

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Science et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf USTO-MB

Faculté d'Architecture et de Génie Civil

Département de Génie Civil



POLYCOPIÉ

Cours Et TD de Calcul à la Rupture et Analyse

Limite

DESTINÉ AUX

Étudiants master en génie civil (Géo. M2)

ELABORÉ PAR

BAKOURA Ahmed 'Maitre de conférences Classe A'

« Docteur Es Science en Génie Civil (Structures et Matériaux) »



OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT

Ce cours a pour objet d'initier l'étudiant aux notions théoriques du calcul à la rupture des ouvrages et de leur analyse limite.

CONNAISSANCES PRÉALABLES RECOMMANDÉES

Mécanique des milieux continus, Mécan. des solides déformables, Mécan. des sols.

PROGRAMME D'ENSEIGNEMENT

INTRODUCTION GÉNÉRALE3

Chapitre I :

NOTIONS DE CHARGEMENTS LIMITES ET CRITÈRES DE
RUPTURE USUELS6

FICHE TD 1

Chapitre II :

APPROCHE STATIQUE PAR L'INTÉRIEUR DE K /
APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR DE K 15

FICHE TD 2

Chapitre III :

APPLICATIONS PRATIQUES26

FICHE TD 3

CONCLUSION GÉNÉRALE.....35

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Ed. Presses des ponts, France.
2. J. Salençon. *Elastoplasticité*. Ed. Ecole polytechnique, France.
3. P. De Buhan. *Plasticité et calcul à la rupture*. Ed. Presses des ponts, France.
4. J. Lemaitre, J.L. Chaboche. *Mécanique des solides déformables et endommageables*. Ed. Dunod.
5. J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. Ed. Dunod.
6. J. Bleyer, *Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil*. Thèse de doctorat de l'université Paris-Est.
7. Y. Bzrthaud , P. de Buhan, N. Schmitt, *Aide-mémoire Mécanique des Sols*. 2ème Edition. Dunod, 2013.
8. F. Schlosser. *Eléments de mécanique des sols*. Ed. Presses des ponts, France.

INTRODUCTION GENERALE

L'existence du chargement limite d'un système en matériau élastique parfaitement plastique sur un trajet de chargement donné est apparue comme résultant uniquement de **la nécessaire compatibilité** entre **l'équilibre** du système et **la condition de parfaite plasticité** de son matériau constitutif. L'objet de **l'analyse limite** est la détermination directe des **chargements limites** à partir de cette définition mathématique.

Du point de vue mathématique d'une telle approche, il est clair que la **nature du phénomène physique** (ici l'apparition de la plasticité) qui est lié à la limitation des états de contrainte n'a aucune importance. On conçoit qu'il pourrait tout aussi bien s'agir d'une **limitation due à des considérations de fragilité, de stabilité, voire à un simple règlement de calcul.**

Généralisant les propos, **la théorie du calcul à la rupture** s'intéresse à la même problématique en substituant à la condition de de parfaite plasticité le concept de **la condition de résistance**. Celle –ci est définit, en chaque point du système, par la donnée d'un domaine convexe assigné au tenseur des contraintes ou, plus généralement aux efforts intérieurs.

La théorie ainsi construite est celle du calcul à la rupture, qui examine, pour un système soumis à un mode de chargement à n paramètres dans une géométrie donnée, les chargement pour lesquels la **compatibilité** entre **l'équilibre** du système et les limitations induites d'une façon générale par la **résistance** du matériau constitutif est assurée.

La définition des chargements potentiellement supportables par le système dans un mode de chargement qui dépend d'un nombre fini (n) de paramètres est l'expression

INTRODUCTION GENERALE

de la **compatibilité « équilibre-résistance »**. Tout chargement \underline{Q} , qui peut être équilibré par un champ d'efforts intérieurs statiquement admissible dans le mode de chargement et respectant la condition de résistance en tout point du système, est potentiellement supportable. Les chargements potentiellement supportables engendrent un domaine \mathbf{K} convexe de \mathbb{R}^n dont la frontière est constituée des **chargements extrêmes**.

Cette définition est le fondement de **l'approche statique par l'intérieur** du domaine \mathbf{K} et l'évaluation des chargements extrêmes par valeurs inférieures. La dualisation mathématique de la condition de compatibilité équilibre-résistance s'appuie sur le **principe des puissances virtuelles**. A partir de la connaissance du domaine de résistance du matériau constitutif en un point, qui est défini dans l'espace des efforts intérieurs, on introduit la fonction densité de puissance résistante maximale qui opère sur l'espace des taux de déformation virtuelle et est l'instrument de la définition duale de ce domaine. La **puissance résistante maximale** dans un champ de vitesse virtuel est l'intégrale spatiale de cette densité sur le système étudié.

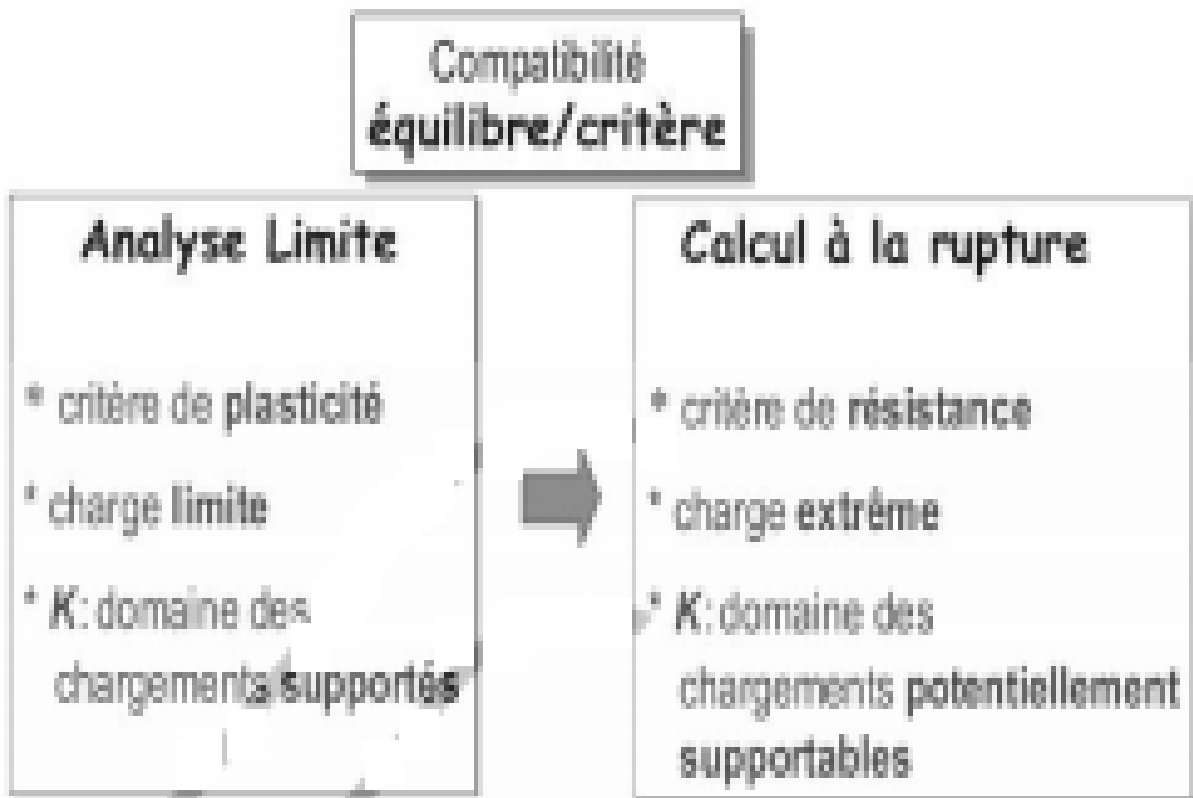
On démontre que la définition duale du domaine \mathbf{K} résulte de l'énoncé suivant. Tout chargement \underline{Q} , dont la puissance dans un champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible dans le mode de chargement est supérieure à la puissance résistante maximale dans ce même champ, n'est pas potentiellement supportable. **L'approche cinématique par l'extérieur** du domaine \mathbf{K} qui en résulte s'avère d'une grande facilité de mise en œuvre.

Du point de vue pratique, l'analyse de la signification des chargements potentiellement supportables et de leur pertinence vis-à-vis du dimensionnement du

INTRODUCTION GENERALE

système considéré nécessite que l'on connaisse précisément la nature physique vis-à-vis desquels la condition de résistance est écrite avec la **loi de comportement** correspondante.

Dans le cas d'un système en matériau élastique parfaitement plastique, les **chargements extrêmes** sont les **chargements limites** du système. Ceci assure que les chargements potentiellement supportables seront tous supportés par le système. En outre, dans l'approche cinématique par l'extérieur, la **puissance résistante maximale** n'est que la **dissipation plastique**.



De l'Analyse Limite au Calcul à la Rupture

CHAPITRE I

NOTION SUR LE CHARGEMENT LIMITE ET
CRITERES DE RUPTURE USUELS ET

LEURS FONCTIONS $\pi(\underline{x};.)$ CORRESPONDANTES

(MATERIAUX ISOTROPES ET HOMOGENES EN HPP/ISOTHERME)

INTRODUCTION7

I.1 NOTION SUR LE CHARGEMENT LIMITE.....7

 I.1.1 STRUCTURE RÉTICULÉE

I.2 FONCTION DE CHARGE ET CRITÈRES DE RUPTURE USUELS 11

 I.2.1 FONCTION DE CHARGE DANS L'ÉTAT INITIAL (SANS ÉCROUISS.)

 I.2.2 CRITÈRES DE RUPTURE USUELS ET FONCTION $\pi(\underline{x};.)$ CORRESS.

I.2.2.1 Milieu continu tridimensionnel 3D

I.2.2.1.1 Critère de Tresca

I.2.2.1.2 Critère de Mohr-Coulomb

CONCLUSION 13

CHAPITRE I

Ce chapitre présente une notion sur le chargement limite (structures réticulées et a poutres fléchées) et un formulaire de critères de résistance utilisés de façon courante dans les applications pratiques et des fonctions « dueles », correspondantes.

