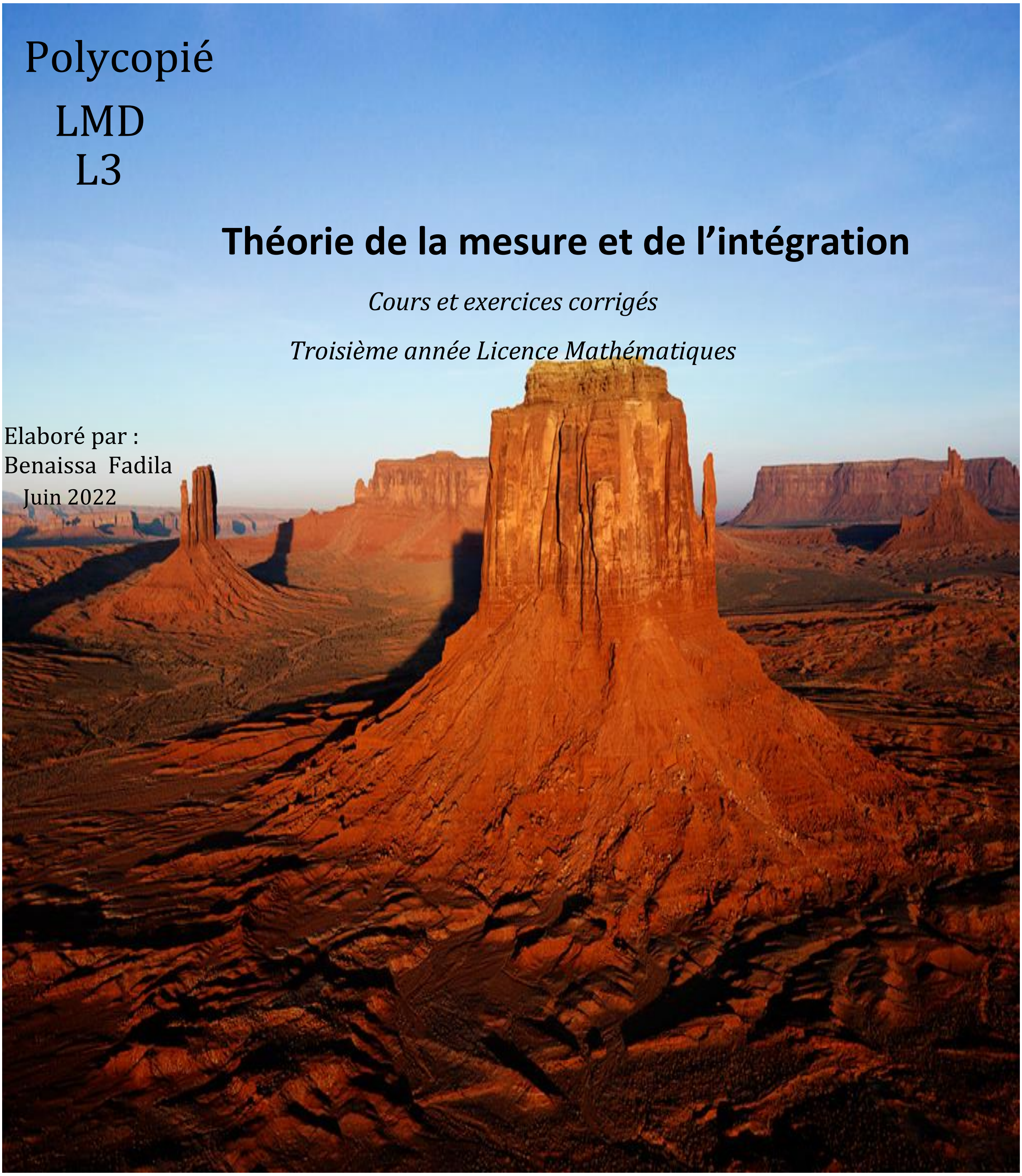
الجمهوريـــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليــــــــم العــــــالي والبحــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
كلية الرياضيات والاعلام الالي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d’Oran Mohamed BOUDIAF

Faculté des Mathématiques et Informatique

***Département** : Mathématiques*



Polycopié

LMD
L3

Théorie de la mesure et de l’intégration

Cours et exercices corrigés

Troisième année Licence Mathématiques

Elaboré par :
Benaissa Fadila
Juin 2022

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran - Mohamed-Boudiaf

Faculté des Mathématiques et Informatiques
Département des mathématiques

Théorie de la mesure et de l'intégration

Cours et exercices corrigés

Destiné aux étudiants de troisième année licence mathématiques

LMD

Présenté par :
Benaissa Fadila

Année Universitaire : 2022 – 2023

Table des matières

Introduction

Ce cours intitulé théorie de mesure et intégration est destiné aux étudiants de troisième année licence. Les étudiants doivent au préalable avoir suivi les cours d'analyse et d'algèbre de première anné licence, le cours de topologie et les cours d'analyse de deuxième année licence. L'objectif de ce cours est de construire une théorie de l'intégration donnant des théorèmes de convergence efficaces, cette théorie permet la définition de l'intégrale d'une fonction par rapport à une mesure, cette nouvelle intégrale appelée intégrale de Lebesgue complète la notion déjà acquise d'intégrale de Riemann et fournit des outils mathématiques de base.

La théorie de mesure est à la base de la théorie des probabilités, qui elle-même sous-tend celle des statistiques, dont les applications s'étendent à tous les domaines de la science. Les probabilités permettent également une activité importante de simulation.

Le chapitre 1, englobe les notions sur la théorie des ensembles nécéssaires à la compréhension de ce cours.
Le chapitre 2, est réservé aux notions de tribus et de mesure.
Le chapitre 3, traite les fonctions mesurables et les variables aléatoires.
Le chapitre 4, les fonctions intégrables.
Le chapitre 5, est reservé au produit d'espaces mesurés et leur application aux probabilités.
A la fin de chaque chapitre, il y a une série d'execices avec leurs corrigés.
En fin quelques sujets d'examens avec leurs corrigés sont mis en annexe.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Indicatrice d'un ensemble

Définition 1.1.1. *Soit A une partie d'un ensemble E. L'indicatrice de A est la fonction notée $\mathbb{1}_A$ et définie de l'ensemble E dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

De la définition 1.1.1, on peut déduire que :

1. $\mathbb{1}_\emptyset$ est l'application nulle,
2. $\mathbb{1}_E$ est l'application constante : $\forall x \in E, x \mapsto 1$,
3. $\sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x) = cardA$ ($cardA$ c'est le nombre d'éléments de A).

Propriétés 1.1.1. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Alors,*

1. $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$,
2. $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$,
3. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$,
4. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$,
5. $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$ *avec* $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$,
6. $\mathbb{1}_{A\triangle B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_{A\cap B}$ *avec* $A\triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

Démonstration 1. *La preuve des propriétés 1., 2. et 3. est laissée en exercices pour le lecteur (il suffit d'appliquer la définition de l'indicatrice).*
Pour la propriété 4. il suffit d'écrire $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ et d'appliquer les propriétés 2. et 3.
Pour la propriété 5. il suffit d'écrire $A \setminus B = A \cap B^c$ et d'appliquer les propriétés 3. et 2.
La propriété 6. est une conséquence des propriétés 4., 3. et 2. ■

1.2 Fonctions et opérations ensemblistes

Définition 1.2.1. *Soient E et F deux ensembles et soit l'application $f : E \to F$. L'image directe de A ($A \subset E$) par l'application f est notée $f(A)$ et définie par :*

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y,\ y = f(x),\ x \in A\},$$

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists\, x \in A \ :\ y = f(x).$$

L'image réciproque de B ($A \subset E$) par l'application f est notée $f^{-1}(B)$ et définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x, f(x) \in B\},$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Proposition 1.2.1. *Soient E et F deux ensembles, B une partie de F, et φ une application de E dans F, alors :*

$$\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ \varphi.$$

Démonstration 2. *Soit $x \in E$*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}(x) = 1 & \Leftrightarrow & x \in \varphi^{-1}(B) \\ & \Leftrightarrow & \varphi(x) \in B \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{1}_B(\varphi(x)) = 1 \\ & \Leftrightarrow & (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(x) = 1. \end{array}$$

En passant à la négation en trouve $\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}(x) = 0 \Leftrightarrow (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(x) = 0$, d'où
$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}(x) = (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(x)$. ∎

Proposition 1.2.2. *Soient A et B deux parties de E ; C et D deux parties de F.*
On a les propriétés suivantes :

1. $f(\emptyset) = \emptyset$;
2. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$,
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
4. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
5. $f(A^c) \neq (f(A))^c$ *en général,*
6. $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$,
7. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
8. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
9. $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$,
10. $f^{-1}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$,
11. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,
12. $ff^{-1}(C) \subset C$, *on a égalité si f est surjective,*

13. $A \subset f^{-1}f(A)$, *on a égalité si* f *est injective.*

Démonstration 3. 1. *Par l'absurde : supposons* $f(\emptyset) \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} f(\emptyset) \neq \emptyset &\Rightarrow \exists y \in f(\emptyset) \\ &\Rightarrow \exists x \in \emptyset : f(x) = y \end{aligned}$$

ce qui est absurde, donc $f(\emptyset) = \emptyset$.

2. *Soit* $y \in F$,

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Rightarrow \exists x \in A; f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in B; f(x) = y \text{ car } A \subset B \\ &\Rightarrow y \in f(B) \\ &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \end{aligned}$$

3. *Par double inclusion :*
   (a) $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$?

   $$(A \subset A \cup B) \wedge (B \subset A \cup B) \Rightarrow (f(A) \subset f(A \cup B)) \wedge (f(B) \subset f(A \cup B)) \text{ d'après 2.}$$

   donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

   (b) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$? *Soit* $y \in F$,

   $$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Rightarrow \exists x \in A \cup B; f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in A \vee \exists x \in B; f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B), \end{aligned}$$

   donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

4. (a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$?

   $$(A \cap B \subset A) \wedge (A \cap B \subset B) \Rightarrow (f(A \cap B) \subset f(A)) \wedge (f(A \cap B) \subset f(A)) \text{ d'après 2.}$$

   donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

   (b) *montrons que* $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ *n'est pas vraie par le raisonnement et par un contre exemple.*
   Soit $y \in F$,

   $$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\Rightarrow \exists x_1 \in A \text{ tq } y = f(x_1) \wedge \exists x_2 \in B \text{ tq } y = f(x_2), \end{aligned}$$

   si $x_1 \neq x_2$ *(*f *n'est pas injective), on a pas le résultat.*
   Contre exemple : Soit f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *défine par* $f(x) = x^2$.
   Soient $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{4, -2, 1, 3\}$ *donc* $A \cap B = \{1, 3\}$, $f(A) = \{1, 4, 9\}$, $f(B) = \{16, 4, 1, 9\}$ *et* $f(A \cap B) = \{1, 9\}$ *on a* $4 \in f(A) \cap f(B)$ *mais* $4 \in f(A \cap B)$.

5. *Montrons que les deux inclusions sont fausses.*

(a) $y \in f(A^c) \Leftrightarrow \exists x \in A^c : y = f(x)$
S'il existe $z \in A; y = f(z)$ *(*f *non injective) alors* $y \in f(A)$ *et donc* $y \notin (f(A))^c$

(b) $y \in (f(A))^c \Leftrightarrow y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x)$
Si on a aussi $\forall x \in A^c, y \neq f(x)$ *(*f *non surjective) alors* $y \notin f(A^c)$.

(c) *Contre exemple : Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *défine par* $f(x) = 1$
et soit $A = \{2\}$ *donc* $A^c = \mathbb{R} - \{2\}$, $f(A^c) = 1$, $f(A) = \{1\}$ *et* $(f(A))^c = \mathbb{R} - \{1\}$.

6. *Soit* $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C) &\Rightarrow f(x) \in C \text{ par définition de l'image réciproque d'un ensemble} \\ &\Rightarrow f(x) \in D \text{ car } C \subset D \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(D). \end{aligned}$$

7. *Par double inclusion*

(a) $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$?

$$(C \cap D \subset C) \wedge (C \cap D \subset D) \Rightarrow (f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C)) \wedge (f^{-1}(C \cap D) \subset f(D)) \text{ d'après 6.}$$

donc $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(b) *montrons que* $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$.
Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) &\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D) \\ &\Rightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \\ &\Rightarrow f(x) \in C \cap D \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D). \end{aligned}$$

8. *Par double inclusion :*

(a) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$?

$$(C \subset C \cup D) \wedge (D \subset C \cup D) \Rightarrow (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C \cup D)) \wedge (f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)) \text{ d'après 6,}$$

donc $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$.

(b) $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$? *Soit* $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) &\Rightarrow f(x) \in C \cup D \\ &\Rightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

9. *Soit* $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(D^c) &\Leftrightarrow f(x) \in D^c \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin D \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(D) \\ &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(D))^c. \end{aligned}$$

10. *Par double inclusion*

(a) $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$? *Soit* $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &\Rightarrow f(x) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f(x) \in A_n \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \in f^{-1}(A_n) \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n). \end{aligned}$$

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \subset f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$?

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}; A_m \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}; f^{-1}(A_m) \subset f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \text{ d'après 6.} \\ &\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \subset f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n). \end{aligned}$$

11. *Par l'absurde : Supposons* $f^{-1}(\emptyset) \neq \emptyset$, *Soit* $x \in f^{-1}(\emptyset)$

$$x \in f^{-1}(\emptyset) \Rightarrow f(x) \in \emptyset \text{ ce qui est absurde.}$$

Pour la preuve des deux dernières propriétés, voir exercice1 du TD 1.

■

1.3 Suite de parties d'un ensemble

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$, une suite des parties d'un ensemble E.

Définition 1.3.1. *On définit les deux parties de* E *suivantes :*

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n,$$

elle est notée aussi $\overline{\lim_n} A_n$ *ou* A^*.

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} A_n,$$

elle est notée aussi $\underline{\lim_n} A_n$ *ou* A_*.

Définition 1.3.2. *Soit* $(B_n)_{n\geq 0}$ *une suite de parties de* E.
La suite $(B_n)_{n\geq 0}$ *est dite croissante si :* $\forall n\ B_n \subset B_{n+1}$.
La suite $(B_n)_{n\geq 0}$ *est dite décroissante si :* $\forall n\ B_{n+1} \subset B_n$.

Proposition 1.3.1. *Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un ensemble E.*

$$\limsup_n A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = +\infty\},$$

$$\liminf_n A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n^c}(x) < +\infty\}.$$

Démonstration 4.

$$\begin{aligned}
x \in \limsup_n A_n &\iff x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n \\
&\iff \forall k \in \mathbb{N}, x \in \bigcup_{n\geq k} A_n \\
&\iff \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq k,\ x \in A_{n_0} \\
&\iff \{n : x \in A_n\}\ infini \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in \liminf_n A_n &\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} A_n \\
&\iff \exists k \in \mathbb{N}, x \in \bigcap_{n\geq k} A_n \\
&\iff \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k,\ x \in A_n \\
&\iff \{n : x \notin A_n\} fini\ \ car\ card\{n : x \notin A_n\} \leq k \\
&\iff \{n : x \in A_n^c\} fini \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n^c}(x) < +\infty.
\end{aligned}$$

■

Propriétés 1.3.1. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de parties d'un ensemble E :*

1. $\limsup_n (A_n \cup B_n) = (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n)$,
2. $\limsup_n (A_n^c) = (\liminf_n A_n)^c$,
3. $\liminf_n (A_n^c) = (\limsup_n A_n)^c$,
4. $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset (\limsup_n A_n) \cap (\limsup_n B_n)$,
5. $\mathbb{1}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}$ *avec* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n} : x \mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{B_n}(x)\}$,
6. $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}$ *avec* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n} : x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{B_n}(x)\}$,

7. $\liminf_n (A_n) \subset \limsup_n (A_n)$.

Démonstration 5. 1.

$$\begin{aligned}
x \in \limsup_n (A_n \cup B_n) &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} (A_n \cup B_n) \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k; x \in (A_n \cup B_n) \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k; (x \in A_n \vee x \in B_n) \\
&\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k; x \in A_n) \vee (\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k; x \in B_n) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n \vee x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} B_n \\
&\Leftrightarrow x \in (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n) \cup (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} B_n) \\
&\Leftrightarrow x \in (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\limsup_n (A_n^c) &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} (A_n^c) \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\bigcap_{n\geq k} A_n)^c \\
&= (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} A_n)^c \\
&= (\liminf_n A_n)^c.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\liminf_n (A_n^c) &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} (A_n^c) \\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\bigcup_{n\geq k} A_n)^c \\
&= (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n)^c \\
&= (\limsup_n A_n)^c.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
x \in \limsup_n (A_n \cap B_n) &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} (A_n \cap B_n) \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq k; x \in (A_{n_0} \cap B_{n_0}) \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq k; (x \in A_{n_0} \wedge x \in B_{n_0}) \\
&\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_1 \geq k; x \in A_{n_1}) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_2 \geq k; x \in B_{n_2}) (n_1 = n_0 = n_2) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n \wedge x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} B_n \\
&\Leftrightarrow x \in (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n) \cap (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} B_n) \\
&\Leftrightarrow x \in (\limsup_n A_n) \cap (\limsup_n B_n).
\end{aligned}$$

5. *Pour tout $x \in E$, on a :*
$$\begin{aligned}
\inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}(x) &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{B_n}(x)\}\\
&= \min_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{B_n}(x)\}\\
&= \begin{cases} 1 & si\ \forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{1}_{B_n}(x)=1\\ 0 & si\ \exists n_0\in\mathbb{N}, \mathbb{1}_{B_{n_0}}(x)=0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 1 & si\ x\in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\\ 0 & si\ x\in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = (\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n)^c\end{cases}\\
&= \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n}(x).
\end{aligned}$$
6. *Pour tout $x \in E$, on a :*
$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{B_n}(x)\}\\
&= \max_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbb{1}_{B_n}(x)\}\\
&= \begin{cases} 1 & si\ \exists n_0\in\mathbb{N}, \mathbb{1}_{B_{n_0}}(x)=1\\ 0 & si\ \forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{1}_{B_n}(x)=0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 1 & si\ x\in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\\ 0 & si\ x\in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n)^c\end{cases}\\
&= \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n}(x).
\end{aligned}$$
7. *Voir TD 1 exercice 3, page 24.*

■

Définition 1.3.3. *(Convergence) On dit que la suite d'ensemble $(A_n)_{n\geq 0}$ converge si*
$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n.$$
On note :
$$\lim A_n = \limsup_n A_n = \liminf_n A_n.$$

Proposition 1.3.2. *Si la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante (resp. décroissante), alors $\lim A_n$ existe et :*
$$\lim A_n = \bigcup_n A_n \quad (Resp. \lim A_n = \bigcap_n A_n).$$

Démonstration 6. 1. *Supposons que $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante (i.e. pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$).*
D'une part on a : $\bigcap\limits_{n\geq k} A_n = A_k$ donc $\liminf_n A_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$.
D'autre part, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n\geq k} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ car $A_n \subset A_{n+1}$

donc

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

2. *Supposons que $(A_n)_{n\geq 0}$ est décroissante (i.e. pour tout n, $A_{n+1} \subset A_n$), on a :*

$$\begin{aligned}
\limsup_n A_n &= \limsup_n B_n^c \text{ avec } B_n = A_n^c \\
&= (\liminf B_n)^c \text{ d'après la propriété 2.} \\
&= (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)^c \text{ d'après ce qui précède car } B_n \text{ est croissante } (A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow A_n^c \subset A_{n+1}^c) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\liminf_n A_n &= \liminf_n B_n^c \text{ avec } B_n = A_n^c \\
&= (\limsup B_n)^c \text{ d'après la propriété 3.} \\
&= (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)^c \text{ d'après ce qui précède car } B_n \text{ est croissante } (A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow A_n^c \subset A_{n+1}^c) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.
\end{aligned}$$

■

1.4 Généralités sur $\overline{\mathbb{R}}$

1.4.1 La droite achevée

On définit un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ que l'on prolonge. Considérons, par exemple l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ & x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

La fonction f est un homéomorphisme (i.e. une application réciproque bicontinue), sa réciproque $f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ est continue. Comme l'intervalle ouvert $]-1,1[$ a pour adhérence dans $\mathbb{R}$ l'intervalle compact $[-1,1]$, l'idée pour construire $\overline{\mathbb{R}}$ est d'ajouter deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$ à $\mathbb{R}$ pour en faire les antécédants de -1 et 1 par un prolongement $\tilde{f}$ de f à $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.4.1. *On appelle droite achevée, l'ensemble*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$, en écrivant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$-\infty$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}, +\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
On définit aussi :

$$\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_- = \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$$

et

$$\tilde{f}_{|\mathbb{R}} := f, \quad \tilde{f}(-\infty) := -1 \text{ et } \tilde{f}(+\infty) := +.1$$

Remarque 1.4.1. *La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$.*

1.4.2 Quelques notations dans $\overline{\mathbb{R}}$

Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on a : $|a| = \sup\{a, -a\}$, $a_+ = \sup\{a, 0\}$ et $a_- = \sup\{-a, 0\}$.

Conséquence : $a = a_+ - a_-$ et $|a| = a_+ + a_-$.

1.4.3 Prolongement des opérations algébriques

1. $\forall a \in]-\infty, +\infty]$, $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$,
2. $\forall a \in [-\infty, +\infty[$, $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$,
3. $\forall a \in]0, +\infty]$, $(+\infty).a = a.(+\infty) = +\infty$,
4. $\forall a \in]0, +\infty]$, $(-\infty).a = a.(-\infty) = -\infty$,
5. $\forall a \in [-\infty, 0[$, $(+\infty).a = a.(+\infty) = -\infty$,
6. $\forall a \in [-\infty, 0[$, $(-\infty).a = a.(-\infty) = +\infty$.

N.B. Pour utiliser $a + (-a) = 0$, nous devons supposer que a est fini.

Proposition 1.4.1. *1. L'application δ définie de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}_+$ par*
$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \delta(x, y) = |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|$ *est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$,*

2. L'application identité $Id : (\mathbb{R}, \delta_{|\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est un homéomorphisme,

3. $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ est un compact,

4. $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration 7. *1. (a) Si $x, y \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \delta(x, y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \\ &\Rightarrow \quad f(x) = f(y) \\ &\Rightarrow \quad x = y \text{ car } f \text{ est bijective} \end{aligned}$$

(b) Si $x \in \mathbb{R}$ et $y = -\infty$, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2$, absurde.

(c) Si $x \in \mathbb{R}$ et $y = +\infty$, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2$, absurde.

(d) Si $x = -\infty$ et $y = +\infty$, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \Leftrightarrow 1 = -1$, absurde.
Dans les trois derniers cas on a montré que $x \neq y \Rightarrow \delta(x, y) \neq 0$ donc la contraposée est aussi vraie.
Les autres propriétés d'une distance proviennent des propriétés de la valeur absolue.

2. *$f = Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, son application réciproque est $f^{-1} = Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = y$*
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue en x_0 si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \delta_{|\mathbb{R}}(x, x_0) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, avec $d(x, y) = |x - y|$.
   Comme $\delta_{|\mathbb{R}}(x, x_0) = |f(x) - f(x_0)| = d(f(x), f(x_0))$, il suffit de prendre $\eta = \epsilon$. Donc f est continue, de la même façon, on montre que f^{-1} est continue.
3. *$\overline{\mathbb{R}} = \tilde{f}^{-1}([-1, 1])$ est un compact comme image réciproque d'un compact par une application continue à valeur dans un espace séparé (on rappelle que tout espace métrique est un espace topologique séparé).*
4. *$\mathbb{R} = \tilde{f}^{-1}]-1, 1[$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.*

■

Corollaire 1.4.1. *$\mathcal{O}_\delta(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} = \mathcal{O}_{|.|}(\mathbb{R})$ où $\mathcal{O}_d(E)$ désigne l'ensemble des ouverts de la topologie définie sur E par la distance d et $\mathcal{O}_d(E) \cap \mathbb{R} = \{O \cap \mathbb{R}, O \in \mathcal{O}_d(E)\}$.*

Démonstration 8. *Soit*

$$\begin{array}{cccc} i : & (\mathbb{R}, |.|) & \to & (\overline{\mathbb{R}}, \delta) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

l'injection canonique qui est continue comme composée de deux applications continues[1].
Pour tout $O \in \mathcal{O}_\delta(\overline{\mathbb{R}})$, $i^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R}; i(x) \in O\} = \{x \in \mathbb{R}; x \in O\} = O \cap \mathbb{R} \in \mathcal{O}_{|.|}(\mathbb{R})$
Réciproquement : Soit O un ouvert de $(\mathbb{R}, |.|)$, comme l'application Id est continue (on a vu que $f = Id$ est un homéomorphisme) alors $Id^{-1}(O) = O$ est un ouvert dans $(\mathbb{R}, \delta_{|\mathbb{R}})$, par définition de la topologie induite sur $\mathbb{R}$ par celle de $\overline{\mathbb{R}}$, il existe ω un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ telque $O = \omega \cap \mathbb{R}$, comme $\mathbb{R}$ est un ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors O est un ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$ (comme intersection de deux ouverts). ■

1.4.4 Topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

La topologie sur $\mathbb{R}_+$, est la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est aussi la topologie induite par $\mathbb{R}$.
Si on considère l'espace métrique $(\overline{\mathbb{R}}_+, \delta_{|\overline{\mathbb{R}}_+})$, $\tilde{f}_{|[0,1]} : ([0, 1], |.|) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \delta_{|\overline{\mathbb{R}}_+})$ est un homéomorphisme, les boules ouvertes de $(\overline{\mathbb{R}}_+, \delta_{|\overline{\mathbb{R}}_+})$ sont les images des boules ouvertes de $([0, 1], |.|)$.

Définition 1.4.2. *1. Soit $O \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, O est un ouvert si pour tout $a \in O$, on a :*

a) *Si $0 < a < \infty$, alors il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.$]a - \epsilon, a + \epsilon[\subset O$,*

1. Si j est l'injection canonique de $(\mathbb{R}, \delta_{|\mathbb{R}})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$, alors $j = i \circ Id$, d'où $i = j \circ Id^{-1}$, comme la topologie trace est la topologie la plus fine rendant l'injection canonique continue, alors j est continue, on a aussi montré que Id est un homéomorphisme, donc Id^{-1} est continue, d'où i est continue.

b) *Si* $a = 0$*, alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.*$[0, \alpha[\subset O$*,*

c) *Si* $a = \infty$*, alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *t.q.*$]\alpha, \infty] \subset O$*.*

Définition 1.4.3. *Pour* $A \subset \mathbb{R}$*, on appelle borne supérieure (resp. inférieure) de* A *le plus petit des majorants (resp. plus grand des minorants) de* A*.*

Propriété 1.4.1. *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, toute partie* A *admet une borne supérieure notée* $\sup A$*, et une borne inférieure notée* $\inf A$*.*

En effet : dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie A est majorée par $+\infty$ et minorée par $-\infty$.
Si $A = \emptyset$, on peut écrire $A =]x, x]$ on a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \emptyset$; $x < y \leq x$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, x est un majorant du $\emptyset$, par définition de la borne supérieure, $\sup \emptyset = -\infty$.
De même tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ est un minorant du $\emptyset$, et par définition de la borne inf, on obtient : $\inf \emptyset = +\infty$.
C'est le seul cas où la borne sup est inférieur à la borne inf.

Proposition 1.4.2. *Pour tout* a *et* b *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, tel que* $a < b$*, on peut toujours trouver un* c *dans* $\mathbb{R}$ *et même dans* $\mathbb{Q}$ *vérifiant* $a < c < b$*.*

Démonstration 9.
1. *Si* a *et* b *sont finis donc* $a, b \in \mathbb{R}$*, le résultat est connu (voir cours analyse 1).*
2. *Si* $a = -\infty$ *et* b *est fini,* $a < b - 1 < b$*, d'après le premier cas, il exite* c *dans* $\mathbb{Q}$ *telque* $b - 1 < c < b$*.*
3. *Si* a *est fini et* $b = +\infty$*,* $a < a + 1 < b$*, d'après le premier cas, il exite* c *dans* $\mathbb{Q}$ *telque* $a < c < a + 1$*.*

■

Proposition 1.4.3. *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *toute suite croissante (resp. décroissante) admet pour limite sa borne supérieur (resp. sa borne inférieure).*

Définition 1.4.4. *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels, on définit la limite* inf *et la limite* sup *comme suit :*

$$\liminf_n u_n := \sup_n (\inf_{k \geq n} u_k)$$

$$\limsup_n u_n := \inf_n (\sup_{k \geq n} u_k).$$

Remarque 1.4.2.
Soient $\begin{cases} v_n &= \inf_{k \geq n} u_k \\ w_n &= \sup_{k \geq n} u_k \end{cases}$,
donc

$$v_0 = \inf\{u_0, u_1, \ldots\}$$

$$v_1 = \inf\{u_1, u_2, \ldots\}$$

$$v_2 = \inf\{u_2, u_3, \ldots\}$$

$$\vdots$$

d'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ainsi

$$\lim_n v_n = \sup_n v_n = \liminf_n u_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

De même, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc

$$\lim_n w_n = \inf_n w_n = \limsup_n u_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Proposition 1.4.4. *Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

1. $\limsup_n u_n$ *est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.*
2. $\liminf u_n$ *est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.*

Démonstration 10. *Supposons la suite (u_n) bornée. Montrons que $a = \limsup_n u_n$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), il suffit de trouver une sous suite de (u_n) qui converge vers a.*
Comme les ensembles $A_n := \{u_k; k \geq n\}$ sont tous majorés (puisque la suite l'est), on peut bien définir pour chaque n le nombre $\sup(A_n)$. Comme de plus $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\sup(A_n))_{n\geq 0}$ est bien décroissante. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi minorée, la suite $(\sup(A_n))_{n\geq 0}$ est une suite décroissante minorée, donc convergente vers une limite l.

Considérons A_0, d'après la définition de la borne supérieure,
$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\sup A_0 - \epsilon < u_{N_0} \leq \sup A_0$,
en particulier pour $\epsilon = 1$ on a :

$$\boxed{\sup A_0 - 1 < u_{N_0} \leq \sup A_0}$$

Considérons A_{N_0+1}, pour la même raison
$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, N_1 > N_0 \in \mathbb{N}$ *telque :*$\sup A_{N_0+1} - \epsilon < u_{N_1} \leq \sup A_{N_0+1}$
en particulier pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, on a :

$$\boxed{\sup A_{N_0+1} - \frac{1}{2} < u_{N_1} \leq \sup A_{N_0+1}}$$

Considérons A_{N_1+1}, pour la même raison
$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, N_2 > N_1 \in \mathbb{N}$ *telque :*$\sup A_{N_1+1} - \epsilon < u_{N_2} \leq \sup A_{N_1+1}$
en particulier pour $\epsilon = \frac{1}{3}$, on a :

$$\boxed{\sup A_{N_1+1} - \frac{1}{3} < u_{N_2} \leq \sup A_{N_1+1}}$$

$$\vdots$$

Par récurrence, on consruit une suite strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que $\varphi(0) = N_0, \varphi(1) = N_1, \dots \varphi(p) = N_p, \dots$, telle que

$$\boxed{\sup_{k\geq\varphi(n-1)+1} u_k = \sup A_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n} < u_{\varphi(n)} \leq \sup A_{\varphi(n-1)+1}}.$$

Les deux suites $(\sup A_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n})_n$ *et* $(\sup A_{\varphi(n-1)+1})_n$ *tendent toutes les deux vers* l*, quand* n *tend vers* $+\infty$ *(noter que* $\varphi(n) \geq n$*), il en est de même pour* $(u_{\varphi(n)})_n$*, et nous avons ainsi trouvé une suite extraite de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *convergeant bien vers* l*. Le nombre* l *est valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$*.*

Soit $a = \limsup_n u_n$*.*
On montre que a *est supérieur ou égal à toutes les valeurs d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*
Soit b *une valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Il existe donc :* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que* $\varphi(n) \to +\infty$ *et* $u_{\varphi(n)} \to b$ *quand* $n \to +\infty$*. Comme* $a_{\varphi(n)} > u_{\varphi(n)}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a donc, en passant à la limite quand* $n \to +\infty$*,* $a \geq b$*.* a *est donc la plus grande valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres réels non majorée, c'est à dire* $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}; u_n > M$
Pour $M = 1$*,* $\exists n_1 \in \mathbb{N}; u_{n_1} > 1$*,*
la suite $(u_n)_{n>n_1}$ *est encore une suite non majorée (c'est la suite d'origine à laquelle, on a enlevé un nombre fini de termes),*
donc $\exists n_2 > n_1$ *;* $u_{n_1} > 2$*, etc....on a pour tout* k*, la suite* $(u_n)_{n>n_k}$ *est non majorée donc* $\exists n_{k+1} > n_k$ *;* $u_{n_{k+1}} > k+1$*,*
cette sous suite tend vers $+\infty$ *car* $u_{n_{k+1}} > k+1$*.*
Le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres réels non minorée, est laissé en exercice (on adapte le raisonnement précédent).* ■

Proposition 1.4.5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$ *et* $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction monotone et continue. Alors :*

$$f(\overline{\lim}_n(u_n)) = \overline{\lim}_n f(u_n) \text{ et } f(\underline{\lim}_n(u_n)) = \underline{\lim}_n f(u_n) \text{ si } f \text{ est croissante },$$

$$f(\overline{\lim}_n(u_n)) = \underline{\lim}_n f(u_n) \text{ et } f(\underline{\lim}_n(u_n)) = \overline{\lim}_n f(u_n) \text{ si } f \text{ est décroissante }.$$

Démonstration 11. *Supposons* f *croissante, soit* $w_n = \sup_{k\geq n} u_k$*.*
Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a par continuité de* f *:*

$$\begin{aligned} f(\limsup_n u_n) &= f(\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k) \\ &= f(\lim_{n\to+\infty} w_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(w_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(\sup_{k\geq n} u_k). \end{aligned}$$

Montrons par double inégalité que $f(\sup_{k\geq n} u_k) = \sup_{k\geq n} f(u_k)$ *:*
Soit $n \in \mathbb{N}$*, pour tout* $k \geq n$*, on a :*

$$\begin{aligned} u_k \leq w_n &\Rightarrow f(u_k) \leq f(w_n) \\ &\Rightarrow \sup_{k\geq n} f(u_k) \leq f(w_n) \\ &\Rightarrow \sup_{k\geq n} f(u_k) \leq f(\sup_{k\geq n} u_k). \end{aligned}$$

Par définition de la borne sup, on a $\forall \epsilon > 0, \exists k \geq n; w_n - \epsilon < u_k \leq w_n$ *en particulier pour* $\epsilon = \frac{1}{k}$, *on a :* $\exists k \geq n$,

$$\begin{aligned} w_n - \tfrac{1}{k} < u_k \leq w_n & \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} u_k = w_n \\ & \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(u_k) = f(w_n), \end{aligned}$$

c'est à dire :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, |f(u_k) - f(w_n)| \leq \epsilon$,
d'autre part on a :

$$\begin{aligned} f(w_n) &= f(w_n) - f(u_k) + f(u_k) \\ &\leq |f(w_n) - f(u_k)| + f(u_k) \\ &\leq \epsilon + f(u_k) \\ &\leq \epsilon + \sup_{k \geq n} f(u_k). \end{aligned}$$

Comme ϵ *est quelconque on déduit que* $f(w_n) \leq \sup_{k\geq n} f(u_k)$, *c'est à dire :* $f(\sup_{k\geq n} u_k) \leq \sup_{k\geq n} f(u_k)$ *pour* $\liminf$, *on adopte le même raisonnement. pour* f *décroissante, on pose* $f = -g$, *on se ramène au cas de* f *croissante.* ■

Propriétés 1.4.1. *1. Si* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *sont deux suites de nombres réels, on a :*

$$\forall n, a_n \leq b_n \Longrightarrow \begin{cases} \inf a_n & \leq \inf b_n \\ \sup a_n & \leq \sup b_n \end{cases},$$

2. $\liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n$ *(i.e.* $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k \leq \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k$*),*

3. $\liminf_n (-u_n) = -\limsup_n u_n$.

Démonstration 12. *La preuve de ses propriétés découle des propriétés suivantes vues en première année :*

1. $\inf(-A) = -\sup(A)$,
2. $\sup(-A) = -\inf(A)$,
3. $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$,
4. $\forall n, u_n \leq v_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$,

et en remarquant que les ensembles $A_n = \{u_k; k \geq n\}$ *vérifient* $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ *et bien sûr en utilisant la définition de* $\limsup$ *et* $\liminf$ *d'une suite d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Proposition 1.4.6. $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \lim_n u_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration 13. *Comme* $\overline{\mathbb{R}}$ *est un espace métrique alors :*
$\lim_n u_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow l$ *est la seule valeur d'adhérence de* $(u_n)_n$, *et d'après la proposition*(1.4.4), *on a* $\liminf_n u_n = l = \limsup_n u_n$.
Réciproquement : Comme $\overline{\mathbb{R}}$ *est compact, d'après le théorème de Bolzano Weistrauss,* $(u_n)_n$ *admet au moins une valeur d'adhérence. D'autre part,*

$$\begin{aligned} \liminf_n u_n = l = \limsup_n u_n & \Rightarrow (u_n)_n \text{ admet une seule valeur d'adhérence} \\ & \Rightarrow (u_n)_n \text{ converge vers } l \text{ car } \overline{\mathbb{R}} \text{ est compact.} \end{aligned}$$

■

Définition 1.4.5. *Soit $(f_n)_{f\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définie sur un ensemble Ω. On définit $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ somme suit :*

$$\limsup_n f_n \; : \; x \mapsto \limsup_n f_n(x)$$
$$\liminf_n f_n \; : \; x \mapsto \liminf_n f_n(x)$$

Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x) = f(x)$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur Ω vers f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 1.4.7. *On a les propriétés suivantes :*

$$\limsup_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup_n A_n} \text{ et } \liminf_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf_n A_n}$$

Démonstration 14. *Découle de la définition précédante et des propriétés 1.3.1.* ■

1.5 Les ensembles dénombrables

Définition 1.5.1. *Soient E et F deux ensembles, on dit que E est équipotent à F (on note cardE=cardF), s'il existe une bijection entre E et F.*

Remarque : L'équipotence est une relation d'équivalence.

Exemple 1.5.1. *$\mathcal{P}(E)$ est équipotent à $\{0,1\}^E$ ($\{0,1\}^E$ est l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$).*

En effet, l'application f définie de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$, par $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(A) = \mathbb{1}_A$ est une bijection : L'injection provient de la propriété 1. de la fonction indicatrice.
Pour la surjection : Soit $g : E \to \{0,1\}$ une application, il existe $A \in E$ telle que $g = \mathbb{1}_A$, On prend $A = g^{-1}\{1\} = \{x \in E; g(x) = 1\}$.

Exemple 1.5.2. $\mathbb{N}$ *et* $2\mathbb{N}$ *sont équipotents. En effet :*
$\begin{array}{lccc} f: & \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 2n \end{array}$ *est une application bijective.*

Lemme 1.5.1. *(de Cantor) Il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$, donc E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents.*

Démonstration 15. *Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application quelconque, montrons que cette dernière n'est pas surjective.*
Soit $A = \{x \in E; x \notin f(x)\}$ Montrons que cette ensemble qui est un élément de $\mathcal{P}(E)$, n'a pas d'antécédent par la fonction f.
$A \subset E$ par définition de A donc $A \in \mathcal{P}(E)$.
Supposons (par l'absurde) qu'il existe $a \in E$ telque A=f(a).
$a \in A \Leftrightarrow a \in f(a) \Leftrightarrow a \notin A$ contradiction donc notre hypothèse est fausse c'est à dire $\forall a \in E; f(a) \neq A$ et donc f n'est pas surjective. ■

Notation : a) S'il existe une injection de E dans F, on notera celà par : $cardE \leq cardF$.
b) Si $cardE \leq cardF$ et E et F ne sont pas équipotents, on notera $cardE < cardF$.

Théorème 1.5.1. *(de Bernestein)*

1. *S'il existe une injection de E dans F, alors il existe une surjection de F dans E.*
2. *S'il existe une surjection de E dans F, alors il existe une injection de F dans E.*
3. *S'il existe une injection de E dans F, et une injection de F dans E, alors E et F sont équipotents.*

Corollaire 1.5.1. *La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur les cardinaux.*
Si $E \subset F$ alors $cardE \leq cardF$.

Définition 1.5.2. *(ensemble fini) Un ensemble E est fini s'il est vide ou si on peut l'écrire sous la forme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec les x_i, 2 à 2 disjoints et $n \in \mathbb{N}$. Ou encore :*
On dit q'un ensemble E est fini, s'il est vide, ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telque E soit en bijection avec $\{1, 2, \ldots, n\}$. On dit que E a n éléments et on note $cardE = n$. $Card\emptyset = 0$ (l'ensemble vide a zéro éléments)

Proposition 1.5.1. *Soit E un ensemble, n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$, s'il existe une bijection de E dans $\{1, 2, ..., n\}$ et une bijection de E dans $\{1, 2, ..., p\}$, alors $n = p$. Ainsi le cardinal d'un ensemble est défini de manière unique.*

Proposition 1.5.2.

1. *Toute partie A d'un ensemble fini est finie et $cardA \leq cardE$*
2. *Soit $f : E \to F$ une application.*
   (a) *Si f est injective et F est fini, alors E est fini et $cardE \leq cardF$.*
   (b) *Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et $cardE \geq cardF$.*

Proposition 1.5.3. *Soit E un ensemble fini. Si A est un sous ensemble de E,avec $A \neq E$, il n' y a pas d'injection de E dans A.*

Démonstration 16. *Soit $A \subset E$. S'il existe une injection de E dans A, alors d'après la proposition 1.5.2; $cardA \leq cardE \leq cardA$ donc $cardA = cardE$, et par unicité du cardinal, $A = E$, contradiction avec l'hypothèse.* ∎

Définition 1.5.3. *(Ensemble infini)*
Un ensemble E est dit infini, s'il n'est pas fini.

Proposition 1.5.4. *S'il existe un sous ensemble strict A, d'un ensemble E telque, il existe une injection de E dans A, alors E est infini.*

Démonstration 17. *C'est la contraposée de la proposition précédente.*

Exemple 1.5.3. $\mathbb{N}$ *est infini. En effet :*
$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}-\{0\} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$ *est une application injective, et $\mathbb{N} - \{0\}$ est un sous ensemble strict de* $\mathbb{N}$.

Proposition 1.5.5. *S'il existe une injection de E dans F et si E est infini, alors F est infini. Dés qu'un ensemble contient une partie infinie, est lui même infini.*

Proposition 1.5.6. *Un ensemble E est infini, si et seulement si, il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E*

Exemple 1.5.4. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *sont infinis.*
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *est infini, et* $card\mathbb{N} < card\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Définition 1.5.4. *(Ensemble dénombrable)*

1. *Un ensemble E est dit dénombrable, s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.*
2. *L'ensemble E est dit infini dénombrable si E est équipotent à $\mathbb{N}$.*
3. *Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Exemple 1.5.5. $\mathbb{Z}$, *est infini dénombrable. En effet :*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & 2n & \mapsto & n \\ & 2n+1 & \mapsto & -n-1 \end{array} \quad \textit{est une application bijective}$$

D'après le théorème 1.5.1 de Berstein on a la définition équivalente suivante :

Définition 1.5.5. *Un ensemble E est dit dénombrable, s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.*

Exemple 1.5.6. $[0,1]$ *n'est pas dénombrable, en effet :*
Soit $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ une application, par définition d'une application, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in [0,1]$; les images f(n) sont de la forme 0,...... donc, on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0, a_{00} \dots \\ f(1) & = & 0, a_{01}a_{11}a_{21}a_{31} \dots \\ f(2) & = & 0, a_{02}a_{12}a_{22}a_{32} \dots \\ f(3) & = & 0, a_{03}a_{13}a_{23}a_{33} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(n) & = & 0, a_{0n}a_{1n}a_{2n}a_{3n} \dots a_{nn} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

On choisit un élément x de $[0,1]$ telque $x = 0, b_1b_2b_3 \dots$ avec $b_i \neq a_{ii}$, cet élément n'a pas d'antécédant dans $\mathbb{N}$ par une fonction quelconque f, donc, il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$

Proposition 1.5.7.

1. *Si $A = \{x_i, i \in I\}$ avec I est dénombrable alors A est dénombrable.*
2. *Toute partie A d'un ensemble dénombrable E est dénombrable.*
3. *Si A est infini, E est dénombrable et $A \subset E$, alors E est infini dénombrable.*

Exemple 1.5.7. *: Comme $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est dénombrable alors $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.*

Exemple 1.5.8. *: Comme $[0,1] \subset \mathbb{R}$ et $[0,1]$ n'est pas dénombrable alors $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. car : Si $\mathbb{R}$ était dénombrable, d'après la proposition ci dessus, $[0,1]$ le serait aussi.*

Démonstration 18.

1. $\begin{array}{rccc} S: & I & \to & A \\ & i & \mapsto & x_i \end{array}$ *est une application surjective, comme I est dénombrable,il existe une surjection, $S_I : \mathbb{N} \to I$ donc la composée $S \circ S_I : \mathbb{N} \to A$ est surjective, d'où A est dénombrable.*
2. $\begin{array}{rccc} i_A: & A & \to & E \\ & a & \mapsto & a \end{array}$ *est une application injective*
   Comme E est dénombrable il existe une injection $i : E \to \mathbb{N}$, on a donc l'application composée $i \circ i_A : A \to \mathbb{N}$ qui est injective d'où A est dénombrable.

■

Corollaire 1.5.2. *Une réunion dénombrables, d'ensembles dénombrable, est elle même dénombrable. Autrement dit si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles dénombrables avec I dénombrable, alors $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est dénombrable.*

Démonstration 19. *Comme pour tout $i \in I$, A_i est dénombrable, on peut écrire :*
$\forall i \in I$, $A_i = \{x_{n,i}, n \in \mathbb{N}\}$, alors $A = \{x_{n,i}, (n,i) \in \mathbb{N} \times I\}$ est dénombrable car $\mathbb{N} \times I$ est dénombrable. ■

Corollaire 1.5.3. *Si les ensembles, $E_1, E_2, ..., E_n$ sont dénombrables, alors le produit, $E_1 \times E_2 \times .... \times E_n$ est dénombrable.*
Si tous les E_i sont non vides, alors $E_1 \times E_2 \times .... \times E_n$ est infini dénombrable, dès que l'un deux est infini dénombrable.

Démonstration 20. *Par récurence sur n :*
Soit $P(n) : E_1, E_2, ..., E_n$ sont dénombrables$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}$ est dénombrable.

$$\text{Pour } n=2 \left\{ \begin{array}{lll} E_1 \text{ est dénombrable} & \Rightarrow & \exists i_1 : E_1 \to \mathbb{N} \text{ injective} \\ E_2 \text{ est dénombrable} & \Rightarrow & \exists i_2 : E_2 \to \mathbb{N} \text{ injective} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rccc} i: & E_1 \times E_2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & (i_1(x), i_2(y)) \end{array} \right.$$

est injective.
On suppose la propriété vraie à l'ordre n et on démontre à l'ordre n+1, c'est à dire, on démontre que $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie (facile à faire). ■

Exemple 1.5.9. *: Comme $\mathbb{N}$ est dénombrable $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, aussi, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.*

Exemple 1.5.10. *: Comme $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables, alors $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.*

Conséquence :
$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{Q} \\ & (p,q) & \mapsto & \frac{p}{q} \end{array}$ est une application surjective donc , d'après le théorème de Berstein, il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, comme ce dernier est dénombrable, alors $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

1.6 Exercices

1.6.1 Enoncés

Exercice 1. *Soit A un sous ensemble d'un ensemble E, et soit B un sous ensemble d'un ensemble F, montrer les deux propriétés suivantes :*

1. $ff^{-1}(C) \subset C$, *on a égalité si f est surjective,*
2. $A \subset f^{-1}f(A)$, *on a égalité si f est injective.*

Exercice 2.
1. *Montrer que les suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(A'_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définies par : $A_n = [-\frac{1}{n}, 1]$ et $A'_n =]-\frac{1}{n}, 1]$ admettent des limites et montrer que leur limite est égale à* $[0, 1]$
2. *Donner un exemple de suite non constante de parties de $\mathbb{R}$ dont la limite est* $]0, 1]$.

Exercice 3. *Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de E. On pose*
$S_k = \bigcup_{n\geq k} A_n$ *et* $T_k = \bigcap_{n\geq k} A_n$.
Démontrer ce qui suit :

1. $(T_k)_{k\geq 0}$ *est croissante.*
2. $(S_k)_{k\geq 0}$ *est décroissante.*
3. $\liminf A_n \subset \limsup A_n$

Exercice 4. *Soit la suite* $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$.

1. *De quelle partie de $\mathbb{N}$ la fonction $n \mapsto u_n$ est elle la fonction indicatrice ?*
2. *Calculer* $\liminf u_n$ *et* $\limsup u_n$.

Exercice 5. *(supplémentaire) Montrer que :*
$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[,\ ]a, b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]a, b + \frac{1}{n}[$$
$$[a, b[= \bigcap_{n=1}^{+\infty}]a - \frac{1}{n}, b[,\ ]a, b[= \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a, b - \frac{1}{n}[\text{ et }] - \infty, a] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, a].$$

1.6.2 Corrigés

Exercice 1. , *Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $C \subset F$*

1. $f(f^{-1}(C)) \subset C$? *Soit* $y \in f(f^{-1}(C))$

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(C)) &\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(C); y = f(x) \text{ par définition de } f(A) \text{ avec } A = f^{-1}(C) \\ &\Rightarrow f(x) \in C \text{ par définition de } f^{-1}(C) \\ &\Rightarrow y \in C \text{ car } y = f(x). \end{aligned}$$

Supposons f surjective et montrons l'inclusion inverse.

$$\begin{aligned} y \in C &\Rightarrow \exists x \in E; y = f(x) \text{ car } f \text{ est surjective} \\ &\Rightarrow f(x) \in C \text{ car } f(x) = y \text{ et } y \in C \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ par définition de } f^{-1}(C) \\ &\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(C)) \text{ par définition de } f^{-1}(C) \\ &\Rightarrow y \in f(f^{-1}(C)) \text{ car } y = f(x). \end{aligned}$$

Si f n'est pas surjective, on a pas toujours l'égalité ; par exemple, soit $C = \{1, 4, 9, -1\}$ et :

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

on a : $f^{-1}(C) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ et $f(f^{-1}(C)) = \{1, 4, 9\} \neq C$.

2. *$A \subset f^{-1}f(A)$?*

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ par définition de } f(A) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \text{ par définition de } f^{-1}(B) \text{ avec } B = f(A). \end{aligned}$$

Supposons f injective et montrons l'inclusion inverse.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(A)) &\Leftrightarrow f(x) \in f(A) \text{ par définition de } f^{-1}(D) \text{ avec } D = f(A) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in A; f(x) = f(z) \text{ par définition de } f(A) \\ &\Rightarrow x = z \text{ car } f \text{ est injective} \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Si f n'est pas injective, on peut avoir $x \neq z$ et $x \notin A$, par exemple :
soit $A = \{1, 2, 3, -1\}$ et

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R} &\Rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

On a : $f(A) = \{1, 4, 9\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3\} \neq A$.

Exercice 2. 1. *Comme $\frac{-1}{n} < \frac{-1}{n+1} < 1$, alors $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \geq 1$, c'est à dire $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante, donc elle est convergente et sa limite est donnée d'après le cours par $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$.*

Montrons que $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n = [0, 1]$; par double inclusion.

Commme $\frac{-1}{n} < 0 < 1$ pour tout $n \geq 1$, alors $[0, 1] \subset [\frac{-1}{n}, 1]$,pour tout $n \geq 1$ donc $[0, 1] \subset \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$.

