République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN MOHAMED BOUDIAF

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Cours et exercices d'applications -Analyse 4

Présenté par
Dr. MENAD Bendehiba

Ce polycopié de cours avec exercices corrigés est destiné principalement aux étudiants de deuxième année L2 licence de mathématiques LMD.

Année Universitaire : **2023 – 2024**

Préface

Ce polycopié de cours avec exercices corrigés est destiné principalement aux étudiants de deuxième année L2 licence de mathématiques LMD. Il regroupe l'essentiel du programme de mathématiques du semestre pair sous l'appellation Analyse 4, ce document sera aussi indispensable aux étudiants des classes préparatoires des grandes écoles ainsi que ceux des écoles normales supérieures. D'après notre expérience, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années, nous avons décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à ce module.

Ce polycopié se veut avant tout un outil complémentaire aux cours et travaux dirigés qui sont dispensés dans les programmes du cursus officiel.

Nous avons voulu dégager les points essentiels permettant à l'étudiant de combler sa compréhension de certaines parties du cours pour aborder efficacement les exercices proposés au cours des séances de travaux dirigés. La plupart des chapitres présentés sont avec un résumé des définitions et des théorèmes principaux avec des propositions.

Vu le programme proposé par le ministère, nous avons partagé ce polycopié en cinq chapitres principaux, chacun d'eux étant suivi et illustré par une série d'exercices corrigés et autres sans corrigés.

Dans le premier chapitre on introduit la Topologie de $\mathbb{R}^n$, notamment, les notions de distances, normes, ouverts, fermés,... des domaines inclus dans $\mathbb{R}^n$, qui nous seront utiles tout au long de ce cours pour tous les nouveaux outils abordés.

Le deuxième chapitre est sur les fonctions de plusieurs variables, on s'intéresse aux notions de limite, continuité et l'existence de dérivées partielles.

Dans le troisième chapitre, on présente la notion de différentiabilité des fonctions de plusieurs variables et les extremas, et ensuite les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

Les deux derniers chapitres 4 et 5 sont consacrés respectivement à l'étude des intégrales doubles et triples.

Pour une bonne et bénéfique utilisation de ce polycopié, nous recommandons à nos étudiants d'avoir avant tout une bonne compréhension du cours pour la résolution des exercices proposés. Il faut s'exercer et s'essayer autant que possible sur les difficultés rencontrées avant de lire la solution rédigée.

A la fin de ce document, nous avons donné quelques références de base classiques et récentes et que le lecteur ou l'étudiant intéressé pourra aisément consulter.

Table des matières

Notations et Abréviations

EVN : Espace vectoriel normé.
c-a d : c'est-à-dire.
$\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ou $\mathbb{R} - \{0\}$.
$\mathbb{R}_+$: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
$< .,. >$: Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
$B(\omega, r)$: Boule fermée de centre ω et de rayon r.
$\|.\|_2$: Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
∂D : Frontière de l'ensemble D.
$df_{X_0} = L_{X_0}$: La différentielle de f en X_0.
$Hessf(X)$ Matrice Hessienne de f en X.
$Isom(E, F)$: Isomorphisme de E sur F.
$\overrightarrow{grad}\ \overrightarrow{V}$: Gradient d'un vecteur $\overrightarrow{V}$.
$\overrightarrow{Rot}\ \overrightarrow{V}$: Rotationnel de $\overrightarrow{V}$
$div(\overrightarrow{V})$: Divergence d'un vecteur $\overrightarrow{V}$.
S^+ : Nappe orientée.
$\Phi_{S^+}(\overrightarrow{V})$: Flux de vecteur $\overrightarrow{V}$ à travers S^+.
$(a, b) =]a, b[$.
$(a, b] =]a, b]$.
$[a, b) = [a, b[$.
$A \subset E$, $A^c = E\backslash A = E - A$.
$i = \overline{1, n} \Leftrightarrow i \in \{1, ..., n\} \Leftrightarrow i = 1, ..., n \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n$.

Chapitre 1

Topologie de $\mathbb{R}^n$

Introduction

Nous allons présenter les notions de distances, normes, ouverts, fermés, ... des domaines inclus dans $\mathbb{R}^n$ qui nous seront utiles tout au long de ce cours pour tous les nouveaux outils abordés.

Les notions topologiques de $\mathbb{R}^n$ qui sont essentielles pour une étude rigoureuse des fonctions à plusieurs variables.

Il faut savoir que sur les espaces $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes et que ceci implique que l'étude d'une propriété topologique sur $\mathbb{R}^n$ ne dépend pas de la norme choisie.

1.1 Notion de norme

La notion de norme sur $\mathbb{R}^n$ généralise la notion de valeur absolue sur $\mathbb{R}$, on trouve une seule valeur absolue sur $\mathbb{R}$ mais on peut définir plusieurs normes sur $\mathbb{R}^n$, on note la norme par $\|.\|$.

Définition 1.1 *Une norme sur un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, pour tout $x \in E$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x, y \in E$.

E muni de cette norme$\|.\|$ est appelé espace vectoriel normé (EVN), noté $(E, \|.\|)$.

Exemples

1. La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \text{ pour tout } x = (x_1, ..., x_n) \text{ de } \mathbb{R}^n$$

2. On peut munir $\mathbb{R}^n$ d'autres normes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|).$$

3. On peut également définir sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire, pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i, \text{ donc } \|x\|_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

$\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien.

4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'espace vectoriel $E = C^\infty([a, b])$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

Définition 1.2 *Soit E un espace vectoriel réel.*

Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont dites **équivalentes** si et seulement si $\exists c, C > 0$ telles que

$$\forall x \in E, c\,\|x\| \leq \|x\|' \leq C\,\|x\|\,.$$

Proposition 1.1 *Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes.*

Preuve. On va démontrer que

$$\forall x \in E, \;\; \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
1.\; \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) \\
&= |x_j| \quad (\text{ où } j \text{ est tel que } |x_j| = \|x\|_\infty \;) \\
&\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_j^2 + ... + x_n^2} \\
&= \|x\|_2 \\
2.\; \|x\|_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \\
&\leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} |x_i|\,|x_j| \\
&= (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)^2 \\
&= \|x\|_1^2, \quad \text{donc} \quad ||x||_2 \leq ||x||_1 \\
3.||x||_1 &= |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \\
&\leq \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) = n\,\|x\|_\infty\,. \;\blacksquare
\end{aligned}$$

1.1.1 Distances

Définition 1.3 *Si* (E, N) *est un espace vectoriel normé, alors l'application*

$$\begin{aligned} d : E \times\ E &\longrightarrow R \\ (x, y) &\longmapsto N(x - y) \end{aligned}$$

est appelée ***la distance associée*** *à* N.

Proposition 1.2 *Une distance sur* E *est une application* $d : E \times E \longrightarrow R_+$ *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. Séparation $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. Symétrie $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in E$.

Dans ce cas, on dit que E, muni de la distance d, est un espace métrique.

• Dans $\mathbb{R}$: on définit la distance entre deux éléments a et b de $\mathbb{R}$ par : $d(a, b) = |a - b|$. Par exemple, la distance entre 1 et -5 est $d(1, -5) = |1 - (-5)| = 6$.

• Dans $\mathbb{R}^n$: on suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme N. Si a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on définit la distance entre a et b par :$d(a, b) = N(a - b)$.

Le fait que d définit bien une distance découle directement des propriétés de la norme.

1.2 Notions sur les ouverts et les fermés

Supposons que nous nous soyons placés dans un espace vectoriel normé E, c'est à dire muni d'une norme N. En général, nous utiliserons la norme euclidienne (la norme $||.||_2$) et l'espace vectoriel sera souvent $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.1 Boule ouverte, fermée

Définition 1.4 *Soit* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *et* $r > 0$. *L'ensemble*

$$B(\omega, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \omega) < r\}$$

est appelé la boule ouverte de centre ω *et de rayon* r.

$$B(\omega, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \omega) \leq r\}$$

est appelé la boule fermée de centre ω *et de rayon* r.

$$B(\omega, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \omega) = r\}$$

est appelé la sphère de centre ω *et de rayon* r.

1.2.2 Voisinage d'un point

Définition 1.5 *Soient (X, T) un espace topologique, un voisinage V de $x \in X$ est un ensemble tel qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$. On note par $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

Proposition 1.3 *Les voisinages respectent alors les propriétés suivantes :*

1. *L'espace tout entier X est un voisinage de x.*
2. *L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x.*
3. *Tout voisinage de x contient x.*
4. *Toute partie de X qui contient un voisinage de x est elle-même un voisinage de x.*
5. *Si x est un réel quelconque et si $a < x$ et $x < b$ alors $]a, b[$, $[a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$ sont des voisinages de x.*
6. *$[a, b]$ n'est pas un voisinage de a ni de b.*

1.2.3 Espace séparé

Définition 1.6 *Soit (X, T) un espace topologique, on dit que X est un espace séparé ou espace de Hausdorff si pour deux points x,y distincts on peut trouver deux ouverts U,$V \in T$ tels que*

$$x \in U,\ \ y \in V \ \text{ et } U \cap V = \varnothing.$$

Exemple 1.1 *On revient à l'exemple de la topologie chaotique, X avec $T = \{\varnothing, X\}$, le seul ouvert qui contient un point de X est lui même, donc si X contient deux points, ces deux points ne peuvent pas être dans deux ouverts différents, alors si X contient plus qu'un point il n'est pas Hausdorff.*

1.2.4 Espace compact

Définition 1.7 *Un espace topologique (X, T) est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit,*

$$X \text{ compact} \Longleftrightarrow \left\{ X \text{ est un espace séparé } \forall (\theta_i)_{i \in I} \subset T / X = \bigcup_{i \in I} \theta_i \Longrightarrow \exists J \subset I,\ J \text{ fini } / \ X = \bigcup_{j \in J} \theta_j \right\}$$

1. Toute partie finie $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ d'un espace topologique séparé (X, T) est compacte, et particulier tout espace séparé fini est compact.
2. Les espaces topologiques $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas compacts puisqu'ils sont directs et infinis.

1.2.5 Partie compacte de $\mathbb{R}^n$

Corollaire 1.1 *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées. plus précisément, si $X \subset \mathbb{R}^n$ on a l'équivalence*

$$X \ \textit{compact} \Longleftrightarrow \begin{cases} X \ \textit{fermée} \\ \quad \textit{et} \\ X \ \textit{bornée.} \end{cases}$$

Exemple 1.2 *L'espace $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact.*

1.3 Quelques définitions topologiques

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|$, soient A, U, F et K des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

1. On appelle voisinage d'un point a de $\mathbb{R}^n$, tout ensemble $V(a)$ qui contient une boule ouverte, c'est-à-dire
$$\exists r > 0; \quad B(a, r) \subset V(A).$$
2. On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ si pour tout x de U il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
3. On dit que F est un **fermé** de $\mathbb{R}^n$ si $C^F_{\mathbb{R}^n}$ est ouvert.
4. On dit que U est **borné**, s'il existe une boule qui contient tous les éléments de U, c'est-à-dire
$$\exists M > 0, \quad \forall x \in U, \quad \|x\| < M.$$
5. On appelle **intérieur** de A, le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ inclus dans A, on le note $\overset{\circ}{A}$.
6. On appelle **adhérence** de A le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ qui contient A, on la note $\overline{A}$.
7. Un point x de $\mathbb{R}^n$ est un **point d'accumulation** à A si tout voisinage de x rencontre $A \backslash \{x\}$.
8. K est un **compact** de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si K est fermé et borné.

1.3.1 Sous-ensemble ouvert

Définition 1.8 *Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $x \in S$ il existe un voisinage $B(x, \epsilon)$ tel que $B(x, \epsilon) \subset S$.*

Proposition 1.4 *Un sous-ensemble d'un espace topologique est ouvert si et seulement s'il est un voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. Soient un ouvert U, et $x \in U$, or $x \in U \subset V$ donc U est un voisinage de x et à l'inverse, soit U voisinage de chacun de ses point, à chaque point x associons l'ouvert U_x tel que $x \in U_x \subset U$, la réunion des U_x est un ouvert contient tous les x de U et inclue dans U, donc U est un ouvert. ■

Exemple 1.3 $\mathbb{R}$ *est un voisinage de chacun de ses points .*

1.3.2 Suite de Cauchy

Définition 1.9 *Soient (X, d) un espace métrique, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, \ (n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Il est facile à voir que les suites de Cauchy le restent si on remplace d par une distance équivalente.

1.3.3 Valeur d'adhérence

Définition 1.10 *Soit* (X, d) *un espace topologique, si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *et* $x \in X$*, alors, par définition* x *est une valeur d'adhérence de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si elle admet une sous-suite qui converge vers* x*.*

Exemple 1.4 *Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle, soit* $x_n = (-1)^n$ *,* $n \in \mathbb{N}$*, alors* 1 *est une valeur d'adhérence de* (x_n)*, car* $x_{2n} \longrightarrow 1$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$*.*

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. Une suite de Cauchy converge si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.
3. Une suite de Cauchy est bornée. (la réciproque est fausse).

Preuve. 3. On fixe un $a \in X$, il existe un n_0 tel que $d(x_n, x_m) < 1$ si $n, m \geq n_0$, si $n \geq n_0$, on trouve :

$$d(a, x_n) \leq d(a, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \ \leq \ d(a, x_{n_0}) + 1.$$

finalement, $d(a, x_n) \leq r$, $\forall n$, où

$$r = \max \left\{ d(a, x_0), \ldots, d(a, x_{n0-1}), d(a, x_{n_0}) + 1 \right\}.$$

La réciproque est fausse, on a par exemple dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n), $x_n = (-1)^n$ est bornée, mais pas de Cauchy, en effet, $d(0, x_n) \leq 1$, $\forall n$, comme 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de (x_n), cette suite n'est pas de Cauchy. ■

1.3.4 Espace métrique complet

Définition 1.11 *Un espace métrique* (X, d) *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy* $(x_n) \subset X$ *est convergente.*

1. $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$ n'est pas complet, car il existe dans $\mathbb{Q}$ une suite de Cauchy non-convergente.
2. $\mathbb{R}$ est complet.

1.3.5 Propriétés

1. Toute union finie ou infinie d'ouverts est un ouvert.
2. Toute union finie de fermés est un fermé.
3. Toute intersection finie ou infinie de fermés est un fermé.
4. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
5. Un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$ est fermé.

1.4 Exercices sur le Chapitre 1

Exercice 1.1

Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in X : 1 < f(x) < 3\}$ est ouvert.
2. Montrer que l'ensemble $B = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.

Exercice 1.2

$(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B_0(a, r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(b, R) \Longleftrightarrow r \leq R$ et $\|a - b\| \leq R - r$.

Exercice 1.3

I. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et B sa boule unité fermée. Montrer que

1. B est symétrique.
2. B est convexe, fermée, bornée.
3. 0 est un point intérieur à B.

II. Réciproquement, montrer que si B possède les trois propriétés ci-dessus, il existe une norme dont B soit la boule unité fermée, en considérant $p(x) = inf\{a > 0; \frac{x}{a} \in B\}$.

Exercice 1.4

Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ tel que la dimension est finie, et A un sous-ensemble de X. Montrer que

$$A \text{ est compact} \Longleftrightarrow A \text{ est fermé, borné.}$$

Exercice 1.5

Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et A, B deux sous-ensembles non vides de X.

Montrer que si A est compact et B fermé, alors

$$A + B = \{a + b \ / \ a \in A, \ b \in B\} \text{ est fermé.}$$

Exercice 1.6

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Trouver un exemple dans $\mathbb{R}$ prouvant que si A et B sont seulement fermés, $A+B$ n'est pas fermé en général.

1.5 Corrigé des exercices sur le Chapitre 1

Solution de l'exercice 1.1

1. Comme la fonction f est continue et que l'intervalle $]1,3[$ est ouvert, alors $A = f^{-1}(]1,3[)$ est ouvert.

2. On a

$$\begin{aligned} B &= \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \\ &= \{x \in X : (f(x) - g(x)) \in]-\infty, 0] \\ &= (f-g)^{-1}(]-\infty, 0]). \end{aligned}$$

Or f et g sont continues dànc $f - g$ est continue. Comme $]-\infty,0]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, alors B est fermé dans X.

Solution de l'exercice 1.2

1. On note

$$B = B(a,r), \quad B_1 = B_1(a,r), \quad \overline{B} = \overline{B(a,r)}.$$

Il faut montrer que $B_1 = \overline{B}$. B_1 est une boule fermée, donc un fermé contenant B, alors $\overline{B}$ est le plus petit fermé contenant B, donc $\overline{B} \subset B_1$.

Étudions l'inclusion inverse : soit $x \in B_1$, il faut montrer que $x \in \overline{B}$. Si $x \in B$ alors $x \in \overline{B}$, supposons que $x \notin B$, alors $\|x-a\| = r$. Soit $B(x,\varepsilon)$ une boule centrée en x. x est adhérent à B si $B(x,\varepsilon) \cap B$ est non vide quelque soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit le point

$$y = x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}.$$

Faire un dessin et placer y sur ce dessin. D'une part y $\in B(x,\varepsilon)$ car $\|y-x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. D'autre part $y \in B = B(a,r)$ car :

$$\begin{aligned} \|y-a\| &= \left\| x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|} - a \right\| \\ &= \|x-a\| \, (1 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\|x-a\|}) \\ &= r - \frac{\varepsilon}{2} < r. \end{aligned}$$

Donc $y \in B \cap B(x,\varepsilon)$, ce qui montre que $B_1 \cap \overline{B}$. D'où $B_1 = \overline{B}$.

2. Pour montrer que :

$$\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R) \Longleftrightarrow r \leq R \text{ et } \|a-b\| \leq R-r.$$

a. On montre que

$$r \leq R \Longrightarrow \overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R)$$

Soit $x \in \overline{B}(a,r)$ alors

$$\|x-b\| = \|x-a+a-b\| \leq \|x-a\| + \|a-b\| \leq r + R - r \leq R.$$

Donc $x \in \overline{B}(b, R)$.
b. On montre que :

$$\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(b, R) \Longrightarrow r \leq R.$$

Soit

$$x = a - r\frac{a-b}{\|a-b\|},$$

alors $\|x - a\| = r$, donc $x \in \overline{B}(a, r)$ et $\|x - b\| \leq R$.
Or

$$\|x - b\| = \|a - b\| + r,$$

donc $\|a - b\| + r \leq R$ et comme $\|a - b\| \leq R - r$, d'où $r \leq R$.

Solution de l'exercice 1.3

I. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et B sa boule unité fermée.

1. Soit $x \in B$, $||-x|| = ||x|| \leq 1$ et $-x \in B$ ce qui montre que B est symétrique.
2. B est fermé car plus généralement toute boule fermée d'un espace métrique est fermée et B est borné par définition (un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est borné s'il est contenu dans une boule fermée). Enfin, B est convexe car, si $x, y \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$||(1-\lambda)x + \lambda y|| \leq (1-\lambda)||x|| + \lambda||y|| \leq 1 \text{ et } (1-\lambda)x + \lambda y \in B.$$

3. 0 est un point intérieur à B : par exemple $B(0, \frac{1}{2}) \subset B$ et B contient un voisinage de 0, car toute boule fermée de rayon > 0 est un voisinage de son centre.

II. Soit K vérifiant les propriétés (1), (2), (3). Il nous faut montrer que $p(x)$ est bien définie pour tout x, que p est une norme et que B est la boule unité fermée qui lui est associée.

Si $x = 0$, $\frac{x}{a} \in B$ pour tout $a > 0$ et $p(0) = 0$.

Si $x \neq 0$, alors l'ensemble $\{a > 0; \frac{x}{a} \in B\}$ est minoré, s'il est non vide il admettra une borne inférieure.

Or 0 est un point intérieur à B, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset B$ et pour a assez grand, $\frac{||x||}{a} \leq \varepsilon$, en particulier $\frac{x}{a} \in B$, et l'ensemble est non vide.

Vérifions les trois axiomes d'une norme.

• Par définition d'une borne inférieure,

$$p(x) = 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists 0 < a < \varepsilon \text{ tel que } \frac{x}{a} \in B.$$

B étant borné, on peut supposer que $B \subset \overline{B}(0, R)$, de sorte que $\left\|\frac{x}{a}\right\| \leq R$ ou $||x|| \leq \varepsilon R$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique $x = 0$.

• Soit $\lambda > 0$;

$$p(\lambda x) = \inf\{a > 0; \frac{\lambda x}{a} \in B\} = \inf\{\lambda b; \frac{x}{b} \in B\}$$

en posant $a = \lambda b$, et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Il suffit de montrer que $p(-x) = p(x)$ pour avoir la propriété d'homogénéité. Mais

$$p(-x) = \inf\{a > 0; -\frac{x}{a} \in B\} = \inf\{a > 0; \frac{x}{a} \in -B\} = p(x),$$

car B est symétrique.

• En utilisant la définition d'une borne inférieure, on va montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$$

ce qui donnera le résultat.

Donc, fixons $\varepsilon > 0$; on peut trouver $a > 0$ tel que

$$p(x) \leq a < p(x) + \varepsilon \text{ et } \frac{x}{a} \in B,$$

puis $b > 0$ tel que

$$p(y) \leq b < p(y) + \varepsilon \text{ et } \frac{y}{b} \in B.$$

Si $\frac{x+y}{a+b} \in B$, alors

$$p(x+y) \leq a + b,$$

par propriété de la borne inférieure et on aura prouvé.

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Mais

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b},$$

combinaison convexe de $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, et B est supposé convexe.

La preuve de l'inégalité triangulaire est ainsi achevée.

Il nous reste à établir

$$B = \{x; p(x) \leq 1\}.$$

Si $x \in B$ et $a = 1$, $\frac{x}{a} = x \in B$ ce qui implique $p(x) \leq 1$.

Réciproquement supposons $p(x) \leq 1$; on peut supposer $x \neq 0$.

Si $p(x) < 1$, il existe $p(x) \leq a < 1$ tel que $\frac{x}{a} \in B$, mais

$$x = a\frac{x}{a} + (1-a)0 \in B.\text{(car } B \text{ convexe).}$$

Si $p(x) = 1$, il existe (a_n) suite de nombres positifs tels que $\frac{x}{a_n} \in B$ pour tout n et tendant vers 1.

Mais B étant fermée, donc $x = \lim \frac{x}{a_n} \in B$.

Solution de l'exercice 1.4

(A est compact)$\Longrightarrow$ (A est fermé, borné).

Cette implication est toujours vraie dans un espace métrique, donc elle reste vraie dans un EVN.

Inversement : (A est fermé, borné)$\Longrightarrow$(A est compact).

On suppose que A est fermé et borné et on montre que A est compact. A est borné donc,

$$\exists\ B_f(x_0, r)\ /\ A \subset B_f(x_0, r).$$

$B_f(x_0, r)$ désigne la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

Comme X est un EVN de dimension finie, alors il est localement compact.

Il s'en suit que $B_f(x_0, r)$ est compact. Par conséquent, A est compact car c'est un fermé dans le compact $B_f(x_0, r)$.

Chapitre 2

Fonctions à plusieurs variables

2.1 Introduction

Considérons un rectangle $ABCD$, on appelle x la langueur de AB et y la largeur de BC.
On suppose que $x > 0$ et $y > 0$.
On appelle $P(x, y)$ le périmètre de $ABCD$ et $A(x, y)$ son aire, alors on a

$$P(x, y) = 2(x + y) \qquad \text{et} \qquad A(x, y) = x.y.$$

2.2 Généralités

2.2.1 Produit cartésien

Le produit cartésien de deux ensembles E et F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples dont le premier élément appartient à E et le deuxième appartient à F.

$$E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Cette définition se généralise si $E_1, E_2, ..., E_n$ désignent n ensembles.
On note $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ le produit cartésien est défini par :

$$E = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ tel que } x_i \in E_i,\ i = \overline{1, n}\right\}.$$

Exemple 2.1 *Pour un entier $n \geq 1$ on désigera par*

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n\ fois}.$$

Un élément $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tel que $x_i \in E_i$, $i = \overline{1, n}$.
x_i s'appelle la ième composante de x.

Définition 2.1 *Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$, $D \neq \varnothing$.*

On appelle fonction réelle de n variables définie sur D, l'application qui consiste à associer chaque $x \in D$ un réel unique.

