

$$\dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{f(X) \in F, X \in E\}, \\ &= \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.\end{aligned}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= (x - z, z - y, y - z), \\ &= (x, 0, 0) + (0, -y, y) + (-z, z, -z), \\ &= \underbrace{x(1, 0, 0)}_{u_1} + \underbrace{y(0, -1, 1)}_{u_2} + \underbrace{z(-1, 1, -1)}_{u_3}, \\ &= x.u_1 + y.u_2 + z.u_3.\end{aligned}$$

Alors $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Comme $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, alors ces vecteurs engendrant $\operatorname{Im} f$ et qui sont au nombre de 3 ne peuvent pas être linéairement indépendants.

En effet, on peut facilement remarquer que

$$u_3 = -u_1 - u_2,$$

donc $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice, et par suite c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

Méthode 2 :

Après avoir montré que $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, on montre que c'est une famille libre. En conclusion, on déduit que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$, donc $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

Comme $\dim(\operatorname{Im} f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors f n'est pas surjective.

c) f est bijective ?

l'application f n'est ni injective, ni surjective, alors f n'est pas bijective.

Exercice 3. 1) On détermine f ?

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x.e_1 + y.e_2), \\ &= x.f(e_1) + y.f(e_2), (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= x.(2, 3) + y.(1, 4), \\ &= (2x + y, 3x + 4y). \end{aligned}$$

2) $\ker f$? $\text{Im } f$?

On a, $\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (0, 0)\}$.

$$\begin{aligned} f(x, y) = (0, 0) &\iff (2x + y, 3x + 4y) = (0, 0), \\ &\iff \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ 3x + 4y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= -2x \\ -5x &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc, $\ker f = \{(0, 0)\}$.

Comme

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^2)}_{=2} = \underbrace{\dim(\ker f)}_{=0} + \dim(\text{Im } f),$$

alors

$$\dim(\text{Im } f) = 2.$$

Or, $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\text{Im } f) = \dim \mathbb{R}^2 = \dim F$, ($F = \mathbb{R}^2$),
ceci implique

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^2 \text{ et } \text{rang}(f) = 2.$$

3) f est un automorphisme ?

Rappel de cours :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et f une application linéaire définie de E dans F .

Si $E = F$ et f est **bijjective** alors f est dite un **automorphisme**.

Dans notre cas, on a $\dim(\ker f) = 0$ alors f est injective.

Comme $\dim E = \dim F = \dim \mathbb{R}^2$ donc f est bijective.

D'un autre côté, $E = F = \mathbb{R}^2$ ce qui permet de déduire que f est un automorphisme.

Autrement, on a $\text{Im } f = \mathbb{R}^2 = F$ alors f est surjective.

Comme $\dim E = \dim F = \dim \mathbb{R}^2$ donc f est bijective.

Ainsi, f est un automorphisme puisque $E = F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Base canonique de $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} e_1 = (1, 0) \\ e_2 = (0, 1) \end{cases}$

Base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} u_1 = (1, 0, 0) \\ u_2 = (0, 1, 0) \\ u_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$

On a :

$$f(u_1) = f(1, 0, 0) = e_1 + e_2 = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1),$$

$$f(u_2) = f(0, 1, 0) = 2e_1 - e_2 = (2, 0) - (0, 1) = (2, -1),$$

$$f(u_3) = f(0, 0, 1) = e_1 - 2e_2 = (1, 0) + (0, -2) = (1, -2),$$

1). On détermine f : Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on a

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x, y, z), \\ &= f(x.u_1 + y.u_2 + z.u_3), \\ &= x.f(u_1) + y.f(u_2) + z.f(u_3), \\ &= x.(1, 1) + y.(2, -1) + z.(1, -2), \\ &= (x + 2y + z, x - y - 2z). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y + z, x - y - 2z).$$

2). On détermine $\ker f$ et $\text{Im } f$:

On sait que

$$\ker f = \{X \in \mathbb{R}^3, f(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

alors

$$\begin{aligned} f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} &\iff f(x, y, z) = (0, 0) \\ &\iff (x + 2y + z, x - y - 2z) = (0, 0), \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -2y - x \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$X = (x, y, z) \in \ker f \iff X = (x, -x, x) = x \cdot \underbrace{(1, -1, 1)}_u,$$

d'où $\{u\}$ est une famille génératrice de $\ker f$; comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\{u\}$ est une base de $\ker f$. On en déduit que

$$\dim \ker f = 1.$$

$\text{Im } f$?

Méthode 1 : On sait que

$$\text{Im } f = \{f(X) \in \mathbb{R}^2, X \in \mathbb{R}^3\}.$$

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on a

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x, y, z), \\ &= (x + 2y + z, x - y - 2z), \\ &= x \cdot \underbrace{(1, 1)}_{v_1} + y \cdot \underbrace{(2, -1)}_{v_2} + z \cdot \underbrace{(1, -2)}_{v_3}, \\ &= x.v_1 + y.v_2 + z.v_3. \end{aligned}$$

Les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 engendrent $\text{Im } f$.

Question : est ce qu'ils sont linéairement indépendants ?

On sait que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\dim \ker f}_{=1} + \dim \text{Im } f,$$

d'où

$$\dim \text{Im } f = 2,$$

par conséquent, les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 ne peuvent pas être libres.

En effet, on peut facilement voir que

$$v_2 = v_1 + v_3.$$

Ceci entraîne que $\{v_1, v_3\}$ est une famille à la fois génératrice et libre.

Méthode 2 : On sait que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\dim \ker f}_{=1} + \dim \text{Im } f,$$

d'où

$$\dim \text{Im } f = 2.$$

Comme $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

et

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2 = 2,$$

alors

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^2.$$

3). f est un isomorphisme ?

Méthode 1 : Comme $\dim \ker f = 1 \neq 0$, alors f n'est pas injective, par suite n'est pas bijective (n'est pas un isomorphisme).

Exercice 5.

On a $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ telle que

$$f(x, y, z) = (x + z, -x + y, y + z, x + y + 2z)$$

1) Est ce que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Rappel de cours :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et f une application linéaire définie de E dans F .

Si $E = F$ alors f est dite un **endomorphisme de E** .

Il est facile de montrer que l'application f est bien linéaire. En revanche, elle associe un vecteur de $\mathbb{R}^4$ à un vecteur de $\mathbb{R}^3$, en d'autres termes $E = \mathbb{R}^3 \neq F = \mathbb{R}^4$. Ce n'est donc pas un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) On déterminer $\text{Im } f$?