Inversement

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n\geq 1} A_n &\Rightarrow \forall n \geq 1, x \in A_n \\ &\Rightarrow \forall n \geq 1, \tfrac{-1}{n} \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

il suffit de montrer que $x \geq 0$, par l'absurde, supposons que $x < 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \tfrac{-1}{n} \leq x \leq 1 &\Rightarrow \forall n \geq 1, -1 \leq \tfrac{-1}{n} \leq x < 0 \\ &\Rightarrow \forall n \geq 1, 1 \geq \tfrac{1}{n} \geq -x \\ &\Rightarrow \forall n \geq 1, 1 \leq n \leq \tfrac{-1}{x} \end{aligned}$$

absurde pour $n = [\frac{-1}{x}] + 1$, on a $n > \frac{-1}{x}$ donc $x \geq 0$, d'où $x \in [0, 1]$.

2. *La suite $(B_n)_{n\geq 1}$, définie par $B_n = [\frac{1}{n}, 1]$ est une suite croissante, sa limite est donnée par*

$\lim_{n\to+\infty} = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. *En adaptons le raisonnement précédent, à la suite* $(B_n)_{n\geq 1}$, *on montre que* $\bigcup_{n\geq 1} B_n =]0,1]$.

Exercice 3. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a :*

1. $T_k = A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap A_{k+3} \cap \ldots$ *et* $T_{k+1} = A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap A_{k+3} \cap \ldots$ *donc* $T_k = A_k \cap T_{k+1} \subset T_{k+1}$, *par suite* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
2. *On a aussi,* $S_k = A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup A_{k+3} \cup .....$ *et* $S_{k+1} = A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup A_{k+3} \cup .....$ *donc* $S_k = A_k \cup S_{k+1} \supset T_{k+1}$, *d'où* $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
3. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a* $T_k \subset S_k$ *et* $\forall n \geq k$, $T_k \subset T_n \subset S_n \subset S_k$ *Donc*
   $\forall n \geq k$, $T_n \subset S_k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *c'est à dire :*
   $T_0 \subset S_0, T_1 \subset S_0, T_2 \subset S_0, T_3 \subset S_0, \ldots$
   $T_1 \subset S_1, T_2 \subset S_1, T_3 \subset S_1, T_4 \subset S_1, \ldots$*avec* $T_0 \subset T_1$
   $T_2 \subset S_2, T_3 \subset S_2, T_4 \subset S_2, T_5 \subset S_2, \ldots$*avec* $T_0 \subset T_1 \subset T_2$.
   $\vdots$
   Donc
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k \subset S_k,$$
   c'est à dire
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \liminf_n A_n \subset S_k,$$
   d'où
   $$\liminf_n A_n \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_k,$$
   c'est à dire
   $$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n.$$

Exercice 4. *On remarque que* $u_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ est pair} \\ 1 & si \quad n \text{ est impair} \end{cases}$
Donc $u_n = \mathbb{1}_A(n)$, *avec* A *est l'ensemble des entiers naturels impairs.*
$\liminf u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{k\geq n} u_k) = 0$ *car* $\inf_{k\geq n} u_k = \inf\{0,1,0,1,\ldots\} = 0$
et $\limsup u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{k\geq n} u_k) = 1$ *car* $\sup_{k\geq n} u_k = \sup\{0,1,0,1,\ldots\} = 1$.

Chapitre 2

Tribus et Mesures

2.1 Tribu ou σ algèbre

Définition 2.1.1. *Soient E un ensemble, T une famille de parties de E ($T \subset \mathcal{P}(E)$). La famille T est une tribu sur E si T vérifie :*

i) $E \in T$.

ii) *T est stable par passage au complémentaire, c'est à dire que pour tout $A \in T$, on a $A^c = \complement_F A \in T$.*

iii) *T est stable par union dénombrable, c'est à dire pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in N} \subset T$, on a $\bigcup_{n\in N} A_n \in T$.*

Remarque 2.1.1. *Noter que*

1. *De i) et ii), on déduit que $\emptyset \in T$.*
2. *La stabilité par passage au complémentaire et la stabilité par union dénombrable donne la stabilité par intersection dénombrable.*

Propriétés 2.1.1. *Soit T une tribu sur un ensemble E, alors :*

1. $\forall A, B \in T,\ A \cup B \in T$ *(i.e. T est stable par union finie),*
2. $\forall A, B \in T,\ A \cap B \in T$ *(i.e. T est stable par intersection finie),*
3. $\forall A, B \in T,\ A \backslash B = A \cap B^c \in T$,
4. $\forall A, B \in T,\ A \triangle B \in T$,
5. $\forall (A_n)_n \subset T,\ \liminf A_n \in T$,
6. $\forall (A_n)_n \subset T,\ \limsup A_n \in T$.

Démonstration 21. 1. $\forall A, B \in T,\ A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup \ldots = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ *avec* $A_0 = A,\ A_1 = B$ *et* $A_n = \emptyset$, *pour* $n \geq 2$.

2. *$\forall A, B \in T$, $A \cap B = A \cap B \cap E \cap \ldots \cap E \cap \ldots = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ avec $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = E$, pour $n \geq 2$.*
3. *$\forall A, B \in T$, $A \backslash B = A \cap B^c \in T$ d'après la propriété 2. et la définition d'une tribu.*
4. *$\forall A, B \in T$, $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \in T$ d'après la propriété 3. et 1.*
5. *$\forall (A_n)_n \subset T$, $\liminf A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} A_n \in T$ d'après la stabilité par union et par intersection dénombrables de T.*
6. *$\forall (A_n)_n \subset T$, $\limsup A_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n \in T$ d'après la stabilité par union et par intersection dénombrables de T.*

■

Exemples de tribus :

1. $T = \{\emptyset, E\}$ est la plus petite tribu de parties de E.
2. $\mathcal{P}(E)$ est la plus grande tribu de parties de E.
3. Tribu trace : Si T une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$, alors $T_F = \{A \cap F; A \in T\}$ est une tribu sur F, appelée tribu trace de T sur F.
   En effet :
   (a) $F = E \cap F \in T_F$ car $E \in T$..
   (b) Soit $B \in T_F$,
   $$\begin{array}{rcl} B \in T_F & \Rightarrow & B = A \cap F \text{ avec } A \in T \\ & \Rightarrow & \complement_F B = \complement_F A \cup \complement_F F \\ & \Rightarrow & \complement_F B = (F \backslash A) \cup \emptyset \\ & \Rightarrow & \complement_F B = A^c \cap F \in T, \text{ car } A^c \in T. \end{array}$$
   (c) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T_F$,
   $$\begin{array}{rcl} (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T_F & \Rightarrow & B_n = A_n \cap F \text{ avec } A_n \in T \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap F) \\ & \Rightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n\in\mathbb{N}} = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap F \in T_F, \text{ car } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T. \end{array}$$
4. Tribu image directe : Si T est une tribu sur E, $f : E \to F$ une application, alors $T^{'} = \{B \subset F, f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu sur F appelée tribu image directe. En effet :
   (a) $f^{-1}(F) = E \in T$, donc $F \in T'$.
   (b) Soit $B \in T'$,

$$
\begin{aligned}
B \in T' &\Rightarrow \begin{cases} B \subset F \\ f^{-1}(B) \in T \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} B^c = \complement_F B \subset F \\ (f^{-1}(B))^c \in T \text{ car } T \text{ est une tribu} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} B^c \subset F \\ f^{-1}(B^c) \in T \text{ car } f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \end{cases} \\
&\Rightarrow B^c \in T'.
\end{aligned}
$$

(c) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T'$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
B_n \in T' &\Rightarrow \begin{cases} B_n \subset F \\ f^{-1}(B_n) \in T \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset F \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in T \text{ car } T \text{ est une tribu} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset F \\ f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \in T \text{ car } f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \end{cases} \\
&\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T'.
\end{aligned}
$$

5. Tribu image réciproque : Si $T^{'}$ est une tribu sur F, $f : E \to F$ une application, alors $\mathcal{T} = f^{-1}(T^{'}) = \{f^{-1}(B), B \in T^{'}\}$ est une tribu sur E, appelée tribu image réciproque. En effet :
   (a) $E \in \mathcal{T}$ car $E = f^{-1}(F)$ et $F \in T'$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{T}$,

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{T} &\Rightarrow A = f^{-1}(B) \text{ où } B \in T' \\
&\Rightarrow A^c = (f^{-1}(B))^c \\
&\Rightarrow A^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{T} \text{ car } B^c \in T'.
\end{aligned}
$$

   (c) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
A_n \in \mathcal{T} &\Rightarrow A_n = f^{-1}(B_n) \text{ où } B_n \in T' \\
&\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \\
&\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \in \mathcal{T} \text{ car } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \in T'.
\end{aligned}
$$

Conséquence : $\mathcal{T} = f^{-1}(T') \subset T$: En effet $C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \exists B \in T'; C = f^{-1}(B) \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in T; C = f^{-1}(B)$ ce qui implique $C \in T$.

Définition 2.1.2. *(Langage probabiliste) Soient E un ensemble quelconque et T une tribu. on appelle E univers des possibles, les éléments de E les éventualités, et les éléments de T les événements.On appelle événement élémentaire un singleton de T. On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.*

Définition 2.1.3. *(Ensemble mesurable- probabilisable, partie mesurable- probabilisable) Soient E un ensemble, et T une tribu sur E. Le couple (E, T) est appelé espace mesurable (ou probabilisable). Les parties de E qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de T, sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables)*

Définition 2.1.4. *(Algèbre) Soient E un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille de parties de E, la famille $\mathcal{A}$ est une algèbre sur E, si elle vérifie :*

i) *T est stable par passage au complémentaire, c'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.*

ii) *T est stable par union finie, c'est à dire pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a : $A \cup B \in \mathcal{A}$.*

Remarque 2.1.2. *De i) et ii), on déduit que $\emptyset, E \in T$.*

Remarque 2.1.3. *Toute tribu est une algèbre.*

Proposition 2.1.1. *(Stabilité par intersection des tribus) Soient E et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne une tribu T_i sur E, alors $\bigcap_{i \in I} T_i$ est encore une tribu sur E.*

La preuve de cette proposition est laissée au lecteur.
Cette proposition nous permet de définir la notion de tribu engendrée.

2.1.1 Tribu engendrée

Définition 2.1.5. *(Tribu engendrée) Soient E un ensemble, et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.On la note $\sigma(\mathcal{C})$.*

Exemple 2.1.1. *La tribu engendrée par $\{A\}$, où A est un événement est donnée par $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c E\}$.*

Proposition 2.1.2. *$\sigma(\mathcal{C})$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ (cette intersection est non vide car $\mathcal{P}(E)$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$).*

Démonstration 22. *$\sigma(C) \subset \bigcap_{i; C \subset T_i} T_i$?*

$C \subset T_i \Rightarrow C \subset \cap T_i$, d'après la proposition précédente $\cap T_i$ est une tribu (contenant C)mais par définition de $\sigma(C)$, cette dernière est la plus petite tribu contenant C, donc $\sigma(C) \subset \bigcap_{i; C \in T_i} T_i$.

$\bigcap_{i; C \subset T_i} T_i \subset \sigma(C)$?

$\bigcap_{i; C \subset T_i} T_i \subset T_j$ pour tout j tel que T_j contient C, en particulier $\bigcap_{i; C \subset T_i} T_i \subset \sigma(C)$ car $\sigma(C)$ est une tribu qui contient C. ■

Exemple 2.1.2. *Soit (E, T) un espace mesurable et $A \subset \mathcal{P}(E)$, avec $A \neq \{\emptyset\}$ et $A \neq \{E\}$. Déterminer $\sigma(A)$, $\sigma(\{\emptyset\})$ et $\sigma(\{E\})$.*

Corollaire 2.1.1. *Si $\mathcal{C}$ est une tribu alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. En particulier $\sigma(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Démonstration 23. *Découle immédiatement de la définition de la tribu engendrée.*

Corollaire 2.1.2. *Soit E un ensemble et $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(E)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$*

Démonstration 24. *Découle immédiatement de la définition de la tribu engendrée.*

Lemme 2.1.1. *(Lemme de transport) Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application, on a donc pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de F,*

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Démonstration 25. *Voir exercice 4 page 69.*

Tribu engendrée par une partition

Définition 2.1.6. *Soit E un ensemble. On appelle partition de E une famille finie ou dénombrable de parties non vides de E ? disjointes deux à deux et dont l'union est égale à E.*

Proposition 2.1.3. *(Tribu engendrée par une partition) Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une partion de E, alors la tribu engendrée par cette partition est donnée par :*

$$\sigma((A_i)_{i\in I}) = \{\bigcup_{i\in J} A_i, J \subset I, J \text{ au plus dénombrable } \}$$

Démonstration 26. *$C = \{\bigcup_{i\in J} A_i, J \subset I, J$ au plus dénombrable $\}$ est une tribu avec I au plus dénombrable. En effet :*

1. *$\emptyset \in C$ car $\emptyset = \bigcup_{i\in J} A_i$ avec $J = \emptyset$.*
2. $$\begin{aligned} B \in C &\Rightarrow B = \bigcup_{i\in J} A_i, J \subset I, \text{ avec } J \text{ est fini si } I \text{ est fini et } J \text{ est dénombrable si } \\ &\quad\ I \text{ est dénombrable} \\ &\Rightarrow B^c = \bigcup_{i\in J^c} A_i, J^c \subset I, \text{ avec } J^c \text{ est fini si } I \text{ est fini et } J^c \text{ est dénombrable si } \\ &\quad\ I \text{ est dénombrable} \\ &\Rightarrow B^c \in C. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(B_n)_{n\in N} \subset C \quad &\Rightarrow \quad B_n = \bigcup_{i\in J_n} A_i, J_n \subset I \text{ avec } J_n \text{ est fini si } I \text{ est fini et } J_n \text{ est dénombrable si } \\
&\qquad I \text{ est dénombrable} \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{n\in N} B_n = \cup_{n\in N} \bigcup_{i\in J_n} A_i, J_n \subset I \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{n\in N} B_n = \bigcup_{i\in \bigcup_{n\in N} J_n} A_i, \bigcup_{n\in N} J_n \subset I \text{ avec } \bigcup_{n\in N} J_n \text{ est fini si} \\
&\qquad I \text{ est fini et } \bigcup_{n\in N} J_n \text{ est dénombrable si } I \text{ est dénombrable} \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{n\in N} B_n \in C.
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in I$, A_i peut s'écrire $A_i = \bigcup_{j\in J} A_j$ avec $J = \{i\}$ donc $\forall i \in I, A_i \in C$ d'où C est une tribu telle que $\{A_i, i \in I\} \subset C$, donc $\sigma((A_i)_{i\in I}) \subset C$, par définition de la tribu engendrée. Comme $\{A_i, i \in I\} \subset \sigma((A_i)_{i\in I})$ donc $\bigcup_{j\in J\subset I} A_j \in \sigma((A_i)_{i\in I})$ car $\sigma((A_i)_{i\in I})$ est une tribu stable par union dénombrable et aussi par union finie, d'où $C \subset \sigma((A_i)_{i\in I})$, par suite $C = \sigma((A_i)_{i\in I})$.

■

Exemple 2.1.3. *Soit $(A_n)_{n\in I\subset \mathbb{N}}$ une partition de E. Caractériser les éléments de $\sigma((A_n)_{n\in I})$ pour, $I = \{0, 1\}$, $I = \{0, 1, 2\}$.*

Tribu borélienne

Rappel : Une topologie sur E est donnée par une famille de parties de E, ces parties sont appelés ouverts de E, contenant, $\emptyset$ et E, stable par union quelconque et stable par intersection finie. L'ensemble E muni de cette famille de partie (qui constittue la topologie), est un espace topologique.

Définition 2.1.7. *(Tribu borélienne) : Soit E un ensemble muni d'une topologie. On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de E, cette tribu sera notée $\mathcal{B}(E)$. En notant $\mathcal{O}(E)$ la famille de tous les ouverts de E, on a ainsi*

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}(E)).$$

Les éléments de la tribu borélienne sont appelés les boréliens de E. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, cette tribu est donc notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.1.4. *La tribu borélienne est aussi engendrée par les fermés.*

Démonstration 27. *La démonstration est laissée en exercice pour le lecteur.*

Exemple 2.1.4. *1. Les ouverts et les fermés sont boréliens.*

2. *Tout sous ensemble dénombrable d'un espace métrique (qui est un espace topologique séparé) est borélien, car c'est une réunion dénombrable de singletons (qui sont des fermés).*

Proposition 2.1.5. *On note $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_2 = \{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{]a,\infty[, a \in \mathbb{R}\}$. Alors $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

La preuve de cette proposition est basée sur le lemme suivant :

Lemme 2.1.2. *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés.*

Démonstration 28. *(Proposition)*

1. $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$?
   Rappel : tout intervalle $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.
   En effet : soit $x \in]a,b[$, soit $r = \inf(|x-a|, |x-b|)$, alors $x \in]x-r, x+r[\subset]a,b[$.
   Comme $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, d'après le corollaire 2.1.2, on a $\sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$.
   Pour l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.
   Soit O un élément de $\mathcal{C}_1$,
   si $O = \emptyset$, alors $O =]a,a[\in \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$,
   si $O \neq \emptyset$, d'après le lemme précédent, or on a $O = \bigcup_{n \in I} I_n$, avec $I \subset \mathbb{N}$ et $I_n \in \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$,
   donc $O \in \sigma(\mathcal{C}_2)$ car cette dernière est une tribu (stable par union finie ou dénombrable voir Propriétés 2.1.1), donc on $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et par suite $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$, car $\sigma(\mathcal{C}_1)$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}_1$.
2. $\sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_3)$?
   (a) $\mathcal{C}_3 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$:
   Soit $]a,+\infty[\in \mathcal{C}_3$, on a $]a,+\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a,n[$,
   comme $]a,n[\in \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$, pour tout n, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a,n[\in \sigma(\mathcal{C}_2)$ car $\sigma(\mathcal{C}_2)$ est une tribu (stable par union dénombrable) donc $\mathcal{C}_3 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et pare suite $\sigma(\mathcal{C}_3) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

   (b) $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$: *Soit $]a,b[\in \mathcal{C}_2$, on a :*
   $$\begin{aligned}]a,b[&=]a,+\infty[\cap]-\infty,b[\\ &=]a,+\infty[\cap ([b,+\infty[)^c \end{aligned}$$
   or $[b,+\infty[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]b - \frac{1}{n}, +\infty[$ *et*
   $$\begin{aligned}]b-\tfrac{1}{n}, +\infty[\in \mathcal{C}_3 \subset \sigma(\mathcal{C}_3) &\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]b - \frac{1}{n}, +\infty[\in \sigma(\mathcal{C}_3) \\ &\Rightarrow [b,+\infty[\in \sigma(\mathcal{C}_3) \\ &\Rightarrow [b,+\infty[^c =]-\infty,b[\in \sigma(\mathcal{C}_3) \\ &\Rightarrow]a,b[=]a,+\infty[\cap]-\infty,b[\in \sigma(\mathcal{C}_3). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.6. *La tribu de Borel est aussi engendrée par l'une des classes suivantes, où a et b sont des réels vérifiants* $-\infty < a \leq b < +\infty$ *:*
$\mathcal{C}_4 = \{[a, b[\}$, $\mathcal{C}_5 = \{]a, b]\}$, $\mathcal{C}_6 = \{[a, +\infty[\}$, $\mathcal{C}_7 = \{]-\infty, a[\}$, $\mathcal{C}_8 = \{]-\infty, a]\}$.

Proposition 2.1.7. *Soit* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *la tribu borélienne sur* $\mathbb{R}$ *et soit* $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(un borélien), soit* $\mathcal{B}(I) = \sigma(\mathcal{O}_I)$ *la tribu engendrée par les ouverts de* I *et* T_I *la tribu trace de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *sur* I*, c'est à dire* $T_I = \{B \cap I, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*. Alors :*

1. $T_I = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : C \subset I\}$.
2. $T_I = \sigma(\mathcal{O}_I)$ *avec* $\mathcal{O}_I = \{O \cap I, O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\}$*(Topologie trace : topologie induite sur* I *par celle de* $\mathbb{R}$*).*

Démonstration 29.
1. *Par double inclusion :*
Soit $C \in T_I$*, alors il existe* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $C = B \cap I$*, comme* $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *donc* $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $C \subset I$ *donc* $T_I \subset \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : C \subset I\}$.
Inversement, Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *telque* $C \subset I$*, alors* $C = C \cap I$*, donc* $C \in T_I$.
2. *Soit l'injection canonique*
$$\begin{array}{rccc} i: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$
on a : $i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{i^{-1}(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *avec*
$$\begin{aligned} i^{-1}(A) &= \{x \in I / i(x) \in A\} \\ &= \{x \in I / x \in A\} \\ &= A \cap I, \end{aligned}$$
donc
$$\boxed{i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{A \cap I; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}}. \tag{2.1}$$
D'autre part, d'après le lemme du transport, on a : $i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = i^{-1}(\sigma(\mathcal{O}\mathbb{R})) = \sigma(i^{-1}(\mathcal{O}\mathbb{R}))$
or $i^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}}) = \{i^{-1}(B), B \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\}$ *avec* $i^{-1}(B) = B \cap I$,
donc $i^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}}) = \{B \cap I, B \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\} = \mathcal{O}_I$*, d'où*
$$\boxed{i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(\mathcal{O}_I)}. \tag{2.2}$$

Des équation (2.1) *et* (2.2)*, on a* $\sigma(\mathcal{O}_I) = \{A \cap I; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$,
c'est à dire $\boxed{\sigma(\mathcal{O}_I) = T_I}$. ■

On peut généraliser la proposition précédente comme suit :

Proposition 2.1.8. *Soit* E *un espace métrique, alors tout ensemble* $F \subset E$ *est lui même un espace métrique, et possède donc sa propre tribu borélienne* $\mathcal{B}(F)$*. Alors* $\mathcal{B}(F) = \{B \cap F, B \in \mathcal{B}(E)\}$*. Autrement dit Un ensemble* $A \subset F$ *est un borélien de* F *s'il est de la forme* $A = B \cap F$ *où* $B \in \mathcal{B}(E)$*.*
En particulier si F *est un borélien de* E*. Alors* $\mathcal{B}(F) = \{A \in \mathcal{B}(E)\}, A \subset F\}$*. Autrement dit :* $A \subset F$ *est borélien dans* F *si et seulement si, il est borélien dans* E*.*

Conséquence Si F est un borélien de E, alors tout borélien de F est un borélien de E.

Les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition 2.1.9. *(Les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$). Pour $A \subset \bar{\mathbb{R}}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$;*
2. *$A \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$;*
3. *A est de la forme B ou $B \cup \{+\infty\}$, ou $B \cup \{-\infty\}$ ou $B \cup \{-\infty, +\infty\}$ où B est un borélien de $\mathbb{R}$.*

Démonstration 30. 1. $\Rightarrow$ 2. *est une conséquence de la proposition précédente.*
2. $\Rightarrow$ 3. *Découle de la proposition précédente.*
3. $\Rightarrow$ 1. *vient du fait que tout borélien de $\mathbb{R}$ est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$, par la proposition précédente car $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$ donc borélien, et que $\{+\infty\}$ et $\{-\infty\}$ sont boréliens dans $\overline{\mathbb{R}}$ car fermés.*

Proposition 2.1.10. *La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles de la forme $]a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$.*

Démonstration 31. *Comme $]a, +\infty[=]a, +\infty] \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$, d'après la proposition précédente, $]a, +\infty]$ est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$, donc $\{]a, +\infty/a \in \mathbb{R}]\} \subset \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ par suite*

$$\boxed{\sigma(\{]a, +\infty/a \in \mathbb{R}]\}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})}. \tag{2.3}$$

D'autre part, on a :
$] + \infty, +\infty] = \emptyset \in \sigma(\{]a, +\infty]\})$.
$] - \infty, +\infty] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}] - n, +\infty] \in \sigma(\{]a, +\infty]\})$
Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $[a, +\infty] = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}: q < a}]q, +\infty] \in \sigma(\{]a, +\infty]\})$ (intersection dénombrable d'éléments de $\sigma(\{]a, +\infty]\})$).
Ainsi $\sigma(\{]a, +\infty]\})$ contient tous les intervalles $]a, +\infty]$ et $[a, +\infty]$ pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Par passage au complémentaire, on voit que $\sigma(\{]a, +\infty]\})$ contient les $[-\infty, a]$ et $[-\infty, a[$, pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et donc tous les singletons $\{a\} = [-\infty, a] \cap [a, +\infty]$ pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$, en particulier $\boxed{\{-\infty\} \in \sigma(\{]a, +\infty]\})}$ et $\boxed{\{+\infty\} \in \sigma(\{]a, +\infty]\})}$, et donc on a aussi, $]a, +\infty[=]a, +\infty] \setminus \{+\infty\} \in \sigma(\{]a, +\infty]\})$, c'est à dire $\{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(\{]a, +\infty]\})$, par suite $\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]a, +\infty]\})}$.
Comme d'après la proposition précédente, on a $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, on déduit que

$$\boxed{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\{]a, +\infty]\})}. \tag{2.4}$$

De (2.3) et (2.4), on déduit que $\boxed{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\})}$. ∎

Remarque 2.1.4. *De la même façon, on peut montrer que $\boxed{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[-\infty, b[, b \in \mathbb{R}\})}$.*

Les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$
on a d'après la proposition 2.1.7, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+); A \subset \mathbb{R}_+\} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \subset \mathbb{R}_+\}$.

Proposition 2.1.11. *(Les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$) Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$,*
2. *$A \cap \mathbb{R}_+$ est un borélien de $\mathbb{R}_+$,*
3. *A est de la forme B ou $B \cup \{+\infty\}$, où B est un borélien de $\mathbb{R}_+$.*

Remarque 2.1.5. *Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, $A \cap \mathbb{R}_+ = A \cap \mathbb{R}$.*

Conséquence : $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.1.12. *La tribu borélienne $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est aussi engendrée par les classes suivantes :*
$\mathcal{J}_1 = \{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}_+\}$, $\mathcal{J}_2 = \{]a, +\infty[\cap \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{J}_3 := \{[0, x[; x \in \mathbb{R}_+\}$,*et* $\mathcal{J}_4 := \{[0, x]; x \in \mathbb{R}_+\}$
La tribu borélienne $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est aussi engendrée par les classes suivantes :
$\mathcal{I}_1 = \{[a, +\infty], a \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{I}_2 = \{] - \infty, a], a \in \mathbb{R}\}$.

2.1.2 Les systèmes de Dynkin

Définition 2.1.8. *(Les systèmes de Dynkin) Soit E un ensemble et $\mathcal{D}$ une famille de parties de E. On dit que $\mathcal{D}$ est un système de Dynkin, s'il satisfait aux axiomes suivantes :*

1. *$E \in \mathcal{D}$,*
2. *$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$,*
3. *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$, disjoints deux à deux alors $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.*

On peut vérifier que l'intersection de systèmes de Dynkin est un système de Dynkin.

Proposition 2.1.13.

1. *Une tribu est toujours un système de Dynkin.*
2. *Soit $\mathcal{D}$ un système de Dynkin qui vérifie, $(A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D})$. Alors : $\mathcal{D}$ est une tribu.*

Démonstration 32.

1. *Soit T une tribu sur E*
   (a) *alors $E \in T$ par définition d'une tribu.*
   (b) *$B \in T \Rightarrow B^c \in T$, si de plus $A \in T$, alors $A \cap B^c = A|B \in T$ car T est une tribu stable par passage au complémentaire et par intersection finie.*
   (c) *$(A_i) \subset T \Rightarrow \cup A_i \in T$ en particulier pour les A_i deux a deux disjoints car T est stable par union dénombrable.*
2. *Soit $\mathcal{D}$ un système de Dynkin stable par intersection finie, c'est à dire qui vérifie, $(A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D})$, alors :*
   (a) *$E \in \mathcal{D}$ par définition d'un système de Dynkin.*
   (b) *Soit $A \in \mathcal{D}$, comme $A \subset E$ et $E \in \mathcal{D}$, alors $E|A = A^c \in \mathcal{D}$ par définition d'un système de Dynkin.*

(c) *Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$, montrons que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$:*

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\geq 1} A_n &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \\ &= A_1 \cup (A_2|A_1) \cup (A_3|A_1 \cup A_2) \cup \dots \\ &= \bigcup_{n\geq 1}(A_n| \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k).\end{aligned}$$

Soint $B_n = A_n| \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, il suffit de montrer que (B_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ deux à deux disjoints, et d'appliquer la stabilité par union disjointe d'un système de Dynkin.
Soit $i \neq j$, Supposons $j < i$

$$\begin{aligned}B_i \cap B_j &= (A_i \cap (\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)^c \cap (A_j \cap (\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k)^c \\ &= A_i \cap A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots A_j^c \cap A_{i-1}^c \cap A_j \cap A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots A_{j-1}^c \cap = \emptyset \\ &\quad \text{car } A_j^c \cap A_{i-1}^c \cap A_j = A_j^c \cap A_j \cap A_{i-1}^c = \emptyset \cap A_{i-1}^c = \emptyset.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}B_n &= A_n| \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \\ &= (A_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)^c \\ &= A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots A_{n-1}^c \in \mathcal{D},\end{aligned}$$

car le système de Dynkin est stable par passage au complémentaire et par hypothèse, il vérifie de plus la stabilité par intersection finie .

■

Définition 2.1.9. *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On appelle, système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$, le plus petit système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. On le note $\mathcal{D}(\mathcal{C})$.*

Proposition 2.1.14. *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E stable par intersection finie. Alors*

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

Démonstration 33. *D'après la proposition précédente, $\sigma(\mathcal{C})$ est un système de dynkin, contenant $\mathcal{C}$, or $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ est le plus petit système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$, donc*

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})}. \tag{2.5}$$

Pour l'inclusion inverse, il suffit de montrer, que $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ est une tribu, comme c'est un système de Dyinkin, d'après la proposition précédente, pour montrer qu'il est une tribu, il suffit de monter qu'il est stable par intersection finie.
On considère pour tout $A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, l'ensemble $j(A) = \{B \subset E; B \cap A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})\}$
Montrons que $j(A)$ est un système de Dynkin, contenant $\mathcal{C}$.

1. *$E \in j(A)$ car $E \subset E$ et $E \cap A = A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$.*
2. *Soit B_1 et B_2 deux éléments de $j(A)$ tels que $B_1 \subset B_2$, on a $B_1 \backslash B_2 \subset E$ et $(B_1 \backslash B_2) \cap A = B_1 \cap A \backslash (B_2 \cap A) \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ car $B_1 \cap A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, $B_1 \cap A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ et $B_2 \cap A \subset (B_1 \cap A)$.*
3. *Soit $(B_n)_n$ une suite d'éléments de $J(A)$, deux à deux disjoints. On a $\bigcup_n B_n \subset E$ et $(\bigcup_n B_n) \cap A = \bigcup_n (B_n \cap A) \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ car les $(B_n \cap A)$ sont deux à deux disjoints et $B_n \cap A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ pour tout n. Donc $j(A)$ est un système de Dynkin.*

$\mathcal{C} \subset j(A)$?
On rappelle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}$ stable par intersection finie.
Soit $H \in \mathcal{C}$;
$\forall K \in \mathcal{C}$, $K \cap H \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.
donc $K \cap H \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(\mathcal{C})$,
d'où $K \in j(H)$, c'est à dire $\mathcal{C} \subset j(H)$ par suite
$\forall H \in \mathcal{C}$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset j(H)$ car $j(H)$ est un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$.
c'est à dire $\forall H \in \mathcal{C}$ et $\forall A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, $A \in j(H)$,
autrement dit : $\forall H \in \mathcal{C}$ et $\forall A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, $A \cap H \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$.
ou encore : $\forall H \in \mathcal{C}$, $H \in J(A)$,
donc $\boxed{\mathcal{C} \subset j(A)}$.
D'où : $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset j(A)$ car $j(A)$ est un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$.
Ce qui se traduit par : $\forall A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, $\forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ $A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$,
c'est à dire $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ est stable par intersection finie.
Donc $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$, d'où

$$\boxed{\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{C})} \text{ car } \sigma(\mathcal{C}) \text{ est la plus petite tribu contenant } \mathcal{C}. \tag{2.6}$$

Des équations (2.5) et (2.6), on obtient $\boxed{\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}(\mathcal{C})}$. ■

2.1.3 Les classes monotones

Définition 2.1.10. *(Les classes monotones) Soit $\mathcal{M}$ une famille de parties de E. $\mathcal{M}$ est dite classe monotone si, pour toute suite monotone (A_n) d'éléments de $\mathcal{M}$, on $\lim_n A_n \in \mathcal{M}$ (on dit aussi que $\mathcal{M}$ est stable par passage à la limite monotone).*

On peut vérifier que l'intersection de classes monotones est une classe monotone.

Proposition 2.1.15. *1. Si T est une tribu alors, T est une classe monotone.*
2. Si $\mathcal{A}$ est une classe monotone et une algèbre alors, $\mathcal{A}$ est une tribu.

Démonstration 34. *1. T est une tribu $\Rightarrow$ T est une classe monotone ?*
Soit T une tribu et $(A_n)_n$ une suite d'éléments de T.
(a) Si $(A_n)_n$ est croissante, $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$ (voir chapitre 1), comme T est une tribu, elle est stable par union dénombrable, donc $\lim_n A_n \in T$.

(b) Si $(A_n)_n$ est décroissante, $\lim\limits_n A_n = \bigcap\limits_n A_n$ (voir chapitre 1), comme T est une tribu, elle est stable par intersection dénombrable, donc $\lim\limits_n A_n \in T$.

Donc T est stable par passage à la limite monotone, d'où toute tribu est une classe monotone.

2. *$\mathcal{A}$ est une classe monotone et une algèbre $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ est une tribu ?*
   (a) *$E \in \mathcal{A}$ par définition d'une algèbre.*
   (b) *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, par définition d'une algèbre.*
   (c) *Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, montrons que $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$; on a :*

$$\begin{aligned}\bigcup_n A_n &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \\ &= A_1 \cup (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup \ldots \\ &= \bigcup_n B_n \text{ avec } B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p.\end{aligned}$$

$(B_n)_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$; en effet : $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1} \Rightarrow B_n \subset B_{n+1}$.
Comme $\mathcal{A}$ est une classe monotone, on a, $\bigcup\limits_n B_n = \lim\limits_n B_n \in \mathcal{A}$, par suite $\mathcal{A}$ est une tribu.

■

Définition 2.1.11. *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On appelle, classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$, la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$. On le note $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.*

Lemme 2.1.3. *(Lemme des classes monotones) Si $\mathcal{A}$ est une algèbre, on a :*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Pour la preuve voir [4]

2.1.4 Tribu produit

Etant donnés deux espaces mesurables (E_1, T_1) et (E_2, T_2).
Notation abusive : Dans la suite, lorsqu'on considère deux sous ensembles $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{P}(E_1)$ et $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{P}(E_2)$, l'écriture $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ désignera (abusivement)

$$\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{C}_1, A_2 \in \mathcal{C}_2\},$$

au lieu du produit cartésien $\{(A_1, A_2) : A_1 \in \mathcal{C}_1, A_2 \in \mathcal{C}_2\}$.

Définition 2.1.12. 1. *On appelle tribu produit (tensoriel) des tribus T_1 et T_2, la tribu de parties de $E_1 \times E_2$ engendrée par $T_1 \times T_2$, on la note $T_1 \otimes T_2$, on donc*

$$T_1 \otimes T_2 = \sigma(T_1 \times T_2) \text{ avec } T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}.$$

2. *Le couple $(E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2)$ est appelé espace mesurable produit de (E_1, T_1) et (E_2, T_2).*

Remarque 2.1.6. *$T_1 \times T_2$ n'est pas en général une tribu.*

Théorème 2.1.1. *Si $\mathcal{C}_1$ une partie de $\mathcal{P}(E_1)$ qui engendre la tribu T_1 et $\mathcal{C}_2$ une partie de $\mathcal{P}(E_2)$ qui engendre la tribu T_2, tels que $E_1 \in \mathcal{C}_1$ et $E_2 \in \mathcal{C}_2$, alors $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ est une partie de $\mathcal{P}(E_1 \times E_2)$ qui engendre $T_1 \otimes T_2$. Autrement dit,*

$$\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2).$$

Démonstration 35. *Par définition d'une tribu produit $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ est engendrée par $\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2)$, c'est à dire*

$$\boxed{\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2))}.$$

D'autre part $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2))$ donc,

$$\boxed{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2)) = \sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)} \text{ d'où } \boxed{\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)}.$$

Réciproquement :
Soit $\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{C}_1), A \times E_2 \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)\}$ et $\mathcal{B} = \{B \in \sigma(\mathcal{C}_2), E_1 \times B \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)\}$. $\mathcal{A}$ est une tribu, en effet :

1. *$E_1 \in \mathcal{A}$ car $E_1 \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $E_1 \times E_2 \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$.*
2. *Soit $A \in \mathcal{A}$, donc $A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $A \times E_2 \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$, par suite $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $A^c \times E_2 = (A \times E_2)^c \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$.*
3. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ donc pour tout n, $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $A_n \times E_2 \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ par suite $\bigcup\limits_n A_n \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $(\bigcup\limits_n A_n) \times E_2 = \bigcup\limits_n (A_n \times E_2) \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$.*

Comme $\forall A \in \mathcal{C}_1$, $A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $A \times E_2 \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ alors $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$, par suite

$$\boxed{\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}_1)}. \tag{2.7}$$

De la même, façon on montre que $\mathcal{B}$ est une sous tribu de $\sigma(\mathcal{C}_2)$, contenant $\mathcal{C}_2$, donc

$$\boxed{\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_2)}. \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8), on obtient : $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$, $A \times E_2 \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ et $\forall B \in \sigma(\mathcal{C}_2)$, $E_1 \times B \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$, par suite $A \times B = (A \times E_2) \cap (E_1 \times B) \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ c'est à dire $\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ d'où $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$. ■

Corollaire 2.1.3. *Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques (plus généralement topologique) admettant chacun une base d'ouverts $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2)$ (c'est à dire tout ouvert O_i de E_i est une réunion dénombrable d'ouverts de $\mathcal{B}_i$). Alors*

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_1) = \mathcal{B}(E_1 \times E_2).$$

Exemple 2.1.5. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2.2 Mesure, Probabilité

Définition 2.2.1. *(Mesure) Soit (E,T) un espace mesurable. On appelle mesure une application $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$) vérifiant :*

1. $m(\emptyset) = 0$
2. *m est $\sigma -$ additive , c'est à dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ de parties disjointes deux à deux, on a :*
$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(A_n).$$

Conséquence : De la σ additivité, on déduit l'additivité, c'est à dire :
Pour toute famille $(A_p)_{p=0,\ldots,n} \subset T$ de parties disjointes deux à deux, on a :

$$m(\bigcup_{p=0}^{n})A_p) = \sum_{p=0}^{n} m(A_p).$$

En effet : Posons $B_p = A_p$ pour $p \in \{0, 1, ..., n\}$ et $B_p = \emptyset$ pour $p > n$, alors :

$$\begin{aligned}
m(\bigcup_{p=0}^{n} A_p) &= m(\bigcup_{p=0}^{+\infty} B_p) \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} m(B_p) \\
&= \sum_{p=0}^{n} m(B_p) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} m(B_p) \\
&= \sum_{p=0}^{n} m(B_p) \text{ car } m(B_p) = 0 \text{ pour } p > n \\
&= \sum_{p=0}^{n} m(A_p).
\end{aligned}$$

Définition 2.2.2. *(Mesure finie) Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle mesure finie une mesure m sur T telle que $m(E) < \infty$.*

Définition 2.2.3. *(Probabilité) Soient E un ensemble et T une tribu sur E, on appelle probabilité une mesure P sur T, telque $P(E) = 1$.*

Exemple 2.2.1. *(Mesure de Dirac) Soit E un ensemble, T une tribu sur E et $a \in E$. On définit sur T la mesure δ_a par : pour tout $A \in T$,*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & si\ a \in A \\ 0 & si\ a \notin A. \end{cases}$$

Vérifions que δ_a est une mesure finie :

1. $\delta_a(\emptyset) = 0$

2. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de T, deux à deux disjoints.*

$$\begin{aligned}\delta_a(\bigcup_n A_n) &= \mathbb{1}_{\bigcup_n A_n}(a)\\ &= \sum_n \mathbb{1}_{A_n}(a) \text{ car les } A_n \text{ sont deux à deux disjoints}\\ &= \sum_n \delta_a(A_n).\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. *La mesure de Dirac est une probabilité, donc c'est une mesure finie.*

Définition 2.2.4. *(Espace mesuré, espace probabilisé) Soient E un ensemble, T une tribu sur E et m une mesure (resp. une probabilité) sur T. Le triplet (E, T, m) est appelé espace mesuré (resp. espace probabilisé).*

Définition 2.2.5. *(Mesure σ-finie) Soit (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est σ-finie (ou que (E, T, m) est σ-finie) si :*

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset T, \quad m(A_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Exemple 2.2.2. *(mesure de décompte ou de comptage), soit E un ensemble dénombrable, on définit la mesure de décompte (ou de comptage, ou de dénombrement) comme suit : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$,*

$$m(A) = \begin{cases} cardA & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infinie} \end{cases}$$

- *La mesure de décompte définie sur $\mathcal{P}(E)$ est une mesure σ- finie. En effet : Comme E est dénombrable, $E = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \bigcup_{n\geq 1}\{a_n\}$ avec $m(\{a_n\}) = card\{a_n\} = 1 < +\infty$.*
- *La mesure de décompte sur $\mathcal{P}$ n'est pas finie car $m(E) = cardE = +\infty$.*

Proposition 2.2.1. *(Propriétés des mesures) Soit (E, T, m) un espace mesuré ; La mesure m vérifie les quatres propriétés suivantes :*

1. *Monotonie : Soit $A, B \in T$, $A \subset B$, alors*

$$m(A) \leq m(B).$$

2. *σ-sous additivité : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

3. *Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)).$$

4. *Continuité décroissante : Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *t.q.* $A_{n+1} \subset A_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et t.q. il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$, *alors*

$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)).$$

Démonstration 36. 1. *Monotonie : Soit* $A, B \in T$ *tels que* $A \subset B$, *on a :*
$B = (B\backslash A) \cup A \Rightarrow m(B) = m(B\backslash A) + m(A)$ *car* $(B\backslash A) \cap A = (B \cap A^c) \cap A = \emptyset$ *et* m *est* $\sigma-$ *additive. Comme* $m(A) \in \bar{\mathbb{R}}_+$, *alors* $m(B\backslash A) \geq 0$, *donc* $m(B\backslash A) + m(A) \geq m(A)$ *d'où le résultat, c'est à dire* $m(B) \geq m(A)$.
Noter qu'on ne peut écrire $m(B\backslash A) = m(B) - m(A)$ *que si*
$0 \leq m(A) \leq m(B)$ *et* $m(B) < +\infty$. *Cette relation n'a pas de sens si* $m(A) = m(B) = +\infty$.

2. $\sigma-$ *sous additivité. Soit* $(A_n)_n$ *une suite d'éléments de* T, *on a* $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in T$ *et*

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\geq 1} A_n &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \\
&= A_1 \cup (A_2\backslash A_1) \cup (A_3\backslash A_1 \cup A_2) \cup \ldots \\
&= \bigcup_{n\geq 1}(A_n\backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) \qquad , \\
&= \bigcup_{n\geq 1}(B_n,
\end{aligned}$$

avec $B_n = A_n\backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, *il suffit de montrer que* (B_n) *est une suite d'éléments de* T *deux à deux disjoints, et d'appliquer la* $\sigma-$ *additivité d'une mesure.*
Soit $i \neq j$, *supposons* $j < i$

$$\begin{aligned}
B_i \cap B_j &= (A_i \cap (\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)^c \cap (A_j \cap (\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k)^c \\
&= A_i \cap A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \ldots A_j^c \cap A_{i-1}^c \cap A_j \cap A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \ldots A_{j-1}^c \cap = \emptyset, \\
&\qquad \text{car } A_j^c \cap A_{i-1}^c \cap A_j = A_j^c \cap A_j \cap A_{i-1}^c = \emptyset \cap A_{i-1}^c = \emptyset.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
B_n &= A_n| \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \\
&= (A_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)^c \\
&= A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \ldots A_{n-1}^c \in T,
\end{aligned}$$

car T *est une tribu, stable par passage au complémentaire et par intersection finie. On a aussi,*

$$\begin{array}{rcl} B_n \subset A_n & \Rightarrow & m(B_n) \leq m(A_n) \text{ d'après la monotonie d'une mesure} \\ & \Rightarrow & \sum_n m(B_n) \leq \sum_n m(A_n) \\ & \Rightarrow & m(\bigcup_n B_n) \leq \sum_n m(A_n) \text{ d'après la } \sigma- \text{ additivité d'une mesure} \\ & \Rightarrow & m(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n m(A_n) \text{ car } \bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n. \end{array}$$

3. *La continuité croissante. Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'éléments de T, on a :*

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{n\geq 0} A_n & = & A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \\ & = & A_0 \cup (A_1|A_0) \cup (A_2|A_1) \cup (A_3|A_1 \cup A_2) \cup \dots \\ & = & A_0 \cup (\bigcup_{n\geq 1} (A_n|A_{n-1}) \qquad , \\ & = & B_0 \cup (\bigcup_{n\geq 1} (B_n) \text{ avec } B_0 = A_0 \text{ et } B_n = A_n|A_{n-1}, \end{array}$$

les B_n sont deux à deux disjoints. En effet , soit $i \neq j$, supposons $j < i$

$$\begin{array}{rcl} B_i \cap B_j & = & (A_i \cap A_{i-1})^c \cap (A_j \cap (A_{j-1})^c \\ & = & A_j \cap A_{i-1}^c \text{ car } A_j \subset A_i \text{ et } A_{i-1}^c \subset A_{j-1}^c \\ & \subset & A_j \cap A_j^c = \emptyset \text{ car } A_j \subset A_{i-1}. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} m(\bigcup_{n\geq 1} A_n) & = & m(\bigcup_{n\geq 1} B_n) \\ & = & \sum_{n=1}^{+\infty} m(B_n) \text{ d'après la } \sigma- \text{ sous additivité de } m \\ & = & \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} m(B_p) \\ & = & \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p=1}^{n} B_p) \text{ d'après l'additivité de } m \\ & = & \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) \text{ car } \bigcup_{p=1}^{n} B_p = \bigcup_{p=1}^{n} A_p \\ & = & \lim_{n\to+\infty} m(A_n) \text{ car } (A_n)_n \text{ est une suite croissante.} \end{array}$$

4. *La continuité décroissante. Soit $(A_n)_n$ une suite décroissante d'éléments de T, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < +\infty$,*
Soit $B_n = A_{n_0} \backslash A_n = A_{n_0} \cap A_n^c \in T$, pour tout $n \geq n_0$ et $B_n = \emptyset$, pour tout $n \leq n_0$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car $(A_n)_n$ est décroissante, on alors :

$$\begin{aligned}
m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) &= m(\bigcup_{n\geq n_0} B_n) \ \textit{car}\ \forall n \leq n_0, B_n = \emptyset \\
&= m(\bigcup_{n\geq n_0} (A_{n_0}\backslash A_n) \ \textit{par définition de}\ B_n \\
&= m(\bigcup_{n\geq n_0} (A_{n_0}\cap A_n^c) \ \textit{car}\ A\backslash B = A\cap B^c \\
&= m((A_{n_0}\cap A_{n_0+1}^c)\cup(A_{n_0}\cap A_{n_0+2}^c)\cup(A_{n_0}\cap A_{n_0+3}^c)\cup\ldots) \\
&= m(A_{n_0}\cap(A_{n_0+1}^c\cup A_{n_0+2}^c\cup A_{n_0+3}^c\cup\ldots)) \\
&= m(A_{n_0}\cap(\bigcup_{n\geq n_0} A_n^c)) \\
&= m(A_{n_0}\cap(\bigcap_{n\geq n_0} A_n)^c) \\
&= m(A_{n_0}\backslash(\bigcap_{n\geq n_0} A_n)) \\
&= m(A_{n_0}\backslash(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)).
\end{aligned}$$

Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante on a* $A_0\cap A_0\cap \ldots\cap A_{n_0} = A_{n_0}$*, et donc,* $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq m(A_{n_0}) < +\infty$ *d'où,*

$$\boxed{m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = m(A_{n_0}) - m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)}. \tag{2.9}$$

D'autre part, la monotonie croissante de m *donne*

$$\begin{aligned}
m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) &= \lim_{n\to+\infty} m(B_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} m(A_{n_0}\backslash A_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} m(A_{n_0}) - m(A_n) \ \textit{car}\ A_n\subset A_{n_0}\ \textit{et}\ m(A_n)\leq m(A_{n_0}) < +\infty \\
&= m(A_{n_0}) - \lim_{n\to+\infty} m(A_n),
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = m(A_{n_0}) - \lim_{n\to+\infty} m(A_n)}, \tag{2.10}$$

de (2.9) *et* (2.10) *on a,* $m(A_{n_0}) - m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(A_{n_0}) - \lim_{n\to+\infty} m(A_n)$

Ce qui donne le résultat demandé

$$\boxed{m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n)}.$$

■

Proposition 2.2.2. *Une mesure* m *définie sur une tribu* T *vérifie aussi pour tout* A *et* B *de* T *:*

1. $m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B)$
2. $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$

Démonstration 37. *1. On a*

$$\begin{aligned} A &= A \cap E \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ &= (A \backslash B) \cup (A \cap B), \end{aligned}$$

et

$$(A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \emptyset,$$

donc

$$m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B).$$

2. on a

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

et les ensembles $(A \setminus B)$*,* $(A \cap B)$ *et* $(B \setminus A)$ *sont disjoints deux à deux donc,*

$$m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(A \cap B) + m(B \setminus A),$$

en utilisant 1., on obtient

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A),$$

d'où

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B \setminus A) + m(A \cap B),$$

ainsi d'apès 1., on a

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

■

Définition 2.2.6. *(Partie négligeable) Soit (E,T,m) un espace mesuré et* $A \subset E$*, on dit que* A *est négligeable s'il existe un ensemble* $B \in T$ *tel que* $A \subset B$ *et* $m(B) = 0$*. En particulier ; si* $A \in T$*,* A *est négligeable si* $m(A) = 0$*.*
Une propriété sur E *vraie sauf sur un ensemble négligeable est dite vraie m- presque partout, et en abrégé cela est noté m-p.p.*

Exemple 2.2.3. *1. Une partie est négligeable pour la mesure de décompte (définie sur une tribu* T*) si et seulement si elle est vide. En effet : Soit* A *un élément de* T*,* A *est négligeable* $\Leftrightarrow \exists B \in T; A \subset B$ *et* $card(B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$*.*

2. Une partie mesurable est négligeable pour la mesure de Dirac δ_a *(définie sur une tribu* T*) si et seulement si elle ne contient pas* a*. En effet :*
$A \in T$*,* A *est négligeable* $\Leftrightarrow \exists B \in T; A \subset B$ *et* $\delta_a(B) = 0 \Leftrightarrow \delta_a(A) = 0 \Leftrightarrow a \notin A$*.*

Définition 2.2.7. *(Mesure atomique) Soit (E, T, m) un espace mesuré tel que $\{x\} \in T$ pour tout x de E.*
On dit que m est purement atomique s'il existe $S \in T$ tel que $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

Exemple 2.2.4. *La mesure de Dirac définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est purement atomique. En effet : Pour $S = \{a\}$, on a $\delta_a(S^c) = 0$ et $\delta_a(\{a\}) = 1 > 0$.*

Définition 2.2.8. *(Mesure diffuse) Soient (E,T) un espace mesurable et m une mesure sur T. On dit que m est diffuse si pour tout $x \in E$, $\{x\} \in T$ et $m(\{x\}) = 0$.*

Remarque 2.2.2. *La mesure de Dirac n'est pas diffuse car $\delta_a(\{a\}) = 1 \neq 0$.*

Conséquences

1. Si m est une mesure diffuse sur T, (T étant tribu sur E), alors toutes les parties dénombrables sont de mesure nulle. En effet :
   Soit A une partie dénombrable de E, $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \bigcup_{n\geq 1} \{x_n\}$ avec les x_n distincts.
   $m(A) = m(\bigcup_{n\geq 1} \{x_n\}) = \sum_{n\geq 1} m(\{x_n\})$ car m est $\sigma-$additive. Comme m est diffuse on a $m(\{x_n\}) = 0$ Donc $m(A) = 0$.
2. Une mesure qui est à la fois diffuse et atomique est nulle. En effet : Soit m une mesure atomique et diffuse sur E,

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} m \text{ est diffuse} \\ m \text{ est atomique} \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x \in E, \{x\} \in T \text{ et } m(\{x\}) = 0 \\ \exists S \in T, \forall x \in S; m(\{x\}) > 0 \text{ et } m(S^c) = 0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \exists S \in T, \forall x \in S, \{x\} \in T \text{ et } m(\{x\}) = 0, \text{ et } m(\{x\}) > 0 \text{ et } m(S^c) = 0 \\
&\Rightarrow m(E) = 0,
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall A \in T, A \subset E \text{ et } m(A) = 0}, \text{ c'est à dire } m \text{ est nulle .}$$

Définition 2.2.9. *(Mesure complète) Soit (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est complète (ou que (E, T, m) est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est à dire appartiennent à T.*

Définition 2.2.10. *(Mesure absolument continue). Soit (E, T) un espace mesurable, m une mesure (positive) sur T.*
On dit que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m et on note $\mu << m$, si pour tout $A \in T$ tel que m(A)=0 alors $\mu(A) = 0$.