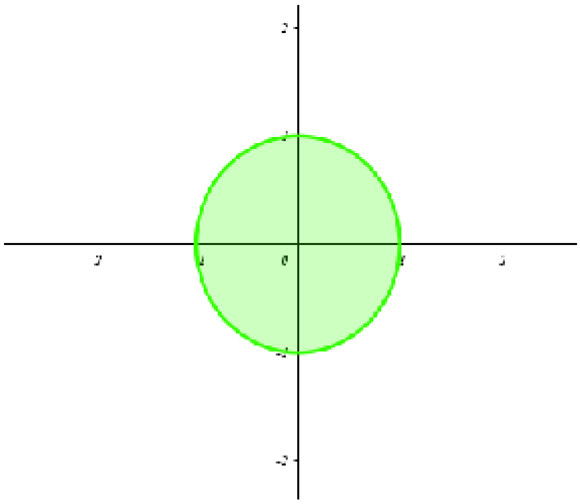
On note également

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) &\longmapsto z = f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

Exemple 2.2 *1.*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\right\} \end{aligned}$$

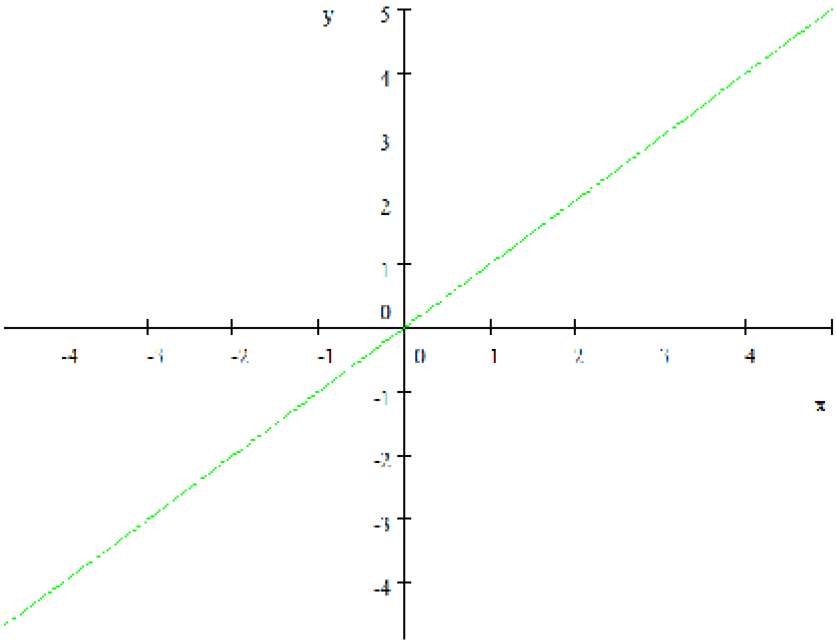


f est définie pour les valeurs x et y telles que $1 - x^2 - y^2 \geq 0$.
Dans un repère orthonormé D_f est le disque fermé de centre $(0,0)$ *et de rayon* 1.
2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\right\} \\ &= \mathbb{R}^2 - \{(\Delta)\}. \end{aligned}$$

Où (Δ) *est la première bissectrice ; elle a pour equation* $y = x$.

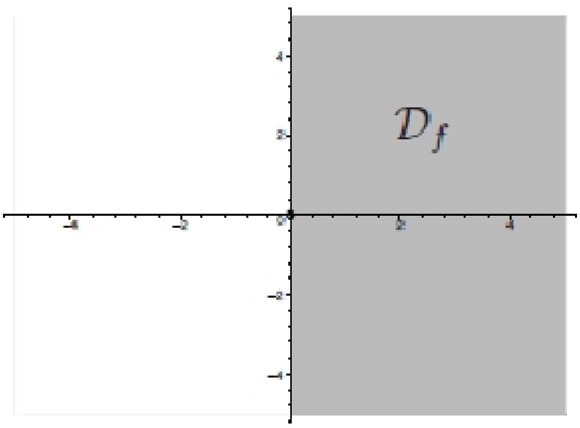


3.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{\sqrt{x}y}{x^2 + y^2}$$

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \ \ et \ (x, y) \neq (0, 0)\right\}$$

Le domaine de définition de f *est la partie grisée privée de l'origine.*



2.2.2 Fonctions bornées

On dit que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}\ \ (D \subset \mathbb{R}^n)$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in D\ f(x) \leq M$.
On dit que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}\ \ (D \subset \mathbb{R}^n)$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} /\ \forall x \in D\ f(x) \geq m$.
Une fonction majorée et minorée est dite bornée.

$$\exists M, m \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ m \leq f(x) \leq M.$$

qu'on peut exprimer par $\exists M > 0 /\ \forall x \in D, |f(x)| \leq M$.

Exemple 2.3 $f(x, y) = \sqrt{x} + \sin y$

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin y \leq 1 &\Longrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x} + \sin y \leq \sqrt{x} + 1, \quad x \geq 0 \\ &\Longrightarrow f(x, y) \geq -1,\ \ car - 1 \leq \sqrt{x} - 1,\ \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

Donc f *est minorée par* $-1,\ \forall x \in D_f$.

2.2.3 Opération sur les fonctions à n variables

Soient $f\ ,\ g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les opérations suivantes

1. $f = g$ si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
3. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
5. $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

On note par $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1 $\mathcal{F}((\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), +, .)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

2.2.4 Limite d'une fonction à plusieures variables

Définition 2.2 *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie dans un voisinage de* $x_0 \in D$.
On dit que f(x) tend vers l quand x tend vers x_0 *et on écrit* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

$$ssi\ (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n (\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

Exemple 2.4 *On veut montrer que*

1.

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,1)} (x + y) = 1.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,1)} (x+y) = 1 &\Longleftrightarrow \{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\|(x, y) - (0, 1)\| < \delta \Longrightarrow |(x + y) - 1| < \epsilon)\} \\ &\Longleftrightarrow \left\{(\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} < \delta \Longrightarrow |x + y - 1| < \epsilon)\right\} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |x + y - 1| &\leq |x| + |y - 1| \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &\leq \delta + \delta = \epsilon \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. D'où

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,1)} (x+y) = 1$$

Exemple 2.5 *2.*

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0;0)\}$$

Montrons que :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0,$$

qu'on traduit par

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0;0)\}, (\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y)-0|$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0;0)\}, (\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Longrightarrow \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} < \epsilon) \right\}.$$

On a

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \Longrightarrow -xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad (1)$$

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \Longrightarrow xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad (2)$$

Donc

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\delta = \epsilon.$$

Il suffit de prendre $\delta = 2\epsilon$.
Ainsi

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Définition 2.3 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
si

$$\{\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, (\|x-a\| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < A)\}.$$

De même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
si

$$\{\forall B > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, (\|x-a\| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < -B)\}.$$

On dit que f tend vers l lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
si

$$\{\forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, (\|x\| > B \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon)\}.$$

On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
si

$$\{\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, (\|x\| > B \Longrightarrow |f(x)| < A)\}.$$

0n dit que f tend vers $-\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\{\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, (\|x\| > B \Longrightarrow |f(x)| < -A)\}.$$

Remarque 2.1

Si $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ *existe alors* $\lim_{x\longrightarrow x_0}(\lim_{y\longrightarrow y_0} f(x,y)) = \lim_{y\longrightarrow y_0}(\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x,y))$.

Contraposée

Si $\lim_{x\longrightarrow x_0}(\lim_{y\longrightarrow y_0} f(x,y)) \neq \lim_{y\longrightarrow y_0}(\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x,y))$ alors $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Lorsqu'on écrit que $x \in \mathbb{R}^n$ s'approche de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ au sens de la norme donnée, le chemin par lequel x s'approche de x_0 n'est pas pris en compte. Donc lorsque f admet une limite l en x_0, $f(x)$ s'approche de l quelque soit la façon dont x s'approche de x_0.

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ un point (x,y) s'approche du point $(0,0)$ d'une infinité de façons.

On peut utiliser cette remarque pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point donné.

Exemple 2.6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^2$. *Étudions la limite de* f *en* $(0,0)$.
On a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{y=0,x\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x=0,y\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x\longrightarrow 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) \quad \textit{n'existe pas.}$$

2.2.5 Continuité d'une fonction à plusieurs variables

Définition 2.4 *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D_f$.
0n dit que f *est continue en* a *si*

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$$

c.a.d

$$\{\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, (\|x-a\| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)\}.$$

f est continue sur D_f si elle est continue en tout point de D_f.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}^2$. Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$

f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, car c'est la composée de fonctions continues.

Pour $(x,y)=(0,0)$, $f(0,0)=0$.

$$f \text{ est continue en } (0,0) \iff \left(\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = f(0,0)=0\right).$$

On veut calculer

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} xy\ln(x^2+y^2).$$

On fait un changement de variables, on utilise les coordonnées polaires en $(0,0)$.

On pose

$$x=r\cos\theta \quad\text{et}\quad y=r\sin\theta,\qquad r\in\mathbb{R}_+ \quad\text{et}\quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$(x,y)\longrightarrow(0,0)\iff r\longrightarrow 0.$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\longrightarrow 0} r^2\cos\theta\sin\theta\ln(r^2)=0= f(0,0).$$

Donc f est continue en $(0,0)$, D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}^2$. Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.7 *Pour* $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, car c'est la composée de fonctions continues.

Pour $(x,y)=(0,0)$, $f(0,0)=0$.

$$f \textit{ est continue en } (0,0) \iff \left(\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = f(0,0)=0\right).$$

Calculon alors

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

On fait un changement de variables, on utilise les coordonnées polaires en $(0,0)$.

On pose

$$x=r\cos\theta \quad\textit{et}\quad y=r\sin\theta,\qquad r\in\mathbb{R}_+ \quad\textit{et}\quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$$

Or $\cos\theta\sin\theta\neq 0$ *si* $\theta\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) \quad \textit{n'existe pas.}$$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$, par conséquent f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.2 *Soient* f , g $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si f et g sont continues au point a, alors $f+g$ est continue en a.
2. Si f et g sont continues au point a, alors $f.g$ est continue en a.
3. Si f et g sont continues au point a, et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
4. Si f est continue au point a, alors $\lambda.f$ est continue en a.
5. Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $f(a)$ et f continue en a, alors $h \circ f$ est continue en a.

2.3 Dérivées partielles

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, ...a_n)$.
Pour chaque $k = \overline{1, n}$ on pose

$$\begin{array}{rcl} f_k & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_k(t) = f(a_1, a_2, a_3, ..., t, a_k, a_{k+1}, ...a_n) \end{array}$$

Pour $n = 2$,si

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ alors } \; f_1(t) = f(t, a_2), \quad f_2(t) = f(a_1, t).$$

Définition 2.5 *Si* f *une fonction à* n *variables* $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$.
La dérivée de f_k *au point* a_k *est* $f'_k(a_k)$ *et on note :* $f'_k(a_k)$, $Df(a_k)$ *ou encore* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_k(a_k) = \lim_{x_k \longrightarrow a_k} \frac{f_k(x_k) - f_k(a_k)}{x_k - a_k}.$$

Exemple 2.8 Cas où $n = 2$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) & = & \lim\limits_{x \longrightarrow a_1} \dfrac{f(x, a_2) - f(a_1, a_2)}{x - a_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) & = & \lim\limits_{y \longrightarrow a_2} \dfrac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y - a_2}. \end{array}$$

Exemple 2.9

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. $D_f = \mathbb{R}^2$
2. f n'est pas continue en $(0,0)$
3. Les dérivées partielles

Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Pour $(x,y) = (0,0)$,

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \begin{cases} \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$, mais elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

En fait, il n'y a aucun relation entre la continuité d'une fonction à plusieurs variables et l'existence de ses dérivées partielles.

Donc l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité de la fonction, contrairement à ce qui se passe pour une fonction d'une seule variable.

2.3.1 Propriétés des dérivées partielles

1. Linéarité

   Si f et g deux fonctions à plusieurs variables partiellement dérivables par rapport à chaque variable x_i, $i = \overline{1,n}$. et α, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $(\alpha f + \beta g)$ est partiellement dérivable par rapport à x_i et on a

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

2. Produit
   Si f et g deux fonctions à plusieurs variables partiellement dérivables par rapport à chaque variable x_i, $i = \overline{1,n}$, alors $(f.g)$ est partiellement dérivable par rapport à x_i et on a
$$\frac{\partial(f.g)}{\partial x_i} = g\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Définition 2.6 *Une fonction à plusieurs variables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 sur $V \subset D_f$ lorsque f est partiellement dérivable par rapport à chacune de ses variables en tout $x \in V$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i=1,n}$ est continue.*

$$f \in C^1 \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ existent et continues.}$$

2.3.2 Dérivée d'une fonction composée

Nous allons étudier une fonction $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui se décompose comme suit :

$$\begin{array}{rcl} F & = & f \circ G \text{ avec} \\ F & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (g_1(t), ..., g_n(t)) \longmapsto f(g_1(t), ..., g_n(t)) = F(t). \end{array}$$

Théorème 2.1 *Avec les notations ci-dessus, si f est une fonction de classe C^1 sur un domaine ouvert U, et si G est une fonction dérivable sur un intervalle I, avec, $\forall t \in I$, $G(t) \in U$; alors $F = f \circ G$ est une fonction dérivable sur I, et on a*

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(G(t)).$$

Cas où $n = 2$

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (g_1(t), g_2(t)) \longmapsto f(g_1(t), g_2(t)) = F(t) \end{array}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^{2} g_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}G(t) \\ &= g_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}(g_1(t), g_2(t)) + g_2'(t)\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_1(t), g_2(t)). \end{aligned}$$

2.3.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 2.7 *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\{i_1, ..., i_k\} \in \{1, ..., n\}$.*

On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre k au point $a \in \mathbb{R}^n$ par rapport aux variables $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a),\ \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a)\right), ..., \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_{k-1}}} .... \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)...\right)(a) \text{ existent.}$$

On note cette dérivée

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}$$

Cas où $n = 2$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y).
\end{aligned}$$

Exemple 2.10 $f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$

Ensemble de dérivabilité : $2xy + y^2 = y(2x + y)$ doit être strictement positif, donc deux des quatre zones délimitées par les deux droites $y = 0$ et $y = -2x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{2xy + y^2}}. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-y^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-x^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{xy}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{xy}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Définition 2.8 *On dit que la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n existent et continues. Une fonction est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 2.2 *(Schwartz)*
Soit f une fonction à n variables.
On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset D_f$.
Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont définies et continues sur U, alors

$$\forall\ X_0 \in U : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\ (X_0).$$

2.4 Exercices sur le Chapitre 2

Exercice 2.1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes (représenter graphiquement sur un repère).

1. $f(x,y)=\ln(2x+y-2)$, 2. $f(x,y)=\sqrt{1-xy}$, 3. $f(x,y)=\dfrac{\ln(y-x)}{x}$,
4. $f(x,y)=\ln((9-x^2-y^2)(x^2+y^2-4))$, 5. $f(x,y,z)=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$
6. $f(x,y)=\ln(x-y^2)$.

Exercice 2.2

Soit $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ la fonction définie par $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

1. Montrer que

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y)=\lim_{y\longrightarrow 0}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) \text{ et que } \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) \text{ n'existe pas.}$$

2. Même question pour

$$f(x,y)=\frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}.$$

Exercice 2.3

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites pour $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ des fonctions

$$\begin{array}{llll}
1.\ f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, & 2.\ f(x,y)=\dfrac{1+x^2+y^2}{y}(\sin y), \\
3.\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & 4.\ f(x,y)=\dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}, \\
5.\ f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & 6.\ f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, \\
7.\ f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & 8. f(x,y)=\dfrac{x-x\cos y+y^2\sin x}{x^2+y^2}.
\end{array}$$

Exercice 2.4

Etudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 2. $f(x,y)=\begin{cases} f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0), \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y-xy^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Exercice 2.5
Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si} \quad x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 \quad \text{si} & x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$$

1. Donner D_f le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur D_f .

Exercice 2.6
Soit f la fonction définie par : $f(x,y) = \frac{x^\alpha}{x^2+y^4}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Calculer

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) \text{ si elle existe, discuter suivant les valeurs du paramètre } \alpha.$$

3. Discuter selon les valeurs de α le prolongement par continuité de f.

Exercice 2.7
Calculer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ des fonctions suivantes

$$1.\ f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}, \quad 2.\ f(x,y) = \ln(\frac{y}{x}), \qquad 3. f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2y^2}},$$

$$4.\ f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-y^2}\right),\ 5.\ f(x,y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2},\ \ 6.\ f(x,y) = arc\sin(\frac{x}{y}),$$

$$7. f(x,y) = x^y, \quad 8.\ \ f(x,y) = e^{\sqrt{x^2-y^2}}, \qquad 9.\ f(x,y) = \tan(\frac{y}{x}),$$

$$10.\ f(x,y) = \sin^2(\frac{x}{y}), \quad 11. f(x,y) = x^{xy^2}, \qquad 12.\ \ f(x,y) = ch(\frac{xy+1}{xy-1}).$$

Exercice 2.8
Calculer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ainsi que les dérivées partielles du second ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ des fonctions suivantes

$$1.\ f(x,y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}, \quad 2. f(x,y) = \frac{1}{e^x+e^y}, \quad 3.\ f(x,y) = \ln\left(x^2+y\right).$$

Exercice 2.9
Posons

$$f(x,y) = xy\sin(\frac{1}{y}) \quad \text{si } y \neq 0 \ \text{ et } \ f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Etablir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$ et en $(0,0)$.
3. Etudier la continuité des fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

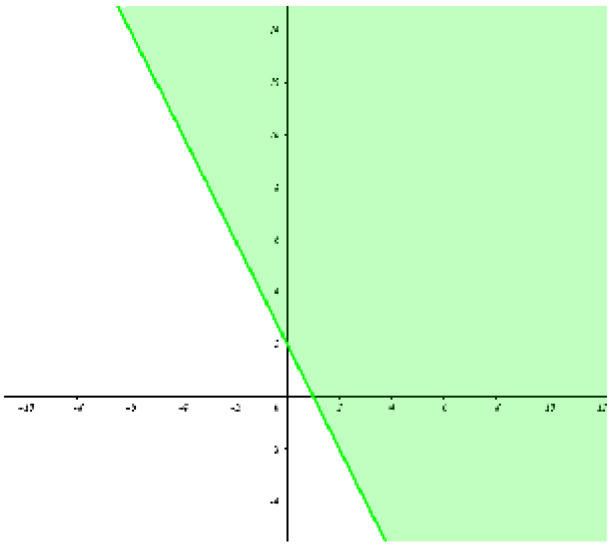
2.5 Corrigé des exercices sur le Chapitre 2

Solution de l'exercice 2.1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes (représenter graphiquement sur un repère).

1. $f(x, y) = \ln(2x + y - 2)$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/2x + y - 2 > 0\}$. On trouve donc le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation $2x + y - 2 = 0$.

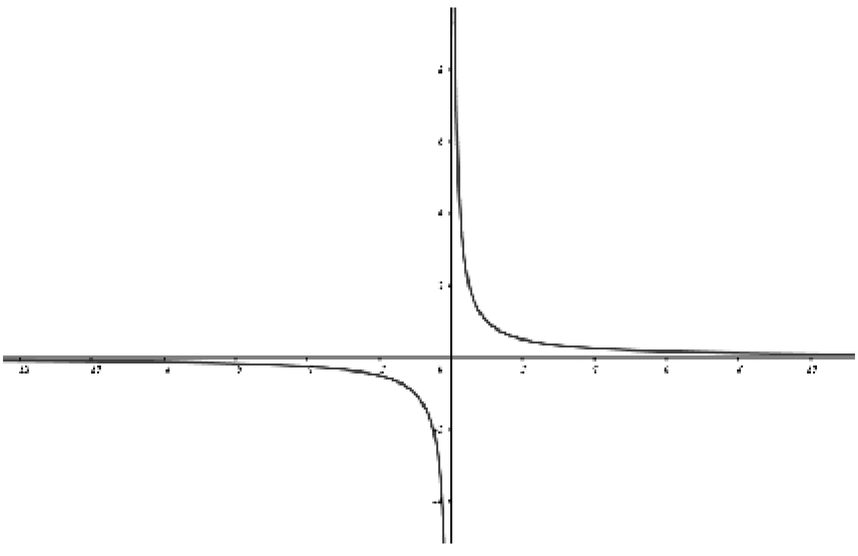


2. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$

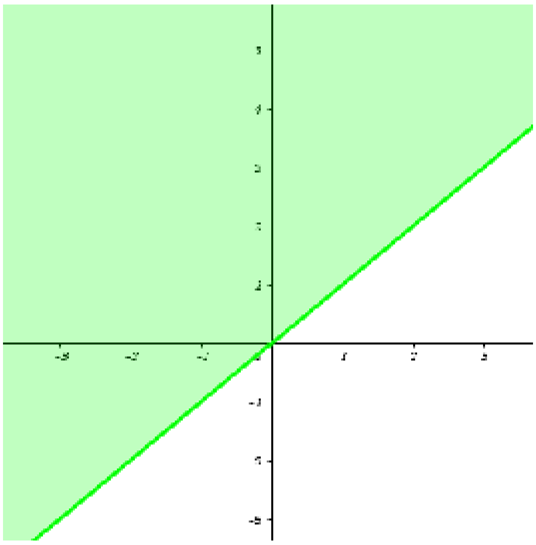
$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/1 - xy \geq 0\}$.

$$1 - xy \geq 0 \Longleftrightarrow y \leq \frac{1}{x}, \quad \text{si} \quad x > 0$$
$$1 - xy \geq 0 \Longleftrightarrow y \geq \frac{1}{x}, \quad \text{si} \quad x < 0.$$

C'est donc la réunion de la partie située sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$, de la partie située au-dessus de l'hyperbole pour $x < 0$, et de l'axe des ordonnées.



3. $f(x,y) = \frac{\ln(y-x)}{x}$
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } y - x > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } y > x\}.$
C'est donc le demi-plan, auquel on a retiré une (portion de) droite.

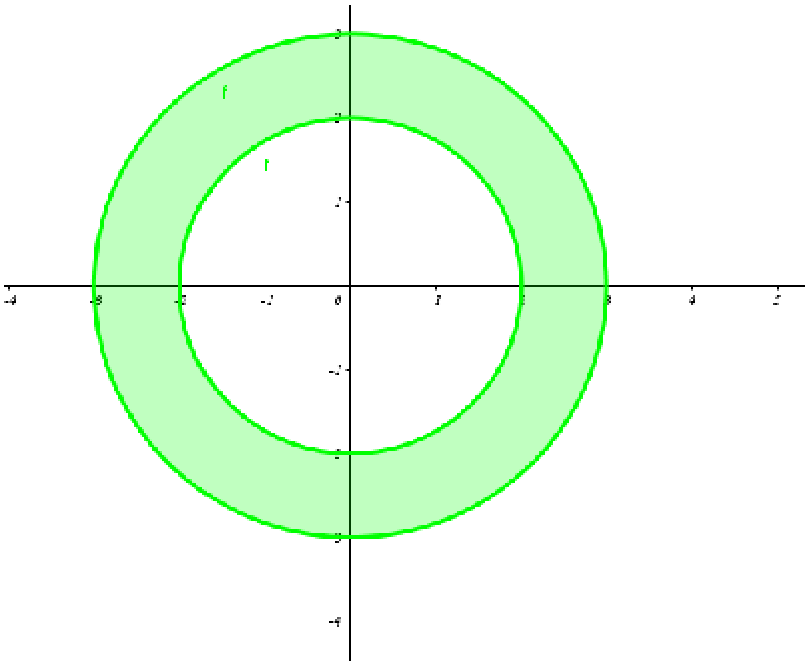


4. $f(x,y) = \ln((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4))$

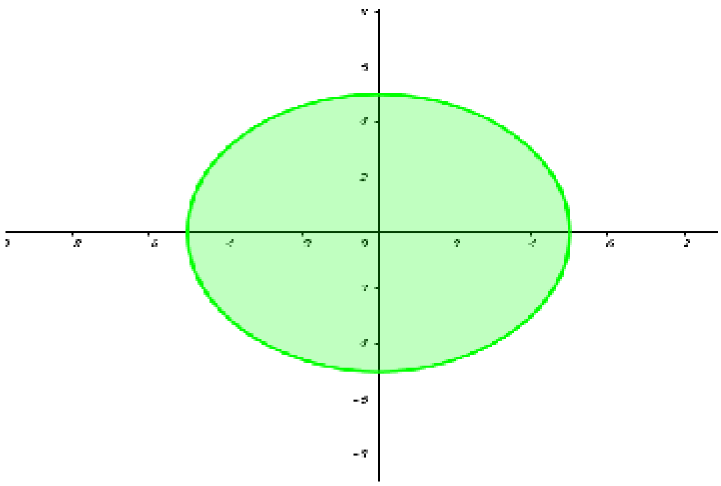
$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0\right\}$$

$$(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (9 - x^2 - y^2) > 0 \text{ et } (x^2 + y^2 - 4) > 0 \\ (9 - x^2 - y^2) < 0 \text{ et } (x^2 + y^2 - 4) < 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \text{ et } x^2 + y^2 > 4 \\ x^2 + y^2 > 9 \text{ et } x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

$D_f = D_1 \cap D_2^c$
D_1 :Disque de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 3$.
D_2 :Disque de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 2$.
D_2^c désigne le complémentaire de D_2.
Donc
$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 9 \text{ et } x^2 + y^2 > 4\right\}.$$



5. $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$
$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/25-x^2-y^2-z^2\geq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2+z^2\leq 25\}$
On a $(B): x^2+y^2+z^2=25$, c'est la boule fermée de centre $(0,0,0)$ et de rayon $r=5$.
Donc D_f est la boule fermée de centre $(0,0,0)$ et de rayon $r=5$.