I.1 NOTION SUR LE CHARGEMENT LIMITE

I.1.1 STRUCTURE RÉTICULÉE

La figure 1 représente un système réticulé formé de trois barres verticales identiques de longueur l , numérotées de 1 à 3, fixées à leurs extrémités supérieures par des articulations sans frottement, et reliées entre elles en partie inférieure à un barreau rigide par le même type d'articulations. On désigne par N_i ($i = 1, 2, 3$) l'effort de traction-compression dans la barre i . Le chargement de cette structure est constitué par une force verticale Q d'intensité Q , comptée positivement vers le bas, appliquée sur le barreau à mi-distance des barres 2 et 3, et que l'on fait croître progressivement à partir d'une valeur nulle

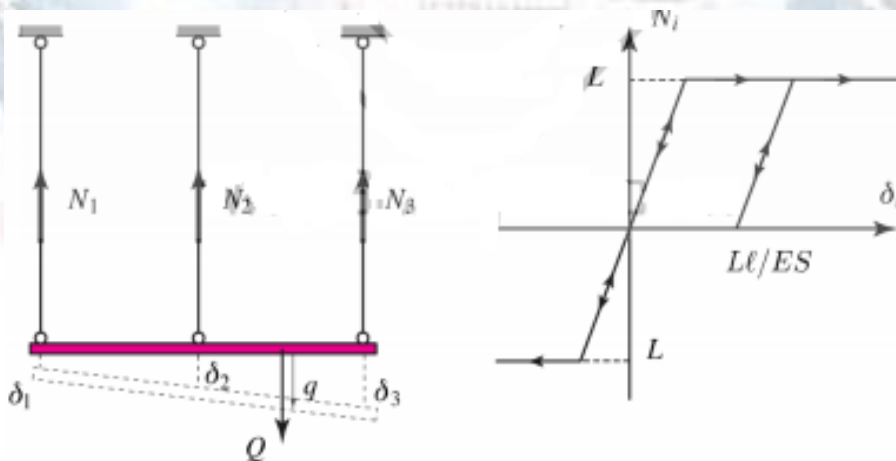


Figure 1-a – Calcul élasto-plastique parfait d'un système réticulé

Le comportement des barres est élastique parfaitement plastique schématisé par le diagramme effort-allongement de la figure 1-a, où S désigne la section des barres, E le module d'Young du matériau constitutif et L la limite d'élasticité en traction-

CHAPITRE I

compression. La structure étant initialement dans un état naturel ($N_i = 0$ pour $Q = 0$) on cherche à déterminer l'évolution de la structure à mesure que le chargement Q croît.

La résolution d'un tel problème d'évolution (supposée quasi statique) repose sur trois types d'équations.

1. Les équations d'équilibre valables indépendamment de la loi de comportement des barres, qui résultent dans le cas présent de l'écriture de l'équilibre en résultante et en moment du barreau horizontal.

$$N_1 + N_2 + N_3 = Q \text{ et } N_3 - N_2 - 3N_1 = 0 \quad (I.1)$$

2. Les relations relatives au comportement élasto-plastique parfait des barres, c'est-à-dire d'une part le critère de plasticité :

$$|N_i| \leq L, \quad i = 1, 2, 3 \quad (I.2)$$

D'autre part les relations entre les taux d'efforts et les taux d'allongement

$$i = 1, 2, 3 \quad \dot{\delta}_i = \frac{\dot{N}_i l}{E S} + \dot{\delta}_i^p \text{ avec } \dot{\delta}_i^p \begin{cases} \geq 0 (\leq 0) & \text{Si } N_i = +L (-L) \\ = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Où $\dot{\delta}_i^p$ désigne le taux d'allongement plastique de la barre numéro i .

3. La relation de compatibilité géométrique entre les allongements des barres, exprimant que leurs extrémités inférieures restent alignées (barreau indéformable).

$$\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2 = 0$$

L'utilisation combinée de ces trois types d'équations permet d'explicitier la solution

CHAPITRE I

du problème d'évolution de la structure, synthétisée sous la forme d'une courbe effort-déplacement présentée sur la figure 1-b.

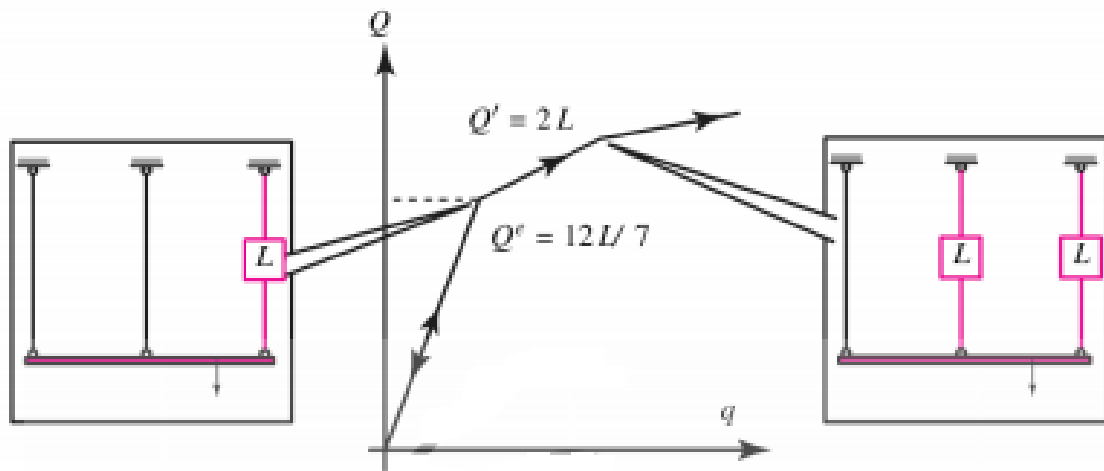


Figure 1-b – Courbe charge-déplacement relative à l'évolution élasto-plastique du système.

Cette courbe met en évidence trois phases d'évolution de la structure. Une phase élastique jusqu'à la limite d'élasticité $Q_e = 12L/7$, correspondant à la plastification en traction de la barre 3. Une phase élastoplastique correspondant à l'accroissement du chargement au-delà de cette limite d'élasticité et jusqu'à la charge limite $Q_1 = 2L$ associée à la plastification de la barre centrale. La troisième phase d'évolution est caractérisée par l'apparition d'un mécanisme d'écoulement plastique libre sous charge maintenue constante égale au chargement limite.

Il n'est pas nécessaire d'effectuer l'ensemble de la démarche de résolution précédente pour montrer sur un tel exemple que la valeur de la charge limite $Q_1 = +2L$ ne peut pas être dépassée. En effet, si nous considérons d'une part la condition d'équilibre du barreau en moment par rapport à son extrémité gauche, qui s'écrit

$$Q = \frac{4N_3 + 2N_2}{3}$$

CHAPITRE I

Il apparaît immédiatement que cette relation n'est compatible avec les conditions de plasticité (Éq. I.2) des barres que tant que le paramètre de chargement demeure à l'intérieur de l'intervalle $[-2L,+2L]$. Cela signifie à contrario que toute valeur de Q située à l'extérieur de cet intervalle ne peut être supportée par la structure.

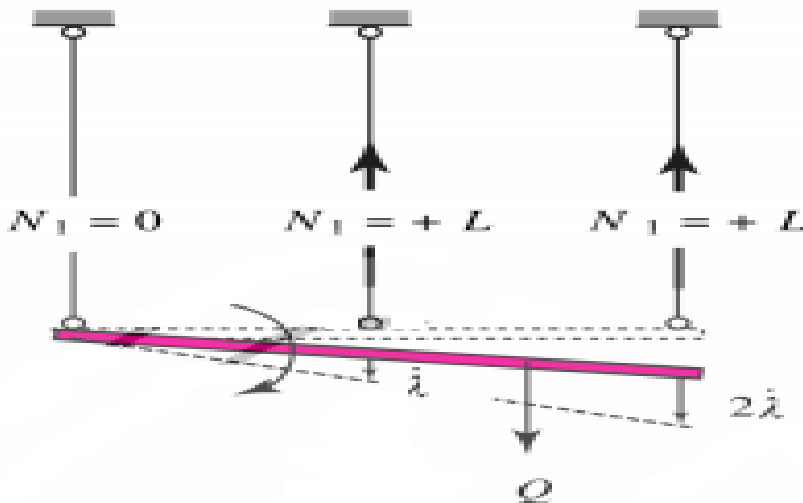


Figure 1-c – Charge limite et mécanisme d'écoulement plastique libre du système.

Un tel raisonnement de compatibilité entre les conditions d'équilibre de la structure et celles relatives au respect du critère de plasticité de tous ses éléments constitutifs, peut être systématisé de la manière suivante. L'ensemble des chargements Q tels qu'il existe une distribution des efforts dans les barres (N_1, N_2, N_3) qui satisfasse simultanément les équations d'équilibre I.1 ainsi que les critères de plasticité I.2 est précisément constitué par l'intervalle $[-2L,+2L]$, dont les bornes inférieure et supérieure sont les valeurs de la charge limite de la structure selon le sens d'application de la charge.

$$Q \in [-2L,+2L] \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (N_1, N_2, N_3) \text{ s.A. avec } Q \\ \text{et } |N_i| \leq L \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

CHAPITRE I

I.2 FONCTION DE CHARGE ET CRITÈRES DE RUPTURE USUELS

I.2.1 FONCTION DE CHARGE DANS L'ÉTAT INITIAL (SANS ÉCROUISSAGE)

Il est d'usage, pour définir mathématiquement le domaine d'élasticité initial C , d'introduire une fonction scalaire f de $\underline{\sigma}$, telle que, dans l'espace \mathbb{R}^6 des contraintes :

$f(\underline{\sigma}) < 0$ corresponde à l'intérieur du domaine,

$f(\underline{\sigma}) = 0$ à sa frontière, (I.3)

$f(\underline{\sigma}) > 0$ à l'extérieur.

La fonction f est appelée **fonction de charge** du matériau dans l'état initial. On désigne aussi couramment par critère de limite d'élasticité, **ou critère de plasticité** la condition $f = 0$. Toutefois, dans la pratique, la fonction f elle-même est souvent appelée « critère de plasticité » sans risque de confusion.

La fonction f est une fonction du seul tenseur symétrique $\underline{\sigma}$. Et s'exprime comme :

- soit une fonction symétrique des contraintes principales
- soit une fonction des invariants I_1, I_2, I_3 de $\underline{\sigma}$
- soit une fonction de l'invariant I_1 de $\underline{\sigma}$ et des invariants J_2, J_3 et de son déviateur \underline{s} .

I.2.2 CRITÈRES DE RUPTURE USUELS ET FONCTION $\pi(\underline{x}; \cdot)$ CORRESPOND.

Un critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou si elle reste dans le domaine élastique. De nombreux essais ont montré que l'on pouvait utiliser deux critères principaux : le critère de Tresca ou le critère de Von Mises. En résistance des matériaux, on désire parfois rester dans le domaine élastique, on parle alors de critère de résistance (Coulomb).

CHAPITRE I

I.2.2.1 Milieu continu tridimensionnel 3D

I.2.2.1.1 Critère de Tresca

La fonction d'écoulement plastique est alors (la fonction de charge) correspondante s'écrit en ordonnant les contraintes principales selon :

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad (\text{tractions positives})$$

La fonction de charge s'écrit $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 \leq 0$

Ou d'une manière équivalente : $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 \leq 0 \Leftrightarrow \forall \underline{n}, |\tau(\underline{n})| \leq C$

Le domaine d'élasticité (dans l'espace R^3 des contraintes principales) est un prisme à base hexagonale régulier d'axe (1,1,1).