Proposition 2.2.3. *(Egalité de deux mesures) Soit (E, T) un espace mesurable, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. Soient m et μ deux mesures sur T qui coincident sur $\mathcal{C}$.*

1. *Si $E \in \mathcal{C}$ et $m(E) < +\infty$, alors $\forall A \in T, m(A) = \mu(A)$.*

2. *S'il existe une suite* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ *telle que* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, $m(E_n) < +\infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, *alors* $\forall A \in T, m(A) = \mu(A)$.

Démonstration 38. *1. Soit* $D = \{A \in T : m(A) = \mu(A)\}$, *par définition de* D, *on a* $\boxed{D \subset T}$ *et* $\boxed{\mathcal{C} \subset D}$.

Comme $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie, on a d'après la proposition2.1.14,* $\boxed{\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = T}$.

Si, on montre que D *est un système de Dynkin, on aura* $\boxed{T = \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset D}$, *et donc* $D = T$, *d'où le résultat demandé. Montrons que* D *est un système de Dynkin :*

(a) $E \in D$ *car* $E \in \mathcal{C} \subset D$.

(b) *Soit* $A, B \in D$, *avec* $B \subset A$ *et* $m(E) = \mu(E) < +\infty$ *donc* $m(B) < m(A) < +\infty$, *et* $\mu(B) < \mu(A) < +\infty$, *donc* $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ *et* $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ *comme* $m(A) = \mu(A)$ *et* $m(B) = \mu(B)$, *on aura :* $m(A \setminus B) = \mu(A \setminus B)$, *de plus on a,* $A \setminus B \in T$, *d'où* $A \setminus B \in D$.

(c) *Soit* $(A_n)_n$ *une suite d'éléments de* T *deux à deux disjoints, telles que :* $m(A_n) = \mu(A_n)$, *pour tout* n *on a,*
$m(\bigcup_n A_n) = \sum_n m(A_n) = \sum_n \mu(A_n) = \mu(\bigcup_n A_n)$, *d'où* $\bigcup_n A_n \in D$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *pour* $A \in T$, *on pose* $m_n(A) = m(A \cap E_n)$ *et* $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$ *(on a* $A \cap E_n \in T$*). En particulier pour* $A \in C$, *on a* $A \cap E_n \in C$ *car* C *est stable par intersection finie, de plus* $m(A \cap E_n) = \mu(A \cap E_n)$ *donc* $\forall A \in C, m_n(A) = \mu_n(A)$, *de plus* $m_n(E) = m(E \cap E_n) < m(E_n) < +\infty$. *L'ensemble* $D = \{A \in T : m(A) = \mu(A)\}$ *est stable par différence finie, il est aussi stable par union dénombrable disjointe. Comme* $E_n \in C \subset D$, *on a* $E = \bigcup_n E_n \in D$, *donc* D *est un système de Dynkin. En suivant le même raisonnement que précédement on aura, pour tout* $A \in T$, $m_n(A) = \mu_n(A)$.
D'où, pour tout $A \in T$ *on a,*

$$\begin{aligned} m(A) = m(A \cap E) = m(\bigcup_n (A \cap E_n)) &= \sum m(A \cap E_n) \\ &= \sum \mu(A \cap E_n) = \mu(\bigcup_n (A \cap E_n)) = \mu(A). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.1. *(Théorème de prolongement) Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre et* ν *une application de* $\mathcal{A}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *vérifiant :*

1. $\nu(\emptyset) = 0$,
2. *Pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *de parties disjointes deux à deux, on a :*
$\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}})A_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$.
Alors il existe une mesure m *sur* $\sigma(\mathcal{A})$ *qui prolonge* ν .

Si de plus ν *vérifie la propriétée de* σ*-finie, alors* m *est unique et est* σ*-finie.*
L'application ν *est appelée prémesure.*

Remarque 2.2.3. *Une prémesure est définie sur une algèbre, tandis qu'une mesure est définie sur une tribu.*

2.3 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Théorème 2.3.1. *(Carathéodory) Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, vérifiant :*

$$\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha,$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ telle que $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

Démonstration 39. *<u>Partie unicité</u> : Supposons, qu'il existe une autre mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui vérifie les conditions du théorème et montrons que $m = \lambda$, pour celà On utilisera la proposition sur l'égalité des mesures.*
Soit $\mathcal{C} = \{]a, b], a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$, on sait que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie (facile à vérifier).
Soit $E_n =]n, n+1]$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La famille $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n$ et $m(E_n) = 1 < +\infty$. Pour $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, on a par continuité décroissante de m et de μ,

$$\begin{aligned}
m(]a,b]) &= m(\bigcap_{n\geq 1}]a, b + \frac{1}{n}[) \\
&= \lim_{n\to+\infty} m(]a, b + \frac{1}{n}[) \text{ car } (]a, b + \frac{1}{n}[)_{n\geq 1} \text{ est une suite décroissante} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lambda(]a, b + \frac{1}{n}[) \text{ car par hypothèse } m(]a, b[) = b - a = \lambda(]a, b[) \text{ pour tout réels } a, b, a \leq b \\
&= \lambda(\bigcap_{n\geq 1}]a, b + \frac{1}{n}[) \\
&= \lambda(]a, b]).
\end{aligned}$$

Donc $\lambda = m$ sur $\mathcal{C}$, et d'après la poposition2.2.3, on a $\lambda = m$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
<u>Partie existence</u> : voir à la fin de ce chapitre la section sur la construction de la mesure de Lebesgue. ■

Proposition 2.3.1. *(Caractérisation de la mesure de Lebesgue) S'il existe une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que pour tout intervalle I et tout x de $\mathbb{R}$, on ait $m(I) = m(I + x)$ (avec $I + x = \{a + x, a \in I\}$) et $m[0, 1] = 1$. Alors m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Démonstration 40. *$m(I) = m(I + x)$ pour tout intervalle I, en particulier pour $I = [0, 0] = \{0\}$, on a : $m(\{0\}) = m(\{x\})$ pour tout x de $\mathbb{R}$.*
Donc si $m(\{0\}) = \alpha$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = \alpha$, avec $\alpha \geq 0$. Montrons que $\alpha = 0$, supposons

que $\alpha > 0$ *et soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors :*

$$\begin{aligned}
0 < \tfrac{1}{n} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \{\tfrac{1}{n}\} \subset [0,1] \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_n \{\frac{1}{n}\} \subset [0,1] \\
&\Rightarrow \quad m(\bigcup_n \{\frac{1}{n}\}) \leq m([0,1]) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \sum_n m(\{\frac{1}{n}\}) \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \sum_n \alpha \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \alpha \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} n\alpha \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad +\infty \leq 1 \quad \textit{absurde.}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha = 0$, *c'est à dire on a montré que* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, m(\{x\}) = 0}$.
Par conséquent

$$\boxed{m([a,b]) = m(]a,b[) = m([a,b[) = m(]a,b])}.$$

Montrons que $m([a,b]) = b-a$. *Soit* $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
[a,b[= \bigcup_{i=a}^{b-1} [i,i+1[\quad &\Rightarrow \quad m([a,b[) = m(\bigcup_{i=a}^{b-1} [i,i+1[) \\
&\Rightarrow \quad m([a,b[) = \sum_{i=a}^{b-1} m([i,i+1[) \textit{ car les intervalles } [i,i+1[\\
&\qquad \textit{sont disjoints deux à deux} \\
&\Rightarrow \quad m([a,b[) = \sum_{i=a}^{b-1} m([0,1[+i) \\
&\Rightarrow \quad m([a,b[) = \sum_{i=a}^{b-1} m([0,1[) \textit{ car par hypothèse, on a pour tout intervalle } I \\
&\qquad \textit{et tout réel } x, m(I+x) = m(I) \\
&\Rightarrow \quad m(]a,b[) = \sum_{i=a}^{b-1} m([0,1]) \textit{ car on a } m([a,b[) = m([a,b]) = m(]a,b[) \\
&\Rightarrow \quad m(]a,b[) = \sum_{i=a}^{b-1} 1 \textit{ car par hypothèse, on a } m([0,1]) = 1 \\
&\Rightarrow \quad m(]a,b[) = b-a.
\end{aligned}$$

Soit $a, b \in \mathbb{Q}$, *avec* $a = \frac{a_1}{q}$ *et* $b = \frac{b_1}{q}$ *c'est à dire* $[a,b[= [\frac{a_1}{q}, \frac{b_1}{q}[$,

$$\begin{aligned}
[\tfrac{a_1}{q},\tfrac{b_1}{q}[=\bigcup_{i=a_1}^{b_1-1}[\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[\quad &\Rightarrow \quad m([\tfrac{a_1}{q},\tfrac{b_1}{q}[)=m(\bigcup_{i=a_1}^{b_1-1}[\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[)\\
&\Rightarrow \quad m([a,b[)=\sum_{i=a_1}^{b_1-1}m([\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[)\\
&\Rightarrow \quad m([a,b[)=\sum_{i=a_1}^{b_1-1}m([0,\frac{1}{q}[+\{\frac{i}{q}\})\\
&\Rightarrow \quad m([a,b[)=\sum_{i=a_1}^{b_1-1}m([0,\frac{1}{q}[),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{m([a,b[)=(b_1-a_1)m([0,\frac{1}{q}[)}. \tag{2.11}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
m([0,1[) &= m(\bigcup_{i=0}^{q-1}[\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[) \text{ car } [0,1[=\bigcup_{i=0}^{q-1}[\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[\\
&= m(\sum_{i=0}^{q-1}m([\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[)\\
&= \sum_{i=0}^{q-1}m([0,\frac{1}{q}[+\{\frac{i}{q}\})\\
&= \sum_{i=0}^{q-1}m([0,\frac{1}{q}[)\\
&= qm([0,\tfrac{1}{q}[)\\
&\Rightarrow m([0,\tfrac{1}{q}[)=\tfrac{m([0,1[)}{q},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{m([0,\frac{1}{q}[)=\frac{1}{q}}, \tag{2.12}$$

et en substituons l'equation (2.12) *dans*(2.11), *on obtient*

$$\boxed{m([a,b[)=(b_1-a_1)\frac{1}{q}=b-a}.$$

Soit $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
m([a,b[) &= m([0,b-a[+\{a\})\\
&= m([0,b-a[)\\
&= m([0,\gamma[\text{ avec } \gamma=b-a\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pour tout réel (et en particulier pour γ*), il existe deux suites de nombres rationnels* $(r_n)_n$ *décroissante et* $(s_n)_n$ *croissante qui vérifient,*

$$\gamma-\frac{1}{n}\le r_n\le\gamma \text{ et } \gamma\le s_n\le\gamma+\frac{1}{n},$$

ce qui implique

$$\lim r_n = \lim s_n = \gamma \text{ et } [0, r_n[\subset [0, \gamma[\subset [0, s_n[.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
[0, r_n[\subset [0, \gamma[\subset [0, s_n[\quad &\Rightarrow \quad m([0, r_n[) \leq m([0, \gamma[) \leq m([0, s_n[) \\
&\Rightarrow \quad r_n \leq m([0, \gamma[) \leq s_n \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} r_n \leq \lim_{n \to +\infty} m([0, \gamma[) \leq \lim_{n \to +\infty} s_n \\
&\Rightarrow \quad \gamma \leq m([0, \gamma[) \leq \gamma \\
&\Rightarrow \quad m([0, \gamma[) = \gamma \\
&\Rightarrow \quad m([a, b[) = b - a.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.2. *(Invariance par translation) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\}$, on a alors :*

1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
2. $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $\alpha = 1$, cette propriété s'appelle invariance par translation de λ.

Pour la preuve, voir l'exercice 10, page 69

Remarque 2.3.1. *La mesure de Lebesgue est diffuse, c'est à dire que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(D) = 0$, ainsi $\lambda(N) = \lambda(Z) = \lambda(Q) = 0$.*

2.3.1 Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$

Définition 2.3.1. *(Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$)*
Soit $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); B \subset I\}$, où I est muni par la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$, la restriction de la mesure de Lebesgue λ à la tribu T est une mesure sur T donc sur les boréliens de I car $T = \mathcal{B}(I)$

2.4 Indépendance et probabilité conditionnelle

2.4.1 Probabilité conditionnelle

Définition 2.4.1. *Soit $(E, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, $B \in T$ tel que $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A par rapport à B, notée $\mathbb{P}(A|B)$ est définie par, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.*

De la définition pécédente, on peut déduire immédiatement que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) \text{ (Formule de Bayes).}$$

Proposition 2.4.1. *Soit $(E, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in T$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors l'application $\mathbb{P}_A$ définie de T dans $[0, 1]$ par :*

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

est une probabilité sur T.

Démonstration 41. *1. Montrons que $\mathbb{P}_A(\emptyset) = 0$,*

$$\mathbb{P}_A(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \emptyset)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(A)} = 0.$$

2. Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de T, deux à deux disjoints, montrons la $\sigma-$sous aditivité,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(\cup_n A_n) &= \mathbb{P}(\cup_n A_n|A)\\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (\cup_n A_n))}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\cup_n (A \cap A_n))}{\mathbb{P}(A)}.\end{aligned}$$

Comme les $(A \cap A_n)$ sont aussi deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(\cup_n A_n) &= \sum_n \frac{\mathbb{P}(A \cap A_n)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \sum_n \mathbb{P}_A(A_n).\end{aligned}$$

3. Montrons que $\mathbb{P}_A(E) = 1$,

$$\mathbb{P}_A(E) = \mathbb{P}(E|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$$

■

Corollaire 2.4.1. *Soient $(E, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ une partition de E, telle que $\mathbb{P}(C_n) \neq 0$ alors pour tout $A \in T$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}(A|C_n)$.*

La preuve de ce corollaire est laissée au lecteur.

2.4.2 Evénements indépendants

Définition 2.4.2. *(Indépendance de deux événements) Soit $(E, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on dit que deux événements A et B sont (stochastiquement) indépendants si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

Proposition 2.4.2. *1. Si A et B sont indépendants alors A et B^C sont indépendants.*

2. Si A et B sont indépendants, A et C sont indépendants et $B \subset C$ alors A et $C \setminus B$ sont indépendants ($C \setminus B = C \cap B^c$).

3. Tout événement est indépendant, de tout événement de probabilité égale à zéro ou un.

4. Soit $(A_n)_n$ une suite deux à deux incompatibles. Si A est indépendant de A_n pour tout n, alors A est indépendant de $\bigcup_n A_n$.

Démonstration 42. *1. Nous avons $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et nous montrons que $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B^c))\\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)P(B^c)),\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) \text{ car } A \cap B \subset A\\ &= \mathbb{P}(A \cap (A \cap B)^c)\\ &= \mathbb{P}(A \cap (A^c \cup B^c)\\ &= \mathbb{P}((A \cap A^c) \cup (A \cap B^c))\\ &= P(\emptyset \cup (A \cap B^c))\\ &= \mathbb{P}(A \cap B^c).\end{aligned}$$

2. *Nous avons $B \subset C$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ et nous montrons que $\mathbb{P}(A \cap (C \cap B^c) = P(A)\mathbb{P}(C \cap B^c)$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C \cap B^c) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C \setminus B)\\ &= \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)) \text{ car } B \subset C \text{ et } \mathbb{P} \text{ est finie}\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ &= \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \text{ car } B \subset C \text{ et donc } A \cap B \subset A \cap C\\ &= \mathbb{P}((A \cap C) \cap (A^c \cup B^c))\\ &= \mathbb{P}((A \cap C \cap (A^c) \cup (A \cap C \cap B^c))\\ &= \mathbb{P}(\emptyset \cup (A \cap C \cap B^c))\\ &= \mathbb{P}(A \cap C \cap B^c).\end{aligned}$$

3. *Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0$, montrons que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. On a*

$$\begin{aligned}A \cap B \subset A \text{ et } P \text{ est une probabilité } &\Rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0\\ &\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

c'est à dire que les deux événements A et B sont indépendants.
Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 1$, montrons que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
$\mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 0$ *donc d'après ce qui précède A^c et B sont indépendants et d'après 1. de la proposition, A et B sont indépendants.*

4. *Soient A un événement et $(A_n)_n$ une suite d'événements deux à deux incompatibles (disjoints) tels que $\mathbb{P}(A \cap A_n) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_n)$ pour tout n.*
Montrons que $\mathbb{P}(A \cap \mathbb{P}(\bigcup_n A_n)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bigcup_n A_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap (\bigcup_n A_n)) &= \mathbb{P}(\bigcup_n (A \cap A_n)) \\
&= \sum_n \mathbb{P}(A \cap A_n) \text{ car les } A \cap A_n \text{ sont deux à deux disjoints} \\
&= \sum_n \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_n) \text{ par hypothèses} \\
&= \mathbb{P}(A) \sum_n \mathbb{P}(A_n) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \text{ car les } A_n \text{ sont deux à deux disjoints .}
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.4.2. *Soit D_A l'ensemble des événements indépendants d'un événement donné A. Alors D_A est un système de Dynkin.*

Démonstration 43. *Découle immédiatement de la proposition 2.4.2, en posant $D_A = \{B \in T; B \text{ est indépendants de } A\}$, tout en tenant compte de $\mathbb{P}(E) = 1$, avec $(E, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

Définition 2.4.3. *Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite finie ou infinie d'évènements. On dit que les évènements $A_1, A_2, ...$ sont mutuelemnt indépendants (ou globalement indépendants, ou indépendants dans leur ensemble), s'il vérifie : $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$ pour tout $I \subset \{1, 2, \ldots\}$.*

Remarque 2.4.1. *Soit la suite finie $(A_n)_{1\leq n\leq m}$ qui se compose de m ($m \geq 2$) évènements, alors le nombre de conditions imposées, c'est à dire le nombre de sous ensembles I, $I \subset \{1, \ldots, m\}$, est égal à :*

$$C_2^m + C_4^m + C_2^m + ... + C_m^m = 2^m - m - 1 \text{ où } C_k^m = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

2.4.3 Indépendance de classes d'événements

Soit $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 2.4.4. *Soient C_1 et C_2 deux classes d'événements. On dit que C_1 et C_2 sont indépendantes si :*

$$\forall A_1 \in C_1, \forall A_2 \in C_2 : A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont indépendants.}$$

La suite $(C_n)_{n\in J\subset\mathbb{N}}$ (finie ou infinie) est une suite de classes mutuellement indépendantes si pour toute sous suite finie $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ extraite de la suite (C_n) et pour toute suite d'événements $A_{i_1} \in C_{i_1}, A_{i_2} \in C_{i_2}, \ldots, A_{i_k} \in C_{i_k}$, on a :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{ik}) = \mathbb{P}(A_{i_1}).\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Autrement dit : La suite $(C_n)_{n\in J\subset\mathbb{N}}$ (finie ou infinie) est une suite de classes mutuellement indépendantes si Pour tout $I \subset J$, I fini, on a : $\mathbb{P}(\bigcap_{k\in I} A_k) = \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_i)$, avec $A_i \in C_i$ pour $i \in J$.

Corollaire 2.4.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, si les tribus engendrées $\sigma(\{A_1\}), \ldots, \sigma(\{A_n\})$ sont indépendantes, alors les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants.*

Démonstration 44. *La preuve découle de la définition des événements indépendants et de celle de l'indépendance des classes d'événements, sachant que les tribus sont des classes d'événements.*

Proposition 2.4.3. *(Indépendance des tribus) Soient $(E, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de tribus incluse dans T. Soit $N > 1$. Les N tribus $T_1, T_2, \ldots, T_N$ sont indépendantes si et seulement si pour toute famille $(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ d'événements tels que $A_k \in T_k$ pour $k = 1, \ldots, N$ on a :*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_N)$$

Démonstration 45.

1. *Supposons que $T_1, T_2, \ldots, T_N$ sont indépendantes, c'est à dire Pour tout $I \subset \{1, 2, \ldots, N\}$, on a : $\mathbb{P}(\bigcap_{k\in I} A_k) = \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_K)$, avec $A_i \in T_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$,*

   en particulier pour $I = \{1, 2, \ldots, N\}$, on a $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_N)$.

2. *Supposons que pour toute famille $(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ d'événements tels que $A_k \in T_k$ pour $k = 1, \ldots, N$ on a, $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_N)$.*

   Soit $I \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ et soit $A_k \in T_k$, pour $k = 1, \ldots, N$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{k\in I} A_k) &= \mathbb{P}(\bigcap_{k\in I} A_k \bigcap_{k\in I^c} A_k) \text{ avec } \forall k \in I^c, A_k = \Omega \\
&= \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) \text{ avec } \forall k \in I^c, A_k = \Omega \text{ car } \{1, 2, ...N\} = I \cup I^c \\
&= \textstyle\prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k) \text{ avec } \forall k \in I^c, A_k = \Omega \\
&\quad \text{car } A_k \in T_k \text{ et les } T_k \text{ sont indépendantes} \\
&= \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_k) \prod_{k\in I^c} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_k) \prod_{k\in I^c} \mathbb{P}(\Omega) \\
&= \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_k) \text{ car } \mathbb{P}(\Omega) = 1.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.4.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des classes d'événements, si $C_1, C_2, ..., C_n$ sont indépendantes et stables par intersection finie alors, $\sigma(C_1), \ldots, \sigma(C_n)$ sont aussi indépendantes.*
En particulier : Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants, alors les tribus engendrées $\sigma(\{A_1\}), ..., \sigma(\{A_n\})$ sont indépendantes.

Démonstration 46. *On va juste donner les grandes lignes de la preuve. Pour plus de détail, voir le corrigé de l'examen final 2020-2021, où cette proposition a été transcrite en un petit problème.*

1. *On montre que* $\sigma(C) = \sigma(C')$*, où* $C' = C \cup \{\Omega\}$.
2. *Soit* $H = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}$, $k \geq 1$, $i_1, i_2, ..., i_k$ *des éléments distincts de* $\{1, 2, ..., n-1\}$ *et* $A_i \in C_i$*, pour* $i = 1, 2, ..., n-1$*. On définit deux mesures sur* $\sigma(C_n)$*, comme suit :* $\forall A \in \sigma(C_n), m_1(A) = \mathbb{P}(A \cap H)$ *et* $m_2(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(H)$.
   - *On montre que* $m_1 = m_2$ *sur* $\sigma(C_n)$*, en utilisant la proposition sur l'égalité de deux mesures, on déduit le résultat suivant :*
   - $C_1, C_2, ..., C_n$ *indépendantes et stables par intersection finie* $\Rightarrow$, $C_1, C_2, ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes.*
   - *On applique le résultat précédent pour obtenir* $\sigma(C_n), C_1, C_2, ..., \sigma(C_{n-1})$ *indépendant.*
   - *On continue le procédé jusqu'à obtenir* $\sigma(C_1), ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes.*

■

Proposition 2.4.5. *Si* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *sont deux algèbres d'événements, qui sont indépendantes, alors les tribus engendrées* $\sigma(\mathcal{A}_1)$ *et* $\sigma(\mathcal{A}_2)$ *sont aussi indépendantes.*

Démonstration 47. *Par définition, une algèbre est stable par intersection finie, donc cette proposition est un cas particulier de la proposition précédente.*

Lemme 2.4.1. *(de Borel Cantelli)*
1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'événements telle que*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

alors

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0.$$

2. Soit $(An)_{n\geq 1}$ *une suite d'événements indépendants telle que*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$$

alors

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$

Démonstration 48. *1. Posons* $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k)$ *et* $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n)$*, on a donc :*

$$\begin{aligned}
0 \le \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) \text{ par continuité décroissante de } P \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k\ge n} A_k) \text{ par déinition de } B_n \\
&\le \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\ge n} \mathbb{P}(A_k)) \text{ par } \sigma \text{ sous additivité de } P \\
&= 0, \text{ car } \sum_{k\ge n} \mathbb{P}(A_k)) \text{ est le reste de la série convergente } \sum_{n\ge1} \mathbb{P}(A_k)).
\end{aligned}$$

2. *On a,*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c),$$

or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c) &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n^c) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\bigcap_{k\ge n} A_k^c) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\ge n} \mathbb{P}(A_k^c) \text{ car } A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c \text{ sont indépendants} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\ge n} (1 - \mathbb{P}(A_k)).
\end{aligned}$$

(a) *S'il existe $k \ge n$ tel que $\mathbb{P}(A_k) = 1$, on a :*

$$\begin{aligned}
\forall k \ge n, A_k &\subset B_n \\
&\Rightarrow 1 = \mathbb{P}(A_k) \le \mathbb{P}(B_n) \le 1 \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(B_n) = 1 \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1 \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 1 \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1.
\end{aligned}$$

(b) *Si $\forall k \ge n, \mathbb{P}(A_k) < 1$, on a :*

$$\begin{aligned}
\prod_{k\geq n}(1-\mathbb{P}(A_k)) &= \lim_{m\to+\infty}\prod_{k=n}^{m}(1-\mathbb{P}(A_k)) \\
&= \lim_{m\to+\infty}\exp[\ln(\prod_{k=n}^{m}(1-\mathbb{P}(A_k)))] \\
&= \lim_{m\to+\infty}\exp[\sum_{k=n}^{m}\ln(1-\mathbb{P}(A_k)] \\
&\leq \lim_{m\to+\infty}\exp[\sum_{k=n}^{m}(-\mathbb{P}(A_k))] \\
&= \exp[\sum_{k=n}^{+\infty}(-\mathbb{P}(A_k))] \\
&= \exp[\sum_{k=1}^{+\infty}(-\mathbb{P}(A_k))] \\
&= 0 \textit{ car par hypothèse on a } \sum_{k=1}^{+\infty}(\mathbb{P}(A_k)) = +\infty \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c) = 0 \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 1 \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1.
\end{aligned}$$

■

2.5 Caractérisation d'une mesure par sa fonction de répartition

Définition 2.5.1. *(Fonction de répartition) Soit μ une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de μ, la fonction F définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ par :*

$$F(t) = \mu(]-\infty, t]).$$

La fonction F est croissante et continue à droite, et vérifie :

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R}).$$

Démonstration 49. *1. F est croissante, en effet : soit t_1 et t_2 deux réels*

$$\begin{aligned}
t_1 \leq t_2 &\Rightarrow\ ]-\infty, t_1] \subset]-\infty, t_2] \\
&\Rightarrow \mu(]-\infty, t_1]) \leq \mu(]-\infty, t_2]) \textit{ monotonie de la mesure} \\
&\Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2) \textit{ par définition de la fonction de répartition d'une mesure.}
\end{aligned}$$

2. F est continue à droite : $\lim\limits_{t \overset{>}{\to} a} F(t) = F(a)$?

Comme F est croissante, il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle de la limite pour une suite convergente vers a.

Soit $(t_n)_{n\geq1}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par $t_n = a + \frac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = a$, montrons

que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n) = F(a)$.
Soit $A_n =]-\infty, t_n]$, *comme* $(t_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante, alors* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est aussi décroissante, donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1}]-\infty, a+\frac{1}{n}] =]-\infty, a]$ *(par double inclusion).*
D'après les propriétés d'une mesure, particulièrement la monotonie décroissante, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \quad &\Rightarrow \quad \mu(\bigcap_{n\geq 1}]-\infty, a+\frac{1}{n}]) = \lim_{n\to+\infty} \mu(]-\infty, a+\frac{1}{n}]) \\
&\Rightarrow \quad \mu(]-\infty, a]) = \lim_{n\to+\infty} F(a+\frac{1}{n}) \\
&\Rightarrow \quad F(a) = \lim_{n\to+\infty} F(a+\frac{1}{n}) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, F(a+\tfrac{1}{n}) - F(a) \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat obtenu, montrons que
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t, 0 < t - a < \delta \Rightarrow F(t) - F(a) \leq \epsilon$.
Comme F *est croissante, il suffit de choisir* $\delta < \frac{1}{n}$, *pour avoir :*
pour tout t, *telque* $0 < t \leq a + \delta$, *:*
$t \leq a + \delta \leq a + \frac{1}{n} \Rightarrow F(t) \leq F(a+\delta) \leq F(a+\frac{1}{n}) \leq F(a) + \epsilon$,
d'où $F(t) - F(a) \leq \epsilon$, *c'est à dire* $\lim\limits_{t \overset{>}{\to} a} F(t) = F(a)$.

3. $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$ *?*
Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ *la suite d'éléments de* $\mathbb{R}$ *définie par* $t_n = -n$, *ona* $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$, *montrons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n) = 0$.
Soit $B_n =]-\infty, t_n]$, *comme* $(t_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante, alors* $(B_n)_{n\geq 1}$ *est aussi décroissante, donc d'après le cours,* $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} B_n = \bigcap\limits_{n\geq 1}]-\infty, -n] = \emptyset$ *(par double inclusion).*
D'après la monotonie décroissante d'une mesure, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcap_{n\geq 0} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) \quad &\Rightarrow \quad \mu(\bigcap_{n\geq 0}]-\infty, -n]) = \lim_{n\to+\infty} \mu(]-\infty, -n)) \\
&\Rightarrow \quad \mu(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} F(-n) \\
&\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n\to+\infty} F(-n) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, F(-n) \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent, montrons que
$\forall \epsilon > 0, \exists B < 0, \forall t, 0 < t < B \Rightarrow F(t) \leq \epsilon$.
Comme F *est décroissante, il suffit de choisir* $B < -n$, *pour avoir :*
pour tout t, *telque* $0 < t \leq B$,
$t \leq B \leq -n \Rightarrow F(t) \leq F(B) \leq F(-n) \leq \epsilon$,
d'où $F(t) \leq \epsilon$, *c'est à dire* $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$

4. $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R})$ *?*
Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ *la suite d'éléments de* $\mathbb{R}$ *définie par* $t_n = +n$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, *montrons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n) = \mu(\mathbb{R})$.
Soit $B_n =]-\infty, t_n]$, *comme* $(t_n)_{n\geq 0}$ *est croissante, alors* $(B_n)_{n\geq 0}$ *est aussi croissante,*

donc d'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} B_n = \bigcup\limits_{n\geq 0}]-\infty,+n] = \mathbb{R}$ *(par double inclusion).*
D'après la monotonie croissante d'une mesure, on a :

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{n\geq 0} B_n) = \lim_{n\to+\infty}\mu(B_n) \quad &\Rightarrow \quad \mu(\bigcup_{n\geq 0}]-\infty,n]) = \lim_{n\to+\infty}\mu(]-\infty,n])\\ &\Rightarrow \quad \mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to+\infty} F(n)\\ &\Leftrightarrow \quad \forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \mu(\mathbb{R})-F(n)\leq\epsilon.\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent, montrons que
$\forall\epsilon>0, \exists A>0, \forall t, t>A \Rightarrow \mu(\mathbb{R})-F(t)\leq\epsilon$.
Comme F *est décroissante, il suffit de choisir* $A>n$*, pour avoir :*
pour tout t*, telque* $t\geq A$*, :*
$t\geq A>n \Rightarrow F(t)\geq F(A)\geq F(n)\geq \mu(\mathbb{R})-\epsilon$,
ce qui implique $F(t)\geq\mu(\mathbb{R})-\epsilon$*, c'est à dire* $\mu(\mathbb{R})-F(t)\leq\epsilon$.

■

Exemple 2.5.1. *Si* $\mu=\delta_a$ *alors* $F=\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$*. De manière générale, si* $\mu=\sum\limits_n \alpha_n\delta_{x_n}$ *alors* $F=\sum\limits_n \alpha_n\mathbb{1}_{[x_n,+\infty[}$ *,* F *est discontinue en tout point où* $\alpha_n>0$ *et continue partout ailleurs.*

Proposition 2.5.1. *Soit* μ *une mesure finie sur les boréliens de* $\mathbb{R}$*,* a *et* b *deux réels tels que* $a\leq b$ *et soit* F *la fonction de répartition de* μ*. On note par par* $F(x^-)$ *la limite de* F *à gauche de* x *et par* $F(x^+)$ *la limite de* F *à droite de* x*, avec* $x\in\mathbb{R}$*. Alors* F *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\mu(]a,b])=F(b)-F(a)$,
2. $\mu(\{x\})=F(x)-F(x^-)=F(x^+)-F(x^-)$,
3. μ *est diffuse si et seulement si* F *est continue,*
4. $\mu([a,b])=F(b)-F(a^-)$,
5. $\mu(]a,b[)=F(b^-)-F(a)$,
6. $\mu([a,b[)=F(b^-)-F(a^-)$.

Démonstration 50.
1. $\mu(]a,b])=\mu(]-\infty,b]\backslash]-\infty,a])=\mu(]-\infty,b])-\mu(]-\infty,a])=F(b)-F(a)$ *car* $]-\infty,a]\subset]-\infty,b]$.
2. *On rappelle un résultat d'analyse (voir analyse 1, L1 MI) : Si* f *est une fonction monotone sur un intervalle, alors* f *admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point* x *appartenant à l'interieur de cet intervalle.*
3. *Soit* $C_n=]x-\frac{1}{n},x]$ $(n\geq 1)$*,* $(C_n)_n$ *est une suite décroissante, donc par continuité décroissante d'une mesure on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(C_n)=\mu(\cap C_n)=\mu(\{x\})$*, d'autre par* $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(C_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(F(x)-F(x-\dfrac{1}{n}))=F(x)-F(x^-)$*, et comme* F *est continue à droite de tout réel, on a* $F(x)=F(x^+)$.
   F *continue* $\Leftrightarrow F(x^-)=F(x^+)\Leftrightarrow \mu(\{x\})=0$ *avec* x *un réel quelconque, ce qui est équivalent à* μ *diffuse.*

4. $\mu([a,b]) = \mu(\{a\} \cup]a,b]) = \mu(\{a\}) + \mu(]a,b])$ *et on utilise ce qui prècéde.*

5. $\mu(]a,b[) = \mu(]a,b] \setminus \{b\}) = \mu(]a,b]) - \mu(\{b\})$ *et on utilise ce qui précède.*

6. $\mu([a,b[) = \mu(\{a\} \cup]a,b[) = \mu(\{a\}) + \mu(]a,b[)$ *et on utilise ce qui précède.*

■

Théorème 2.5.1. *Deux mesures finies sur* $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *de même fonction de répartition sont égales.*

Démonstration 51. *On applique le théorème sur l'égalité des mesures.*
Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \{\mathbb{R}\}$*, avec* $\mathcal{C}_1 = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie et* $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$ *on a,*
d'une part $\sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *donc* $\sigma(\mathcal{C}_1) \cup \{\mathbb{R}\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *car* $\{\mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*
D'autre part $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_1 \cup \{\mathbb{R}\} \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \cup \{\mathbb{R}\} = \sigma(\mathcal{C}_1)$ *donne* $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \cup \{\mathbb{R}\}) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ *d'où* $\sigma(\mathcal{C}_1 \cup \{\mathbb{R}\}) = \sigma(\mathcal{C}_1)$ *donc* $\boxed{\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

Soient m *et* μ*, deux mesures de même fonction de répartition, c'est à dire ; pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,* $F(t) = m(]-\infty, t])$ *et* $F(t) = \mu(]-\infty, t])$*,*
comme de plus $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = m(\mathbb{R})$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R})$*, on en déduit,*
que $\forall A \in \mathcal{C}$*,* $m(A) = \mu(A)$ *(les deux mesures coincident sur* $\mathcal{C}$*).*
D'après la proposition sur l'égalité des mesures on a $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $m(A) = \mu(A)$ *(c'est à dire les deux mesures sont égales).* ■

Théorème 2.5.2. *Pour toute fonction* F *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, croissante et continue à droite, il existe une unique mesure* m *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q. pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$*, t.q.* $a \leq b$*, on ait*
$m(]a,b]) = F(b) - F(a)$*.*
Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F.

Cas particulier Si F est l'application identique, on retrouve la mesure de Lebesgue.

Mesure discrète

Définition 2.5.2. *(mesure discrète) Soit* (E, T, m) *un espace mesurable, la mesure* m *est dite discrète si elle s'écrit sous la forme :*

$$m := \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \delta_{a_i}$$

où $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* E *et* $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs.*
Si de plus $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \alpha_i = 1$*,* m *est une probabilité discrète.*

Exemple 2.5.2. *(L'équirépartition sur les ensembles finis). Soient* N *un entier strictement positif et* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ *un ensemble fini. L'équirépartition sur* Ω *est définie comme la mesure de probabilité :*

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \delta_{\omega_i}.$$

En particulier, $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/N$ pour tout $n = 1, 2, \ldots, N$. En désignant par card A le cardinal de l'ensemble A ($A \subset \Omega$), on a, de plus, la formule :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \delta_{\omega_i}(A) = \frac{\displaystyle\sum_{\omega_i \in A} 1}{\displaystyle\sum_{\omega_i \in \Omega} 1} = \frac{cardA}{card\Omega}.$$

Formule de poincaré

Proposition 2.5.2. *Soit μ une mesure finie sur (E, T). Pour tout entier $n \geq 2$ et tous $A_1, A_2, ..., A_n \in T$, on a :*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Démonstration 52. *Par récurrence sur n, le cas $n = 2$ a été traité à la proposition 2.2.2*

Cas particulier en remplaçant μ par la mesure de Dirac, on obtient :

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}}.$$

2.6 Espaces mesurés complets

Soit (E, T, m) est un espace mesuré.

Définition 2.6.1. *Si toutes les parties de E m- negligeables sont mesurables, on dit que l'espace (E, T, m) est complet.*
NB *: ne pas confondre, espace espace métrique complet avec espace mesuré complet.*

Théorème 2.6.1. *Soient (E, T, m) est un espace mesuré et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties m-négligeables de E. On considère*

$$\bar{T} = \{A \cup N : A \in T \text{ et } N \in \mathcal{N}\}.$$

Pour tout $A \in T$ et pour tout $N \in \mathcal{N}$, on pose $\bar{m}(A \cup N) = m(A)$. Alors

1. *$\bar{T}$ est une tribu sur E contenant T,*
2. *$\bar{m}$ est une mesure (positive) sur $\bar{T}$ qui coincide avec m sur T,*
3. *Si on note $\bar{\mathcal{N}}$ la famille des sous ensembles de E, $\bar{m}$- négligeables alors $\bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$,*
4. *$(E, \bar{T}, \bar{m})$ est un espace mesuré complet et il est appelé le complété de l'espace mesuré (E, T, m).*

Pour la preuve voir [1].

2.7 Construction de la mesure de Lebesgue

Définition 2.7.1. *Soit E un ensemble. On appelle mesure extérieure sur E, toute application $m^* : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :*

1. $m^*(\emptyset) = 0$,
2. $m^*(A) \leq m^*(B)$ *si* $A \subseteq B$,
3. $m^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} m^*(A_n)$ *pour toute suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *de parties de* E.

Remarque 2.7.1. *Toute mesure positive définie sur $\mathcal{P}(E)$ est une mesure extérieure sur E.*

Proposition 2.7.1. *Toute mesure extérieure sur E qui vérifie $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$, où A et B sont des parties de E, est une mesure sur $\mathcal{P}(E)$.*

Démonstration 53. *Il suffit de montrer que $m^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \geq \sum_{n\geq 1} m^*(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties de E. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, par monotonie de m^*, on a pour tout $n \geq 1$,*

$$m^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \geq m^*(\bigcup_{k=1}^{p} A_k),$$

en utilisant l'additivité de m^*, on obtient :

$$m^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \geq \sum_{k=1}^{p} m^*(A_k),$$

par passage à la limite quand $p \to +\infty$, on a

$$m^*(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A_k).$$

■

Définition 2.7.2. *Soit E un ensemble et m^* est une mesure extérieure sur E. On dit q'une partie B de E est m^* mesurable (ou mesurable au sens de Carathéodory) si :*

$$\forall A \subseteq E, m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$$

L'ensemble des parties de E, m^* mesurables est noté $\mathcal{M}$.

Remarque 2.7.2. *L'ensemble $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire et contient l'ensemble $\emptyset$.*

Remarque 2.7.3. *En vertu de la σ- sous additivité, l'inégalité $m^*(A) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$ est toujours vérifiée ; pour vérifier qu'une partie B est m^* mesurable, il suffit donc de vérifier l'inégalité inverse $m^*(A) \geq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$ pour tout $A \subseteq E$.*

Proposition 2.7.2. *Si E un ensemble et m^* est une mesure extérieure sur E, alors l'ensemble $\mathcal{M}$ des parties de E, m^* mesurables est stable par union finie, c'est à dire*

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{M}, B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M},$$

avec

$$\mathcal{M} = \{B \subset E; \forall A \subseteq E, m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)\}.$$

Démonstration 54. *Pour tout $A \subset E$, on a par σ- sous additivité de m^*, on a :*

$$m^*(A) \leq m^*[A \cap (B_1 \cup B_2)] + m^*[A \cap (B_1 \cup B_2)^c],$$

il suffit de montrer :

$$m^*(A) \geq m^*[A \cap (B_1 \cup B_2)] + m^*[A \cap (B_1 \cup B_2)^c].$$

On a :

$$m^*[A \cap (B_1 \cup B_2)] + m^*[A \cap (B_1 \cup B_2)^c] = m^*[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)] + m^*[A \cap B_1^c \cap B_2^c].$$

Comme

$$\begin{aligned} (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) &= (A \cap B_1) \cup [(A \cap B_2 \cap B_1) \cup (A \cap B_2 \cap B_1^c)] \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2 \cap B_1^c) \text{ car } (A \cap B_2 \cap B_1) \subset (A \cap B_1). \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} m^*[A \cap \mathbb{P}(B_1 \cup B_2)] + m^*[A \cap \mathbb{P}(B_1 \cup B_2)^c] &\leq m^*(A \cap B_1) + m^*(A \cap B_2 \cap B_1^c \cap B_2^c] \\ &= m^*(A \cap B_1) + m^*(A \cap B_1^c) \text{ car } B_2 \text{ est } m^* \text{ mesurable} \\ &= m^*(A) \text{ car } B_1 \text{ est } m^* \text{ mesurable.} \end{aligned}$$

■

Remarque 2.7.4. *Par récurrence on a aussi :*

$$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}, \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}.$$

Proposition 2.7.3. *Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une suite finie d'éléments de $\mathcal{M}$, deux à deux disjoints alors on a :*

$$\forall A \subset E, m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)] = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap A_k).$$

Démonstration 55. *Par récurrence sur n.*

Corollaire 2.7.1. *Pour toute famille finie d'éléments de $\mathcal{M}$, deux à deux disjoints, on a :*

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k).$$

Démonstration 56. *Il suffit de prendre dans la proposition précédente* $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

Proposition 2.7.4. *Si* $(A_n)_n$ *est une suite infinie d'éléments de* $\mathcal{M}$*, deux à deux disjoints alors on a :*

1. $\cup A_n \in \mathcal{M}$,
2. $m^*(\cup A_n) = \sum_n m^*(A_n)$.

Démonstration 57. *Comme* $\mathcal{M}$ *est stable par union finie, on a pour tout* $A \subset E$ *et tout* $n \geq 1$ *:*

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)] + m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)^c] \\ &= sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap A_k) + m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)^c] \\ &\geq sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap A_k) + m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k)^c] \text{ car } \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k)^c \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k)^c. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$*, on obtient*

$$m^*(A) \geq \ sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap A_k) + m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k)^c], \tag{2.13}$$

d'où, en utilisant la σ*- sous additivité de* m^**,*

$$m^*(A) \geq m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k)] + m^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k)^c],$$

Ce qui prouve que $\cup A_n \in \mathcal{M}$.
De plus en prenant $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$*, dans linégalité 2.13, nous obtenons :*

$$m^*(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \geq \sum_{n \geq 1} m^*(A_n),$$

et en fait l'égalité

$$m^*(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} m^*(A_n),$$

car l'inégalité inverse est toujours vérifiée par σ*- sous additivité de* m^*. ■

Théorème 2.7.1. *(Théorème de Carathéodory (1918))Soit* E *un ensemble et* m^* *est une mesure extérieure sur* E*. Alors :*

1. *L'ensemble* $\mathcal{M}$ *des parties* m^* *mesurables est une tribu sur* E.
2. *La restriction* $\tilde{m}$ *de* m^* *à* $\mathcal{M}$ *est une mesure positive sur* $\mathcal{M}$*. De plus l'espace mesuré* $(E, \mathcal{M}, \tilde{m})$ *est complet.*

La mesure de Lebesgue

Soit $\mathcal{I} = \{]a, b[-\infty < a \leq b < +\infty\}$ l'ensemble de tous les intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$.

Définition 2.7.3. *La longueur d'un intervalle $I \in \mathcal{I}$ d'extrémités a et b, avec $-\infty < a \leq b < +\infty$, est*

$$l(I) = b - a.$$

Lemme 2.7.1. *Si $I, I_1, I_2, ..., I_k \in \mathcal{I}$ avec $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$. Alors*

$$l(I) \leq \sum_{j=1}^{k} l(I_j).$$

Théorème 2.7.2. *Si $I, I_1, I_2, I_3, ... \in \mathcal{I}$ avec $I \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$. Alors*

$$l(I) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} l(I_j).$$

Démonstration 58. *Soit $I =]a, b[$ et $I_j =]a_j, b_j[$, on suppose $l(I_j) < \infty$ pour tout $j \geq 1$ et soit $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < \frac{b-a}{2}$, on a :*

$$[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset]a, b[\subset \bigcup_{j=1}^{+\infty}]a_j, b_j[,$$

on applique le théorème de Heine Borel (de tout recouvrement ouvert d'un compact, on peut extraire un sous recouvrement fini) et par application du lemme précédent, on obtient :

$$l(I) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} l(I_j) + 2\epsilon.$$

■

Définition 2.7.4. *(La mesure extérieure de Lebesgue) L'application notée λ^* et définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :*

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq 1} l(I_n); I_n \in \mathcal{I}, \forall n \geq 1 \text{ et } A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n\},$$

est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$, appelée mesure extérieure de Lebesgue.

Lemme 2.7.2. *Pour tout $I \in \mathcal{I}$, on a $\lambda^*(I) = l(I)$.*

Démonstration 59. *Comme $I \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ est un recouvrement de I, par définition de λ^*, on a $\lambda^*(I) \leq l(I)$.*

Pour l'inégalité inverse, considérons un recouvrement quelconque $I \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, avec $I_1, I_2, ... \in \mathcal{I}$. Donc d'après le théorème 2.7.2, on a

$$l(I) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} l(I_j),$$

comme par définition l'inf est le plus grand des minorants, on a $\lambda^*(I) \geq l(I)$. ■

Définition 2.7.5. *(La tribu de Lebesgue) La tribu de Lebesgue est l'ensembles des parties de $\mathbb{R}$ qui sont λ^*-mesurables, elle est notée $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Donc*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{B \subset \mathbb{R}; \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c), \forall A \subseteq E\}.$$

Conséquence : D'après le théorème de Carathéodory, $\lambda^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}$ est une mesure.

Corollaire 2.7.2. *La tribu de Lebesgue contient la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

En conclusion $\lambda^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ est une mesure qui coincide avec l sur $\mathcal{I}$, cette mesure est notée λ et est appelée mesure de Lebesgue.

2.8 Exercices

2.8.1 Enoncés

Exercice 1. *Soit $\Omega = \{0, 1, 2\}$.*

1. *Donner toutes les tribus possibles sur Ω.*
2. *Montrer que la réunion de tribus n'est pas nécéssairement une tribu.*

Exercice 2 (Tribus images)**.** *Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application.*

1. *Montrer que si T est une tribu sur E, alors $T' = \{f(B), B \in T\}$ n'est pas toujours une tribu sur F.*
2. *On rappelle que si T est une tribu sur E, alors $T' = \{B \subset F; f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).*
   On rappelle aussi que si T' est une tribu sur F, alors $f^{-1}(T') = \{f^{-1}(B); B \in T'\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).
   Vérifir que $f^{-1}(T') \subset T$

Exercice 3. *Soit (E, T) un espace mesurable.*

1. *Soit $A \subset \mathcal{P}(E)$, avec $A \neq \{\emptyset\}$ et $A \neq \{E\}$. Déterminer $\sigma(A)$, $\sigma(\{\emptyset\})$ et $\sigma(\{E\})$.*
2. *Soit $(A_n)_{n \in I \subset \mathbb{N}}$ une partition de E.*
   (a) *Si I={1,2,3,....n}, quel est le cardinale de $\sigma((A_n)_{n \in I}) = \sigma(\{A_0, A_2, A_3, ..., A_n\})$*

(b) *Caractériser les éléments de* $\sigma((A_n)_{n\in I}) = \sigma(\{A_0, A_2, A_3, A_4, ...\})$ *pour,* $I = \{0,1\}$, $I = \{0,1,2\}$.

Exercice 4. *(lemme de transport) Montrer que pour tout ensemble* $\mathcal{C}$ *de parties de* F *ona*

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Indication :Pour montrer que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$, *montrer que* $\{G \subset F; f^{-1}(G) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$

Exercice 5. *Soit* E *un ensemble.*

1. *Soit* $\varepsilon = \{\{x\}; x \in E\}$ *et* $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(E), A$ *fini ou dénombrable ou* A^c *fini ou dénombrable*$\}$. *Montrer que* $\mathcal{A} = \sigma(\varepsilon)$.
2. *Montrer que si* E *est fini ou dénombrable, alors* $\sigma(\varepsilon) = \mathcal{P}(E)$.

Indication : on remarque que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ *avec* $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{P}(E), A$ *fini ou dénombrable* $\}$ *et* $\mathcal{A}_2 = \{A^c, A \in \mathcal{A}_1\}$.

Exercice 6. *Soit* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *l'ensemble des parties de* $\mathbb{N}$ *et* $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ *l'ensemble des parties de* $\mathbb{N}^2$.

1. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *est- elle une tribu ?*
2. *Monter que* $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$

Exercice 7. *(mesure trace et restriction d'une mesure) Soit (E,T,m) un espace mesuré.*

1. *soit* $F \in T$. *Montrer que la tribu trace de de T sur F, notée* T_F *est incluse dans T. Montrer que la restriction de m à* T_F *est une mesure sur* T_F. *On l'appellera la trace de m sur F.Si m(F)est fini, cette mesure est fini.*
2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une tribu incluse dans T. La restriction de m à* $\mathcal{A}$ *est une mesure, est elle finie (resp* σ *finie) si m est finie (resp* σ *finie).*

Exercice 8. *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré fini et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *telque pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. *Montrer que*

$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E).$$

Exercice 9. *(limites sup et inf d'ensembles)*
Soit (E,T,m) *un espace mesuré et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$.
On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p$ *et* $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p$. *On suppose qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $m(\bigcup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$. *Montrer que*

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

Exercice 10. *Soient* $a \in \mathbb{R}^*$ *fixé et* $T_a = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A+a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *où* $A+a = \{x+a; x \in A\}$.

1. *Montrer que* T_a *est une tribu sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T_a$.

3. *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $m(A) = \lambda(A + a)$,*
   (a) *Montrer que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,*
   (b) *En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(A + a) = m(A)$.*

Exercice 11. *(Lemme de Borel-Cantelli)*
Soient (E, T, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On pose $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ et $A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$

1. *Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < \infty$ alors $P(A) = 0$.*
2. *On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont indépendants. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \infty$ alors $P(A) = 1$.*
   Indication : $\forall x < 1, \ln(1 - x) \leq -x$.