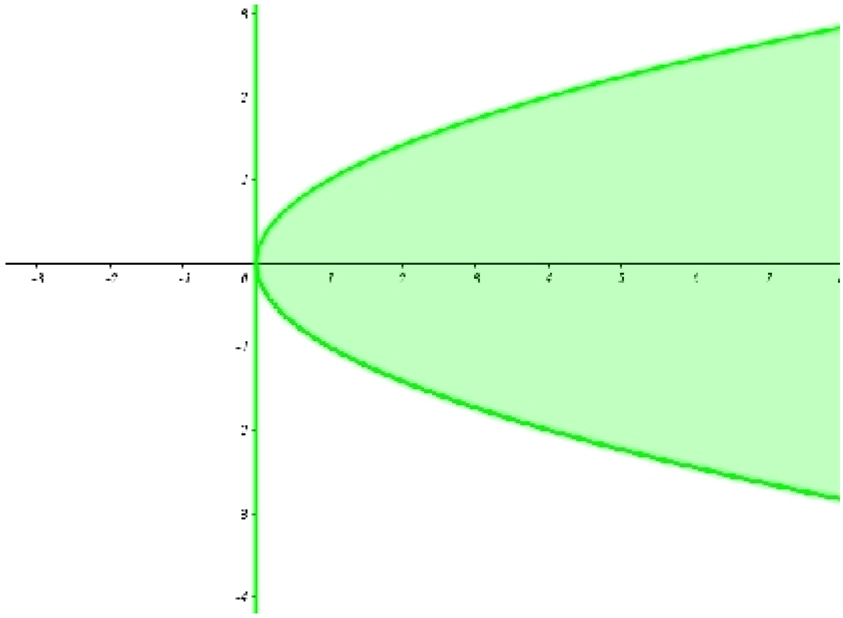


6. $f(x,y)=\ln(x-y^2)$.
Le domaine de définition de la fonction

$$f(x,y)=\ln(x-y^2)$$

est

$$\begin{aligned} D_f &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\quad x-y^2>0\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ \ y^2<x\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\quad |\,y|<x \ \text{ et } x>0\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ -\sqrt{x}<y<\sqrt{x} \text{ et } x>0\big\}. \end{aligned}$$



Solution de l'exercice 2.2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.
1.

$$\text{On veut montrer que } \lim_{x \longrightarrow 0} \lim_{y \longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \longrightarrow 0} \lim_{x \longrightarrow 0} f(x,y) \text{ et que } \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ n'existe pas.}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \lim_{y \longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \longrightarrow 0} \lim_{x \longrightarrow 0} f(x,y) \tag{2.1}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \lim_{y \longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \longrightarrow 0} \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$
$$\lim_{y \longrightarrow 0} \lim_{x \longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \longrightarrow 0} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Il est clair, qu'en passant à la limite pour x tendant vers 0 dans la première et y tendant vers 0 dans la deuxième, on obtient l'égalité (2.1).

D'autre part, si on prend le chemin $y = x$, on trouve

$$f(x,x) = \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

d'où

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

et donc

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ n'existe pas.}$$

2. $f(x,y) = \frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}$.

On veut montrer que

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y\longrightarrow 0}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) \text{ et que } \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) \text{ n'existe pas.}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y\longrightarrow 0}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y), \tag{2.2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} \frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}.$$

Si $(x,y)\neq(0,0)$

$$\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = f(x,0) = \frac{\sin x^3}{x^2} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \text{ au voisinage de } x=0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} \frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4} = \lim_{x\longrightarrow 0} x = 0.$$

Par analogie, on a

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) = f(0,y) = \frac{\sin y^5}{y^4} \sim \frac{y^5}{y^4} = y \text{ au voisinage de } y=0, \text{ ainsi}$$

$$\lim_{y\longrightarrow 0}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} \frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4} = \lim_{y\longrightarrow 0} y = 0.$$

Considérons la restriction de $f(x,y)$ sur la courbe $x=y^2$. Alors

$$f(y^2,y) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(y^6+y^5)}{2y^4},$$

et

$$\lim_{y\longrightarrow 0}\left(\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\longrightarrow 0} f(y^2,y) = \lim_{y\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(y^6+y^5)}{2y^4}\right) = \frac{1}{2},$$

car

$$\lim_{y\longrightarrow 0}\frac{\sin(y^6+y^5)}{2y^4} = 0.$$

Donc on conclut que f n'admet pas de limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$ et pourtant

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y\longrightarrow 0}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y).$$

Solution de l'exercice 2.3

Etudions l'existence et la valeur éventuelle des limites pour $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ des fonctions

1. $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}$

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \text{ la restriction de } f(x,y).$$

$$\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = f(x,0) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x,0) = +\infty \text{ de même la restriction de } f(x,y)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) = f(0,y) = \frac{-1}{y} \Longrightarrow \lim_{y\longrightarrow 0^+} f(0,y) = -\infty.$$

Par conséquent, la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$ n'existe pas.
2. $f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} (1+x^2+y^2\frac{\sin y}{y}) = 1,$$

car $\lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ et $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} (1+x^2+y^2) = 1.$

3. $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ la restriction de } f(x,y).$$

On a

$$\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = f(x,0) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0} f(x,0) = 1 \text{ de même la restriction de } f(x,y)$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) = f(0,y) = 0 \Longrightarrow \lim_{y\longrightarrow 0} f(0,y) = 0.$$

Comme

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) \neq \lim_{y\longrightarrow 0}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y)$$

par conséquent, la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$ n'existe pas.
4. $f(x,y) = \frac{1+x+y}{x^2-y^2}$

$$f(x,y) = \frac{1+x+y}{x^2-y^2} \text{ si } x^2 \neq y^2 \text{ la restriction de } f(x,y).$$

On a

$$\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = f(x,0) = \frac{1+x}{x^2} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x,0) = +\infty \text{ de même la restriction de } f(x,y)$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) = f(0,y) = \frac{1+y}{-y^2} \Longrightarrow \lim_{y\longrightarrow 0^+} f(0,y) = -\infty.$$

Par conséquent, la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$ n'existe pas.
5. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

On utilise les coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta, \quad r\in\mathbb{R}_+ \text{ et } \theta\in[0,2\pi]$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.\end{aligned}$$

Par conséquent, la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$ n'existe pas, car elle dépend de θ.
6. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{xy}{x^2+xy+y^2}.$$

On utilise les coordonnées polaires

$$x=r\cos\theta \quad \text{et} \quad y=r\sin\theta, \qquad r\in\mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+r^2\cos\theta\sin\theta}\\ &= \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}.\end{aligned}$$

Par conséquent, la limite de $f(x,y)$ au point $(0,0)$ n'existe pas, car elle dépend de θ.
7. $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

On utilise les coordonnées polaires

$$x=r\cos\theta \quad \text{et} \quad y=r\sin\theta, \qquad r\in\mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\lim_{r\longrightarrow 0} r(\cos^3\theta+r^3\sin\theta)=0.$$

8.$f(x,y)=\frac{x-x\cos y+y^2\sin x}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x-x\cos y+y^2\sin x}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x(1-\cos y)+y^2\sin x}{x^2+y^2},$$

au voisinage de 0, $1-\cos y\sim\frac{y^2}{2}$, et $\sin x\sim x$,
donc

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x(\frac{y^2}{2})+y^2x}{x^2+y^2}.$$

On utilise les coordonnées polaires :

$$x=r\cos\theta \quad \text{et} \quad y=r\sin\theta, \qquad r\in\mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r^3\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{2}+r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{1}{2}\frac{r^3\cos\theta\sin\theta+2r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}\\ &= \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{1}{2}r(\cos\theta\sin\theta+2\cos\theta\sin^2\theta)=0.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2.4

Etudions la continuité des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Les fonctions polynomiales $(x,y) \longmapsto (x+y)^2$ et $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $\frac{1}{x^2+y^2}$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Leur produit est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

La fonction est continue en point (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Etudions la continuité de $f(x,y)$ au point $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2},$$

on prend le chemin $y = x$, on trouve

$$f(x,x) = \frac{(2x)^2}{2x^2} = 2.$$

D'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2} = 2,$$

et donc

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 2 \neq f(0,0) = 0,$$

ce qui implique que f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Les fonctions polynômiales $(x,y) \longmapsto x^3+y^3$ et $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $\frac{1}{x^2+y^2}$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Leur produit est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Etudions la continuité de $f(x,y)$ au point $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

On utilise les coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta, \qquad r \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\longrightarrow 0} r(\cos^3\theta + r^3\sin\theta) = 0 = f(0,0).$$

Donc f est continue au point $(0,0)$. D'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y-xy^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Le domaine de définition $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est la composée de fonctions continues.

Etudions la continuité de f au point $(0,0)$.
On montre par la définition que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, (\|(x,y)-(0,0)\| < \eta \Longrightarrow |f(x,y)| < \varepsilon\right.$$

Notons que $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin t| \leq |t|$ ce qui implique

$$\left|\sin(x^3y - xy^3)\right| \leq \left|x^3y - xy^3\right| = |xy|\left|x^2 - y^2\right|.$$

Donc

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |xy| \frac{|x^2-y^2|}{|x^2+y^2|} \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\|(x,y)-(0,0)\|^2 = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 < \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 < \varepsilon \Longrightarrow \|(x,y)\| < \sqrt{2\varepsilon}.$$

Il suffit alors de choisir $\eta = \sqrt{2\varepsilon}$.

On conclut que la fonction $f(x,y)$ est continue au point $(0,0)$. D'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 2.5

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si} \quad x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si} \quad x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$$

1. Le domaine de définition D_f de la fonction f est

$$D_f = D_1 \cup D_2,$$

où

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 > 1\right\} \text{ et } D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

D_1 est l'extérieur du disque de centre $O(0,0)$ et de rayon 1 sans sa frontière et D_2 est l'intérieur du disque de centre $O(0,0)$ et de rayon 1 avec sa frontière (disque fermé), leur réunion est évidemment $\mathbb{R}^2$ et donc $D_f = \mathbb{R}^2$.

2. Montrons que f est continue sur $D_f = \mathbb{R}^2$.

Il est évident que la fonction f est continue sur D_1 et D_2 puisque sur ces deux domaines f est une fonction polynômiale.

Il reste à montrer la continuité sur la frontière. Soit alors (a,b) tel que $a^2+b^2=1$. On a $a^2 = 1-b^2$, donc

$$\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,b)\\ a^2+b^2>1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,b)\\ a^2+b^2>1}} \left(\frac{1}{2}x^2+y^2-1\right) = \frac{1}{2}a^2+b^2-1 = \frac{1}{2}a^2 - a^2 = -\frac{1}{2}a^2$$

et

$$\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,b)\\ a^2+b^2<1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,b)\\ a^2+b^2<1}} (\frac{1}{2}a^2+b^2-1\ ) = \lim_{x\longrightarrow a}(-\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}a^2.$$

Comme $\quad f(a,b) = -\dfrac{1}{2}a^2,$ alors

$$\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,b)\\ a^2+b^2<1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,b)\\ a^2+b^2>1}} f(x,y) = f(a,b) = -\frac{1}{2}a^2,$$

f est continue pour tout (a,b) tel que $a^2+b^2=1$.
Donc f est continue sur $D_f=\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 2.6

Soit f la fonction définie par : $f(x,y)=\frac{x^\alpha}{x^2+y^4}$, $\alpha\in\mathbb{N}^*$.
1. Le domaine de définition D_f de la fonction f est

$$D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^4\neq 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x,y)\neq(0,0)\right\} = \mathbb{R}^2\backslash\left\{(0,0)\right\}.$$

2. Calculons $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ si elle existe, on discute suivant les valeurs du paramètre α.

i. Si $\alpha=1$,

$$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^4} \quad \text{et} \quad f(x,0)=\frac{1}{x}, \text{ donc } \lim_{x\longrightarrow 0} f(x,0)=+\infty\ .$$

D'où f n'est pas continue car elle n'est pas bornée au voisinage de $(0,0)$.
ii. Si $\alpha=2$,

$$f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^4} \quad \text{et} \quad f(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1, \text{ donc } \lim_{x\longrightarrow 0} f(x,0)=1.$$

$$\text{Or} \quad f(y^2,y)=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}, \quad \text{donc } \lim_{x\longrightarrow 0} f(y^2,y)=\frac{1}{2}.$$

Alors f possède deux limites différentes selon deux chemins différents, ce qui contredit l'unicité de la limite.
Donc elle n'a pas de limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
iii. Si $\alpha\geq 3$, alors $\forall(x,y)\neq(0,0)$,

$$0\leq|f(x,y)|\leq\frac{|x^\alpha|}{x^2}=\left|x^{\alpha-2}\right| \text{ or } \lim_{x\longrightarrow 0} x^{\alpha-2}=0, \text{ donc } \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=0.$$

3. On discute selon les valeurs de α le prolongement par continuité de f.
D'après ce qui précède f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\left\{(0,0)\right\}$ puisqu'elle est quotient de deux fonctions polynômiales continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\left\{(0,0)\right\}$.
i. Si $\alpha=2$ ou $\alpha=1$, f n'est pas continue en $(0,0)$.
ii. Si $\alpha\geq 3$, f admet un prolongement par continuité la fonction g définie par

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \quad 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Solution de l'exercice 2.7
Calculons les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ des fonctions suivantes :
1. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$.

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x-y\neq 0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq y\right\}=\mathbb{R}^2-\{(\Delta)\}/(\Delta):y=x$$

Donc,

$$\forall x\in D_f,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-2y}{(x-y)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x}{(x-y)^2}.$$

2. $f(x,y)=\ln(\frac{y}{x})$

$$\forall\ x>0,\ y>0,\quad \ln\frac{y}{x}=\ln y-\ \ln x$$

Donc,

$$\forall\ x>0,\ y>0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-1}{x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y}.$$

3.$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2y^2}}$.

On s'assure de la dérivabilité de $f(x,y)$ en imposant $x>0$ et $y>0$, et le problème devient excessivement simple, car on a

$$f(x,y)=\frac{x}{|x|\,|y|}=\frac{1}{y}.$$

Donc,

$$\forall\ x>0,\ y>0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-1}{y^2}.$$

4. $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)$.

$$\begin{aligned}D_f&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x+\sqrt{x^2-y^2}>0\ \text{ et }\ x^2-y^2\geq 0\right\}\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0\ \text{ et }\ |x|\geq|y|\right\}.\end{aligned}$$

Donc, $\forall(x,y)/x>0$ et $-x<y<x$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}.$$

5. $f(x,y)=\frac{x^2}{y}-\frac{y}{x^2}$.

$$\forall(x,y)\neq(0,0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x^3},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x^2}{y^2}-\frac{1}{x^2}.$$

6. $f(x,y) = arc\sin(\frac{x}{y})$.

$$\forall (x,y) : y \neq 0 \ \text{ et } \ -1 < \frac{x}{y} < 1.$$

Donc, $\quad \forall (x,y), \quad y > |x|$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x\frac{1}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

7. $f(x,y) = x^y$

$$\forall \ x > 0, \quad f(x,y) = e^{y \ln x},$$

donc $\ \forall \ x > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}e^{y\ln x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)e^{y\ln x} = \ln(x).x^y.$$

8. $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2-y^2}}$

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \ x^2 - y^2 \geq 0\right\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall (x,y)/x \ &> \ 0 \ et - x < y < x, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ &= \ \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}e^{\sqrt{x^2-y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}e^{\sqrt{x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

9. $f(x,y) = \tan(\frac{y}{x})$.

$$\forall (x,y)/x \neq 0 \ \text{ et } \ \cos\frac{y}{x} \neq 0.$$
$$\forall (x,y), \ x \neq 0 \ \text{ et } \ \frac{y}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Donc,

$$\forall (x,y), \ x > 0 \ \text{ et } \ -\frac{\pi}{2}x < y < \frac{\pi}{2}x.$$

Le secteur angulaire limité par les deux demi-droites $y = \frac{\pi}{2}x$ et $y = -\frac{\pi}{2}x$ dans le demi-plan $x > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2}(1+\tan^2(\frac{y}{x})) = \frac{-y}{x^2\cos^2(\frac{y}{x})}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}(1+\tan^2(\frac{y}{x})) = \frac{1}{x\cos^2(\frac{y}{x})}.$$

10. $f(x,y) = \sin^2(\frac{y}{x})$. On a

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \ x \neq 0\right\}$$

donc on prendra comme domaine de régularité l'un des deux demi-plans limités par l'axe des ordonnées.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2}\sin(\frac{2y}{x}), \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\sin(\frac{2y}{x}).$$

11.$f(x,y) = x^{xy^2}$.

x doit être positif donc un domaine de régularité qui est le demi-plan $x > 0$, (à droite) de l'axe des ordonnées.

On écrit,

$$f(x,y) = x^{xy^2} = e^{xy^2 \ln x},$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^2(\ln x + 1)e^{xy^2 \ln x} = y^2(\ln x + 1)x^{xy^2} \ , \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy \ln x e^{xy^2 \ln x} = 2xy \ln(x x^{xy^2}).
\end{aligned}$$

12. $f(x,y) = ch(\frac{xy+1}{xy-1})$.

Il suffit de choisir un domaine dans lequel $xy \neq 1$ comme domaine de régularité, par exemple l'ensemble des couples (x,y) tels que $x > 1$ et $y > 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2y}{(xy-1)^2} sh(\frac{xy+1}{xy-1}) \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(xy-1)^2} sh(\frac{xy+1}{xy-1}).$$

Solution de l'exercice 2.8

Calculons les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ainsi que les dérivées partielles du second ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

Ensemble de dérivabilité : Il suffit que xy soit différent de 1, donc on enlève l'hyperbole $y = \frac{1}{x}\cdot$ On trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \ , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

2.$f(x,y) = \frac{1}{e^x + e^y}$

L'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}^2$. On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-e^x}{(e^x+e^y)^2} \ , & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^y}{(e^x+e^y)^2}. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{e^{2x} - e^{x+y}}{(e^x+e^y)^3} \ , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{e^{2y} - e^{x+y}}{(e^x+e^y)^3}. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2e^{x+y}}{(e^x+e^y)^3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{2e^{x+y}}{(e^x+e^y)^3}.
\end{aligned}$$

3. $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$

Ensemble de dérivabilité : x^2+y doit être strictement positif, ce qui correspond à $y > -x^2$. La zone favorable est donc la partie du plan au-dessus de la parabole $y = -x^2$. On trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+y}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}\ , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}.$$

Solution de l'exercice 2.9

Posons
$$f(x,y) = xy\sin(\frac{1}{y}) \quad \text{si } y \neq 0 \ \text{ et } \ f(x,0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Etablir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

i. Continuité sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \neq 0\}$

Les fonctions $(x,y) \longmapsto xy$ et $(x,y) \longmapsto \frac{1}{y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ comme fonction polynômiale et fonction rationnelle et la fonction $t \longmapsto sin(t)$ et continue sur $\mathbb{R}$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ comme produit et composée de fonctions continues.

ii. Continuité sur Δ.

1. Soit $(a,0)$ dans Δ avec a dans $\mathbb{R}$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Delta$
$$|f(x,y) - f(a,0)| = \left| xy\sin(\frac{1}{y}) \right| \leq |xy|\,.$$

On a
$$\lim_{\substack{(x,y) \longrightarrow (0,0) \\ x \in \mathbb{R}}} |xy| = 0,$$

donc
$$\lim_{\substack{(x,y) \longrightarrow (0,0) \\ x \in \mathbb{R}}} |f(x,y) - f(a,0)| = 0,$$

d'où la continuité en $(a,0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$ et en $(0,0)$.

i. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Delta$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin(\frac{1}{y})\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(\sin(\frac{1}{y}) - \frac{1}{y}\cos(\frac{1}{y})).$$

ii. En $(0,0)$.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{car } f(h,0) = f(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \longrightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

3. Etudier la continuité des fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$.
Au point $(a, 0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = 0 \quad \text{car } f(a+h,0) = f(0,0) = 0$$

Donc

$$\lim_{\substack{(x,y) \longrightarrow (a,0) \\ a \in \mathbb{R}}} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) \right| = \lim_{\substack{(x,y) \longrightarrow (a,0) \\ a \in \mathbb{R}}} \left| y \sin(\frac{1}{y}) \right| = 0,$$

d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en $(0, 0)$.
On a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{k \longrightarrow 0} \frac{f(a,k) - f(a,0)}{k} = \lim_{k \longrightarrow 0} a \sin(\frac{1}{k})$$

Si $a \neq 0$ cette limite n'existe pas.
Si $a \neq 0$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \longrightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Donc

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \left| x(\sin(\frac{1}{y}) - \frac{1}{y}\cos(\frac{1}{y})) \right|.$$

Pour $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi}$, on a

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \left| \frac{1}{2n\pi}(\sin(2n\pi) - 2n\pi\cos(2n\pi)) \right| = -1 \neq 0,$$

d'où la discontinuité de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en $(0, 0)$.

Chapitre 3

Différentiabilité, extremas, fonctions implicites

3.1 Différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables

Définition 3.1 *Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à n variables, et $X_0 \in D_f$.*

On dit que la fonction f est différentiable en X_0 s'il existe une fonction linéaire L_{X_0} sur $\mathbb{R}^n$ et une application ε de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de zéro telle que, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$proche de zéro on a

$$f(X_0 + H) - f(X_0) = L_{X_0}(H) + \|H\|_{\mathbb{R}}\, \varepsilon(H), \quad \textit{avec} \lim_{H \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(H) = 0.$$

Remarque 3.1

$$\lim_{H \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0) - L_{X_0}(H)}{\|H\|_{\mathbb{R}}} = 0$$

Cas où $n = 2$

Une fonction à deux variables (x, y) est différentiable en $X_0 = (x_0, y_0)$ s'il existe une forme linéaire L_{X_0} sur $\mathbb{R}^2$,

$$L_{X_0}(H) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \text{ telle que}$$

$$\lim_{H \longrightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Exemple 3.1

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. $D_f = \mathbb{R}^2$
2. f est continue en $(0, 0)$

3. f est differentiable en $(0,0)$?

f est differentiable en $(0,0)$ s'il existe une forme linéaire $L_{(0,0)}(h_1,h_2)$ sur $\mathbb{R}^2$, telle que

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{h_1+h_2+\frac{h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0-(\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\
&= \lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+\frac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2}-\frac{\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right).
\end{aligned}$$

Si on prend $\lambda=\lambda_2=1$, et on passe aux coordonnées polaires $h_1=r\cos\theta$ et $h_2=r\sin\theta$ on obtient

$$\lim_{r\longrightarrow 0}\left(\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r}+\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}-\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r}\right)=\lim_{r\longrightarrow 0}(r\cos^2\theta\sin\theta)=0$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$.