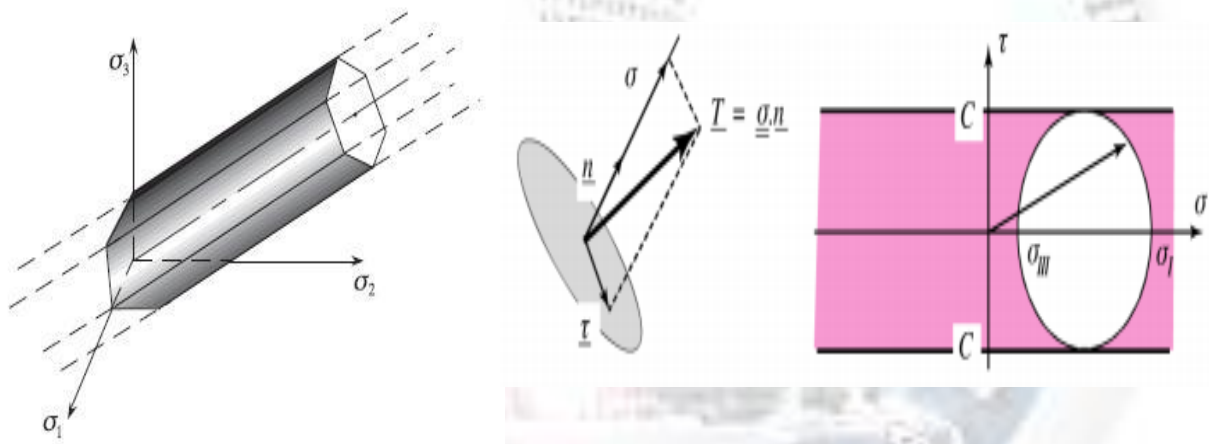
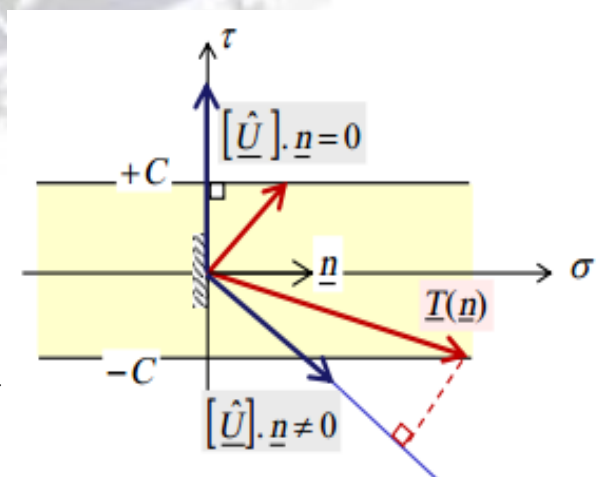


Figure 2 – Critère de Tresca : (hexagone) domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales

fonctions $\pi(\underline{x}; \cdot)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(\underline{\hat{d}}) = +\infty \quad \text{Si } \text{tr } \underline{\hat{d}} \neq 0, \\ \pi(\underline{\hat{d}}) = \frac{\sigma_0}{2} (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|) \quad \text{Si } \text{tr } \underline{\hat{d}} = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(\underline{n}, [\underline{\hat{U}}(\underline{x})]) = +\infty \quad \text{Si } [\underline{\hat{U}}(\underline{x})] \cdot \underline{n} \neq 0, \\ \pi(\underline{n}, [\underline{\hat{U}}(\underline{x})]) = \frac{\sigma_0}{2} |[\underline{\hat{U}}(\underline{x})]| \quad \text{Si } [\underline{\hat{U}}(\underline{x})] \cdot \underline{n} = 0 \end{array} \right\}$$



CHAPITRE I

I.2.2.1.2 Critère de Coulomb

Le critère de Coulomb s'applique aux ouvrages en terre (sols et les matériaux granulaires). Là encore, en ordonnant les contraintes principales selon :

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad (\text{tractions positives})$$

La fonction de charge s'écrit $f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2C \cos \phi \leq 0$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2C \cos \phi \leq 0$$

Ou d'une manière équivalente :

$$\forall \underline{n}, |\tau(\underline{n})| \leq C - \sigma(\underline{n}) \tan \phi$$

Le domaine d'élasticité (dans l'espace R^3 des contraintes principales) est une pyramide hexagonale d'axe (1,1,1).

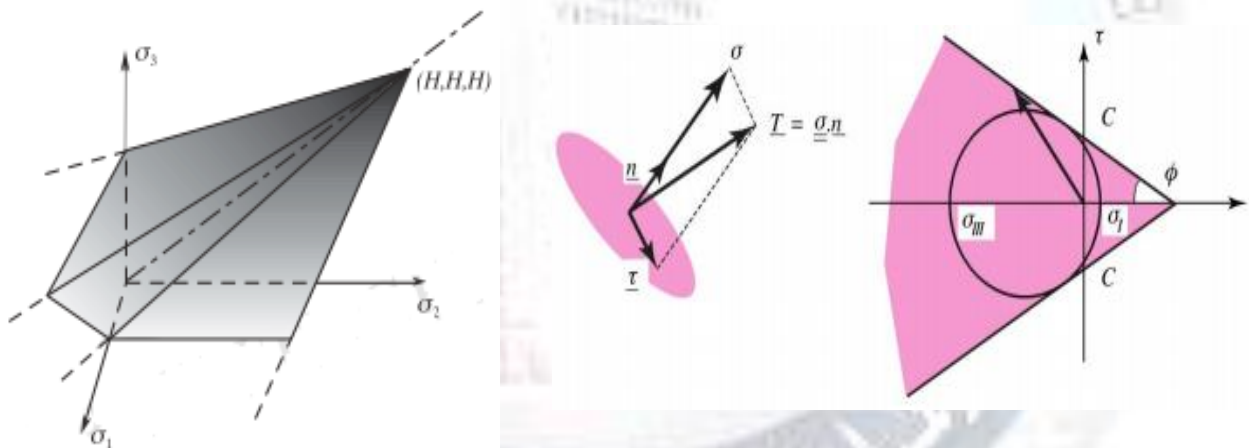
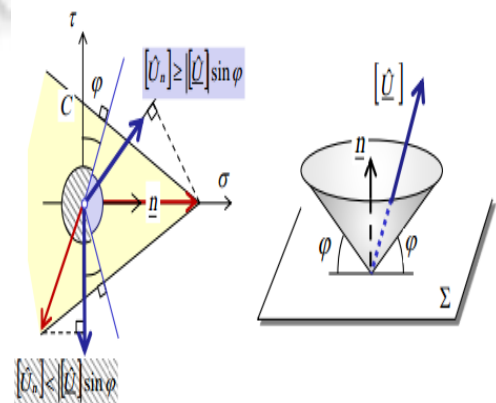


Figure 3 –Critère de Coulomb : (pyramide) domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales ($H = C \cotg \phi$: Contraintes de cohésion).

fonctions $\pi(\underline{x}; \cdot)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(\underline{\underline{\hat{d}}}) = +\infty \quad \text{Si } tr \underline{\underline{\hat{d}}} < (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|) \sin \phi, \\ \pi(\underline{\underline{\hat{d}}}) = H \cdot tr \underline{\underline{\hat{d}}} = \frac{C}{\tan \phi} tr \underline{\underline{\hat{d}}} \quad \text{Si } tr \underline{\underline{\hat{d}}} \geq (|\hat{d}_1| + |\hat{d}_2| + |\hat{d}_3|) \sin \phi \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(\underline{n}, [\underline{\hat{U}}(\underline{x})]) = +\infty \quad \text{Si } \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} < [\underline{\hat{U}}(\underline{x})] \sin \phi, \\ \pi(\underline{n}, [\underline{\hat{U}}(\underline{x})]) = \frac{C}{\tan \phi} [\underline{\hat{U}}(\underline{x})] \quad \text{Si } \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} \geq [\underline{\hat{U}}(\underline{x})] \sin \phi \end{array} \right\}$$



FICHE TD N° I (NOTION SUR CHAR. LIMITE ET CRITÈRE DE RUP.)

EXERCICE 1

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

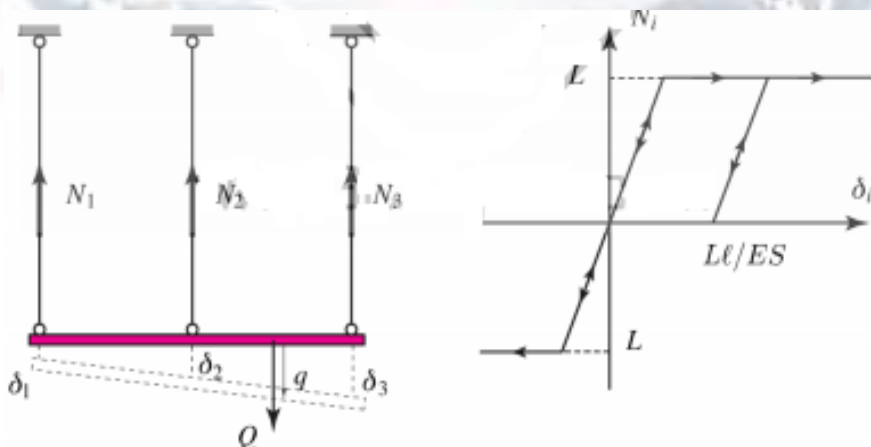
$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes ?
2. Calculer les contraintes et directions principales ?
3. Calculer les contraintes équivalentes de Tresca ?

EXERCICE 2 (STRUCTURE RÉTICULÉE)

On désigne par N_i ($i = 1, 2, 3$) l'effort de traction-compression dans la barre i . Le chargement de cette structure est constitué par une force verticale Q d'intensité Q , comptée positivement vers le bas, appliquée sur le barreau à mi-distance des barres 2 et 3, et que l'on fait croître progressivement à partir d'une valeur nulle

Le comportement des barres est élastique parfaitement plastique schématisé par le diagramme effort-allongement de la figure 1-a.



Déterminer l'évolution élasto-plastique du système à mesure que le chargement Q augmente ?