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + z, -x + y, y + z, x + y + 2z), \\ &= (x, -x, 0, x) + (0, y, y, y) + (z, 0, z, 2z), \\ &= x \underbrace{(1, -1, 0, 1)}_{u_1} + y \underbrace{(0, 1, 1, 1)}_{u_2} + z \underbrace{(1, 0, 1, 2)}_{u_3}, \\ &= x.u_1 + y.u_2 + z.u_3. \end{aligned}$$

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ engendre $\text{Im } f$ avec de manière évidente,

$$u_3 = u_1 + u_2.$$

Les trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont liés. Enlevons le vecteur u_3 . les deux vecteurs restants u_1 et u_2 forme une famille génératrice de $\text{Im } f$. On montre facilement qu'ils sont libres. Ainsi la famille $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\text{Im } f$.

Par conséquent,

$$\dim(\text{Im } f) = \text{rang}(f) = 2.$$

3) $\dim(\ker f)$? $\ker f$?

Appliquons le théorème du rang à l'application f :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim(\text{Im } f)}_{=2} + \dim(\ker f),$$

d'où

$$\dim(\ker f) = 1.$$

Soit $(x, y, z) \in \ker f$. On a :

$$f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^4} \iff (x + z, -x + y, y + z, x + y + 2z) = (0, 0, 0, 0),$$

$$\iff \begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

On remarque que la quatrième équation s'exprime comme la somme de la première et de la troisième. On peut donc l'éliminer. De même, la troisième équation s'exprime comme la somme de la première et de la deuxième. On peut donc aussi l'éliminer. Par conséquent,

$$f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x + z & = & 0 \\ -x + y & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z & = & -x \\ y & = & x \end{cases}$$

D'où

$$(x, y, z) = (x, x, -x) = x.(1, 1, -1), \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi le vecteur $u(1, 1, -1)$ engendre $\ker f$, et comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $\mathcal{B} = \{u\}$ est une base de $\ker f$.

4) $H = \text{Im } f$?

Soit $X \in H$, alors $X = (x, y, x + y, 2x + y)$ avec x, y dans $\mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} X &= (x, y, x + y, 2x + y), \\ &= x(1, 0, 1, 2) + y(0, 1, 1, 1), \\ &= x.u_3 + y.u_2. \end{aligned}$$

Or, d'après ce qui précède (voir (3)), on sait que

$$u_3 = u_1 + u_2,$$

par suite on obtient

$$X = x.u_1 + (x + y).u_2, \tag{1.1}$$

ceci implique que $X \in \text{Im}(f)$. On a donc l'inclusion

$$H \subset \text{Im}(f).$$

D'autre part, l'égalité (1.1) montre que les deux vecteurs u_1 et u_2 engendrent H . Ils sont de plus libres entre eux. Ils forment donc une base de H , ainsi $\dim H = 2$. L'inclusion $H \subset \text{Im}(f)$ et l'égalité des dimensions des deux sous-espaces H et $\text{Im}(f)$ permettent alors de conclure que

$$H = \text{Im}(f).$$

Chapitre 2

Matrices et Déterminants

Exercices

Exercice 1.1) Calculer lorsqu'ils sont définis $A.B$, $B.A$ et $A+B$ dans chacun des cas suivants :

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Trouver les matrices transposées de A et B dans chacun des cas.

3) Déterminer lorsqu'elle est définie la trace de A et B dans chacun des cas.

Exercice 2. 1) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

2) Soient a et b des réels non nuls, et

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 3. 1) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En calculant A^2 , montrer que A est inversible et en déduire la matrice inverse A^{-1} .

2) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

3) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible, déterminer A^{-1} .

4) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Exercice 5. Répondre aux questions pour chacune des matrices suivantes.

- 1) La matrice est-elle inversible ?
- 2) Si la matrice est inversible, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solutions

Rappel de cours :

1) Soient $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{K})$ deux matrices sur un corps $\mathbb{K}(=\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

1. $A + B$ est défini si $(n = p) \text{ et } (m = q)$.
2. AB est défini si $m = p$.
3. BA est défini si $q = m$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$. La transposée de A est

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{K}).$$

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ est inversible} \iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AB = BA = I_n$$

Exercice 1. 1) **a.** Puisque A et B sont deux matrices d'ordres différents, la somme $A + B$ n'est pas possible.

Le produit AB n'est pas défini car A a deux colonnes et B trois lignes.

Pour BA , on trouve

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Puisque A et B sont deux matrices carrées de même ordre, la somme $A + B$ ainsi que les deux produits AB et BA sont possibles.

On trouve :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Puisque A et B sont deux matrices carrées de même ordre, la somme $A + B$ ainsi que les deux produits AB et BA sont possibles. On trouve :

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d. Puisque A et B sont deux matrices d'ordres différents, la somme $A + B$ n'est pas possible.

Le produit AB est bien défini car A a deux colonnes et B deux lignes. Le produit BA n'est pas défini car B a quatre colonnes et A trois lignes. En revanche, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Transposée de matrices :

a. $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Trace d'une matrice n'est définie que si elle est carrée.

a. $\text{tr}(B) = 1 - 1 + 1 = 1$

b. $\text{tr}(A) = 1 + 0 = 1, \text{tr}(B) = 0 + 1 = 1$

c. $\text{tr}(A) = 1 + 1 - 1 = 1, \text{tr}(B) = 2 + 1 + 1 = 4$

Exercice 2. 1) Soit

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

une telle matrice. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ e & f \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} c & c+d \\ e & e+f \end{pmatrix}.$$

Puisque $AB = BA$, on obtient le système :

$$\begin{cases} c+e &= c \\ d+f &= c+d \\ f &= e+f \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que $e = 0$ et $c = f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

2) Soit

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

une telle matrice. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} ac + be & ad + bf \\ ae & af \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} ac & bc + ad \\ ae & be + af \end{pmatrix}.$$

Puisque $AB = BA$, on obtient le système :

$$\begin{cases} ac + be = ac \\ ad + bf = bc + ad \\ af = be + af \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que $e = 0$ et $c = f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1) Le calcul ne pose pas de problèmes. Il mène à :

$$A^2 = A.A = I_3.$$

A est inversible, et son inverse est :

$$A^{-1} = A.$$

2) On vérifie facilement que

$$A^2 = 2I_3 - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui mène à :

$$\frac{A^2 + A}{2} = I_3 \implies A \frac{A + I_3}{2} = \frac{A + I_3}{2} A = I_3.$$

A est inversible, et son inverse est :

$$\frac{A + I_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Un calcul donne

$$A^3 - A = 4I_3.$$

Donc

$$\frac{A^3 - A}{4} = I_3 \implies A \frac{A^2 - I_3}{4} = \frac{A^2 - I_3}{4} A = I_3,$$

ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) On vérifie facilement que

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0.$$

On réécrit ceci en :

$$\frac{A^2 - 3A}{-2} = I_3 \implies A \left(\frac{-1}{2}(A - 3I_3) \right) = \left(\frac{-1}{2}(A - 3I_3) \right) A = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 1.5000 & -0.5000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.5000 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. 1. On a $\Delta_1 = 1 \times 1 - 2 \times (-2) = -3$.