Exercice 12. *Soit μ une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}$, a et b deux réels tels que $a \leq b$ et soit F la fonction de répartition de μ. On note par par $F(x^-)$ la limite de F à gauche de x et par $F(x^+)$ la limite de F à droite de x, avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :*

1. $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$,
2. $\mu(\{x\}) = F(x) - F(x^-) = F(x^+) - F(x^-)$.
3. *μ est diffuse si et seulement si F est continue.*
4. $\mu([a, b]) = F(b) - F(a^-)$,
5. $\mu(]a, b[) = F(b^-) - F(a)$,
6. $\mu([a, b[) = F(b^-) - F(a^-)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 13. *Soient T_1 et T_1 deux tribus sur un ensemble E. On considère les sous ensembles de $\mathcal{P}(E)$*

$$F_1 = \{A_1 \cap A_2 / A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\} \text{ et } F_2 = \{A_1 \cup A_2 / A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}$$

Montrer que $\sigma(F_1) = \sigma(F_1)$

Exercice 14. *(mesure complété) Soit (E, T, m) un espace mesuré et Soit $\mathcal{N}_m = \{N \subset E / \exists B \in T, N \subset B \text{ et } m(B) = 0\}$ et $\bar{T} = \{A \cup N / A \in T, N \in \mathcal{N}_m\}$.*

1. *Montrer que $\bar{T}$ est une tribu sur E et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \bar{T}$*
2. *Soit A_1, $A_2 \in T$ et N_1, $N_2 \in \mathcal{N}_m$ tel que $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$.Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$, soit donc l'application $\bar{m} : \bar{T} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ définie par $\bar{m}(A \cup N) = m(A)$*
3. *Montrer que $\bar{m}$ est une mesure sur $\bar{T}$ et $\bar{m}_{/T} = m$. Montrer que $\bar{m}$ est la seule mesure sur $\bar{T}$ égale à m sur T.*
4. *Soit $\mathcal{N}_{\bar{m}} = \{N \subset E / \exists B \in \bar{T}, N \subset B \text{ et } \bar{m}(B) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{N}_{\bar{m}} = \mathcal{N}_m \subset \bar{T}$.*

Exercice 15. *Soit μ une mesure finie sur (E,T). Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et tous $A_1, A_2, ..., A_n \in T$, on a :*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}).$$

En déduire

$$\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}}.$$

2.8.2 Corrigés

Exercice 1. *Soit $\Omega = \{0,1,2\}$,*

1. *Les tribus sur Ω sont $T = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$ (on rappelle que si card$\Omega = n$ alors card$\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$).*
   $T_0 = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1,2\}\}$, $T_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{0,2\}\}$, $T_2 = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{0,1\}\}$.
   Remaques :
   Comme $E = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$, $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$,$\{0\} \cap \{2\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{1\} = \emptyset$ et les trois singletons sont non vide (on a une partition de E), on a
   $\sigma(\{\{0\},\{1\},\{2\}\}) = \{\bigcup\limits_{x \in J} \{x\}, J \subset E\} = \mathcal{P}(\Omega)$.
   Si A est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors $\sigma(A) = \sigma(A^c) = \sigma(A, A^c)$, donc :
   $T = \sigma(\{\emptyset\}) = \sigma(\{\Omega\}) = \sigma(\{\emptyset, \Omega\})$ et $T_0 = \sigma(\{\{0\}\}) = \sigma(\{\{1,2\}\}) = \sigma(\{\{0\},\{1,2\}\})$,
   $(\{0\},\{1,2\})$ est aussi une partition de E, mais $\sigma(\{\{0\},\{1,2\}\}) \neq \sigma(\{\{0\},\{1\},\{2\}\})$
2. *$T_0 \cup T_1 = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1,2\}, \{1\}, \{0,2\}\}$, n'est pas une tribu car*
   $\{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} \notin T_0 \cup T_1$.

Exercice 2.
1. *Si T est une tribu sur E, et $f : E \to F$ une application, alors $T^{'} = \{f(B), B \in T\}$ n'est pas toujours une tribu sur F.*
   En effet Soit $E = \{0,1,2,3\}$, $F = \{a,b,c\}$, $T = \{\emptyset, E, \{0,1\}, \{2,3\}\}$ une tribu sur E, et soit $f : E \to F$ une application, définie par $f(0) = a = f(3)$, $f(1) = b$ et $f(2) = c$, on a : $T^{'} = f(T) = \{\emptyset, F, \{a,b\}, \{c,a\}\}$ n'est pas une tribu car $\{a,b\}^c = \{c\} \notin T^{'}$.
2. *$f^{-1}(T^{'}) \subset T$?*

$$\begin{aligned} C \in f^{-1}(T^{'}) &\Leftrightarrow \exists B \in T^{'}; C = f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \exists B \subset F, f^{-1}(B) \in T \text{ et } C = f^{-1}(B) \\ &\Rightarrow C \in T. \end{aligned}$$

Exercice 3.
1. *$\sigma(A) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$, $\sigma(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, E\} = \sigma(\{E\})$*
2. (a) *$\sigma(\{A_1, A_2, ..., A_n\}) = \{\bigcup\limits_{i \in J} A_i, J \subset I\}$, Pour $CardJ = 0$, on a $C_n^0 = 1$ éléments, pour $CardJ = 1$, on a $C_n^1 = n$ éléments, ..., $CardJ = k$, C_n^k éléments,...,$CardJ = n$, $C_n^n = 1$ éléments, donc le nombre total d'éléments est $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ...C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ éléments.*

(b) $\sigma(\{A_0, A_1\}) = \{\emptyset, E, A_0, A_1\}$ *et*
$\sigma(\{A_0, A_1, A_2\}) = \{\emptyset, E, A_0, A_1, A_2, A_0 \cup A_1, A_0 \cup A_2, A_1 \cup A_2\}$.

Exercice 4. *Soit* $f : E \to F$ *une application et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$

1. $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$?
$$\begin{aligned} \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})) &\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \\ &\Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \end{aligned}$$

2. $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$?
Soit $\mathcal{A} = \{G \subset F; f^{-1}(G) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ *la tribu image directe de* $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. *Montrons que cette tribu contient* $\mathcal{C}$.
$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C} &\Rightarrow A \subset F \text{ et } f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \\ &\Rightarrow A \subset F \text{ et } f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \\ &\Rightarrow A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$
Donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, *comme* $\mathcal{A}$ *est une tribu, on obtient* $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ *d'où* $\boxed{f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{A})}$, *or, d'après la dernière question de l'exercice 2, on a* $\boxed{f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))}$, *par suite* $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Exercice 5. 1. *Montrons que* $\mathcal{A}$ *est une tribu contenant* ε,

(a) $card\emptyset = 0$ *donc* $\emptyset \in \mathcal{A}_1$, *donc* $\emptyset^c \in \mathcal{A}_2$, *c'est à dire* $E \in \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$

(b) *Soit* $A \in \mathcal{A}$, *si* $A \in \mathcal{A}_1$ *alors* $A^c \in \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ *et si* $A \in \mathcal{A}_2$ *alors* $A^c \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, *donc* $\mathcal{A}$ *est stable par passage au complémentaire.*

(c) *Soit* $(A_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$.
Si $\forall n, A_n \in \mathcal{A}_1$, *alors* $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ *(une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable)*
Si $\exists n_0, A_{n_0} \in \mathcal{A}_2$, *alors* $A_{n_0}^c \in \mathcal{A}_1$ *et* $\bigcap\limits_n A_n^c \subset A_{n_0}^c$ *donc* $\bigcap\limits_n A_n^c \in \mathcal{A}_1$ *(tout sous ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable),*
c'est à dire $(\bigcup\limits_n A_n)^c \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, *comme* $\mathcal{A}$ *est stable par passage au complémentaire,*
alors $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$. *Donc* $\boxed{\mathcal{A} \text{ est une tribu}}$

(d) *Montons que* $\mathcal{A}$ *contient* ε :$card\{x\} = 1$ *donc* $\{x\} \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, *pour tout* $x \in E$ *donc* $\varepsilon \subset \mathcal{A}$ *et par suite* $\boxed{\sigma(\varepsilon) \subset \mathcal{A}}$

(e) *Montrons que* $\mathcal{A} \subset \sigma(\varepsilon)$. *Soit* $A \in \mathcal{A}$
Si $A \in \mathcal{A}_1$ *alors* $A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\} \in \sigma(\varepsilon)$, *car* $\sigma(\varepsilon)$ *stable par union dénombrable.*
Si $A \in \mathcal{A}_2$ *alors* $A^c \in \mathcal{A}_1$, *donc* $A = \bigcup\limits_{x \in A^c} \{x\} \in \sigma(\varepsilon)$
donc $\boxed{\mathcal{A} \subset \sigma(\varepsilon)}$ *et par suite* $\boxed{\mathcal{A} = \sigma(\varepsilon)}$.

2. *Supposons* E *fini ou dénombrable (ie. au plus dénombrable).*
On a $\forall x \in E, \{x\} \in \mathcal{P}(E)$, *donc* $\varepsilon \subset \mathcal{P}(E)$ *et par suite* $\boxed{\sigma(\varepsilon) \subset \mathcal{P}(E)}$.

Réciproquement : Soit $A \in\subset \mathcal{P}(E)$*, c'est à dire* $A \subset E$*, comme* E *est au plus dénombrable,* A *l'est aussi, donc* $A = \bigcup_{x\in A} \{x\} \in \sigma(\varepsilon)$*, car* $\sigma(\varepsilon)$ *stable par union dénombrable, par suite* $\boxed{\mathcal{P}(E) \subset \sigma(\varepsilon)}$ *d'où* $\boxed{\mathcal{P}(E) = \sigma(\varepsilon)}$.

Exercice 6.

1. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \times B, A \subset \mathbb{N}, B \subset \mathbb{N}\}$ *n'est pas une tribu car* $\{1\} \times \{1\} = \{(1,1)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $\{2\} \times \{2\} = \{(2,2)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *mais* $\{(1,1)\} \cup \{(2,2)\} = \{(1,1),(2,2)\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *car* $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{(1,1),(2,2)\} \neq A \times B$.
2. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \sigma(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$
   (a) *On a* $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$*. En effet :*
   Soit $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *donc* $C = A \times B$ *avec* $A = \{a_1, a_2, ...\}$ *et* $B = \{b_1, b_2, ...\}$*, donc* $C = \{(a_i, b_i); a_i \in A \subset \mathbb{N}, b_i \in B \subset \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$ *donc* $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.
   Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$*, alors* $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)}$.
   (b) *Réciproquement : montrons que* $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$*, Soit* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$*, c'est à dire* $A \subset \mathbb{N}^2$*, comme* $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable,* A *est aussi dénombrable donc* $A = \bigcup_{(a,b)\in A} \{(a,b)\}$*, or* $\{(a,b)\} = \{a\} \times \{a\} \in \mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$*, donc* $\bigcup_{(a,b)\in A} \{(a,b)\} \in \mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *(qui est une tribu stable par union dénombrable).*
   Donc $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})}$.

Exercice 7. *Il suffit de Traiter le 2. et de vérifier que* $T_F \subset F$*, le 1. est un un cas particulier du 2.*

Exercice 8. *Comme* $\cap A_n \subset E$*, on a* $m(\cap A_n) \leq m(E)$*, d'autre part :*

$$\begin{aligned}
m(\cap A_n) &= m(E) - m((\cap A_n)^c) \text{ car } m \text{ est une mesure finie} \\
&= m(E) - m(\cup A_n^c) \\
&\geq m(E) - \sum_n m(A_n^c) \text{ car } m(\cup A_n^c) \leq \sum_n m(A_n^c) \\
&= m(E) - \sum_n m(E) - m(A_n) \\
&= m(E) \text{ car } m(E) - m(A_n) = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 9. • *Soit* $T_n = \bigcap_{p\geq n} A_p$, *on a :*

$$\begin{aligned}
(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante } &\Rightarrow m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n) = \lim_{n\to+\infty} m(T_n) \\
&\Rightarrow m(\liminf_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \qquad (2.14) \\
\text{or pour tout } p\geq n, \bigcap_{p\geq n} A_p \subset A_p &\Rightarrow m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq m(A_p) \\
&\Rightarrow m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq \inf_{p\geq n} m(A_p) \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq \lim_{n\to+\infty}(\inf_{p\geq n} m(A_p)) \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

de (2.16) *et* (2.17), *on obtient* $m(\liminf_n A_n) \leq \lim_{n\to+\infty}(\inf_{p\geq n} m(A_p)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} inf_{p\geq n} m(A_p)$ *c'est à dire*

$$\boxed{m(\liminf_n A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(A_n))}.$$

• *Soit* $S_n = \bigcup_{p\geq n} A_p$, *comme il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $m(\bigcup_{p\geq n_0} A_p) < \infty$, *on a :*

$$\begin{aligned}
(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante } &\Rightarrow m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n) = \lim_{n\to+\infty} m(S_n) \\
&\Rightarrow m(\limsup_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \qquad (2.16) \\
\text{or pour tout } p\geq n, A_p \subset \bigcup_{p\geq n} A_p &\Rightarrow m(A_p) \leq m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \\
&\Rightarrow m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq \sup_{p\geq n} m(A_p) \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} m(A_p)), \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

de (2.16) *et* (2.17), *on obtient* $m(\limsup_n A_n) \geq \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} m(A_p)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\geq n} m(A_p)$ *c'est à dire*

$$\boxed{m(\limsup_n A_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} m(A_n))}.$$

Exercice 10. *1.* T_a *est une tribu*

(a) $\mathbb{R} + a = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(b) *Stabilité par passage au complémentaire :*

$$\begin{aligned}
A \in T_a &\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } (A+a)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } A^c + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow A^c \in T_a
\end{aligned}$$

l'avant dernière équivalence provient du fait que $(A+a)^c = A^c + a$. *En effet :* $x \in (A+a)^c \Leftrightarrow x \notin A+a \Leftrightarrow x-a \notin A \Leftrightarrow x-a \in A^c \Leftrightarrow x \Leftrightarrow \in A^c + a$.

(c) *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* T_a

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} A_n \in T_a & \Leftrightarrow & A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } A_n + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ & \Rightarrow & \bigcup_n A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } \bigcup_n (A_n + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ & \Rightarrow & \bigcup_n A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } (\bigcup_n A_n) + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ & \Rightarrow & \bigcup_n A_n \in T_a. \end{array}$$

L'avant dernière implication provient du fait que $\bigcup_n (A_n + a) = (\bigcup_n A_n) + a$. *En effet :*

$$\begin{array}{rcl} x \in \bigcup_n (A_n + a) & \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}; x \in A_n + a \\ & \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N}; x - a \in A_n \\ & \Leftrightarrow & x - a \in \bigcup_n A_n \\ & \Leftrightarrow & x \in (\bigcup_n A_n) + a. \end{array}$$

2. *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *tels que* $x \le y$ *on a* $[x,y[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $[x,y[+a = [x+a, y+a[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *donc* $[x,y[\in T_a$, *et comme* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[x,y[: (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \le y\})$, *alors* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T_a$, *par suite* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T_a$ *(par déinition de* T_a, *on a* $T_a \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

3. (a) *Montrons que* m *est une mesure :*

   i. $m(\emptyset) = \lambda(\emptyset + a) = \lambda(\emptyset) = 0$.

   ii. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite de boréliens deux à deux disjoints. Puisque* $\bigcup_n (A_n + a) = (\bigcup_n A_n) + a$ *et les* $(A_n + a)$ *sont égalements des boréliens deux à deux disjoints, on a alors :*

$$\begin{array}{rcl} m(\bigcup_n A_n) & = & \lambda((\bigcup_n A_n) + a) \\ & = & \lambda(\bigcup_n (A_n + a)) \\ & = & \sum_n \lambda(A_n + a) \\ & = & \sum_n m(A_n). \end{array}$$

   (b) *On a, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *tels que* $x \le y$ $m([x,y[) = \lambda([x+a, y+a[) = y - x = \lambda([x,y[)$. *Comme* m *et* λ *coincident sur une partie* $\mathcal{C}$ *stable par intersection finie et qui engendre la tribu borélienne et lelle que* $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1]$ *union disjointes d'éléments de* $\mathcal{C}$. *D'après le théorème de l'égalité de deux mesures, on a* m *et* λ *qui sont égale sur toute la tribu borélienne.*

Exercice 11. *1. on a :*

$$\begin{aligned} 0 \le P(A) &= P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(B_n) \text{ par continuité décroissante de } P \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k\ge n} A_k) \text{ par déinition de } B_n \\ &\le \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\ge n} P(A_k)) \text{ par } \sigma \text{ sous additivité de } P \\ &= 0 \text{ comme reste d'une série convergente.} \end{aligned}$$

2. On a

$P(A) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 1 - P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c)$, *or*

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c) &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n^c) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\bigcap_{k\ge n} A_k^c) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\ge n} P(A_k^c) \text{ car } A_1^c, A_2^c, ..., A_n^c \text{ sont indépendants} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\ge n} (1 - P(A_k)). \end{aligned}$$

(a) S'il existe $k \ge n$ tel que $P(A_k) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \forall k \ge n A_k &\subset B_n \\ &\Rightarrow 1 = P(A_k) \le P(B_n) \le 1 \\ &\Rightarrow P(B_n) = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 1 \\ &\Rightarrow P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 1. \\ &\Rightarrow P(A) = 1. \end{aligned}$$

(b) Si $\forall k \ge n P(A_k) < 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\textstyle\prod_{k\geq n}(1-P(A_k)) &= \lim_{m\to+\infty}\prod_{k=n}^{m}(1-P(A_k)) \\
&= \lim_{m\to+\infty}\exp[\ln(\prod_{k=n}^{m}(1-P(A_k)))] \\
&= \lim_{m\to+\infty}\exp[\sum_{k=n}^{m}\ln(1-P(A_k)] \\
&\leq \lim_{m\to+\infty}\exp[\sum_{k=n}^{m}(-P(A_k))] \\
&= \exp[\sum_{k=n}^{+\infty}(-P(A_k))] \\
&\geq \exp[\sum_{k=1}^{+\infty}(-P(A_k))] \\
&= 0 \textit{ car par hypothèse on a } \sum_{k=1}^{+\infty}(P(A_k)) = +\infty \\
&\Rightarrow P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c) = 0 \\
&\Rightarrow P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 1 \\
&\Rightarrow P(A) = 1.
\end{aligned}
$$

Exercice 12. *1.* $\mu(]a,b]) = \mu(]-\infty,b]\backslash]-\infty,a]) = \mu(]-\infty,b]) - \mu(]-\infty,a]) = F(b) - F(a)$ *car* $]-\infty,a] \subset]-\infty,b]$.

2. *On rappelle un résultat d'analyse (voir analyse 1, L1 MI) : Si f une fonction monotone sur un intervalle, alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point x appartenant à l'interieur de cet intervalle.*
3. *Soit $C_n =]x-\frac{1}{n}, x]$ $(n \geq 1)$, $(C_n)_n$ est une suite décroissante, donc par continuité décroissante d'une mesure on a :* $\lim_{n\to+\infty}\mu(C_n) = \mu(\cap C_n) = \mu(\{x\})$, *d'autre par* $\lim_{n\to+\infty}\mu(C_n) = \lim_{n\to+\infty}(F(x) - F(x-\frac{1}{n})) = F(x) - F(x^-)$, *et comme F est continue à droite de tout réel, on a $F(x) = F(x^+)$.*
   F continue $\Leftrightarrow F(x^-) = F(x^+) \Leftrightarrow \mu(\{x\}) = 0$ avec x un réel quelconque, ce qui est équivalent à μ diffuse.
4. $\mu([a,b]) = \mu(\{a\}\cup]a,b]) = \mu(\{a\}) + \mu(]a,b])$ *et on utilise ce qui prècéde.*
5. $\mu(]a,b[) = \mu(]a,b] \setminus \{b\}) = \mu(]a,b]) - \mu(\{b\})$ *et on utilise ce qui précède.*
6. $\mu([a,b[) = \mu(\{a\}\cup]a,b[) = \mu(\{a\}) + \mu(]a,b[)$ *et on utilise ce qui précède.*

Chapitre 3

Fonctions mesurables, variables aléatoires

3.1 Fonctions mesurables

Définition 3.1.1. *(Fonction mesurable) Soient (E,T) et $(F,\mathcal{T})$ deux espaces mesurables une fonction f définie de E dans F est $(T,\mathcal{T})$ ou $T-\mathcal{T}$ mesurable si $f^{-1}(B)\in T$ pour tout $B\in\mathcal{T}$. Autrment dit si $f^{-1}(\mathcal{T})\subset T$. Si F est un espace topologique et $\mathcal{T}=\mathcal{B}(F)$, on dit simplement T- mesurable au lieu de $(T,\mathcal{T})$ mesurable.*
Si E et F sont deux espaces topologiques, on dit que $f:E\to F$ est borélienne pour exprimer qu'elle est $(\mathcal{B}(E),\mathcal{B}(F))$ mesurable.

Exemple 3.1.1. *Soit (E,T) un espace mesurable, A est une partie mesurable si et seulement si $\mathbb{1}_A$ est une fonction mesurable (en particulier $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est mesurable).*
En effet :
- *($\Leftarrow$) Si $\mathbb{1}_A:(E,T)\to(\{0,1\},\mathcal{P}(\{0,1\})$ est T- mesurable, alors $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})=A\in T$, car $\{1\}\in\mathcal{P}(\{0,1\})$.*
- *($\Rightarrow$) Si $A\in T$, alors $\mathbb{1}_A^{-1}(B)=\left\{\begin{array}{ccc} E\in T & si & B=\{0,1\} \\ A\in T & si & B=\{1\} \\ A^c\in T & si & B=\{0\} \\ \emptyset\in T & si & 0B=\emptyset. \end{array}\right.$*

Donc $\forall B\in\mathcal{P}(\{0,1\})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(B)\in T$, d'où $\mathbb{1}_A$ est $T-\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurable, par suite,

$$\boxed{A\in T\Leftrightarrow \mathbb{1}_A \text{ est } T- \text{ mesurable}}.$$

On vient de vérifier que $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{P}(\{0,1\})=\sigma(\{A\})$, donc $\mathbb{1}_A$ est $\sigma(\{A\})-\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurable.

Remarque 3.1.1. *Si on considère $\mathbb{1}_A:(E,T)\to(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, on montre de la même façon que $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))=\sigma(\{A\})$, donc $\mathbb{1}_A$ est $\sigma(\{A\})-\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mesurable, elle est aussi $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ mesurable pour toute tribu $\mathcal{A}$ contenant A et toute tribu $\mathcal{B}$ incluse dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Exemple 3.1.2. *Une fonction constante $f:E\to\mathbb{R}$ est mesurable pour toute tribu sur E et toute tribu sur $\mathbb{R}$.*

En effet : Soient (E, T_1) et $(\mathbb{R}, T_2)$ deux espaces mesurables et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E; f(x) = a$. Pour montrer que f est $T_1 - T_2$ mesurable, il suffit de montrer que $f^{-1}(B) \in T_1$ pour tout $B \in T_2$. Soit $B \in T_2$, on a :

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} E & si \quad a \in B \\ \emptyset & si \quad a \notin B \end{cases}$$

donc $\forall B \in T_2$; $f^{-1}(B) \in T_1$. D'où

$$\boxed{f : (E, T_1) \to (\mathbb{R}, T_2) \text{ constante } \Leftrightarrow f \text{ est } T_1 - T_2 \text{ mesurable}}.$$

Proposition 3.1.1. *(Première caractérisation de la mesurabilité) Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables et $\mathcal{C}$ une famille de parties de E_2 engendrant T_2 ($\sigma(\mathcal{C}) = T_2$). L'application $f : E_1 \to E_2$ est (T_1, T_2) mesurable si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(B) \in T_1$, autrement dit si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset T_1$.*

Démonstration 60. *($\Rightarrow$) $f^{-1}(T_2) \subset T_1 \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset T_1$ car $\mathcal{C} \subset T_2$.*
($\Leftarrow$) Supposons que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset T_1$, montrons que f est mesurable c'est à dire $f^{-1}(T_2) \subset T_1$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{C}) \subset T_1 &\Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset T_1 \text{ par définition de la tribu engendrée} \\ &\Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset T_1 \text{ d'après le lemme du transport} \\ &\Rightarrow f^{-1}(T_2) \subset T_1 \text{ car } \sigma(\mathcal{C}) = T_2 \\ &\Rightarrow f \text{ est mesurable, par définition de la mesurabilité d'une fonction.} \end{aligned}$$

■

De la proposition précédente, on déduit les cas particuliers suivants, énoncés sous formes de corollaires :

Corollaire 3.1.1. *Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$, f est T-mesurable si et seulement si f vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

1. *$f^{-1}(]\alpha, \beta[) \in T$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$,*
2. *$f^{-1}(]\alpha, \infty[) \in T$ pour tout $\alpha, \in \mathbb{R}$.*

Corollaire 3.1.2. *Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, f est T-mesurable si et seulement si f vérifie $f^{-1}([-\infty, \beta]) \in T$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.*

Corollaire 3.1.3. *Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$, f est T-mesurable si et seulement si f vérifie $f^{-1}(]a, +\infty]) \in T$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.*

Proposition 3.1.2. *Soient $(E_1, \mathcal{B}(E_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}(E_2))$ deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes $\mathcal{B}(E_1) = \sigma(\mathcal{O}_1)$ et $\mathcal{B}(E_2) = \sigma(\mathcal{O}_2)$. Toute application continue $f : E_1 \to E_2$ est borélienne.*

Démonstration 61. *Soit O un ouvert de $\mathcal{O}_2$, (On rappelle que l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert)*

$$\begin{aligned} O \in \mathcal{O}_2 &\Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1 \text{ car } f \text{ est continue} \\ &\Rightarrow f^{-1}(O) \in \sigma(\mathcal{O}_1) \text{ car } \mathcal{O}_1 \subset \sigma(\mathcal{O}_1) \\ &\Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(E_1) \\ &\Rightarrow f \text{ est } (\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2) \text{ mesurable d'après la proposition 3.1.1,} \end{aligned}$$

ainsi d'après la définition 3.1.1 f est borélienne. ■

Corollaire 3.1.4. *Toute fonction continue de* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable. Autrement dit Toute fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue est borélienne.*

Exemple 3.1.3. *La fonction définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto \exp(x)$ *est* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurable car continue, mais n'est pas mesurable si on muni l'ensemble de départ par la tribu* $T = \{A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}$*, où* $-A = \{-x, x \in A\}$.

Proposition 3.1.3. *Soient* (E_i, T_i)*,* $i = 1, 2, 3$ *des espaces mesurables,* $f : E_1 \to E_2$ *une application* $T_1 - T_2$ *mesurable et* $g : E_2 \to E_3$ *une application* $T_2 - T_3$ *mesurable. Alors* $g \circ f$ *est* $T_1 - T_3$ *mesurable.*

Démonstration 62. *Il suffit de montrer que* $(g \circ f)^{-1}(T_3) \subset T_1$*, pour tout* $B \in T_3$*. Soit* $B \in T_3$*,*

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(B) &= f^{-1} \circ g^{-1}(B) \\ &= f^{-1}(g^{-1}(B)).\end{aligned}$$

Comme g *est* $T_2 - T_3$ *mesurable, alors* $g^{-1}(B) \in T_2$*, et comme* f *est* $T_1 - T_2$ *mesurable, on a* $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in T_1$. ■

Proposition 3.1.4. *Soient* (E, T) *un espace mesurable,* f *et* g *deux applications de* E *dans* $\mathbb{R}$*. L'application* $h = (f, g) : E \to \mathbb{R}^2$ *est* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *mesurable si et seulement si* f *et* g *sont* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mesurables.*

Démonstration 63. *Supposons que* h *est* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *mesurable et montrons que* f *et* g *sont* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mesurables : Les projections* π_1 *et* π_2 *définies de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ *et* $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ *sont continues donc boréliennes, comme* $f = \pi_1 \circ h$ *et* $g = \pi_2 \circ h$*, d'après la proposition 3.1.3,* f *et* g *sont* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mesurables.*
Réciproquement ; Supposons f *et* g $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mesurables, et montrons que* h *est* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *mesurable : Soit* $\mathcal{O}$ *l'ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}^2$*. Tout ouvert* O *de* $\mathbb{R}^2$*, s'écrit* $O = \bigcup_{i \in I}(]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[)$

$$\begin{aligned}h^{-1}(O) &= \{x \in E; h(x) \in \bigcup_{i \in I}(]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[)\} \\ &= \{x \in E; \exists i \in I, h(x) \in (]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[)\} \\ &= \bigcup_{i \in I} h^{-1}(]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[),\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}h^{-1}(]a, b[\times]c, d[) &= \{x \in E; (f(x), g(x)) \in]a, b[\times]c, d[\} \\ &= \{x \in E; f(x) \in]a, b[\text{ et } g(x) \in]c, d[\} \\ &= \{x \in E; x \in f^{-1}(]a, b[) \text{ et } x \in g^{-1}(]c, d[)\} \\ &= f^{-1}(]a, b[) \cap g^{-1}(]c, d[).\end{aligned}$$

D'après la mesurabilité de f *et* g *et la stabilité par intersection d'une tribu, on a* $h^{-1}(\mathcal{O}) \subset T$*.*
Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{O})$*, d'après la proposition 3.1.1,* h *est* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *mesurable.* ■

Proposition 3.1.5. *(Recollement) Soient* $(E, \mathcal{B}(E))$ *et* $(F, \mathcal{B}(F))$ *deux espaces topologiques et soit* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille dénombrable d'éléments de* $\mathcal{B}(E)$ *telle que* $\bigcup_{i \in I} E_i = E$*. Une fonction* $f : E \to F$ *est borélienne si et seulement si sa restriction à chaque* E_i *est borélienne.*

Démonstration 64. *D'après la proposition 2.1.7 du chapitre 2, on a* $\mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E)$. *Supposons que* f *soit borélienne et montrons que* $f_{|E_i} : E_i \to F$ *est bolienne :*
on a pour tout $A \in \mathcal{B}(F)$,

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}_{|E_i}(A) & = & \{x \in E_i; f_{|E_i}(x) \in A\} \\ & = & \{x \in E_i; f(x) \in A\} \\ & = & \{x \in E_i; x \in f^{-1}(A)\} \\ & = & E_i \cap f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(E_i) \text{ car } f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(E), \end{array}$$

c'est à dire $f_{|E_i}$ *est borélienne.*
Inversement : Supposons que pour tout $i \in I$, $f_{|E_i}$ *est borélienne, et montrons que* f *est borélienne :*
comme $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = E$ *et que* I *est dénombrable on a : pour tout* $A \in \mathcal{B}(F)$

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(A) & = & E \cap f^{-1}(A) \\ & = & (\bigcup\limits_{i\in I} E_i) \cap f^{-1}(A) \\ & = & \bigcup\limits_{i\in I}(E_i) \cap f^{-1}(A)) \\ & = & \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}_{|E_i}(A)) \in \mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E) \text{ car est un borélien de } E. \end{array}$$

■

Remarque 3.1.2. *Dans la première implication, on n'a pas utilisé le fait que* E_i *soit borélien, ni le fait qu'il soit un élément d'une partition.*
c'est à dire qu'on a montré que si A *est une partie quelconque de* E *et* $f : E \to F$ *borélienne alors* $f_{|A}$ *est borélienne.*

Corollaire 3.1.5. *Soit* E *et* F *deux espaces métriques et Soit* $f : E \to F$ *une application.*
S'il existe une partition dénombrable $(E_i)_{i\in I}$ *de* E *en ensembles boréliens telle que* f *soit constante sur chaque* E_i *alors* f *est borélienne.*

Démonstration 65. *C'est évident par la proposition précédente : la restriction de* f *à chaque* E_i *est constante, donc borélienne.*

Corollaire 3.1.6. *Soit* E *et* F *deux espaces métriques et Soit* $f : E \to F$ *une application.*
Si l'ensemble des points de discontinuité de f *est dénombrable, alors* f *est borélienne.*

Démonstration 66. *Soit* $D = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ *l'ensemble des points de discontinuité de* f, *soit* $D_0 = E \setminus D$. *Comme* D *est un borélien (tout ensemble dénombrable dans un espace métrique est borélien), alors* D_0 *est aussi un borélien. on a* $f_{|D_0}$ *est borélienne car continue (*D_0 *étant l'ensemble des points de continuité de* f*). Si on pose* $E_i = \{a_i\}$ *pour tout* i, *les* E_i, *c'est des boréliens, de plus, on a* f *qui est borélienne sur chaque* E_i *car constante.* ■

Proposition 3.1.6. *Soient* (E, T) *un espace mesurable,* f *et* g *deux applications de* E *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Si* f *et* g *sont* T*- mesurables, il en est de même pour* $f+g$, fg, $|f|$ *et* cf ($c \in \mathbb{R}$ *constante)*
2. *Si* f *et* g *sont* T*- mesurables, il en est de même pour* $\min(f, g)$ *et* $\max(f, g)$.
3. f *est* T*- mesurable si et seulement si* $f^+ = \max(f, 0)$ *et* $f^- = -\min(f, 0)$ *le sont.*

Démonstration 67. *1. On pose $h = (f, g)$, s et p les applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par s(x,y)=x+y et p(x,y)=xy, p_c et a les applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par $p_c(x) = cx$ et $a(x) = |x|$.*
l'application h est mesurable d'après la proposition 3.1.4, les applications s, p, p_c et a sont continues donc boréliennes.
D'après la proposition 3.1.3, $f + g = s \circ h$, $fg = p \circ h$, $cf = p_c \circ f$ et $|f| = a \circ f$, sont mesurables.

2. *On pose m et M les applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par $m(x, y) = \min(x, y)$ et $M(x, y) = \max(x, y)$.*
m et M sont continues donc boréliennes . D'après la proposition 3.1.3, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont mesurables car $\min(f, g) = m \circ h$ et $\max(f, g) = M \circ h$.
3. *Supposons que f est T- mesurable, d'après ce qui prècéde avec $g = 0$ (qui est une fonction constante donc mesurable), et $c = -1 \in \mathbb{R}$ on a :*
$\max(f, g) = \max(f, 0)$ et $c \min(f, g) = -\min(f, 0)$ sont mes mesurables, donc f^+ et f^- sont mesurables.
Supposons que f^+ et f^- sont T- mesurables, alors f est mesurables car $f = f^+ - f^-$.

■

Proposition 3.1.7. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$, une application $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable. Elle est aussi $T - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable lorsqu'on la considère comme application $E \to \overline{\mathbb{R}}$. De même si $f : E \to \mathbb{R}_+$, est une application $T - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ mesurable. Elle est aussi $T - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurable lorsqu'on la considère comme application $E \to \mathbb{K}$, pour chacun des ensembles d'arrivées $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration 68. *Notons $\mathbb{K}_0$, l'ensemble d'arrivée initial ($\mathbb{K}_0 = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$), $\mathbb{K}$ l'ensemble d'arrivée élargi et $\mathbb{K}_0^c = \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0$.*
Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$, on peut l'écrire $B = B \cap \mathbb{K} = (B \cap \mathbb{K}_0) \cup (B \cap \mathbb{K}_0^c)$, d'où

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap \mathbb{K}_0) \cup f^{-1}(B \cap \mathbb{K}_0^c) = f^{-1}(B \cap \mathbb{K}_0)$$

car f est à valeurs dans $\mathbb{K}_0$ donc, $f^{-1}(B \cap \mathbb{K}_0^c) = \emptyset$.
$f^{-1}(B \cap \mathbb{K}_0) \in T$ car f est mesurable, et $B \cap \mathbb{K}_0$ est un borélien de $\mathbb{K}_0$ d'après les propositions 2.1.1 et 2.1.11 donc $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$. ■

Proposition 3.1.8. *Soit (E, T) un espace mesurable et $(f_n)_n$ une suite d'applications $T - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors les fonctions $f = \sup_n f_n$ et $g = \inf_n f_n$ sont $T - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$- mesurables. De même si les f_n sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, et $T - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$- mesurable, f et g sont $T - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurables. En raison du lemme 3.3.1., la $T - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{K}})$ mesurabilté de f et g reste vraie si les f_n sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et $T - \mathcal{B}(\mathbb{K})$ mesurables.*

Démonstration 69. *La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par $[-\infty, a]$, d'après le corollaire 3.1.2, il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a]) \in T$.*
***Rappel :** si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a les équivalences suivantes :*

$$\boxed{\sup_{n \geq 1} u_n \leq a \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq a} \text{ et } \boxed{\inf_{n \geq 1} u_n \geq a \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq a}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}([-\infty,a]) & = & \{x\in E; \sup_{n\geq 1} f_n(x)\leq a\} \\ & = & \{x\in E; \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)\leq a\} \\ & = & \{x\in E; \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)\in[-\infty,a]\} \\ & = & \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} f_n^{-1}([-\infty,a]), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g^{-1}([a,\infty]) & = & \{x\in E; \inf_{n\geq 1} f_n(x)\geq a\} \\ & = & \{x\in E; \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)\geq a\} \\ & = & \{x\in E; \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)\in[a,\infty]\} \\ & = & \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} g_n^{-1}([a,\infty]). \end{array}$$

On a le résultat demandé grâce à la mesurabilité de chaque f_n et à la stabilité de la tribu T par intersection dénombrable. ■

Proposition 3.1.9. *Soit (E,T) un espace mesurable et $(f_n)_n$ une suite d'applications $T-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Les fonctions $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont $T-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$- mesurables.*
2. *Si f est limite simple sur E de f_n (f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, f est $T-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$- mesurable.*

Cet ennoncé reste vrai si on remplace partout $\overline{\mathbb{R}}$ par $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Démonstration 70. 1. *Il suffit d'écrire*

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} f_k \ \text{ et } \ \limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_k$$

et d'appliquer la proposition 3.1.8.

2. *Si f est limite simple de f_n, $f=\limsup_{n\to+\infty} f_n$, donc 2. découle de 1.*

■

Proposition 3.1.10. *Soient $(E,\mathcal{B}(E))$ et $(F,\mathcal{B}(F))$ deux espaces topologiques et soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}(E)$ telle que $\bigcup_{i\in I} E_i = E$. Une fonction $f: E\to F$ est borélienne si et seulement si sa restriction à chaque E_i est borélienne.*

Démonstration 71. *D'après la proposition 2.1.7 du chapitre 2, on a $\mathcal{B}(E_i)\subset\mathcal{B}(E)$. Supposons que f soit borélienne et montrons que $f_{|E_i}: E_i\to F$ est borélienne.*
On a pour tout $A\in\mathcal{B}(F)$,

$$\begin{array}{rcl} f_{|E_i}^{-1}(A) & = & \{x\in E_i; f_{|E_i}(x)\in A\} \\ & = & \{x\in E_i; f(x)\in A\} \\ & = & \{x\in E_i; x\in f^{-1}(A)\} \\ & = & E_i\cap f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(E_i) \ \text{car} \ f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(E), \end{array}$$

c'est à dire $f_{|E_i}$ est borélienne.
Inversement : Supposons que pour tout $i \in I$, $f_{|E_i}$ est borélienne, et montrons que f est borélienne. Comme $\bigcup_{i\in I} E_i = E$ et que I est dénombrable on a : pour tout $A \in \mathcal{B}(F)$

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= E \cap f^{-1}(A) \\ &= (\bigcup_{i\in I} E_i) \cap f^{-1}(A) \\ &= \bigcup_{i\in I}(E_i \cap f^{-1}(A)) \\ &= \bigcup_{i\in I} f_{|E_i}^{-1}(A) \in \mathcal{B}(E) \ car\ \forall i \in I, f_{|E_i}^{-1}(A) \in \mathcal{B}(E_i) et \mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E). \end{aligned}$$

d'où f est une boélienne. ■

Remarque 3.1.3. *Dans la première implication, on n'a pas utilisé le fait que E_i soit borélien, ni le fait qu'il soit un élément d'une partition.*
c'est à dire qu'on a montré que si A est une partie quelconque de E et $f : E \to F$ borélienne alors $f_{|A}$ est borélienne.

Proposition 3.1.11. *Soient (E, T) et $(F, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables, A une partie de E et f une application $T - \mathcal{E}$ mesurable. Alors la restriction de f à A $f_{|A} : A \to F$ est $T_A - \mathcal{E}$ mesurable avec T_A est la tribu trace de T sur A.*

Démonstration 72. *Supposons que f soit mesurable et montrons que $f_{|A} : A \to F$ est mesurable. On rappel que $T_A = \{A \cap B; B \in T\}$,*
on a pour tout $B \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} f_{|A}^{-1}(B) &= \{x \in A; f_{|A}(x) \in B\} \\ &= \{x \in A; f(x) \in B\} \\ &= \{x \in A; x \in f^{-1}(B)\} \\ &= A \cap f^{-1}(B) \in T_A \ car\ f^{-1}(B) \in T \end{aligned}$$

c'est à dire $f_{|A}$ est $T_A - T$ mesurable. ■

3.2 Tribu engendrée

3.2.1 Mesurabilité et tribu engendrée par une partition

Proposition 3.2.1. *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable telque $\mathcal{A}$ est engendréé par une partition $(A_i)_{i\in I}$ (les éléments A_i de la partition sont appelés atomes). Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application $\mathcal{A}$-mesurable. Alors f est constante sur chaque atome A_i ; c'est à dire*

$$\forall i \in I, \exists a_i \in \mathbb{R}, \forall x \in A_i, f(x) = a_i.$$

Démonstration 73. *Supposons $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application $\mathcal{A}$-mesurable et montrons $\forall i \in I$, $\exists a_i \in \mathbb{R} : \forall x \in A_i, f(x) = a_i$, i.e. $\forall x \in A_i, x \in f^{-1}(a_i)$ i.e. $\exists a_i \in \mathbb{R} : A_i \subset f^{-1}(a_i)$.*

Soit $p \in I$, soit $x \in A_p$ et on pose $a_p = f(x)$, considérons : $B = A_p \cap f^{-1}(a_p)$, on a $B \in \mathcal{A}$, comme intersection de deux éléments de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, $\exists J \subset I$: $B = \bigcup_{j \in J} A_j$, comme $B \subset A_p$, on a :

$$\begin{aligned} B &= B \cap A_p \\ &= (\bigcup_{j \in J} A_j) \cap A_p \\ &= \bigcup_{j \in J} (A_j \cap A_p). \end{aligned}$$

S'il existe $j \in J$, $j = p$, alors $A_p \subset \bigcup_{j \in J} A_j = B$ et comme $B \subset A_p$ alors $B = A_p$.
Si $\forall j \in J$, $j \neq p$ alors $A_j \cap A_p = \emptyset$ (par définition d'une partition), par suite

$$B = \bigcup_{j \in J} (A_j \cap A_p) = \emptyset \cup \emptyset \cup .... = \emptyset.$$

On déduit que $A_p \cap f^{-1}(a_p) = A_P$ ou $A_p \cap f^{-1}(a_p) = \emptyset$, comme B est non vide (car $x \in A_p$ et $x \in f^{-1}(a_p)$), on a necessirement $A_p \cap f^{-1}(a_p) = A_P$, donc $A_p \subset f^{-1}(a_p) = A_P$, c'est à dire

$$\forall x \in A_p; f(x) = a_p.$$

■

3.2.2 Tribu engendrée par des fonctions mesurables

Définition 3.2.1. *(Tribu engendrée par une fonction mesurable) Soit (E, T) un espace mesurable et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble*

$$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

est une tribu sur E qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable f. On la note $\sigma(f)$ (resp. $\sigma(X)$)
Plus généralement si $f : (E, T) \to (F, \mathcal{F})$ est $T - \mathcal{F}$ mesurable la tribu engendrée par f est définie par

$$\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{F}\}.$$

Remarque 3.2.1. *l'ensemble F peut être un ensemble produit et $\mathcal{F} = T_1 \otimes ... \otimes T_n$ une tribu produit et $f = (f_1, ..., f_n)$.*

Proposition 3.2.2. *Si $f : (E, T) \to (F, \mathcal{F})$ est $T - \mathcal{F}$ mesurable.*
La tribu $\sigma(f)$ engendrée par l'application mesurable f est la plus petite tribu rendant f .

En effet : On remarque que par définition de $\sigma(f)$, $\forall A \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(A) \in \sigma(f)$ donc f est $\sigma(f) - \mathcal{F}$ mesurable. Soit $\mathcal{A}$ une tribu telle que f soit $\mathcal{A} - \mathcal{F}$ mesurable.

$$\begin{aligned} f \text{ est } \mathcal{A} - \mathcal{F} \text{ mesurable} &\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}, f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \sigma(f) \subset \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ La tribu $\sigma(\mathbb{1}_A)$ engendrée par l'indicatrice est :*

$$\boxed{\sigma(\mathbb{1}_A) = \sigma(A)}.$$

En effet : Soit $\mathbb{1}_A : (E, T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on a par définition $\sigma(\mathbb{1}_A) = \{\mathbb{1}_A^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$.
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{1}_A^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0 \notin A \ et\ 1 \notin A \\ A & si \quad 1 \in A \ et\ 0 \notin A \\ A^c & si \quad 0 \in A \ et\ 1 \notin A \\ E & si \quad 1 \in A \ et\ 0 \in A \end{cases}$$

donc $\sigma(\mathbb{1}_A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$.

Corollaire 3.2.1. *Si $f : (E, T) \to (F, \mathcal{A})$ est $T - \mathcal{A}$ mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$, alors la tribu $\sigma(f)$ engendrée par f, vérifie*

$$\sigma(f) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = \sigma(\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{C}\}).$$

Démonstration 74.

$$\begin{array}{rcl} \sigma(f) & = & f^{-1}(\mathcal{A}) \\ & = & f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))\ \textit{par hypothèse} \\ & = & \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\ \textit{d'après le lemme du transport} \\ & = & \sigma(\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{C}\}. \end{array}$$

■

Exemple 3.2.2. *Si par exemple $f : (E, T) \to (F, \mathcal{A})$ est $T - \mathcal{A}$ mesurable et $\mathcal{A} = T_1 \otimes T_2$ est une tribu produit, alors*

$$\sigma(f) = f^{-1}(T_1 \otimes T_2) = \sigma(f^{-1}(T_1 \times T_2) = \sigma(\{f^{-1}(A), A \in T_1 \times T_2\}$$

car $T_1 \otimes T_2 = \sigma(T_1 \times T_2)$.

Proposition 3.2.3. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : (E, T) & \to & (E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2) \\ x & \mapsto & f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$$

Alors, f est mesurable si et seulement si f_1 et f_2 sont mesurables.

Démonstration 75.

1. *Supposons f mesurable et montrons que f_1 et f_2 mesurables : $f_i = p_i \circ f$ est mesurable comme composée de deux fonctions mesurables.*
2. *Supposons f_1 et f_2 mesurables, et montrons que f est mesurable : Pour montrer que f est mesurable, il suffit de montrer $\sigma(f^{-1}(T_1 \times T_1))$ car*

$$\begin{array}{rcl} f\ \textit{est mesurable} & \Leftrightarrow & \forall A \in T_1 \otimes T_2, f^{-1}(A) \in T \\ & \Leftrightarrow & f^{-1}(T_1 \otimes T_2) \\ & \Leftrightarrow & f^{-1}(\sigma(T_1 \times T_2)) \\ & \Leftrightarrow & \sigma(f^{-1}(T_1 \times T_2)). \end{array}$$

Pour montrer que $\sigma(f^{-1}(T_1 \times T_1))$, *il suffit de montrer que* $f^{-1}(T_1 \times T_1) \subset T$
Comme $f_1 : (E, T) \to (E_i, T_i)$ *et* $f_2 : E, T) \to (E_i, T_i)$ *sont mesurables, on a :*
$\forall A_1 \in T_1$, $\forall A_2 \in T_2$, $f_1^{-1}(A_1) \in T$, $f_2^{-1}(A_2) \in T$ *et*

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(A_1 \times A_2) & = & \{x \in E; f(x) \in A_1 \times A_2\} \\ & = & \{x \in E; (f_1(x), f_2(x)) \in A_1 \times A_2\} \\ & = & \{x \in E; f_1(x) \in A_1 \text{ et } f_2(x) \in A_2\} \\ & = & \{x \in E; x \in f_1^{-1}(A_1) \text{ et } x \in f_2^{-1}(A_2)\} \\ & = & \{x \in E; x \in f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2)\} \\ & = & f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in T \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \forall A_1 \in T_1, \forall A_2 \in T_2, f^{-1}(A_1 \times A_2) \in T$
$\Rightarrow \quad f^{-1}(T_1 \times T_2) \subset T$
$\Rightarrow \quad \sigma(f^{-1}(T_1 \times T_2)) \subset T.$

■

Définition 3.2.2. *(Définition équivalente) Soit* $\{(E_i, T_i), i \in I\}$ *un ensemble d'espaces mesurables, et soit* $\{f_i : E \to E_i, , i \in I\}$ *un ensemble d'applications mesurables. On appelle tribu engendrée par la famille des fonctions mesurables* $(f_i)_{i \in I}$, *la tribu notée* $\sigma(f_i, i \in I) = \sigma(f_1, f_2, \ldots)$ *et définie par*

$$\sigma(f_i, i \in I) = \sigma(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(T_i)),$$

$\sigma(f_i, i \in I)$ *est la plus petite tribu rendant les applications* f_i *mesurables.*

Pour la preuve voir le problème3.6.1

Proposition 3.2.4. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : (E, T) & \to & (E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2) \\ x & \mapsto & f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$$

Alors La tribu $\sigma(f)$ *engendrée par* f *est la plus petite tribu contenant* $\sigma(f_1)$ *et* $\sigma(f_2)$.

Proposition 3.2.5. *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *deux espaces mesurables, et soit pour* $i = 1, 2$, *les applications* $p_i : E_1 \times E_2 \to E_i$ *définie par* $(x_1, x_2) \mapsto x_i$ *La tribu produit* $T_1 \otimes T_2$ *est la tribu engendrée par les projection* p_1 *et* p_2, *c'est à dire la plus petite tribu rendant les projection* p_1 *et* p_1 *mesurables.*

Démonstration 76. *Montrons que pour tout* $i = 1, 2$, p_i *est* $T_1 \otimes T_2 - T_i$ *mesurable :*

$$\text{Pour } i = 1 \forall A \in T_1, p_1^{-1}(A) = A \times E_2 \in T_1 \times T_2 \subset \sigma(T_1 \times T_2),$$

c'est à dire

$$p_1^{-1}(A) \in T_1 \otimes T_2.$$

Même raisonnement pour $i = 2$.
Montrons que $T_1 \otimes T_2$ *est la plus petite tribu rendant les* p_i *mesurables :*
Soit T *une autre tribu sur* $E_1 \times E_2$ *telle que* P_1 *soit* $T - T_1$ *mesurable et* P_2 *soit* $T - T_2$ *mesurable, et montrons que* $T_1 \otimes T_2 \subset T$. *Comme*

$$p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times E_2 \text{ et } p_1^{-1}(A_2) = E_1 \times A_2,$$

on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\forall A_1 \in T_1, p_1^{-1}(A_1) \in T \\ \forall A_2 \in T_2, p_2^{-1}(A_2) \in T\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall A_1 \in T_1, A_1 \times E_2 \in T \\ \forall A_2 \in T_2, E_1 \times A_2 \in T\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall A_1 \in T_1, \forall A_2 \in T_2, (A_1 \times E_2) \cap (E_1 \times A_2) \in T \\ &\Rightarrow \forall A_1 \in T_1, \forall A_2 \in T_2 A_1 \times A_2 \in T \\ &\Rightarrow T_1 \times T_2 \subset T \\ &\Rightarrow \sigma(T_1 \times T_2) \subset T \\ &\Rightarrow T_1 \otimes T_2 \subset T. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.2. $T_1 \otimes T_2$ *vérifie*

$$T_1 \otimes T_2 = \sigma(p_1^{-1}(T_1) \cup p_2^{-1}(T_2)) = \sigma(\sigma(p_1) \cup \sigma(p_2)).$$

3.2.3 Mesure image

Définition 3.2.3. *(Mesure image) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(F, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de E vers F. Alors l'application m_f définie de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+$ par :*

$$m_f(A) = m(f^{-1}(A)), \text{ pour tout } A \in \mathcal{T},$$

est une mesure sur $\mathcal{T}$ appelée mesure image par f.