CHAPITRE II

APPROCHE STATIQUE PAR L'INTERIEUR DE K /

APPROCHE CINEMATIQUE PAR L'EXTERIEUR DE K

(MATERIAUX ISOTROPES ET HOMOGENES EN HPP/ISOTHERME)

INTRODUCTION	16
II.1 PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'APPROCHE PAR LE CAL. À LA RUPT.....	16
II.1.1 DONNÉES D'UN PROBLÈME DE CALCUL À LA RUPTURE	
II.1.2 DOMAINE DES CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTA.	
II.2 APPROCHE STATIQUE PAR L'INTÉRIEUR (APP. PAR CONTR.).....	20
II.2.1 ENONCÉ DE L'APPROCHE STATIQUE PAR L'INTÉRIEUR	
II.3 APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR (APP. PAR VITES.).....	21
II.3.1 PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES	
II.3.2 PUISSANCE RÉSISTANTE MAXIMALE	
II.3.3 ENONCÉ DE L'APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR	
II.4 LES APP. DU CAL. À LA RUPT. : UNE MÉTH. D'ENCAD. DE K...	24
CONCLUSION	25

CHAPITRE II

Le calcul à la rupture et analyse limite s'appuie sur la connaissance de la *géométrie du système* considéré, du *mode de chargement* qui lui est appliqué et des *capacités de résistance des matériaux constitutifs*. Ceci constitue le règlement du calcul. Et on écrit qu'une condition nécessaire pour que la « stabilité ou la tenue » de l'ouvrage soit assurée est qu'il ait *compatibilité entre les conditions imposées par les équations exprimant l'équilibre quasi-statique du système et les conditions imposées par les capacités de résistance des matériaux*. De là on déduit une approche directe « statique (par voie primale) » permettant de déterminer les chargements pour lesquels il y a « stabilité potentielle » de l'ouvrage dans les conditions imposées ; par dualisation mathématique au moyen du principe des puissances virtuelles on met en évidence un approche « cinématique (par voie duale) » permettant de déterminer commodément des chargements pour lesquels « l'instabilité » de l'ouvrage dans les conditions indiquées est certaine.

II. 1 PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'APPROCHE PAR LE CALCUL À LA RUPTURE

Nous rappelons dans cette section le principe général du raisonnement fondé sur le calcul à la rupture. Puisque la suite de ce travail se concentre essentiellement sur des modèles de milieux continus tridimensionnels « talus, fondations superficielle 3D » et généralisés « barres (traction, compression)/barres (en flexion) 1D », nous adopterons la notation symbolique Σ pour désigner l'ensemble des efforts intérieurs d'un modèle mécanique (structurel ou géotechnique) quelconque (Σ peut donc désigner un tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$ pour une modélisation de type milieu continu classique 3D, un effort normal N pour des structure de barres en traction/compression uniaxiale, un moment de flexion M pour des structures de barres en flexion,...etc).

CHAPITRE II

II.1.1 DONNÉES D'UN PROBLÈME DE CALCUL À LA RUPTURE

Il convient, en premier lieu, de définir la géométrie du système mécanique (structurel ou géotechnique) occupant un domaine Ω de bord $\partial\Omega$. Une des hypothèses d'utilisation du calcul à la rupture est celle des petites perturbations HPP, signifiant que les changements de géométrie sont négligés, Ω désignant aussi bien la configuration géométrique initiale qu'actuelle du système (structurel ou géotechnique) étudié.

Nous supposons que le système est soumis à un mode de chargement à n paramètres, représenté par un vecteur $\underline{Q} = (Q_i, i = 1, \dots, n)$. Ces données relatives au chargement proviennent en général de forces volumiques (pesanteur par exemple) ou d'actions de contact (efforts extérieurs (concentrés/répartis), réactions) appliquées au bord de la structure.

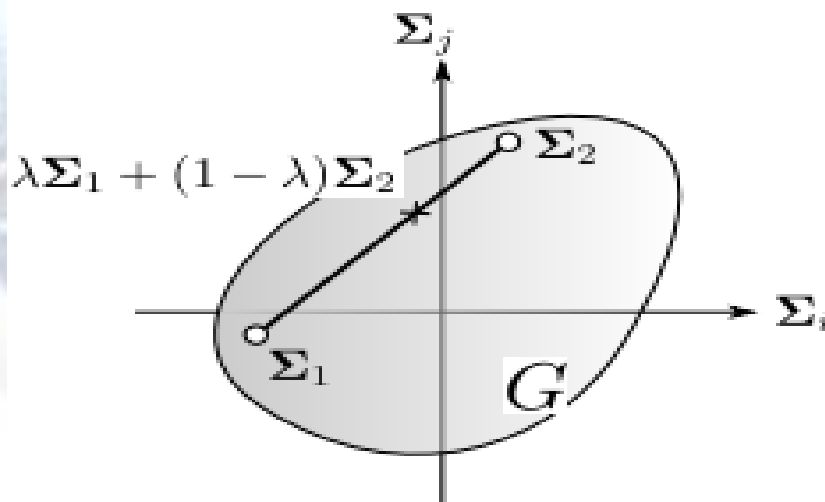


Figure 4 – Domaine de résistance convexe G dans l'espace des efforts intérieurs

Une donnée essentielle pour mettre en œuvre la démarche de calcul à la rupture est relative au critère de résistance défini en tout point $\underline{x} \in \Omega$. Ce critère de résistance est, en général, décrit via le domaine de résistance $G(\underline{x})$ dans l'espace des efforts

CHAPITRE II

intérieurs Σ (Figure 4). Ainsi, un état d'efforts intérieurs $\Sigma \in G$ sera dit admissible au sens du critère de résistance, le cas où $\Sigma \notin G$ étant physiquement impossible.

Le domaine de résistance $G(\underline{x})$ décrivant les capacités de résistance locales du matériau constitutif possède généralement les deux propriétés suivantes :

- il contient l'origine i.e. le matériau résiste à l'état de sollicitation nul :

$$\Sigma = 0 \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{II.1})$$

- c'est un ensemble convexe :

$$\forall \Sigma_1, \Sigma_2 \in G(\underline{x}) \Rightarrow \lambda \Sigma_1 + (1 - \lambda) \Sigma_2 \in G(\underline{x}), \forall \lambda \in [0; 1], \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{II.2})$$

II. 1.2 DOMAINE DES CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES

Le vocable « analyse limite », en général mieux connu que celui de « calcul à la rupture », fait référence au même type de démarche, restreinte au cas particulier des matériaux élastiques, parfaitement-plastiques. Dans ce cadre bien précis, *l'analyse limite* permet de déterminer, de façon certaine, les chargements limites de la structure. Si de telles hypothèses sur le comportement du matériau ne peuvent être retenues, *le calcul à la rupture* fournit une réponse à la stabilité de la structure à travers la détermination du domaine \mathbf{K} des chargements potentiellement supportables. L'adverbe potentiellement fait ici référence au fait qu'il ne s'agit que d'une présomption de stabilité (hormis dans les conditions particulières de l'analyse limite où il s'agit alors d'une certitude), s'appuyant uniquement sur une condition nécessaire. En particulier, il n'est pas assuré que les chargements extrêmes ainsi déterminés puissent être effectivement atteints le long d'un trajet de chargement. Il est en revanche certain que les chargements situés à l'extérieur de \mathbf{K} ne peuvent être supportés.

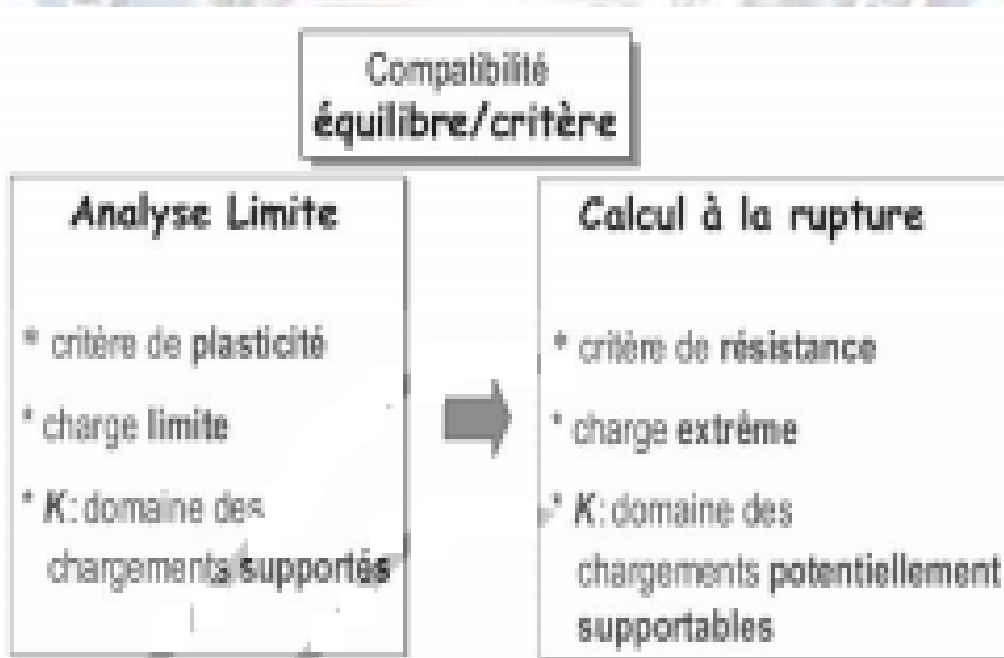
CHAPITRE II

Ce domaine est défini comme l'ensemble des chargements \underline{Q} tel qu'il soit possible de mettre en évidence un champ d'efforts intérieurs $\underline{\Sigma}(\underline{x})$ statiquement admissible (S.A.) avec \underline{Q} et vérifiant, en tout point de Ω , le critère de résistance, soit :

$$\underline{Q} \in K \subset R^n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\Sigma}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} & (\text{condition d'équilibre}) \\ \underline{\Sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega & (\text{condition de résistance}) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où les conditions pour qu'un champ d'efforts intérieurs $\underline{\Sigma}(\underline{x})$ soit statiquement admissible regroupent les équations d'équilibre local (avec un chargement volumique éventuellement), les équations de continuité des efforts intérieurs ainsi que les conditions aux limites en efforts du problème.

La condition $\underline{Q} \in \mathbf{K}$ représente donc une condition nécessaire de stabilité de la structure au sens du calcul à la rupture. Notons que, puisque $\underline{\Sigma} = 0 \in G$, $\underline{Q} = 0 \in \mathbf{K}$. De plus, puisque G est un domaine convexe et par linéarité des conditions définissant l'équilibre, \mathbf{K} est également un ensemble convexe dans l'espace des paramètres de chargement.