2. On développe par rapport à la première colonne.

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & 3 & 4 \\ \overset{-}{5} & 4 & 3 \\ \overset{+}{1} & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= +2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(4 \times 1 - 2 \times 3) - 5(3 \times 1 - 2 \times 4) + 1(3 \times 3 - 4 \times 4) \\ &= 14 \end{aligned}$$

ou bien, on peut procéder avec des combinaisons linéaires de lignes ou colonnes, dans le but de faire apparaître le maximum de zéros, afin de minimiser le nombre de déterminants à développer.

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &\stackrel{c_1 \leftarrow c_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{l_2 \leftarrow l_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -2 \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

3. On développe suivant la première ligne.

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} +2 & -3 & +4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= +2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\
 &= 2(6 \times 1 - 9 \times 7) - 3(5 \times 1 - 8 \times 7) + 4(5 \times 9 - 8 \times 6) \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

ou bien, on peut procéder avec des combinaisons linéaires de lignes ou colonnes.

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &\stackrel{c_3-2c_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{l_3-5l_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -3 \\ 8 & 9 & -15 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -3 \\ -17 & -21 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(-3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -17 & -21 \end{vmatrix} \\
&= 27
\end{aligned}$$

4. On développe suivant la deuxième ligne.

$$\begin{aligned}
\Delta_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix} \\
&= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -12
\end{aligned}$$

5. On commence par ajouter $-2l_1$ à l_2 pour faire apparaître un 0 supplémentaire sur la première colonne, puis on développe suivant cette colonne.

$$\begin{aligned}
\Delta_5 &\stackrel{l_2-2l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= +1 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= -11
\end{aligned}$$

Exercice 5.**Rappel de cours :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Dans le cas où A est inversible, son inverse est donné par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T$$

avec $\text{Com}(A)$ est la comatrice de A .

1. $\det(A) = 4 \neq 0 \implies A$ est inversible.

- Calcul des cofacteurs de A .

Cofacteurs ligne 1 :

$$A_{11} = +3 \quad A_{12} = -2$$

Cofacteurs ligne 2 :

$$A_{21} = -1 \quad A_{22} = +2$$

- La comatrice de A est :

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- L'inverse de A est : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T$.

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- On vérifie que $A^{-1}A = I_3$.

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $\det(B) = 2 \neq 0 \implies B$ est inversible.

- Calcul des cofacteurs de B .

Cofacteurs ligne 1 :

$$\begin{aligned} B_{11} &= + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -8 & B_{12} &= - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = -6 \\ B_{13} &= + \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = -12 \end{aligned}$$

Cofacteurs ligne 2 :

$$\begin{aligned} B_{21} &= - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 & B_{22} &= + \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \\ B_{23} &= - \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = 6 \end{aligned}$$

Cofacteurs ligne 3 :

$$\begin{aligned} B_{31} &= + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 & B_{32} &= - \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \\ B_{33} &= + \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

- La comatrice de B est :

$$\text{Com}(B) = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- L'inverse de B est : $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{Com}(B)^T$.

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- On vérifie que $B^{-1}B = I_3$.

$$\begin{aligned} B^{-1}B &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $\det(C) = -3 \neq 0 \implies C$ est inversible.

- Calcul des cofacteurs de C .

Cofacteurs ligne 1 :

$$\begin{aligned} C_{11} &= + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 & C_{12} &= - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \\ C_{13} &= + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

Cofacteurs ligne 2 :

$$\begin{aligned} C_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 & C_{22} &= + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \\ C_{23} &= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Cofacteurs ligne 3 :

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

- La comatrice de C est :

$$\text{Com}(C) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- L'inverse de C est : $C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \text{Com}(C)^T$.

$$C^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On vérifie que $C^{-1}C = I_3$.

$$\begin{aligned} C^{-1}C &= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. $\det(D) = 5 \neq 0 \implies D$ est inversible.

- Calcul des cofacteurs de D .

Cofacteurs ligne 1 :

$$D_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad D_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

Cofacteurs ligne 2 :

$$D_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad D_{22} = + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{23} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Cofacteurs ligne 3 :

$$D_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad D_{32} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_{33} = + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

- La comatrice de D est :

$$\text{Com}(D) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

- L'inverse de D est : $D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} \text{Com}(D)^T$.

$$D^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

- On vérifie que $D^{-1}D = I_3$.

$$\begin{aligned} D^{-1}D &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Matrices et Applications Linéaires

Exercices

Exercice 1. Écrire la matrice associée à l'application linéaire f dans les bases canoniques dans chacun des cas suivants :

1) f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z) = (-x + 2y + z, -3y + 2z, -x, y - z)$$

2) f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, 3x - y, x + y + z)$$

3) f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y, z) = (-x + y + 3z, 2x - y + z)$$

Exercice 2. Soient f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$f(x, y) = (2x - 5y, -3x + 4y), \quad g(x, y) = (-8y, 7x + y).$$

1) Déterminer les matrices de f et g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer les applications linéaires $f + g$, $f \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ f$.

3) Déterminer de deux manières différentes leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

Soient $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.

1) Écrire la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

2) Montrer que $\mathcal{F}' = \{f_1, f_2, f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3) Écrire la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}'$.

Exercice 4. Soit l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

On appelle $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} \{v_1, v_2\}$ celle de $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer l'application f .

2) On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + e_2,$$

et

$$v'_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad v'_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2).$$

Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que $\{v'_1, v'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3) Donner la matrice associée à f dans ces nouvelles bases.

Solutions

Exercice 1.

Rappel de cours :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies n et m respectivement et soit f une application linéaire définie de E dans F . $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ celle de F .

La matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_j)$, $1 \leq j \leq n$ dans la base $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{M}(f)_{(\mathcal{E}, \mathcal{F})} = \begin{matrix} & f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \dots & f(e_n) \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1) $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, -3y + 2z, -x, y - z)$ On a

$$f(1, 0, 0) = (-1, 0, -1, 0), \quad f(0, 1, 0) = (2, -3, 0, 1), \quad f(0, 0, 1) = (1, 2, 0, -1),$$

alors la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $f(x, y, z) = (-2x + y + z, 3x - y, x + y + z)$ On a

$$f(1, 0, 0) = (-2, 3, 1), \quad f(0, 1, 0) = (1, -1, 1), \quad f(0, 0, 1) = (1, 0, 1),$$

alors la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $f(x, y, z) = (-x + y + 3z, 2x - y + z)$ On a

$$f(1, 0, 0) = (-1, 2), \quad f(0, 1, 0) = (1, -1), \quad f(0, 0, 1) = (3, 1),$$

alors la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1)

- $f(x, y) = (2x - 5y, -3x + 4y)$

On a

$$f(1, 0) = (2, -3), \quad f(0, 1) = (-5, 4),$$

alors la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- $g(x, y) = (-8y, 7x + y)$

On a

$$g(1, 0) = (0, 7), \quad g(0, 1) = (-8, 1),$$

alors la matrice associée à g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- On a

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &= f(x, y) + g(x, y) \\ &= (2x - 5y, -3x + 4y) + (-8y, 7x + y) \\ &= (2x - 13y, 4x + 5y)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f + g)(x, y) = (2x - 13y, 4x + 5y)$$

- On a

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x, y) &= f[g(x, y)] \\ &= f(\underbrace{-8y}_a, \underbrace{7x + y}_b) \\ &= f(a, b) \\ &= (2a - 5b, -3a + 4b) \\ &= (-16y - 35x - 5y, 24y + 28x + 4y) \\ &= (-35x - 21y, 28x + 28y)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f \circ g)(x, y) = (-35x - 21y, 28x + 28y)$$

- On a

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x, y) &= g[f(x, y)] \\ &= g(\underbrace{2x - 5y}_c, \underbrace{-3x + 4y}_d) \\ &= g(c, d) \\ &= (-8d, 7c + d) \\ &= (+24x - 32y, -35y + 14x - 3x + 4y) \\ &= (24x, 11x - 31y)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (g \circ f)(x, y) = (24x - 32y, 11x - 31y)$$

- On a

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)(x, y) &= f[f(x, y)] \\
 &= f(\underbrace{2x - 5y}_c, \underbrace{-3x + 4y}_d) \\
 &= f(c, d) \\
 &= (2c - 5d, -3c + 4d) \\
 &= (4x - 10y + 15x - 20y, -6x + 15y - 12x + 16y) \\
 &= (19x - 30y, -18x + 31y)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f \circ f)(x, y) = (19x - 30y, -18x + 31y)$$

3) On détermine les matrices associées aux applications linéaires de deux manières :

Méthode 1 : En déterminant les images des vecteurs de base.

- $(f + g)(x, y) = (2x - 13y, 4x + 5y)$

On a

$$(f + g)(1, 0) = (2, 4), \quad (f + g)(0, 1) = (-13, 5)$$

alors la matrice associée à $f + g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{M}(f + g) = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- $(f \circ g)(x, y) = (-35x - 21y, 28x + 28y)$

On a

$$(f \circ g)(1, 0) = (-35, 28), \quad (f \circ g)(0, 1) = (-21, 28)$$

alors la matrice associée à $f \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{M}(f \circ g) = \begin{pmatrix} -35 & -21 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}.$$

- $(g \circ f)(x, y) = (24x - 32y, 11x - 31y)$

On a

$$(g \circ f)(1, 0) = (24, 11), \quad (g \circ f)(0, 1) = (-32, -31)$$

alors la matrice associée à $f \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{M}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 24 & -32 \\ 11 & -31 \end{pmatrix}.$$

- $(f \circ f)(x, y) = (19x - 30y, -18x + 31y)$

On a

$$(f \circ f)(1, 0) = (19, -18), \quad (f \circ f)(0, 1) = (-30, 31)$$

alors la matrice associée à $f \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{M}(f \circ f) = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ -18 & 31 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 :

Rappel de cours :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies n, m et p respectivement et soient f une application linéaire définie de E dans F et g une application linéaire définie de F dans G.

On note $\mathcal{M}(f)$ la matrice de f par rapport aux bases respectives de E et F et $\mathcal{M}(g)$ la matrice de g par rapport aux bases respectives de F et G.

On a

- Si $F=G$, alors $\mathcal{M}(f + g) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g)$.
- $\mathcal{M}(f \circ g) = \mathcal{M}(g)\mathcal{M}(f)$.

Exercice 3.

1) On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (-1, 1, -1, 0) = -f_1 + f_2 - f_3 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, -1, 0, -1) = f_1 - f_2 - f_4 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) = f_3 + f_4 \end{aligned}$$

En appliquant la définition, la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est

$$\mathcal{M}(f)_{(\mathcal{E}, \mathcal{F})} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 et que la famille considérée a quatre éléments, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Pour cela, il suffit de calculer $D = \det(f_1, f_2, f(e_1), f(e_2))$. Comme la matrice $(f_1, f_2, f(e_1), f(e_2))$ est triangulaire, alors

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times (-1) \times (-1) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille $\mathcal{F}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3) On pose

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$.

On a le diagramme suivant

$$\mathbb{R}_{\mathcal{E}}^3 \xrightarrow[I_3]{Id_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}}^3 \xrightarrow[\mathcal{M}(f)_{(\mathcal{E}, \mathcal{F})}]{f} \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^4 \xrightarrow[Q]{Id_{\mathbb{R}^4}} \mathbb{R}_{\mathcal{F}'}^4$$

par suite

$$\mathcal{M}(f)_{(\mathcal{E}, \mathcal{F}')} = Q^{-1} \mathcal{M}(f)_{(\mathcal{E}, \mathcal{F})} I_3$$

Le calcul donne

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M}(f)_{(\mathcal{E}, \mathcal{F}')} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

Rappel de cours :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m , $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ celle de F , f une application linéaire définie de E dans F et A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. On pose

$$\forall x \in E, y = f(x),$$

et on désigne par X la matrice colonne des coordonnées de x suivant $\mathcal{E}$, et par Y la matrice colonne des coordonnées de y suivant $\mathcal{F}$. Alors on a

$$Y = AX.$$

1) On pose $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (y_1, y_2) = f(x_1, x_2, x_3)$.
on désigne par X la matrice colonne des coordonnées de (x_1, x_2, x_3) suivant $\mathbb{R}^3$, et par Y la matrice colonne des coordonnées de (y_1, y_2) suivant $\mathbb{R}^2$.

On a

$$\begin{aligned} Y &= AX \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 - 3x_3).$$

2) On a

$$e'_1 = (0, 1, 1), e'_2 = (1, 0, 1), e'_3 = (1, 1, 0),$$

et

$$f'_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), f'_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Puisqu'on a des familles de trois (respectivement deux) vecteurs dans un espace de dimension trois (resp. deux), il suffit de prouver que l'on a des familles libres.

