République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté de Physique ***Département de Génie Physique***

"Cinématique et dynamique du point matériel"

Cours et exercices corrigés

Polycopié

Destiné aux étudiants de 1ère année S.T et S.M

Rédigé par: Dr. Sid Ahmed Sfiat

Maitre de conférence, USTO-MB

Année Universitaire 2022 / 2023

AVANT-PROPOS

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année du système Licence-Master-Doctorat (L.M.D) spécialité : Sciences de la Matière (SM) et Sciences et Technologie (S.T). Il suit le programme enseigné dans les départements de Physique au sein des Universités Algériennes.

Ce polycopié contient des rappels de cours et des exercices résolus sur les différents chapitres du module de Physique 1 " Mécanique du point ".

Les rappels de cours ont été introduits pour souligner les concepts de base de la mécanique classique du point matériel. Les exercices accompagnants ces rappels de cours ont été choisis pour but d'apporter une formation efficace aux étudiants afin de faciliter leur compréhension du cours et de consolider leurs connaissances.

Ce polycopié est divisé en cinq chapitres :

Chapitre - 1 : *Equations aux Dimensions, Calcul des Incertitudes et Calcul Vectoriel*

Chapitre - 2 : Cinématique du point matériel

Chapitre - 3 : Le mouvement relatif

Chapitre - 4 : Dynamique du point matériel

Chapitre - 5 : Travail et Energie

Je tiens à souligner que ce polycopié n'est pas un substitut aux cours et travaux dirigés. La présence de l'étudiant et son interaction avec son enseignant est irremplaçable. Ce polycopié sert comme support et accompagnateur à l'étudiant dans son parcours d'apprentissage et de connaissance.

Je souhaite à tous nos étudiants une bonne expérience universitaire et un parcours plein de succès et réussite.

Dr. Sid Ahmed Sfiat

Table des matières

A mes chers enfants bien-aimés

Aicha

Muhammed Al-Amine

Meryam Hibat-Allah

Marwa

Nourhene

Hamza Mohamed Cherif

Chapitre 1

Equations aux Dimensions, Calcul des Incertitudes et Calcul Vectoriel

1.1 Equations aux Dimensions:

La dimension est la grandeur physique associée à un objet physique indépendamment de l'unité utilisée pour la mesure de l'objet. Il existe sept grandeurs de base du système international choisi par les physiciens, à partir desquelles on peut former toutes les grandeurs de la physique.

Dimension fondamentale	**Mass**	**Longueur**	**Temps**	**Intensité électrique**	**Température**	**Quantité de matière**	**Intensité Lumineuse**
Unité (S.I)	Kg	m	s	A	k	Mol	Cd
Symbole	M	L	T	I	ϴ	N	J

Une constante physique est une grandeur dimensionnée. Une constante numérique est adimensionnée. Il ne faut pas confondre dimension et unité. En effet, une quantité physique a une et seule dimension mais elle peut être exprimée dans plusieurs systèmes d'unités différentes.

Deux quantités physiques sont homogènes si elles ont la même dimension. On ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même dimension et exprimées dans le même système d'unité. L'analyse dimensionnelle permet de retrouver la dimension et unité d'une grandeur si on connait une équation simple liant cette grandeur à d'autres de dimension connue.

Voici quelques règles à suivre afin de trouver la dimension et l'unité d'une grandeur physique :

- On utilise les crochets [...] pour exprimer la dimension de l'objet considéré.
- Les arguments des fonctions mathématiques sont sans dimension.
- Si A = B^n x C^m, alors [A] = $[B]^n$ x $[C]^m$.
- $[\frac{d^nA}{dx^n}] = \frac{[A]}{[x]^n}$ et $[\int Adx] = [A] \, . [X\}$
- La dimension d'une grandeur G est donnée en fonction des 7 dimensions fondamentales :
  [G] = $\mathbf{M^xL^yT^z\Theta^aI^bN^cJ^d}$ avec des nombres réels comme exposants.