Exemple 3.2

$$\begin{array}{rcl}
f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\\
(x,y) & \longmapsto & f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}
\end{array}$$

1. $D_f=\mathbb{R}^2$
2. f est continue en $(0,0)$
3. f est différentiable en $(0,0)$?

f est différentiable en $(0,0)$ s'il existe une forme linéaire $L_{(0,0)}(h_1,h_2)$ sur $\mathbb{R}^2$, telle que

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

On a

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0-(\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\left(\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}-\frac{\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)$$

On pose $h_1=r\cos\theta$ et $h_2=r\sin\theta$, on trouve

$$\lim_{r\longrightarrow 0}\left(\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}-\frac{r(\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta)}{r}\right)=\cos\theta\sin\theta-(\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta).$$

Cette limite dépend de θ, donc elle n'existe pas.
Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Définition 3.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on suppose que f est différentiable en X_0, alors la forme linéaire s'appelle la différentielle de f en X_0, qu'on note*

$$df_{X_0} = L_{X_0}$$

df_{X_0} *est une forme linéaire c.a.d*

$$\forall H \in \mathbb{R}^n,\ df_{X_0}(H) \in \mathbb{R}$$

Proposition 3.1 *La différentielle d'une fonction s'il existe est unique.*

Preuve. Supposons que f admette deux différentielles L_{X_0} et L'_{X_0} en X_0, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour $H \in B(0, \eta)$,

$$||f(X_0 + H) - f(X_0) - L_{X_0}(H)||_F \leq \varepsilon ||H||_E\ ,$$

et

$$||f(X_0 + H) - f(X_0) - L'(H)||_F \leq \varepsilon ||H||_E,$$

on en déduit par l'inégalité triagulaire que

$$\forall H \in B(0, \eta), ||(L_{X_0} - L'_{X_0})(H)||_F \leq\ 2\varepsilon ||H||_E.$$

Comme $L_{X_0} - L'_{X_0}$ est linéaire, la relation ci-dessus est en fait vraie pour tout $H \in \mathbb{R}^n$, il ne reste plus qu'à faire tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ pour conclure que $L_{X_0} = L'_{X_0}$. ∎

3.1.1 Lien entre la différentiabilité et les dérivées partielles

Théorème 3.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à n variables, $x_1, x_2, ..., x_n$ différentiable en X_0. Alors f est partiellement dérivable par rapport à chacune de ses variables et de plus :*

$$df_{X_0} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)).$$

En d'autres termes si $H = (h_1, h_2, ..., h_n)$, on aura

$$\begin{aligned} df_{X_0}(H) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) h_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) h_n. \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit d'établir que pour tout indice i, la $i - ème$ fonction partielle g_i de f en X_0 est dérivable en x_{i0}. Or, on a

$$g_i(t) = f(x_{10}, ..., x_{(i-1)0}, t, x_{(i+1)0}, ..., x_{p0}).$$

Donc $g_i(x_{i0} + h) = f(X_0 + H_i)$ avec H_i est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les composantes sont nulle sauf la $i - ème$, qui vaut h. Pour h suffisamment petit, H_i est dans le voisinage de 0 pour lequel la formule définissant la différentiabilité est valable et on a

$$\underline{g_i(x_{i0} + h) = f(X_0 + H_i)}$$

$$\begin{aligned} &= f(X_0) + df_{X_0}(H_i) + \|H_i\| \varepsilon(H_i) \\ &= g_i(x_{i0}) + u_1.0 + ... + u_{i-1}.0 + u_i.h + u_{i+1}.0 + ... + u_p.0 + \|H_i\| \varepsilon(H_i) \\ &= g_i(x_{i0}) + u_i.h + \|H_i\| \varepsilon(H_i). \end{aligned}$$

En effet, quelle que soit la norme usuelle considérée, on a $\|H\| = |h|$ (vérification immédiate).

On a donc

$$\frac{g_i(x_{i0}+h)-g_i(x_{i0})}{h} = u_0 + \frac{|h|}{h}\varepsilon(H_i).$$

Il est clair que $\lim\limits_{h\to 0} H_i = 0$, donc par composition de limite, on a $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon H_i = 0$, et comme $\frac{|h|}{h} = \pm 1$ reste borné, le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 ayant une limite nulle, on a $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon H_i = 0$ et on est sûr que

$$\frac{g_i(x_{i0}+h)-g_i(x_{i0})}{h} = u_0.$$

Ceci signifie justement que g_i est dérivable en x_{i0} et que $g_i^{'}(x_{i0}) = u_0$. Mais ceci montre que f est partiellement dérivable en X_o par rapport à x_i et que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = u_i$. Comme tout ceci est valable quel que soit l'indice i, on a terminé. ■

Une autre façon de comprendre ce théorème est la suivante : Les composantes de la différentiabilité de f en X_0 sont les dérivées partielles de f en X_0.

Théorème 3.2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à n variables.*

$$(f \text{ différentiable en } X_0) \Longrightarrow (f \text{ continue en } X_0).$$

Preuve. Il suffit de montrer que :

$$\lim_{X\longrightarrow X_0} f(X) = f(X_0) \text{ ou bien } \lim_{H\longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} f(X_0+H) = f(X_0).$$

Puisque f est différentiable en X_0, alors il existe une forme linéaire L_{X_0}, telle que

$$f(X_0+H) - f(X_0) = L_{X_0}(H) + \|H\|_{\mathbb{R}}\,\varepsilon(H), \tag{3.1}$$

avec

$$\lim_{H\longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(H) = 0,$$

et

$$L_{X_0}(H) = df_{X_0}(H) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + ... + \lambda_n h_n.$$

Quand

$$H = (h_1, h_2, ..., h_n) \longrightarrow (0,0,...,0), \text{ alors } h_i \longmapsto 0,\ \forall i = \overline{1,n}.$$

Faisons tendre $H = (h_1, h_2, ..., h_n)$ vers $(0,0,...,0)$ dans (3.1). On aura

$$\lim_{H\longrightarrow(0,0,...,0)} f(X_0+H) - f(X_0) = 0.$$

D'où

$$\lim_{H\longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} f(X_0+H) = f(X_0).$$

Ce qui montre la continuité de f en X_0. ■

Théorème 3.3 *Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à n variables et un ouvert $U \subset D_f$.*

$$(f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \subset D_f) \Longrightarrow (f \text{ différentiable sur } U).$$

Preuve. Elle est basée sur la formule des accroissements finis. ■

$$(f \text{ est de classe } C^1) \Longrightarrow (f \text{ différentiable}) \begin{array}{l} \Longrightarrow (f \text{ est partiellement dérivable}) \\ \\ \Longrightarrow \quad (f \text{ est continue }) \end{array}$$

Proposition 3.2 *On dit que la fonction f est différentiable surun ouvert U si elle est différentiable en tout point $X \in U$, dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction :*

$$\begin{array}{c} df : U \longrightarrow L(E, F) \\ X \mapsto df_X \end{array}.$$

Toute application constante est continument différentiable, de différentielle nulle.

Une fonction $g : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ de variable réelle et différentiable si et seulement si elle est dérivable et $dg_x(h) = hg'(x)$ quels que soient $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}$.

N.B, $h \in \mathbb{R}$ est un scalaire, alors que $g'(x) \in F$ est un vecteur en général.

Proposition 3.3 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ et $g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ sont différentiables respectivement sur des ouverts U et V d'un même espace $\mathbb{R}^n$, alors :*

Leur somme $f + g$ est différentiable sur $U \cap V$ et

$$d(f + g) = df + dg,$$

autrement dit :

Pour tout $X \in U \cap V$ et pour tout $H \in \mathbb{R}^n$,

$$d(f + g)_X(H) = df_X(H) + dg_X(H).$$

Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est différentiable et : $d(\lambda f) = \lambda df$.

Théorème 3.4 *Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est différentiable sur D_f.*

D plus

$$\forall X_0 \in D_f,\ df_{X_0} = f.$$

Preuve. Soient $X_0 \in D_f$ et $H \in \mathbb{R}^n$. Comme f est différetiable, alors il existe une application linéaire L_{X_0} sur $\mathbb{R}^n$ et une application $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(f \text{ différentiable}) \Longleftrightarrow f(X_0 + H) - f(X_0) = L_{X_0}(H) + \|H\|_{\mathbb{R}}\, \varepsilon(H), \quad \text{avec} \lim_{H \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(H) = 0,$$

Or f est linéaire par hypothèse c.a.d

$$f(X_0 + H) - f(X_0) = f(H).$$

Donc $f(H) = df_{X_0}(H)$. ■

Exemple 3.3 *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x+y. \end{array}$$

f est linéaire, donc $\forall X_0 \in \mathbb{R}^2$, $df_{X_0} = f$.
Vérifions, f est différentiable alors

$$df_{X_0}(H) = \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(X_0),$$

d'après le théorème (3.1).
C'est-à-dire

$$df_{X_0}(H) = h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(X_0) + h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(X_0) = h_1 + h_2$$

Or

$$f(H) = f(h_1, h_2) = h_1 + h_2.$$

Donc

$$f(H) = df_{X_0}(H).$$

3.1.2 Matrice Jacobienne

Définition 3.3 *Si une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow F = \mathbb{R}^n$ de composantes $f_1, \ldots, f_n$ est différentiable au point X_0, on définit sa matrice Jacobienne en point X_0 comme la matrice de l'application linéaire df_{X_0} dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$. elle est donnée par*

$$Df(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R}).$$

3.1.3 Jacobien d'une fonction de classe C^1

Définition 3.4 *Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un domaine U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors le jacobien de f est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de f. On note*

$$J = \left|\det J(f)\right|.$$

Remarque 3.2 *Le Jacobien d'une fonction ne peut être défini que si la dimension de l'espace de départ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée, puisque seules les matrices carrées ont un déterminant.*

Proposition 3.4 *Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la matrice Jacobienne se réduit à une matrice carrée de taille 1 que l'on peut identifier à la dérivée $f'(a)$.*

Proposition 3.5 *Pour une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, la matrice Jacobienne est un vecteur linge.*

Exemple 3.4

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (\sin(x^2+y^2), xy). \end{array}$$

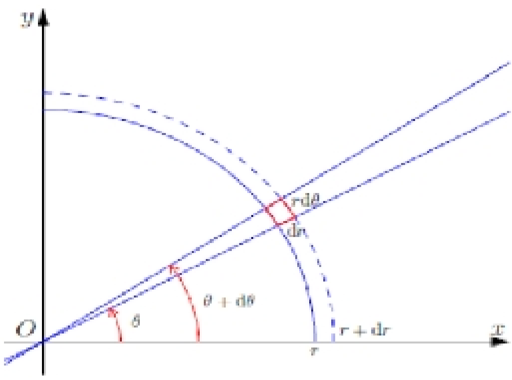
La fonction f admet des dérivées partielles suivant x et y pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et l'on a :

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y^2) & 2y\cos(x^2+y^2) \\ y & x \end{pmatrix},$$

et

$$J = |\det J(f(x,y))| = \left|2(x^2-y^2)\cos(x^2+y)\right|.$$

Coordonnées polaires



On considère la fonction ψ définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ par

$$\psi : (r,\theta) \longrightarrow (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

L'interprétation graphique de ce changement de variable est classique : pour un point M de coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, r désigne la longueur du segment $[OM]$ et θ désigne une des mesures modulo 2π de l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et la demi-droite $[OM)$.

Les fonctions coordonnées de ψ sont : $\psi_1(r,\theta) = r\cos\theta, \quad \psi_2(r,\theta) = r\sin\theta$.

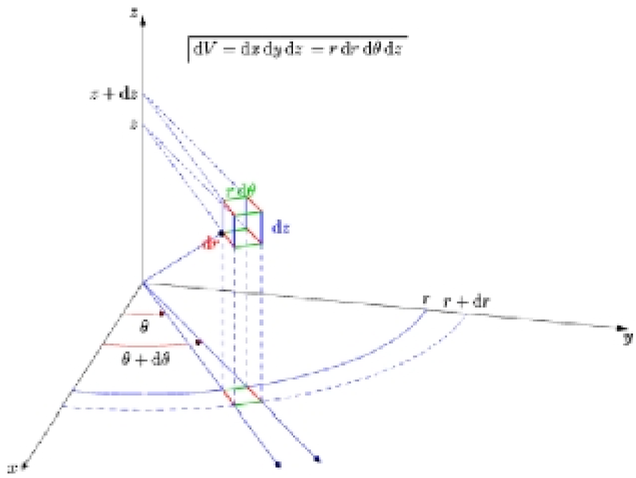
Elles sont de classes C^∞, donc ψ est différentiable et sa matrice Jacobienne.

$$J(\psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} & \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial r} & \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien de cette application est donc :

$$J = |det(J(\psi))| = \left|r\cos^2\theta + \ r\sin^2\theta\right| = r.$$

Coordonnées cylindriques



On considère la fonction ψ définie sur la partie $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\psi : (r, \theta, z) \longrightarrow (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

L'application ψ est évidemment de classe C^∞ et donc différentiable.
Les fonctions coordonnées de ψ sont (ψ_1, ψ_1, ψ_1) définies par

$$\begin{cases} \psi_1(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ \psi_2(r,\theta,z) = r\sin\theta \\ \psi_3(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

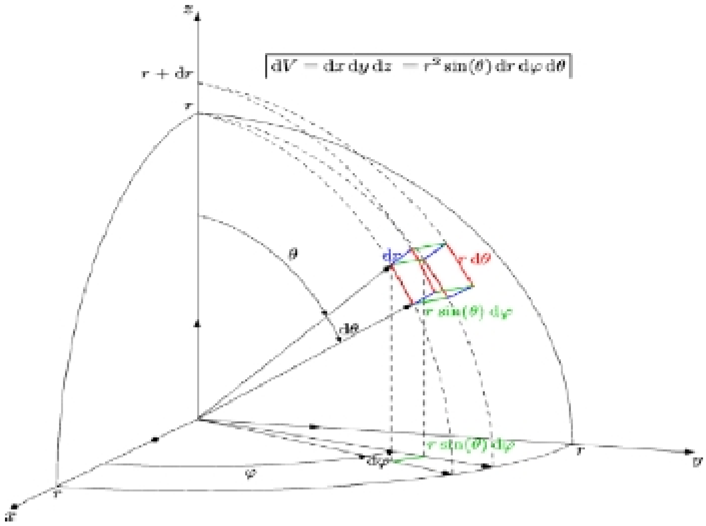
Sa matrice jacobienne en (r, θ, z) est

$$J(\psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} & \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial r} & \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial r} & \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} & \frac{\partial\psi_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$J = |det(J(\psi))| = 1 \times \left| r\cos^2\theta + \ r\sin^2\theta \right| = r.$$

Coordonnées sphériques



On considère la fonction ψ définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^{*+}\times]0,\pi[\times\mathbb{R})$ par

$$\psi : (r,\theta,\varphi) \longrightarrow (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

L'application ψ est évidemment de classe C^∞ et donc différentiable.
Les fonctions coordonnées de ψ sont (ψ_1,ψ_1,ψ_1) définies par

$$\begin{cases} \psi_1(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi \\ \psi_2(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi \\ \psi_3(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta. \end{cases}$$

Sa matrice Jacobienne en (r,θ,φ) est

$$\begin{aligned} J(\psi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le Jacobien de cette application est donc :

$$J = det(J(\psi)) = r^2\sin\theta.$$

3.1.4 Gradient d'une fonction à n variables

Définition 3.5 *Soit f une fonction définie et de classe C^1.*

Le gradient d'une fonction f est une fonction vectorielle définie sur U, noté $\overrightarrow{grad}f$.

$$\overrightarrow{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x}(X) \end{pmatrix},$$

3.2 Différentielle d'une application linéaire

Proposition 3.6 *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.*
On identifie f et la matrice $(f_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$.
Alors $\forall\ X_0 \in \mathbb{R}^p$, f est différentiable en X_0 et

$$df_{X_0} = f(J(f))_{X_0} = (f_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}.$$

Preuve. $X_0 \in \mathbb{R}^p$ $f(X_0 + H) - f(X_0) = df_{X_0}(H) + \|H\|\,\epsilon(H)$ $f(H) = df_{X_0}(H) + \|H\|\,\epsilon(H)$
En posant $\epsilon(H) = 0_{\mathbb{R}^n}$ D'où $f(H) = df_{X_0}(H)$. ■

Proposition 3.7 *Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie et différentiable sur un domaine $U \in \mathbb{R}^n$. Alors f est une fonction constante si et seulement si*
$df = (0)$ (la matrice n lignes, p colonnes d'applications toutes nulles).

3.3 Différentielle d'une fonction composée

Le théorème fondamental pour la différentiation d'une fonction composée est la généralisation de la formule classique $(gof)' = (g'of)f'$.

Théorème1 :
Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^p$.
Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 sur $W \subset \mathbb{R}^n$.
On suppose que : $\forall\ X \in U,\ \ f(X) \in W$.
Alors gof est différentiable sur U et on a :

$$\forall X_0 \in U/\ f(X_0) = Y_0 \in W,\ \ d(gof)_{X_0} = dg_{X_0} o df_{X_0}.$$

3.3.1 Cas particuliers : $p = m = 1$

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \ f \in C^1 \text{ et } g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad g \in C^1 \\ gof & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ X \longmapsto f(X) \longmapsto g(f(X)). \end{array}$$

$$df_{X_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X_0) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ f_2'(X_0) \\ . \\ . \\ . \\ f_n'(X_0) \end{pmatrix},$$

$$dg_{Y_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(Y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(Y_0) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial g_n}{\partial x}(Y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1'(Y_0) \\ g_2'(Y_0) \\ . \\ . \\ . \\ g_n'(Y_0) \end{pmatrix}$$

$$d(gof) = dg_{y_0} o df_{X_0} = (g_1'(Y_0), g_2'(Y_0), ..., g_n'(Y_0)) \begin{pmatrix} f_1'(X_0) \\ f_2'(X_0) \\ . \\ . \\ . \\ f_n'(X_0) \end{pmatrix}$$

$$d(gof) = g_1'(Y_0)f_1'(X_0) + g_2'(Y_0)f_2'(X_0) + ... + g_n'(Y_0)f_n'(X_0).$$

$$dg_{Y_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(Y_0), \frac{\partial g}{\partial x_2}(Y_0), ..., \frac{\partial g}{\partial x_n}(Y_0)\right)$$

$$d(gof) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(Y_0)f_1'(X_0) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(Y_0)f_2'(X_0) + ... + \frac{\partial g}{\partial x_n}(Y_0)f_n'(X_0)$$

Ou

$$d(gof) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(X_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(\ f(X_0)).$$

Corollaire 3.5 *La matrice Jacobienne de gof est égale au produit de la matrice Jacobienne de g par la matrice Jacobienne de f. Plus précisément, si $y_0 = f(X_0)$*

$$J(gof)(X_0) = J(g)(X_0).J(f)(X_0).$$

Exemple 3.5

$$f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \quad f(x,y,z) = (x^2y + \frac{1}{z}, x\sin e^z)$$
$$g \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \quad g(x,y) = x$$

$$J(f)(X_0) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & -\frac{1}{z^2} \\ \sin e^z & 0 & xe^z\cos e^z \end{pmatrix}, \quad J(f)(X_0) = (1,0)$$

$$\begin{array}{rcl} gof & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^2y+\frac{1}{z}, x\sin e^z) \longmapsto x^2y+\frac{1}{z} \\ (gof)(x,y,z) & = & g(\ f(x,y,z)) = g(x^2y+\frac{1}{z}, x\sin e^z) = x^2y+\frac{1}{z} \end{array}$$

$f, g \in C^1 \Longrightarrow f$ et g sont différentiables
gof :$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable

$$\begin{aligned} d(gof)(h) &= \sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial(gof)}{\partial x_i} = h_1\frac{\partial(gof)}{\partial x} + h_2\frac{\partial(gof)}{\partial y} + h_3\frac{\partial(gof)}{\partial z} \\ &= h_1 2xy + h_2 x^2 + h_3(-\frac{1}{z^2}). \end{aligned}$$

Ou bien,

$$Y_0 = \ f(X_0) = (x_0^2y_0 + \frac{1}{z_0}, x_0\sin e^{z_0}).$$

$$\begin{array}{rcl} d(gof)_{X_0} & = & J(gof)_{Xo} = J(g)_{Yo}\cdot J(f)_{Xo} \\ & = & (1,0)\begin{pmatrix} 2xy & x^2 & -\frac{1}{z^2} \\ \sin e^z & 0 & xe^z\cos e^z \end{pmatrix} \\ & = & 2xy + x^2 - \frac{1}{z^2}. \end{array}$$

3.4 La formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de deux variables

3.4.1 Dérivée seconde d'une fonction composée

Théorème 3.6 *On considère une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui se décompose $F = foU$*

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1 \\ U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \xrightarrow{U} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ t \longmapsto (u_1(t), u_2(t)) \longmapsto f(U_1(t), U_2(t)). \end{array}$$

Nous supposons que $f \in C^2$ et nous prenons

$$\begin{array}{l} U(t) = X_0 + tH \quad , \Longrightarrow \ U(t) = (x_0 + th_1, y_0 + th_2) \quad avec\ X_0 = (x_0, y_0) \\ F(t) = f(x_0 + th_1, y_0 + th_2). \end{array}$$

Alors f est deux fois dérivables et on a :

$$F''(t) = h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th_1, y_0+th_2) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+th_1, y_0+th_2) + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+th_1, y_0+th_2).$$

Exemple 3.6 *Le développement de Taylor-Young d'ordre* 2 *au point* $(0,0)$ *de la fonction*

$$g(x,y) = e^{3x+3y}.$$

Les dérivées partielles de la fonction g sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= 3e^{3x+3y}\ , \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3e^{3x+3y},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= 9e^{3x+3y}\ , \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 9e^{3x+3y},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= 9e^{3x+3y}.\\
g(0,0) &= 1,\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 3,\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 3,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = 9\ .
\end{aligned}$$

Le développement de Taylor-Young d'ordre 2 au point $(0,0)$ de la fonction g est

$$g(x,y) = 1 + 3x + 3y + \frac{9}{2}x^2 + 9xy + \frac{9}{2}y^2 + o(\|(x,y)\|^2).$$

3.4.2 théorème des accroissements finis pour plusieurs variables

Théorème 3.7 *Soit* f *une fonction de plusieurs variables, de classe* C^1 *sur un ouvert* $U \subset D(f)$*. Soit* $X_o \in U$*, et* $X = X_o + H \in U$*. On suppose de plus que tout le segment* $[X_o, X_o + H]$ *est inclus dans* U*.*

Alors il existe $\theta \in]0,1[$ *tel que*

$$f(X_o + H) = f(X_o) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_o + \theta H).$$

Rappel : $[X_o, X_o + H] = \{X_o + tH\ /\ t \in [0,1]\}$.

Pour p = 2, ce théorème s'écrit.

Si f est une fonction de 2 variables, de classe C^1 sur un ouvert $U \subset D(f)$, si $Xo = (x_o, y_o) \in U$, si $X = (x_o + h, y_0 + k) \in U$, le segment $[X_oX]$ étant tout entier inclus dans U, alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x_o + h, y_0 + k) = f(x_o, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_o + \theta h, y_0 + \theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_o + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Preuve. On introduit la fonction d'une variable

$$F(t) = f(X_o + tH) = f(x_{10} + th_1, ..., X_{po} + th_p).$$

On a bien sûr $F(0) = f(Xo)$ et $F(1) = f(X)$. Cette fonction est définie sur $[0,1]$ par $F = fou$ avec $u : t \longmapsto u(t) = X_o + tH$, fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^p$, dont la $i-ème$ fonction composante est $u_i(t) = x_{10} + th_1$. On a $u_i'(t) = h_i$ donc, d'après le théorème de dérivée d'une fonction composée, F est dérivable et

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{p} u_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u(t)) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_o + tH).$$

Mais cette fonction F étant dérivable sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis (pour les fonctions d'une seule variable) entre 0 et 1, on a

$$\exists \theta \in]0, 1[\text{ telque } \quad \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(\theta).$$

Traduisant cette assertion avec les valeurs de $F(1)$, $F(0)$ et l'expression de F', on obtient

$$\exists \theta \in]0, 1[\text{ telque } \quad f(X_o + H) - f(X_o) = \sum_{i=1}^{p} h_i \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_o + \theta H). \ \blacksquare$$

3.5 Extrema des fonctions de plusieurs variables

3.5.1 Introduction

Un des intérêts les plus visibles de la dérivation des fonctions d'une variable a été l'étude des variations des fonctions, et entre autres la détermination des extrema, c'est-à-dire des maximums et des minimums (maxima et minima, au choix). Si une fonction d'une seule variable f dérivable admet un maximum ou un minimum en x_0, alors on est sûr que

$$f'(x_0) = 0.$$

Si on a

$$\begin{array}{lll} f'(x_0) = 0 & \text{et} & f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \ f \text{ admet un minimum en } x_0 \\ f'(x_0) = 0 & \text{et} & f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \ f \text{ admet un maximum en } x_0. \end{array}$$

C'est ce type de résultat qu'on va essayer d'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

3.5.2 Extremum relatif

Définition 3.6 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.*

On dit que f admet en $X_o \in D_f$ un minimum (respectivement un maximum) relatif (ou local) s'il existe un voisinage V de X_o inclus dans D_f $(V \subset D_f)$ tel que

$$\forall X \in V, \quad f(X) \geq f(X_o)(\text{respectivement } f(X) \leq f(X_o)).$$

Le minimum (respectivement le maximum) de f sur V est alors le réel $f(X_o)$.