Pour $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ on a

$$\det(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

donc la famille $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour $\mathcal{F}' = \{f'_1, f'_2\}$ on a

$$\det(f'_1, f'_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

donc la famille $\mathcal{F}' = \{f'_1, f'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3) Noton P la matrice de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ et Q la matrice de passage de $\{f_1, f_2\}$ à $\{f'_1, f'_2\}$.

Alors on a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a le diagramme suivant

$$\mathbb{R}_{\mathcal{E}'}^3 \xrightarrow[P]{Id_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}}^3 \xrightarrow[A]{f} \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^2 \xrightarrow[Q]{Id_{\mathbb{R}^2}} \mathbb{R}_{\mathcal{F}'}^2$$

Si $\mathbf{B}$ est la matrice de $\mathbf{f}$ dans les nouvelles bases, alors la formule du changement de base nous dit que

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}.$$

Or,

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Systèmes d'Équations Linéaires

Exercices

Exercice 1. Soit le système d'équations linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 5x - 2y - z = 2 \\ x - 3y - z = -1 \end{cases}$$

1. Écrire le système précédent sous la forme matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$.
2. Trouver l'inverse de $\mathbf{A}$.
- 3) En déduire la solution du système donné.

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \\ 3x + 6y - 5z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3.

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$1) \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 3 \\ -x + y + 3z = -3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ x - 2y + z - t = -1 \\ x - 2y + z + 5t = 5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

Exercice 4.

Résoudre et discuter suivant le paramètre m , les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$1) \begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -mx + y - mz = 0 \\ x + my - z = -m \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Solutions

Exercice 1.

Rappel de cours :

Soit un système d'équations linéaires (S) écrit sous sa forme matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b},$$

où $\mathbf{X}$ est le vecteur inconnu à déterminer.

Si la matrice $\mathbf{A}$ est carrée, alors on a :

$$(S) \text{ admet une solution unique } \iff \mathbf{A} \text{ est inversible.}$$

Dans ce cas la solution du système est donnée par

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

1. La forme matricielle du système donné est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_b$$

2. Le calcul du déterminant de la matrice A donne

$$\det(A) = 41 \neq 0,$$

alors A est inversible et sa matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.0244 & 0.2439 & -0.1707 \\ 0.0976 & 0.0244 & -0.3171 \\ -0.3171 & 0.1707 & -0.2195 \end{pmatrix}$$

3. Par suite, la solution du système est donné par

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -0.0244 & 0.2439 & -0.1707 \\ 0.0976 & 0.0244 & -0.3171 \\ -0.3171 & 0.1707 & -0.2195 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$X = \begin{pmatrix} 0.6341 \\ 0.4634 \\ 0.2439 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Rappel de cours :

Soit un système d'équations linéaires (S) écrit sous sa forme matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b},$$

où la matrice $\mathbf{A}$ est carrée de dimension n , et $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur

inconnu à déterminer.

Alors on a :

$$(S) \text{ est dit de Cramer } \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Dans ce cas la solution unique du système est donnée par les formules

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}.$$

avec $\mathbf{A}_j$ est la matrice obtenue de $\mathbf{A}$, en remplaçant la j -ième colonne par le vecteur $\mathbf{b}$.

1. La forme matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Le système est carré et calcul du déterminant de $\mathbf{A}$ donne

$$\det(\mathbf{A}) = -4 \neq 0,$$

alors le système est de Cramer, il admet une solution unique donnée par

$$x = \frac{\det(\mathbf{A}_x)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Ainsi la solution est $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. La forme matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_b$$

Le système est carré et calcul du déterminant de $\mathbf{A}$ donne

$$\det(\mathbf{A}) = 4 \neq 0,$$

alors le système est de Cramer, il admet une solution unique donnée par

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ainsi la solution est $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. La forme matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_b$$

Le système est carré et calcul du déterminant de A donne

$$\det(A) = -1 \neq 0,$$

alors le système est de Cramer, il admet une solution unique donnée par

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 32,$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -20,$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Ainsi la solution est $X = \begin{pmatrix} 32 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

1. La forme matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}_b$$

Le système est carré, le déterminant de $\mathbf{A}$ est donné par

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculons chaque sous-déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-4) \cdot 1 = 6 + 4 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-4) \cdot (-1) = 6 - 4 = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 2 + 2 = 4.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression du déterminant de $\mathbf{A}$, nous obtenons :

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 10 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 10 - 6 - 4 = 0.$$

Puisque $\det(\mathbf{A}) = 0$, la matrice $\mathbf{A}$ est singulière, ce qui signifie que le système n'a pas de solution unique. Il est soit incompatible (pas de solution), soit compatible indéterminé (infinité de solutions).

Pour savoir laquelle de ces situations s'applique, nous devons déterminer le rang de la matrice $\mathbf{A}$.

Rappel de cours :

Soit $\mathbf{A}$ une matrice non nulle de dimension $m \times n$.

Le **rang de $\mathbf{A}$** est égal à l'ordre maximum d'une matrice carrée extraite de $\mathbf{A}$ de déterminant non nul.

Le **rang de $\mathbf{A}$** est égal à r si et seulement si, il existe un déterminant non nul, d'ordre r extrait de $\mathbf{A}$. Dans ce cas, on écrit :

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = r.$$

Si r est le rang de $\mathbf{A}$, alors $r \leq \min(m, n)$.

Dans notre cas, $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq 2$. D'après nos calculs précédents, on a au moins un déterminant d'ordre 2 non nul.

Par exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4.$$

Le système est alors équivalent à son système principal à deux équations principales et deux inconnues principales x et y . la variable z est considérée comme paramètre réel.

On résout le système de Cramer

$$\begin{cases} x + 3y = z \\ 2x + 2y = 4z + 3 \end{cases}$$

On trouve

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 3 \\ 4z + 3 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{5}{2}z + \frac{9}{4},$$

et

$$y = \frac{\begin{vmatrix} z & 3 \\ 4z + 3 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{4}.$$

Ces solutions vérifient la troisième équation, il en résulte que l'ensemble des solutions du système donné est

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{2}z + \frac{9}{4}, -\frac{1}{2}z - \frac{3}{4}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. La forme matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix}}_b$$

La matrice $\mathbf{A}$ est de dimension 4×3 , et $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq 3$.

Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

on déduit

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = 3.$$

Le système est alors équivalent à son système principal à trois équations principales et trois inconnues principales x , y et z .