Le tableau suivant illustre les différentes grandeurs formées à base de grandeurs fondamentales:

Grandeur	**Relation**	**dimension**	**Unité de base**
Longueur	d	**L**	M
Surface	S = L^2	$\mathbf{L^2}$	m^2
Volume	V = L^3	$\mathbf{L^3}$	m^3
Temps	t	**T**	s
Vitesse	v $= d/t$	$\mathbf{LT^{-1}}$	ms^{-1}
Accélération	$a =$ v/t	$\mathbf{LT^{-2}}$	ms^{-2}
Fréquence	$\nu = 1/T$	$\mathbf{T^{-1}}$	s^{-1} ou Hertz (Hz)
Mass	m	**M**	Kg
Mass Volumique	ρ = m/V	$\mathbf{ML^{-3}}$	kgm^{-3}
Force	F = ma	$\mathbf{MLT^{-2}}$	$kgms^{-2}$, Newton (N)
Energie	E = mc^2	$\mathbf{ML^2T^{-2}}$	kgm^2s^{-2} , Joule (J)
Puissance	P = E/t	$\mathbf{ML^2T^{-3}}$	kgm^2s^{-3} , Watt (W)
Pression	P = F/S	$\mathbf{ML^{-1}T^{-2}}$	$kgm^{-1}s^{-2}$, Pascal (Pa)

Intensité de courant	I	**I**	Ampère (A)
Charge électrique	Q = It	**IT**	$A \cdot s$, Coulomb (C)
Voltage	U = P/I	$\mathbf{ML^2T^{-3}I^{-1}}$	$kgm^2s^{-3}A^{-1}$, Volt (V)
Resistance	R = U/I	$\mathbf{ML^2T^{-3}I^{-2}}$	$kgm^2s^{-3}A^{-2}$, ohm (Ω)
Capacité	C = Q/U	$\mathbf{M^{-1}L^{-2}T^4I^2}$	$kg^{-1}m^{-2}s^4A^2$, farad (f)
Inductance	U =Ldi/dt	$\mathbf{ML^2T^{-2}I^{-2}}$	$kgm^2s^{-2}A^{-2}$, henry (h)

Le tableau suivant montre les différents multiples utilisés avec les unités :

Multiple	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Préfix	femto	pico	nano	micro	milli	Centi	Déci
Symbole	F	p	n	µ	m	C	D

Multiple	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}
Préfix	deca	hecto	kilo	méga	giga	Tera	Peta
Symbole	Da	h	K	M	G	T	P

Exercices :

1. Trouver la pulsation ω du pendule simple sachant qu'elle est en fonction de l'accélération de gravité g, la longueur du fil l et la mass m du point matériel attaché au fil.
    - $\omega = \alpha m^a l^b g^c$ où α est une constante numérique sans dimension.
      Alors, $[\omega] = [m]^a[l]^b[g]^c = \mathbf{T^{-1}}$
      $\mathbf{T^{-1} = M^a L^b (LT^{-2})^c}$
      En identifiant les deux parts de l'équation, on obtient :
      $a = 0, b = -\frac{1}{2}\ \ et\ c = \frac{1}{2}$ 0
      Donc, $\omega = \alpha\sqrt{\frac{g}{l}}$

2. Trouver la pulsation d'oscillation ω d'une étoile sachant qu'elle est en fonction de la densité de l'étoile ρ, de son rayon R et de la constante de la gravitation G.
    - $\omega = k\rho^a R^b G^c$ ou k est une constante numérique sans dimension.
      Alors, $[\omega] = [\rho]^a[R]^b[G]^c = \mathbf{T^{-1}}$
      $\mathbf{T^{-1} = (ML^{-3})^a L^b (M^{-1}L^3T^{-2})^c}$
      En identifiant les deux parts de l'équation, on obtient :
      $a = c = \frac{1}{2}\ \ et\ b = 0$

3. La force universelle de gravitation est donnée par la relation : $F = G\frac{mM}{r^2}$
    - Déterminer la dimension de la constante G et son unité.
    - $F = G\frac{mM}{r^2} \rightarrow G = \frac{Fr^2}{mM}$
      $donc, [G] = \frac{[F][r]^2}{[m][M]} = \frac{(MLT^{-2})(L)^2}{M^2} = \mathbf{M^{-1}L^3T^{-2}}$
      D'où $G = 6.67\text{x}10^{-11}\ kg^{-1}m^3s^{-2}$