Un extremum relatif est un maximum relatif ou un minimum relatif.

Un extremum relatif se transforme en extremum absolu lorsque le voisinage V de la définition peut être pris égal à D_f.

3.5.3 Point critique

Définition 3.7 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ différentiable en X_o.*

On dit que X_o est un point critique si $df_{X_0} = 0$, c'est-à-dire

$$df_{X_0} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(X_0) = 0. \end{cases}$$

Une condition nécessaire d'extremum des fonctions de plusieurs variables.

Théorème 3.8 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$, partiellement dérivable par rapport à toutes ses variables.*

Si f admet un extremum relatif en X_o, alors $\forall\ i = \overline{1, p}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0 \text{ ou encore } \overrightarrow{\text{grad}} f(X_o) = \overrightarrow{0}$$

La réciproque est fausse, f est constante comme contre exemple.

3.5.4 Condition suffisante d'extremum

Théorème 3.9 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur $U \subset D_f$.*
Soit $X_0 \in U$, on suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 0$
(X_0 est un extremum possible).

On pose $\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) \end{cases}$

Alors
1. Si $\Delta = s^2 - rt < 0$ alors f admet un extremum relatif.
Cette extremum est $\begin{cases} \text{un minimum si } r > 0 \\ \text{un maximum si } r < 0. \end{cases}$
2. Si $\Delta = s^2 - rt >, 0$ alors f n'admet ni maximum ni minimum.
Dans ce cas X_0 est un point selle.

Exemple 3.7 *Soit f la fonction définie par*

$$f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x.$$

Déterminons les points critiques de f et leurs natures.

Les points sont donnés par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 12x - 12y + 9 = 0 \\ 6y - 16x = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = 2x; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 12x - 12y + 9 = 0 \\ y = 2x. \end{cases}$$

Les points critiques sont $(1,2)$, $(3,6)$.

Pour étudier la nature des points critiques $(1,2)$ et $(3,6)$, on calcule les dérivées secondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -12. \end{cases}$$

Donc pour le point $(1,2)$ on a

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 18 \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 6 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = -12, \end{cases}$$

$\Delta = s^2 - rt = (-12)^2 - 6 \times 18 = 36 > 0$, on conclut que le point $(1,2)$ est un point selle.

Pour le point $(3,6)$ on a

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,6) = 30 \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,6) = 6 \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,6) = -12, \end{cases}$$

$$\Delta = s^2 - rt = (-12)^2 - 6 \times 30 = -216 < 0 \text{ et } r = 30 > 0,$$

on conclut que le point $(1,2)$ est un minimum local.

Exemple 3.8 *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Déterminons les points critiques de f et leurs natures.

Les points sont donnés par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4y + 4x = 0. \end{cases}$$

Les points critiques de f sont : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$(0,0)$ est un point selle.

Pour le point $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, f admet un minimum local en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et comme f est symétrique, le point $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum local.

3.5.5 Application deux fois différentiable

Définition 3.8 *Une fonction f définie sur un ouvert non-vide U d'un $\mathbb{R}$-espace de Banach E et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach F est dite deux fois différentiable en $X \in U$ si : elle est différentiable dans un voisinage ouvert U_X de X et si : sa différentielle $df : U_X \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable en X.*

Définition 3.9 *La différentielle seconde d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fois différentiable est l'application :*

$$\begin{array}{rl} d^2 f : U \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n) \\ X \longmapsto & d^2 f_X \end{array},$$

définie par : $d^2 f_X(h, K) = d(df)_X(h)(K),$ *pour tout* $(h, K) \in E \times E$.
$d^2 f_X$ *est une forme bilinéaire.*

3.5.6 Matrices Hessiennes

Définition 3.10 *Soit f, $U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$.*
Si f est deux fois différentiable sur U, alors, pour tout $X \in U$, pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$

$$d^2 f_X(e_i, e_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(X).$$

La matrice

$$d^2 f_X = Hessf(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X) & .... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X) & .... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(X) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_2}(X) & .... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(X) \end{pmatrix}$$

est appelé matrice Hessienne de f en X (elle est symétrique).

Cas $p = 2$

$$d^2 f_x = Hessf(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{pmatrix}, \quad X = (x, y)$$

$$\begin{array}{rcl} \det(Hessf(X)) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X)\right)^2 \\ \det(Hessf(X_0)) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0)\right)^2 \\ & = & rt - s^2 = -(s^2 - rt) = -\Delta. \end{array}$$

On peut tirer les extremums à l'aide du déterminant de la matrice Hessienne.

3.5.7 Critères avec les matrices Hessiennes

Théorème 3.10 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur U, et soit $X_0 \in U$ un point critique de f, alors :*

1. *Si $Hessf(X_0)$ est définie positive, alors X_0 est un minimum local strict de f sur U.*
2. *Si $Hessf(X_0)$ est semi-définie positive, alors X_0 est un minimum local de f sur U.*
3. *Si $Hessf(X_0)$ est définie négative, alors X_0 est un maximum local strict de f sur U.*
4. *Si $Hessf(X_0)$ est semi-définie négative, alors X_0 est un maximum local de f sur U.*
5. *Si $q(X_0) = X_0^t Hessf(X_0) X_0$ est non dégénérée, alors X_0 est un point selle.*

Preuve. Soit f une fonction de $C^2(U)$. Le développement de Taylor de f en $X_0 = (x_0, y_0)$ a l'ordre 2 est

$$f(X_0 + h) = f(X_0) + df(X_0)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(X_0)(h_1, h_2) + o(\|h\|^2).$$

Comme $X_0 = (x_0, y_0)$ est un point critique de f alors $df(a) = 0$, ainsi

$$f(X_0 + h) - f(X_0) \simeq \frac{1}{2!} d^2 f(X_0)(h_1, h_2).$$

Le signe du terme de gauche est du signe de $d^2 f(X_0)(h_1, h_2)$. De plus

$$d^2 f(X_0)(h_1, h_2) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0).$$

Posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0).$$

On a $\det(Hessf(X_0)) = rt - s^2 = -\Delta$.
Alors

$$\begin{aligned} d^2 f(X_0)(h_1, h_2) &= r\left(h_1^2 + 2h_1 h_2 \frac{s}{r} + \frac{h_2^2 t}{r}\right) \\ &= r\left(\left(h_1 + \frac{h_2 s}{r}\right)^2 - \frac{s^2 - rt}{r^2} h_2^2\right). \end{aligned}$$

Si $\Delta = s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors

$$d^2 f(X_0)(h_1, h_2) > 0 \ \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0),$$

f admet un minimum local.
Si $\Delta < 0$ et $r < 0$, alors

$$d^2 f(X_0)(h_1, h_2) < 0 \ \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0),$$

f admet un maximum local.
Si $\Delta < 0$ et $d^2 f(X_0)(1, 0)$ est du signe de s et $d^2 f(X_0)(\frac{-1}{s}, 1)$ est du signe de $(-s)$ alors le point critique est un point selle. ■

3.6 Fonctions implicites

3.6.1 Théorème d'inversion locale

Définition 3.11 ***(Difféomorphisme)***

Soient U et V des ouverts non-vides d'espaces de Banach E et F respectivement.

On dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme de U sur V si et seulement si :

1. f est une bijection.
2. f est de classe C^1, c'est à dire continument différentiable sur U.
3. f^{-1} est de classe C^1 sur V.

Définition 3.12 ***(Homéomorphisme)***

Soient U et V des ouverts non-vides d'espaces de Banach E et F respectivement.

On dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme de U sur V si et seulement si :

1. f est une bijection.
2. f et f^{-1} sont continues.

Proposition 3.8 *Soient f un difféomorphisme de D sur G, a un point de D et b un point de G, alors,*

1. $df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}$
2. $df(f^{-1}(b)) = (df^{-1}(b))^{-1}$
3. $MJ_{f^{-1}}(f\ (a)) = (MJ_f\ (a))^{-1}$
4. $MJ_f\ (f^{-1}(b)) = (MJ_{f^{-1}}(b))^{-1}$.

Exemples

1. L'application : $x \longrightarrow x^3$, de classe C^∞, est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas un difféomorphisme, car sa dérivée en 0 est nulles.

2. Posons $f(x,y) = (x^2 + y^3, x^2 - y^3)$, la matrice Jacobienne de f en tout point (x,y) est :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 2x & -3y^2 \end{pmatrix},$$

le déterminant de cette matrice est nul si et seulement si x ou y est nul. par conséquent, la restrinction de f au plan privé de ces deux axes est un difféomorphisme local. mais cette restrinction n'est pas injective puisque $f(x,y) = f(-x,y)$, ni surjective puisque si $f(u,v) = f(x,y)$ alors $u + v > 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$$

i. $\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ implique : $\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$ on obtient $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

alors f est injective

ii. $\forall Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$Z = f(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = x + y \\ z_2 = x - y \end{cases} \text{ on obtient } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \\ y = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \end{cases}$$

donc f est surjective, enfin f est bijective.

f est bien définit et différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et ses dérivées partielles sont : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1.-1)$ continues sur $\mathbb{R}^2$, donc $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y)\right)$$

est définite et différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \frac{\partial f^{--1}}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

continues sur $\mathbb{R}^2$, donc $f^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Alors f est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3.3 *(f est un difféomorphisme) $\Longrightarrow$ (f est homéomorphisme).*

La réciproque est fausse, une application $f : U \longrightarrow V$ de classe C^1 peut admettre une fonction inverse f^{-1} continue sans etre un difféomorphisme.

Exemple 3.9 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est bijective et de classe C^1. Sont inverse est $f^{-1}(y) = x^{\frac{1}{3}}$ qui est continue mais pas différentiable en 0.*

Théorème 3.11 *Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$, où U est un ouvert d'un espace de Banach réel de F un espace de Banach et soit X un point de U. Si f est de classe C^p, avec p un entier strictement positif et si la différentielle de f au point X est inversible, alors il existe un ouvert V contenant X et un ouvert W contenant $f(X)$ tels que f se restreigne en une bijection de V dans W dont la réciproque est de classe C^p.*

Théorème 3.12 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 avec U un ouvert non-vide, c'est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si elle est injective et sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.*

$$f \in Isom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \det(J_{(f)}(X_0)) \neq 0.$$

Alors d'après le Théorème d'inversion locale, il existe un V voisinage de X_0 et W voisinage de $Y_0 = f(X_0)$ tels que $f \in C^1-$difféomorfisme.

Exemple 3.10 *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, x+y)$*

$$\begin{aligned} df_{X_0} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \det(J_{(f)}(X_0)) &= 2 \neq 0 \iff f \in Isom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

D'après le Théorème d'inversion locale, il existe un V voisinage de X_0 et W voisinage de $Y_0 = f(X_0)$ tels que $f \in C^1-$difféomorfisme.

3.6.2 Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites est concerné par la résolution des équations non linéaires de la forme $f(x,y)=0$.

Sous les hypothèses qu'on va préciser, on peut tirer y comme fonction de x.

On dit alors que $f(x,y)=0$ définit implicitement y comme fonction implicite de x.

Théorème 3.13 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ et $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1, on suppose qu' il existe $(x_0,y_0)\in U$ tel que $f(x_0,y_0)=0_{\mathbb{R}^n}$ et $dyf(x_0,y_0)\in Isom(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.*

Alors il existe un voisinage ouvert V de (x_0,y_0) contenu dans U, un voisinage W de x_0 et une application $\varphi:W\longrightarrow\mathbb{R}^p$ de classe C^1, telle que :

$$\forall (x,y)\in V,\ \ (f(x,y)=0)\Leftrightarrow(\forall x\in W,\ \ y=\varphi(x)).$$

Proposition 3.9 *Sous les hypothèses du Théorème des fonctions implicites*

$$d\varphi_x(h)=-(dyf(x,\varphi(x))^{-1}dxf(x,\varphi(x))(h)\ \textit{pour tous}\ x\in W\ \textit{et}\ h\in\mathbb{R}^p$$

Cas particulier

$$f:V\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ \ f\in C^1.$$

On suppose que $\exists(x_0,y_0)\in V$ telque

$$f(x_0,y_0)=0,dyf(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0,$$

il existe un voisinage W de x_0 et une application φ de classe C^1;

$$\begin{array}{ccc}\varphi & : & W\longrightarrow\mathbb{R}\\ x & \longmapsto & y=\varphi(x),\end{array}$$

tels que

$$f(x,y)=0\Longrightarrow(\forall x\in W,y=\varphi(x)$$

et on a

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}.$$

Exemple 3.11 *On considère la courbe plane d'équation*

$$2x^3y+2x^2+y^2=5 \qquad\qquad (I)$$

Vérifions que l'équation (I) définit une et une seule fonction $y=\varphi(x)$ au voisinage de $(1,1)$.

On pose $f(x,y)=2x^3y+2x^2+y^2-5,\quad f(1,1)=2+2+1-5=0$

Le point $(1,1)$ est une solution de l'équation $f(x,y)=0$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x^2y+4x\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^3y+2y\end{cases}$$

Et comme $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2+2 = 4 \neq 0$, d'après le Théorème de fonctions implicites, il existe un voisinage V de $(1,1)$ et un voisinage W de $x_0 = 1$, $\exists \varphi \in C^1, \forall (x,y) \in V, \forall x \in W$,

$$f(x,y) = 0 \implies y = \varphi(x).$$

Calculons $\varphi'(1)$

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))} \implies \varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(1,\varphi(1))}{\frac{\partial g}{\partial y}(1,\varphi(1))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2y + 4x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,\varphi(1)) = 10$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y + 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,\varphi(1)) = 4$$

$$\varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,\varphi(1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,\varphi(1))} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

Exemple 3.12 *On considère la courbe plane d'équation*

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0. \qquad (I)$$

Vérifions que l'équation (I) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.

On pose $f(x,y) = xe^y + e^x \sin(2y)$ et on voit que $f(0,0) = 0$.

dons le point $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + e^x \sin(2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + 2e^x \cos(2y). \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$, il existe un voisinage V de $(0,0)$, il existe un voisinage W de $x_0 = 0$, $\exists \varphi \in C^1$, $\forall (x,y) \in V, \forall x \in W$,

$$f(x,y) = 0 \implies y = \varphi(x).$$

Calculons $\varphi'(0)$

On a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))},$$

donc

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varphi(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + e^x \sin(2y) \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,\varphi(0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + 2e^x \cos(2y) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0)) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2$$

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varphi(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0))} = -\frac{1}{2}.$$

3.7 Exercices sur le Chapitre 3

Exercice 3.1
Étudier la différentiabilité des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-3y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Exercice 3.2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Calculer le gradient de f au point $(0,0)$, puis en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
4. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
5. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3.3
I. Soit f une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et en $(0,-1)$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

II. On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0 \qquad (I)$$

1. Vérifier que l'équation (I) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de φ en $(0,\varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ tout en étant sur la courbe.

Exercice 3.4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer le gradient de f pour $(x, y) \neq (0, 0)$ puis en $(0, 0)$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en tout point (x, y).
4. Que peut-on déduire du calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

II. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tells que

$$f(x, y) = g(x, y) + e^x - 2y - 1.$$

1. Sous quelles conditions sur g l'équation $f(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $y = \varphi(x)$ au voisinage d'un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$?
2. Soit $g(x, y) = arctg(x + y)$, montrer qu'il existe une fonction φ de classe C^1 telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$ au voisinage de $(0, 0)$.
3. Calculer le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 3.5

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer le gradient de f pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$
3. En utilisant la définition, étudier la différentiabilité de la fonction f au point $(1, 0)$
4. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 3.6

Donner le développement limité d'ordre 2 en $(0, 0)$ des fonctions suivantes

$$1. f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \qquad 2. f(x, y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2 + y}.$$

Exercice 3.7

I. Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &= x^2 - xy + y^2, \quad 2. f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6, \\ 3. f(x, y) &= x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10. \end{aligned}$$

II. Etudier les extremas des fonctions suivantes

$$1. f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y, \ 2. f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2, \ 3. f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$$
$$4. f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2, \quad 5. f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

Exercice 3.8

I. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admet un minimum local où

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3ax - 2y.$$

II. Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f et leurs natures.
2. Trouver le développement de Taylor-Young d'ordre 2 au point $(0,0)$ de la fonction

$$g(x,y) = e^{3x+3y}.$$

Exercice 3.9
Soit h la fonction définie par

$$h(x,y) = xy - 3x^2.$$

1. Déterminer les points critiques de h et étudier leurs natures.
2. Trouver le développement de Taylor-Young d'ordre 2 au point $(0,0)$ de la fonction h.
3. Vérifier que l'équation $h(x,y) + 1 = 0$ définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,2)$.
4. Calculer $\varphi'(1)$.

Exercice 3.10

1. Une montagne a la forme de la surface $f(x,y)$=$2xy$-$2x^2$-y^2-$8x + 6y + 4$ (l'unité de mesure est de 100 mètres).
   Si le niveau de la mer correspond à $f = 0$, quelle est la hauteur de la montagne ?
2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

Soit l'équation $f(x,y) = -3$.
Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(0,3)$ une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

Exercice 3.11
I-Soient $\alpha \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Calculer le gradient de f en $(0,0)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$.
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
4. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle classe C^1 en $(0,0)$?

II. On considère l'équation

$$xe^y + ye^x = 0.$$

1. Vérifier qu'elle définie une unique fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 en $x = 0$.

Exercice 3.12
I. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}.$$

1. Calculer la limite de f quand (x, y) tend vers $(0,0)$.
2. Calculer le gradient de f pour $(x, y) \neq (0,0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur son demaine de définition.

II. On définit la fonction g par

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de g en $(0,0)$.
2. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles de g en $(0,0)$.
3. Montrer que g est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.13
On considère l'application de f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

1. Calculer le gradient de f et sa matrice hessienne.
2. Utiliser le gradient de f pour calculer la dérivée de l'application

$$x \longmapsto f(x, e^x).$$

3. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(1,1,5)$.
4. Déterminer les points critiques de f.
5. Utiliser la matrice hessienne de f pour déterminer la nature de ses points critiques.
6. En considérant l'application $x \longmapsto f(x, x)$, montrer que f n'a pas de maximum global, ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3.8 Corrigé des exercices sur le Chapitre 3

Solution de l'exercice 3.1

Étudions la différentiabilité des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par

1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^2$.

f définie par $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ est clairement de classe C^∞ $(f \in C^\infty)$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, donc différentiable sur ce domaine. C'est donc uniquement en $(0,0)$ que le problème se pose.

Étudions la différentiabilité de f en $(0,0)$.

f est différentiable en $(0,0)$ s'il existe une forme linéaire $L_{(0,0)}(h_1,h_2)$ sur $\mathbb{R}^2$, telle que

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{\frac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - 0 - (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{h_1^3-h_2^3}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right)$$

On pose $h_1 = r\cos\theta \quad h_2 = r\sin\theta$, on trouve

$$\lim_{r\longrightarrow 0} \left(\frac{r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{r^3} - \frac{r(\lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta)}{r} \right) = \cos^3\theta - \sin^3\theta - (\lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta)$$

Cette limite dépend de θ, donc elle n'existe pas.

Par conséquent f n'est pas différentiable en $(0,0)$, mais f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. ▮

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^2$.

f définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ est clairement de classe C^∞ $(f \in C^\infty)$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, donc différentiable sur ce domaine. C'est donc uniquement en $(0,0)$ que le problème se pose.

Étudions la différentiabilité de f en $(0,0)$.

f est différentiable en $(0,0)$ s'il existe une forme linéaire $L_{(0,0)}(h_1,h_2)$ sur $\mathbb{R}^2$, telle que

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}) - 0 - (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}) = 0.$$

On prend $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et on a : $\left|\sin(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \leq 1$.
D'où la différentielle de f en $(0,0)$, et donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
Solution de l'exercice 3.2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. La fonction f est continue en $(0;0)$ car

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} xy\frac{x+y}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)+(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} \\ &= 0 = f(0,0). \end{aligned}$$

2. Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}(0+h)(0)\frac{0+h+0}{(0+h)^2+(0)^2} = 0$$

La dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
La fonction est symétrique en x et y, donc la dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
3. Le gradient de f en $(0,0)$ est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad}f_{(0,0)} &= \nabla\ f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x,0)\ -f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(0,y)\ -f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le gradient de f en (x,y) est

$$\overrightarrow{grad}f_{(x,y)} = \nabla\ f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

4. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?
On a déjà vu que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{r^6\cos\theta\ \sin^2\theta(cos^2\theta+3\sin^2\theta)}{r^4} \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} r^2(\cos\theta\ \sin^2\theta(cos^2\theta+3\sin^2\theta)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \ \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{2r^6\cos^5\theta\ \sin^2\theta}{r^4}\\ &= \lim_{r\longrightarrow 0}2r^2\cos^5\theta\ \sin^2\theta=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{aligned}$$

la fonction est donc de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

5. Puisque toute fonction de classe $C^1(D_f)$ est différentiable sur D_f, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 3.3

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,-1)\\ 0 \ \text{si } (x,y)=(0,-1).\end{cases}$$

1. Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$D_f=\mathbb{R}^2$

La fonction f est clairement continue dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,-1)\}$, c'est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,-1)\}$. Elle est aussi continue en $(0,-1)$

La continuité en $(0,-1)$, on utilise les coordonnées polaires

$$x=r\cos\theta,\qquad y=-1+r\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,-1)}f(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,-1)}\frac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} rcos^2\theta\sin\theta=0.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,-1)}f(x,y) = 0=f(0,-1)$, d'où f est continue en $(0,-1)$.

Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Le gradient de f en $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\begin{aligned}\nabla\ f(x,y) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2x(y+1)[x^2+(y+1)^2]-2x(x^2(y+1))}{(x^2+(y+1)^2)^2}\\ \frac{x^2(x^2+(y+1)^2)-2x^2(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{2x(y+1)^3}{(x^2+(y+1)^2)^2}\\ x^2\frac{x^2-(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc le gradient de f en $(0,-1)$ est

$$\nabla\ f(0,-1)=\overrightarrow{\text{grad}}f_{(0,-1)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,-1)\ -f(0,-1)}{x-0}\\ \lim_{y\longrightarrow -1}\frac{f(0,y)\ -f(0,-1)}{y+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

3. La différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$
La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,-1)\}$
La différentiabilité en $(0,-1)$, on utilise les coordonnées polaires

$$h_1 = r\cos\theta, \qquad h_2 = -1 + r\sin\theta$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,-1)} \frac{f(h_1, h_2+1) \ - f(0,-1) - \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_1^2}} \neq 0$$

Donc f n'est pas différentiable en $(0,-1)$.
II. On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0 \qquad\qquad (I)$$

1. Vérifier que l'équation (I) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
si on pose $f(x,y) = xe^y + e^x \sin(2y)$ alors $f(0,0) = 0$
Le point $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$.
On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + e^x \sin(2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + 2e^x \cos(2y). \end{cases}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$, il existe un voisinage V de $(0,0)$ et un voisinage W de

$$x_0 = 0, \exists \varphi \in C^1, \text{ tels que} \forall (x,y) \in V, \forall x \in W, \ (f(x,y) = 0 \implies y = \varphi(x)).$$

2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de φ au point $(0, \varphi(0))$.