De l' Analyse Limite au Calcul à la Rupture [7]

CHAPITRE II

II.2 APPROCHE STATIQUE PAR L'INTÉRIEUR (PAR CONTRAINTES)

II.2.1 ENONCÉ DE L'APPROCHE STATIQUE PAR L'INTÉRIEUR

L'approche statique par l'intérieur du domaine des chargements potentiellement supportables \mathbf{K} revient à mettre en œuvre, de façon directe, la définition (II.3), c'est-à-dire à exhiber, par tout moyen disponible, un champ d'efforts intérieurs vérifiant les propriétés requises.

$$\underline{Q} \in K^{stat} \subset K \subseteq R^n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \Sigma(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} & (\text{condition d'équilibre}) \\ \Sigma(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega & (\text{condition de résistance}) \end{cases} \quad (II.4)$$

La valeur du chargement \underline{Q} équilibrée par ce champ appartiendra alors au domaine \mathbf{K} . Construisant de cette façon plusieurs chargements potentiellement supportables, l'enveloppe convexe, notée \mathbf{K}^{stat} , de tous ces chargements sera alors incluse dans \mathbf{K} par convexité : $\mathbf{K}^{stat} \subseteq \mathbf{K}$, constituant ainsi une approche par l'intérieur du domaine \mathbf{K} (Figure 5). Le long d'un trajet de chargement donné (radial par exemple), la valeur maximale obtenue par une telle approche représente une borne inférieure du chargement extrême de la structure le long de ce trajet de chargement.

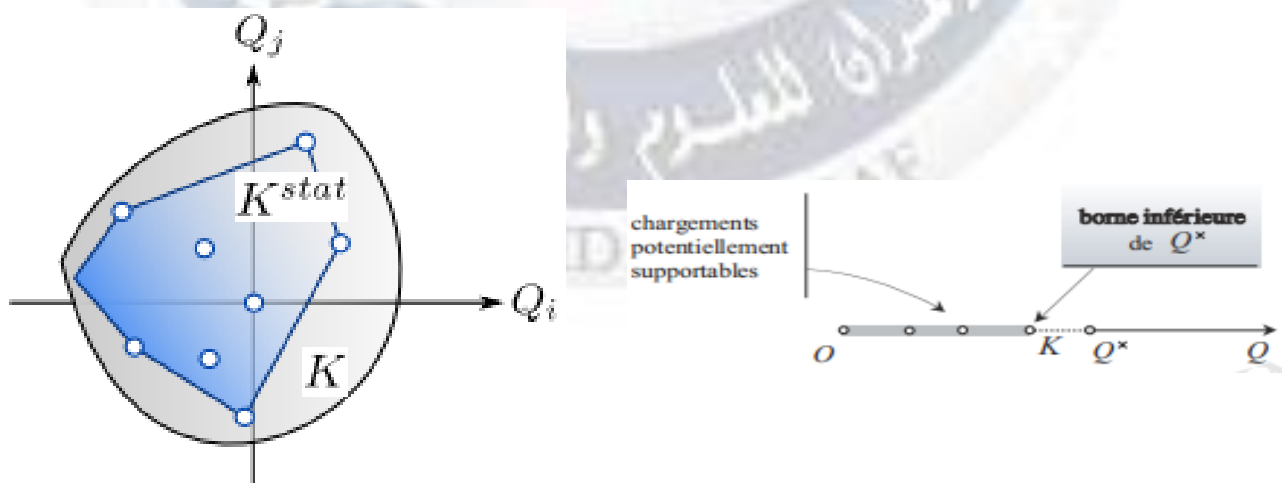


Figure 5 – Approche statique par l'intérieur du domaine \mathbf{K} des chargements potentiellement supportables

CHAPITRE II

II.3 APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR DE K

L'approche cinématique par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables consiste à identifier des chargements n'appartenant pas au domaine \mathbf{K} .

II.3.1 PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

Soit $\underline{\hat{U}}$ un champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible quelconque qui induit à tout point du système $\underline{x} \in \Omega$ (champ de vitesse (taux) de déformation virtuel $\underline{\hat{d}}$ pour le milieu continu 3D, vitesse (taux) de courbure (dérivée 2^{ème} de la flèche) virtuelle $\hat{\chi}$ pour les barres en flexion plane, vitesse (taux) d'extension/rétrécissement virtuelle $\hat{\varepsilon}$ pour les barres en traction/compression... etc.) qui n'est astreint à aucune des limites imposées aux mouvements réels (liaisons cinématiques par exemple). En particulier, ce champ $\underline{\hat{U}}$ peut présenter des discontinuités $[\underline{\hat{U}}(\underline{x})]$ à la traversée de surfaces de discontinuité notées Γ . En supposant que ce champ soit cinématiquement admissible (C.A.) avec les conditions aux limites en vitesse sur le bord $\partial \Omega$, on peut introduire un vecteur des paramètres cinématiques généralisés $\underline{\hat{q}}$ (où $\underline{\hat{q}}(\underline{\hat{U}})$ est connu), associé par dualité au vecteur des paramètres de chargement \underline{Q} , de telle sorte que la puissance virtuelle des efforts extérieurs développée dans ce champ de vitesse virtuel s'écrit :

$$P_{ext}(\underline{\hat{U}}) = \underline{Q} \cdot \underline{\hat{q}}(\underline{\hat{U}}) \quad (\text{II.5})$$

Le principe des puissances virtuelles permet de reformuler, de manière complètement équivalente, les équations d'équilibre de la structure sous forme dualisée en écrivant l'égalité de la puissance virtuelle des efforts extérieurs $P_{ext}(\underline{\hat{U}})$

CHAPITRE II

et de la puissance virtuelle de déformation (opposée à celle des efforts intérieurs

$P_{\text{int}}(\hat{\underline{U}})$ $P_d(\hat{\underline{U}})$, soit ici:

$$\underline{\Sigma}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \hat{\underline{U}} \text{ C.A. avec } \hat{q}(\hat{\underline{U}}) \\ \underline{Q} \cdot \hat{q}(\hat{\underline{U}}) = P_d(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} (\underline{\Sigma}(\underline{x}) \cdot \hat{D}(\underline{x})) d\Omega + \int_{\Gamma} ([\hat{\underline{U}}(\underline{x})] \cdot (\underline{\Sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}))) da \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Où $\hat{D}(\underline{x})$ représente le taux de déformation virtuelle associé par dualité aux efforts intérieurs généralisés $\underline{\Sigma}(\underline{x})$ et $(\underline{\Sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}))$ correspond au vecteur contrainte des efforts intérieurs sur la surface discontinuité Γ .

II.3.2 PUISSANCE RÉSISTANTE MAXIMALE

À partir de l'expression (II.5) du principe des puissances virtuelles, on introduit la puissance résistante maximale, valeur maximale de la puissance de déformation compte tenu du critère de résistance du matériau en tout point. Cette dernière a pour expression :

$$P_m(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{x}; \hat{D}(\underline{x})) d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}); [\hat{\underline{U}}(\underline{x})]) da \quad (\text{II.7})$$

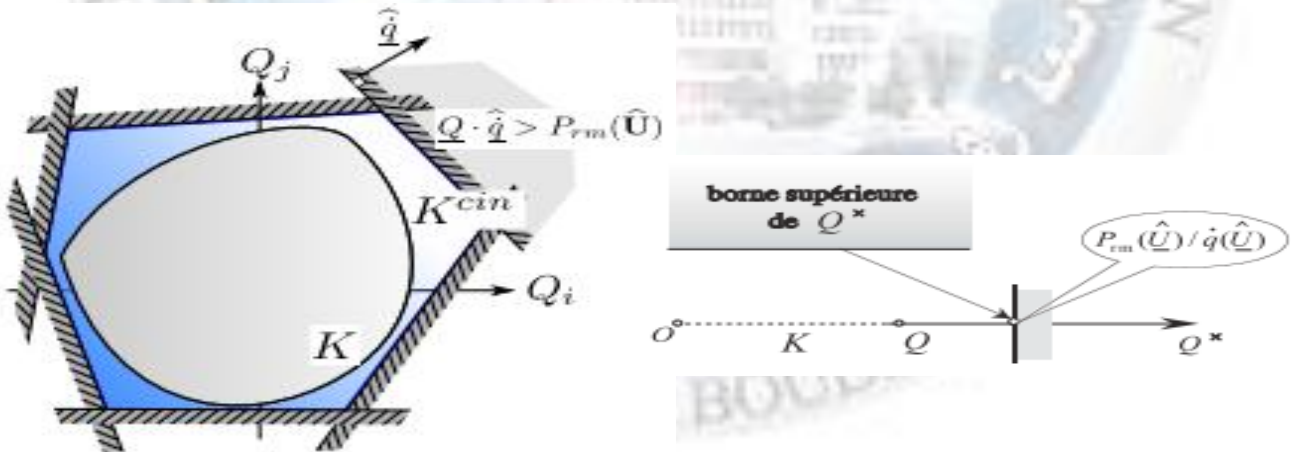


Figure 6 – Approche cinématique par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables

Où :

$$\begin{aligned} \pi(\underline{x}; \hat{D}(\underline{x})) &= \sup \{ \underline{\Sigma}(\underline{x}) \cdot \hat{D}(\underline{x}) \text{ avec } \underline{\Sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \} \quad \text{et} \\ \pi(\underline{x}; \underline{n}; [\hat{\underline{U}}(\underline{x})]) &= \sup \{ [\hat{\underline{U}}(\underline{x})] \cdot (\underline{\Sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})) \text{ avec } \underline{\Sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Sont les fonctions d'appui du domaine de résistance $G(\underline{x})$. décrites dans le chapitre I.

CHAPITRE II

II.3.3 ÉNONCÉ DE L'APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR

Il découle immédiatement de (II.3),(II.6),(II.7),(II.8) que :

$$\forall \underline{Q} \in K \subset K^{cin} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \underline{\hat{U}} \text{ C.A. avec } \underline{\hat{q}} \\ P_{ext}(\underline{Q}, \underline{\hat{U}}) = \underline{Q} \cdot \underline{\hat{q}}(\underline{\hat{U}}) \leq P_m(\underline{\hat{U}}) \end{cases} \quad (II.9)$$

Cette dernière inégalité peut s'interpréter géométriquement de la façon suivante : pour un champ de vitesse virtuelle $\underline{\hat{U}}$ donné, le domaine \mathbf{K} est inclus dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par l'hyperplan d'équation :

$$\underline{Q} \cdot \underline{\hat{q}}(\underline{\hat{U}}) = P_m(\underline{\hat{U}}).$$

En considérant différents champs de vitesse virtuelle (mécanismes de ruine), on obtient un domaine convexe \mathbf{K}^{cin} correspondant à l'intersection d'autant de demi-espaces et qui contient \mathbf{K} . On obtient donc une approche par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables : $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}^{cin}$ (Figure 6). Pour une direction de chargement donnée, la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture conduit donc à la détermination d'une borne supérieure du chargement extrême de la structure. En pratique, l'analyse de la ruine d'une structure au sens du calcul à la rupture s'effectue en mettant en œuvre l'approche statique par l'intérieur ainsi que l'approche cinématique par l'extérieur afin d'obtenir un encadrement de la frontière du domaine des chargements potentiellement supportables \mathbf{K} . En pratique, l'ingénieur n'expliquera que quelques classes de champ de vitesses virtuelles (mécanismes de rupture) bien choisis, lui permettant d'estimer \mathbf{K} par excès. Il se satisfera d'une bonne approche par l'extérieur, compromis entre les moyens mis en œuvre et la qualité de l'approximation obtenue.