4. Donner les dimensions et unités SI des grandeurs physiques suivantes :
   La permittivité du vide ε_0, la perméabilité du vide μ_0 , la constante de Planck **h**, la constante de Boltzmann **k** et la constante de Stefan $\boldsymbol{\sigma}$.
    - En utilisant la relation de la force électrique : $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2} \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi F}\frac{qQ}{r^2}$
      $[\varepsilon_0] = \frac{1}{[F]}\frac{[q][Q]}{[r]^2} = \frac{I^2T^2}{MLT^{-2}L^2} = \mathbf{M^{-1}L^{-3}T^4\ I^2}\ (kg^{-1}m^{-3}s^4A^2)$
    - En utilisant la relation de la force magnétique : $F = \mu_0\frac{I_1I_2l}{2\pi r} \rightarrow \mu_0 = \frac{2\pi Fr}{I_1I_2l}$
      $[\mu_0] = \frac{[F][r]}{[I_1][I_2][l]} = \frac{MLT^{-2}L}{I^2L} = \mathbf{MLT^{-2}\ I^{-2}}\ (kgms^{-2}A^{-2})$
    - En utilisant la relation de l'énergie de rayonnement : $E = \boldsymbol{h}\nu \rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{E}{\nu}$
      $[\boldsymbol{h}] = \frac{[E]}{[\nu]} = \mathbf{ML^2T^{-2}T} = \mathbf{ML^2T^{-1}}\ (kgm^2s^{-1})$ ou (Js)
    - En utilisant la relation de l'énergie cinétique d'une molécule de gaz monochromatique :
      $E = \frac{3}{2}\mathbf{k}T \rightarrow \mathbf{k} = \frac{2E}{3T}$
      $[\mathbf{k}] = \frac{[E]}{[T]} = \frac{ML^2T^{-2}}{\theta} = \mathbf{ML^2T^{-2}\Theta^{-1}}\ (kgm^2s^{-2}K^{-1})$ ou (JK^{-1})
    - En utilisant la relation de la puissance rayonnée par unité de surface d'un corps noir :

$P = \frac{2\pi^4}{15}\frac{\mathbf{k}^4}{c^2h^3}T^4 = \sigma T^4 \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{2\pi^4}{15}\frac{\mathbf{k}^4}{c^2h^3}$

$[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{[\mathbf{k}]^4}{[c]^2[h]^3} = \frac{(ML^2T^{-2}\theta^{-1})^4}{(LT^{-1})^2(ML^2T^{-1})^3}$ = $\mathbf{MT^{-3}\Theta^{-4}}$ ($kgs^{-3}K^{-4}$)

5. Donner les dimensions et unités SI des grandeurs électriques suivantes : RC, $\frac{L}{R}$ et $\sqrt{LC}$
   - Du tableau, on a: [R] = $\mathbf{ML^2T^{-3}I^{-2}}$, [C] = $\mathbf{M^{-1}L^{-2}T^4I^2}$ et [L] = $\mathbf{ML^2T^{-2}I^{-2}}$
     Donc, [RC] = $\mathbf{T}$ (s)
     $\left[\frac{L}{R}\right]$ =$\mathbf{T}$ (s)
     $\left[\sqrt{LC}\right]$ = $\mathbf{T}$ (s)

6. Donner la dimension et l'unité de la constante R des gaz parfaits.
   - $PV = nRT \rightarrow R = \frac{PV}{nT}$
     $[R] = \frac{[P][V]}{[n][T]} = \frac{ML^{-1}T^{-2}L^3}{N\theta}$ = $\mathbf{ML^2T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}}$ ($kgm^2s^{-2}mol^{-1}K^{-1}$)

7. La vitesse d'un objet est exprimée par l'équation : $v = At^3 - Bt + \sqrt{C}$.
   - Donner les dimensions et unités des coefficients A, B et C.
   - $[v] = [A][t]^3 = [B][t] = [C]^{1/2}$= $\mathbf{LT^{-1}}$
     [A] = $\mathbf{LT^{-4}}$ (ms^{-4}),
     [B] = $\mathbf{LT^{-2}}$ (ms^{-2})
     [C] = $\mathbf{L^2T^{-2}}$ (m^2s^{-2})

8. La force de frottement agissant sur un corps est proportionnelle au carré de sa vitesse.
   - Donner la dimension et l'unité de la constante de proportionnalité.
   - $F = kv^2 \rightarrow k = \frac{F}{v^2}$
     $[k] = \frac{[F]}{[v]^2} = \frac{MLT^{-2}}{(LT^{-1})^2}$ = $\mathbf{ML^{-1}}$ (kgm^{-1})

9. Dans un circuit électrique, l'intensité du courant obéit l'équation différentielle:
   $R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$, où R est une résistance et C est une capacité.
   - A l'aide de ces grandeurs, définir une grandeur τ homogène à un temps.
   - $\left[R\frac{di}{dt}\right] = \left[\frac{1}{C}i\right] \rightarrow [R][C] = \frac{[i]}{[\frac{di}{dt}]} = \boldsymbol{T}$
     Donc, $\tau = [RC] = \mathbf{T}$

10. L'élongation d'un ressort obéit l'équation différentielle: $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2y = 0$
    - Déterminer les dimensions des grandeurs ω_0 et Q.
    - $\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = \left[\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}\right] = [{\omega_0}^2y] = \frac{[y]}{T^2} = LT^{-2}$
      $[\omega_0]^2[y] = LT^{-2}$($s^{-1}$)
      $\rightarrow [\omega_0] = \boldsymbol{T}^{-1}$
      $\frac{[\omega_0]}{[Q]}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \frac{[\omega_0]}{[Q]}\frac{[y]}{[T]} = LT^{-2}$
      $\rightarrow [Q] = 1$ Sans dimension.