On résout le système de Cramer

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \end{cases}$$

On trouve

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 11 & 3 & -1 \\ 13 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{-1} = 4,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 11 & -1 \\ 2 & 13 & -5 \end{vmatrix}}{-1} = 3.$$

et

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix}}{-1} = 2.$$

Ces solutions ne vérifient pas la troisième équation, il en résulte que le système donné n'admet pas de solutions.

$$S = \emptyset.$$

3. L'écriture matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_b$$

La matrice A est de dimension 2×4 , et $\text{rang}(A) \leq 2$.
Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

on déduit

$$\text{rang}(A) = 2.$$

Le système est alors équivalent à son système principal à deux équations principales et deux inconnues principales x et y . les variables z et t sont considérées comme paramètres réels.
On résout le système de Cramer

$$\begin{cases} x + y = 1 - z + 3t \\ 2x + y = -1 + z - t \end{cases}$$

On trouve

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - z + 3t & 1 \\ -1 + z - t & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -2 + 2z - 4t,$$

et

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - z + 3t \\ 2 & -1 + z - t \end{vmatrix}}{-1} = 3 - 3z + 7t.$$

Il en résulte que l'ensemble des solutions du système donné est

$$S = \{(-1 + 2z - 4t, 3 - 3z + 7t, z, t), z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4.

1. La forme matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}}_b$$

$$\det(A) = 4 - m^2.$$

Deux cas se présentent :

1^{er} cas : $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\det(A) \neq 0$, le système est de Cramer, il admet alors une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & m \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{6}{m - 2},$$

et

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ m & 6 \end{vmatrix}}{4 - m^2} = \frac{3}{2 - m}.$$

Il en résulte que l'ensemble des solutions du système donné est

$$S = \left\{ \left(\frac{6}{m - 2}, \frac{3}{2 - m} \right), m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \right\}.$$

2^{ime} cas : $m = 2$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solutions car on ne peut avoir $3 = -3$.

$$S = \emptyset.$$

3^{ime} cas : $m = -2$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Il se réduit à une seule équation

$$x - 2y = -3 \iff x = -3 + 2y.$$

L'ensemble des solutions est alors

$$S = \{(-3 + 2y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

2. L'écriture matricielle du système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -m & 1 & -m \\ 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ 1 \end{pmatrix}}_b$$

Le système est carré, le déterminant de A est donné par

$$\det(A) = -m \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -m & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -1 \end{vmatrix},$$

on obtient

$$\det(A) = (m - 1)(3m + 1).$$

1^{er} cas : $m \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}, 1\}$

$\det(A) \neq 0$, le système est de Cramer, il admet alors une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -m \\ -m & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(m - 1)(3m + 1)} = \frac{2m + 1}{3m + 1},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -m & 0 & -m \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(m - 1)(3m + 1)} = \frac{-m(2 + 3m)}{(m - 1)(3m + 1)},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -m & 1 & 0 \\ 1 & m & -m \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(m-1)(3m+1)} = \frac{-2m^2 - 2m - 1}{(m-1)(3m+1)}.$$

Il en résulte que l'ensemble des solutions du système donné est

$$S = \left\{ \left(\frac{2m+1}{3m+1}, \frac{-m(2+3m)}{(m-1)(3m+1)}, \frac{-2m^2-2m-1}{(m-1)(3m+1)} \right), m \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\} \right\}.$$

2^{ième} cas : $m = -\frac{1}{3}$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 3y + z &= 0 \\ 3x - y - 3z &= 1 \\ 2x + y - z &= 1 \end{cases}$$

Son déterminant est nul. Le rang du système est alors inférieur ou égal à 2.

Comme

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

alors $\text{rang}(A) = 2$. Ainsi le système est équivalent à son système principal formé par les deux premières équations et deux inconnues principales x et y . la troisième inconnue z est considérée comme paramètre réel.

On résoud le système

$$\begin{cases} x + 3y &= -z \\ 3x - y &= 1 + 3z \end{cases}$$

C'est un système de Cramer, il admet une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 3 \\ 1 + 3z & -1 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{9}{10}z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 + 3z \end{vmatrix}}{-10} = \frac{10 + 3z}{-10}z.$$

Ces solutions ne vérifient pas la troisième équation, donc le système n'admet pas de solutions.

$$S = \emptyset.$$

3^{ième} cas : $m = 1$

Faisant un même raisonnement, on trouve que là aussi le système n'admet pas de solutions.

Chapitre 5

Calcul Intégral

Exercices

Exercice 1. Calcul de primitives

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{e^x} (e^{-x} + 1)^3$

2. $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}$

3. $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2+x+1}$

4. $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + x - 2)}$

5. $f(x) = \frac{3x^3 + 10x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$

6. $f(x) = (\cos^4 x) (\sin^3 x)$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int \frac{1}{4 + 5 \sin x} \, dx$
2. $\int x^2 \ln x \, dx$
3. $\int x^2 e^{5x} \, dx$
4. $\int e^{5x} \sin(3x) \, dx$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$

Exercice 3. Calcul d'intégrales définies

Calculer les intégrales définies suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x + 3}} \, dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3}} \, dx$
3. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$
4. $\int_2^1 x \ln x \, dx$
5. $\int_0^1 \arctan x \, dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \sqrt{2 + \cos^2 x} \, dx$
8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$

Solutions

Exercice 1. Calcul de primitives

Chacune des fonctions données est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition, elle admet alors une primitive.

1. Posons

$$u(x) = e^{-x} + 1,$$

alors

$$u'(x) = -e^{-x},$$

par suite

$$f(x) = -u'(x)u(x)^3,$$

d'où les primitives de la fonction f sont

$$F(x) = -\frac{u(x)^4}{4} + c = \frac{(e^{-x} + 1)^4}{4}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Posons

$$u(x) = 1 - \sin x$$

alors

$$u'(x) = -\cos x$$

Par substitution de u , on obtient

$$f(x) = -u'(x)u^{-\frac{1}{2}}(x),$$

d'où les primitives de la fonction f sont

$$F(x) = \frac{-u^{-\frac{1}{2}+1}(x)}{-\frac{1}{2} + 1} + c = -2\sqrt{1 - \sin x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Posons

$$u(x) = x^2 + x + 1,$$

alors

$$u'(x) = 2x + 1,$$

par suite

$$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)},$$

d'où les primitives de la fonction f sont

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} + c = \frac{1}{2}e^{x^2+x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4. Commençons par factoriser le dénominateur, on obtient

$$(x^2 - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2).$$

Décomposons la fraction rationnelle $f(x)$ en éléments simples, cette décomposition sera de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x + 2}, \quad (5.1)$$

où A , B , C , D sont des constantes réelles à déterminer. Nous obtenons B en multipliant 5.1 par $(x - 1)^2$ et en remplaçant x par 1 dans l'égalité obtenue. Nous avons

$$B = \frac{1}{3}.$$

Nous obtenons C en multipliant 5.1 par $x + 1$ et en remplaçant x par -1 dans l'égalité obtenue. Nous avons

$$C = 1.$$

Nous obtenons D en multipliant 5.1 par $x + 2$ et en remplaçant x par -2 dans l'égalité obtenue. Nous avons

$$D = \frac{1}{9}.$$

Pour $x = 0$, nous obtenons la relation

$$\frac{3}{2} = -A + B + C + \frac{D}{2}.$$

D'où

$$A = -\frac{1}{9}.$$

Nous obtenons donc

$$f(x) = -\frac{1}{9} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} \frac{1}{x+2}.$$

Remarque : Pour déterminer les constantes réelles A , B , C et D , on peut procéder autrement :

Réduire au même dénominateur le second terme de 5.1, ensuite par identification des coefficients des numérateurs des deux termes de 5.1, on obtient un système d'équations linéaires dont les inconnues sont A , B , C , D qu'on résout.