CHAPITRE II

II.4 LES APPROCHES DU CALCUL À LA RUPTURE : UNE MÉTHODE D'ENCADREMENT DE K

Le schéma de la figure 7 récapitule le principe du raisonnement de calcul à la rupture et de ses deux approches :

- **L'approche statique par l'intérieur (« lower bound method »)**
consiste à mettre en évidence, par voie analytique ou numérique (éléments finis), des champs de contrainte obéissant à la double exigence d'être en équilibre (statiquement admissibles) et de respecter le critère de résistance en tout point. Elle aboutit à la détermination de minorants des chargements extrêmes, et donc mathématiquement à la formulation d'un problème de maximisation sous contraintes linéaires convexes. La minoration est d'autant meilleure que l'ensemble des champs de contrainte est de dimension importante.
- **L'approche cinématique par l'extérieur (« upper bound method »)**
consiste à explorer des champs de vitesse virtuels (mécanismes) qui soient simultanément cinématiquement admissibles et pertinents, à calculer la puissance résistante maximale correspondante et à en déduire des majorants des chargements extrêmes. La recherche des meilleurs majorants aboutit à la formulation d'un problème de minimisation sous contraintes linéaires convexes.

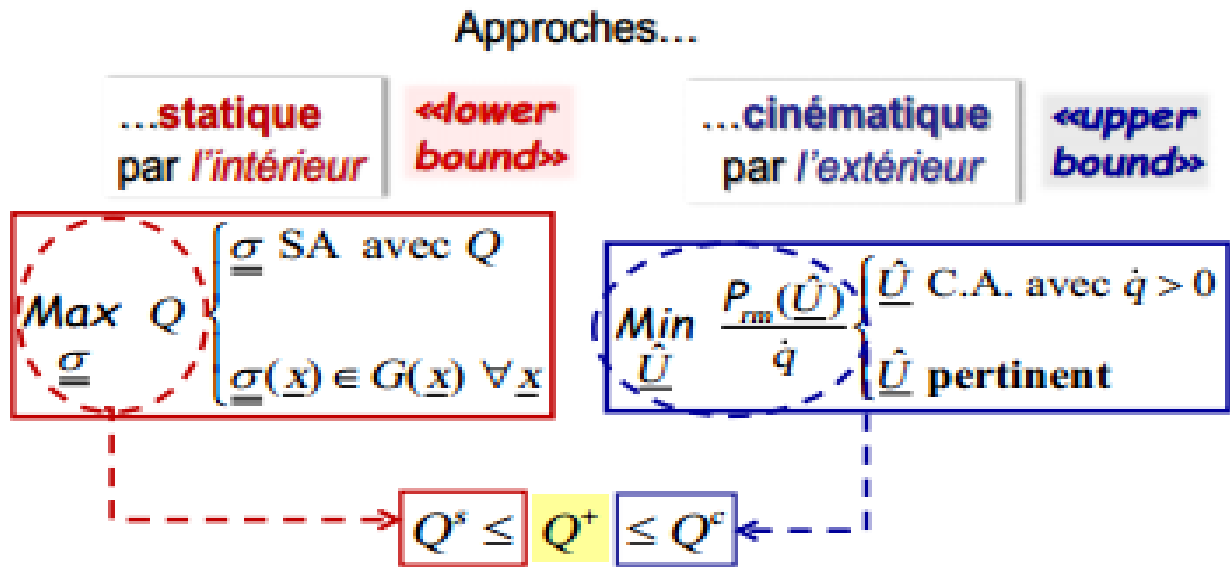


Figure 7 – Encadrement des chargements extrêmes par mise en œuvre des approches statique et cinématique du calcul à la rupture

La figure 8 illustre, dans le cas d'un mode de chargement à n paramètres, l'encadrement du domaine des chargements supportables **K** résultant de l'utilisation conjointe des approches statique par l'intérieur (domaine polygonal rouge) et cinématique par l'extérieur (domaine polygonal bleu).

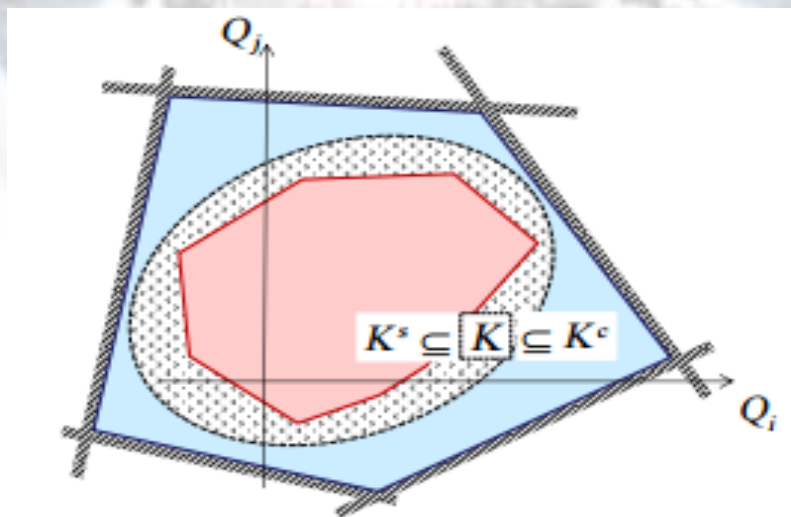


Figure 8– Encadrement du domaine **K** dans l'espace des chargements **Q**

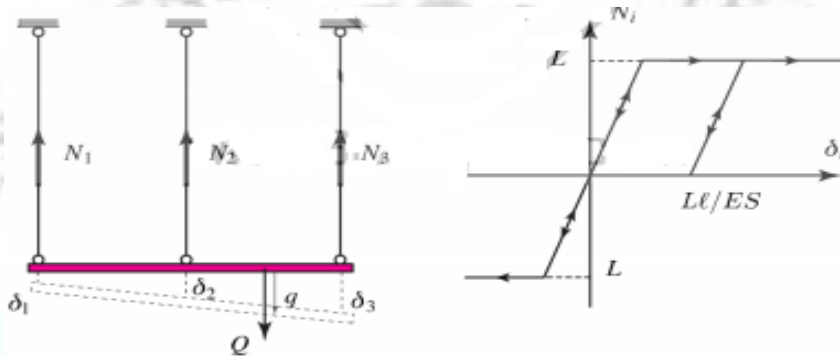
CHAPITRE II

FICHE TD N° II (APP. STATIQ. PAR L'INTER.)

EXERCICE 1 (STRUCTURE RÉTICULÉE)

On désigne par N_i ($i = 1, 2, 3$) l'effort de traction-compression dans la barre i . Le chargement de cette structure est constitué par une force verticale Q d'intensité Q , comptée positivement vers le bas, appliquée sur le barreau à mi-distance des barres 2 et 3, et que l'on fait croître progressivement à partir d'une valeur nulle

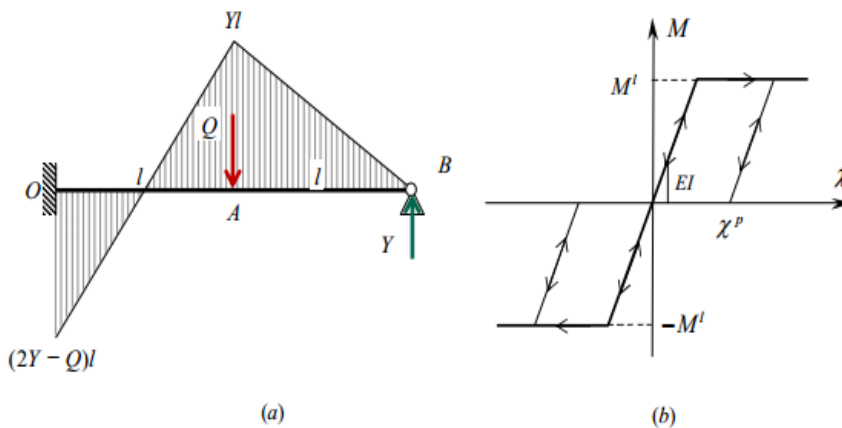
Le comportement des barres est élastique parfaitement plastique schématisé par le diagramme effort-allongement de la figure 1-a.



1. Montrer sur un tel exemple que la valeur de la charge limite $Q_1 = +2L$? (**App. stat par l'inter**)

EXERCICE 2 (STRUCTURE À BARRE FLÉCHI)

Soit une poutre de longueur $2l$, encadrée en $O(x=0)$ et simplement appuyée à son extrémité $B(x=2l)$, soumise en son milieu A ($x=l$) à une charge ponctuelle verticale d'intensité Q , comptée positivement vers le bas (figure 2(a)), et croissant progressivement en fonction du temps à partir d'une valeur nulle. Cette poutre obéit en chacun de ses points à une loi de comportement de type moment-courbure, élastique parfaitement plastique, schématisée par le diagramme de la figure 2(b)



1. Démontrer que la valeur de la charge limite de la structure égale à $Q = 3M^l/l$? (**App. stat par l'inter**)

CHAPITRE III

APPLICATIONS PRATIQUES

(MATERIAUX ISOTROPES ET HOMOGENES EN HPP/ISOTHERME)

INTRODUCTION28

III.1 APPLICATIONS PRATIQUES 28

 III.1.1 ANALYSE DE STABILITÉ DES PENTES

III.1.1.1 Approches classiques

III.1.1.2 Approches par calcul à la rupture

 III.1.2 ANALYSE DE STABILITÉ DES FONDATIONS SUPERFICIELLES

CONCLUSION33

CHAPITRE III

La mécanique des sols est un des principaux domaines dans lequel l'approche par le calcul à la rupture a permis d'effectuer d'importants progrès dans le dimensionnement des ouvrages (talus, soutènement, fondations superficielles, ... etc.). L'intérêt porté par les mécaniciens des sols à ce type d'approche est certainement lié à la difficulté de caractériser, de façon satisfaisante, le comportement mécanique des sols (état initial, loi de comportement, ... etc.). Le calcul à la rupture offre l'avantage de ne nécessiter qu'une connaissance du critère de résistance du matériau, relativement facile à évaluer expérimentalement, et permet donc d'apporter une première réponse quant à la stabilité d'un ouvrage sans avoir à décrire son évolution le long d'un trajet de chargement (problème d'évolution élasto-plastique).

La mise en œuvre analytique des approches statique et cinématique a permis d'obtenir des solutions analytiques exactes dans certains cas ou des encadrements satisfaisants de la charge ultime. Ainsi, l'utilisation de mécanismes de ruine par blocs séparés par des surfaces de glissement (discontinuité) fait actuellement partie de la pratique de l'ingénieur dans le dimensionnement des ouvrages de géotechnique.