1.2 Calcul des Incertitudes:

Toute mesure physique est accompagnée d'une marge d'erreur appelée incertitude.

D'une manière générale, si l'on mesure une grandeur **X** et que l'on obtient une valeur moyenne $\mathbf{a_0}$ avec une incertitude $\mathbf{\Delta a}$, on notera :

$$\mathbf{X} = \mathbf{a_0} \pm \mathbf{\Delta a} .$$

Dans ce cas $\mathbf{\Delta a}$ est appelée incertitude absolue et a la même unité que $\mathbf{a_0}$.

On définit également l'incertitude relative $\frac{\mathbf{\Delta a}}{\mathbf{a}}$ qui représente l'importance de l'erreur par rapport à la grandeur mesurée. Elle est forcément sans unité et souvent donnée en pourcent.

Supposons qu'une grandeur physique $G = G(x, y, z)$ dépende de plusieurs grandeurs x, y, z mesurées avec les incertitudes Δx, Δy, Δz.

L'erreur maximum possible sur G est:

$$\Delta \boldsymbol{G} = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \Delta \boldsymbol{x} + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| \Delta \boldsymbol{y} + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right| \Delta \boldsymbol{z}$$

Voici quelques cas à considérer :

- $G = x \pm \mathrm{y} \rightarrow \Delta G = \Delta \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{y}$
- $G = xy \rightarrow \Delta G = |x|\Delta y + |y|\Delta x$
- $G = \frac{x}{y} \rightarrow \Delta G = \frac{|x|\Delta y + |y|\Delta x}{y^2}$
- $G = k\frac{x^{\alpha} y^{-\beta}}{(z+t)^{\gamma}} \rightarrow \Delta G = G\{|\alpha|\frac{\Delta x}{x} + |\beta|\frac{\Delta y}{y} + |\gamma|\frac{\Delta z}{(z+t)} + |\gamma|\frac{\Delta t}{(z+t)}\}$

Le nombre des chiffres significatifs conservés dans un résultat ne doit jamais impliquer une précision supérieure à celle des données.

Dans un calcul, l'incertitude d'un résultat ne doit jamais être supérieure à celle de la donnée la moins précise.

Exercices :

1. Trouver la résistance électrique R dans un simple circuit électrique ou l'intensité du courant a la valeur de I = 0.10 mA avec une incertitude ΔI = 0.01 mA et la tension U aux bornes de la résistance a la valeur de U = 1.50 V avec une incertitude ΔU = 0.01 V.
   - Tout d'abord on calcule la valeur moyenne de la résistance R sachant que R=U/I ;
     cela donne : R = 1.50/0.10x10^{-3} = 15000 Ω.
     En suite, l'incertitude $\Delta R = \frac{U\Delta I + I\Delta U}{I^2} = \frac{1.5*0.01*10^{-3}+0.1*10^{-3}*0.01}{(0.1*10^{-3})^2} = 1600\ \Omega$
     Finalement, la mesure que l'on a effectué nous donne : R = (15000 ± 1600) Ω.

2. La période d'oscillation T d'un pendule simple est donnée par la formule :
   $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
   - Donner l'incertitude sur g si :
     La période est T= (2.20 ± 0.01) s et la longueur l = (120 ± 1) cm.
   - Tout d'abord on calcule la valeur moyenne de l'accélération de gravite g :
     $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2\frac{l}{T^2} = 4\pi^2\frac{1.2}{(2.2)^2} \approx 9.79\ m/s^2$
     L'incertitude $\Delta g = 4\pi^2[\frac{\Delta l}{T^2} + \frac{2l\Delta T}{T^3}] = 4\pi^2[\frac{0.01}{2.2^2} + \frac{2*1.2*0.01}{2.2^3}] \approx 0.17\ m/s^2$
     Finalement, g = (9.79 ± 0.17) m/s^2