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))} \Longrightarrow \varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varphi(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + e^x \sin(2y) \ \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,\varphi(0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + 2e^x \cos(2y) \ \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0)) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2$$

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varphi(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0))} = -\frac{1}{2}$$

L'équation de la droite tangente au graphe de φ au point $(0, \varphi(0))$ est

$$y = \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0) \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}(x-0) + 0 \Longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}x.$$

3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ tout en étant sur la courbe.
On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - 0}{x - 0} = \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Solution de l'exercice 3.4
I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas .

La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\ ,\ \theta\in[0,2\pi],\quad r>0.\\ \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{r\longrightarrow 0} r^2\cos\theta\sin\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0=f(0,0).\end{aligned}$$

Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Le gradient de f.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$

$$\nabla\ f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{yx^4-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{xy^4+x^5-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}.$$

Pour $(x,y)=(0,0)$

$$\nabla\ f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\ \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}=-1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

4. Comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0),$$

le Théorème de Schwartz nous permet de conclure que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Solution de l'exercice 3.5

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0).\end{cases}$$

1. La continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.
$D_f=\mathbb{R}^2$.
La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, c'est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$. Elle est aussi continue en $(1,0)$.
La continuité en $(1,0)$. On utilise les coordonnées polaires

$$x=1+r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(1,0)}\frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}=\lim_{r\longrightarrow0}\frac{r\cos\theta.r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\\ &= \lim_{r\longrightarrow0} rcos\theta\sin^2\theta=0.\end{aligned}$$

On a $$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,0)} f(x,y) = 0=f(1,0),$$

d'où f est continue en $(1,0)$.

On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$

2. Gradient de f en $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\nabla\ f(x,y) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y^2((x-1)^2+y^2)-2(x-1)^2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}\\ \frac{2y(x-1)((x-1)^2+y^2)-2(x-1)y^3}{((x-1)^2+y^2)^2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{y^4-(x-1)^2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}\\ \frac{2y(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le gradient de f en $(1,0)$ est alors

$$\nabla\ f(1,0)=\overrightarrow{\text{grad}}_{f(1,0)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{x\longrightarrow0}\frac{f(1+x,0)\ -f(1,0)}{x}\\ \lim_{y\longrightarrow-1}\frac{f(1,y)\ -f(1,0)}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

3. Différentiabilité en $(1,0)$, on utilise les coordonnées polaires

$$h_1=1+r\cos\theta,\qquad h_2=r\sin\theta$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,0)}\frac{f(1+h_1,h_2)\ -f(1,0)-\lambda_1h_1-\lambda_2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_1^2}}\neq0$$

Donc f n'est pas différentiable en $(1,0)$.

4. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Puisque

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(1,0)} \frac{y^4-(x-1)^2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} \text{ n'existe pas}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue au point $(1,0)$, par suite f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Ou bien il suffit de dire que f n'est pas différentiable en $(1,0)$, donc elle n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

II. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x,y) = g(x,y) + e^x - 2y - 1.$$

1. L'équation $f(x,y)=0$ définit une fonction implicite $y=\varphi(x)$ au voisinage d'un point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ si g est de classe C^1 au voisinage du point (a,b), et

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) &=& g(x,y)+e^x-2y-1 \ = 0 \Longrightarrow g(a,b) = -e^a+2b+1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) &\neq& 0 \quad \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)-2\neq 0 \quad \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 2. \end{array}$$

2. Soit $g(x,y)=arctg(x+y)$, on va montrer qu'il existe une fonction φ de classe C^1 telle que $f(x,\varphi(x))=0$ au voisinage de $(0,0)$.

$$f(0,0) = g(0,0)+e^0-1 \ = arctg(0)+1-1=0 \qquad f \text{ est de classe } C^1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{1+(x+y)^2}-2\,\Big|_{(x,y)=(0,0)} \quad = 1-2=-1\neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage V de $(0,0)$, un voisinage W de 0 et une unique fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi &:& V \longrightarrow W \\ x &\mapsto& y=\varphi(x) \end{array}$$

de classe C^1 tels que $f(x,\varphi(x))=0$ et $\varphi(x)=0$.

3. Le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) &=& g(x,y)+e^x-2y-1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& \dfrac{1}{1+(x+y)^2}+e^x \quad , \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2 \\ \varphi'(0) &=& -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\dfrac{2}{-1}=2 \end{array}$$

$arctg(x+\varphi(x))+e^x-2\varphi(x)-1=0$
$\frac{1+\varphi'(x)}{1+(x+\varphi(x))^2}+e^x-2\varphi'(x)=0$

$$1+\varphi'(x)+e^x(1+(x+\varphi(x))^2)-2\varphi'(x)(1+(x+\varphi(x))^2)=0$$

$$\begin{array}{l} \varphi''(x)+e^x(1+(x+\varphi(x))^2)+2(1+\varphi'(x))(x+\varphi(x))e^x \\ -2\varphi''(x)(1+(x+\varphi(x)))-2\varphi'(x)(2x+\varphi'(x))(x+\varphi(x))=0 \end{array}$$

$$1+\varphi'(0)+1+(0+\varphi(0))^2-2\varphi'(0)(1+(0+\varphi(0))^2)=0,$$

et comme $\varphi'(0)=2$, alors

$$\begin{aligned}
1-\varphi''(0) &= 0 \Longrightarrow \varphi''(0)=1\\
\varphi(x) &= \varphi(0)+\frac{x}{1!}\varphi'(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+o(x^2)\\
\varphi(x) &= 2x+\frac{x^2}{2}+o(x^2).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.6

Développement limité d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions suivantes

$$1.f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}, \qquad 2.f(x,y)=\frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}.$$

$1.f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$, on utilise les développements limités usuelles au voisinage de zéro

$$\begin{aligned}
\cos t &= 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\\
e^t &= 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\\
\frac{1}{1-t} &= 1+t+t^2+o(t^2).
\end{aligned}$$

On a au voisinage de 0

$$\frac{1}{1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}=1+\frac{t^2}{2}+o(t^2),$$

donc

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\cos x}{\cos y}=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+o(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

$2.f(x,y)=\frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}$, on a au voisinage de 0

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= 1-\frac{(x+y)^2}{2}+o(x^2+y^2)\\
e^{\cos(x+y)} &= e(e^{(-\frac{(x+y)^2}{2}+o(x^2+y^2)})\\
&= e(1-\frac{(x+y)^2}{2}+o(x^2+y^2)).
\end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{1}{2+y}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{y}{2}}=\frac{1}{2}(1-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4})+o(y^2).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y} &= \frac{e}{2}(1-\frac{(x+y)^2}{2}+o(x^2+y^2))(1-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4})+o(y^2)\\
&= \frac{e}{2}(1-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{(x+y)^2}{2})+o(x^2+y^2)\\
&= \frac{e}{2}(1-\frac{y}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}-xy)+o(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.7

I. Étudions la nature du point critique $(0,0)$.

1.$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x-y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y-x\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -1.
\end{aligned}$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2\ , \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2, \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = -1.$$

$$\Delta = s^2 - rt = -3 < 0 \ \text{ et } \ r = 2 > 0.$$

Donc la fonction f admet en $(0,0)$ un minimum local qui est $f(0,0) = 0$.

2.$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x+2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+2x\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2.
\end{aligned}$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2, \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 2.$$

Comme

$$\Delta = s^2 - rt = 0, \ \text{on ne peut pas conclure.}$$

$$Hessf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres de $Hessf_{(0,0)}$.

$$\det(Hessf_{(0,0)} - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4$$

$$\det(Hessf_{(0,0)} - \lambda I_2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 4.$$

Alors la matrice $Hessf_{(0,0)}$ est semi-définie positive.

Donc la fonction f admet en $(0,0)$ un minimum local qui est $f(0,0) = 6$.

3.$f(x,y)=x^3+2xy^2-y^4+x^2+3xy+y^2+10$.
La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2+2y^2+2x+3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4xy-4y^3+3x+2y\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6x+2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=4x-12y^2+2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4x+3.\end{aligned}$$

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2, \qquad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2, \qquad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=3.$$

Or

$$\Delta = s^2-rt=5>0, \text{ donc } f \text{ n'admet pas un extremum en } (0,0).$$

$(0,0)$ est un point selle.

Solution de l'exercice 3.8

I. Les points critiques de f sont les solutions du système

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3a=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-2=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}3x^2-3a=0\\ 2y-2=0\end{cases}.$$

Si $a<0$, la fonction f n'a aucun point critique.
Si $a=0$, la fonction f admet un seul point critique $A=(0;1)$. En ce point critique on a

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=0, \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)=0, \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1)=0,$$

$s^2-rt=0$, la fonction f n'a aucun extremum car pour $p>0$,

$$\begin{aligned}f(p,1) &= p^3-1>-1=f(0,1)\\ f(-p,1) &= -p^3-1<-1=f(0,1)\end{aligned}$$

Si $a>0$, la fonction f admet deux points critiques B et C donnés par

$$\begin{cases}3x^2-3a=0\\ 2y-2=0\end{cases} \Longrightarrow x=-\sqrt{a} \text{ et } y=1 \;\text{ ou }\; x=\sqrt{a} \text{ et } y=1.$$

Donc $B=(-\sqrt{a},1)$, $\quad C=(\sqrt{a},1)$.
En $B=(-\sqrt{a},1)$ on a $s^2-rt=12\sqrt{a}>0$.
Donc la fonction f n'a en B ni maximum ni minimum local, mais un point selle.
En $C=(\sqrt{a},1)$ on a $s^2-rt=-12\sqrt{a}<0$. Donc la fonction f admet en C un minimum local .
On en conclut que f possède un minimum local si et seulement si $a>0$.

Chapitre 4

Intégrales doubles

4.1 Introduction

Les intégrales multiples sont une généralisation des intégrales simples (intégrale d'une fonction d'une seule variable). rappelons que l'intégrale de f sur $[a, b]$ notée $\int_a^b f(x)dx$ est interprétée comme l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$.

Une subdivision de $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de même longueur $\triangle_n = \frac{b-a}{n}$ permet de définir l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)(x_i - x_{i-1}), \quad a_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

4.2 Intégrales doubles

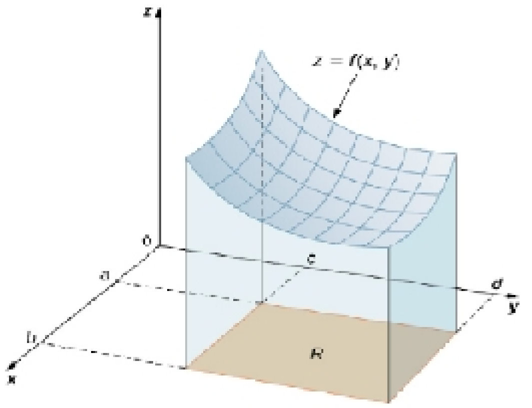
4.2.1 Principe de l'intégrale double sur un rectangle

Soit f une fonction réelle de deux variables x et y continue sur un rectangle

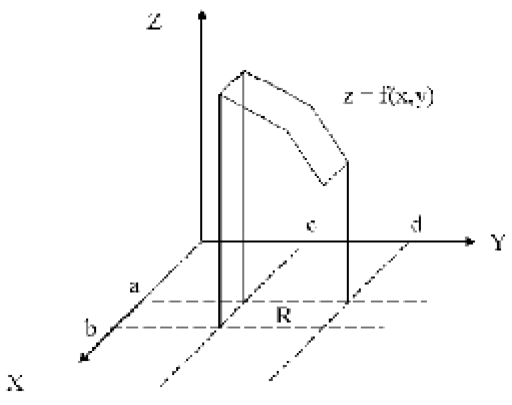
$$D = [a, b] \times [c, d].$$

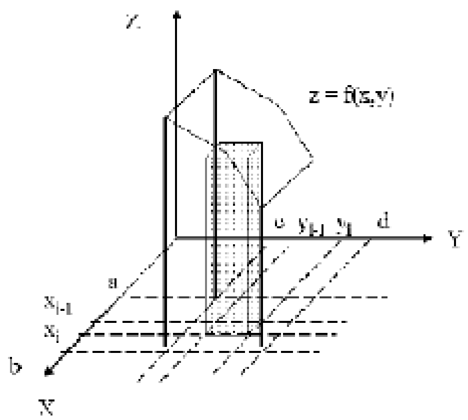
Sa représentation est une surface S dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,

$$z = f(x, y), \qquad G_f = \{(x, y, f(x, y))/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$



On partage le rectangle D en sous rectangles, dans chaque sous rectangles $[x_{i-1}, x_i, y_{i-1}, y_i]$, on choisit un point $M(x, y)$.





Définition 4.1 *Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$.*

On appelle subdivisions de D toute famille finie σ de points de D telle qu'il existe une subdivision $(x_i)_{i=1}^n$ de $[a, b]$ et $(y_i)_{j=1}^m$ de $[c, d]$ telle que $\sigma = (x_i y_i)$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ et chaque subdivision contient $n \times m$ calculs.

Définition 4.2 *Soit f une fonctions continue sur un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$, et soit σ une subdivision du rectangle D.*

Alors

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

est dite somme de Riemann de f correspondant à σ et au système de point $M(x, y)$.

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], \qquad y_j^* \in [y_{j-1}, y_j].$$

Si la limite de $S_{n,m}$ quand n et m tendent vers l'infini existe, elle s'appelle intégrale double de f sur D et se note

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n,m \longrightarrow +\infty} S_{n,m}.$$

En général on prend

$$n = m \text{ et } \ x_i^* = a + i(\frac{b-a}{n}), \quad y_j^* = c + j(\frac{d-c}{n}) \text{ et donc}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f((a + i(\frac{b-a}{n}), c + j(\frac{d-c}{n})))(\frac{b-a}{n})(\frac{d-c}{n}).$$

Exemple 4.1 $f(x,y) = x + 2y, \qquad D = [0,1] \times [0,1].$

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \frac{1}{n^2} \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\frac{i}{n} + 2\frac{j}{n}) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} j) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} ((1+1+1+ \ldots. +1)i + 2(1+2+ \ldots. + n)) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (in + 2\frac{n(n+1)}{2}) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} (n \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} n(n+1)) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} (n\frac{n(n+1)}{2} + n \times n(n+1)) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} (\frac{n^2(n+1)}{2} + n^2(n+1)) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} (\frac{3n^2(n+1)}{2}) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

1. L'intégrale double est utilisé pour calculer les volumes, et l'intégrale simple pour calculer les aires.
2. Dans une intégrale double les bornes en x et y doivent toujours être rangées en ordre croissant.

4.3 Propriétés des intégrales doubles

1. Linéarité
   Quelles que soient les fonctions f et g, et quelles que soient les constantes réelles α et β on a

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

2. Additivité
   Si D et $D^{'}$ deux rectangles tels que $D \cap D' \neq \varnothing$, alors :

$$\iint\limits_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy.$$

3. Positivité
   Si $f(x,y) \geq 0$ sur D $(f \neq 0)$ alors

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy > 0.$$

4. Si $f \leq g$ $\forall (x,y) \in D$, alors

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

5.

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy.$$

Définition 4.3 *Soit f une fonction continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. On suppose que ce domaine D peut être défini par*

$$(x,y) \in D \Longleftrightarrow (a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq v(x))$$

a et b étant des réels et u et v des fonctions d'une variable réelle tels que $a < b$ et $\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leq v(x)$.

Alors l'intégrale double de la fonction f sur le domaine D est le nombre réel

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Théorème 4.1 *(Fubini)*
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
1. Cas où $D = [a;b] \times [c;d]$; $a \leq b$ et $c \leq d$, on a :

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

2.Cas où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq v(x)\}$ où $u, v : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors

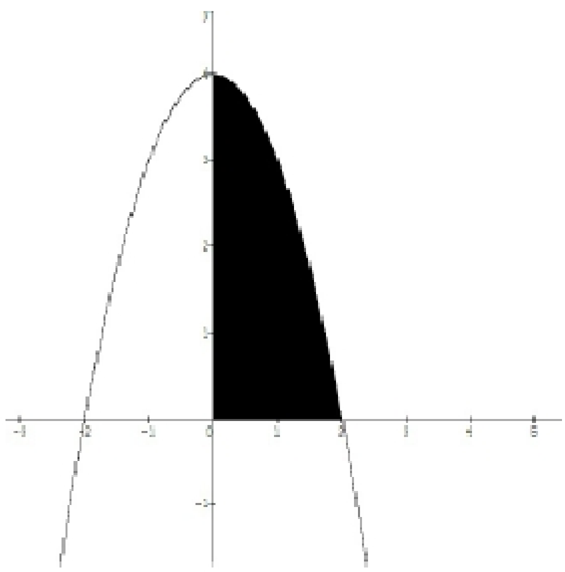
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Exemple 4.2 *Calculons l'intégrale double suivante*

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \\ I &= \int\limits_0^1 dy \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dx = -\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{1+x+y} \right]_0^1 dy \\ &= -\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2+y} - \frac{1}{1+y} \right) dy = -\left[\ln(2+y) - \ln(1+y) \right]_0^1 = \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exemple 4.3 *Représenter le domaine d'intégration et calculer l'intégrale double suivante*

$$I = \iint\limits_D \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$



$$I = \iint\limits_D \frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy = \int\limits_0^4 \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} (\frac{xe^{2y}}{4-y}dx)dy = \int\limits_0^4 [\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)}]_0^{\sqrt{4-y}}dy$$
$$= \int\limits_0^4 \frac{e^{2y}}{2}dy = \frac{e^{2y}}{2}]_0^4 = \frac{e^8-1}{4}.$$

4.4 Variables séparables

Proposition 4.1 *Soit f une fonction telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x)h(y).$$

Soit $D = [a,b] \times [c,d]$, alors on peut séparer les variables, et l'intégrale double sur D de f s'écrit comme produit de deux intégrales simple.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \left(\int\limits_a^b g(x)dx\right) . \left(\int\limits_c^d h(y)dy\right).$$

Exemple 4.4

$$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$
$$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}dx\right) . \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+y^2)}dy\right)$$
$$= [Arctgx]_0^1 . [Arctgy]_0^1 = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}.$$

4.4.1 Calcul d'aire

Proposition 4.2 *L'aire d'un domaine D régulièr est donnée par la formule*

$$Aire(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

Si D est caractérisé par

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le g(x). \end{cases}$$

.

Alors

$$Aire(D) = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^{g(x)} dy\right) dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Exemple 4.5 *Le domaine d'intégration D s'exprime sous la forme*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 2, \ x \leq y \leq x+2\right\}.$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Lorsque f est la fonction constante qui vaut 1, alors

$$\iint_D 1dxdy = Aire\,(D),$$

représente l'aire, ou la surface du domaine D. Par conséquent

$$Aire\,(D) = \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} 1dy \right) dx = \int_0^2 \left([y]_x^{x+2} \right) dx = \int_0^2 2dx = [2x]_0^2 = 4.$$

4.4.2 Changement de variables

Théorème 4.2 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction continue des deux variables (x,y), définie sur un domaine D. On suppose qu'il existe un changement de variable bijectif de classe C^1.*

$$\varphi : (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$$

entre un domaine D et D' avec $D' = \varphi(D)$.
Alors on a la formule de changement de variable pour les intégrales doubles.

$$\iint_{D'} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\varphi(D)} f o\varphi(u,v) \left|\det J(\varphi)_{(u,v)}\right| dudv.$$

Exemple 4.6 *Calculer, en utilisant le changement de variables, l'intégrale double suivante :*

$$J = \iint_{D'} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \ -1 \leq x \leq 0, \ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0\}.$$

On passe en coordonnées polaires en posant

$$x = r\cos\theta \ \text{ et } y = r\sin\theta, \varphi : (r,\theta) \longrightarrow (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Les fonctions coordonnées de φ sont : $\varphi_1(r,\theta) = r\cos\theta$, $\quad \varphi_2(r,\theta) = r\sin\theta$.
Elles sont de classes C^∞, donc φ est différentiable et sa matrice Jacobienne est

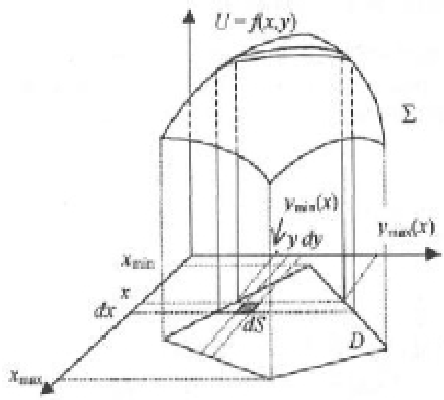
$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

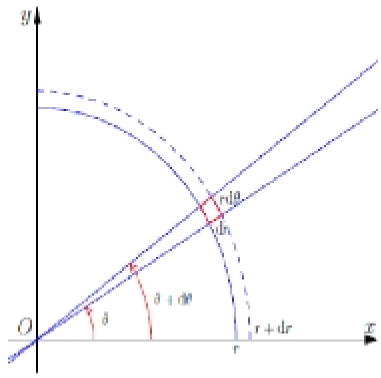
Le Jacobien de cette application est alors

$$J = |det(J(\varphi))| = \left|r\cos^2\theta + \ r\sin^2\theta\right| = r.$$

Remarquons que : $(x,y) \in D' \Longrightarrow 0 \leq r \leq 1, \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.
La formule de changement de variables en coordonnées polaires donne

$$dxdy = rdrd\theta$$





$$J = \iint\limits_{D'} \frac{2dxdy}{1+\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^1 \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{rd\theta dr}{1+r} = \pi \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+r})dr = \pi(1-\ln(2))$$

4.5 Intégrale curviligne

4.5.1 Notions sur les arcs paramétrés

Définition 4.4 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension 2 ou 3. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Un arc paramétré γ de classe C^k est une application de classe C^k de $[a,b]$ dans D notée*

$$\begin{array}{ccc} \gamma & : & [a,b] \longrightarrow D \\ t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

$\gamma([a,b])$ *est appelé support de l'arc paramétré.*

Exemple 4.7 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ *est un arc paramétré de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.5 *Le point $\gamma(a)$ est appelé l'origine de la courbe et $\gamma(b)$ est l'extrémité de la courbe γ.*

La courbe γ est dite fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 4.6 *A est appelé point simple de $\gamma(U)$ si il existe un unique $tA \in U$ tel que $A = \gamma(tA)$.*

Un point multiple est un point qui n'est pas simple.

4.5.2 Courbe inverse

Définition 4.7 *On appelle courbe inverse de la courbe paramétrée γ, l'application γ' : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$*
définie par $t \longmapsto \gamma'(t) = \gamma(a + b - t)$.

C'est la courbe parcourue au sens inverse. En effet $\gamma(a)$ origine de γ
et $\gamma(a + b - a) = \gamma'(a) = \gamma(b)$,
donc $\gamma(b)$ origine de γ'.

Paramétrisations des droites et des segments

1. La droite (AB) a pour paramétrisations.

$$\begin{cases} x(t) = tx_{\overrightarrow{AB}} + x_A \\ y(t) = ty_{\overrightarrow{AB}} + y_A \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. Le segment $[AB]$ parcouru de A à B.

$$\begin{cases} x(t) = tx_{\overrightarrow{AB}} + x_A \\ y(t) = ty_{\overrightarrow{AB}} + y_A \end{cases}, \qquad t \in [0, 1].$$

Cas particulier

1. Le segment $[AB]$ est un segment horizontal.

$$\begin{cases} x(t) = tx_B + (1 - t)x_A \\ y(t) = y_A \end{cases},$$

   Cette application constitué une paramétrisation du segment horizontal $[AB]$.
2. Le segment $[AB]$ est un segment vertical

$$\begin{cases} x(t) = x_A \\ y(t) = ty_B + (1 - t)y_A \end{cases},$$

   Cette application constitué une paramétrisation du segment vertical $[AB]$.
3. Cercle.
   Soit R un réel strictement positif fixé.
   L'application
   $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $x(t) = R\cos\theta$, $y(t) = R\sin\theta$ est une paramétrisation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R.
4. Vecteur tangent
   On suppose que γ est une courbe de classe C^1. Le vecteur $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ est le vecteur tangent à la courbe γ au point $\gamma(t)$.

4.6 Champ de vecteurs

Définition 4.8 *Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.*
Un champ de vecteurs sur D est une application $\overrightarrow{F}$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{F} & : & D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (P(x,y),\ Q(x,y)), \end{array}$$

P, Q sont deux fonctions à deux variables.