Exemple 3.2.3. *Soit f une application définie sur l'espace mesuré $(E, T, m) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ par $f(x) = -\ln x$, calculer $m_f([0, t])$ pour tout $t \geq 0$.*

3.3 Variables aléatoires

Définition 3.3.1. *(Variable aléatoire, élément aléatoire)*

1. *Soit (E, T) un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) une fonction X définie de E dans $\mathbb{R}$, et T-mesurable, i.e. $X^{-1}(A) \in T$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Soit (E,T) et $(F, \mathcal{T})$ deux espaces probabilisables. Une fonction f définie de E dans F est un élément aléatoire si c'est une fonction $(T, \mathcal{T})$ mesurable. Lorsque F est un espace vectoriel, on dit que X est une variable aléatoire vectorielle ou un vecteur aléatoire.*

Définition 3.3.2. *(Loi de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.) Soient $(E, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la probabilité P_X image de P par X, c'est à dire $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X, la fonction de répartition de la probabilité P_X.*

Exemple 3.3.1. *(loi de probabilité de la variable aléatoire constante). Soit a une constante réelle et X la variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(E, T, \mathbb{P})$ par $\mathbb{P}(X = a) = 1$ et $\mathbb{P}(X \neq a) = 0$. La loi de probabilité de X est la mesure de Dirac au point a, c'est à dire $P_X = \delta_a$ en particulier la loi de probabilité de la v.a. nulle est δ_0.*

Proposition 3.3.1. *(égalité de deux lois) Soient* (E, T, P) *et* $(E^{'}, T^{'}, P^{'})$ *deux espaces probabilisés.* X *une variable aléatoire sur* E *et* $X^{'}$ *une variable aléatoire sur* $E^{'}$. *On a alors*

1. $P_X = P^{'}_{X'} \Leftrightarrow P(X \leq t) = P^{'}(X^{'} \leq t)\ \forall t \in \mathbb{R}$,
2. $P_X = P^{'}_{X'} \Leftrightarrow P(s \leq X \leq t) = P^{'}(s \leq X^{'} \leq t)\ \forall s, t \in \mathbb{R}$ *et* $s < t$.

Démonstration 77. 1. *Il suffit de remarquer que* $\mathbb{P}(X \leq t) = P_X(]-\infty, t])$ *et* $\mathbb{P}(s \leq X \leq t) = P_X([s,t])$. *Soit* F *la fonction de répartition de* P_X *et* G *la fonction de répartition de* $P'_{X'}$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a :*

($\Leftarrow$*)*

$$\begin{aligned} P(X \leq t) = P^{'}(X^{'} \leq t) &\Rightarrow P_X(]-\infty, t]) = P'_{X'}(]-\infty, t]) \\ &\Rightarrow F(t) = G(t) \\ &\Rightarrow P_X = P'_{X'} \\ &\quad \text{car deux mesures de même fonction de répartition sont égales.} \end{aligned}$$

Réciproquement :($\Rightarrow$*)*

$$\begin{aligned} P_X = P'_{X'} &\Rightarrow P_X(]-\infty, t]) = P'_{X'}(]-\infty, t]) \\ &\Rightarrow P(X \leq t) = P^{'}(X^{'} \leq t). \end{aligned}$$

2. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *tels que* $s < t$, *on a*
($\Rightarrow$*)*

$$\begin{aligned} P_X = P'_{X'} &\Rightarrow P_X([s,t]) = P'_{X'}([s,t]) \\ &\Rightarrow P(s \leq X \leq t) = P^{'}(s \leq X^{'} \leq t). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$*)*

$$\begin{aligned} P(s \leq X \leq t) = P^{'}(s \leq X^{'} \leq t) &\Rightarrow P_X([s,t]) = P'_{X'}([s,t]) \\ &\Rightarrow \qquad P_X([s,t]) = P'_{X'}([s,t]) \text{ et } P_X([s,a]) = P'_{X'}([s,a]) \\ &\quad \text{pour tout } s < a < t \\ &\Rightarrow P_X(]a,t]) = P'_{X'}(]a,t]) \text{ car } P_X \text{ et } P'_{X'} \text{ sont des mesures finies} \\ &\Rightarrow P_X = P'_{X'} \text{ d'après le théorème sur l'égalité de deux mesures.} \end{aligned}$$

■

Définition 3.3.3. *(Variables aléatoires équidistribuées) Soient* (E, T, P) *et* $(E^{'}, T^{'}, P^{'})$ *deux espaces probabilisés.* X *une variable aléatoire sur* E *et* $X^{'}$ *une variable aléatoire sur* $E^{'}$. *On dit que les variables aléatoires* X *et* $X^{'}$ *sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.*

Définition 3.3.4. *(Variable aléatoire discrète, entière, continue) Soient* (E, T, P) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* (E, T, P), P_X *sa loi de probabilité et* F_X *sa fonction de répartition.*

1. *Si* $X(E)$ *est dénombrable, on dit que la variable aléatoire* X *est discrète.*
2. *Si* $X(E) \subset \mathbb{N}$, *on dit que la variable aléatoire* X *est entière.*

3. Si F_X est continue, on dit que la variable aléatoire X est continue.

Proposition 3.3.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{E})$ un espace probabilisable et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable, alors X est une variable aléatoire discrète si :*

$$\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{E}.$$

Démonstration 78. *Soit $F = X(\Omega)$, supposons que $\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{E}$ et montrons que X est une variable aléatoire, c'est à dire X est $\mathcal{E}-\mathcal{B}(R)$ mesurable. D'après le TD 2 (exercice), comme F est par hypothèse au plus dénombrable, on a $\mathcal{P}(F) = \sigma(S)$ avec $S = \{\{x\}, x \in F\}$. l'hypothèse de départ s'écrit alors $X^{-1}(S) \subset \mathcal{E}$, ce qui donne d'après la proposition 3.1.1, X est $\mathcal{E} - \mathcal{P}(F)$ mesurable. C'est à dire*

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(F),\ X^{-1}(A) \in \mathcal{E}.} \tag{3.1}$$

Montrons maintenant que X est $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.
Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} X^{-1}(B) & = & X^{-1}(B \cap \mathbb{R}) \\ & = & X^{-1}(B \cap (F \cup F^c)) \\ & = & X^{-1}((B \cap F) \cup (B \cap F^c)) \\ & = & X^{-1}(B \cap F) \cup X^{-1}(B \cap F^c) \\ & = & X^{-1}(B \cap F) \cup X^{-1}(B \cap F^c) \\ & = & X^{-1}(B \cap F) \text{ car } X^{-1}(B \cap F^c) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B \cap F^c\} = \emptyset. \end{array}$$

Comme $B \cap F \in \mathcal{P}(F)$, d'après (3.1), on a $X^{-1}(B \cap F) \in \mathcal{E}$,
d'où $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ donc X est une variable aléatoire. ■

Définition 3.3.5. *(Tribu engendrée par une v.a.) Soit (E, T) un espace mesurable et f $X)$ une variable aléatoire de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble*

$$X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$$

est une tribu sur E qu'on appelle tribu engendrée par la v.a.r X, on la note $\sigma(X)$.

Exemple 3.3.2. *(Exemple de tribu engendrée) On lance un dé.*
Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et X la variable aléatoire définie de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $X(\omega) = 1$ si ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon. Alors la tribu engendrée par X est donnée par $\sigma(X) = \{\Omega, \emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$. En effet :

On a par définition de la tribu engendrée par une v.a.r, $\sigma(X) = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$.
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$X^{-1}(A) = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & si & 0 \notin A \text{ et } 1 \notin A \\ \{2,4,6\} & si & 1 \in A \text{ et } 0 \notin A \\ \{1,3,5\} & si & 0 \in A \text{ et } 1 \notin A \\ \Omega & si & 1 \in A \text{ et } 0 \in A \end{array} \right.$$

donc $\sigma(X) = \{\Omega, \emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$.

Remarque 3.3.1. *L'exemple 3.3.2, en est un cas particulier de l'exemple 3.2.1 avec* $E = \Omega$, $T = \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $X = \mathbb{1}_A$ *où* $A = \{2, 4, 6\}$.

Corollaire 3.3.1. *(tribu engendrée par une variable aléatoire discrète) Si* Y *est une variable aléatoire discrète, dont l'ensemble des valeurs est* $\{y_1, y_1, \dots, y_i, \dots\}$ *alors la tribu engendrée par* Y *est égale à la tribu engendrée par la partition* $(A_n)_n$, *où* $A_n = Y^{-1}(\{y_n\})$ *c'est à dire* $\sigma(Y) = \sigma((A_n)_n)$.

Démonstration 79. *(par double inclusion) Comme pour tout* n, $\{y_n\}$ *est un borélien alors par définition de* $\sigma(Y)$, $A_n = Y^{-1}(\{y_n\}) \in \sigma(Y)$ *pour tout* n, *donc* $\sigma((A_n)_n) \subset \sigma(Y)$ *car c'est la plus petite tribu contenant les* A_n.
inversement : Soit $C \in \sigma(Y)$, *alors il existe un borélien* D *tel que* $C = Y^{-1}(D)$ *et* $Y^{-1}(D) = \emptyset$ *ou* $Y^{-1}(D) = \bigcup_{y_n \in D} A_n$ *donc* $C \in \sigma((A_n)_n)$, *par suite* $\sigma(Y) \subset \sigma((A_n)_n)$. ■

3.3.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition 3.3.6. *(Variables aléatoires indépendantes) Soit* $(E, T, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $X_1, ..., X_N$ *une famille de v.a.r. On dit que* $X_1, ..., X_N$ *sont indépendantes si les tribus engendrées par* $X_1, ..., X_N$ *sont indépendantes.*
2. *On dit que la suite de v.a.* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est indépendante si, pour tout* $N > 1$, *les v.a.* $X_1, ..., X_N$ *sont indépendantes. On appelera suite de v.a. i.i.d une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.*

Proposition 3.3.3. *Soient* $(\Omega, \mathcal{E})$ *un espace probabilisé,* X *et* Y *deux variables aléatoires éelles définies sur* Ω. *Les variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si*

$$P(\{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\}) = P(\{X \leq a\}) \times P(\{Y \leq b\}), \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Démonstration 80. • *Supposons* X *et* Y *indépendantes et montrons l'équation* (3.2).
Rappelons que

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

et

$$\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq a\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in]-\infty, a]\} = X^{-1}(]-\infty, a])$$

$$\begin{aligned}
X \text{ et } Y \text{ indépendantes} &\Leftrightarrow \sigma(X) \text{ et } \sigma(Y) \text{ indépendantes} \\
&\Leftrightarrow \forall A_1 \in \sigma(X), \forall A_2 \in \sigma(Y); P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \\
&\Leftrightarrow \forall B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); P(X^{-1}(B_1) \cap Y^{-1}(B_2)) = P(X^{-1}(B_1))P(Y^{-1}(B_2)) \\
&\Rightarrow P(X^{-1}(]-\infty, a]) \cap Y^{-1}(]-\infty, b])) = P(X^{-1}(]-\infty, a]))P(Y^{-1}(]-\infty, b])) \\
&\quad \text{pour tout } a, b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• *Supposons l'équation* (3.2) *vérifiée et montrons que* X *et* Y *sont indépendantes.*
Soit,

$C_1 = \{\{X \leq a\}, a \in \mathbb{R}\} = \{X^{-1}(]-\infty, a]), a \in \mathbb{R}\}$ *et* $C_2 = \{\{Y \leq b\}, b \in \mathbb{R}\} = \{Y^{-1}(]-\infty, b]), b \in \mathbb{R}\}$.

Comme l'équation (3.2) *est vérifiée, alors les classes d'événements* C_1 *et* C_2 *sont indépendantes. De plus* C_1 *et* C_2 *sont stables par intersection finie car*

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq a_1\} \cap \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq a_2\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq \min(a_1, a_2\}\}.$$

D'après la proposition 2.4.4, $\sigma(C_1)$ *et* $\sigma(C_2)$ *sont indépendantes.*
D'autre part, d'après le lemme du transport on a :

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ &= X^{-1}(\sigma(\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\})) \\ &= \sigma(X^{-1}(\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\})) \\ &= \sigma(C_1).\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que $\sigma(Y) = \sigma(C_2)$*, Par suite l'indépendance de* $\sigma(C_1)$ *et* $\sigma(C_2)$*, donne l'indépendance de* $\sigma(X)$ *et* $\sigma(Y)$*, par suite* X *et* Y *sont indépendantes.* ■

Proposition 3.3.4. *(Indépendance et composition) Soit* (E, T, P) *un espace probabilisé,* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* (E, T, P) *et soit* f *et* g *deux fonctions boréliennes definies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, si* X *et* Y *sont indépendantes alors* $f(X)$ *et* $g(Y)$ *sont aussi indépendantes.*

Démonstration 81. *Soient* X *et* Y *des variables aléatoires indépendantes, Par définition de variables aléatoires indépendantes, on a* $\sigma(X)$ *et* $\sigma(Y)$ *sont indépendantes : Pour montrer que* $f(X)$ *et* $g(Y)$ *sont indépendantes, il suffit de montrer que* $\sigma(f(X))$ *et* $\sigma(g(Y))$ *sont indépendantes. Soit* $A_1 \in \sigma(f(X))$ *et* $A_1 \in \sigma(g(Y))$*.*

$$\begin{aligned}A_1 \in \sigma(f(X)) &\Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_1 = (f(X))^{-1}(B_1) \\ &\Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_1 = (f \circ X))^{-1}(B_1) \\ &\Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_1 = (X^{-1} \circ f^{-1})(B_1) \\ &\Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_1 = X^{-1}(f^{-1}(B_1)) \\ &\Rightarrow A_1 \in \sigma(X) \textit{ car } f \textit{ borélienne donne } f^{-1}(B_1) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &\Rightarrow \boxed{\sigma(f(X)) \subset \sigma(X)}\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que $\boxed{\sigma(g(Y)) \subset \sigma(Y)}$.
Comme $\sigma(X)$ *et* $\sigma(Y)$ *sont indépendantes, on a :*
Par définition

$$\forall A \in \sigma(X), \forall B \in \sigma(Y), A \textit{ et } B \textit{ sont indépendants}$$

en particulier

$$\forall A \in \sigma(f(X)), \forall B \in \sigma(g(Y)), A \textit{ et } B \textit{ sont indépendants },$$

d'où $\sigma(f(X))$ *et* $\sigma(g(Y))$ *sont indépendants et par suite* $f(X)$ *et* $g(Y)$ *sont indépendants .*

■

Proposition 3.3.5. *(Généralisation) Soit* (E, T, P) *un espace probabilisé,* $n \geq 1$ *et* $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m$ *des v.a.r indépendantes. Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* ψ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors les v.a.r.* $\varphi(X_1, ..., X_n)$ *et* $\psi(Y_1, ..., Y_m)$ *sont indépendantes.*

3.4 Fonctions étagées

Définition 3.4.1. *(Fonctions étagées) Une fonction* $f : (E, T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est dite étagée si elle est* T *mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On note* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des fonctions étagées de* $(E, T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. et* $\mathcal{E}^+$ *l'ensemble des fonctions étagées positives c'est à dire à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$*.*

Remarque 3.4.1. *Par définition, les fonctions étagées, ne prennent pas les valeurs* $-\infty$ *et* $+\infty$*.*

Exemple 3.4.1. *Toute fonction en escalier sur un intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *est étagée. En effet : Par définition d'une fonction en escalier* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, il existe une subdivision* $(s_0, s_1, ..., s_N)$ *de* $[a, b]$ *(i.e.* $a = s_0 < s_1 < ... < s_N = b$*) telle que* f *soit constante sur chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}[$ *pour* $0 \leq i \leq N - 1$*. Pour tout élément* B *de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $f^{-1}(B)$ *est une réunion finie d'intervalle du type* $]x_i, x_{i+1}[$ *à laquelle on ajoute éventuellement certains des points* x_i*, on a donc* $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}([a, b])$*. On rappelle qu'au chapitre 2, on a vu que* $\mathcal{B}([a, b]) = \{B \subset I; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*.*

Exemples 3.4.1.
1. *La fonction* $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ *est une fonction étagée car* $\mathbb{Q}$ *est un borélien de* $\mathbb{R}$*, donc* $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ *est borélienne mais n'est en escalier sur aucun intervalle* $[a, b]$*, car elle n'est constante sur aucun intervalle ouvert non vide, étant donné que ce dernier contient des rationnels et des irrationnels.*
2. *La fonction constante de* $E \to \mathbb{R}$ *est étagée.*

Lemme 3.4.1. *Pour* $f : E \to \mathbb{R}$ *non constante, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. f *est étagée.*
2. *il existe une partition finie* $(E_1, \ldots, E_N)$ *de* E*, en ensembles mesurables telle que* f *soit constante sur chaque* E_i*.*
3. *Il existe des ensembles mesurables* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *deux à deux disjoints et* $a_1, a_2, ..., a_n$ *des réels tels que*
$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}.$$
4. *Il existe des ensembles mesurables* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *des réels tels que*
$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

L'écriture canonique d'une fonction étagée

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction étagée non constante, la décomposition (ou l'écriture) canonique de f est donnée par le 2. du lemme précédent : en notant $f(E) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par f, et en posant $E_i = \{x; f(x) = a_i\} = f^{-1}(\{a_i\}) = \{f = a_i\}$, on obtient une partition de E en ensembles mesurables car f est mesurable, et on la décomposition canonique de f suivante :
$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{f^{-1}(\{a_i\})}}.$$

Exemple 3.4.2. *Il y a plusieurs manières d'écrire une fonction étagée :*
$\mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} = 2\mathbb{1}_{[-1,1]} - \mathbb{1}_{[0,1]} - 2\mathbb{1}_{[-1,0[}$ *l'écriture canonique est* $\mathbb{1}_{[0,1]} = 1\mathbb{1}_{[0,1]} + 0\mathbb{1}_{[0,1]^c}$.

Remarque 3.4.2. *Si $0 \in f(E)$, il faut l'écrire dans la décomposition pour avoir vraiment la décompsition canonique.*

Propriétés

1. Si f est une fonction étagées, alors f^+, f^- et $|f|$ sont étagées.
2. Si f et g sont étagées alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont étagées .
3. Plus généralement si $f_1, f_2, ..., f_n$ sont étagées alors $\max(f_1, f_2, ..., f_n)$ et $\min(f_1, f_2, ..., f_n)$ sont étagées.

Démonstration 82. *1. Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée sous forme de décomposition canonique.*
• Par définition de f^+, on a pour tout i et pour tout $x \in A_i$:
$f^+(x) = \max(f(x), 0) = \max(a_i, 0)$ *donc* $f^+ = \sum_{i=1}^{n} \max(a_i, 0)\mathbb{1}_{A_i}$.
• On montre de même que $f^- = \sum_{i=1}^{n}(-\min(a_i, 0))\mathbb{1}_{A_i}$ car,
$f^- = -\min(f(x), o) = \max(-f(x), 0)$.
• On a $|f| = f^+ + f^-$, comme l'ensemble des fonction étagées est un espace vectoriel, alors $|f|$ est étagées.
On a aussi $f^+ + f^- = \max(f, -f)$

2. Il suffit d'écrire $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ et d'appliquer ce qui précède.

3. Par récurrence sur n.

■

Lemme 3.4.2. *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{E}_+$, non nulle, t.q.*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ et } f = \sum_{i=1}^{p} b_i \mathbb{1}_{B_i}$$

où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$ sont des réels strictement positifs, $(A_i)_{i=1,\dots,n} \subset T$ et $(B_i)_{i=1,\dots,p} \subset T$ sont des familles de parties disjointes deux à deux,i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \sum_{j=1}^{p} b_j m(B_j)$$

Démonstration 83. *On a,*
$\{x; f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{p} B_j,$

$$\begin{aligned} A_i &= A_i \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ &= A_i \cap \bigcup_{j=1}^{p} B_j \\ &= \bigcup_{j=1}^{p} (A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{p} (A_i \cap B_j)} \qquad \text{d'où} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \text{ car les } (A_i \cap B_j) \text{ sont 2 à 2 disjoints} \end{aligned}$$

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}, \tag{3.3}$$

de la même façon on obtient

$$\boxed{g = \sum_{j=1}^{p} b_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}. \tag{3.4}$$

On pose pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$, $C_{ij} = A_i \cap B_j$.
Si pour tout i, j, $C_{ij} \neq \emptyset$, alors il existe $x \in C_{ij}$ et $f(x) = a_i = b_j$ sur C_{ij}.
D'autre part :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\bigcup_{j=1}^{p} C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} m(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i m(C_{ij})$$

et

$$\sum_{i=1}^{p} b_j m(B_j) = \sum_{j=1}^{p} b_j m(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}) = \sum_{j=1}^{p} b_j \sum_{i=1}^{n} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_j m(C_{ij})$$

S'il existe i, j : $C_{ij} = \emptyset$, alors $a_i m(C_{ij}) = 0 = b_j m(C_{ij})$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^{p} b_j m(B_j)$$

■

Proposition 3.4.1. *(Structure vectorielle de $\mathcal{E}$) Soit (E, T) un espace mesurable, l'ensemble des fonctions étagées $\mathcal{E}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus si $f, g \in \mathcal{E}$, on a aussi $fg \in \mathcal{E}$.*

Démonstration 84. *Soient f et g deux fonctions étageés ($f, g \in \mathcal{E}$) et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On utilise la décomposition canonique de f et g suivante, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{f^{-1}(\{a_i\})}$ et $g = \sum_{j=1}^{p} b_i \mathbb{1}_{g^{-1}(\{b_j\})}$ où $\{a_i, i \in \{1, .., n\}\}$ (resp. $\{b_j, j \in \{1, .., p\}\}$) est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (resp. l'ensemble de toutes les valeurs prises par g). Soit,*
$A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ et $B_j = g^{-1}(\{b_j\})$. Comme $(A_i)_i$ et $(B_j)_j$ forment des partitions de E, on a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$ d'où,

$$\begin{aligned} A_i &= A_i \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ &= A_i \cap \bigcup_{j=1}^{p} B_j \quad , \\ &= \bigcup_{j=1}^{p} (A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{p} (A_i \cap B_j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \text{ car les } (A_i \cap B_j) \text{ sont 2 à 2 disjoints.} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}$$

de la même façon on obtient

$$\boxed{g = \sum_{j=1}^{p} b_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{\alpha f + \beta g = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}$$

ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$ et donc $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
D'autre part, on a $\boxed{fg = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}$, ce qui montre que $fg \in \mathcal{E}$. ■

Proposition 3.4.2. *(Mesurabilité positive) Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \bar{\mathbb{R}}_+$. Alors f est mesurable si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, t.q. :*

1. *$f_{n+1} \geq f_n(x)$ pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$*

2. Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.
Les deux conditions précédentes seront dénotées par $f_n \uparrow f$.

Démonstration 85. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq f(x) < \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} & si \quad \frac{1}{2^n} \leq f(x) < \frac{2}{2^n} \\ \vdots & \\ \frac{2^n-1}{2^n} & si \quad \frac{2^n-1}{2^n} \leq f(x) < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq f(x) < 1 + \frac{1}{2^n} \\ 1 + \frac{1}{2^n} & si \quad 1 + \frac{1}{2^n} \leq f(x) < 1 + \frac{2}{2^n} \\ \vdots & \\ 1 + \frac{2^n-1}{2^n} & si \quad 1 + \frac{2^n-1}{2^n} \leq f(x) < 2 \\ 2 & si \quad 2 \leq f(x) < 2 + \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \\ n - 1 + \frac{2^n-1}{2^n} & si \quad n - 1 + \frac{2^n-1}{2^n} \leq f(x) < n \\ n & si \quad f(x) \geq n. \end{cases}$$

Autrement écrit

$$f_n = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & si \quad f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\text{ pour } 0 \leq k \leq n2^n - 1 \\ n & si \quad f(x) \geq n. \end{cases}$$

Si on pose

$$A_{n,k} = f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[) \text{ pour } 0 \leq k \leq n2^n - 1 \text{ et } A_{n,n2^n} = f^{-1}([n, +\infty[)$$

f_n s'écrit

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

on a $\forall k \in \{0, ..., n2^n\}, A_{n,k} \in T$ car f est mesurable, donc
• *$(f_n)_n$ est une suite de fonctions étagées.*
• *Montrons que pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Soit $x \in E$,*
Si $f(x) = +\infty$, on $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) > n$ donc $f_n(x) = n$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty = f(x)$
Si $f(x) < +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $f(x) < n_0$, donc pour tout $n \geq n_0$ $f(x)$ est dans l'un des intervalles $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ pour $0 \leq k \leq n2^n - 1$, donc $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ et $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} |f(x) - f_n(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ par suite $\lim_{n\to+\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$, ce qui implique $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
• *On peut montrer que la suite $(f_n)_n$ est croissante , comme suit : Par construction on a pour tout n et pour tout x,*

$$f_n(x) = \max\{\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq n2^n, \frac{k}{2^n} \leq f(x)\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, on pose

$$V_n(x) = \{\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq n2^n, \frac{k}{2^n} \leq f(x)\},$$

on a pour tout n et pour tout x :

$$V_n(x) \subset V_{n+1}(x),$$

car
pour tout q de $V_n(x)$ on a

$$\begin{array}{rcl} q & = & \frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq n2^n \text{ et } \frac{k}{2^n} \leq f(x) \\ & = & \frac{2k}{2^{n+1}}, 0 \leq 2k \leq n2^{n+1} \leq (n+1)2^{n+1} \text{ et } \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) \\ & = & \frac{p}{2^{n+1}}, 0 \leq p \leq (n+1)2^{n+1} \text{ et } \frac{p}{2^{n+1}} \leq f(x) \text{ avec } p = 2k. \end{array}$$

Donc $q \in V_{n+1}(x)$, par suite $\max V_n(x) \leq \max V_{n+1}(x)$, pour tout n et pour tout x, c'est à dire pour tout n et pour tout x, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. ■

Proposition 3.4.3. *(Deuxième caractérisation de la mesurabilité) Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. f est mesurable si et seulement si, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, t.q., pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.*

Démonstration 86. *On a déjà vu dans la proposition 3.1.9 que la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.*
Supposons que f est mesurable et montrons qu'il exite une suite $(f_n)_n$ de fonctions étagées telles que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.
On a $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- des fonctions positives et mesurables d'après la proposition 3.1.6. Donc d'après la proposition 3.4.2, il existe deux suites de fonctions étagées, positives et croissantes $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f^+(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = f^-(x)$ pour tout $x \in E$.
On pose $f_n = g_n - h_n$ de sorte que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.
D'autre part comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, on a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ (c'est à dire une fonction étagée) ■

Lemme 3.4.3. *Une suite numérique est la limite d'une suite de fonctions étagées.*

Démonstration 87. *Soit la suite numérique*

$$\begin{array}{rccc} u: & (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n. \end{array}$$

On a $u_p = u(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \mathbb{1}_{\{n\}}(p) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} u_n \mathbb{1}_{\{n\}}(p)$
donc

$$\boxed{u = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} u_n \mathbb{1}_{\{n\}}}.$$

■

Proposition 3.4.4. *l'espace des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ qu'on note $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et si $f, g \in \mathcal{M}$, alors $fg \in \mathcal{M}$.*

Démonstration 88. *Soit $f, g \in \mathcal{M}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
On pose $h = \alpha f + \beta g$, d'après la proposition3.4.3, il existe deux suites de fonctions étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.
On pose $h_n = \alpha f_n + \beta g_n$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x)$ pour tout $x \in E$.
Comme l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées est un espace vectoriel, on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, la proposition 3.4.3, donne aussi que h est mesurable.
L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).
Soit $f, g \in \mathcal{M}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On raisonne comme ci dessus.
On pose $h = fg$, d'après la proposition3.4.3, il existe deux suites de fonctions étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.
On pose $h_n = f_n g_n$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x)$ pour tout $x \in E$. La proposition 3.4.1 donne que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, la proposition 3.4.3, donne aussi que h est mesurable. ■

Corollaire 3.4.1. *Toute fonction continue à droite (resp. à gauche) est mesurable.*

Théorème 3.4.1. *(V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.) Soient X et Y deux v.a.r définie sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors la v.a. Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.*

Démonstration 89. • *Supposons Y est $\sigma(X) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, et montrons que $Y = f(X)$, avec f borélienne.*
Comme Y est $\sigma(X) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, d'après la proposition 3.4.3, il existe $Y_n \in \mathcal{E}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = Y$, soit $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} a_{i,n} \mathbb{1}_{A_{i,n}}$ avec les $A_{i,n}$ dans $\sigma(X)$. par définition de $\sigma(X)$, il existe $B_{i,n}$ des boréliens de $\mathbb{R}$ tles que $A_{i,n} = X^{-1}(B_{i,n})$ donc

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{i=1}^{m_n} a_{i,n} \mathbb{1}_{X^{-1}(B_{i,n})} \\ &= \sum_{i=1}^{m_n} a_{i,n} (\mathbb{1}_{B_{i,n}} \circ X) \\ &= (\sum_{i=1}^{m_n} a_{i,n} \mathbb{1}_{B_{i,n}}) \circ X \\ &= f_n \circ X \text{ avec } f_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_{i,n} \mathbb{1}_{B_{i,n}}. \end{aligned}$$

Soit $f = \limsup_n f_n$ d'où $Y = \limsup_n Y_n = f \circ X.$, on peut aussi prendre $f = \liminf_n f_n$
•*Supposons que $Y = f(X)$ avec f borélienne et montrons que Y est $\sigma(X) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.*
Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$. Comme f est borélienne, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \sigma(X)$, d'où le résultat. ■

3.5 Convergences

Définition 3.5.1. *(Egalité presque partout) Soient* (E, T, P) *un espace mesuré,* F *un ensemble,* f *et* g *des fonctions définies de* E *dans* F *; on dit que* $f = g$ *m-presque partout et on note* $f = g$ *m-p.p. ou* $f \overset{p.p.}{=}$*, si l'ensemble* $\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$ *est négligeable.*
On dit qu'une fonction f *est m-négligeable si* $f = 0$ *m p.p.*

Exemple 3.5.1. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, une fonction en escalier, il existe donc une subdivision* $(s_0, s_1, ..., s_N)$ *de* $[a, b]$ *(ie.* $a = s_0 < s_1 < ... < s_N = b$*) telle que* f *soit constante sur chaque intervalle* $]x_i, x_{i+1}[$ *pour* $0 \leq i \leq N - 1$*.*

On note a_i *la valeur prise par* f *sur l'intervalle* $]x_i, x_{i+1}[$ *On a* $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{]x_i,x_{i+1}[} \lambda p.p.$*, car si on pose* $g = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{]x_i,x_{i+1}[}$ *On a* $g(x_i) = 0$ *or* $f(x_i)$ *peut ne pas être nulle. et* $\lambda\{x_i\} = 0$ *c'est à dire que* $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq g(x)\}$ *est formé de singletons donc il est de mesure de Lebesgue nulle.*

Proposition 3.5.1. *La relation* $m-$ *p.p. est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables.*

Proposition 3.5.2. *(Proprités de l'égalité p.p.) Soient* (f_n) *et* (f_n) *deux suites d'applications mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

1. *Si* $f_1 \overset{p.p.}{=} g_1$ *et* $f_2 \overset{p.p.}{=} g_2$ *alors* $\min(f_1, f_2) \overset{p.p.}{=} \min(g_1, g_2)$ *et* $\max(f_1, f_2) \overset{p.p.}{=} \max(g_1, g_2)$*.*
2. *Si pour tout* n*,* $f_n \overset{p.p.}{=} g_n$ *alors*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \overset{p.p.}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \overset{p.p.}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \tag{3.5}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n \overset{p.p.}{=} \liminf_{n\to+\infty} g_n et \qquad \limsup_{n\to+\infty} f_n \overset{p.p.}{=} \limsup_{n\to+\infty} g_n. \tag{3.6}$$

3. *Si pour tout* n*,* $f_n \overset{p.p.}{=} g_n$ *et* $\lim f_n = f$ *avec* f *mesurable alors* $\lim g_n = f$*.*

Définition 3.5.2. *(Egalité presque sûre) Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *et* Y *des v.a.r. définies de* E *dans* $\mathbb{R}$ *; on dit que* $X = Y$ *p-presque sûrement et on note* $X = Y$ *p.s.si l'ensemble* $\{x \in E; X(x) \neq Y(x)\}$ *est négligeable.*

Définition 3.5.3. *(Convergence presque partout)*
Soient (E, T, m) *un espace mesuré,* F *un ensemble,*$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *et* f *une fonction de* E *dans* F *; on dit que* f_n *converge presque partout vers* f *(*$f_n \to f p.p.$*) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, tel que.,pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$*.*

Définition 3.5.4. *(Convergence presque sûre) Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. et* X *une v.a. ; on dit que* X_n *converge presque partout vers* X *(*$X_n \to X p.s.$*) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q.,pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $X(x)$*.*

Définition 3.5.5. *(Convergence presque uniforme) Soient* (E, T, m) *un espace mesuré .* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathbb{M}$*. On dit que* f_n *converge presque uniformément vers* f *(*$f_n \to f$ *p.unif.)si : pour tout* $\epsilon > 0 >$*, il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) \leq \epsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c*.*

Théorème 3.5.1. *(Egorov) Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, tel que* $m(E) < \infty$*,* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathbb{M}$*. On suppose que* $f_n \to f$ *p.p.,alors pour tout* $\epsilon > 0 >$*, il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) \leq \epsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c*.*

Définition 3.5.6. *(Convergence en mesure) Soient* (E, T, m) *un espace mesuré .* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathbb{M}$*. On dit que* f_n *converge en mesure vers* f *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Définition 3.5.7. *(Convergence en probabilité) Soient* (E, T, m) *un espace probabilisé.* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire. On dit que* X_n *converge en probabilité vers* X *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} p(\{x \in E; |X_n(x) - X(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

3.6 Exercices

3.6.1 Enoncés

Exercice 1. *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* A *un borélien de* $\mathbb{R}$*.*

1. *Vérifier que la tribu* $\sigma(\mathbb{1}_A)$ *engendrée par* $\mathbb{1}_A$ *est donnée par* $\sigma(\mathbb{1}_A) = \sigma(A)$*.*
2. *Traiter l'exemple du cours sur les tribus engendré par une variable aléatoire.*

Exercice 2. *Soit* $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ *où* $-A = \{-x : x \in A\}$

1. *Montrer que* T *est une tribu sur* $\mathbb{R}$*.*
2. *Les applications suivantes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:* $f : x \mapsto e^x$*,* $g : x \mapsto x^3$*,* $h : x \mapsto \cos x$
   - *a) sont-elles* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurables ?*
   - *b) sont-elles* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), T)$ *mesurables ?*
   - *c) sont-elles* $(T, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurables ?*
   - *d) sont-elles* (T, T) *mesurables ?*

Exercice 3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application, montrer que :*

1. *Si f est dérivable alors* f *et* f' *sont boréliennes.*
2. *Si* f *est monotone alors* f *est borélienne.*

Exercice 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par* $f(x) = \frac{1}{x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$ *Montrer que* f *est mesurable*

Exercice 5. *Soit* f *une fonction mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(muni de sa tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*), on se propose de montrer que le graphe de* f *est un borélien de* $\mathbb{R}^2$*, on munit aussi* $\mathbb{R}^2$ *de sa tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*). Pour* $x, y \in \mathbb{R}$*, on pose* $F(x, y) = f(x)$ *et* $H(x, y) = y$*.*

1. *Montrer que* F *et* H *sont mesurables de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. *On pose* $G(f) = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$. *Montrer que* $G(f) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x$ *et soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonction définie par*

$$f_n = \begin{cases} \frac{k}{n} & si \quad f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\text{ pour } 0 \leq k \leq n2^n - 1 \\ n & si \quad f(x) \geq n \end{cases}$$

Tracer dans le même repère le graphe des fonctions f, f_1, f_2 *et* f_3.

Exercice 7. *Soit* $(E, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé. Soit Soient* $n \geq 1$ *et* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$. *Montrer que les événements* $A_1, A_2, .., A_n$ *sont indépendantes si et seulement si les variables aléatoires* $\mathbb{1}_{A_1}, \mathbb{1}_{A_2}, ...\mathbb{1}_{A_n}$ *sont indépendantes.*

Exercice 8.

1. *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* δ_0 *la mesure de Dirac. Montrer que* $f = g$ δ_0 *p.p* $\Leftrightarrow f(0) = g(0)$
2. – *a) Montrer qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive.*
   – *b) Soient* f *et* g *deux fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $f = g$ λ *p.p* $\Leftrightarrow f = g$ *où* λ *est la mesure de Lebesgue. (Utiliser la question précédente).*

Exercice 9. *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré fini et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* E *dans* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* f *presque partout alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* f *en mesure.*
Indication : utiliser le théorème d'Egorov.
On rappelle que par définition f_n *tend vers* f *en mesure si :* $\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} m(\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$.

Exercice 10. *(Supplémentaires) Vérifier les propriétés suivantes :*

1. *Si* $\alpha > 0$, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ *et* $(\alpha f)^- = \alpha f^-$
2. *Si* $\alpha < 0$, $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ *et* $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$
3. $(f + g)^+ = f^+ + g^+$ *et* $(f + g)^- = f^- + g^-$

Exercice 11. *(supplémentaire) Soi* $C_f = \{x : \text{ f continue en } x\}$

1. *Montrer que*
$$C_f = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} int \left[f^{-1} \left( ]r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}[\right) \right]$$
où $int(A)$ *désigne l'intérieur de l'ensemble* A, *i.e. l'ouvert égal à l'union des ouverts inclus dans* A. *En déduire que l'ensemble* C_f *est un borélien.*
2. *Soit* f *une fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que* f *est borélienne.*

Exercice 12. *(Supplémentaire) Montrer que toute fonction continue à droite est mesurable. Indication : Considerer la suite de fonctions définies par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq -n \\ f(\frac{[nx]+1}{n}) & si\ \frac{p}{n} \leq x < \frac{p+1}{n}, p \in \{-n^2, ..., n^2-1\} \\ 0 & si\ x > n \end{cases}$$

Exercice 13. *Soient* $E = \mathbb{Z}$ *et* $\Omega \subset \mathcal{P}(Z)$ *définie*

$$A \in \Omega \Leftrightarrow \{\forall n \geq 1, 2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A\}$$

.

1. *Montrer que si* Ω *est une tribu sur* $\mathbb{Z}$.
2. *Montrer que l'application*

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ définie par } \varphi(n) = n+2$$

   est bijective et mesurable de $(\mathbb{Z}, \Omega)$ *dans* $(\mathbb{Z}, \Omega)$.

Exercice 14. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires et* X *une variable aléatoire. Nous rappelons que :*
$X_n \to X$ *presque surement ssi* $\mathbb{P}\left(\{\omega : \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1$
$X_n \to X$ *en probabilité ssi* $\forall\epsilon > 0 \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0$. *Soit* $B_n^\epsilon = \{|X_n - X| > \epsilon\}$. *Montrer que :*

1. $X_N \to X$ *presque surement ssi* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\geq k} B_n^\epsilon\right) = 0$.
2. *Si les* X_n *sont indépendants, montrer que* $X_N \to X$ *presque surement si la série de terme général* $\mathbb{P}(B_n^\epsilon)$ *est convergente. Que peut on en déduire.*

Exercice 15. *(supplémentaire) Soit* $f : (E,T) \to \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *une application mesurable. Soit* $k \in]0, +\infty[$ *donné. On pose* $f_k(x) = \begin{cases} f(x) & si\ |f(x)| \leq k \\ k & si\ f(x) > k \\ -k & si\ f(x) < -k \end{cases}$ *Montrer que* f_k *est* $(T, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurable.*

Exercice 16. *Soient (E,T,m)un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* E *dans* $\mathbb{R}$ *et f une fonction mesurable de E dans* $\mathbb{R}$*.On suppose que* $m(E) < \infty$. *Montrer que si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers f presque partout, alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers f en mesure (utiliser le théorème d'Egorov)*

Devoir maison

Problème 3.6.1. ***Objectif*** *: A travers ce problème, on essaye de démontrer la définition équivalente d'une tribu engendrée par deux applications mesurables f_1 et f_2. c'est à dire montrer que*

$$\sigma(f_1, f_2) = \sigma(\sigma(f_1) \cup \sigma(f))$$

Sachant que Si $f = (f_1, f_2) : (E, T) \to (E_1 \times E_1, T_1 \otimes T_2)$ est mesurable, alors

$$\sigma(f) = \{f^{-1}(A), A \in T_1 \otimes T_2\}.$$

1. *Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_1$ deux tribus sur un ensemble E. On considère les sous ensembles de $\mathcal{P}(E)$*

   $$F_1 = \{A_1 \cap A_2 / A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\} \text{ et } F_2 = \{A_1 \cup A_2 / A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

   Montrer que

   $$\sigma(F_1) = \sigma(F_2) = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$$

2. *Soit $f = (f_1, f_2) : (E, T) \to (E_1 \times E_1, T_1 \otimes T_2)$ $T - T_1 \otimes T_2)$ mesurable, définie par $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ pour tout $x \in E$ et $f_i : (E, T) \to (E_i \times T_i)$, pour $i = 1, 2$, Montrer que*

   $$\sigma(f) = \sigma(\{f^{-1}(A), A \in T_1 \times T_2\})$$

3. *Utiliser la question 1. et 2. pour montrer que*

   $$\sigma(f) \subset \sigma(\bigcup_{i=1}^{2} \sigma(f_i))$$

4. (a) *Montrer que $\forall i \in \{1, 2\}$, $\sigma(f_i) \subset \sigma(f)$. En déduire*

   $$\sigma(\bigcup_{i=1}^{2} \sigma(f_i)) \subset \sigma(f)$$

   (b) *Montrer que $\sigma(f)$ est la plus petite tribu contenant $\sigma(f_1)$ et $\sigma(f_2)$*

3.6.2 Corrigés

.

Exercice 1. $\mathbb{1}_A : (E, T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
$\sigma(\mathbb{1}_A) = \{\mathbb{1}_A^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ *selon que*
$(0 \notin B$ *et* $1 \notin B)$ *ou* $(0 \in B$ *et* $1 \in B)$ *ou* $(0 \notin B$ *et* $1 \in B)$ *ou* $(0 \in B$ *et* $1 \notin B)$ *(voir cours)*
donc $\boxed{\sigma(\mathbb{1}_A) = \sigma(A)}$.
Dans l'exemple du cours, comme $X(\omega) = 1$ si ω est pair et $X(\omega) = 0$ si ω est imppair, alors $X = \mathbb{1}_A$ avec A est l'ensemble des nombres pair c'est à dire $A = \{2, 4, 6\}$ donc $A^c = \{1, 3, 5\}$ donc $\sigma(X) = \{\emptyset, E, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$.

Exercice 2. *Les trois fonctions sont continues donc boréliennes, c'est à dire* $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(A), g^{-1}(A), h^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *comme* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *en particulier on a :*
$\forall A \in T$, $f^{-1}(A), g^{-1}(A), h^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *donc les trois fonctions sont* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - T$ *mesurables*
- $f(x) = \exp(x)$ *: f n'est pas* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mesurable car* $\{e\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mais* $f^{-1}(\{e\}) = \{1\} \notin T$.
- $g(x) = x^3$ *:f n'est pas* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mesurable car* $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mais* $g^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin T$.
- $h(x) = \cos(x)$ *: Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$h^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *à voir* $h^{-1}(A) = -h^{-1}(A)$ *?*

$x \in h^{-1}(A) \Leftrightarrow h(x) \in A \Leftrightarrow \cos(x) \in A \Leftrightarrow \cos(-x) \in A \Leftrightarrow h(-x) \in A \Leftrightarrow -x \in h^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in -h^{-1}(A)$, *donc* $h^{-1}(A) \in T$, *d'où h est* $T - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mesurable c'est à dire* $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(A) \in T$, *comme* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on a en particulier* $\forall A \in T$, $h^{-1}(A) \in T$, *c'est à dire h est* $T - T$ *mesurable. .*
- *f n'est pas* $T - T$ *mesurable, car* $\{e, -e\} \in T$, *mais* $f^{-1}(\{e, -e\}) = \{1\} \notin T$.
- *Soit* $A \in T$, $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *à voir* $g^{-1}(A) = -g^{-1}(A)$ *?*

$x \in g^{-1}(A) \Leftrightarrow g(x) \in A \Leftrightarrow -g(-x) \in A \Leftrightarrow -g(-x) \in -A \Leftrightarrow g(-x) \in A \Leftrightarrow -x \in g^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in -g^{-1}(A)$ *donc g est* $T - T$ *mesurable.*

Exercice 3. 1. *f dérivable* $\Rightarrow$ *f continue* $\Rightarrow$ *f borélienne.*
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, *en particulier* $f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$,
puisque $g_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ *est borélienne comme somme, composée et produit de fonctions boréliennes alors* f' *est borélienne comme limite d'une suite de fonctions boréliennes.*

2. *Supposons f croissante et montrons qu'elle est borélienne.*
Pour montrer que f est borélienne, il suffit de montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([a, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
Il suffit aussi de montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, +\infty[)$ *est un intervalle.*
Rappel *: I est un intervalle* $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in I^2; x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset I$
Soit x, y *deux éléments de* $f^{-1}([a, +\infty[)$ *tels que* $x \leq y$, *on a* $a \leq f(x) \leq f(y)$ *donc* $\forall t \in [x, y]$, $a \leq f(x) \leq f(t) \leq f(y)$, *d'où* $\forall t \in [x, y]$, $f(t) \geq a$ *par suite* $t \in f^{-1}([a, +\infty[$, *c'est à dire* $[x, y] \subset f^{-1}([a, +\infty[$ *donc ce dernier est un intervalle donc c'est un borélien.*
f décroissante : il suffit d'écrire $f = -(-f)$

Exercice 4. *soit pour* $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}}$, *on a pour tout* $x \neq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$, *de plus pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est continue donc borélienne, d'où f est aussi borélienne comme limite d'une suite de fonctions boréliennes.*

Exercice 5. 1. *F et H boréliennes de* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *: Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on a*
- $F^{-1}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x) \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in f^{-1}(A)\}$
donc $F^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R}$, *comme f est mesurable* $f^{-1}(A) in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *donc* $f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *donc F est mesurable.*
- *De la même façon, on montre que* $H^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Donc H est mesurable.*

2. $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = F(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (H - F)(x, y) = 0\}$

Donc $G(f) = (H - F)^{-1}(\{0\})$ *et* $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, comme* $H - F$ *est borélienne, on a* $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Exercice 6. *En séance de TD.*

Exercice 7. *l'objectif de cet exerice n'est pas de démontrer la proposition du cours, mais juste de l'appliquer pour déduire le résultat énoncé par l'exercice et pouvoir s'en servir par la suite. d'après la proposition du cours (chapitre 2)*$A_1, A_2, .., A_n$ *sont indépendantes si et seulement si les tribus engendrés* $\sigma(A_1), \sigma(A_2), .., \sigma(A_n)$ *sont indépendantes et d'après l'exercice 1,* $\sigma(A) = \mathbb{1}_A$*, donc* $A_1, A_2, .., A_n$ *sont indépendantes si et seulement si les variables aléatoires* $\mathbb{1}_{A_1}, \mathbb{1}_{A_2}, ..., \mathbb{1}_{A_n}$ *sont indépendantes.*

Exercice 8.

1. • *Si* $f = g$ $\delta_0 p.p.$*, il existe* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\delta_0(A) = 0$ *et* $(f \neq g) \subset A$ *. Comme* $\delta_0(A) = 0$*, on a* $0 \notin A$ *et donc* $0 \notin (f \neq g)$ *donc* $0 \in (f = g) = \{x : f(x) = g(x)\}$ *donc f(0)=g(0)*
   • *Si f(0)=g(0), alors* $0 \in (f = g) = \{x : f(x) = g(x)\}$*, c'est à dire* $\{0\} \subset (f = g) = \{x : f(x) = g(x)\}$ *donc* $(f = g)^c \subset \{0\}^c$ *c'est à dire* $(f \neq g) = \{x : f(x) \neq g(x)\} \subset \{0\}^c$ *or* $\delta_0(\{0\}^c) = 0$ *c'est à dire* $(f \neq g)$ *est négligeable donc* $f = g\delta_0 p.p.$
2. (a) *Si* O *est un ouvert non vide, il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha < \beta$ *et* $]\alpha, \beta[\subset O$*, on a donc* $0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha, \beta[) \leq \lambda(O)$.
   (b) • *On suppose que* $f = g\lambda p.p.$*, c'est à dire* $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ *est negligeable, il existe donc* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda(A) = 0$ *et* $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset A$ *or* $\{x : f(x) \neq g(x)\} = \{x : f(x) - g(x) \in \mathbb{R}^*\} = (f - g)^{-1}(\mathbb{R}^*\})$ *est un ouvert car f-g est continue et* $\mathbb{R}^*$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*. donc* $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ *est un borélien, d'où par monotonie de la mesure, on a* $\lambda(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \leq \lambda(A) = 0$ *donc* $\{x : f(x) \neq g(x)\} = \emptyset$*, d'après la question précédente, donc* $f = g$
   • *Si f=g c'est à dire* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ *donc* $\{x : f(x) \neq g(x)\} = \emptyset$ *et* $\lambda(\emptyset) = 0$ *donc* $f = g\lambda p.p.$

Exercice 9. *Soit* $\epsilon > 0$*, on veut montrer* $\lim_{n \to +\infty} m(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0$*, c'est à dire*

$$\forall \delta > 0, \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \leq \delta$$

Soit $\delta > 0$*, comme* $f_n \to f$ *p.p., d'après le théorème d'Egoroff, il existe,* $A \in T$ *tel que* $m(A) \leq \delta$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* A^c*. Par définition de la convergence uniforme sur* A^c*, on a il existe* $n_0, \forall n \geq, \forall x \in A^c, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$*, c'est à dire* $A^c \subset (\{|f_n - f| \leq \epsilon\})$ *d'où* $(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \subset A$ *et donc* $m(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \leq m(A) \leq \delta$.

Chapitre 4

Fonctions intégrables

4.1 Introduction

L'intégrale de Riemann est définie par approximation à partir de l'intégrale des fonctions en escalier, tandis que celle que nous étudions dans ce cours (parfois dite de Lebesgue) est construite à partir des fonctions étagées. Dans le premier cas, on approche l'intégrale d'une fonction quelconque par celle d'une fonction en escalier, c'est-à-dire en découpant l'espace de départ (un intervalle) en petits morceaux (les subdivisions), tandis que dans le second cas, c'est l'espace d'arrivée (qui est toujours $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$) qui est découpé. Cette différence est fondamentale car la première approche ne peut se généraliser facilement à des fonctions ayant un autre espace de départ que $\mathbb{R}$. Mais surtout les espaces de fonctions mesurables (celles qui admettront une intégrale au sens de Lebesgue) sont beaucoup plus grands que celui des fonctions Riemann-intégrables et ils sont stables sous l'action de multiples opérations comme le passage à la limite. Enfin, nous allons définir dans ce cours l'intégrale par rapport à une mesure quelconque, et pas seulement l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue (celle qui a ceci de commun avec l'intégrale de Riemann qu'elle donne un sens mathématique à la notion physique de volume).

4.2 Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition 4.2.1. *(Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$) Soit (E,T,m) un espace mesuré et soit f définie de E dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive. Soient $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ une famille de parties disjointes deux à deux et n réels $a_1,\ldots,a_n$ strictement positifs tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$. On définit l'intégrale de f qu'on note $\int f dm$, par :*

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i).$$

Si $f = 0$, on pose $\int f dm = 0$ (On a donc $\int f dm \in \overline{\mathbb{R}}_+$). Cette intégrale est bien définie, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du choix de la décomposition de f (voir lemme3.4.2 du chapitre 3).

Remarque 4.2.1. *En adoptant la convention* $0 \times +\infty = 0$*, on peut dans la définition ci dessus supposer que les réels* $a_1, a_2, ..., a_n$ *sont dans* $\mathbb{R}_+$.