3. Soit A l'angle d'un prisme et D l'angle de déviation d'un rayon incident après traversée du prisme. L'indice de réfraction du prisme dans le cas de minimum déviation est :
   $n = \frac{\sin((A+D)/2)}{\sin(\frac{A}{2})}$.
   - Trouver l'incertitude relative $\frac{\Delta n}{n}$ dans le cas ΔA = ΔD.
   - $\Delta n = \left|\frac{\partial n}{\partial A}\right|\Delta A + \left|\frac{\partial n}{\partial D}\right|\Delta D$
     $\frac{\partial n}{\partial A} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\frac{A+D}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} - cotan\left(\frac{A}{2}\right)\frac{sin(\frac{A+D}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}\right) = \frac{1}{2}n\left(cotan(\frac{A+D}{2}) - cotan\left(\frac{A}{2}\right)\right)$
     $\frac{\partial n}{\partial D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\frac{A+D}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}\right) = \frac{1}{2}n\left(cotan(\frac{A+D}{2})\right)$
     $\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}(\left|cotan(\frac{A+D}{2}) - cotan\left(\frac{A}{2}\right)\right|\Delta A + \left|cotan(\frac{A+D}{2})\right|\Delta D)$
     Dans le cas: ΔA = ΔD = ε, l'incertitude relative $\frac{\Delta n}{n}$ devient :
     $\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\varepsilon(\left|cotan\left(\frac{A+D}{2}\right) - cotan\left(\frac{A}{2}\right)\right| + \left|cotan\left(\frac{A+D}{2}\right)\right|)$
     Puisque $\left|cotan\left(\frac{A+D}{2}\right) - cotan\left(\frac{A}{2}\right)\right| = cotan\left(\frac{A}{2}\right) - cotan\left(\frac{A+D}{2}\right)$
     Donc, $\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\varepsilon(cotan\left(\frac{A}{2}\right))$

4. On mesure le diamètre et la masse d'une bille en or :
   d = (10.00 ± 0.01) mm et m = (9.9 ± 0.1) g
   - Calculer le volume de la bille avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.
   - Calculer la masse volumique (densité) de la bille avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.

- Le volume de la bille $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 523.6\ mm^3 = 0.5236\ cm^3$
  $\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta d}{d} = 0.003 = 0.3\%$
  $\rightarrow\ \Delta V = V * \frac{\Delta V}{V} = 523.6 * 0.003 \approx 1.571 \approx 1.6\ mm^3$
  Donc, V = (523.6 ± 1.6) mm^3
- $\rho = \frac{m}{V} = \frac{9.9}{0.5236} \approx 18.91\ g/cm^3$
  $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.1}{9.9} + 0.003 \approx 0.01 + 0.003 = 0.013 = 1.3\%$
  $\Delta\rho = \rho\Delta\rho = 18.91 * 0.013 \approx 0.25\ g/cm^3$
  Donc, $\rho = (18.91 \pm 0.25)\ g/cm^3$

5. Les côtés d'un rectangle sont : a = (5,35 ± 0,05) cm et b = (3,45± 0,04) cm
   - Calculez le périmètre et l'aire du rectangle.
   - L = 2(a + b) = 2(5.35 + 3.45) = 17.60 cm
     ΔL = 2(Δa + Δb) = 2*(0.05 + 0.04) = 0.18 ≈ 0.2 cm
     Le périmètre est : L = (17.60 ± 0.18) cm ou (17.6 ± 0.2) cm
     S = a*b = 5.35*3.45 = 18.4575≈ 18.46 cm^2
     ΔS = a*Δb + b*Δa = 5.35*0.04 + 3.45*0.05 = 0.3865 ≈ 0.39 cm^2
     L'aire est : S = (18.46 ± 0.39) cm^2 ou (18.5 ± 0.4) cm^2

6. Le rayon d'une sphère est r = (10,00 ± 0,08) cm
   - Calculer l'aire et le volume de la sphère.
   - $S = 4\pi r^2 = 4\pi 10^2 \approx 1256\ cm^2$
     $\Delta S = 8\pi r\Delta r = 8\pi 10 * 0.08 \approx 20\ cm^2$
     L'aire est : S = (1256 ± 20) cm^2
   - $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4189\ cm^3$
     $\Delta V = 4\pi r^2\Delta r \approx 100\ cm^3$
     Le volume est : V = (4189 ± 100) cm^3