Les primitives de f sont

$$F(x) = -\frac{1}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \ln|x+1| + \frac{1}{9} \ln|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5. Commençons par factoriser le dénominateur, on obtient

$$(x^2 - 1)^2 = (x+1)^2 (x-1)^2.$$

Décomposons la fraction rationnelle $f(x)$ en éléments simples, cette décomposition sera de la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}, \quad (5.2)$$

où A , B , C , D sont des constantes réelles à déterminer.

Nous obtenons B en multipliant 5.2 par $(x+1)^2$ et en remplaçant x par -1 dans l'égalité obtenue. Nous avons

$$B = \frac{9}{4}.$$

Nous obtenons D en multipliant 5.2 par $(x - 2)^2$ et en remplaçant x par 1 dans l'égalité obtenue. Nous avons

$$D = \frac{11}{4}.$$

Pour $x = 0$, nous obtenons la relation

$$0 = A - B + C + D.$$

Pour $x = 2$, nous obtenons la relation

$$\frac{20}{3} = \frac{1}{3}A + \frac{1}{9}B + C + D.$$

Après résolution de ces deux équations, nous obtenons

$$C = 4, A = -1$$

La fraction rationnelle $f(x)$ s'écrit alors

$$f(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{9}{4} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{11}{4} \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Les primitives de f sont

$$F(x) = -\ln|x+1| - \frac{9}{4} \frac{1}{x+1} + 4 \ln|x-1| - \frac{11}{4} \frac{1}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

6. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x, \\ &= \cos^4 x \sin x - \cos^6 x \sin x. \end{aligned}$$

On pose

$$u(x) = \cos x,$$

alors

$$u'(x) = -\sin x.$$

Par substitution, $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = -u'(x)u^4(x) + u'(x)u^6(x),$$

par suite, les primitives de la fonction f sont

$$F(x) = -\frac{u^5(x)}{5} + \frac{u^6(x)}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

d'où

$$F(x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{6} \cos^6 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Toute fonction à intégrer est continue et dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition.

1. Pour le calcul de l'intégrale, on opte pour le changement de variable classique en posant

$$u = \tan \frac{x}{2},$$

ce qui donne

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2u^2 + 5u + 2} du, \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(u + \frac{1}{2}\right)(u + 2)} du, \\ &= \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{u + \frac{1}{2}} du - \int \frac{1}{u + 2} du \right), \\ &= \frac{1}{3} \left(\ln \left| u + \frac{1}{2} \right| - \ln |u + 2| \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u + \frac{1}{2}}{u + 2} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En variable initiale, on obtient :

$$I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.

Rappel de cours :

Soit u et v deux fonctions continues et dérivables sur un même intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors on a la formule d'intégration par parties pour tout réel x de I

$$\int u'(x)v(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) \, dx.$$

Pour le calcul de l'intégrale, on utilise la formule de l'intégration par parties. On pose :

$$u'(x) = x^2 \implies u(x) = \frac{1}{3}x^3,$$

et

$$v(x) = \ln x \implies v'(x) = \frac{1}{x}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2 \, dx, \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Pour calculer cette intégrale, on utilise l'intégration par parties. On pose :

$$u(x) = x^2 \implies u'(x) = 2x,$$

et

$$v'(x) = e^{5x} \implies v(x) = \frac{1}{5}e^{5x}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{5x} dx &= \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \int \frac{2}{5} x e^{5x} dx, \\ &= \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx.\end{aligned}$$

Pour calculer

$$\int x e^{5x} dx,$$

on a à nouveau recours à la formule d'intégration par parties.

On pose :

$$w(x) = x \implies w'(x) = 1,$$

et

$$v'(x) = e^{5x} \implies v(x) = \frac{1}{5} e^{5x}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int x e^{5x} dx &= \frac{1}{5} x e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx, \\ &= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} \int 5 e^{5x} dx, \\ &= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{5x} dx &= \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ &= \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{2}{25} x + \frac{2}{125} \right) e^{5x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. Pour le calcul de l'intégrale, on utilise la formule de l'intégration par parties. On pose :

$$u(x) = e^{5x} \implies u'(x) = 5e^{5x},$$

et

$$v'(x) = \sin(3x) \implies v(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int e^{5x} \sin(3x) \, dx &= -\frac{1}{3}e^{5x} \cos(3x) + \int \frac{5}{3}e^{5x} \cos(3x) \, dx, \\ &= -\frac{1}{3}e^{5x} \cos(3x) + \frac{5}{3} \int e^{5x} \cos(3x) \, dx.\end{aligned}$$

Pour calculer $\int e^{5x} \cos(3x) \, dx$, on utilise une autre fois l'intégration par parties. On pose

$$u(x) = e^{5x} \implies u'(x) = 5e^{5x},$$

et

$$w'(x) = \cos(3x) \implies w(x) = \frac{1}{3} \sin(3x).$$

On obtient :

$$\int e^{5x} \cos(3x) \, dx = \frac{1}{3}e^{5x} \sin(3x) - \frac{5}{3} \int e^{5x} \sin(3x) \, dx,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\int e^{5x} \sin(3x) \, dx &= -\frac{1}{3}e^{5x} \cos(3x) + \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3}e^{5x} \sin(3x) - \frac{5}{3} \int e^{5x} \sin(3x) \, dx \right), \\ &= -\frac{1}{3}e^{5x} \cos(3x) + \frac{5}{9}e^{5x} \sin(3x) - \frac{25}{9} \int e^{5x} \sin(3x) \, dx.\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{34}{9} \int e^{5x} \sin(3x) \, dx = -\frac{1}{3}e^{5x} \cos(3x) + \frac{5}{9}e^{5x} \sin(3x).$$

On déduit alors

$$\int e^{5x} \sin(3x) \, dx = e^{5x} \left(-\frac{3}{34} \cos(3x) + \frac{5}{34} \sin(3x) \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5. Le polynôme $x^2 + x + 1$ peut être complété en carré comme suit :