Remarque 4.2.2. *En utilisant la décomposition canonique on peut écrire*

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(f = a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(f^{-1}(\{a_i\}).$$

Exemple 4.2.1. 1. *Intégrale de* $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ *par rapport à la mesure de Lebesgue* λ.
$\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$ *car* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable et* λ *est diffuse .*

2. $\int (2\mathbb{1}_{[0,1]} + 6\mathbb{1}_{]1,\frac{5}{4}]}) d\lambda = 2.1 + 6\frac{1}{4}$ *avec* λ *la mesure de Lebesgue.*

Proposition 4.2.1. *(Propriétés de l'intégrale sur* $\mathcal{E}_+$*) Soient* f *et* $g \in \mathcal{E}_+$*,* α *et* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$*, alors :*

- *Linéarité positive :* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$ *et* $\displaystyle\int \alpha f + \beta g dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm.$
- *Monotonie :*$f \geq g \Rightarrow \displaystyle\int f dm \geq \int g dm.$

Démonstration 90. *Soit* α *un réel positif et* $f, g \in \mathcal{E}_+$ *telles que* $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ *et* $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ *avec* (A_i) *et* $(B_j n)$ *des partitions de E. Nous avons obtenu dans les équations* (3.3) *et* (3.4), *page 95, les expressions suivantes :* $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$ *et* $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} b_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$ *donc*

$$\boxed{f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i + b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int \alpha f dm &= \int \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} dm \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \mathbb{1}_{A_i} dm \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i m(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) \\ &= \alpha \int f dm \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\int (f+g)dm &= \int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(a_i+b_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}dm \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(a_i)m(A_i\cap B_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} b_j)m(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{p} m(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^{p} b_j \sum_{i=1}^{n} m(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i m(\bigcup_j (A_i\cap B_j)) + \sum_{j=1}^{p} b_j m(\bigcup_i (A_i\cap B_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i m((A_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j m(B_j) \\
&= \int f dm + \int g dm.
\end{aligned}
$$

■

Conséquence : En particulier on a

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{A_i} dm.$$

• Soit $f, g \in \mathcal{E}^+$ (deux fonctions étagées positives) telles que $f \geq g$, comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, alors $f-g$ est étagée positive et comme $\int (f-g)dm \geq 0$, on a par linéarité

$$\int f dm = \int (f-g)dm + \int g dm \geq \int g dm.$$

Conséquence de la monotonie : pour toute fonction étagée positive f, on a :

$$\int f dm = \sup\left\{ \int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f \right\}.$$

Exemple 4.2.2. ***Intégration par rapport à la mesure de dirac*** *: L'intégrale d'une fonction étagée positive f par rapport à δ_a est donnée par*

$$\boxed{\int f d\delta_a = f(a)}. \tag{4.1}$$

En effet : pour une fonction indicatrice mesurable $f = \mathbb{1}_A$, on a

$$
\begin{aligned}
\int \mathbb{1}_A d\delta_a &= \delta_a(A) \\
&= \mathbb{1}_A(a) \\
&= f(a).
\end{aligned}
$$

Plus généralement : Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ *une fonction étagée positive* ($\forall i, a_i \neq 0$).

$$\begin{aligned}
\int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{A_i} d\delta_a \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_a(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(a) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i})(a) \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Exemple 4.2.3. ***Intégration par rapport à une mesure image*** *: si* f *est une fonction étagée positive définie de* F *dans* $\mathbb{R}_+$ *et* $\mu = m_g$ *une mesure image c'est à dire* $\mu(A) = m(\varphi^{-1}(A))$, *où* $\varphi : (E, T, m) \to (F, \mathcal{T})$ *est mesurable, alors*

$$\boxed{\int_F f d\mu = \int_E f \circ \varphi dm}.$$

- *Pour une fonction indicatrice mesurable* $f = \mathbb{1}_A$, *on a*

$$\begin{aligned}
\int_F \mathbb{1}_A d\mu &= \mu(A) \\
&= m(\varphi^{-1}(A)) \\
&= \int_E \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)} dm \\
&= \int_E \mathbb{1}_A \circ \varphi dm \text{ d'après le lemme1.2.1 du chapitre 1,} \\
&= \int_E f \circ \varphi dm.
\end{aligned}$$

- *Dans le cas général, si* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ *une fonction étagée positive avec les* a_i *strictement* *positifs, on a*

$$\begin{aligned}
\int_F \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \int_F \mathbb{1}_{A_i} d\mu \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \int_E \mathbb{1}_{A_i} \circ \varphi dm \\
&= \int_E \sum_{i=1}^n a_i (\mathbb{1}_{A_i} \circ \varphi) dm \\
&= \int_E (\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}) \circ \varphi dm \\
&= \int_E f \circ \varphi dm.
\end{aligned}$$

4.3 Intégrale d'une fonction mesurable positive

4.3.1 Définitions et propriétés

Soit $\mathcal{M}_+$, l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 4.3.1. *(Integrale sur $f \in \mathcal{M}_+$) Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$. On définit l'intégrale de f par*

$$\int f dm = \int_E f dm = \sup \left\{ \int_E g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f \right\}$$

Plus généralementt, si $A \in T$, on pose

$$\int_A f dm = \int f \mathbb{1}_A dm.$$

Donc

$$\int_A f dm = \sup \left\{ \int_A g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f \right\}.$$

Si $\int f dm < +\infty$, on dit que f est intégrable. Si $\int_A f dm < +\infty$, on dit que f est intégrable sur A.

Lemme 4.3.1. *Soient (E, T, m) un espace mesuré,$f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$ alors*

$$m(A) = 0 \Rightarrow \int_A f dm = 0.$$

Démonstration 91. *Supposons $m(A) = 0$, on a par définition de l'intégrale*

$$\int_A f dm = \sup \left\{ \int_A g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f \right\}.$$

Soit $g \in \mathcal{E}_+, g \leq f$, *alors* $g = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ *avec pour tout* i, a_i *est un réel positif et* $A_i \in T$

$$\begin{aligned}
\int_A gdm &= \int_E (\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}) \mathbb{1}_A dm \\
&= \int_E \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_A dm \\
&= \int_E (\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i \cap A} dm \text{ par définition} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i \cap A) \\
&= 0 \text{ car } m(A_i \cap A) \leq m(A) = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\sup\{\int_A gdm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\} = 0$ *car toute les fonctions étagées qui sont inférieurs à* f, *ont une intégrale nulle sur* A. ■

Proposition 4.3.1. *(Croissance de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$*) Soient* f *et* $g \in \mathcal{M}_+$, *alors :*

$$f \geq g \Rightarrow \int fdm \geq \int gdm.$$

Démonstration 92. *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\mathcal{M}_+$ *telles que* $f \geq g$, *on a*

$$\begin{aligned}
g \leq f &\Rightarrow \{\int \varphi dm, \varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi \leq g\} \subset \{\int \varphi dm, \varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi \leq f\} \\
&\Rightarrow \sup\{\int \varphi dm, \varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi \leq g\} \leq \sup\{\int \varphi dm, \varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi \leq f\} \\
&\Rightarrow \int gdm \leq \int fdm.
\end{aligned}$$

■

4.3.2 Théorème de convergence monotone ou théorème de Beppo- Levi

Théorème 4.3.1. *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et tout* $x \in E$. *On pose pour tout* $x \in E$, $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n dm = \int fdm.$$

(Noter que $(\int f_n dm)_n)_n$ *est une suite croissante dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *donc sa limite existe).*

me est basée sur le lemme suivant : La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

Lemme 4.3.2. *Si $s \in \mathcal{E}_+$ (une fonction étagée positive) définie sur l'espace mesuré (E, T, m) et si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de E (i.e. $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout n)telle que $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} sdm = \int_F sdm.$$

Démonstration 93. *Soit $s = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $(a_i)_n$ une suite de réels positifs et $(A_i)_n$ une suite d'éléments de T, on a :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} sdm &= \lim_{k\to+\infty} \int s\mathbb{1}_{E_n} dm \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{E_n} dm \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i\cap E_n} dm \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E_n).
\end{aligned}$$

Soit pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $B_n = A_i \cap E_n$, comme par hypothèse $E_n \subset E_{n+1}$, pour tout n, alors $A_i \cap E_n \subset A_i \cap E_{n+1}$ pour tout n, c'est à dire que $(B_n)_n$ est aussi une suite croissante, comme on a aussi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_i \cap (\cup_n E_n) = A_i \cap F$, alors par monotonie coissante d'une mesure (voir le 3. de la proposition 2.2.1) on a,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E_n) &= \sum_{i=1}^k a_i \lim_{n\to+\infty} m((A_i \cap E_n) = \sum_{i=1}^k a_i \lim_{n\to+\infty} m(B_n) \\
&= \sum_{i=1}^k a_i m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \text{ d'après la monotonie croissante d'une mesure} \\
&= \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap F) = \int \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i\cap F} dm \text{ par définition de l'intégrle} \\
&= \int_F \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_F dm = \int_F \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i} dm, \\
&= \int_F sdm,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} sdm = \int_F sdm.$$

■

Démonstration 94. *(Démonstration du théorème de Beppo-Lévi)*

1. *Posons* $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n dm$ *et montrons que* $I \leq \int_E f dm$.
   On a par hypothèse $0 \leq f_1 \leq f_2 \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \ldots \leq f$ *par monotonie de l'intégrale (voir proposition 4.3.1) obtient,*
   $\int_E f_1 dm \leq \int_E f_2 dm \ldots \leq \int_E f_n dm \leq \int_E f_{n+1} dm \ldots \leq \int_E f dm$,
   $(\int_E f_n dm)_n$ *est aussi une suite coissante dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *donc sa limite existe d'où,*

$$\int_E f_n dm \leq \int_E f dm \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n dm \leq \int_E f dm,$$

   donc

$$I \leq \int_E f dm. \tag{4.2}$$

2. *Montrons que* $I \geq \int f dm$, *avec* $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n dm$.
   Soit $c \in]0,1[$ *et soit* $s \in \mathcal{E}_+$ *(une fonction étagée positive) telle que* $s \leq f$.
   Pour tout n, *on définit l'ensemble* E_n *par*

$$E_n = \{x \in E : f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

   - ***Etape 1*** *Montrons que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E_{n+1}$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$ *et soit* $x \in E_n$, *on a*

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &\geq f_n(x) \text{ par hypothèse} \\ &\geq cs(x) \text{ par construction de } E_n, \end{aligned}$$

     d'où $f_{n+1}(x) \geq cs(x)$, *c'est à dire* $x \in E_{n+1}$ *et donc,*

$$\boxed{E_n \subset E_{n+1}}.$$

   - ***Etape 2*** *Montrons que* $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$,
     Par construction de E_n, *on a* $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E$, *d'où*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subset E. \tag{4.3}$$

     Pour la deuxième inclusion : Soit $x \in E$,
     on rappelle que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, *c'est à dire :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

     <u>*Cas 1*</u> : $f(x) > 0$, *comme par hypothèse on a* $f(x) \geq s(x) \geq cs(x)$ *alors* $f(x) - cs(x) > 0$ *et donc, pour* $\epsilon = f(x) - cs(x)$, *on a*
     $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq f(x) - cs(x)$, *comme* $f_n(x) \leq f(x)$, *on a*

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow f(x) - f_n(x) \leq f(x) - cs(x)$, ou encore ?
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) \geq cs(x)$ par suite, $\exists n_0$ telque,

$$x \in E_{n_0} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n. \tag{4.4}$$

<u>Cas 2</u> : $f(x) = 0$, comme $0 \leq s(x) \leq f(x) = 0$ alors $s(x) = 0$, pa suite $cs(x) = 0$, comme de plus $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq f_k(x) \leq f(x) = 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) = 0$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) = cs(x)$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$x \in E_k \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n. \tag{4.5}$$

De (4.4) et (4.5) on a,

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \tag{4.6}$$

de (4.3) et (4.6), on a

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

– ***Etape 3*** *On a, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall c \in]0, 1[$*

$$\begin{aligned} c\int_{E_n} sdm &\leq \int_{E_n} f_n dm \text{ car } f_n \geq cs \text{ sur } E_n \\ &\leq \int_E f_n dm \text{ car } E_n \subset E \\ &\leq \int_E f dm \text{ car } f_n \leq f \text{ sur } E. \end{aligned}$$

On rappelLe qu'on a posé $I = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n dm$, donc des inéquations précédentes on déduit,

$$\lim_{n\to+\infty} c\int_{E_n} sdm \leq I \leq \int_E f dm,$$

et d'après le lemme 4.3.2 on a,

$$c\int_E sdm \leq I \leq \int_E f dm,$$

or

$$\lim_{c\to 1^-} c\int_E sdm = \int_E sdm$$

donc

$$\int_E sdm \leq I \leq \int_E f dm$$

d'où

$$\forall s \in \{w \in \mathcal{E}_+, w \leq f\}, \int_E sdm \leq I$$

et donc

$$\forall r \in G = \{\int wdm, w \in \mathcal{E}_+, w \leq f\}, r \leq I,$$

c'est à dire I est un majorant de G, comme le sup est le plus petit des majorants, alors :

$$\int_E fdm = \sup\{\int wdm, w \in \mathcal{E}_+, w \leq f\} \leq I. \tag{4.7}$$

De 4.2 et 4.7, on a : $\int_E fdm = I$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n dm = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n dm$$

■

Corollaire 4.3.1. *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$, alors*

$$\int fdm = \lim_{n\to+\infty}\int f_n dm,$$

avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

Démonstration 95. *C'est un cas particulier du théorème précédent car $\mathcal{E}_+ \subset \mathcal{M}_+$.*

Lemme 4.3.3. *(Lemme de Fatou) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Alors $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}_+$ et :*

$$\int \liminf_n f_n dm \leq \liminf_n \int f_n dm.$$

Remarque 4.3.1. *Si $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$ avec $A_n \in T$, Le lemme de Fatou se traduit par $m(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n m(A_n)$.*

Démonstration 96. *(du lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_+$, on a déjà vu proposition 3.1.6, que $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}_+$.*
On pose $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ et $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$, on a
- *On a par définition de g_n, $g_n \leq f_n$, donc par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a $\int g_n dm \leq \int f_n dm$*
- *pour tout n, $g_n \in \mathcal{M}_+$,*
- *La suite (g_n) est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$(voir chapitre 1) donc (g_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} g_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \liminf_n f_n$*

D'après le théorème de Beppo- Levi, on a :

$$\begin{aligned}
\int \liminf_n f_n dm &= \int \lim_{n\to+\infty} g_n dm \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int g_n dm \text{ d'après Beppo-Levi} \\
&= \liminf_n \int g_n dm \text{ car } \lim_{n\to+\infty} v_n = \liminf_n v_n = \limsup_n v_n \\
&\leq \liminf_n \int f_n dm \text{ car } \int g_n dm \leq \int f_n.
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.3.2. *(Linéarité positive sur $\mathcal{M}_+$) Soient f et $g \in \mathcal{M}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$ et $\displaystyle\int \alpha f + \beta g dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$.*

Démonstration 97. *Soient f et $g \in \mathcal{M}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$.*
D'après la proposition 3.4.2 il existe $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites croissantes de $\mathcal{E}_+$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = g$.
Comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, pour α, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, et $f_n, g_n \in \mathcal{E}_+$, on a $(\alpha f_n + \beta g_n)_n$ est une suite croissante de $\mathcal{E}_+$ qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha f_n + \beta g_n = \alpha f + \beta g$.
et

$$\begin{aligned}
\int (\alpha f + \beta g) dm &= \int \lim_{n\to+\infty} (\alpha f_n + \beta g_n) dm \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int (\alpha f_n + \beta g_n) dm \text{ D'après Beppo-Levi} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\alpha \int f_n dm + \beta \int g_n dm \text{ Linéarité dans } \mathcal{E}_+ \\
&= \alpha \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm + \beta \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \\
&= \alpha \int \lim_{n\to+\infty} f_n dm + \beta \int \lim_{n\to+\infty} g_n dm \text{ D'après Beppo-Levi} \\
&= \alpha \int f dm + \beta \int g dm.
\end{aligned}$$

Corollaire 4.3.2. *(Séries à termes positifs ou nuls) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ et*

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm.$$

Démonstration 98. *Soit $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$, on a $g_{n+1} = g_n + f_{n+1} \geq g_n$ car $f_{n+1} \geq 0$ donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus $\forall n$, g_n est mesurables positive comme somme finie de fonctions de $\mathcal{M}_+$ (voir proposition 3.1.6 page 81).*
D'autre part comme $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \in \mathcal{M}_+$ comme limite simple d'une suite de

fonctions de $\mathcal{M}_+$ (voir proposition 3.1.9 page 83).

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n dm &= \int \lim_{n\to+\infty} g_n dm \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \text{ d'après le théorème de Beppo- Levi} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int \sum_{k=0}^{n} f_k dm \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int f_k dm D\text{'après la linéarité de l'intégrale sur } \mathcal{M}_+ \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int f_k dm
\end{aligned}$$

■

4.3.3 Inégalité de Markov

Lemme 4.3.4. *(Inégalité de Markov) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$, alors pour tout $t > 0$, on a :*

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f dm.$$

Démonstration 99. *Comme f est mesurable $(f \geq t)$ est un ensemble mesurable.*

$$\begin{aligned}
tm(\{f \geq t\}) &= t \int \mathbb{1}_{(f\geq t)} dm \text{ car } m(A) = \int \mathbb{1}_A \\
&= \int t\mathbb{1}_{(f\geq t)} dm \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&\leq \int f dm \text{ par monotonie de l'intégrale } \text{ car } t\mathbb{1}_{(f\geq t)} \leq f,
\end{aligned}$$

donc

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f dm.$$

■

Proposition 4.3.3. *Soit f, $g \in \mathcal{M}_+$, alors :*

$$f = g \quad p.p. \Rightarrow \int f dm = \int g dm.$$

Démonstration 100. *$f = g \quad p.p \Rightarrow \exists A \in T; m(A) = o et (f \neq g) \subset A$, c'est à dire $A^c \subset (f = g)$ (i.e. $\forall x \in A^c; f(x) = g(x)$), autrement écrit $f\mathbb{1}_{A^c} = g\mathbb{1}_{A^c}$, donc $\int f\mathbb{1}_{A^c} dm = \int g\mathbb{1}_{A^c} dm$, donc*

$$\boxed{\int_{A^c} f dm = \int_{A^c} g dm}. \tag{4.8}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\int f dm &= \int_{A\cup A^c} f dm \\
&= \int f \mathbb{1}_{A\cup A^c} dm \\
&= \int f(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}) dm \\
&= \int f\mathbb{1}_A dm + \int f\mathbb{1}_{A^c} dm \\
&= \int f\mathbb{1}_{A^c} dm \ \textit{car}\ m(A) = 0 \\
&= \int g\mathbb{1}_{A^c} dm \ \textit{d'après}\ 4.8 \\
&= \int g dm \ \textit{car} \int g dm = \int f\mathbb{1}_A dm + \int f\mathbb{1}_{A^c} \ \textit{et}\ m(A) = 0.
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.3.4. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ alors,*

$$\int f dm = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad p.p.$$

Démonstration 101. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$*
L'implication ($f = 0$ p.p. $\Rightarrow \int f dm = 0$) découle de la proposition précédente en prenant $g = 0$.
$\int f dm = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p. ?
Comme f est mesurable et $(f \neq 0) = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, $(f \neq 0)$ est un ensemble mesurable donc
$f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow m((f \neq 0)) = 0$ or,
$(f \neq 0) = f^{-1}(]0, +\infty[) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}, +\infty[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f \geq \frac{1}{n}\},$
donc

$$\begin{aligned}
0 \leq m(f \neq 0) &= m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f \geq \frac{1}{n}\}) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) \ \textit{d'après la}\ \sigma\ \textit{sous additivité d'une mesure} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n \int f dm \ \textit{d'après l'inégalité de Markov} \\
&= 0 \ \textit{car} \int f dm = 0,
\end{aligned}$$

donc $m(f \neq 0) = 0$, c'est à dire $f = 0$ p.p. ■

4.3.4 Exemples

Soit f une fonctions mesurables positive, d'après la proposition 3.4.2, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions étagées positives telle que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n = f}$, et d'après le corrollaire 4.3.1,

$$\boxed{\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm}.$$

1. **Intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport à la mesure de Dirac**
   L'intégrale d'une fonction f mesurable positive par rapport à la mesure de Dirac δ_a est donnée par

   $$\boxed{\int f d\delta_a = f(a).}$$

   En effet :

   $$\begin{aligned} \int f d\delta_a &= \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\delta_a \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n(a) \text{ d'après l'équation (4.1) page 109} \\ &= f(a) \end{aligned}$$

2. **Intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport à la mesure image**
   L'intégrale d'une fonction f mesurable positive par rapport à la mesure image $\mu = m_\varphi$, où $\varphi : (E, T, m) \to (F, \mathcal{T})$ est mesurable, est donnée par

   $$\boxed{\int_F f d\mu = \int_E f \circ \varphi dm.}$$

   En effet :

   $$\begin{aligned} \int f d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int f_n \circ \varphi dm \\ &= \int \lim_{n\to+\infty} f_n \circ \varphi dm \text{ d'après Beppo Levi car } (f_n \circ \varphi)_n \text{ est ne une suite croissante,} \\ &\quad \text{de fonctions mesurables et positives} \\ &= \int f \circ \varphi dm \end{aligned}$$

3. **Intégration d'une suite numérique à termes positifs par rapport à la mesure de comptage**
   Soit $u : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to [0, +\infty[$ telle que $u(n) = u_n$ et soit m la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, par $m(A) = card(A)$.

   D'après le lemme 3.4.3, on a $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)\mathbb{1}_{\{n\}} = \lim_{k\to+\infty} u_k$ avec $u_k = \sum_{n=0}^{k} u(n)\mathbb{1}_{\{n\}}$

($(u_k)_k$ est étagée, positive et croissante) donc,

$$\begin{aligned}
\int udm &= \int \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k} u(n)\mathbb{1}_{\{n\}} \\
&= \lim_{k\to+\infty}\int \sum_{n=0}^{k} u(n)\mathbb{1}_{\{n\}} \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k} u(n)m(\{n\}) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k} u(n) \text{ car } m(\{n\}) = card(\{n\}) = 1 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int udm = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)}. \tag{4.9}$$

Théorème 4.3.2. *Soit $u_{n,m}$ le terme d'une série, indexée sur $\mathbb{N}^2$. Si $\forall n, m \in \mathbb{N}^2$, $u_{n,m} \in \mathbb{R}_+$, alors :*

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m} = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}.$$

Démonstration 102. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{N}$ par $f_n(m) = u_{n,m}$, et soit m la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. On a d'après le corollaire4.3.2 (intégration d'une série à terme positifs),*

$$\int_{\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n dm = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f_n dm.$$

En considérant $\int_{\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n dm = \int fdm$ avec $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, on a d'après la formule (4.9),

$$\int_{\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n dm = \sum_{m\in\mathbb{N}}(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(m)) = \sum_{m\in\mathbb{N}}(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m})$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f_n dm = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} f_n(m)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}),$$

d'où le résultat. ■

Exemple 4.3.1. ***Intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport à la mesure discrète :*** *Si f est une fonction mesurable positive et $m = \sum_{j\geq 1}\alpha_j\delta_{x_j}$ alors l'integrale de f par* *rapport à m est donnée par*

$$\boxed{\int f dm = \sum_{j=1}^{\infty} m(\{x_j\}) f(x_j)}.$$

En effet : • *Pour une fonction indicatrice mesurable $f = \mathbb{1}_A$, on a*

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{1}_A dm &= m(A) \\
&= \sum_{j\geq 1} \alpha_j \delta_{x_j}(A) \\
&= \sum_{j\geq 1} \alpha_j \mathbb{1}_A(x_j) \\
&= \sum_{j\geq 1} \alpha_j f(x_j) = \sum_{j\geq 1} m(\{x_j\}) f(x_j) \text{ car } m(\{x_j\}) = \alpha_j.
\end{aligned}$$

• *Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ est une fonction étagée positive (les $a_i \neq 0$).*

$$\begin{aligned}
\int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} dm &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{A_i} dm \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j\geq 1} \alpha_j \mathbb{1}_{A_i}(x_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\geq 1} \alpha_j a_i \mathbb{1}_{A_i}(x_j) \\
&= \sum_{j\geq 1} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x_j) \\
&= \sum_{j\geq 1} \alpha_j (\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i})(x_j) \\
&= \sum_{j\geq 1} \alpha_j f(x_j) \\
&= \sum_{j\geq 1} m(\{x_j\}) f(x_j).
\end{aligned}$$

• *Soit f est une fonction mesurable positive. On rappelle que $m = \sum_{j\geq 1} \alpha_j \delta_{x_j}$ et on pose*

$A = \{x_i, i \geq 1\}$.

$$\begin{aligned}
\int f dm &= \int_A f \;\; car \; m(A^c) = 0 \\
&= \int f \mathbb{1}_A dm \\
&= \int f \mathbb{1}_{\cup_{i\geq 1}\{x_i\}} dm \\
&= \int \sum_{i\geq 1} f \mathbb{1}_{\{x_i\}} \\
&= \int \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{1}_{\{x_i\}}.
\end{aligned}$$

Soit $f_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{1}_{\{x_i\}}$, *comme* $(f_n)_n$ *est une suite croissante de fonctions positives étagées qui vérifie* $\lim_{n\to+\infty} f_n = f\mathbb{1}_A$, *alors d'après le théorème de Beppo-Lévi, on a*

$$\int f dm = \int f \mathbb{1}_A dm = \int \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\int f_n dm &= \sum_{j=1}^{n} f(x_i) m(\{x_i\}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_i) \sum_{j\geq 1} \alpha_j \delta_{x_j}(\{x_i\}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_i) \alpha_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_i) m(\{x_i\})
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int f dm &= \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_i) m(\{x_i\}) \\
&= \sum_{j\geq 1} f(x_i) m(\{x_i\}),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4.4 Mesures et probabilités de densité

Définition 4.4.1. *(Mesure de densité) Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$. On définit $\mu : T \to \bar{\mathbb{R}}_+$ par :*

$$\mu(A) = \int f \mathbb{1}_A dm = \int_A f dm, \quad \forall \in T.$$

L'application μ qui est une mesure sur T est appelée mesure de densité f par rapport à m, et est notée $\mu = fm$.

Vérifions que μ est une mesure :
$\mu(\emptyset) = \int_\emptyset f dm = 0$ car $m(\emptyset) = 0$ voir le lemme4.3.1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T deux à deux disjoints,

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \int f \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} dm \\
&= \int f \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} dm \\
&= \int \sum_{n\in\mathbb{N}} f \mathbb{1}_{A_n} dm \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f \mathbb{1}_{A_n} dm \text{ d'après le corollaire 4.3.2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Donc μ est une mesure sur T.

Proposition 4.4.1. *Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+$ et μ la mesure de densité f par rapport à m. Alors la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m, c'est à dire que si $A \in T$ et tel que $m(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$.*

Démonstration 103. *Soit $A \in T$, d'après le lemme 4.3.1 on a,*

$$\begin{aligned}
m(A) = 0 &\Rightarrow \int_A f dm = 0 \\
&\Rightarrow \mu(A) = 0.
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.4.1. *La réciproque de la proposition précédente est donnée par le théorème de Radon-Nikodym.*

Théorème 4.4.1. *(théorème de Radon-Nikodym.) Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et μ une mesure finie définie sur T. Alors la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m, (c'est à dire : $\forall A \in T$, $m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$) si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à m. (c'est à dire il existe une fonction $f \in \mathcal{M}_+$ telle que $\mu(A) = \displaystyle\int f \mathbb{1}_A dm = \int_A f dm, \quad \forall \in T$.*

Définition 4.4.2. *(Probabilité de densité) Soit P une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on dit que P est une probabilité de densité s'il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:*

$$P(A) = \int f \mathbb{1}_A d\lambda = \int_A f d\lambda.$$

En particulier

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int f \mathbb{1}_{\mathbb{R}} d\lambda = P(\mathbb{R}) = 1.$$

Exemple 4.4.1. ***Intégration d'une fonction mesurable positive par rapport à une mesure à densité :*** *L'intégrale d'une fonction f mesurable positive par rapport à une mesure à densité $\mu = \phi m$ est donnée par*

$$\boxed{\int f d\mu = \int f \phi dm}.$$

En effet : • Pour une fonction indicatrice mesurable $f = \mathbb{1}_A$, on a :

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_A d\mu &= \mu(A) \\ &= \int_A \phi dm \\ &= \int \mathbb{1}_A \phi dm \\ &= \int f \phi dm. \end{aligned}$$

• *Pour une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, les a_i strictement positifs.*

$$\begin{aligned} \int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{A_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int \mathbb{1}_{A_i} \phi dm \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \phi dm \\ &= \int (\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}) \phi dm \\ &= \int f \phi dm. \end{aligned}$$

• *Pour une fonction f mesurable positive, on a :*

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int f_n \phi dm \\ &= \int \lim_{n\to+\infty} f_n \phi dm \\ &= \int f\phi dm.\end{aligned}$$

4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

4.5.1 Définitions et propriétés

Définition 4.5.1. *(Espace $\mathcal{L}^1$) Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est intégrable si $\int |f|dm < +\infty$, dans ce cas on a aussi $\int f^+dm < +\infty$ et $\int f^-dm < +\infty$ on pose alors*

$$\int f dm = \int f^+dm - \int f^-dm.$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ou simplement $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions integrables.

Remarque 4.5.1. *Comme $\int |f|dm = \int f^+dm + \int f^-dm$, on a alors $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si$\int f^+dm < +\infty$ et $\int f^-dm < +\infty$.*

Proposition 4.5.1. *(Propriétés de $\mathcal{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$) Soit (E, T, m) un espace mesuré. On a alors :*

1. *$\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,*
2. *L'application $f \to \int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$,*
3. *Monotonie : soient f et $g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \le g$ alors $\int f dm \le \int g dm$,*
4. *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, $|\int f dm| \le \int |f|dm$,*
5. *Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q.f=g p.p. Alors $\int f dm = \int g dm$.*

Démonstration 104. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{L}^1$, c'est à dire $\int |f|dm < +\infty$ et $\int |g|dm < +\infty$*

1. *on a • $\int |\alpha f|dm = \int |\alpha||f|dm = |\alpha| \int |f|dm < +\infty$ d'après la linéarité sur $\mathcal{M}_+$ car $|f|$ est mesurable positive donc αf est intégrable, c'est à dire $\boxed{\alpha f \in \mathcal{L}^1}$.*

- $\int |f+g|dm \leq \int |f|dm + \int |g|dm < +\infty$ *donc* $(f+g)$ *est intégrable c'est à dire* $\boxed{(f+g) \in \mathcal{L}^1}$.

2. *On a*

$$(\alpha f) = (\alpha f)^+ - (\alpha f)^- = \begin{cases} \alpha f^+ - \alpha f^- & si \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha f^- - (-\alpha) f^+ & si \quad \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Donc • *Si* $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned} \int \alpha f dm &= \int (\alpha f^+ dm - \\ displaystyleint \alpha f^-)dm \\ &= \alpha(\int f^+ dm - \int f^-)dm \text{ d'après la linéarité sur } \mathcal{M}_+ \\ &= \alpha \int f dm \end{aligned}$$

- *et si* $\alpha \leq 0$

$$\begin{aligned} \int \alpha f dm &= \int (-\alpha f^- dm - \int (-\alpha) f^+)dm \\ &= \alpha(\int f^+ dm - \int f^-)dm \text{ d'après la linéarité sur } \mathcal{M}_+ \\ &= \alpha \int f dm. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}; \int \alpha f dm = \alpha \int f dm}.$$

- *On a aussi*

$$\begin{aligned} (f+g) &= (f+g)^+ - (f+g)^- \\ &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \text{ car } \max(f(x)+g(x),0) + \min(f(x)+g(x),0) = f(x)+g(x) \\ &\Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \\ &\Rightarrow \int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+ \text{ d'après la linéarité sur } \mathcal{M}_+ \\ &\Rightarrow \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\int (f+g)dm = \int f dm + \int g dm}.$$

3. *D'après la linéarité et la monotonie sur* $\mathcal{M}_+$*, on a :*

$$\begin{aligned} f \leq g &\Rightarrow f^+ - f^- \leq g^+ - g^- \\ &\Rightarrow f^+ + g^- \leq g^+ + f^- \\ &\Rightarrow \int f^+ + g^- dm \leq \int g^+ + f^- dm \\ &\Rightarrow \int f^+ dm + \int g^- dm \leq \int g^+ dm + \int f^- dm \\ &\Rightarrow \int f^+ dm - \int f^- dmdm \leq \int g^+ dm - \int g^- dm \\ &\Rightarrow \int f dm \leq \int g dm. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} |\int f dm| &= |\int f^+ dm - \int f^- dm| \text{Par définition} \\ &\leq |\int f^+ dm| + |\int f^- dm| \\ &= \int f^+ dm + \int f^- dm \\ &= \int f^+ + f^- dm \\ &= \int |f| dm. \end{aligned}$$

5. *Supposons que* $f = g$ *p.p., on alors* $|f-g| = 0 \quad$ *p.p., or d'après la proposition 4.8, on a*

$$\boxed{|f-g| = 0 \quad p.p. \Rightarrow \int |f-g| dm = 0}. \tag{4.10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq |\int f dm - \int g dm| &= |\int (f-g) dm| \\ &\leq \int |(f-g) dm| \\ &= 0 \text{ d'après } (4.10) \\ &\Rightarrow |\int f dm - \int g dm| = 0 \\ &\Rightarrow \int f dm - \int g dm = 0 \\ &\Rightarrow \int f dm = \int g dm. \end{aligned}$$

■

4.5.2 Théorème de convergence dominée

Définition 4.5.2. *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{L}^1$*. On pose*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm$$

L'application de $\in \mathcal{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $f \to \|f\|_1$ *est une semi norme sur* $f \in \mathcal{L}^1$

Proposition 4.5.2. *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $f \in \mathcal{L}^1$. *Alors* $\|f\|_1 = 0$ *si et seulement si f=0 p.p.*

Démonstration 105.

$$\begin{aligned}\|f\|_1 = 0 &\Leftrightarrow \int |f| dm = 0 \\ &\Leftrightarrow |f| = 0 \quad p.p. \\ &\Leftrightarrow f = 0 \quad p.p.\end{aligned}$$

■

Théorème 4.5.1. *(Théorème de La Convergence Dominée de Lebesgue) Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$, $f \in \mathcal{M}$ *et* $g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.*$f_n \to f$ *p.p. quand* $n \to \infty$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ *p.p.. On a alors,*

$$f \in \mathcal{L}^1, \|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

et

$$\int f_n dm \to \int f dm \text{ quand } n \to \infty.$$

Corollaire 4.5.1. *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré fini, et* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction borélienne et bornée, alors* f *est intégrable.*

Démonstration 106.

$$\begin{aligned} f \text{ est bornée} &\Rightarrow \exists M > 0; |f| \leq M \\ &\Rightarrow \int_E |f| dm \leq \int_E M dm \\ &\Rightarrow \int_E |f| dm \leq Mm(E) < +\infty \text{ car } m \text{ est finie.}\end{aligned}$$

■

4.5.3 Finitude presque partout

Proposition 4.5.3. *Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *une application* m *intégrable, c'est à dire* $\int |f| dm < +\infty$. *Alors* f *est fini* m *presque partout.*

Démonstration 107. *Soit* $A = \{x \in E; |f(x)| = +\infty\} = (|f| = +\infty)$, *on a d'après l'inégalité de Markov* $m(A_n) < \frac{1}{n} \int |f| dm$ *avec* $A_n = \{x \in E; |f(x)| > n\}$. *Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} m(A_n) = 0$ *car* $\frac{1}{n} \int |f| dm \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *cette dernière s'explique par le fait que* $\int |f| dm < +\infty$ *(m-intégrabilité de* f*),*
or pour tout n, *on a,* $A \subset A_n$ *donc pour tout* n, $0 \leq m(A) \leq m(A_n) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *donc* $m(A) = 0$. ■

Corollaire 4.5.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) telles que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_E f_n dm < +\infty,$$

alors $f := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est fine m-p.p. sur E.

Démonstration 108. *Il suffit d'appliquer la proposition précédente et le corollaire 4.3.2 (interversion intégrale série)*

$$\int_E f dm = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_E f_n dm < +\infty \text{ d'après le corollaire 4.3.2,}$$

et donc $f := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est fine m-p.p. sur E d'après la proposition précédente. ■

Remarque 4.5.2. *En prenant pour f_n des fonctions indicatrices dans le corollaire précédent, on obtient le lemme de Borel cantelli 1.*

4.5.4 Exemples

Soit f une fonction mesurable sur (E, T) et $a \in E$. On suppose f intégrable par rapport à chacune des mesures suivantes. Alors :

1. alors

$$\boxed{\int f d\delta_a = f(a) \text{ avec } |f(a)| < +\infty}.$$

en effet :$\int |f| d\delta_a = |f|(a) = |f(a)| < +\infty$ car $\int |f| d\delta_a < +\infty$ par hypothèse et on a :

$$\begin{aligned}\int f d\delta_a &= \int f^+ d\delta_a - \int f^- d\delta_a \\ &= f^+(a) - f^-(a) \\ &= (f^+ - f^-)(a) \\ &= f(a).\end{aligned}$$

2. si μ est la mesure image de m par φ, c'est à dire $\mu = m_\varphi$, où $\varphi : (E, T, m) \to (F, \mathcal{T})$ est mesurable, alors

$$\boxed{\int_F f d\mu = \int_E f o\varphi dm \text{ avec } \int_E |f o\varphi| dm < +\infty}.$$

$$\boxed{\text{Cette formule est connue sous le nom du théorème de transfert}}$$

En effet : on a,

$$\begin{aligned}
\int_F |f| d\mu < +\infty &\Leftrightarrow \int_E |f| \circ \varphi dm < +\infty \\
&\Leftrightarrow \int_E (f^+ + f^-) \circ \varphi dm < +\infty \\
&\Leftrightarrow \int_E (f^+ \circ \varphi + f^- \circ \varphi) dm < +\infty \\
&\Leftrightarrow \int_E (f \circ \varphi)^+ + (f \circ \varphi)^- dm < +\infty \\
&\Leftrightarrow \int_E |f \circ \varphi)| dm < +\infty,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_F f d\mu &= \int_F f^+ d\mu - \int_F f^- d\mu \\
&= \int_E f^+ o\varphi dm - \int_E f^- o\varphi dm \\
&= \int_E f^+ o\varphi - f^- o\varphi dm \\
&= \int_E (f^+ - f^-) o\varphi dm \\
&= \int_E f o\varphi dm.
\end{aligned}$$

3. si μ est la mesure de densité ϕ par rapport à la mesure m, alors

$$\boxed{\int f d\mu = \int f \phi dm \text{ avec } \int |f\phi| dm < +\infty}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int |f| d\mu < +\infty &\Leftrightarrow \int |f| \phi dm < +\infty \\
&\Leftrightarrow \int (f^+ + f^-) \phi dm < +\infty \\
&\Leftrightarrow \int (f^+ \phi + f^- \phi) dm < +\infty \\
&\Leftrightarrow \int (f\phi)^+ + (f\phi)^- dm < +\infty \text{ car } \phi \text{ est positive : c'est une densité} \\
&\Leftrightarrow \int |f\phi| dm < +\infty
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &= \int f^+ \phi dm - \int f^- \phi dm \\ &= \int (f^+ \phi - f^- \phi) dm \\ &= \int (f^+ - f^-) \phi dm \\ &= \int f \phi dm.\end{aligned}$$

4. si $m = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \delta_{x_n}$ alors l'integrale de f par rapport à m est donnée par

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m(\{x_n\}) f(x_n) \text{ avec } \sum_{n=1}^{+\infty} m(\{x_n\})|f(x_n)| < +\infty}.$$

En effet, on a : $\int |f| dm = \sum_{n=1}^{+\infty} m(\{x_n\})|f|(x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(\{x_n\})|f(x_n)| < +\infty$ car $\int |f| dm < +\infty$ par hypothèse, et

$$\begin{aligned}\int f dm &= \int f^+ dm - \int f^- dm \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(\{x_n\}) f^+(x_n) - \sum_{i=1}^{n} m(\{x_n\}) f^-(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(\{x_n\}) f^+(x_n) - m(\{x_n\}) f^-(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(\{x_n\})(f^+(x_n) - f^-(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(\{x_n\}) f(x_n).\end{aligned}$$

$m(A) = \sum_{j\geq 1} \delta_{x_j}(A) = card(A)$ pour tout ensemble A au plus dénombrable. Dans ce cas on obtient pour toute fonction f mesurable positive.

$$\boxed{\int f dm = \sum_{j\geq 1} f(x_j)}.$$

• Si f est de signe quelconque, f est intégrable par rapport à la mesure de comptage si $\int |f| dm < +\infty$, donc si $\sum_{j=1}^{+\infty} |f(x_j)| < +\infty$, c'est à dire la série est absolument convergente.

Lemme 4.5.1. *Un suite numérique est la limite d'une suite de fonctions étagées.*

Démonstration 109. *Soit la suite numérique*

$$\begin{array}{rccc} u: & (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

On a $u_p = u(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \mathbb{1}_{\{n\}}(p) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{m} u_n \mathbb{1}_{\{n\}}(p)$

donc

$$\boxed{u = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{m} u_n \mathbb{1}_{\{n\}}}.$$

■

Si f est une suite numérique $f : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $f(n) = u_n$.

Son intégrale par rapport à la mesure de comptage $m = \sum_{n \geq 1} \delta_n$ (m est définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) est donnée par :

$$\boxed{\int f dm = \sum_{n \geq 1} f(n)}, \tag{4.11}$$

ou encore

$$\int f dm = \sum_{n \geq 1} u_n$$

sous la condition $\sum_{n \geq 1} |u_n| < +\infty$.

C'est un moyen d'exprimer une série numérique sous la forme d'une intégrale.

4.5.5 Familles sommables

Théorème 4.5.2. *Soit $u_{n,m}$ le terme d'une série, indexée sur $\mathbb{N}^2$.*

1. *Si $\forall n, m \in \mathbb{N}^2$, $u_{n,m} \in \mathbb{R}_+$, alors :*

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} u_{n,m} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,m}.$$

2. *Si $\forall n, m \in \mathbb{N}^2$, $u_{n,m} \in \mathbb{R}$, et $\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |u_{n,m}| < +\infty$, alors :*

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} u_{n,m} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,m}.$$

Démonstration 110. *1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{N}$ par $f_n(m) = u_{n,m}$, et soit m la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. On a d'après le corollaire4.3.2 (intégration d'une série à terme positifs),*

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f_n dm.$$

En considérant $\int_{\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n dm = \int f dm$ avec $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, on a d'après la formule (4.11),

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n dm = \sum_{m\in\mathbb{N}} (\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(m)) = \sum_{m\in\mathbb{N}} (\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m})$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f_n dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} f_n(m)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}),$$

d'où le résultat.

2. f_n est intégrable si $\int |f_n| dm < +\infty$, c'est à dire si $\sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} |u_{n,m}| < +\infty$.

On écrit alors $\int f_n dm = \int f_n^+ dm - \int f_n^- dm$, pour avoir le résultat.

■

4.5.6 Intégration par rapport à une somme de mesures

Proposition 4.5.4. *Soient (E, T) un espace mesurable, $p \in \mathbb{N}^*$, $(m_n)_{0\leq n\leq p}$ une suite finie de mesures sur (E, T), $(\alpha_n)_{0\leq n\leq p} \in \mathbb{R}_+^*$ et m l'application définie sur T par,*

$$\forall A \in T, m(A) = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n m_n(A).$$

Alors

1. *m est une mesure sur T.*
2. *Si f est une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m, alors*

$$\int f dm = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n \int f dm_n.$$

Proposition 4.5.5. *Soient (E, T) un espace mesurable, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur (E, T), $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ et m l'application définie sur T par,*

$$\forall A \in T, m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A).$$

Alors

1. m est une mesure sur T.

2. Si f est une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m, alors

$$\int f dm = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n.$$

4.6 Comparaison avec l'intégrale de Riemann

Proposition 4.6.1. *Soit $-\infty < a < b < +\infty$.*

1. Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Alors $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b],\lambda))$ et

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction borélienne et bornée. Si f est Rieman intégrable, alors f est Lebesgue intégrable et

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration 111. *Soit g une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$, donc g est mesurable (car elle est étagée), et*

$$g = h \quad \lambda - p.p.,$$

avec $h = \sum_{i=}^{n} a_i \mathbb{1}_{]x_i,x_{i+1}[}$, de plus

$$\int |g| d\lambda = \int |h| d\lambda = \sum_{i=}^{n} |a_i|(x_{i+1} - x_i) < +\infty,$$

car $|g| = |h| \quad \lambda - p.p.$ (voir proposition 4.5.1).
Comme $g = h \quad \lambda - p.p.$ et g est intégrable, alors $\int g d\lambda = \int h d\lambda = \sum_{i=}^{n} a_i(x_{i+1} - x_i)$, c'est à dire

$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \int_a^b g(x)dx.$$

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ donc, f est mesurable, f est aussi integrable car

$$\int_{[a,b]} |f| \leq \|f\|(b-a) < +.$$

On compare maintenant $\int_{[a,b]} f d\lambda$ et $\int_a^b f(x)dx$:
f continue sur $[a,b]$ donc bornée donc Riemann intégrable, il existe donc une suite de fonctions en escaliers $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$, c'est à dire

$\|f_n - f\| = \sup |f_n(x) - f(x)| \to 0.$

La définition de l'intégrale des fonctions continues donne $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\int_{[a,b]} f_n d\lambda - \int_{[a,b]} f d\lambda| &= |\int_{[a,b]} f_n - f d\lambda| \\ &\leq \int_{[a,b]} |f_n - f| d\lambda \\ &\leq \int_{[a,b]} \|f_n - f\| d\lambda \\ &= \|f_n - f\| \int_{[a,b]} d\lambda \\ &= \|f_n - f\|(b-a) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n d\lambda = \int_{[a,b]} f d\lambda.$

De plus, on a : $\int_{[a,b]} f_n d\lambda = \int_a^b f_n(x)dx$ *donc,*

$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$

par suite $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$ ■

Proposition 4.6.2. *Soit* $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(c'est à dire* f *est une fonction continue à support compact). Alors* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*. De plus, si* $a, b \in \mathbb{R}$ *sont t.q.* $a < b <$ *et* $f = 0$ *sur* $[a,b]^c$*. Alors*

$$\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration 112. f *est borélienne car continue, pour montrer que* f *est intégrable, on utilise la proposition précédente.*
comme f *est à support compact, il existe* $a, b \in \mathbb{R}$ *sont t.q.* $a < b <$ *et* $f = 0$ *sur* $[a,b]^c$*, on a alors d'après la proposition précédente,*

$$f_{|[a,b]} \subset C([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda).$$

On a donc

$$\int |f| d\lambda = \int |f_{|[a,b]}| d\lambda < +\infty,$$

c'est à dire $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*. La proposition précédente donne aussi :*

$$\int |f_{|[a,b]}| d\lambda = \int_a^b f(x)dx,$$

par suite, on a $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$ ■

Proposition 4.6.3. *Soit f une fonction de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$.*
On suppose que :

i) *f est borélienne ;*

ii) *sur tout $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$, f est bornée et Riemann intégrable ;*

iii) *l'intégrale de Riemann généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente.*

Alors f est Lebesgue intégrable sur $]a,b[$ et

$$\int_{]a,b[} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration 113. *D'après iii), on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq f^+ \leq |f| \\ 0 \leq f^- \leq |f| \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \int_a^b f^+ dx < +\infty \\ 0 \leq \int_a^b f^+ dx < +\infty. \end{array} \right.$$

Soit $(a_n)_n$ une suite croissante de réels qui converge vers vers a et $(b_n)_n$ une suite décroissante de réels qui converge vers vers b, de telle sorte que l'on ait $a < a_n \leq b_n < b$, soit $A_n = [a_n, b_n]$, $(A_n)_n$ est donc croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_n A_n =]a,b[$.
D'après i) f^+ et f^- sont boréliennes,
et d'après ii) f^+ et f^- sont continues sur $[a_n,b_n]$. D'après 2. de la proposition 4.6.1, on aura f^+ et f^- sont Lebesgue intégrable et,

$$\int_{[a_n,b_n]} f^+ d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} f^+(x)dx, \quad \int_{[a_n,b_n]} f^- d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} f^-(x)dx.$$

De plus, la suite $f_n^+ = f^+ \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$ est borélienne, positive (comme produit de deux fonctions boréliennes et positives).
f_n^+ est croissante, car $\mathbb{1}_{[a_{n+1},b_{n+1}]} = \mathbb{1}_{[a_{n+1},a_n[} + \mathbb{1}_{[a_n,b_n]} + \mathbb{1}_{]b_n,b_{n+1}]}$ donc $\mathbb{1}_{[a_{n+1},b_{n+1}]} \geq \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$, ce qui implique $f_{n+1}^+ \geq f_n^+$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^+ = f^+$ *sur* $]a,b[$ *car,* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^+ = f^+ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{[a_n,b_n]} = f^+ \mathbb{1}_{\lim\limits_{n\to+\infty}[a_n,b_n]} = f^+ \mathbb{1}_{]a,b[}$.
D'après le théorème de Beppo-Levi, on a

$$\begin{aligned} \int_{]a,b[} f^+ d\lambda &= \int_{]a,b[} \lim_{n\to+\infty} f_n^+ d\lambda \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{]a,b[} f_n^+ d\lambda \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a_n,b_n]} f^+ d\lambda \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f^+(x)dx \\ &= \int_a^b f^+(x)dx \end{aligned}$$

Donc $\int_{]a,b[} f^+ d\lambda = \int_a^b f^+(x)dx$. *On montre de même que :*
$f_n^- = f^- \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$ *est borélienne, positive, croissante,* $\lim_{n\to+\infty} f_n^- = f^-$ *sur* $]a,b[$ *et que*
$\int_{]a,b[} f^- d\lambda = \int_a^b f^-(x)dx$.
Donc $\int_{]a,b[} |f| d\lambda = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx <$ *et*

$$\begin{aligned}\int_{]a,b[} f d\lambda &= \int_{]a,b[} f^+ d\lambda - \int_{]a,b[} f d\lambda \text{ par définition de l'intégrale par rapport à } \lambda \\ &= \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx \text{ d'après les résultats précédents} \\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

■

Proposition 4.6.4. *Soient* $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$. *Si* f *de* $]a,b[$ *dans* $\mathbb{R}$ *est continue sur* $]a,b[$ *et d'intégrale de Riemann généralisée* $\int_a^b f(x)dx$ *absolument convergente, alors* f *est Lebesgue-intégrable sur* $]a,b[$ *et*

$$\int_{]a,b[} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration 114. *Si* $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $a < \alpha \le \beta \le < b$, *donc* α *et* β *sont finis et l'intervalle* $[\alpha,\beta]$ *est un compact sur lequel* f *est continue, donc bornée et Riemann intégrable. D'autre part comme* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *est continue, elle est borélienne. Donc les conditions de la proposition précédente sont vérifiées, d'où la conclusion.* ■

Notation : $\int f dm = \int_E f(x)dm(x) = \int_E f(x)md(x)$

4.7 Formule de changement de variable dans une intégrale

Proposition 4.7.1. *Soit* I *un intervalle ouvert (non nécessairement borné) de* $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *strictement monotone de classe* C^1. *On pose* $J = \varphi(I)$. *Alors pour toute application mesurable, positive ou* λ *intégrable sur* J, *on a :*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{I}); \int_A f(\varphi(x))|\varphi'(x)| d\lambda(x) = \int_{\varphi(A)} f(y) d\lambda(y).$$

(H) Si de plus φ' *ne s'annule en auccun point de* I, *on a aussi :*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{I}); \int_A f(\varphi(x)) d\lambda(x) = \int_{\varphi(A)} f(y)(\varphi^{-1})'(y) d\lambda(y).$$

Idée de Preuve : Dans la première égalité, on considère μ une mesure de densité $|\varphi^{'}|$ par rapport à la mesure de Lebesgue et $\nu = \mu_{\varphi}$, la mesure image de μ par φ, ensuite on montre que $\nu = \lambda$.
Dans la deuxième égalité, on considère $\mu = \lambda$ et $\nu = \lambda_{\varphi}$, ensuite on montre que ν est la mesure de densité $|\varphi^{-1})^{'}|$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
L'hypothèse (H) nous guarantit que φ^{-1} a une dérivée continue en tout point de J.

$$\forall y \in J; (\varphi^{-1})^{'}(y) = \frac{1}{\varphi^{'}(\varphi^{-1}(y))}.$$

4.8 Espérance et moments des variables aléatoires

Définition 4.8.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.*

1. *Si $X \geq 0$, on définit l'espérance $E[X]$ de la variable aléatoire X par $E[X] = \int X d\mathbb{P}$*
2. *Si $E[|X|] < +\infty$, on définit l'espérance $E[X]$ de la variable aléatoire X par*
$$E[X] = \int X d\mathbb{P}.$$
On définit la variance de X par $Var(X) = \sigma^2(X) = E[(X - E[X])^2]$ (avec $\sigma(X) \geq 0$).
3. *pour $r \in [1, +\infty[$, le moment d'ordre r est l'espérance de la variable aléatoire $|X|^r$.*

Conséquence : $E[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Corollaire 4.8.1. *(Espérance des variables aléatoires discrètes) :soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., \}$. La loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X est donnée par $P_X = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i)\delta_{x^i}$. et dans ce cas on a :*

$$E[X] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i) \text{ et } E[g(X)] = \sum_i g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne et supposée intégrable par rapport à P_X.