7. Un volume cylindrique de :
   masse m = (23,2 ± 0,1) g, de diamètre d = (1,62 ± 0,03) cm et de hauteur h = (3,44 ± 0,05) cm
   - Calculez son volume et sa mass volumique.
   - $V = \frac{\pi}{4}d^2h = \frac{\pi}{4}1.62^2 * 3.44 \approx 7.09\ cm^3$
     $\Delta V = \frac{\pi}{2}\ dh\Delta d + \frac{\pi}{4}d^2\Delta h \approx 0.37\ cm^3$
     Le volume est : $V = (7.09 \pm 0.37)\ cm^3$
   - $\rho = \frac{m}{V} = \frac{23.2}{7.09} \approx 3.3\ g/cm^3$
     $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.1}{23.2} + \frac{0.37}{7.09} \approx 0.06\ \rightarrow\ \Delta\rho = 0.2\ g/cm^3$
     La mass volumique est : $\rho = (3.3 \pm 0.2)\ g/cm^3$

8. Les côtés opposé et adjacent à l'angle θ d'un triangle rectangle sont respectivement : a = (12,1 ± 0.1) cm et b = (23,3 ± 0.2) cm.
   - Calculez l'angle θ et la longueur de l'hypoténuse.
   - $\theta = \tan^{-1}(\frac{a}{b}) = \tan^{-1}(\frac{12.1}{23.2}) \approx 27.4^0$

$\Delta\theta = \frac{b}{a^2+b^2}\Delta a + \frac{a}{a^2+b^2}\Delta b$

$\Delta\theta \approx\ 0.0069\,rad\ \approx\ 0.4^0$

Donc, $\theta = 27.4^0\ \pm\ 0.4^0$

- $c = \sqrt{a^2+b^2} \approx 26.25$

  $\Delta c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta a + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta b$

  $\Delta c \approx 0.22$

  Donc, la longueur de l'hypoténuse c = (26.25 ± 0.22) cm

9. Un véhicule consomme V = (48,6 ± 0,5) litres de carburant en parcourant une distance d = (530 ± 20) km.
   - Calculez sa consommation moyenne en litres par 100 km.

- $C = \frac{100V}{d} = \frac{48.5*100}{530} \approx 9.2\ l/100km$

  $\Delta C = 100\frac{V\Delta d + d\Delta V}{d^2} \approx 0.5\ l/100km$

  Donc, C = (9.2 ± 0.5) $l/100km$

Le véhicule roule à une vitesse v = (100 ± 5) km/h et s'immobilise en un temps t = (3.3 ± 0.1) s.

- Calculer l'accélération moyenne de ce véhicule en m/s^2.

  (100 ± 5) km/h = (100 ± 5) * 1000/3600 m/s = (1000 ± 50)/36 m/s

- $a = dv/dt = \frac{1000/36}{3.3} \approx 8.4\ m/s^2$

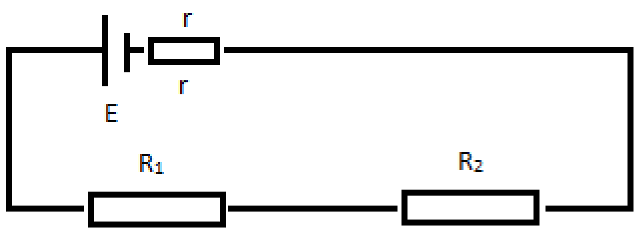
  $\Delta a = \frac{t\Delta v + v\Delta t}{t^2} \approx 0.7\ m/s^2$

  Donc, a = (8.4 ± 0.7) m/s^2

10. Soit les deux circuits suivants avec :

    R_1 = (150 ± 10) Ω, R_2 = (200 ± 12) Ω, E = (100 ± 5) V et r = (10 ± 1) Ω

   - Calculer l'intensité du courant dans le circuit suivant :



- L' intensité du courant est donnée par la formule : $I = \frac{E}{r+R}$

  Les deux résistances R_1 et R_2 sont en séries :

  $R_T = R_1 + R_2$ = 150 + 200 = 350 Ω

  $I = \frac{100}{10+350} \approx 0.278\ A$

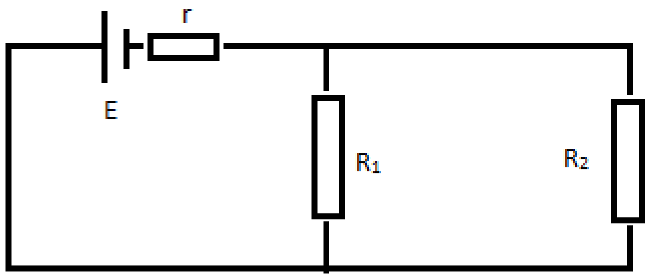
  $\Delta R_T = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 10 + 12 = 22\ \Omega$