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} dx.$$

Posons $u = x + \frac{1}{2}$, donc $dx = du$ et l'intégrale devient :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} du.$$

Écrivons $\frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, ce qui donne :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} du.$$

L'intégrale $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du$ est connue, son résultat est donné par

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \operatorname{argsh} \left(\frac{u}{a} \right) + c.$$

Ici, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En remplaçant, nous obtenons :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \operatorname{argsh} \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) + c.$$

Revenons à la variable initiale $u = x + \frac{1}{2}$. Cela donne :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \operatorname{argsh} \left(\frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} \right) + c.$$

Résultat final

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \operatorname{argsh} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Calcul d'intégrales définies

1. Pour le calcul de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$, on va utiliser

$$\int u'(x)u^n(x) dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Posons

$$u(x) = 2x + 1,$$

alors

$$u'(x) = 2,$$

par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2x+3}}, \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2x+3)^{-\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{1}{2} \cdot u'(x) \cdot u^{-\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot u'(x) \cdot u^{-\frac{1}{2}}(x) dx, \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u(x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^1, \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \cdot \sqrt{2x+3} \right]_0^1, \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. L'intégrale peut s'écrire

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{2x+3}} \, dx.$$

En posant

$$u(x) = 2x^2 + 3,$$

alors

$$u'(x) = 4x.$$

l'intégrale devient

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 u'(x) u^{-\frac{1}{2}}(x) \, dx.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} \, dx &= \frac{1}{4} \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}(x)}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{2x^2+3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{5} - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

3. Posons

$$u(x) = \ln x,$$

alors

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx &= \int_1^e u'(x) \cdot u(x) \, dx \\ &= \left[\frac{u^2(x)}{2} \right]_1^e \\ &= \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Pour calculer cette intégrale, on procède par l'intégration par parties : Posons

$$u(x) = \ln x \implies u'(x) = \frac{1}{x},$$

$$v'(x) = x \implies v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} \int_2^1 x \ln x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_2^1 - \int_2^1 \frac{x^2}{2x} \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_2^1 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_2^1 \\ &= -2 \ln 2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

5. Là aussi, on va utiliser le principe de l'intégration par parties. Posons

$$u(x) = \arctan x \implies u'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$v'(x) = 1 \implies v(x) = x.$$

Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x \, dx &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= [x \arctan x]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &= [x \arctan x]_0^1 - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 \end{aligned}$$

Nous avons pour le premier terme

$$[x \arctan x]_0^1 = 1 \cdot \arctan 1 - 0 \cdot \arctan 0.$$

Sachant que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan 0 = 0$, cela donne

$$[x \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

et pour le second terme, on a

$$[\ln(1+x^2)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

En combinant les deux termes, nous obtenons :

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

6. On intègre par parties. Posons

$$u(x) = e^x \implies u'(x) = e^x,$$

et

$$v'(x) = \sin x \implies v(x) = -\cos x.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx &= [-\cos x \cdot e^x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos x \cdot e^x \, dx \\ &= [-\cos x \cdot e^x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x \, dx \end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x \, dx$, nous utilisons à nouveau l'intégration par parties.

Choisissons

$$u'(x) = \cos x \implies u(x) = \sin x$$

et

$$v(x) = e^x \implies v'(x) = e^x.$$

En appliquant la formule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x \, dx = [e^x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot e^x \, dx.$$

Cela devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^x \, dx = [e^x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot e^x \, dx.$$

En regroupant les résultats, nous avons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx = [-\cos x \cdot e^x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [e^x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx.$$

Cela donne

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx = [(\sin x - \cos x) \cdot e^x]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} [(\sin x - \cos x) \cdot e^x]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

Quand $x = \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$e^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = e^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.$$

Quand $x = 0$, $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$, donc

$$e^0 (\sin 0 - \cos 0) = 1(0 - 1) = -1.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} [0 - (-1)] = \frac{1}{2}.$$

7. Utilisons l'identité trigonométrique suivante :

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$$

Ainsi, l'intégrale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \sqrt{2 + \cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin(x) \cos x \sqrt{2 + \cos^2 x} \, dx.$$

Posons $u = \cos x$. Alors, $du = -\sin x \, dx$.

Les bornes changent comme suit :

Quand $x = 0$, $u = \cos 0 = 1$.

Quand $x = \frac{\pi}{4}$, $u = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \sqrt{2 + \cos^2 x} \, dx &= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -2u \sqrt{2 + u^2} \, du \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 2u \sqrt{2 + u^2} \, du \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 2u (2 + u^2)^{\frac{1}{2}} \, du \\ &= \left[\frac{2}{3} (2 + u^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1. \end{aligned}$$

Cela donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \sqrt{2 + \cos^2 x} \, dx = \frac{2}{3} \left(3^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

8. Pour calculer $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$, on a

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}}} \, dx.$$

Posons $u = x + \frac{1}{2}$, $du = dx$.

Les bornes deviennent :

Quand $x = 0$, $u = \frac{1}{2}$.

Quand $x = 1$, $u = \frac{3}{2}$.

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} du. \end{aligned}$$

Sachant que

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \operatorname{argsh} \left(\frac{u}{a} \right) + c.$$

Ainsi, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}.$$

Quand $u = \frac{1}{2}$, $\operatorname{argsh} \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) = \operatorname{argsh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Quand $u = \frac{3}{2}$, $\operatorname{argsh} \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) = \operatorname{argsh} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right)$.

On obtient le résultat suivant :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \operatorname{argsh} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Bibliographie

1. E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, Problèmes corrigés de Mathématiques, DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.
2. C. Baba-Hamed, K. Benhabib, Algèbre I Rappels de Cours et Exercices avec Solutions, Office des publications universitaires, Alger, 1988.
3. S. Balac, F. Sturm, Exercices d'Algèbre et d'Analyse, 154 exercices corrigés de première année.
2 ième édition entièrement revue et augmentée, Edition Algérie+ Afrique, programme LMD.
Presses polytechniques et universitaires romandes, Suisse.
4. B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Exercices d'Analyse, 1er cycle scientifique, 1ère année préparation aux grandes écoles, Armand Colin, collection U.
5. A. Denmat, F. Héaulme, Algèbre générale, série : TD, Dunod 2000.
6. J-P. Escofier, Toute l'Algèbre du **1^{er}** cycle, Dunod 2002.
7. A. Kostrikin, Introduction à l'Algèbre, Editons mir, Moscou, 1986.

8. K. Zizi, Fonctions d'une variable réelle, Livre 07.
9. M. Zitouni, Algèbre cours de 1^{ière} Année des Universités, Office des publications universitaires, Alger, 1986.