En effet : Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
P_X(A) &= P(X^{-1}(A)) \\
&= P(X^{-1}(A \cap X(\Omega))) \\
&= P(X^{-1}(\bigcup_{x_i \in A \cap X(\Omega)} \{x_i\})) \\
&= P(\bigcup_{x_i \in A \cap X(\Omega)} (X^{-1}(\{x_i\})) \\
&= \sum_{x_i \in A \cap X(\Omega)} P(X^{-1}(\{x_i\}) \\
&= \sum_{x_i \in A \cap X(\Omega)} P(X = x_i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) \mathbb{1}_A(x_i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) \delta_{x_i}(A) \\
&= (\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) \delta_{x_i})(A).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(g \circ X) &= \int_\Omega g \circ X dP \\
&= \int_{\mathbb{R}} g dP_X \text{ intégration par rapport à une mesure image (théorème du transfert)} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) g(x_i) \text{ intégration par rapport à une mesure discrète .}
\end{aligned}$$

Pour $g : x \mapsto x$, on trouve $E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) x_i$.

Exemple 4.8.1. *Pour $g : x \mapsto x^2$, on a $E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i) x_i^2$.*

Corollaire 4.8.2. *Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors*

$$E[X] = \sum_{n>0} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n>0} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Démonstration 115. *Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Comme $X(\Omega) = \{1, 2, ...\}$ et $X = \sum_n n \mathbb{1}_{X=n} = 1\mathbb{1}_{X=1} + 2\mathbb{1}_{X=2} + 3\mathbb{1}_{X=3} + 4\mathbb{1}_{X=4} + ...$ on a,*

$$X = \begin{cases}
1\mathbb{1}_{X=1} + 1\mathbb{1}_{X=2} + 1\mathbb{1}_{X=3} + 1\mathbb{1}_{X=4} + ... \\
\qquad\quad + 1\mathbb{1}_{X=2} + 1\mathbb{1}_{X=3} + 1\mathbb{1}_{X=4} + ... \\
\qquad\qquad\qquad + 1\mathbb{1}_{X=3} + 1\mathbb{1}_{X=4} + ... \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 1\mathbb{1}_{X=4} + ... \\
\qquad\qquad\vdots
\end{cases}$$

donc,

$$\begin{aligned} X &= 1\mathbb{1}_{X\geq 1} + 1\mathbb{1}_{X\geq 2} + 1\mathbb{1}_{X\geq 3} + 1\mathbb{1}_{X\geq 4} + \ldots.. \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{X\geq n} \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}_{X\geq n}, \end{aligned}$$

c'est à dire, X est la limite d'une suite de fonctions étagées positives et on a,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int XdP \\ &= \int \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}_{X\geq n} \\ &= \lim_{m\to+\infty} \int \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}_{X\geq n} \text{ d'après le théorème de Beppo Levi} \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} P(X\geq n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X\geq n) \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.8.3. *(Espérance des variables aléatoires absolument continues) Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue si sa loi de probabilé P_X est une probabilité à densité f et telle que $\int_{\mathbb{R}} f dx = 1$. dans ce cas*

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)d\lambda \text{ et } E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)d\lambda.$$

φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne et supposée intégrable par rapport à P_X.

Démonstration 116.

$$\begin{aligned} E(g\circ X) &= \int_{\Omega} g\circ X dP \\ &= \int_{\mathbb{R}} gdP_X \text{ intégration par rapport à une mesure image (Théorème du transfert)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} gfd\lambda \text{ intégration par rapport à une mesure à densité } P_X = f\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)d\lambda(x). \end{aligned}$$

Pour $g : x \mapsto x$, on trouve $E(X) = \int xf(x)d\lambda(x) = \int xf(x)dx$. ■

Corollaire 4.8.4. *Soient X et Y deux variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}$.*

Si X et Y sont positives et indépendantes, alors $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Démonstration 117. *1. Soit $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{1}_A$ et $X = \mathbb{1}_B$.*

$$\begin{array}{rcl} E(XY) & = & E(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) \\ & = & E(\mathbb{1}_{A\cap B}) \\ & = & P(A \cap B) \\ & = & P(A)P(B) \\ & = & E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) \\ & = & E(X)E(Y). \end{array}$$

2. Soit pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}_+$, $A_i, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, et $(B_j)_{1\leq j\leq p}$ soient deux partitions de Ω, et soit $X = \sum_{1\leq i\leq n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $Y = \sum_{1\leq j\leq p} b_j \mathbb{1}_{B_j}$. On a

$$\begin{array}{rcl} E(XY) & = & E((\sum_{1\leq i\leq n} a_i \mathbb{1}_{A_i})(\sum_{1\leq j\leq p} b_j \mathbb{1}_{B_j})) \\ & = & E(\sum_{1\leq i\leq n} a_i(\sum_{1\leq j\leq p} b_j \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{B_j})) \\ & = & \sum_{1\leq i\leq n} a_i \sum_{1\leq j\leq p} b_j E(\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{B_j}) \\ & = & \sum_{1\leq i\leq n} a_i \sum_{1\leq j\leq p} b_j E(\mathbb{1}_{A_i})E(\mathbb{1}_{B_j}) \\ & = & \sum_{1\leq i\leq n} a_i E(\mathbb{1}_{A_i}) \sum_{1\leq j\leq p} b_j E(\mathbb{1}_{B_j}) \\ & = & E(\sum_{1\leq i\leq n} a_i \mathbb{1}_{A_i})E(\sum_{1\leq j\leq p} b_j \mathbb{1}_{B_j}) \\ & = & E(X)E(Y). \end{array}$$

3. Si X et Y sont deux variables aléatoires positives, alors, d'après la proposition 3.4.2 du chapitre 3, il existe deux suites de variables aléatoires $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$, croissantes, positives, étagées et telles que $X = \lim_{n\to+\infty} X_n$ et $Y = \lim_{n\to+\infty} Y_n$ donc,

$$\begin{array}{rcl} E(XY) & = & E((\lim_{n\to+\infty} X_n)(\lim_{n\to+\infty} Y_n)) \\ & = & E(\lim_{n\to+\infty} (X_n Y_n)) \\ & = & \lim_{n\to+\infty} E(X_n Y_n) \\ & = & \lim_{n\to+\infty} (E(X_n)E(Y_n)) \\ & = & \lim_{n\to+\infty} E(X_n) \lim_{n\to+\infty} E(Y_n) \\ & = & E(\lim_{n\to+\infty} X_n)E(\lim_{n\to+\infty} Y_n) \\ & = & E(X)E(Y). \end{array}$$

■

Lemme 4.8.1. *(Inégalité de Markov) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive sur Ω et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $0 < E(X) < +\infty$. Alors :*

$$\mathbb{P}(\{X \geq \alpha E(X)\}) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Démonstration 118. *On sait que $m(f > t) \leq \frac{1}{t} \int f dm$ (Lemme 3.4.2). On prend $f = X$, $t = \alpha E(X)$ et $m = P$, sachant que $E(X) = \int X dP$.* ■

Lemme 4.8.2. *(Inégalité de Bienaymé Tchebychev)*

$$\mathbb{P}(\{|X - E(X)| \geq \alpha\sigma(X)\}) \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

Démonstration 119. *On sait que $m(f > t) \leq \frac{1}{t} \int f dm$ (Lemme 3.4.2).*
On prend $f = (X - E(X))^2$, $t = \alpha^2\sigma^2(X)$ et $m = P$, sachant que
$\displaystyle\int (X - E(X))^2 dP = E[(X - E(X))^2] = \sigma^2(X)$.
On obtient,

$$\mathbb{P}(\{(X - E(X))^2 \geq \alpha^2\sigma^2(X)\}) \leq \frac{1}{\alpha^2},$$

or

$$(X - E(X))^2 \geq \alpha^2\sigma^2(X) \Leftrightarrow |X - E(X)| \geq \alpha\sigma(X),$$

donc

$$\mathbb{P}(\{|X - E(X)| \geq \alpha\sigma(X)\}) = \mathbb{P}(\{(X - E(X))^2 \geq \alpha^2\sigma^2(X)\}) \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

■

4.9 Densité et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, P_X sa loi de probabilité et F sa fonction de répartition. Supposons que P_X ait une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On a alors

$$F(x) = P_X(]-\infty, x]) = \int_{]-\infty,x]} f d\lambda.$$

Dans ce cas on a $\boxed{\text{F est continue}}$ car
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_X(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\lambda = 0$(c'est à dire F est diffuse) ce qui est équivalent à F est continue (voir au chapitre 2, les propriétés de la fonction de répartition).

Proposition 4.9.1. *Soit X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition. On suppose que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Alors la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Rappel Dire que F est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ signifie qu'il existe une suite finie $-\infty < a_1 < a_2 < .... < a_n < +\infty$ telle que F est dérivable partout sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être aux points a_i, que sa dérivée F' est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ et que F est aussi continue en chaque point a_i.

Proposition 4.9.2. *Si F est absolument continue de densité f, alors $F^{'}(x) = f(x)$, en tout point où f est continue.*

Démonstration 120. *Supposons que f est continue au point x, soit $\epsilon > 0$,*
$\exists \eta \geq 0$, $|t-x| < \eta \Rightarrow f(x)-\epsilon < f(t) < f(x)-\epsilon$
Or pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \displaystyle\int_x^{x+h} \frac{1}{h} f(t)dt.$
et $|h| < \eta \Rightarrow \int_x^{x+h} \frac{1}{h}(f(x)+\epsilon)dt < \int_x^{x+h} \frac{1}{h} f(t)dt < \int_x^{x+h} \frac{1}{h}(f(x)+\epsilon)dt,$
c'est à dire $\forall \epsilon > 0, \exists \eta \geq 0; |h| < \eta \Rightarrow f(x)-\epsilon < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x)-\epsilon$. *Ce qui exprime que* $F^{'}(x) = f(x)$, *en tout point où f est continue.* ∎

4.10 Fonctions définies par des intégrales

Le théorème de la convergence dominée a une application importante dans l'étude de la continuité et la dérivabilité des fonctions définies par des intégrales. Soit (E, T, m) un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $\begin{array}{rl} f: & E \times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$ telle que $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ soit m-intégrable par rapport à x.
On pose

$$\begin{array}{rcl} F: I \longrightarrow \mathbb{R} & & \\ t \mapsto F(t) & = & \int_E f(x,t)dm(x). \end{array}$$

4.10.1 Continuité

Théorème 4.10.1. *(Continuité sous le signe intégral) Si*

1. *pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I*
2. *$\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$ m-p.p.,*

alors F est continue sur I.

Démonstration 121. *Soit $t_0 \in I$. Montrons que F est continue en t_0, soit (t_n) une suite d'éléments de I, il suffit de montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} F(t_n) = F(t_0)$. *On a* $F(t_n) = \int_E f(x,t_n)dm(x)$ *et* $F(t_0) = \int_E f(x,t_0)dm(x)$.
Posons pour tout x, $f_n(x) = f(x,t_n)$ *et* $h(x) = f(x,t_0)$, *comme f est continue en t_0 (pour tout x), on a pour tout x,* $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = h(x)$, *c'est à dire* $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = h$, *De plus, on a,*

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in I; |f(x,t)| \leq g(x) \quad m-p.p. & \Rightarrow & \forall n \geq 1; |f(x,t_n)| \leq g(x) \quad m-p.p. \\ & \Rightarrow & |f_n| \leq g \quad m-p.p. \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int f_n(x)dm = \int \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)dm \\ & & \text{d'après le théorème de convergence dominée car } g \text{ est intégrable} \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int f(x,t_n)dm = \int f(x,t_0)dm \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{n \to +\infty} F(t_n) = F(t_0) \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{t \to t_0} F(t) = F(t_0). \end{array}$$

■

4.10.2 Dérivabilité

Théorème 4.10.2. *(Dérivabilité sous le signe intégral) Si*

1. *pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I*
2. *$\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall t \in I$, $|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$ m-p.p.,*

alors F est Dérivable sur I et :

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}(x,t)dm(x).$$

Démonstration 122. *Soit $t_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en t_0, soit (t_n) une suite d'éléments de I, il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0}$ est finie.*
Soit $f_n(x) = \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$.
D'après le théorème des accroissements finis il existe θ_n entre t_0 et t_n (donc $\theta_n \in I$) telle que

$$f(x,t_n) - f(x,t_0) = (t_n - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,\theta_0).$$

Comme par hypothèse, on a

$$\forall t \in I, |\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$$

en particulier

$$|f_n| \leq g.$$

Comme g est intégrable, d'après le théorème de convergence dominée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ est intégrable sur E et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int f_n dm(x) &= \lim_{n\to+\infty}\int \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}dm(x)\\ &= \int \lim_{n\to+\infty} f_n dm(x)\\ &= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dm(x).\end{aligned}$$

On en déduit que F est dérivable en t_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dm(x) = F'(t_0)$.

■

4.10.3 Exemples de fonctions définies par des intégrales

Produit de convolution

Définition 4.10.1. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et φ dérivable de dérivée bornée. Alors la fonction $f \star \varphi$ définie par*

$$f \star \varphi(t) = \int \varphi(t-x)f(x)d\lambda(x) \quad t \in \mathbb{R},$$

est appelée produit de convolution (ou convolution) de f et φ.

Transformée de Laplace

Définition 4.10.2. *Soit f une fonction borélienne, bornée, sur $\mathbb{R}_+$. La transformée de Laplace de la fonction f est la fonction définie par :*

$$h(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-tx) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Transformée de Fourier

Définition 4.10.3. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. La transformée de Laplace de la fonction f est la fonction définie par :*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-itx)d\lambda(x) \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.11 Exercices

4.11.1 Enoncés

Exercice 1. *Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par* $f(x) = \begin{cases} 1/2 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1. *Justifier le fait que f est borélienne.*
2. *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'application est elle continue λ-p.p. ? que vaut $\int f d\lambda$?*
3. *Soit δ_0 la mesure de Dirac en zéro sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'application est elle continue δ_0-p.p. ? que vaut $\int f d\delta_0$?*

Exercice 2. *(convergence monotone)Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles, définies sur par*

$$f_n(x) = (1 - \exp(-nx^2))\exp(-x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda$.

Exercice 3. *Montrer que, pour tous réels a et b dans $]0, +\infty[$,*

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + nb)^2} \text{ où } \lambda \text{ est la mesure de Lebesgue sur }]0, +\infty[$$

Exercice 4. *(convergence dominée) Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. où λ désigne la mesure de Lebesgue. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles, définies sur par $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(\frac{x}{n})e^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Justifier le fait que pour tout $n \geq 1$, l'application f_n est borélienne.*

2. *Montrer que la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers une fonction* f*, que l'on précisera.*
3. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\lambda$

Exercice 5. *Soit* λ *la mesure de Lebesgue définie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Soit* F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par*

$$\forall t \geq 0 F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)d\lambda(x) \text{ avec } f(x,t) = e^{-x^2-tx}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

1. *Montrer que* F *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$.
2. *Montrer que* F *est dérivable sur* $[0, +\infty[$*. Calculer* $F'(0)$.

Exercice 6. *Soit* μ *la probabilité gaussienne centrée sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *de fonction de répartition* F *et dont la densité par rapport à* λ *est :* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Soit T *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, définie par :* $T(x) = 2x + 5$.

1. *Soit* X *la variable aléatoire de loi de probabilité* μ*. Vérifier que* $E(X) = 0$ *(*X *est centrée) et que* $\sigma^2(X) = 1$ *(*X *est réduite).*
2. *Déterminer la mesure image* μ_T *de* μ *par* T*, en fonction de* μ*. Si* Y *est la variable aléatoire de loi de probabilité* μ_T*, determiner en fonction de* F*, la fonction de répartition de* Y *qu'on notera* G
3. *Calculer la densité de* Y*, qu'on notera* g *si elle existe.*
4. *Exprimer* $E(Y)$ *en fonction de* $E(X)$*, en déduire la valeur de* $E(Y)$.
5. *Exprimer* $E(Y^2)$ *en fonction de* $E(X^2)$*, en déduire la valeur de* $\sigma^2(Y)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. *(Fonction définie par une intégrale) On considère l'application* $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2t}}{x^2}dx$$

1. *Démontrer que* F *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Démontrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et préciser cette dérivée.*
3. *Etudier la limite* $\lim_{n\to+\infty} F'(t)$

4.11.2 Corrigés

.

Exercice 1. 1. *On a* $f = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} + 1.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ *Comme* $\mathbb{R}_-^*$ *et* $\mathbb{R}_+$ *sont des boréliens,* $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}$ *et* $1.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ *sont boréliennes donc* f *est borélienne comme somme de deux fonctions boréliennes.*

2. f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*, or* $\lambda(\{0\}) = 0$ *donc* f *est continue* λ *p.p. sur* $\mathbb{R}$*, et*
$$\int f d\lambda = \frac{1}{2}\lambda(\mathbb{R}^*_-) + \lambda(\mathbb{R}_+) = \frac{1}{2}\lambda(\mathbb{R}) + \frac{1}{2}\lambda(\mathbb{R}_+)$$
or $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(]n, n+1]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1 = +\infty$ *et* $\lambda(\mathbb{R}_+) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *donc* $\frac{1}{2}\lambda(\mathbb{R}) + \frac{1}{2}\lambda(\mathbb{R}_+) = +\infty$ *par suite* $\int f d\lambda = +\infty$
Remarque $\lambda(\mathbb{R}_+) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = +\infty$
3. $\delta_0(\{0\}) = 1$ *donc* f *n'est pas continue* δ_0 *p.p. sur* $\mathbb{R}$ *et*
$$\int f d\delta_0 = f(0) = 1 (= \frac{1}{2}\delta_0(\mathbb{R}^*_-) + \delta_0(\mathbb{R}_+))$$

Exercice 2. *pour tout* n*,* f_n *est positive car* $-nx^2 < 0 \Rightarrow \exp(-nx^2) < 1 \Rightarrow -\exp(-nx^2) > -1$.
pour tout n*,* f_n *est continue donc borélienne.*
la suite (f_n) *est croissante car*
$n < n+1 \Rightarrow -nx^2 > -(n+1)x^2 \Rightarrow \exp(-nx^2) > \exp(-(n+1)x^2) \Rightarrow -\exp(-nx^2) < -\exp(-(n+1)x^2)$. *D'après le théorème de Beppo-Levi, on peut permuter* $\int$ *et* $\lim$ *et donc*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda = \int \exp(-x) d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-x) dx = 1$$

Exercice 3. *Soit* $I = \int_{[0,+\infty[} \frac{t\exp(-at)}{1-\exp(-bt)} d\lambda(t)$*, On a*
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1-\exp(-bt)} &= \lim_{p\to+\infty} \frac{1-(\exp(-bt))^{p+1}}{1-\exp(-bt)} \\ &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} (\exp(-bt))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-btn) \end{aligned}$$
donc
$$\frac{t\exp(-at)}{1-\exp(-bt)} = \sum_{n=0}^{+\infty} t\exp(-(a+bn)t)$$
$\forall n \in \mathbb{N}$*, la fonction* $f_n : t \mapsto t\exp(-(a+bn)t)$ *définie sur* $[0, +\infty[$ *est positive et borélienne (car continue). Donc le théorème d'intégration d'une série de fonctions à termes positifs s'applique et on a*
$$I = \int_{[0,+\infty[} \sum_{n=0}^{+\infty} t\exp(-(a+bn)t) d\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,+\infty[} t\exp(-(a+bn)t) d\lambda(t)$$
De plus l'intégrale impropre $\int_{[0,+\infty[} t\exp(-(a+bn)t)dt$ *converge :en effet le changement de variable* $y = (a+bn)t$*, donne* $\int_{[0,+\infty[} t\exp(-(a+bn)t)dt = \frac{1}{(a+bn)^2}\int_{[0,+\infty[} y\exp(-y)dy = \frac{1}{(a+bn)^2} < +\infty$ *car* $\int_{[0,+\infty[} y\exp(-y)dy = 1$ *par parties (on peut calculer notre intégrale directement par parties sans le changement de variable)*

Exercice 4. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*
f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme produit et composées de fonctions continues.
f_n est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, car constante sur cet intervalle.
f_n est continue en 0, en effet :$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} n \sin(\frac{x}{n}) \exp(-x) = 0 = f_n(0)$ *et* $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} 0 = 0 = f_n(0)$ *donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc* $\boxed{f_n \text{ est borélienne}}$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = x\exp(-x) \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{n}{x}) \sin(\frac{x}{n}) = x\exp(-x)$ *et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,* $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = x\exp(-x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} = f(x)}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| = |\frac{n}{x}\sin(\frac{x}{n})x\exp(-x)| \leq x\exp(-x)$ car $|\sin(\frac{x}{n})| \leq |\frac{x}{n}|$ (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(y)| \leq |y|$ en effet $|\sin'(y)| = |\cos(y)| \leq 1$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires on voit ce résultat comme suit $|sin(y)| = |sin(y)-sin(0)| \leq 1.|y-0| = |y|$.) et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $|f_n(x)| = 0$ Donc Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{|f_n(x)| \leq f(x)}$ *et f est λ-intégrable car $\int_0^{+\infty} x\exp(-x)dx = 1$ En appliquant le théorème de convergence domminée, on obtient :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n d\lambda = \int \lim_{n \to +\infty} f_n d\lambda = \int_{[0,+\infty[} \lim_{n \to +\infty} f_n d\lambda = \int_{[0,+\infty[} x\exp(-x)d\lambda = \int_0^{+\infty} x\exp(-x)dx = 1$$

Exercice 5. *La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est λ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car, d'après les critères de convergence des intégrales impropres, on a
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \exp(-x^2).\exp(-tx) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{1}{2}} \exp(-x^2).\exp(-tx) = 0$.

1. *pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|f(x,t)| = \exp(-x^2).\exp(-tx) \leq g(x)$ avec $g(x) = \exp(-x^2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, car $-tx \leq 0 \Rightarrow \exp(-tx) \leq 1$. D'après le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale, F est continue.*
2. *La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -x\exp(-x^2 - tx)$ de plus* $\boxed{|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}| \leq x\exp(-x^2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} = h(x)}$*, $h(x)$ est λ intégrable car d'après le théorème de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et*
$$F'(t) = \int_{[0,+\infty]} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\lambda(x) = -\int_{[0,+\infty]} x\exp(-x^2)d\lambda(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$
3. *en particulier*
$$F'(0) = -\int_{[0,+\infty]} x\exp(-x^2)d\lambda(x) = -\int_0^{+\infty} x\exp(-x^2)dx = \left[\frac{\exp(-x^2)}{2}\right] = -\frac{1}{2}$$

Exercice 6. *On a*

1. $E(X) = \int_\Omega XdP = \int_\mathbb{R} xdP_X = \int_\mathbb{R} xd\mu = \int_\mathbb{R} xf(x)d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$
et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1$ *car*
$E(X^2) = \int_\Omega X^2dP = \int_\mathbb{R} x^2dP_X = \int_\mathbb{R} x^2d\mu = \int_\mathbb{R} xf(x)d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = 1.$

2. *Pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $\mu_T(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(\{x : T(x) \in A\})$
3. $G(t) = \mu_T(]-\infty, t]) = \mu(\{x : T(x) \in]-\infty, t]\}) = \mu(\{x : 2x + 5 \leq t\})$
   $= \mu(\{x : x \leq \frac{t-5}{2}\}) = \mu(]-\infty, \frac{t-5}{2}]) = F(\frac{t-5}{2})$
4. G *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme composée de deux fonctions dérivables et* $G^{'}(t) = \frac{1}{2}F^{'}(\frac{t-5}{2})$ *et* $G^{'}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*comme composée de deux fonctions continues, donc* G *admet une densité donnée par* $g(t) = G^{'}(t) = \frac{1}{2}f(\frac{t-5}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(t-5)^2}{8})$
5. $E(Y) = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_T = \int_{\mathbb{R}} T(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} T(x) f(x) d\lambda(x)$
   $= 2\int_{\mathbb{R}} x f(x) d\lambda(x) + 5\int_{\mathbb{R}} T(x) f(x) d\lambda(x) = 2E(X) + 5 = 5$ *et*
   $E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_T = \int_{\mathbb{R}} T^2(x) f(x) d\lambda(x) = 4E(X^2) + 25 + E(X) = 4E(X^2) + 25 = 29.$

Chapitre 5

Intégration sur les produits d'espaces mesurés

5.1 Produit de deux mesures

5.1.1 Rappel du produit de deux tribus

Définition 5.1.1. *Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables. On pose $E = E_1 \times E_2$. On appelle tribu produit sur E, la tribu engendrée par $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2, A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}$. Cette tribu produit est notée $T_1 \otimes T_2$.*

Proposition 5.1.1. *Les projections canoniques Π_1 et Π_2 sont mesurables.*
La tribu $T_1 \otimes T_2$ est aussi la tribu engendrée par les projections canoniques Π_1 et Π_2, c'est à dire la plus petite tribu sur $E = E_1 \times E_2$ qui rende Π_1 et Π_2 mesurables.

Proposition 5.1.2. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : (E, T) & \to & (E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2) \\ x & \mapsto & f(x) = (f_1(x), f_2(x)). \end{array}$$

Alors f est mesurable si et seulement si f_1 et f_2 sont mesurables.

Proposition 5.1.3. *L'opération $\otimes$ est associative, c'est à dire :*

$$(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = T_1 \otimes T_2 \otimes T_3.$$

Démonstration 123. *La tribu $(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$ est la plus petite tribu qui engendre les applications,*

$$f_{1,2} : \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 \times E_3 & \to & E_1 \times E_2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1, x_2) \end{array} \quad et \quad f_3 : \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 \times E_3 & \to & E_3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_3. \end{array}$$

La tribu $T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)$ est la plus petite tribu qui engendre les applications,

$$f_{2,3} : \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 \times E_3 & \to & E_2 \times E_3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_2, x_3) \end{array} \quad et \quad f_1 : \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 \times E_3 & \to & E_1 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1. \end{array}$$

La tribu $T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$ *est la plus petite tribu qui engendre les applications,*

$$f_1 : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times E_3 & \to & E_1 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1 \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times E_3 & \to & E_2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_2 \end{array} \text{ et } f_3 : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times E_3 & \to & E_3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_3. \end{array}$$

Or

$$f_{1,2} \text{ est mesurable si et seulement si } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont mesurables}$$

et

$$f_{2,3} \text{ est mesurable si et seulement si } f_2 \text{ et } f_3 \text{ sont mesurables.}$$

■

Définition 5.1.2. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces topologiques, muni de leurs tribus boréliennes,* $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ *est la tribu borélienne sur* $E_1 \times E_2$ *engendrée par la topologie produit.*

Proposition 5.1.4.
1. *On a toujours l'inclusion* $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$
2. *Si* E_1 *et* E_2 *sont tous deux à bases dénombrables d'ouverts (En particulier si* E_1 *et* E_2 *sont des espaces métriques séparables), alors l'inclusion précédente devient une égalité.*

Démonstration 124.
1. *Soit pour* $i = 1, 2$, *la projection canonique* $\pi_i : (E_1 \times E_2, \mathcal{B}(E_1 \times E_2)) \to (E_i, \mathcal{B}(E_i))$. *On a pour tout ouvert* O *de* E_1, $\pi_1^{-1}(O) = O \times E_2$ *est un ouvert de* $E_1 \times E_2$, *d'où* π_1 *est continue donc borélienne, de même pour* π_2, *donc* $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ *est une tribu pour laquelle* π_1 *et* π_2 *sont mesurables.* $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$ *est la plus petite tribu pour laquelle* π_1 *et* π_2 *sont mesurables, donc*
$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2).$$
2. *pour tout* $i = 1, 2$, *soit* $\mathcal{U}_i = (U_n^i)_n$ *une base dénombrable d'ouverts de* E_i, *c'est à dire que tout ouvert de* E_i *peut s'écrire comme réunion dénombrable d'ouverts de* $\mathcal{U}_i$.
Par définition de la topologie produit, tout ouvert Ω *de* $E_1 \times E_2$, *s'écrit comme réunion (quelconque) de produits d'ouverts*
$$\Omega = \bigcup_{j \in J} (O_j^{(1)} \times O_j^{(2)}) \text{ où } J \text{ est un ensemble d'indice quelconque}$$
et pour tous i, j, $O_j^{(i)}$ *est un ouvert de* E_i. *Comme* $O_j^{(i)}$ *est un ouvert de* E_i, $O_j^{(i)}$ *s'écrit comme réunion d'éléments de* $\mathcal{U}_i$, *c'est à dire qu'il existe une partie* $K_j^{(i)}$ *de* $\mathbb{N}$ *telle que*
$$O_j^{(1)} = \bigcup_{h \in K_j^{(i)}} U_h^1 \quad \text{et} \quad O_j^{(2)} = \bigcup_{k \in K_j^{(i)}} U_k^2$$
donc
$$\begin{aligned} \Omega = \bigcup_{j \in J} ((\bigcup_{h \in K_j^{(i)}} U_h^1)(\bigcup_{k \in K_j^{(i)}} U_k^2)) &= \bigcup_{j \in J} \bigcup_{h,k \in K_j^{(1)} \times K_j^{(2)}} (U_h^1 \times U_k^2) \\ &= \bigcup_{h,k \in \bigcup_{j \in J} K_j^{(1)} \times K_j^{(2)}} (U_h^1 \times U_k^2) \end{aligned}$$

est une union dénombrable de produits d'ouverts car $\bigcup_{j\in J} K_j^{(1)} \times K_j^{(2)} \subset \mathbb{N}^2$. *Comme un produit d'ouverts est un élément de* $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$ *donc* $\Omega \in \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$, *ainsi les ouverts de* $E_1 \times E_2$ *sont dans* $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$. *comme* $\mathcal{B}(E_1) \times E_2)$ *est la plus petite tribu contenants les ouverts de* $E_1 \times E_2$, *on a alors*

$$\mathcal{B}(E_1) \times E_2) \subset \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2).$$

■

Corollaire 5.1.1. *Comme* $\mathbb{R}$ *est un espace métrique séparable,* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et plus généralement pour tout entier* $N \geq 2$, *on a*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),$$

qu'on note aussi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes N} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *est par définition la tribu engendrée par le produit des tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times .... \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$

5.1.2 Sections

Définition 5.1.3. *Si* $C \in E_1 \otimes E_2$ *, pour tout* $x_1 \in E_1$ *et pour tout* $x_2 \in E_2$, *on appelle section de* C *en* x_1 *le sous ensemble* C_{x_1} *de* E_2 *et section de* C *en* x_2 *le sous ensemble* C^{x_2} *de* E_1 *définis par :*

$$C_{x_1} = \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in C\} \text{ et } C^{x_2} = \{x_1 \in E_1 : (x_1, x_2) \in C\}.$$

Lemme 5.1.1. *Si* $(C_i)_{i\in I}$ *est une famille de parties de* $E_1 \times E_2$, *on a pour tout* x_1 *de* E_1

1. $((E_1 \times E_2)\backslash C)_{x_1} = E_2 \backslash C_{x_1}$,
2. $(\bigcup_{i\in I} C_i)_{x_1} = \bigcup_{i\in I} (C_i)_{x_1}$,
3. $(\bigcap_{i\in I} C_i)_{x_1} = \bigcap_{i\in I} (C_i)_{x_1}$,
4. $\mathbb{1}_C(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{C_{x_1}}(x_2) = \mathbb{1}_{C^{x_2}}(x_1)$ *avec* $C \subset E_1 \times E_2$ *et* $x_2 \in E_2$.

Les propriétés restent vraies pour les sections en $x_2 \in E_2$.

Proposition 5.1.5. *Soit* f *une application* $(T_1 \otimes T_2 - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurable. Alors les applications partielles :*

$$\begin{array}{rcl} f_{x_1} : (E_2, T_2) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ x_2 & \mapsto & f(x_1, x_2) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} f_{x_2} : (E_1, T_1) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ x_1 & \mapsto & f(x_1, x_2) \end{array}$$

sont mesurables.

Démonstration 125. *Il suffit de montrer que*

$$\begin{array}{rccc} g_{x_1}: & E_2 & \to & E_1 \times E_2 \\ & x_2 & \mapsto & (x_1, x_2) \end{array} \text{ et } \begin{array}{rccc} g_{x_2}: & E_1 & \to & E_1 \times E_2 \\ & x_1 & \mapsto & (x_1, x_2) \end{array} \text{ sont } T_1 \otimes T_2 - T_2 \text{ mesurables .}$$

On sait que $T_1 \otimes T_2 = \sigma(T_1 \times T_2)$*, soit alors* $A_1 \in T_1$ *et* $A_2 \in T_2$

$$g_{x_1}(A_1 \times A_2) = \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2\} = \begin{cases} A_2 & si \quad x_1 \in A_1 \\ \emptyset & si \quad x_1 \notin A_1 \end{cases}$$

et

$$g_{x_2}(A_1 \times A_2) = \{x_1 \in E_1 : (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2\} = \begin{cases} A_1 & si \quad x_2 \in A_2 \\ \emptyset & si \quad x_2 \notin A_2. \end{cases}$$

Donc g_{x_1} *et* g_{x_2} *sont mesurables, d'où* $f_{x_1} = f \circ g_{x_1}$ *et* $f_{x_2} = f \circ g_{x_2}$ *sont mesurables comme composées de deux applications mesurables.* ■

Proposition 5.1.6. *Pour tout* $C \in T_1 \otimes T_2$*, pour tout* $x_1 \in E_1$ *et pour tout* $x_2 \in E_2$ *:*

$$C_{x_1} \in T_2 \text{ et } C^{x_2} \in T_1.$$

Autrement dit les sections C_{x_1} *et* C_{x_2} *sont mesurables.*

Démonstration 126. *Il suffit d'appliquer la propostion précédente à la fonction mesurable* $f = \mathbb{1}_C$ *qui est mesurable par hypothèse, ce qui donne* $g_{x_1} = \mathbb{1}_{C_{x_1}}$ *et* $g_{x_2} = \mathbb{1}_{C_{x_2}}$ *qui sont mesurables donc* C_{x_1} *et* C_{x_2} *sont mesurables.* ■

5.1.3 Construction de la mesure produit

Soient m_1 et m_2 deux mesures σ- finies, sur (E_1, T_1) et (E_2, T_2) respectivement.

Lemme 5.1.2. *Pour tout* $C \in T_1 \otimes T_2$*, les applications*

$$\begin{array}{rcl} h_C : (E_1, T_1) & \to & (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)) \\ x_1 & \mapsto & m_2(C_{x_1}) \end{array} \text{ et } \begin{array}{rcl} l_C : (E_2, T_2) & \to & (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)) \\ x_2 & \mapsto & m_1(C^{x_2}) \end{array}$$

sont mesurables.

Démonstration 127. *Comme* m_2 *est* σ*- finie, il existe* $C_2^{(n)} \subset T_2$ *tel que* $E_2 = \cup C_2^{(n)}$ *et* $m_2(C_2^{(n)}) < +\infty$*, or* $\cup C_2^{(n)} = \cup E_2^{(n)}$ *avec* $E_2^{(n)} = C_2^{(n)} \setminus \bigcup_{p=0}^{n-1} C_2^{(p)}$ *les* $E_2^{(n)}$ *sont deux à deux disjoints.*

$E_2^{(n)} = C_2^{(n)} \cap (\bigcup_{p=0}^{n-1} C_2^{(p)})^c \subset C_2^{(n)}$*, Donc pour tout* n*,* $E_2^{(n)} \in T_2$ *et* $m_2(E_2^{(n)}) < +\infty$*. En résumé on a*

$$\boxed{E_2 = \bigcup_n E_2^{(n)} \text{ avec } E_2^{(n)} \in T_2 \text{ deux à deux disjoints et } m_2(E_2^{(n)}) < +\infty}.$$

On montre de même que

$$\boxed{E_1 = \bigcup_n E_1^{(n)} \text{ avec } E_1^{(n)} \in T_1 \text{ deux à deux disjoints et } m_1(E_1^{(n)}) < +\infty}.$$

Pour tout $A_2 \in T_2$, on a :

$$\begin{aligned} m_2(A_2) &= m_2(A_2 \cap E_2) \\ &= m_2(A_2 \cap (\bigcup_n E_2^{(n)}) \\ &= m_2(\bigcup_n (A_2 \cap E_2^{(n)})) \\ &= \sum_n m_2(A_2 \cap E_2^{(n)}) \\ &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} m_2(A_2 \cap E_2^{(n)}), \end{aligned}$$

en particulier $\boxed{m_2(C_{x_1}) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} m_2(C_{x_1} \cap E_2^{(n)})}$.

Soit m la mesure définie par $\forall A_2 \in T_2; m(A_2) = m_2(A_2 \cap E_2^{(n)})$, m est la mesure trace de m_2 sur $E_2^{(n)}$) et elle vérifie $m(E_2^{(n)}) = m_2(E_2^{(n)} \cap E_2^{(n)}) = m_2(E_2^{(n)}) < +\infty$.
Soit (h_C^n) la suite de fonctions définies par :

$$\begin{array}{rcl} h_C^n : (E_1, T_1) & \to & (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)) \\ x_1 & \mapsto & m(C_{x_1}) = m_2(C_{x_1} \cap E_2^{(n)}). \end{array}.$$

Montrons que h_C^n est mesurable, soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{A} = \{C \in T_1 \otimes T_2 : h_C^n$ est mesurable $\}$
Montrons que $\mathcal{A}$ est un système de Dynkin contenant $T_1 \times T_2$.
$\mathcal{A}$ est un système de Dynkin :
• *vérifions que $E_1 \times E_2 \in \mathcal{A}$, c'est à dire $h^n_{E_1\times E_2}$ est mesurable, or $h^n_{E_1\times E_2}(x_1) = m((E_1 \times E_2)_{x_1})$ et $(E_1 \times E_2)_{x_1} = E_2; \forall x_1 \in E_2$ donc $h^n_{E_1\times E_2}(x_1) = m(E_2); \forall x_1 \in E_2$ donc $h^n_{E_1\times E_2}$ est une fonction constante donc mesurable, d'où*

$$E_1 \times E_2 \in \mathcal{A}.$$

• *Stabilité par union dénombrable disjointe : Soit $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ disjointes deux à deux, c'est à dire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h^n_{C_k}$ est mesurable et montrons que $h^n_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k}$ est mesurable, d'après le lemme 5.1.1 on a,*

$$h^n_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k}(x_1) = m((\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k)_{x_1}) = m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (C_k)_{x_1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m((C_k)_{x_1}) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} h^n_{C_k}(x_1).$$

Donc $h^n_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k}$ *est mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables, par suite*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \in \mathcal{A}.$$

• *Stabilité par différence propre : Soit* $A, B \in \mathcal{A}$, *tels que* $B \subset A$, *donc* h^n_A *et* h^n_B *sont mesurables et montrons que* $h^n_{A\setminus B}$ *est mesurable, comme* m *est finie, d'après le lemme 5.1.1, on a*

$$h^n_{A\setminus B}(x_1) = m(A_{x_1} \setminus B_{x_1}) = m(A_{x_1}) - m(B_{x_1}) = (h^n_A - h^n_B)(x_1),$$

$h^n_{A\setminus B}$ *est donc mesurable comme somme de deux fonctions mesurables, par suite*

$$(A \setminus B) \in \mathcal{A}.$$

$\underline{T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}}$ *: Soit* $C \in T_1 \times T_2$, *il existe donc* $A_1 \in T_1$ *et* $A_2 \in T_2$ *tels que* $C = A_1 \times A_2$, *or*

$$C_{x_1} = \begin{cases} A_2 & si \quad x_1 \in A_1 \\ \emptyset & si \quad x_1 \notin A_1, \end{cases}$$

$h^n_C(x_1) = m(C_{x_1}) = m(A_2)\mathbb{1}_{A_1}(x_1)$. *Par suite,* h^n_C *est mesurable car étagée, c'est à dire* $C \in \mathcal{A}$, *d'où*

$$T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A},$$

or $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$ *est stable par intersection finie, donc, si on note par* $\mathcal{D}(T_1 \times T_2)$ *le système de Dynkin engendrée par* $T_1 \times T_2$, *on a* $\sigma(T_1 \times T_2) = \mathcal{D}(T_1 \times T_2) \subset \mathcal{A}$, *donc* $T_1 \otimes T_2) = \mathcal{A}$, *ce qui exprime que* $\forall C \in T_1 \otimes T_2$, h^n_C *est mesurable.*

En conclusion

$$h_C(x_1) = m_2(C_{x_1}) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} h^n_C(x_1) = \lim_{p\to+\infty} h_p(x_1),$$

avec $h_p(x_1) = \sum_{n=0}^{p} h^n_C(x_1)$, (h_p) *qui est une suite de fonctions mesurables, donc* h_C *est mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurable.*
On montre de la même façon que l'application l_C *est mesurable.* ■

Théorème 5.1.1. *(Mesure produit) Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *deux espaces mesurés* σ*- finis,* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$. *Alors, il existe une et une seule mesure* m *sur* T *vérifiant :*

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2), \forall (A_1, A_2) \in T_1 \times T_2; m_i(A_i) < \infty, i = 1, 2.$$

Cette mesure est σ*-finie et est appelée mesure produit de* m_1 *et* m_2, *on la note* $m = m_1 \otimes m_2$.
De plus pour tout $C \in T_1 \otimes T_2$,

$$\int_{E_1} m_2(C_{x_1})dm_1(x_1) = m_1 \otimes m_2(C) = \int_{E_2} m_1(C^{x_2})dm_2(x_2).$$

Démonstration 128. *Unicité : on applique la proposition 2.2.3 vue au chapitre 2, sur l'égalité de deux mesures. Soit $m^{'}$ une autre mesure vérifiant :*

$$m^{'}(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2), \forall (A_1, A_2) \in T_1 \times T_2; m_i(A_i) < \infty, i = 1, 2,$$

donc $m = m'$ sur $T_1 \times T_2$ qui est stable par intersection finie (car $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$). D'autre part comme m_1 et m_2 sont σ- finies, on a (déjà fait)

$$\boxed{E_2 = \bigcup_n E_2^{(n)} \text{ avec } E_2^{(n)} \in T_2 \text{ deux à deux disjoints et } m_2(E_2^{(n)}) < +\infty}$$

et

$$\boxed{E_1 = \bigcup_n E_1^{(n)} \text{ avec } E_1^{(n)} \in T_1 \text{ deux à deux disjoints et } m_1(E_1^{(n)}) < +\infty}.$$

Soit $C_n = E_1^{(n)} \times E_2^{(n)}$ donc $\bigcup_n C_n = E_1 \times E_2$ et $m(C_n) = m^{'}(C_n) = m_1(E_1^{(n)})m_2(E_2^{(n)}) < +\infty$, d'après la proposition 2.2.3 sur l'égalité de deux mesures, on a $m = m'$ sur $T_1 \otimes T_2$.
Existence : On définit l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mu_1 : & T_1 \otimes T_2 & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & C & \mapsto & \mu_1(C) = \displaystyle\int_{E_1} m_2(C_{x_1}) dm_1(x_1). \end{array}$$

Montrons que μ_1 est une mesure :
- $\mu_1(\emptyset) = \displaystyle\int_{E_1} m_2(\emptyset) dm_1(x_1) = 0.$
- *soit $(C^{(n)})_n$ une suite d'éléments de $T_1 \otimes T_2$, deux à deux disjoints, alors les sections $C_{x_1}^{(n)}$ sont deux à deux disjoints et on a,*

$$\begin{aligned} \mu_1(\bigcup_n C^{(n)}) &= \int_{E_1} m_2((\bigcup_n C^{(n)})_{x_1}) dm_1(x_1) \text{ par définition de } \mu_1 \\ &= \int_{E_1} m_2(\bigcup_n C_{x_1}^{(n)}) dm_1(x_1) \text{ d'après le lemme 5.1.1} \\ &= \int_{E_1} \sum_n m_2(C_{x_1}^{(n)}) dm_1(x_1) \text{ d'après le lemme 5.1.1} \\ &= \sum_n \int_{E_1} m_2(C_{x_1}^{(n)}) dm_1(x_1) \text{ d'après le théorème d'intégration d'une série à termes positifs} \\ &= \sum_n \mu_1(C^{(n)}) \end{aligned}$$

De plus $\forall A_1 \in T_1$, $\forall A_2 \in T_2$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_1(A_1 \times A_2) &= \int_{E_1} m_2(A_1 \times A_2) dm_1(x_1) \text{ par définition de } \mu_1 \\ &= \int_{E_1} m_2(A_2) \mathbb{1}_{A_1} dm_1(x_1) \\ &= m_2(A_2) \textstyle\int_{E_1} \mathbb{1}_{A_1} dm_1(x_1) \\ &= m_2(A_2) m_1(A_1). \end{aligned}$$

De même on définit,

$$\begin{array}{rccl} \mu_2: & T_1 \otimes T_2 & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & C & \mapsto & \mu_2(C) = \int_{E_2} m_1(C^{x_2}) dm_2(x_2). \end{array}$$

On montre que μ_2 *est une mesure qui coincide avec* μ_1 *sur* $T_1 \times T_2$*, donc égale à* μ_1*.*
Il existe donc bien une mesure $m = \mu_1 = \mu_2$ *satisfaisant* $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2)$ *et cette mesure vérifie,*

$$m(C) = \int_{E_1} m_2(C_{x_1}) dm_1(x_1) = \int_{E_2} m_1(C^{x_2}) dm_2(x_2).$$

■

Définition 5.1.4. *(Espace produit) L'espace* (E, T, m) *construit dans le théorème ci dessus, s'appelle l'espace mesuré produit des espaces* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2)*.*

5.1.4 Application au calcul d'aire et au calcul d'espérance

Proposition 5.1.7. *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré* σ*- fini,* λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ *et* $f : E \to \mathbb{R}_+$ T *mesurable (positive). On définit son hypographe* G *par :*

$$G = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R}_+; 0 \le y \le f(x)\}.$$

Alors G *appartient à la tribu* $T \otimes \mathbb{R}$ *et*

$$m \otimes \lambda(G) = \int_E f dm(x) = \int_{\mathbb{R}_+} m(f \ge y) d\lambda(y).$$

Démonstration 129. *Soit* F *et* H *les deux applications définies de* $E \times \mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *par* $F(x, y) = f(x)$ *et* $H(x, y) = y$*, on a* $F = f \circ \pi_1$ *et* $H = \pi_2$ *où* $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ *et* $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ *sont les projections définies sur* $E \times \mathbb{R}_+$ *, comme* f*,* π_1 *et* π_2 *sont mesurables alors* F *et* H *sont mesurables comme composées de fonctions mesurables.*

$$G = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R}_+; 0 \le y - f(x) \le 0\} = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R}_+; (H - F)(x) \in]-\infty, 0]\} = (H - F)^{-1}(]-\infty, 0])$$

$(H - F)$ *étant mesurable comme somme de deux fonctions mesurables, et* $]-\infty, 0]$ *est un borélien donc* $G \in T \otimes \mathbb{R}$ *et d'après la définition de la mesure produit on a,*

$$m \otimes \lambda(G) = \int_E \lambda(G_x) dm,$$

où

$$G_x = \{y \in \mathbb{R}_+; (x, y) \in G\} = \{y \in \mathbb{R}_+, 0 \le y \le f(x)\} = [0, f(x)] \text{ donc } \lambda(G_x) = f(x),$$

d'où

$$m \otimes \lambda(G) = \int_E f(x) dm.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} m\otimes\lambda(G) &= \int_{\mathbb{R}_+} m(G^y)d\lambda(y) \text{ d'après la définition du produit de deux mesures} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} m(f\geq y)d\lambda(y) \text{ car } G^y=\{x\in E, 0\leq y\leq f(x)\}=\{f\geq y\}. \end{aligned}$$

■

Calcul d'aire :
En prenant $E=\mathbb{R}$ et $m=\lambda$ dans la première égalité de la propostion précédente, on obtient :

$$\lambda\otimes\lambda(G)=\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x),$$

ce qui exprime que $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x)$ représente bien la mesure (surface) de la région délimité par le graphe de f et l'axe des abscisses.

Calcul d'espérance :

Proposition 5.1.8. *Si X est une variable aléatoire positive, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ par $X(\omega)=x$ alors,*

$$E(X)=\int_{\mathbb{R}_+} P(X\geq x)d\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}_+} P(X>x)d\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}_+}(1-F(x))d\lambda(x).$$

Démonstration 130. *D'après la proposition précédente, en prenant dans la deuxième égalité $m=P$, $f=X$ la variable ω à la place de x et x à la place de y.*
Comme F est croissante, l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.
En effet soit a et b deux points de discontinuités de F $(a<b)$, comme F est croissante on a,

$$F(a^-)=\lim_{x\overset{<}{\to}a}F(x)<\lim_{x\overset{>}{\to}a}F(x)=F(a^+)\leq F(b^-)=\lim_{x\overset{<}{\to}b}F(x)<\lim_{x\overset{>}{\to}b}F(x)=F(b^+).$$

Donc les intervalles $]F(a^-),F(a^+)[$ et $]F(b^-),F(b^+)[$ sont disjoints et non vides, chacun deux contient au moins un rationnel. On peut donc, construire une application injective de l'ensemble des points de discontinuités D dans l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors D est dénombrable. On rappelle que $F(x)=P(X\leq x)$.
De plus on sait que F est continue en x si et seulement si $P(X=x)=0$, donc D s'écrit :
$D=\{x\in\mathbb{R}_+; P(X=x)\neq 0\}$.

Comme $P(X \geq x) = P(X > x) + P(X = x)$ *on a donc,*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} P(X \geq x)d\lambda(x) &= \int_D P(X \geq x)d\lambda(x) + \int_{D^c} P(X \geq x)d\lambda(x) \\
&= 0 + \int_{D^c} P(X \geq x)d\lambda(x) \text{ car } D \text{ est dénombrable} \\
&= \int_{D^c} P(X > x)d\lambda(x) \text{ car } F \text{ est continue sur } D^c \\
&= \int_D P(X > x)d\lambda(x) + \int_{D^c} P(X > x)d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} P(X > x)d\lambda(x).
\end{aligned}$$

■

5.1.5 Convolution de mesures finies

Définition 5.1.5. *On appelle convolée des deux mesures finies* m *et* μ *et on note* $m*\mu$ *la mesure image de la mesure produit* $m \otimes \mu$ *par l'application* $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $S(x, y) = x + y$.