  $\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial E}\right|\Delta E + \left|\frac{\partial I}{\partial r}\right|\Delta r + \left|\frac{\partial I}{\partial R}\right|\Delta R = \frac{1}{r+R}\Delta E + \frac{E}{(r+R)^2}\Delta r + \frac{E}{(r+R)^2}\Delta R$

  $\Delta I = \frac{1}{10+350}5 + \frac{100}{(10+350)^2}1 + \frac{100}{(10+350)^2}22 \approx 0.032\ A$

  Donc, l'intensité du courant est I = (0.278 ± 0.032) A

- Calculer l'intensité du courant dans le circuit suivant :



- Les deux résistances R_1 et R_2 sont en parallèles :

$$R_T = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = \frac{150*200}{150+200} \approx 85.714\ \Omega$$

$$I = \frac{100}{10 + 85.714} \approx 1.045\ A$$

$$\Delta R_T = \frac{(R_1)^2 \Delta R_2 + (R_2)^2 \Delta R_1}{(R_1+R_2)^2} = \frac{150^2*12+200^2*10}{(150+200)^2} \approx 5.47\ \Omega$$

$$\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial E}\right| \Delta E + \left|\frac{\partial I}{\partial r}\right| \Delta r + \left|\frac{\partial I}{\partial R}\right| \Delta R = \frac{1}{r+R}\Delta E + \frac{E}{(r+R)^2}\Delta r + \frac{E}{(r+R)^2}\Delta R$$

$$\Delta I = \frac{1}{10+85.714} 5 + \frac{100}{(10+85.714)^2} 1 + \frac{100}{(10+85.714)^2} 5.47 \approx 0.123\ A$$

Donc, l'intensité du courant I = (1.045 ± 0.123) A

1.3 Calcul Vectoriel:

Un scalaire est une grandeur totalement définie par un nombre et une unité : temps, température, masse, énergie, volume, etc...
Un vecteur est une entité mathématique définie par une origine, une direction, un sens et une intensité : déplacement, vitesse, accélération, force, moment cinétique, etc.

A chaque vecteur $\vec{A}$ on peut associer un vecteur unitaire $\vec{u}$ qui a la même direction et de norme égale à l'unité. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module :

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}.$$

Dans l'espace rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{A}$ est exprimé par la formule :

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

et son module $|\vec{A}|$ est : $|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$

En notant par α, β et γ les angles respectifs formés par le vecteur $\vec{A}$ avec les axes OX, OY et OZ:

$$A_x = Acos\alpha$$
$$A_y = Acos\beta$$
$$A_z = Acos\gamma.$$

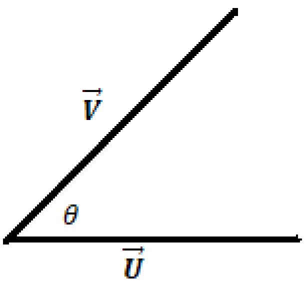
On peut en déduire l'expression : $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

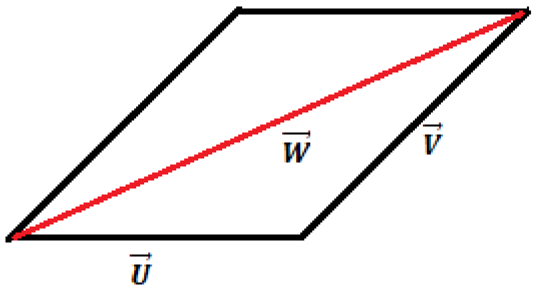
Operations Vectorielles:

1.3.1 Addition de vecteurs:

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, la résultante vectorielle de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un vecteur $\vec{W}$ situé dans le même plan tel que : $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$:

$$\vec{W} = (U_x + V_x)\vec{\imath} + (U_y + V_y)\vec{\jmath} + (U_z + V_z)\vec{k}$$





La magnitude du vecteur $\vec{W}$ est exprimée par l'expression :

$$|\vec{W}| = \sqrt{|\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 + 2|\vec{U}| * |\vec{V}| * cos\theta}$$

avec $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$ l'angle entre les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
Si $\theta = 90^0$ on retrouve la formule de Pythagore :