III.1 APPLICATIONS PRATIQUES

III.1.1 ANALYSE DE STABILITÉ DES PENTES

Pour les problèmes de stabilité des pentes diverses méthodes s'attachent à vérifier que l'équilibre globale (en terme de torseurs), d'un volume de sol défini géométriquement par quelques paramètres dans l'ouvrage considéré peut être assuré compte tenu de la condition de résistance du sol exprimée en règle générale par un critère de résistance de Coulomb qui limite les états de contraintes admissibles. L'analyse de Fellenius pour la stabilité des pentes, où les volumes de sol dont on

CHAPITRE III

vérifie l'équilibre sont limités par des cercles. Lorsque de tels volumes limités sont utilisés pour des sols frottant, il apparaît que l'analyse ne peut aboutir qu'en introduisant des hypothèses complémentaires comme dans la méthode des tranches.

III.1.1.1 Approches classiques

Les méthodes usuelles de calcul de stabilité des pentes reposent pour la plupart sur un raisonnement d'« équilibre limite », qui consiste à définir une surface de rupture potentielle de l'ouvrage et à comparer :

- la contribution des forces motrices (pesanteur, surcharges, écoulement hydraulique, sollicitation sismique, etc.) qui tendent à déstabiliser la partie de l'ouvrage délimitée par cette surface ;
- à la contribution résistance développée par le sol le long de cette surface, compte tenu de sa résistance caractérisée par sa cohésion et son angle de frottement.

Une description détaillée de ce type de méthodes appliquées encore aujourd'hui le plus souvent, et que nous nous contentons de décrire brièvement, avant d'en mettre en évidence les limites au regard de la théorie du calcul à la rupture présentée dans le chapitre II.

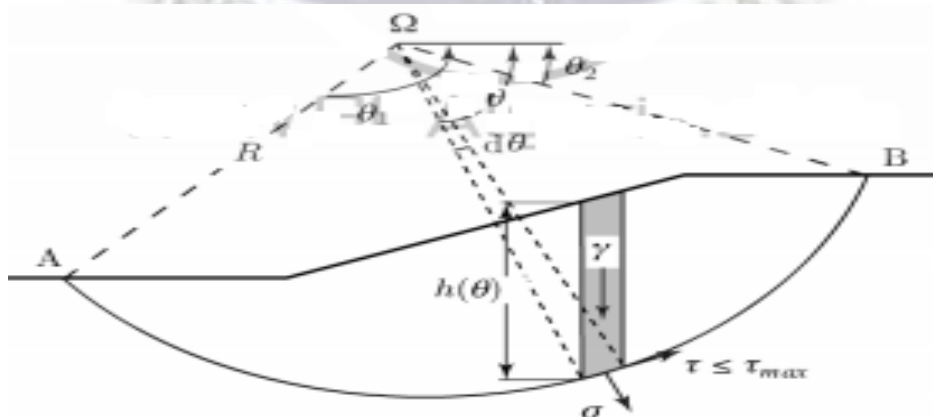


Figure 10 – L'Analyse de stabilité d'une pente par« rupture circulaire».

CHAPITRE III

Lorsque la rupture est « circulaire », c'est-à-dire lorsque l'on considère l'équilibre en moment par rapport au centre Q d'un volume de sol délimité par une surface circulaire AB de rayon R (Fig. 10), le moment moteur dû au poids (on suppose qu'il n'a pas d'autre chargement susceptible de déstabiliser l'ouvrage) vaut, en utilisant les

notations de la figure:
$$M_{\omega}^{\Omega} \leq \gamma R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta$$

Tandis que le moment résistant développé par les contraintes s'exerçant sur la surface de rupture AB s'écrit :

$$M_r^{\Omega} \leq R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau(\theta) d\theta$$

Où $\tau(\theta)$ représente la contrainte de cisaillement au point de cette surface repéré par l'angle θ . Deux cas se présentent alors selon que le sol est frottant ou non.

- **Notion de coefficient de sécurité :**

Dans le cas où le sol est purement cohérent, de cohésion égale à C, la contrainte de cisaillement le long de la surface de rupture est telle que : $\tau(\theta) \leq C$

De sorte que le moment résistant maximal s'écrit, compte tenu du critère de résistance du sol : $M_{m}^{\Omega} = C R^2 (\theta_2 - \theta_1)$

Le coefficient de sécurité est alors classiquement défini par: $F(\theta_2 - \theta_1) = \frac{M_{m}^{\Omega}}{M_{\omega}^{\Omega}}$

il apparaît alors qu'une condition nécessaire pour que la pente soit potentiellement stable est que le coefficient de sécurité défini précédemment soit supérieur à l'unité, c'est-à-dire en d'autres termes que le moment moteur soit inférieur ou égal au moment résistant maximal développé par les contraintes de cisaillement le long de la surface circulaire:

$$\text{Stabilité potentielle} \Rightarrow F(\theta_2 - \theta_1) \geq 1$$

CHAPITRE III

III.1.1.2 Approches par calcul à la rupture :

En se référant au raisonnement du calcul à la rupture introduit dans le chapitre II, Il importe de remarquer que ce raisonnement, est rigoureusement équivalent à l'approche cinématique par l'extérieure, en utilisant un mécanisme de bloc en rotation représenté sur la figure 11. Si on considère en effet un tel mécanisme dans lequel le bloc délimité par l'arc de cercle AB est animé d'un mouvement de rotation de vitesse $\hat{\omega}$ autour du centre Ω il apparaît immédiatement que la «puissance des efforts extérieurs» dans ce mécanisme s'écrit tout simplement comme le produit de la vitesse de rotation du bloc par le moment moteur : $P_e(\hat{U}) = M_{\omega}^{\Omega} \hat{\omega}$

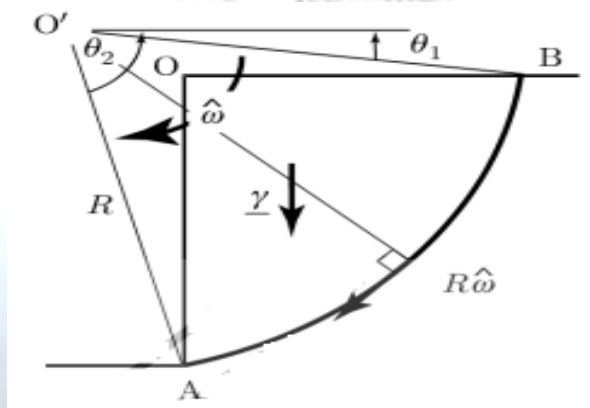


Figure 11 – Analyse de stabilité du talus par des mécanismes de bloc en rotation.

Tandis que la puissance résistante maximale développée dans ce même mécanisme n'est autre que le produit de cette même vitesse par le moment résistant maximal :

$$P_m(\hat{U}) = M_m^{\Omega} |\hat{\omega}|$$

De sorte que pour $\hat{\omega} > 0$, le coefficient de sécurité n'est autre que le rapport entre la puissance résistante maximale et la puissance des efforts extérieurs :

$$F(\theta_2 - \theta_1) = \frac{M_m^{\Omega}}{M_{\omega}^{\Omega}} = \frac{P_m(\hat{U})}{P_e(\hat{U})}$$

CHAPITRE III

L'analyse par le calcul à la rupture de la stabilité des pentes et talus présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes classiques, encore le plus couramment utilisées aujourd'hui. Il s'agit en premier lieu d'une approche rigoureuse fondée sur le seul raisonnement de compatibilité équilibre-résistance, ne nécessitant aucune hypothèse particulière, contrairement par exemple à la méthode des tranches évoquée précédemment. Les résultats auxquels elle conduit donnent lieu à une interprétation claire. Il s'agit en effet, pour ce qui concerne par exemple l'étude de stabilité par blocs décrite ci-dessus, d'une approche par l'extérieur conduisant à l'obtention de majorants du coefficient de sécurité de l'ouvrage.

III.2.2 ANALYSE DES FONDATIONS SUPERFICIELLES

La stabilité des fondations superficielles et la détermination de leur capacité portante ont été abordées de la même façon. Elles ont fait l'objet d'analyse par les méthodes dites **d'équilibre limites**, dans le cas des problèmes en déformation planes.

La figure 12 représente une courbe typique donnant le tassement s de la fondation en fonction de la charge Q qui lui est appliquée. La valeur limite Q_1 correspond à la capacité portante ultime de la fondation, qui provoque le poinçonnement du sol. L'évaluation de cette capacité portante relève très précisément d'un raisonnement de calcul à la rupture, tel que nous en avons exposé les principes dans la fiche TD III. L'objet est d'illustrer l'application d'un tel raisonnement sur l'exemple simple du calcul de la capacité portante d'un massif semi infini en sol purement cohérent, traité comme un problème en déformation plane.

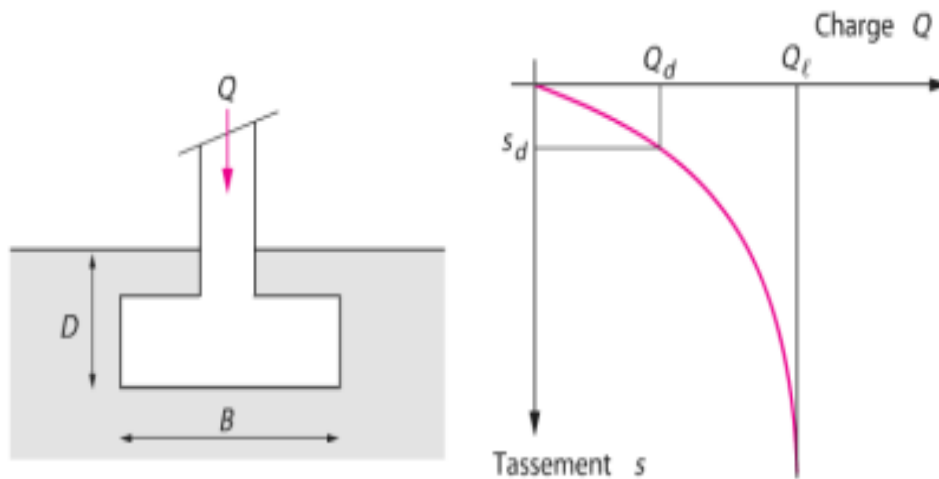


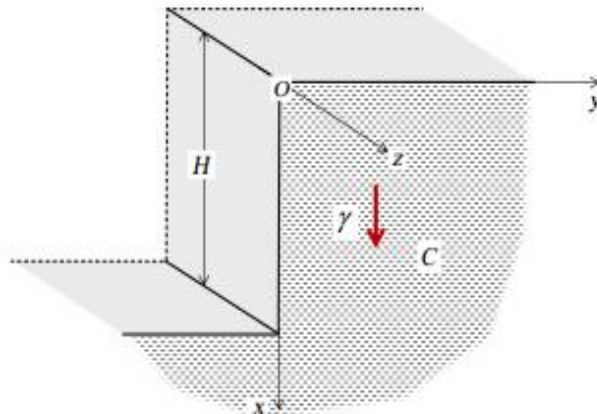
Figure 12 – Courbe donnant le tassement d'une fondation superficielle en fonction de la charge appliquée.