Conséquence : Pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} fd(m * \mu) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x + y)d(m \otimes \mu)(x, y)$$

Propriété 5.1.1. $m * \mu$ *est une mesure finie.*

5.2 Intégrales doubles

5.2.1 Cas des fonctions mesurables positives

Théorème 5.2.1. *(Fubbini-Tonelli)Pour* $i = 1, 2$, *on suppose* m_i *est une mesure* σ*-finie sur* (E_i, T_i) *Si* f *est une fonction mesurable de* $(E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2)$ *dans* $(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+))$, *alors les applications* F_i *définies de* E_i *dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *(pour* $i = 1, 2$*).*

$$F_1(x_1) = \int_{E_2} f(x_1, x_2)dm_2(x_2) \text{ et } F_2(x_2) = \int_{E_1} f(x_1, x_2)dm_1(x_1)$$

sont $(T_i - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+))$ *mesurables et à valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *et vérifie*

$$\int_{E_1} F_1(x_1)dm_1(x_1) = \int_{E_2} F_2(x_2)dm_2(x_2) = \int_{E_1\times E_2} f(x_1, x_2)d(m_1 \otimes m_2)(x_1, x_2)$$

c'est à dire

$$\int_{E_1\times E_2} fd(m_1\otimes m_2) = \int_{E_1} \left[\int_{E_2} f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\right] dm_1(x_1) = \int_{E_2} \left[\int_{E_1} f(x_1, x_2)dm_1(x_1)\right] dm_2(x_2)$$

Démonstration 131. *1. Pour $f = \mathbb{1}_C$, $C \in T_1 \otimes T_2$ on a ?*

$$\begin{aligned}\int_{E_1\times E_2} f d(m_1\otimes m_2) &= \int_{E_1\times E_2} \mathbb{1}_C d(m_1\otimes m_2)\\ &= m_1\otimes m_2(C)\\ &= \int_{E_1} m_2(C_{x_1})dm_1(x_1) = \int_{E_2} m_1(C^{x_2})dm_2(x_2) \text{ d'après le théorème 5.1.1}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}F_1(x_1) &= \int_{E_2} \mathbb{1}_C(x_1,x_2)dm_2(x_2)\\ &= \int_{E_2} \mathbb{1}_{C_{x_1}}(x_2)dm_2(x_2) \text{ d'après le lemme 5.1.1}\\ &= m_2(C_{x_1})\end{aligned}$$

de la même façon on montre que $F_2(x_2) = m_1(C^{x_2})$. Donc F_1 et F_2 sont mesurables d'après le lemme 5.1.2 et

$$\int_{E_1} F_1(x_1)dm_1(x_1) = \int_{E_2} F_2(x_2)dm_2(x_2) = \int_{E_1\times E_2} f(x_1,x_2)d(m_1\otimes m_2)(x_1,x_2)$$

2. *Pour $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{C_i}$ avec $C_i \in T_1 \otimes T_2$, on obtient le résultat grâce à la linéarité de l'intégrale.*
3. *Pour f mesurable positive, on utilise le théorème d'approximation d'une fonction mesurable positive par une suite de fonctions étagées positives et le théorème de Beppo-Levi..*

■

5.2.2 Cas général

Corollaire 5.2.1. *Pour $i = 1, 2$, on suppose m_i est une mesure σ-finie sur (E_i, T_i) Si f est une fonction mesurable de $(E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors :*
f est $m_1 \otimes m_2$ intégrable si et seulement si l'une des deux intégrales suivantes est finie :

$$I = \int_{E_1}\left[\int_{E_2} |f(x_1,x_2)|dm_2(x_2)\right]dm_1(x_1), \quad J = \int_{E_2}\left[\int_{E_1} |f(x_1,x_2)|dm_1(x_1)\right]dm_2(x_2)$$

Démonstration 132. *Pour $x_1 \in E_1$, et $x_2 \in E_2$, d'après la proposition 5.1.5 les applications partielles f_{x_1} et f_{x_2} sont mesurables, on peut alors définir les fonctions*

$$\begin{array}{rccl} G_1: & E_1 & \to & \mathbb{R}_+\\ & x_1 & \mapsto & \int_{E_2} |f_{x_1}(x_2)|dm_2(x_2)\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} G_2: & E_2 & \to & \mathbb{R}_+\\ & x_1 & \mapsto & \int_{E_1} |f_{x_2}(x_1)|dm_1(x_1)\end{array}$$

Par le théorème de Fubbini- Tonelli.
On a G_1 est mesurable sur E_1 et G_2 est mesurable sur E_2, on a alors

$$I = \int_{E_1} G_1(x_1)dm_1(x_1) \text{ et } J = \int_{E_2} G_2(x_2)dm_2(x_2)$$

f est $m_1 \otimes m_2$ intégrable si et seulement si $\int |f| d(m_1 \otimes m_2) < +\infty$.
Le théorème de Fubbini- Tonelli appliqué à $|f|$ nous dit que $\int |f| d(m_1 \otimes m_2)$ est toujours égale à I et à J, qu'elle soit finie ou pas, et la condition nécessaire et suffisante en découle. ■

Théorème 5.2.2. *(Fubbini)Pour $i = 1, 2$, on suppose m_i est une mesure σ-finie sur (E_i, T_i) Soit f est une fonction mesurable de $(E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
Si f est $m_1 \otimes m_2$ intégrable, alors : les fonctions F_1 et F_2 définies dans le théorèmes de Fubbini-Tonelli sont respectivement, définies m_1-p.p. et m_2-p.p., sont respectivement m_1-intégrable et m_2-intégrable, et vérifient :

$$\int_{E_1 \times E_2} f d(m_1 \otimes m_2) = \int_{E_1} \left[\int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right] dm_1(x_1) = \int_{E_2} \left[\int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \right] dm_2(x_2)$$

Démonstration 133. *On suppose $\displaystyle\int G_1 dm_1 < +\infty$, alors G_1 est finie m_1 p.p. sur E_1.*
Soit $E_1^{'} = \{x_1 \in E_1; G_1(x_1) < +\infty\}$, par définition de G_1 et de $E_1^{'}$, on voit que pour tout $x_1 \in E_1$, l'application partielle f_{x_1} est m_2 intégrable sur $E_2^{'}$, on peut donc définir

$$F_1(x_1) = \begin{cases} \displaystyle\int f_{x_1} dm_2 & si \quad x_1 \in E_1^{'} \\ 0 & si \quad x_1 \notin E_1^{'} \end{cases}$$

Comme $f = f^+ - f^-$, en appliquant le théorème de Fubbini Tonelli à f^+ et f^-, on voit que $\int f_{x_1}^+ dm_2$ et $\int f_{x_1}^- dm_2$ sont à valeurs positives finies pour chaque $x_1 \in E_1^{'}$ et mesurables comme fonctions de E_1 dans $\overline{R}_+$.
En écrivant $F_1(x_1) = \mathbb{1}_{E_1^{'}} \int f_{x_1}^+ dm_2 - \mathbb{1}_{E_1^{'}} \displaystyle\int f_{x_1}^- dm_2$
on voit que F_1 est T_1 mesurable, comme différence de deux fonctions mesurables, la mesurabilité de $\displaystyle\int f_{x_1}^+ dm_2$ et $\displaystyle\int f_{x_1}^- dm_2$ est guarantit par le théorème de Fubbini- Tonelli. On définit

$$F_1^+(x_1) = \int_{E_2} f^+(x_1, x_2) dm(x_2) \text{ et } F_1^-(x_1) = \int_{E_1} f^-(x_1, x_2) dm(x_1)$$

On applique le théorème de Fubbini-Tonelli à f^+ et f^-, on obtient :

$$\int_{E_1 \times E_2} f^+ d(m_1 \otimes m_2) = \int_{E_1} F_1^+(x_1) dm_1(x_1) = \int_{E_2} F_2^+(x_2) dm_2(x_2)$$

et

$$\int_{E_1 \times E_2} f^- d(m_1 \otimes m_2) = \int_{E_1} F_1^-(x_1) dm_1(x_1) = \int_{E_2} F_2^-(x_2) dm_2(x_2)$$

■

Exemple 5.2.1. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$K = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda(x) d\lambda(y).$$

Solution
$K = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} d\lambda(x)d\lambda(y) = \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} d\lambda(y)\right) d\lambda(x) = 2\int_{[0,1]}\left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy\right) d\lambda(x)$
$= 2\int_{[0,1]}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=x} d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x} d\lambda(x) = +\infty$. en effet : soit $0 < \alpha < 1$
$\int_{[0,1]} \frac{1}{x} d\lambda(x) = \int_{]0,1]} \frac{1}{x} d\lambda(x) \geq \int_{[\alpha,1]} \frac{1}{x} d\lambda(x) = \int_{[\alpha,1]} \frac{1}{x} dx$ en passant à la limite quand $\alpha \to 0$, on trouve $\int_{[0,1]} \frac{1}{x} d\lambda(x) = +\infty$
résumé : (Pour le théorème de Fubbini) :

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue, alors on peut toujours inverser l'ordre d'integration.
2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur un compact $[a,b] \times [c,d]$, alors on peut toujours inverser l'ordre d'integration sur ce compact.
3. Si $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, est telle que I compact et $\forall t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ et $g \in \mathcal{L}^1$, alors on peut toujours inverser l'ordre d'integration sur I et $\mathbb{R}$
4. Par contre si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue, il faut s'assurer que f est λ_2-intégrable pour inverser l'ordre d'intégration.

5.2.3 Variables séparés

Corollaire 5.2.2. *Dans le cas où la fonction f est de la forme $f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$, Si chaque f_i est m_i intégrable (i=1,2), alors f est $m_1 \otimes m_2$ intégrable et*

$$\int_{E_1\times E_2} f dm_1 \otimes m_2 = \left(\int_{E_1} f_1 dm_1\right)\left(\int_{E_2} f_2 dm_2\right)$$

5.3 Mesure de Lebesgue

Définition 5.3.1. *(Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)*

1. *La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la mesure $\lambda \otimes \lambda$, on la note λ_2.*
2. *Par récurrence sur N, la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$ est la mesure $\lambda_{N-1} \otimes \lambda$, on la note λ_N.*

Proposition 5.3.1. *(Propriétés élémentaires) Soit $N \geq 2$*

1. *La mesure λ_N est σ-finie.*
2. *Soit $A_1, ..., A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N$ et*

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i).$$

3. *Soit $\alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, ..., \beta_N \in \mathbb{R}.t.q.\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, ..., N\}$. Alors*

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i\beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i\beta_i[) = \prod_{i=1}^N(\beta_i - \alpha_i).$$

4. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Alors $\lambda_N(K) < \infty$.

5. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Alors $\lambda_N(O) > 0$.

6. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors $f = g$ $\lambda_N p.p.$implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 5.3.2. *Soient m et p deux entiers et $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to [0, +\infty[$ une fonctions borélienne, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^{m+p}} f d\lambda_{m+p} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) d\lambda_p(y) \right) d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) d\lambda_p(x) \right) d\lambda_p(y).$$

En pratique, dans les exercices, m et p vaudront le plus souvent 1 ou 2.

5.4 Formules de changement de variables

1. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et φ un difféomorphisme de V dans $\varphi(V)$ (φ bijective, φ et φ^{-1} de classe C^1)on a
$$\int_V f(x,y) d\lambda_2(x,y) = \int_{\varphi(V)} f(\varphi^{-1}(s,t)) |Jac(\varphi^{-1})(s,t)| d\lambda_2(s,,t)$$
2. Soit α un réel (en général $\alpha = 0$ ou $-\pi$), on a avec les coordonnées polaires :
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d\lambda_2(x,y) = \int_{]0,+\infty[\times]\alpha,\alpha+2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) d\lambda_2(r,,\theta)$$
3. on a avec les coordonnées sphériques
$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z) d\lambda_3(x,y,z)$$
$$= \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} f(r\cos s\cos t, r\sin s\cos t, r\sin t) r^2 \cos t d\lambda_3(r,,s,t)$$

5.4.1 Exemples

Calculer la mesure V_n du domaine $D_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$

1. pour $n = 1$
2. pour $n = 2$, en utilisant les coordonnées polaires.
3. pour $n = 3$, en utilisant les coordonnées sphériques.

Solution

1. $V_1 = \lambda(D_1) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{D_1} d\lambda(x) = \int_{[-1,1]} x d\lambda(x) = \int_{-1}^1 x dx = 2$
2. $V_2 = \lambda_2(D_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{D_2} d\lambda_2(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq 1\}} d\lambda_2(x_1,x_2) = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} \mathbb{1}_{\{r\leq 1\}} r d\lambda_2(r,\theta)$
$= \left(\int_0^1 r dr\right) \left(\int_{]0,2\pi[} d\lambda(\theta)\right) = \pi$
3. $V_3 = \lambda_3(D_3) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{D_3} d\lambda_3(x_1,x_2,x_3) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1\}} d\lambda_3(x_1,x_2,x_3)$
$= \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \mathbb{1}_{\{r\leq 1\}} r^2 \cos t d\lambda_3(r,s,t) = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[\times]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} r^2 \cos t d\lambda_3(r,s,t)$
$= \left(\int_0^1 r^2 dr\right) \left(\int_{]0,2\pi[} d\lambda(s)\right) \left(\int_{]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \cos t d\lambda(t)\right) = \frac{4}{3}\pi$

5.5 Couples de variables aléatoires.

5.5.1 Lois marginales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))^t$, un vecteur aléatoire de dimension 2, et soit pour $i = 1, 2$, la projection canonique $p_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ On a $\forall i = 1, 2$, $X_i = p_i \circ X$ d'où la loi de probabilité de X_i est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{X_i}(A) = P_X(p_i^{-1}(A)).$$

En effet : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_{X_i}(A) = P_{p_i \circ X}(A) = P((p_i \circ X)^{-1})(A) = P(X^{-1}(p_i^{-1})(A)) = P_X(p_i^{-1}(A))$.

Définition 5.5.1. *La loi P_{X_i} de la variable aléatoire X_i, s'appelle la ième loi marginale du vecteur aléatoire X.*

Proposition 5.5.1. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi de probabilité a une densité f par rapport à λ_2. Alors la loi marginale de X, P_{X_1} (resp. P_{X_2}) admet une densité f_{X_1} (resp. f_{X_2}) par rapport à λ donnée par*

$$f_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x) (resp. f_{X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y)).$$

Démonstration 134. *pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :*

$$\begin{array}{rcl} P_{X_1}(A) & = & P_X(p_1^{-1}(A)) \\ & = & P_X(A \times \mathbb{R}) \ car\ p_1^{-1}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 . x \in A\} \\ & = & \int_{A \times \mathbb{R}} f(x, y) d\lambda \otimes \lambda(x, y) \\ & = & \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y)\right) d\lambda(x) \ d'après\ Fubini\text{-}Tonelli \\ & = & \int_A f_{X_1}(x) d\lambda(x) \ avec\ f_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x). \end{array}$$

On montre de la même façon que $f_{X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y))$, en utilisant $P_{X_1}(A) = P_X(p_2^{-1}(A))$ et $p_1^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A$ ■

Proposition 5.5.2. *Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est à composantes indépendantes si et seulement si sa loi est le produit de ses lois marginales :*

$$X_1 \ et\ X_2 \ indépendantes \Leftrightarrow P_X = P_{(X_1, X_2)} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$$

Démonstration 135. *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc il existe $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que $A = A_1 \times A_2$ et*

$$\begin{array}{rcl} P_X(A) & = & P(X^{-1}(A)) \\ & = & P(\{\omega; X(\omega) \in A\}) \\ & = & P(\{\omega; X_1(\omega) \in A_1 \ et\ X_2(\omega) \in A_2\}) \\ & = & P(\{\omega; \omega \in X_1^{-1}(A_1) \ et\ \omega \in X_2^{-1}(A_2)\}) \\ & = & P(X_1^{-1}(A_1) \cap X_2^{-1}(A_2)) \\ & = & P(X_1^{-1}(A_1)).P(X_2^{-1}(A_2)) \ par\ définition\ de\ deux\ variables\ aléatoires\ indépendantes \\ & = & P_{X_1}(A_1) P_{X_2}(A_2) \\ & = & P_{X_1} \otimes P_{X_2}(A_1 \times A_2) \ par\ définition\ de\ la\ mesures\ produit \\ & = & P_{X_1} \otimes P_{X_2}(A). \end{array}$$

Comme $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection finie, $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, P_X et $P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ coincident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors P_X et $P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ coincident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est à dire $P_{(X_1,X_2)}$ et $P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ coincident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement : Supposons, que $P_{(X_1,X_2)}$ et $P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ coincident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, en particulier, pour tout $A_1 \times A_2$, de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
P_X(A_1 \times A_2) = P_{X_1} \otimes P_{X_2}(A_1 \times A_2) &\Leftrightarrow P(\{\omega; X_1(\omega) \in A_1 \text{ et } X_2(\omega) \in A_2\}) = P_{X_1}(A_1)P_{X_2}(A_2) \\
&\Leftrightarrow P(X_1^{-1}(A_1)) \cap X_2^{-1}(A_2)) = P_{X_1}(A_1)P_{X_2}(A_2) \\
&\Leftrightarrow \sigma(X_1) \text{ et } \sigma(X_2) \text{ sont indépendantes} \\
&\Leftrightarrow X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes .}
\end{aligned}$$

■

5.5.2 Loi d'une somme

La loi de la v.a. Z=X+Y se détermine par sa fonction de répartition G, définie par :

$$G(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$$

• Si X et Y sont deux v.a. discrètes, alors Z=X+Y est aussi une v.a. discrète dont la loi de probabilité est définie par l'ensemble des valeurs possibles $\{(x_i + y_j); i \in I, j \in J\}$ et les probabilités associées :

$$P(Z = z_k) = \sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j/(x_i + y_j = z_k).$$

• Dans le cas où le couple admet une densité f, on obtient :

$$G(z) = \int\int_D f(x,y)dxdy,$$

où $D = \{(x,y)/x + y \leq z\}$. On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = x \\ s = x + y \end{cases}$$

Le jacobien de cette transformation est :

$$\frac{D(x,y)}{D(x,s)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1. \end{vmatrix}$$

D'où :

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f(x, s-x)ds = \int_{-\infty}^{z} g(s)ds,$$

avec

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s-x)dx.$$

Proposition 5.5.3. *Si X_1 et X_2) sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors la loi de $X_1 + X_2$ est le produit de convolution des lois de X_1 et X_2 :*

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ indépendantes } \Rightarrow P_{X_1+X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}.$$

Démonstration 136. *Soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $s(x,y) = x+y$ et Soit $X = (X_1, X_2)$, alors $X_1 + X_2 = s \circ X$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a*

$$\begin{aligned}
P_{X_1+X_2}(A) &= P_{s\circ X}(A) \\
&= P(X^{-1}(s^{-1}(A))) \text{ par définition de la loi de probabilité de } s \circ X \\
&= P_X(s^{-1}(A)) \text{ par définition de la loi de probabilité de } X \\
&= (P_X)_s \text{ la notation de la mesure image de } P_X \text{ par l'application } s \\
&= (P_{X_1} \otimes P_{X_2})_s \text{ d'après la proposition précédente} \\
&= P_{X_1} * P_{X_2} \text{ par définition de la convolution de deux mesures.}
\end{aligned}$$

■

5.6 Exercices

5.6.1 Enoncés

Exercice 1. *Calculer les intégrales suivantes*

$$I = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y), J = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

$$\text{et } K = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda(x) d\lambda(y)$$

Exercice 2. *Calculer la mesure V_n du domaine D_n définie par :*

$$D_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$$

1. *pour $n = 1$*
2. *pour $n = 2$, en utilisant les coordonnées polaires.*
3. *pour $n = 3$, en utilisant les coordonnées sphériques.*

Exercice 3. *Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^2$ et soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Monter que*

1. *$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$*
2. *$\mu \otimes \mu$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^2$*

Exercice 4. *(Démonstration de l'intégrale de Gauss). Posons*
$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, f(x,y) = e^{-x(1+y^2)}$

1. *Montrer que f est $\lambda \otimes \lambda$-intégrable.*

2. *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 5. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* X *une variable aléatoire de densité (par rapport à* λ*)* $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ *et soit* Y *une variable aléatoire de densité (par rapport à* λ*)* $f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.
Soit la variable aléatoire $Z = \max(X, Y)$.

1. *Dans quel ensemble la variable aléatoire* Z *prend t-elle ses valeurs ?*
2. *Pour* t *dans cet ensemble, écrire l'événement* $\{Z \leq t\}$ *en fonctions des événements* $\{X \leq t\}$ *et* $\{Y \leq t\}$.
   On suppose ces deux événements indépendants.
3. *En déduire la fonction de répartition :* $\mathbb{P}(Z \leq t)$.
4. *Quelle est la densité de* Z *(par rapport à* λ*)*
5. *Calculer* $\mathbb{E}[Z]$

Exercice 6. *(Supplémentaire)*
Soient μ_1 *et* μ_2 *deux mesures finies sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, soit* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ *et* ν *la mesure image de* μ *par l'application* $\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y. \end{array}$ ν *est notée* $\mu_1 * \mu_2$.

1. *Montrer que* ν *est finie et que* $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$.
2. *On pose* $\mu_1 = \delta_0$ *la mesure de Dirac au point zéro.*
   Montrer que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_0 * \mu_2(A) = \mu_2(A)$.
3. *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, calculer* $(\delta_a * \delta_b)(A)$*, en déduire* $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$*, où* δ_a *est la mesure de Dirac au point* a.

5.6.2 Corrigés

Exercice 1. *Pour chaque* $y \in]0,1[$, $x \mapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc Riemann intégrable sur* $[0,1]$ *et donc elle est Lebesgue intégrable sur* $[0,1]$*. En plus on a*
$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$ *donc* $\int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}dx = \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y^2+1}$ *d'où* $I = \int_0^1 \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{\pi}{4}$.
On montre de la même façon que $J = \frac{-\pi}{4}$*, comme* $I \neq J$*, alors la fonction* $(x,y) \mapsto \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}$ *n'est pas intégrable sur* $]0,1[^2$ *et donc* $K = +\infty$*, résultat qu'on peut vérifier par les calcul, en utillisant Fubini Tonelli :*
$K = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}d\lambda(x)d\lambda(y) = \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}d\lambda(y)\right)d\lambda(x) = 2\int_{[0,1]}\left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)d\lambda(x)$
$= 2\int_{[0,1]}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=x} d\lambda(x) = \int_{[0,1]}\frac{1}{x}d\lambda(x) = +\infty$. *en effet : soit* $0 < \alpha < 1$
$\int_{[0,1]}\frac{1}{x}d\lambda(x) = \int_{]0,1]}\frac{1}{x}d\lambda(x) \geq \int_{[\alpha,1]}\frac{1}{x}d\lambda(x) = \int_{[\alpha,1]}\frac{1}{x}dx$ *en passant à la limite quand* $\alpha \to 0$*, on trouve* $\int_{[0,1]}\frac{1}{x}d\lambda(x) = +\infty$

Exercice 2.
1. $V_1 = \lambda(D_1) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{D_1}d\lambda(x) = \int_{[-1,1]} x d\lambda(x) = \int_{-1}^1 x dx = 2$
2. $V_2 = \lambda_2(D_2) = \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_{D_2}d\lambda_2(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_{\{x_1^2+x_2^2\leq 1\}}d\lambda_2(x_1,x_2) = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[}\mathbb{1}_{\{r\leq 1\}}r d\lambda_2(r,\theta)$
   $= \left(\int_0^1 r dr\right)\left(\int_{]0,2\pi[}d\lambda(\theta)\right) = \pi$

3. $V_3 = \lambda_3(D_3) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{D_3} d\lambda_3(x_1,x_2,x_3) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1\}} d\lambda_3(x_1,x_2,x_3)$
$= \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \mathbb{1}_{\{r\leq 1\}} r^2 \cos t d\lambda_3(r,s,t) = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[\times]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} r^2 \cos t d\lambda_3(r,s,t)$
$= \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_{]0,2\pi[} d\lambda(s)\right)\left(\int_{]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \cos t d\lambda(t)\right) = \frac{4}{3}\pi$

Exercice 3. 1. *a été traité au TD2*

2. $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A = \bigcup_{(m,n)\in A} \{(m,n)\}$, *et*

$$\begin{aligned}
\mu\otimes\mu(A) &= \sum_{(m,n)\in A} \mu\otimes\mu(\{(m,n)\}) \\
&= \sum_{(m,n)\in A} \mu\otimes\mu(\{m\}\times\{n\}) \\
&= \sum_{(m,n)\in A} \mu(\{m\})\times\mu(\{n\}) \\
&= \sum_{(m,n)\in A} 1 \\
&= card(A)
\end{aligned}$$

Exercice 4. 1. *On utilise le corollaire du cours (condition necessaire et suffisante d'intégrabilité)*
$\int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} |f(x,y)| d\lambda\otimes\lambda(x,y) = \int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} e^{-x(1+y^2)} d\lambda\otimes\lambda(x,y) < +\infty?$
on a : $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y^2)}dx\right)dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{2} < +\infty$ *donc*
$\int_{[0,+\infty[}\left(\int_{[0,+\infty[} e^{-x(1+y^2)}\lambda(x)\right)d\lambda(y) = \frac{\pi}{2} < +\infty$ *donc* f *est* $\lambda\otimes\lambda$ *intégrable.*

2. $I = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y^2)}dy\right)dx$, *et* $\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y^2)}dy = \exp(-x)\int_0^{+\infty}\exp(-xy^2)$
soit le changement de variable $u^2 = xy^2$ *ce qui implique* $dy = \frac{du}{\sqrt{x}}$ *et*
$\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y^2)}dy = \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)$, *par suite* $I = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du\right)dx$
Soit $V^2 = x$ *donc* $dx = 2vdv$ *et* $I = \int_0^{+\infty} 2\exp(-v^2)dv\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du = 2(\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du)^2$
$= \frac{\pi}{2}$, *donc* $\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 5. 1. $P_X([0,1]) = 1 = \{\omega\in\Omega; X(\omega)\in[0,1]\}$ *donc* X *prend ses valeurs dans* $[0,1]$, *de même pour* Y, *donc* $\max(X,Y)$ *prend ses valeurs dans* $[0,1]$.

2. $\forall t\in[0,1]$, $\max(X,Y)\leq t \Leftrightarrow X\leq t$ *et* $Y\leq t$ *donc* $P(\max(X,Y)\leq t) = P((X\leq t)\cap(Y\leq t))$

3. *Comme* X *et* Y *sont indépendants, alors*

$$\begin{aligned}
P(\max(X,Y)\leq t) &= P(X\leq t)P(Y\leq t) \\
&= \int_{-\infty}^t f_X(x)dx\int_{-\infty}^t f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^t \mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx\int_{-\infty}^t \mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ \int_0^t dx\int_0^t dy = t^2 & si \quad t\in[0,1] \\ \int_0^1 dx\int_0^1 dy = 1 & si \quad t>1 \end{cases}
\end{aligned}$$

4. $f_Z(t) = F^{'}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 2t & si \quad t \in [0,1] \\ 0 & si \quad t > 1 \end{cases}$ *donc* $f_Z(t) = 2t\mathbb{1}_{[0,1]}$

5. $E(Z) = \int_{\mathbb{R}} t f_Z(t)dt = \int_0^1 2t^2 dt = 2/3$

Annexe

Sujets d'examens

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE USTOMB
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE-DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
3^{ime} année Licence Mathématiques
année universitaire 2020-2021

Examen final de Théorie de mesure et integration

Durée : 1h 30 mn

Exercice 1. *1. (convergence dominée) Soit l'espace mesuré* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *où* λ *désigne la mesure de Lebesgue. On considère la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de fonctions réelles, définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} & si\ x \neq 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$ *. Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$

2. Soit φ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(tx)dx$

• *Montrer que* φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et que* φ *vérifie une équation différentielle du premier ordre.*

• *Déterminer l'expression de* $\varphi(t)$ *pour tout réel* t, *sachant que* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. Soit I *un intervalle ouvert (non necessairement borné) de* $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *strictement croissante de classe* C^1. *On pose* $J = \varphi(I)$. *Soit* μ *la mesure de densité* $|\varphi'|$ *par rapport à* λ *et* $\nu = \mu_\varphi$ *la mesure image de* μ *par* φ.

• *Pour toute application* f *mesurable, positive ou* λ *intégrable sur* J, *et pour tout borélien* A *de* J, *exprimer* $\int_A f d\nu$ *sous forme d'une intégrale par rapport à* λ.

• *Soit* $[c,d]$ *un intervalle borné de* J, *montrer que* $\nu([c,d]) = \lambda([c,d])$, *où* λ *est la mesure de Lebesgue.*

Exercice 2. *1. Soit* E *un ensemble et* g *une application de* E *dans* E, *on définit l'ensemble* T *par* $T = \{A \subset E : f^{-1}(A) = A\}$. *Montrer que* T *est une tribu.*

2. Soit (E_1, T_1, μ_1) *un espace mesuré,* (E_2, T_2) *un espace mesurable,* φ *une application* <u>*mesurable*</u> *de* (E_1, T_1) *dans* (E_2, T_2), *et soit l'application :* $\mu_2 : \begin{array}{l} T_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B \mapsto \mu_2(B) \quad = \mu_1(\varphi^{-1}(B)) \end{array}$

Montrer que μ_2 *est une mesure sur* (E_2, T_2).

3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $C_1, C_2, ..., C_n$ *des classes d'événements, le but de cette question est de montrer l'implication* $C_1, C_2, ..., C_n$ *indépendantes et stables par intersection finie* $\Rightarrow$, $\sigma(C_1), ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes.*
   (a) *Soit* $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$, *montrer que* $\sigma(C) = \sigma(C')$, *où* $C' = C \cup \{\Omega\}$
   (b) *Soit* $H = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}$, $k \geq 1$, $i_1, i_2, ..., i_k$ *des éléments distincts de* $\{1, 2, ..., n-1\}$ *et* $A_i \in C_i$, *pour* $i = 1, 2, ..., n-1$. *On définit deux mesures sur* $\sigma(C_n)$, *comme suit :* $\forall A \in \sigma(C_n), m_1(A) = P(A \cap H)$ *et* $m_2(A) = P(A)P(H)$
   • *Montrer que* $m_1 = m_2$ *sur* $\sigma(C_n)$. *En déduire le résultat suivant :*
   •$C_1, C_2, ..., C_n$ *indépendantes et stables par intersection finie* $\Rightarrow$, $C_1, C_2, ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes.*
   • *Comment appliquer le résultat précédent pour obtenir* $\sigma(C_n), C_1, C_2, ..., \sigma(C_{n-1})$ *indépendant.*
   • *Continuer le procédé jusqu'à obtenir* $\sigma(C_1), ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes.*
   (c) *Montrer que* $\sigma(C_1), ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes* $\Rightarrow$ $C_1, C_2, ..., C_n$ *indépendantes. (Indication : écrire* $\{1, 2, ..., n\} = I \cup I^c$ *avec* $I \subset \{1, 2, ..., n\}$*).*
   (d) *En déduire de tout ce qui précède le cas particulier pour n événements :*
   $A_1, A_2, ..., A_n$ *indépendantes* $\Leftrightarrow$ $\sigma(\{A_1\}), \sigma(\{A_2\}), ..., \sigma(\{A_n\})$ *indépendantes.*

Corrigé de l'examen final de la théorie de mesure et intégration L3 2020-2021

Exercice 1. *1.* • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme composée, produit et quotient de fonctions continue sur* $\mathbb{R}^*$.

• *en* $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} = 1 = f_n(0)$ *car* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{n\sin(\frac{x}{n})}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y)} = 1$ *avec* $y = \frac{x}{n}$. *donc* f_n *est continue en* 0 *et par suite, elle est continue sur* $\mathbb{R}$

• $\forall x \neq 0$, $|\frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x}| \leq 1$ *car* $\forall y \in \mathbb{R}, |\sin(y)| \leq |y|$ *donc* $\forall x \neq 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, *d'où* $|f_n| \leq \lambda p.p.$ *avec* $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, g *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *car* $\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{1}{1+x^2}| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = [\arctan]_{-\infty}^{+\infty} = \pi < +\infty$.

• $\forall x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}$ *car* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sin(\frac{x}{n})}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y)} = 1$ *avec* $y = \frac{x}{n}$.

• *pour* $x = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = \dfrac{1}{1+0^2}$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$. *D'après le théorème de convergence dominée, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \pi$$

2. • $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f : t \mapsto \exp(-x)\cos(tx)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme produit et composée de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$

• $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -x\exp(-x^2)\sin(tx)$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq x\exp(-x^2) = g(x)$ *car* $|\sin(tx)| \leq 1$.

• g *est continue sur* $\mathbb{R}_+$, *et* $\int_0^{+\infty} |x\exp(-x^2)|dx = \int_0^{+\infty} x\exp(-x^2)dx = [\frac{-1}{2}\exp(-x^2)]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} < +\infty$.

Donc d'après le théorème de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} -x\exp(-x^2)\sin(tx)$, *après une intégration par parties en posant :* $u'(x) = x\exp(-x^2)$ *et* $v(x) = \sin(tx)$ $(u(x) = \frac{-1}{2}\exp(-x^2)$ *et* $v'(x) = t\cos(tx)$ *obtient :* $\varphi'(t) = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx = 0 - \frac{-1}{2}t\int_0^{+\infty}\exp(-x^2)\cos(tx)dx = \frac{-1}{2}t\varphi(t)$, *c'est à dire* $\varphi'(t) + \frac{1}{2}t\varphi(t) = 0$. *Ce qui donne* $\varphi(t) = K\exp(-t^2/4)$, *avec* $K = \varphi(0) = \int_0^{+\infty}\exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, *d'où* $\varphi(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-t^2/4)$

3. • $\forall A \in \mathcal{B}(J)$, $\int_A f d\nu = \int_{\varphi^{-1}(A)} f\circ\varphi d\mu = \int_{\varphi^{-1}(A)} (f\circ\varphi)\varphi' d\lambda$ *car* $\varphi' > 0$ *(*φ *est croissante).*

• $\nu([c,d]) = \int \mathbb{1}_{[c,d]} d\nu = \int (\mathbb{1}_{[c,d]} \circ \varphi)\varphi' d\lambda$ *d'après la question précédente.*

$=\int \mathbb{1}_{\varphi^{-1}([c,d])}\varphi' d\lambda$ *car* $\mathbb{1}_A \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}$

$=\int_{[\varphi^{-1}(c),\varphi^{-1}(d)]} \varphi' d\lambda$ *car* φ *est strictement croissante et continue implique* φ *bijective et* φ^{-1} *est aussi croissante.*

$=\int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} \varphi' dx$ *car* φ *de classe* C^1 *implique* φ' *est continue sur le compact* $[\varphi^{-1}(c), \varphi^{-1}(d)]$

$=[\varphi]_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} = \varphi(\varphi^{-1}(d)) - \varphi(\varphi^{-1}(c)) = d - c = \lambda([c,d])$.

Exercice 2. *1.* $T = \{A \subset E : f^{-1}(A) = A\}$ *est une tribu car :*

• $\emptyset \subset E$ *et* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ *donne* $\emptyset \in T$

- *On suppose* $A \in T$, *et on montre que* $A^c \in T$

$$\begin{array}{rcl} A \in T & \Rightarrow & A \subset E \text{ et } f^{-1}(A) = A \text{ par définition de } T \\ & \Rightarrow & A^c \subset E \text{ et } (f^{-1}(A))^c = A^c \text{ car } A \cup A^c = E \\ & \Rightarrow & A^c \subset E \text{ et } f^{-1}(A^c) = A^c \text{ car } (f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \\ & \Rightarrow & A^c \in T \text{ par définition de } T \end{array}$$

- *On suppose* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *et on montre que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}, A_{n\in\mathbb{N}} \in T & \Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset E \text{ et } f^{-1}(A_n) = A_n \text{ par définition de } T \\ & \Rightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset E \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ par définition de l'union} \\ & \Rightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset E \text{ et } f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ car} \\ & & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \\ & \Rightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T \text{ par définition de } T \end{array}$$

2. μ_2 *est une mesure car*
   - $\mu_2(\emptyset) = \mu_1\varphi^{-1}(\emptyset) = \mu_1(\emptyset) = 0$.
   - *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* T_2 *deux à deux disjoints, c'est à dire pour tout* $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, *cette dernière hypothèse nous donne,* $\varphi^{-1}(A_i) \cap \varphi^{-1}(A_j) = \varphi^{-1}(A_i \cap A_j) = \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, *c'est à dire, les éléments de la suite* $(\varphi^{-1}(A_n))_n$ *sont aussi deux à deux disjoints, comme de plus* φ *est* (T_1, T_2) *mesurable, on a par définition de la mesurabilité,* $\varphi^{-1}(A_n) \in T_1$, *pour tout* n, *on peut donc leur appliquer la mesure* μ_1, *par suite, sachant que* μ_1 *est une mesure, on a*
   $\mu_2(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu_1(\varphi^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = \mu_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(\varphi^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(A_n)$.
3. (a)
   - $C \subset \sigma(C)$ *car* $\sigma(C)$ *est la plus petite tribu contenant* C *et* $\{\Omega\} \subset \sigma(C)$ *car* $\sigma(C)$ *est une tribu sur* Ω, *et par définition d'une tribu* $\Omega \in \sigma(C)$. *donc*
     $C \cup \{\Omega\} \subset \sigma(C)$, *c'est à dire* $C' \subset \sigma(C)$ *et par suite* $\sigma(C') \subset \sigma(C)$
   - $C \subset C \cup \{\Omega\} = C' \Rightarrow \sigma(C) \subset \sigma(C')$ *(propriétée des tribus).*

   (b)
   - *par hypothèse, on a* $\forall A, B \in C_n$, $A \cap B \in C_n$, *comme* A, *et* B, *sont inclus dans* Ω, *on a* $\forall A, B \in C'_n = C_n \cup \{\Omega\}$, $A \cap B \in C'_n$, *donc* C'_n *est aussi stable par intersection finie, comme de plus d'après (a)* C'_n *engendre* $\sigma(C_n)$, *et contient* Ω, *on essaye d'appliquer le théorème sur l'égalité de deux mesures. On a*
     $m_1(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap H) = \mathbb{P}(H).1 = P(H).P(\Omega) = m_2(\Omega) < +\infty$ *(la probabilité est une mesure finie) et* $\forall A \in C_n$,
     $$\begin{array}{rcl} m_1(A) = P(A \cap H) & = & P(A \cap A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) \\ & = & P(A).P(A_{i_1}).P(A_{i_2}).....P(A_{i_k}) \text{ car } C_1, ..., C_n \text{ sont indépendants} \\ & = & P(A).P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) \text{ car } C_1, ..., C_n \text{ sont indépendants} \\ & = & P(A)P(H) = m_2(A) \end{array}$$
     donc $\forall A \in C'_n$, $m_1(A) = m_2(A)$, *et d'après le théorème sur l'égalité des mesures, on conclu, que* $m_1 = m_2$ *sur* $\sigma(C'_n) = \sigma(C_n)$.
   - *on a obtenu donc,*

$\forall A \in \sigma(C_n)$, $P(A \cap A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A).P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$
ce qui se traduit par $\forall A \in \sigma(C_n)$, $\mathbb{P}(A \bigcap_{i \in I} A_i) = \mathbb{P}(A).P(\bigcap_{i \in I} A_i)$ *avec* $I \subset \{1, 2, ..., n-1\}$ *et* $A_i \in C_i$,
ce qui implique, étant donné que les $Ci, i = 1, .., n$ *sont indépendants*
$\forall A \in \sigma(C_n)$, $\mathbb{P}(A \bigcap_{i \in I} A_i) = \mathbb{P}(A). \prod_{i \in I} P(A_i)$ *avec* $I \subset \{1, 2, ..., n-1\}$ *et* $A_i \in C_i$.
si on change de notation, en posant : $C''_n = \sigma(C_n)$ *et* $C''_i = C_i$ *pour* $i = 1, ..., n-1$, *on peut exprimer ce qui précède comme suit : Pour tout* $I \subset \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = . \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ *avec* $A_i \in C''_i$, *ce qui exprime bien l'indépendance de* $\sigma(C_n), C_1, ..., C_{n-1}$,
comme notre hypothèse de départ était $C_1, ..., C_n$ *indépendants et stables par intersection finie, on a l'implication :*
$C_1, C_2, ..., C_n$ *indépendantes et stables par intersection finie* $\Rightarrow$, $C_1, C_2, ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes.*
• *Comme* $C_1, C_2, ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes et stables par intersection finie (*$\sigma(C_n)$ *l'est aussi car c'est une tribu), on prend dans l'implication précédente* $\sigma(C_n), C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ *en lieu et place de* $C_1, C_2, ..., C_n$, *pour avoir* $\sigma(C_n), C_1, C_2, ...C_{n-2}, \sigma(C_{n-1})$ *indépendants.*
• *On réapplique encore notre implication avec le dernier résultat obtenu, comme suit :*
$\sigma(C_n), \sigma(C_{n-1}), C_1, C_2, ...C_{n-2}$ *indépendants et stables par intersection finie*
$\Rightarrow$ $\sigma(C_n), \sigma(C_{n-1}), C_1, C_2, ...\sigma(C_{n-2})$ *indépendants.*
etc... en réitérant le processus comme suit :
$\sigma(C_n), \sigma(C_{n-1}), ..., \sigma(C_{n-k})C_1, C_2, ..., C_{n-k-1}$ *indépendants et stables par intersection finie*
$\Rightarrow$ $\sigma(C_n), \sigma(C_{n-1}), \sigma(C_{n-2}), \sigma(C_{n-k})C_1, C_2, ..., \sigma(C_{n-k-1})$. *pour* $2 \leq k \leq n-2$, *on obtient* $\sigma(C_n), \sigma(C_{n-1}), ..., \sigma(C_1)$ *indépendants au bout de n itérations. Ainsi on obtient notre objectif qui est :* $C_1, C_2, ..., C_n$ *indépendantes et stables par intersection finie* $\Rightarrow$, $\sigma(C_1), ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes.*

(c) ***Rappel :*** • *Indépendance des tribus : Soit* $N > 1$. *On dit que les* N *tribus* $T_1, T_2, ...T_N$ *sont indépendantes si pour toute famille* $(A_1, A_2, ...A_N)$ *d'événements tels que* $A_k \in T_k$ *pour* $k = 1, ..., N$ *on a :*
$P(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) = P(A_1)P(A_2)........P(A_N)$.
• *Indépendance des classes d'événements : La suite* (C_n) *(finie ou infinie) est une suite de classes mutuellement indépendantes si pour toute sous suite finie* $C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}$ *extraite de la suite* (C_n) *et pour toute suite d'événements* $A_{i_1} \in C_{i_1}, A_{i_2} \in C_{i_2}, ..., A_{i_k} \in C_{i_k}$, *on a :*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{ik}) = \mathbb{P}(A_{i_1}).\mathbb{P}(A_{i_2})....\mathbb{P}(A_{i_k})$$

Si on applique la définition de l'indépendances des classes d'événéments aux tribus (qui sont des classes d'événements bien sûr), la déduction est imédiate car $C_i \subset$

$\sigma(C_i)$.
Si on applique la définition de l'indépendance des tribus (qui est une définition équivalente dans le cas des tribus), on se sert de l'outil qui intervient dans la démonstration de cette définition équivalente et qui a été donné sous forme d'indication dans le sujet.
La définition de l'indépendance des classes d'événements $C_1, ..., C_n$ *peut s'exprimer comme suit :*
Pour tout $I \subset \{1, ...n\}$, $P(\bigcap_{k\in I} A_k) = \prod_{k\in I} P(A_i)$, *avec* $A_i \in C_i$ *pour* $i = 1, ., n$. *Supposons* $\sigma(C_1), ..., \sigma(C_n)$ *indépendantes, c'est à dire* $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \prod_{k=1}^{n} P(A_i)$ *pour tout* $A_i \in \sigma(C_i)$, $i = 1, ., n$. *Démontrons l'indépendance de* $C_1, ..., C_n$, *Soit* $I \subset \{1, 2, ..., n\}$ *et soit* $A_k \in C_k$ *:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{k\in I} A_k) &= \mathbb{P}(\bigcap_{k\in I} A_k \bigcap_{k\in I^c} A_k) \text{ avec } \forall k \in I^c, A_k = \Omega \\
&= P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \text{ avec } \forall k \in I^c, A_k = \Omega \text{ car } \{1, 2, ...n\} = I \cup I^c \\
&= \textstyle\prod_{k=1}^{n} P(A_k) \text{ avec } \forall k \in I^c, A_k = \Omega \\
&\quad \text{car } A_k \in C_k \subset \sigma(C_k) \text{ et les } \sigma(C_k) \text{ sont indépendantes} \\
&= \textstyle\prod_{k\in I} P(A_k) \prod_{k\in I^c} P(A_k) \\
&= \textstyle\prod_{k\in I} P(A_k) \prod_{k\in I^c} P(\Omega) \\
&= \textstyle\prod_{k\in I} P(A_k) \text{ car } P(\Omega) = 1
\end{aligned}
$$

(d) • $A_1, ..A_1$ *indépendants* $\Rightarrow \{A_1\}, ..., \{A_n\}$ *indépendants , comme* $\{A_1\}, ..., \{A_n\}$ *sont stables par intersection finie, en prenant* $C_i = \{A_i\}$, *on a d'après b) et c) le résultats demandé.*

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE USTOMB
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE-DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
3^{ime} année Licence Mathématiques
année universitaire 2021-2022

Examen final de Théorie de mesure et integration

Durée : 1h 30 mn

Exercice 3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* B *un élément de* $\mathcal{A}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$, $p \in \mathbb{N}$ *et soit*

$$T = \{C \in \mathcal{A}, P(C) = 0 \text{ ou } P(C) = 1\}.$$

1. *Que vaut* $P(\Omega)$ *?*
2. *Exprimer* $P(B^c)$ *en fonction de* $P(B)$
3. *Donner la relation entre* $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n)$
4. *Donner la relation entre* $P(B_p)$ *et* $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$
5. *Démontrer que* T *est une tribu.(Indication : Pour la stabilité par union dénombrable, on distingue deux cas : ou bien tous les événements sont de probabilité nulle, ou bien un au moins est de probabilité égale à un).*

Exercice 4. *Soit* (E_1, T_1, μ_1) *un espace mesuré,* (E_2, T_2) *un espace mesurable,* φ *une application* <u>*mesurable*</u> *de* (E_1, T_1) *dans* (E_2, T_2)*, et soit l'application :* $\mu_2 : \begin{array}{l} T_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B \mapsto \mu_2(B) \quad = \mu_1(\varphi^{-1}(B)) \end{array}$

1. *Donner la définition de* φ *est* T_1*-*T_2 *mesurable*
2. *Montrer que* μ_2 *est une mesure sur* (E_2, T_2).

Exercice 5.

1. *Montrer que si la fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est dérivable alors sa dérivée* f' *est borélienne.*
2. *Soit* f *et* g *deux fonctions continues de* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Montrer que l'ensemble* $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ *est un borélien.*

Exercice 6. *Soient sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, la mesure* $\mu_1 = \dfrac{1}{2!}\delta_2$ *et* $\mu_2 = \dfrac{1}{3!}\delta_3$ *où* δ_a *est la mesure de Dirac au point* a*, et soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 6\mathbb{1}_{[3,5[}(x)$.

1. *Justifier le fait que* f *est borélienne.*
2. *Donnez l'ensemble des points de discontinuité de* f
3. f *est elle* μ_1*-p.p. continue ?* μ_2*-p.p. continue ?*
4. *calculer* $\int f d\mu$ *avec* $\mu = \mu_1 + \mu_2$
5. f *est -elle* λ*-p.p. continue ? avec* λ *mesure de Lebesgue.calculer* $\int f d\lambda$
6. *En utilisant le théorème de Beppo-levi, calculer en justifiant* $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ *avec* $f_n = \frac{\exp(-\frac{x^2}{n})}{1+x^2}$.

Corrigé de l'examen final de la théorie de mesure et intégration L3 2021-2022

Exercice 1. $T = \{A \subset E : f^{-1}(A) = A\}$ *est une tribu car :*
• $\emptyset \subset E$ *et* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ *donne* $\emptyset \in T$
• *On suppose* $A \in T$*, et on montre que* $A^c \in T$

$$\begin{aligned} A \in T &\Rightarrow A \subset E \text{ et } f^{-1}(A) = A \text{ par définition de } T \\ &\Rightarrow A^c \subset E \text{ et } (f^{-1}(A))^c = A^c \text{ car } A \cup A^c = E \\ &\Rightarrow A^c \subset E \text{ et } f^{-1}(A^c) = A^c \text{ car } (f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \\ &\Rightarrow A^c \in T \text{ par définition de } T \end{aligned}$$

• *On suppose* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$*, et on montre que* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, A_{n\in\mathbb{N}} \in T &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset E \text{ et } f^{-1}(A_n) = A_n \text{ par définition de } T \\ &\Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset E \text{ et } \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ par définition de l'union} \\ &\Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset E \text{ et } f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ car} \\ &\quad\; \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \\ &\Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T \text{ par définition de } T \end{aligned}$$

Exercice 2. *1.* $P(\Omega) = 1$, $\lambda(\{1\}) = 0$, $\lambda([1,2]) = 2-1 = 1$, $\int \mathbb{1}_{[1,3]} d\lambda = \lambda([1,3]) = 2$, $\int_{[2,4]} \mathbb{1}_{[1,3]} d\lambda = \int \mathbb{1}_{[1,3]\cap[2,4]} d\lambda = \int \mathbb{1}_{[2,3]} d\lambda = \lambda([2,3]) = 1$.

(a) f *dérivable* $\Rightarrow f$ *continue* $\Rightarrow f$ *borélienne et* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{n\to+\infty} n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)), \end{aligned}$$

f' *est borélienne comme limite d'une composée, produit et somme de fonctions boréliennes.*

(b) $f = \mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ *est borélienne car* $[1,+\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tribu borélienne.*

Exercice 3. *1. Par définition de* h *est* $\mathcal{A} - T$ *mesurable,* $\forall C \in T$, $h^{-1}(C) \in \mathcal{A}$*, on peut donc appliquer, la mesure* m *à* $h^{-1}(C)$ *car la mesure* m *est définie sur* $\mathcal{A}$*.*

2. μ *est une mesure car*
• $\mu(\emptyset) = m(h^{-1}(\emptyset)) = m(\emptyset) = 0$.
• *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* T *deux à deux disjoints, c'est à dire pour tout* $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$*, cette dernière hypothèse nous donne,*
$h^{-1}(A_i) \cap h^{-1}(A_j) = h^{-1}(A_i \cap A_j) = h^{-1}(\emptyset) = \emptyset$*, c'est à dire, les éléments de la suite* $(h^{-1}(A_n))_n$ *sont aussi deux à deux disjoints, comme de plus* h *est* $\mathcal{A} - T$ *mesurable, on a par définition de la mesurabilité,* $h^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$*, pour tout* n*, on peut donc leur appliquer la mesure* m*, par suite, sachant que* m *est une mesure, on a*
$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(h^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} h^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(h^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Exercice 4. • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme composée, produit et quotient de fonctions continue sur* $\mathbb{R}^*$.

• *en* $x = 0$ *:* $\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} = 1 = f_n(0)$ *car* $\lim_{x\to 0} \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y)} = 1$ *avec* $y = \frac{x}{n}$*. donc* f_n *est continue en* 0 *et par suite, elle est continue sur* $\mathbb{R}$
• $\forall x \neq 0$, $|\frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x}| \leq 1$ *car* $\forall y \in \mathbb{R}, |\sin(y)| \leq |y|$ *donc* $\forall x \neq 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$*,*
d'où $|f_n| \leq g(x)\lambda p.p.$ *avec* $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$*,* g *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *car*
$\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{1}{1+x^2}| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = [\arctan]_{-\infty}^{+\infty} = \pi < +\infty.$
• $\forall x \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$ *car* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y)} = 1$ *avec* $y = \frac{x}{n}$*.*
• *pour* $x = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 1 = \frac{1}{1+0^2}$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$*.*
D'après le théorème de convergence dominée, on a :
$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \pi.$

Bibliographie

[1] El Haj Laamri. Mesure, integration, convolution et transformée de Fourier des fonctions. Dunod. 2005.

.

[2] Thierry Gallouet and Raphaèle Herbin . Mesure, intégration, probabilités. ellipses.

[3] Jean-Pierre Ansel and Yves Ducel. Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration. ellipses.

[4] Dominique Foatas and Aimé Fuchs. Calcul des probabilités. SECONDE EDITION : 1998 ISBN 2 10 007547 0 Dunod, Paris.

.

[5] Charles-Michel Marie. Mesure et probabilités. EDITION Hermann.

.

[6] A.Bouziad et J.Calbrix. Cours complet et 155 execices. Théorie de la mesure et de l'intégration. Publication de l'université de Rouen. 1993.

.

[7] M.Briane et G.Pagès. Théorie de l'intégration. Cours et execices. Licence et master de mathématiques. 2006.

.

[8] Paul Krée. Intégration et théorie de la mesure. Cours et exercices corrigés. Mathématiques pour le deuxième cycle. 1997.

.

[9] A.Kolmogorov et S.Fomine. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. 1973.