Exemple 4.8 *Le gradient d'une fonction f*
$\overrightarrow{grad}f_{(x,y)} = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ *est un champ de vecteurs noté* $\overrightarrow{\bigtriangledown} f$.

4.6.1 Intégrale d'un champ de vecteurs

Soit $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ un champ de vecteurs défini de classe C^1 sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.
Soit

$$\begin{array}{rcl} \gamma & : & [a,b] \longrightarrow D \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

une courbe paramétrée de D de classe C^1.

Définition 4.9 *L'intégrale curviligne de $\overrightarrow{F}$ sur le long de γ est définie par :*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overrightarrow{F} &= \int_a^b < \overrightarrow{F}((\gamma(t), \gamma'(t)) > dt \\ &= \int_a^b < (P(x(t),y(t)), Q(x(t),y(t))), (x'(t), y'(t)) > dt \\ &= \int_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lorsque γ est fermée $\int_\gamma \overrightarrow{F} = \oint_\gamma \overrightarrow{F}$.

4.6.2 Circulation d'un champ vectoriel

Définition 4.10 *Soit $\overrightarrow{F}$ un champ vectoriel de composantes P et Q, défini sur un ouvert U et 'γ un arc paramétré de classe C^1 dont le support est inclus dans U, et dont une paramétrisation est $P_1 = ([a,b], f)$. L'intégrale curviligne du champ vectoriel $\overrightarrow{F}$ le long de γ aussi* *appelée circulation du champ vectoriel* $\overrightarrow{F}$ *le long de '*γ *est égale à*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{M} &= \int\limits_{a}^{b} \overrightarrow{F}(f(t)).\overrightarrow{f'(t)}dt \\ &= \int\limits_{a}^{b} \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right) dt\end{aligned}$$

(x *et* y *désignent les fonctions composantes de* f*).*

4.6.3 Notations différentiables

Dans (4.1)
$x(t)$ est remplacé par x, et $y(t)$ est remplacé par y.
$x'(t)$ est remplacé par dx, et $y'(t)$ est remplacé par dy.
Donc (4.1) devient

$$\int\limits_{\gamma} \overrightarrow{F} = \int\limits_{\gamma} (P(x,y)x' + Q(x,y)y')dt.$$

Exemple 4.9 *Soient*

$$\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = (x,y), \text{ et } \gamma(t) = (t, 2t), \ t \in [0,1],$$

alors

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \overrightarrow{F} &= \int\limits_{\gamma} (P(x,y)x' + Q(x,y)y')dt \\ &= \int\limits_{0}^{1} (x(t)dx + y(t)dy)dt \\ &= \int\limits_{0}^{1} (t \times 1 + 2t \times 2)dt = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 4.10 *On se donne*

$$\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = (-y,x), \text{ et } \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \ t \in [0, 2\pi].$$

Alors

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \overrightarrow{F} &= \int\limits_{\gamma} (P(x,y)x' + Q(x,y)y')dt \\ &= \int\limits_{0}^{2\pi} -\sin t x'(-\sin t) + \cos t \cos t)dt \\ &= \int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi.\end{aligned}$$

4.6.4 Propriétés des intégrales curvilignes

1. Linéarité
   Soit $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$ deux champs de vecteurs et α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_\gamma (\alpha\overrightarrow{F}_1 + \beta\overrightarrow{F}_2) = \alpha\int_\gamma \overrightarrow{F}_1 + \beta\int_\gamma \overrightarrow{F}_2.$$
2. Relation de Chasles
   Soient $\gamma_1 = \widehat{AB}$ et $\gamma_2 = \widehat{BC}$ deux arcs paramétrés, on pose $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.
   Alors pour un champ de vecteur $\overrightarrow{F}$
$$\int_\gamma \overrightarrow{F} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} + \beta\int_{\gamma 2} \overrightarrow{F}.$$
3. Changement d'orientation
   Si γ et γ' sont deux arcs paramétrés inverses, alors pour un champ de vecteur $\overrightarrow{F}$.
$$\int_\gamma \overrightarrow{F} = -\int_{\gamma'} \overrightarrow{F}.$$
   Le changement d'orientation entraine le changement de signe de l'intégrale curviligne.

4.6.5 Formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann permet de ramener dans certains cas , une intégrale double en une intégrale curviligne sur la courbe qui délimité le domaine d'intégration.

Théorème 4.3 *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, limité par la courbe γ fermée (ou bien sa frontière $\partial D = \gamma$).*

Soient P et Q deux fonctions de classe C^1 sur D, alors on a la formule de Green-Riemann
$$\iint (\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y))dxdy = \oint (P(x,y)dx + Q(x,y)dy).$$

Preuve. Pour simplifier, on suppose D convexe. Notons I la projection du domaine D sur l'axe Ox. Comme D est convexe, il est défini par des inégalités $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions continues sur I. On calcule
$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in I,\ f_1(x)\leq y\leq f_2(x)\}} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y))dxdy &= \int_I dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y))dy \\
&= \int_I \left(P(x,f_2(x)) - P(x,f_1(x))\right) dx \\
&= \int_\gamma Pdx.
\end{aligned}$$

De même $\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = -\int_\gamma Qdy.$ ∎

Lemme 4.1 *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$.*

$Aire(D) = \iint_D dxdy$

$Aire(D) = \oint_\gamma xdy = \oint_\gamma -ydy = \frac{1}{2}\oint_\gamma (xdy - ydx).$

Preuve. *Nous allons établir que les trois intégrales curvilignes intervenant dans cette formule sont égales.*

$$Si \quad A = \oint_\gamma xdy, \quad B = \oint_\gamma -ydy, \quad C = \frac{1}{2}\oint_\gamma (xdy - ydx),$$

on remarque que $C = \frac{1}{2}(A + B)$, donc il suffit d'établir que $A = B$. or,

$$A - B = \oint_\gamma (xdy - ydx) = \oint_\gamma (Pdy - Qdx).$$

Avec $P(x, y) = y$ et $Q(x, y) = x$. Il est clair que $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, donc γ est une forme différentielle fermée, qui est définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ qui est bien sûr étoilé : γ est donc exacte, et l'intégrale d'une forme différentielle exacte le long d'un arc fermé est nulle. On a $A-B = 0$ donc $A = B = C$. ■

4.7 Exercices sur le Chapitre 4

Exercice 4.1

En utilisant la définition de l'intégrale double, montrer que

$$\iint_D (2x + 3y)dxdy = \frac{5}{2}, \quad \text{où} \quad D = [0, 1] \times [0, 1].$$

Exercice 4.2

Calculer les intégrales doubles ci-dessous sur le domaine D qui est en général précisé.

1. $I = \iint_D (1 + x - y)dxdy, \qquad D = [-1, 1] \times [-1, 0]$
2. $I = \iint_D (x + y)\sin x \sin y dxdy, \qquad D = [0, \pi]^2$
3. $I = \iint_D \ln(x + y + 1)dxdy,$ D est le triangle de sommets $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$
4. $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x + y)^2}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x + y \leq 2\}$

5. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$
6. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3, y \geq 2, x+y \leq 5\}$
7. $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 2, x^2-1 \leq y \leq x+1\}.$

Exercice 4.3

1. Soit le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq x+2\}$.
   Représenter le domaine D, et en déduire l'aire de D,
2. Calculer $\displaystyle\iint_A \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$ où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x < 7,\ 8-x \leq y \leq x+1\}$.

Exercice 4.4
En utilisant les coordonnées polaires, calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\}.$
2. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$
3. $I = \displaystyle\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2+y^2-2x \leq 4\}$
4. $I = \displaystyle\iint_D \frac{xydxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1,\ x > 0,\ y > 0\}.$
5. $I = \displaystyle\iint_D \frac{xydxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2+y^2 \geq 1\}.$
6. $I = \displaystyle\iint_D \frac{xydxdy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ -1 \leq x \leq 0, \ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0\}$

Exercice 4.5
Soit V le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de composantes respectives notées :
$P(x,y) = -yx^2$ et $Q(x,y) = xy^2$.
On définit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2y < 0\}$.
Notons Γ^+ le bord de D orienté dans le sens trigonométrique.

1. Représenter graphiquement le domaine D.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy$.
3. Retrouvez le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 4.6
Calculer les intégrales suivantes de deux manières : directement, puis en appliquant la formules de Green Riemann.

1. $I = \iint\limits_{\gamma} x^3 dy - y^3 dx, \quad \gamma$ est le cercle de centre O, et de rayon R, orienté dans le sens trigonométriq

2. $I = \iint\limits_{\partial K^+} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy, \qquad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$

et ∂K^+ est le bord de K orienté positivement.

Exercice 4.7
Soit w la forme différentielle définie par
$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ avec $P(x, y) = x + y$ et $Q(x, y) = x - y$
Calculer $\int\limits_{\gamma} w$ lorsque :

1. γ est l'arc du cercle trigonométrique joignant le point $A = (1, 0)$ et le point $B = (0, 1)$ dans le sens direct.
2. γ est le segment de droite $[AB]$ (parcouru de A vers B).

Exercice 4.8
Soit $\overrightarrow{V} = \binom{P}{Q}$ le champ vectoriel de $\mathbb{R}^2$ défini par $P(x, y) = xy$ et $Q(x, y) = x + y$.
Calculer la circulation de ce champ $\overrightarrow{V}$ le long de l'arc γ lorsque :

1. γ est l'arc de la parabole $y = x^2$ parcouru de gauche à droite entre son point A d'abscisse -1 et son point B d'abscisse 2.
2. γ est. le segment de droite $[AB]$ (parcouru de A vers B).
3. γ est l'arc du cercle de diamètre $[AB]$ parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 4.9
Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe fermée constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre).
2. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

4.8 Corrigé des exercices sur le Chapitre 4

Solution de l'exercice 4.1
En utilisant la définition de l'intégrale double, on va montrer que

$$\iint_D (2x+3y)dxdy = \frac{5}{2}, \quad \text{où } \ D = [0,1]\times[0,1].$$

$f(x,y) = 2x+3y, \qquad D = [0,1]\times[0,1]$

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\frac{1}{n^2} \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(2\frac{i}{n}+3\frac{j}{n}) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2i}{n}(n+1)+\frac{3}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{2(n+1)}{n}\sum_{i=0}^{n} i+\frac{3(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n}1) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{2(n+1)}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3(n+1)}{2}(n+1)) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^2}((n+1)^2+\frac{3}{2}(n+1)^2) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{5}{2}(n+1)^2 = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.2
Calculons les intégrales doubles suivantes sur le domaine D.
1. $I = \iint_D (1+x-y)dxdy, \quad D = [-1,1]\times[-1,0]$

$$\begin{aligned}
I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{0}(1+x-y)dxdy &= \int_{-1}^{0}[x+\frac{x^2}{2}-xy]_{-1}^{1}dy \\
&= \int_{-1}^{0}[(1+\frac{1}{2}-y)-(-1+\frac{1}{2}+y)]dy \\
&= \int_{-1}^{0}(2-2y)dy = 2[y-\frac{y^2}{2}]_{-1}^{0} = 3.
\end{aligned}$$

2. $I = \iint_D (x+y)\sin x \sin y dxdy, \quad D = [0,\pi]^2$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y)\sin x \sin y dxdy \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi (x+y)\sin x \sin y dxdy \\ &= \int_0^\pi \sin y \left(\int_0^\pi (x+y)\sin x dx \right) dy \\ &= \int_0^\pi \sin y \left(\int_0^\pi x \sin x dx + y \int_0^\pi \sin x dx \right) dy = 4\pi. \end{aligned}$$

3. $I = \iint_D \ln(x+y+1)dxdy$, D est le triangle de sommets $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$

$$I = \iint_D \ln(x+y+1)dxdy$$

L'orsque x est compris entre 0 et 1, y varie de 0 à $1-x$

$$I_y = \int_0^{1-x} \ln(x+y+1)dy$$

$u = x+y+1 \Longrightarrow du = dy$
$y = 0 \Longrightarrow u = x+1, \;\; y = 1-x \Longrightarrow u = 2$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{x+1}^2 \ln u du = [u \ln u - u]_{x+1}^2 \\ &= 2\ln 2 - 2 - (x+1)\ln(x+1) + x + 1 \end{aligned}$$

$$I = (2\ln 2 - 2 - (x+1)\ln(x+1) + x + 1)dx$$

$t = x+1 \Longrightarrow dt = dx$
$x = 0 \Longrightarrow t = 1, \;\; x = 1 \Longrightarrow t = 2$

$$I = 2\ln 2 - 2 - \int_1^2 (t\ln t + t)dt = \frac{1}{4}.$$

4. $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x+y \leq 2\}$

$$\begin{aligned}
&D = D_1 \cup D_2, \ D_1 \cup D_2 = \varnothing \\
&D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \ \text{ et } \ 1-x \leq y \leq 2-x\} \\
&D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2 \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq 2-x\} \\
&I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2} + \iint\limits_{D_2} \frac{dxdy}{(x+y)^2} \\
&= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{2-x} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{1-x}^{2-x} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{-1}{x+y} \right]_{1-x}^{2-x} \right) dx + \int_1^2 \left(\left[\frac{-1}{x+y} \right]_0^{2-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+2-x} - \frac{-1}{x+1-x} \right] dx + \int_1^2 \left[\frac{-1}{x+2-x} - \frac{-1}{x+0} \right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} dx + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right] dx = \ln 2.
\end{aligned}$$

5. $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^3} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{-1}{2(1+x+y)^2} \right]_0^{1-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{-1}{2(1+x+1-x)^2} - \frac{-1}{2(1+x+0)^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{2(1+x)^2} \right) dx \\
&= \left[\frac{-x}{8} - \frac{1}{2(1+x)} \right]_0^1 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

6. $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3, y \geq 2, x+y \leq 5\}$

$$\begin{aligned}
I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^3} &= \int_1^3 \left(\int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3} \right) dx \\
&= \int_1^3 \left(\left[\frac{-1}{2(x+y)^2} \right]_2^{5-x} \right) dx \\
&= \int_1^3 \left(\left[\frac{-1}{2(x+5-x)^2} - \frac{-1}{2(x+2)^2} \right]_2^{5-x} \right) dx \\
&= \int_1^3 \left(\frac{-1}{50} + \frac{1}{2(x+2)^2} \right) dx \\
&= \left[\frac{-x}{50} - \frac{1}{2(x+2)} \right]_1^3 = \frac{2}{75}.
\end{aligned}$$

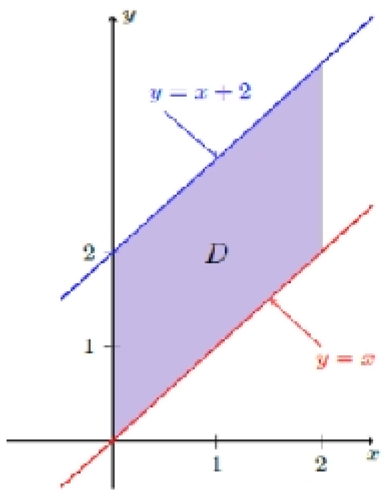
7. $I = \iint\limits_D (x^2+y)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 2, x^2-1 \leq y \leq x+1\}.$

$$\begin{aligned}
I = \iint\limits_D (x^2+y)dxdy &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2-1}^{x+1} (x^2+y)dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^2 \left(\left[yx^2 + \frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2-1}^{x+1} \right) dx \\
&= \int_{-1}^2 \left((x+1)x^2 + \frac{1}{2}(x+1)^2 - (x^2-1)x^2 - \frac{1}{2}(x^2-1)^2 \right) dx \\
&= \left[-\frac{3}{10}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{117}{20}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.3

1. Le domaine d'intégration D s'exprime sous la forme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 2, \ x \leq y \leq x+2\right\}.$$



.

En appliquant le Théorème de Fubini, on obtient

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Lorsque f est la fonction constante qui vaut 1, l'intégrale $I = \iint_D 1dxdy = Aire\,(D)$

représente l'aire, ou la surface du domaine D.

Par conséquent

$$Aire\,(D) = \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} 1dy \right) dx = \int_0^2 \left([y]_x^{x+2} \right) dx = \int_0^2 2dx = [2x]_0^2 = 4$$

2. Calculer $\iint_A \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$ où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x < 7, \ 8 - x \leq y \leq x+1\}$

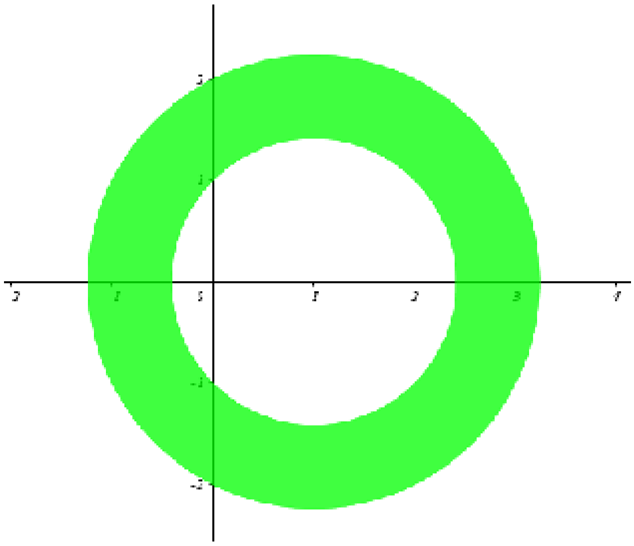
L'inégalité $8 - x < x + 1$ entraine $x > \frac{7}{2}$. De plus $x < 7$, donc

$$\iint_A \frac{1}{(x+y)^2} dxdy = \int_{\frac{7}{2}}^{7} \left(\int_{8-x}^{x+1} \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_{\frac{7}{2}}^{7} \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{8-x}^{x+1} dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{7} \left(\frac{-1}{2x+1} + \frac{1}{8} \right) dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{15}\right) + \frac{7}{16}.$$

Solution de l'exercice 4.4
En utilisant les coordonnées polaires, on calcule les intégrales doubles suivantes
1.
$$I = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\}.$$
Les fonctions coordonnées de ψ sont, $x = \psi_1(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y = \psi_2(r,\theta) = r\sin\theta$.
Elles sont de classe C^∞, donc ψ est différentiable et sa matrice Jacobienne.
$$J(\psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} & \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial r} & \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$
Le Jacobien de cette application est donc
$$J = |\det(J(\psi))| = \left|r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right| = r.$$
Remarquons que
$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \in & D \text{ entraine } 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi \\ 1+x^2+y^2 & = & 1+(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2 = 1+r^2. \end{array}$$
La formule de changement de variables en coordonnées polaires donne donc
$$dxdy = rdrd\theta$$
$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{rd\theta dr}{1+r^2} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2rdr}{1+r^2} = 2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \pi\ln 2. \end{aligned}$$
2.
$$I = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$$
On passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
Remarquons que : $(x,y) \in D \Longrightarrow 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
$1+x^2+y^2 = 1+(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2 = 1+r^2$.
$$dxdy = rdrd\theta$$
$$I = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rd\theta dr}{1+r^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2rdr}{1+r^2} = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}\ln(1+r^2)]_0^1 = \frac{\pi\ln 2}{4}$$
3.

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 - 2x \leq 4\}.$$



On passe en coordonnées polaires en posant

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta, \text{ donc } x^2 + y^2 = r^2.$$

Remarquons que, $(x,y) \in D \Longrightarrow 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{\ln r^2}{\sqrt{r^2}} r d\theta dr \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{\ln r^2}{r} r d\theta dr = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \ln r dr \\ &= 4\pi \int_1^2 \ln r dr = 4\pi \left[r \ln r - r \right]_1^2 = 4\pi(2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

4.

$$I = \iint_D \frac{xydxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0\}.$$

On passe en coordonnées polaires en posant

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta, \text{ donc } x^2 + y^2 = r^2.$$

Remarquons que, $(x,y) \in D \Longrightarrow 0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \frac{xydxdy}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{1+r^2} rd\theta dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^1 \frac{r^3}{r^2+1} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \int_0^1 (r - \frac{r}{r^2+1}) dr \\
&= \left[\frac{-1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}\ln(r^2+1)\right]_0^1 = \frac{1-\ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

6.

$$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad -1 \leq x \leq 0, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0\}.$$

I. On passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
Remarquons que $(x,y) \in D \Longrightarrow 0 \leq r \leq 1, \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, $dxdy = rdrd\theta$
$1 + x^2 + y^2 = 1 + (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 1 + r^2$.
La formule de changement de variables en coordonnées polaires donne donc

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^1 \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{rd\theta dr}{(1+r^2)^2} = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{rdr}{(1+r^2)^2} = \frac{\pi}{2}.\int_0^1 \frac{rdr}{(1+r^2)^2} = \frac{\pi}{2}J \\
\text{où } J &= \int_0^1 \frac{rdr}{(1+r^2)^2}, \text{ on fait le changement de variables } 1+r^2 = t \Longrightarrow 2rdr = dt \Longrightarrow rdr = \frac{1}{2}dt \\
J &= \int_0^1 \frac{rdr}{(1+r^2)^2} = \frac{1}{2}J = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\frac{-1}{t}]_1^2 = \frac{1}{4}, \quad \text{donc } I = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.5
Soit V le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de composantes respectives notées

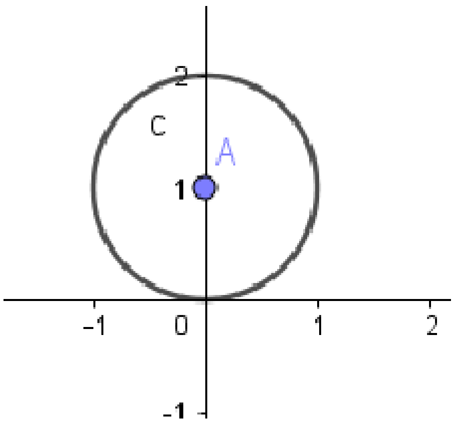
$$P(x,y) = -yx^2 \text{ et } Q(x,y) = xy^2.$$

On définit

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y < 0\right\}, \\
x^2 + y^2 - 2y &= 0 \Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.
\end{aligned}$$

1. On reconnait l'équation d'un cercle de centre $A(0;1)$ et de rayon 1. D est donc le

disque de centre A et de rayon 1 privé de sa frontière.



2. Calculer $\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy$

Une paramétrisation de Γ^+ est donc

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 1 + \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

On obtient alors

$$dx = -\sin t dt \quad \text{et} \quad dy = \cos t dt.$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy &= \int\limits_0^{2\pi} -\left((1+\sin t)\cos^2 t \sin t + \cos^2 t(1+\sin t)^2\right) dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2 t(1+\sin t)(1+2\sin t)\right) dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t dt + \int\limits_0^{2\pi} 3\cos^2 t \sin t dt + \int\limits_0^{2\pi} 2\cos^2 t \sin^2 t dt \\
&= \left[\frac{t + \cos t \sin t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[-\cos^3 t\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{t + \cos t \sin t - 2\sin t \cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Utilisons la formule de Green-Riemann.

On calcule $\iint\limits_D ((\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y))dxdy.$

On passe aux coordonnées polaires et on obtient

$$\begin{cases} x(t) = r\cos\theta \\ y(t) = 1 + r\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \implies dxdy = rdrd\theta$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x^2 + y^2 = f(x,y).$$

$$\begin{aligned}
\iint_D ((\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y))dxdy &= \iint_D f(r\cos\theta, 1 + r\sin\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r^2\cos^2\theta + (1 + r\sin\theta)^2\right) r dr d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r^3 + r + 2r^2\sin\theta\right) dr d\theta \\
&= \int_0^1 \left(2\pi(r^3 + r) + 2r^2\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi}\right) dr \\
&= 2\pi \int_0^1 (r^3 + r) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 \\
&= 2\pi(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = 2\pi\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Intégrales triples, intégrales de surface

5.1 Intégrales triples

Le principe est le même que les intégrales doubles. Si f une fonction continue à trois variables sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ à variables réelles.