La mise en œuvre des approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur a permis la détermination exacte de la capacité portante d'une fondation superficielle dans le cas particulier d'un chargement de type semelle filante sur un sol purement cohérent. Ce type d'analyse peut aisément se généraliser à des situations plus complexes : présence de plusieurs couches de sols cohérents et frottants, chargement inclinés et/ou excentrés, semelle de fondation circulaire ou rectangulaire, etc. On observe généralement que, hormis dans les situations les plus simples telles celle que nous avons analysée en détail dans le présent chapitre, l'approche statique par l'intérieur est relativement malcommode à mettre en œuvre car elle nécessite d'exhiber dans tout le massif un champ de contrainte statiquement admissible et qui vérifie le critère en tout point. Tout comme dans les problèmes relatifs à l'analyse de stabilité de talus et de pentes, l'approche cinématique par l'extérieur se révèle en revanche beaucoup facile à utiliser, car présentant un caractère systématique. Il suffit en effet de considérer des classes de mécanismes dépendant d'un nombre limité de paramètres, par rapport auxquels une optimisation est effectuée par voie numérique.

FICHE TD N° III (EXEMPLES D'APPLICATION)

EXERCICE 1 (ANALYSE DE STABILITÉ D'UN TALUS VERTICAL)

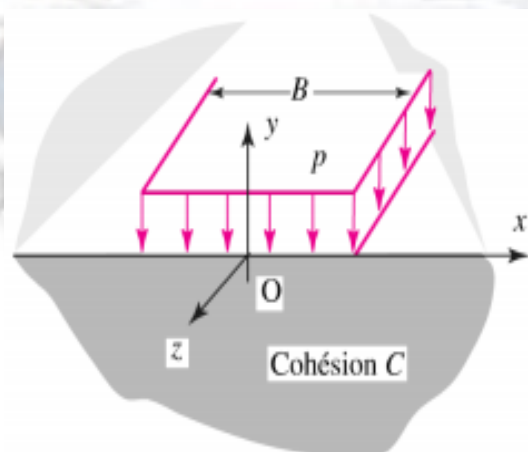
Reprenons dans le cadre du raisonnement de calcul à la rupture l'analyse de stabilité par surfaces de rupture d'un talus constitué d'un sol homogène pesant ($\gamma \neq 0$), obéissant à un critère de Tresca, caractérisé par une cohésion C .



1. Faire une analyse de stabilité de ce talus (**App. stat par l'inter / App. ciné par l'exter**) ?

EXERCICE 2 (ANALYSE DE STABILITÉ DES FONDAT. SUPERFICIELLES)

On considère un massif de sol semi infini soumis à une pression uniforme d'intensité p , comptée positivement vers le bas, s'exerçant sur une bande de largeur B et d'extension infinie dans la direction Oz . On néglige dans un premier temps le poids propre du sol ($\gamma = 0$). Le critère de résistance utilisé est celui de Tresca, de cohésion C .



1. On recherche la valeur du chargement extrême p^+ (capacité portante du massif) (**App. stat par l'inter / App. ciné par l'exter**) ?

CONCLUSION GENERALE

Ce travail tentait de développer les bases d'une démarche efficace plus rationnelle et moins empirique du dimensionnement à la ruine des ouvrages de génie civil. Contrairement aux approches traditionnelles reposant sur une combinaison de calculs élastiques, l'adoption de coefficients de sécurité et une vérification locale des sections critiques, la théorie du calcul à la rupture nous semble être un outil prometteur pour une évaluation plus rigoureuse de la sécurité des ouvrages.

Si la théorie du calcul à la rupture peut être établie hors de toute connaissance du comportement du matériau constitutif du système étudié hormis l'existence d'un domaine de résistance, il est clair que l'intérêt pratique des résultats qui sont ainsi établis, quelle que soit leur puissance, est lui directement dépendant de ce comportement.

L'analyse limite apparait évidemment comme la meilleure justification théorique pour l'emploi du calcul à la rupture : toutefois on a vu qu'elle a été établie sous des hypothèses précises concernant le comportement du matériau constitutif. Il parait vraisemblable que certaines de ces hypothèses pourraient être dépassées, par exemple en ce qui concerne la linéarité dans le domaine élastique.

Il est essentiel de remarquer que l'expérience de la mécanique des sols a montré que les résultats obtenus par la théorie du calcul à la rupture, peuvent, dans de nombreux problèmes de première importance tels que la stabilité des pentes et des remblais et la capacité portante des fondations superficielles, servir de bases valables pour des dimensionnements.

RECAPITULATION

CALCUL À LA RUPTURE ET ANALYSE LIMITE

Permit : d'analyser la stabilité vis-à-vis la **rupture/plastification** des systèmes :
Structures : str. Réticulées : str. A barres fléchés (poutre, portique), plaques et coques.
Ouvrages géotechniques : stabilité des (pentes, ouvr.de soutènement, fond. Superfici).

A travers : la détermination d'un domaine **K** des chargements **Q** **potentiellement/effectivement** supportables, dont sa frontières constitue les chargements **extrêmes Q*(de rupture)/limites Q^l (d'écoulement plastiqu.)** du système.

En se basant : sur une compatibilité (équilibre/résistance) entre :
Les conditions imposées par :

Les équations exprimant l'équilibre quasi-statique du système.
Et les inéquations des capacités de résistance des matériaux constitutifs du système (critères de **résistance/plasticité**).

De là on déduit deux approches :

« Statique (par voie primale) » : permettant de déterminer les chargements **Q** pour lesquels il y a « stabilité **potentielle/effective** » du système dans les conditions imposées.

« Cinématique (par voie duale) » : permettant de déterminer commodément des chargements **Q** pour lesquels « l'instabilité » du système dans les conditions indiquées est certaine.

Qui s'écrivent comme suit :

L'approche statique par l'intérieur du domaine des chargements **potentiellement/effectivement** supportables **K** revient à mettre en œuvre, la définition (II.3'), c'est-à-dire à exhiber, par tout moyen disponible (analytique/numérique), un champ d'efforts intérieurs vérifiant les propriétés requises.

$$\underline{Q} \in K^{stat} \subset K \subseteq R^n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\Sigma}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} & (\text{condition d'équilibre}) \\ \underline{\Sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \text{ ou } C(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega & (\text{condition de résistance / plasticité}) \end{cases} \quad (\text{II.4'})$$

L'approche cinématique par l'extérieur du domaine des chargements **potentiellement/effectivement** supportables **K** revient à mettre en œuvre, la définition (II.9'), c'est-à-dire à exhiber, par tout moyen disponible (analytique/numérique), un champ de vitesses virtuelles **pertinent/plastiquement admissible** vérifiant les propriétés requises.

$$\forall \underline{Q} \in K \subset K^{cin} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \hat{\underline{U}} \text{ C.A. avec } \dot{\underline{q}} \\ P_{ext}(\underline{Q}, \hat{\underline{U}}) = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\hat{\underline{U}}) \leq P_m(\hat{\underline{U}}) \text{ ou } P_p(\hat{\underline{U}}) \end{cases} \quad (\text{II.9'})$$

ANNEXE

Equilibre : champs de contrainte statiquement admissible :

Lorsque le champ de contrainte de Cauchy est continûment différentiable par rapport aux coordonnées d'espace, les équations d'équilibre s'écrivent dans le cas de la statique (c'est-à-dire en négligeant les forces d'inertie) en coordonnées cartésiennes orthonormées:

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{F}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0$$

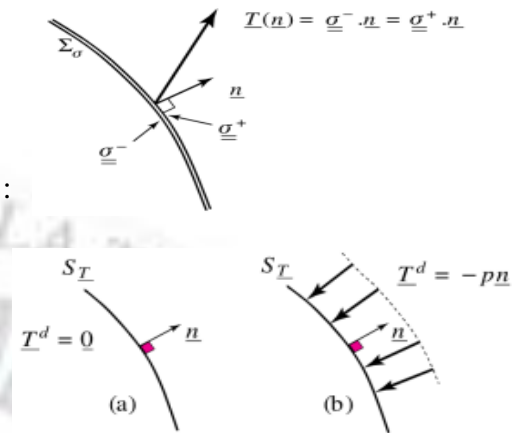
Cette équation d'équilibre doit être complétée par l'équation aux discontinuités, valable dans le cas où le champ de contrainte est discontinu au travers d'une surface, qui s'écrit :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^+ - \underline{\underline{\sigma}}^-) \cdot \underline{\underline{n}} = [\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{\underline{n}} = 0$$

Et conditions aux limites en contraintes :

$$T_i(\underline{x}) = \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{T_i}$$

Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est alors dit statiquement admissible (S.A.) s'il vérifie ces 03 équations.



Principe des Puissances Virtuelles (PPV) :

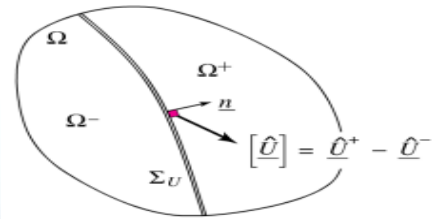
On montre alors (par simple application du théorème de la divergence) que pour tout champ de vitesse virtuel \hat{U} et tout champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifiant l'équation d'équilibre l'équation aux discontinuités précédentes, la puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués au massif occupant le domaine Q, définie par :

$$P_e(\hat{U}) = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \hat{U} dS + \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{F}} \cdot \hat{U} d\Omega$$

$$P_d(\hat{U}) = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \hat{d}) d\Omega + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot [\hat{U}] d\Sigma$$

$$PPV : \forall \hat{U}, \forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ tel que } \begin{cases} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{F}} = 0 & \text{dans } \Omega / \Sigma_{\sigma} \\ [\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{\underline{n}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\sigma} \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

$$P_e(\hat{U}) = P_d(\hat{U})$$



où \hat{d} est le taux de déformation virtuel :

$$\hat{d}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \hat{U} + {}^T \underline{\underline{grad}} \hat{U} \right) (\underline{x}, t) = \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{x}, t), \text{ donc } \forall (i, j), \hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\hat{U}_{i,j} + \hat{U}_{j,i})$$

$[\hat{U}]$ est le saut de vitesse virtuelle à la traversée de la surface de discontinuité de vitesse en suivant la normale $\underline{\underline{n}}$

Remarque :

Il est important de noter que le PPV n'exprime rien d'autre que la « dualisation » mathématique des équations d'équilibre. Il n'a en particulier aucun rapport avec de quelconques considérations énergétiques ou thermodynamiques. Il constitue en revanche un outil essentiel de l'approche cinématique par l'extérieur du Calcul à la Rupture.