On définit $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ comme la limite de la somme de la forme

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k),$$

avec : $\begin{cases} x_i \in [a,b] & 1 \leq i \leq n \\ y_j \in [c,d] & 1 \leq i \leq n \\ z_k \in [e,f] & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$

Remarque 5.1 *On a les mêmes propriétés que celles des intégrales doubles.*

5.1.1 Théorème de Fubini

Théorème 5.1 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1. Cas où $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,m]$ (sur un parallélépipède), on se ramène à trois intégrales simples

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^m f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx.$$

2. Cas où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x,y) \in \Delta, u(x,y) \leq z \leq v(x,y)\}$, où u, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues, D est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_\Delta \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy.$$

3. Cas où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq z \leq b,\ (x,y) \in \Delta_{(z)}\}$*, où* $u,\ v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont continues,* $\Delta_{(z)}$ *est un ensemble fermé borné de* $\mathbb{R}^2$*, alors*

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} \left[\iint\limits_{\Delta(z)} f(x,y,z)dxdy \right] dz.$$

Exemple 5.1

$$I_1 = \iiint\limits_{D} (x+3yz)dxdydz, \quad D = [0,1] \times [1,2] \times [1,3]$$

$$\begin{aligned} I_1 = \iiint\limits_{D} (x+3yz)dxdydz &= \int\limits_{0}^{1} \left[\int\limits_{1}^{2} \left[\int\limits_{1}^{3} (x+3yz)dz \right] dy \right] dx \\ &= \int\limits_{0}^{1} \left[\int\limits_{1}^{2} \left[(xz + \frac{3}{2}yz^2) \right]_{1}^{3} dy \right] dx \\ &= \int\limits_{0}^{1} \left[\int\limits_{1}^{2} \left[(2x+12y)dy \right] dy \right] dx \\ &= \int\limits_{0}^{1} \left[\int\limits_{1}^{2} \left[2xy + 6y^2 \right]_{1}^{2} \right] dx = 19. \end{aligned}$$

5.1.2 Changement de variables

Théorème 5.2 *Soit* $\varphi : U \longrightarrow V$ *(* $U,\ V$ *deux ouverts de* $\mathbb{R}^3$*) de classe* C^1*, et*

$$J_\varphi = \frac{\partial(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)}{\partial(x,\ y,\ z)} \neq 0,$$

le Jacobien de φ*.*

La formule de changement de variable donne

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{U} f(x',y',z') \left| J_\varphi \right| dx'dy'dz'.$$

1. *Calcul en coordonnées cylindriques*

   (a) *Les coordonnées cylindriques sont données par*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Le Jacobien est donc

$$J = |det(J(\varphi))| = 1 \times \left| r\cos^2\theta + \ r\sin^2\theta \right| = r,$$

et

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_U f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz.$$

Exemple 5.2 *Calculer*

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz, \ V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2 = 3z, \ z = 3\}.$$

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z, \end{cases}$ *et on remarque que* $0 \le r \le 3, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ \frac{r^2}{2} \le z \le 3.$

Donc

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz &= \iiint\limits_V r^2 r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^3 dz = \frac{18\pi}{2}. \end{aligned}$$

b. ***Coordonnées sphériques***
Les fonctions coordonnées sont définies par

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Le Jacobien est donc

$$J = det(J(\psi)) = r^2\sin\theta.$$

et

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_U f(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

5.1.3 Variables séparables

Proposition 5.1 *Soit f une fonction telle que*

$$\forall (x;y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \text{on a } f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z).$$

Soit $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,m]$, alors on peut séparer les variables, et l'intégrale triple sur V de f s'écrit comme le produit de trois intégrales simples.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \left(\int_a^b g(x)dx \right) . \left(\int_c^d h(y)dy \right) . \left(\int_e^m k(z)dz \right)$$

Exemple 5.3 *Calculer*

$$\iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz, \ V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

On pose $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ *et on remarque que,* $0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

Donc

$$\begin{aligned} \iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{(r^2)^{\frac{3}{2}}} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^3} r^2 dr \int_0^{\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3}(e-1). \end{aligned}$$

Exemple 5.4 *Calculer*

$$\iiint_{B(0,1)} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dxdydz.$$

On pose $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ *et on remarque que,* $0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

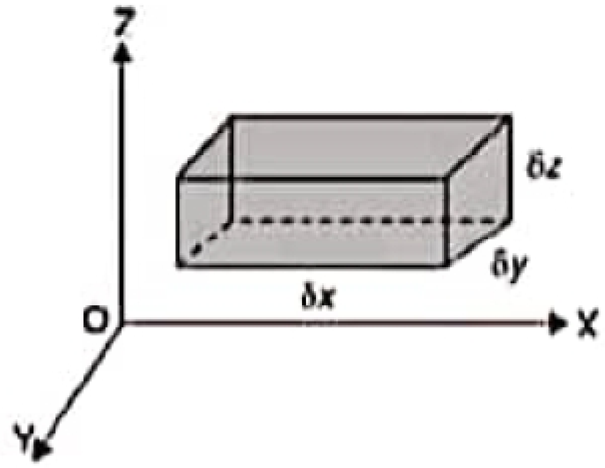
Donc

$$\begin{aligned} \iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \frac{r^2\sin\theta}{1+r^2} drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi - \pi^2. \end{aligned}$$

5.2 Volume

Dans cette partie nous allons voir le calcul du volume, le volume élémentaire dv est dx.dy.dz

$$dv = dx.dy.dz \Longrightarrow v = \iiint dx.dy.dz.$$



Exemple 5.5

$$I_= \iiint\limits_{D} dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$$

$$I = \iiint\limits_{D} dxdydz = \iint\limits_{[0,1]^2} \left[\int_0^x dz \right] dxdy$$

$$= \left[\int_0^1 xdx \right] \times \left[\int_0^1 dy \right] = \frac{1}{2}.$$

5.3 Intégrales de surface

5.3.1 Introduction

Les intégrales de surface sont des intégrales doubles dans l'espace, comme les intégrales curvilignes sont des intégrales simples dans le plan (ou dans l'espace).

5.3.2 Nappes paramétrées

Définition 5.1 *Soient x, y, z trois fonctions des deux variables u et v définies et au moins de classe C^1 sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Alors la donnée du domaine D et de l'application*

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{h} & : & D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \overrightarrow{h}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \end{array}$$

est une paramétrisation d'une nappe paramétrée.

5.3.3 Les nappes de fonctions

Soit f une fonction continue de deux variables $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble des points (x,y,z) tels que $z=f(x,y)$ est la nappe représentative de f. Elle peut être considérée comme nappe paramétrée en considérant la paramétrisation

$$\begin{pmatrix} x=u \\ y=v \\ z=f(u,v) \end{pmatrix}.$$

5.3.4 Plan tangent à une nappe

Soit $M=\overrightarrow{h}(u,v)=M(u,v)$ un point d'une nappe paramétrée, on pose

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial x} &= \frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \\ \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} &= \frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lorsque $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}$ et $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$ ne sont pas colinéaires, ils déterminent un plan passant par M, qui est par définition le plan tangent à la nappe S en son point M.

5.3.5 Normale à la nappe

Si $M \in S$, on introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \Lambda \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial z}{\partial u} \\ B &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial x}{\partial u} \\ C &= \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u}. \end{aligned}$$

On pose

$$H^2 = A^2+B^2+C^2, \text{ donc } H = \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \left\| \overrightarrow{N} \right\|.$$

On a donc le résultat suivant :

M est un point régulièr de la nappe S si et seulement si $H \neq 0$.
Le vecteur

$$\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \Lambda \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix},$$

est orthogonal au plan tangent en M de la nappe S, car il est orthogonal à $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}$ et $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$.
Le vecteur $\overrightarrow{\mu} = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$ est le vecteur normal à la nappe S.

5.3.6 Nappe de fonctions

$$\begin{pmatrix} x = u \\ y = v \\ z = f(x,y) = f(u,v) \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \Lambda \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{N}\right\| = H = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2 + 1} \neq 0, \quad \overrightarrow{\mu} = \frac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|}.$$

Comme la troisième composante de $\overrightarrow{N}$ est toujours égale à 1, l'orientation d'une normale d'une nappe de fonction est vers le haut.

5.3.7 Aire d'une nappe

Si S est une nappe paramétrée par $M(u,v)$.
$(u,v) \in D$, alors l'aire de S est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Aire } S &= \iint_D \left\| \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \Lambda \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} \right\| dudv \\ &= \iint_D H(u,v) dudv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv. \end{aligned}$$

5.3.8 Aire d'une nappe de fonction

Soit la nappe S telle que

$$S = \{z = f(x,y)/\ (x,y) \in D\}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire } S &= \iint_D \left\|\overrightarrow{N}\right\| dxdy \\ &= \iint_D \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1 dxdy}. \end{aligned}$$

5.3.9 Intégrale de surface d'une fonction scalaire

Définition 5.2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, $S \subset D_f$. Alors l'intégrale de f sur la surface S est*

$$I = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))H(u,v)dudv.$$

5.4 Flux

Etant donné un fluide en mouvement dans l'espace, sa vitesse est un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$. La quantité de matière qui, pendant une unité de temps, traverse un morceau de surface S, est proportionnelle à la densité volumique, à l'aire de S, à l'intensité de la vitesse, mais dépend aussi de la direction de la vitesse : elle est proportionnelle à la projection de la vitesse sur la normale à S. Il faut préciser si on s'intéresse au flux sortant ou rentrant, d'où la nécessité d'orienter S.

Définition 5.3 *Soient S^+ une nappe orientée, et $\overrightarrow{\mu} = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$ le vecteur normal. Alors pour tout champ de vecteur $\overrightarrow{V}$, le flux de vecteur $\overrightarrow{V}$ à travers S^+ est*

$$\begin{aligned}\Phi_{S^+}(\overrightarrow{V}) &= \iint_{S^+} \overrightarrow{V}(M(u,v).\overrightarrow{\mu})d\sigma = \iint_D \overrightarrow{V}(M(u,v).\overrightarrow{N})dudv \\ & \iint_D \overrightarrow{V}\left(M(u,v).\left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}\Lambda\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\right)\right)dudv\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, alors

$$\Phi_{S^+}(\overrightarrow{V}) = \iint_D (AP + QB + CR)\, dudv.$$

5.4.1 Les propriétés du flux

1. Linéarité
$$\Phi_{S^+}(\alpha\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{V}) = \alpha\Phi_{S^+}(\overrightarrow{U}) + \beta\Phi_{S^+}(\overrightarrow{V}).$$
2. Additivité
Si $S^+ = S_1^+ \cup S_2^+$ les orientations de S_1^+ et de S_2^+ étant compatibles entre elles et avec celles de S^+, avec $S_1^+ \cap S_2^+$ négligeable (d'aire nulle), alors on a
$$\Phi_{S^+}(\overrightarrow{V}) = \Phi_{S_1^+}(\overrightarrow{V}) + \Phi_{S_2^+}(\overrightarrow{V}).$$
3. Orientation
Si on change l'orientation de S^+, le flux change de signe.
$$\Phi_{S^-}(\overrightarrow{V}) = -\Phi_{S^+}(\overrightarrow{V})$$

5.4.2 Lien entre intégrale de surface et intégrale triple

Définition 5.4 *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs défini sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$ et possèdent des dérivées partielles continues. Sa divergence est la fonction*

$$div(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

5.4.3 Formule de Stockes-Ampère

Théorème 5.3 *Si on désigne par ∂S le bord orienté de la surface S de paramétrisation $\gamma : t \longmapsto \gamma(t)$, alors on a la formule dite de Stockes-Ampère*

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\gamma'}\, dt = \iint_S (\overrightarrow{Rot}.\overrightarrow{V})dudv,$$

cette formule dit que la circulation d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ le long du bord orienté d'une surface S est égale au flux du rotationnel de $\overrightarrow{V}$ à travers cette surface S.

Exemple 5.6 *On calcule le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, -y, 2)$ sortant à travers la demi sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geq 0$ en utilisant une intégrale curviligne.*

Posons $\overrightarrow{U} = (-y, x, xy)$. Alors on peut vérifier que $\overrightarrow{Rot}\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$.

On peut donc écrire

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\gamma'}\, dt = \int_C \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\gamma'}\, dt,$$

où C est le cercle de rayon 1 délimitant la demi-sphère et paramétrisé par

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \gamma'(t) : \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors l'intégrale

$$\Phi = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la définition du flux.

5.4.4 Formule de Green-Ostrogradsky

Soit D un domaine fermé et borné de $\mathbb{R}^3$ et limité par une surface orientée S qui est précisément le bord orienté de D : $\partial D = S$.

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel de classe C^1 sur D. La formule de Green-Ostrogradsky est donnée par l'égalité suivante

$$\iint_S (\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mu})d\sigma = \iiint_S div\overrightarrow{V}\, dxdydz.$$

Cette formule dit que le flux de $\overrightarrow{V}$ sortant à travers la surface fermée S est égal à la l'intégrale de la divergence de $\overrightarrow{V}$ dans le volume délimité par la surface.

Exemple 5.7 *Calculer le flux du champ de vecteurs* $\overrightarrow{V}$ (x^3, y^3, z^3) *sortant à travers la sphère* S *d'équation* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *en passant par le calcul d'une intégrale triple.*

On calcule d'abord

$$div \overrightarrow{V} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Puis on calcule l'intégrale

$$\Phi = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,$$

sur la boule V d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En passant en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint_V 3r^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{12\pi}{5}. \end{aligned}$$

5.5 Exercices sur le Chapitre 5

Exercice 5.1

Calculer les intégrales triples sur le domaine D.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_D xzdxdydz, \ D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0, \ x + z \leq 1, \ \ y^2 \leq x\} \\ I_2 &= \iiint_D xyz\sqrt{x^2 + 4y^2} dxdydz, \\ D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq 1\}. \end{aligned}$$

Exercice 5.2
Calculer les intégrales triples sur le domaine D.

$$I_1 = \iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$$

$$I_2 = \iiint_D \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2, z \geq 0\}$$

$$I_3 = \iiint_D \sin(x+y+z) dxdydz, \qquad D = [0, \frac{\pi}{2}]^3$$

$$I_4 = \iiint_D z\cos(x^2+y^2) dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /, x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0\}.$$

Exercice 5.3
Calculer les intégrales triples sur le domaine D.

$$I_1 = \iiint_D (1-2yz) dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 3\}$$

$$I_2 = \iiint_D e^x dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 0 \leq x, \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq x+y\}.$$

Exercice 5.4

1. Calculer V le volume du domaine D de $\mathbb{R}^3$, limité par les paraboloïdes d'équations

$$z = x^2 + y^2 \text{ et } z = 2 - x^2 - y^2$$

2. Calculer du volume V du domaine D de $\mathbb{R}^3$, limité par les paraboloïdes d'équations $z = 4 - 4(x^2+y^2)$ et la surface d'équation $z = (x^2-y^2)^2 - 1$.

Exercice 5.5
Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ sortant à travers la demis sphère S d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0.$$

Exercice 5.6

1. Calculer l'aire de la surface S définie par

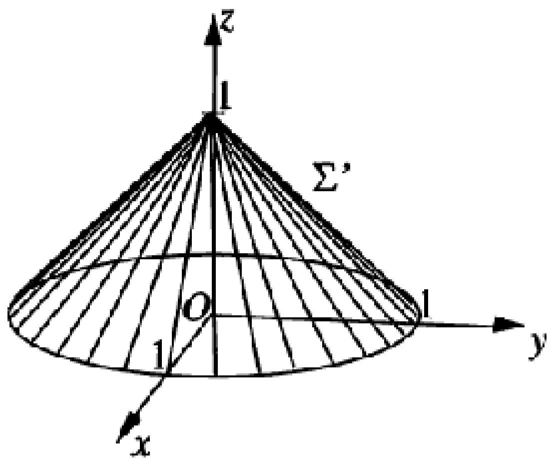
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + y^2 - 2ax = 0, 0 \leq x \leq h\}.$$

2. Calculer le flux du champ $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (xz, z, \frac{-1}{2}z^2)$ à travers la surface définie par l'équation $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, un champ de vecteurs normaux étant orienté vers les z croisant.

Exercice 5.7
On considère le champ vectoriel

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le flux Φ de $\overrightarrow{V}$ à travers la sphère unité (caractérisée par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) orientée vers l'extérieur.
2. Retrouver ce résultat en ramenant le calcul de Φ au calcul d'une intégrale triple.
3. Calculer le flux Φ' de $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}$ à travers la nappe conique S'^{+} qui peut être caractérisée par : $\begin{cases} z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z > 0 \end{cases}$ et est orientée vers le haut.



4. Retrouver ce résultat en ramenant le calcul de Φ' au calcul de la circulation d'un champ vectoriel le long d'un certain contour.
5. Quelle est l'aire de S'?

Indications

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}, \quad \int_a^{a+2\pi} \cos^2 x dx = \int_a^{a+2\pi} \sin^2 x dx = \pi$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos x dx = \int_a^{a+2\pi} \sin x dx = \int_a^{a+2\pi} \sin x \cos dx = 0.$$

5.6 Corrigé des exercices sur le Chapitre 5

Solution de l'exercice 5.1

Calculer l'intégrale triple sur le domaine D.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint\limits_D xzdxdydz, \\ D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \; x+z \leq 1, \quad y^2 \leq x\} \end{aligned}$$

On pose $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/, \; y \geq 0, \; y^2 \leq x \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_\Delta \left(\int_0^{1-x} xzdz \right) dxdy = \iint\limits_\Delta x \left(\int_0^{1-x} zdz \right) dxdy = \iint\limits_D \frac{x(1-x)^2}{2} dxdy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left([\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}]_{y^2}^1 \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{(1-y^8)}{4} - \frac{2}{3}(1-y^6) + \frac{(1-y^2)}{2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}(1-\frac{1}{9}) - \frac{2}{3}(1-\frac{1}{7}) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{5}) \right) = \frac{8}{315} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint\limits_D xyz\sqrt{x^2+4y^2}dxdydz, \\ D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/, \quad x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, \; y \geq 0, \; 0 \leq z \leq 1\}. \end{aligned}$$

On passe aux coordonnées cylindriques.

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$

On a $dxdydz = rdrd\theta dz$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint\limits_D xyz\sqrt{x^2+4y^2}dxdydz \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^1 zr^4 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1+3\sin^2\theta} d\theta \right] dz \right] dr \\ &= \left(\int_0^1 zdz \right) . \left(\int_0^1 r^4 dr \right) . \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\sqrt{1+3\sin^2\theta}d\theta \right) \\ &= \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 . \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 . \left[\frac{2}{9}(1+3\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{45}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.2

$$I_1 = \iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}.$$

Par un calcul direct on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left[\frac{-1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^1 \left[-\frac{1}{2(1+x+y)} - \frac{y}{8} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

$$I_2 = \iiint\limits_D \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2, z \geq 0\}.$$

On utilise les coordonnées sphériques,

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$|J| = r^2 \sin\varphi \Longrightarrow dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iiint\limits_D \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dxdydz \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{r\cos\theta r^2 \sin\theta dr}{(r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta)^3} \\
&= \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \right) \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int\limits_1^{\sqrt{2}} r dr \right) \\
&= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

$$I_3 = \iiint\limits_D \sin(x+y+z)dxdydz, \qquad D = [0, \frac{\pi}{2}]^3$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iiint\limits_D \sin(x+y+z)dxdydz \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y+z)dz \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [-(\cos(x+y+z)]_0^{\frac{\pi}{2}}\, dy \\
& \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x+y) - \cos(x+y+\frac{\pi}{2}))dy \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin(x+y) - \sin(x+y+\frac{\pi}{2})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\, dx \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx = 2.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.3

Calculer les intégrales triples sur le domaine D.

$$I_1 = \iiint\limits_D (1-2yz)dxdydz, \;\; D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq 1, \;\; 0 \leq z \leq 3\}.$$

$$\begin{aligned}
D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq 1, \;\; 0 \leq z \leq 3\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \;\; 0 \leq z \leq 3\}.
\end{aligned}$$

On applique le Théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iiint\limits_D (1-2yz)dxdydz \\
&= \int\limits_0^3 dz \iint\limits_\Delta (1-2yz)dxdy \\
&= \int\limits_0^3 dz \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)dy = 3\pi.
\end{aligned}$$

$$I_2 = \iiint\limits_D e^x dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; 0 \leq x \leq y, \;\; 0 \leq y \leq 1, \;\; 0 \leq z \leq x+y\}.$$

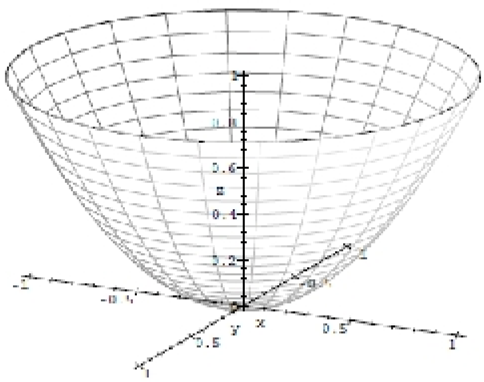
$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iiint\limits_D e^x dxdydz \\
&= \int_0^1 dy \int_0^y e^x dx \int_0^{x+y} dz \\
&= \int_0^1 dy \int_0^y (x+y)e^x dx = 4 - e.
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 5.4

1. Calcul du volume V du domaine D de $\mathbb{R}^3$, limité par les paraboloïdes d'équations

$$z = x^2 + y^2 \text{ et } z = 2 - x^2 - y^2$$

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dxdydz \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dxdydz \\
&= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - (x^2 + y^2))dxdy \\
&= 8 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^2) r dr d\theta = \pi.
\end{aligned}
$$



2. Calcul du volume V du domaine D de $\mathbb{R}^3$, limité par les paraboloïdes d'équations

$$z = 4 - 4(x^2 + y^2) \text{ et la surface d'équation } z = (x^2 - y^2)^2 - 1.$$

On passe aux coordonnées cylindriques.

$$\text{On pose} \left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ r^2 - 1 \leq z \leq 4 - 4r \end{array} \right. \quad \text{et } dxdydz = rdrd\theta dz.$$

$$\begin{aligned} V_2 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_{r^2-1}^{4-4r} rdzdrd\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (5r - 4r^3 - r^5)drd\theta = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.5

1. Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x;y;z)$ sortant à travers la demis sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geq 0$.

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iint_S (\overrightarrow{V}(M(x,y).\overrightarrow{N})dxdy.$$

On paramétrise la demi sphère par

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \cos\rho\sin\theta \\ y = \sin\rho\sin\theta \\ z = \cos\theta \end{array} \right. \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial\theta}\Lambda\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial\rho} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\rho\cos\theta \\ \sin\rho\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} -\sin\rho\sin\theta \\ \cos\rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\rho\sin^2\theta \\ \sin\rho\sin^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\rho\sin\theta \\ \sin\rho\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} \cos\rho\sin\theta \\ \sin\rho\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\rho\sin^2\theta \\ \sin\rho\sin^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \sin\theta.$$

On obtient pour le flux

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iint_S (\overrightarrow{V}(M(x,y).\overrightarrow{N})dxdy \iint_S \sin\theta d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 2\pi.$$

Bibliographie

[1] Arnaud Guyader, Variables multiples, Université Rennes 2 Licence MASS 2, Année 2013/2014, Second Semestre.

[2] Bernard Le Stum, Exercices corrigés de calcul différentiel, Université de Rennes 1, Version du 28 mars 2003.

[3] Bruno Aebischer, Licence 2 Mathématiques, Analyse, Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique ISBN 978-2-311-00275-1.

[4] Esterle, Jean. "ESTIA 1eAnnée-Mathématiques pour l'ingénieur Cours du 13 Février 2005 Extrema libres, extrema liés." (2008).

[5] Fabrice Dodu, Intégrales curvilignes et de surfaces, FORMATION CONTINUE : DUT+3 Département de Mathématiques : INSA TOULOUSE 2000-2001 Version 1.0.

[6] J. Royer - Université Toulouse 3, L2 Parcours Spécial - S3 - Calcul différentiel et intégral, Année 2014-2015.

[7] H. Cartan, Calcul différentiel, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[8] G. Faccano, Aide-mémoire et exercices corrigés. L2 MASS 2012/2013.

[9] Mohamed Mehbali, Mathématiques 2, fonctions de plusieurs variables réelles. 2eme editions n5368, ISBN :978.9951.0.1614.5.

[10] N. Piskounov ; Calcul différentielle et intégral (tome 1 et 2) ; Edition Mir, Moskou.

[11] S. B. Gavage, Calcul différentiel et Equations Différentielles, cours et exercices corrigés, Dunod, 2014.

[12] Yassine Ahmed Benia, Cours d'Analyse 4 avec Exercices Corrigés, Alger, septembre 2020.