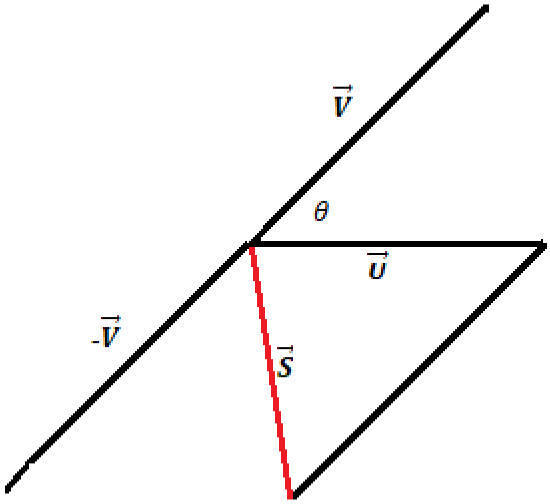
$$|\vec{W}| = \sqrt{|\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2}$$

La soustraction de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un vecteur $\vec{S}$ situé dans le même plan tel que :

$$\vec{S} = \vec{U} - \vec{V} = (U_x - V_x)\vec{\imath} + (U_y - V_y)\vec{\jmath} + (U_z - V_z)\vec{k}.$$

La magnitude du vecteur $\vec{S}$ est exprimée par l'expression :

$$|\vec{S}| = \sqrt{|\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 - 2|\vec{U}| * |\vec{V}| * cos\theta}$$



1.3.2 Produit Scalaire:

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un scalaire défini par la relation :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = |\vec{U}| * |\vec{V}| * cos\theta$$

Le produit scalaire est nul si un des vecteurs est nul ou les deux vecteurs sont orthogonaux.

Dans l'espace rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le produit scalaire est exprimé par :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = U_x\cdot V_x + U_y\cdot V_y + U_z\cdot V_z$$

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle compris entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$:

$$cos\theta = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}||\vec{V}|}$$

$$cos\theta = \frac{U_x\cdot V_x + U_y\cdot V_y + U_z\cdot V_z}{\sqrt{{U_x}^2+{U_y}^2+{U_z}^2}\sqrt{{V_x}^2+{V_y}^2+{V_z}^2}}$$

L'angle est aigu si le produit scalaire est positif et obtus si le produit est négatif.

Le vecteur projection du vecteur $\vec{U}$ sur le vecteur $\vec{V}$ est :

$$\vec{U}_V = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{V}|^2}\vec{V}$$

1.3.3 Produit Vectoriel:

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un vecteur noté $\vec{W} = \vec{U}\wedge\vec{V}$ orthogonal aux deux vecteurs avec un sens qui donne au triplet$(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ une orientation directe. Le produit vectoriel est nul si les vecteurs sont colinéaires ou si un des deux vecteurs au moins est nul.

Dans l'espace rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le produit vectoriel est exprimé par :

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{W} = (U_yV_z - U_zV_y)\vec{\imath} - (U_xV_z - U_zV_x)\vec{\jmath} + (U_xV_y - U_yV_x)\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ est :

le module $|\vec{W}| = |\vec{U}\wedge\vec{V}| = |\vec{U}| * |\vec{V}| * |sin\theta|$

1.3.4 Produit Mixte:

Le produit mixte entre trois vecteurs $\vec{\boldsymbol{U}}, \vec{\boldsymbol{V}}$ et $\vec{\boldsymbol{W}}$ est un scalaire défini par l'expression :

$$S = \vec{\boldsymbol{W}} \cdot (\vec{\boldsymbol{U}} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}) = \begin{vmatrix} W_x & W_y & W_z \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Le produit mixte est nul si les trois vecteurs sont coplanaires, ou deux vecteurs sont parallèles, ou si un des trois vecteurs au moins est nul.

Le produit mixte est positif si le triplet $(\vec{\boldsymbol{U}}, \vec{\boldsymbol{V}}, \vec{\boldsymbol{W}})$ forme un trièdre direct et négatif si le triplet $(\vec{\boldsymbol{U}}, \vec{\boldsymbol{V}}, \vec{\boldsymbol{W}})$ forme un trièdre indirect.

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire.

Sa valeur absolue représente le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $(\vec{\boldsymbol{U}}, \vec{\boldsymbol{V}}, \vec{\boldsymbol{W}})$.

1.3.5 La dérivée:

L'opération dérivée est une application qui à chaque vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ est associé un vecteur donnée par :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dA_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

1.3.6 Gradient:

L'opération gradient est une application qui à chaque champ scalaire *S* est associé un champ vectoriel dont la valeur en chaque point est donnée par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}S = \vec{\nabla}S = \frac{\partial S}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial S}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial S}{\partial z}\vec{k}$$

1.3.7 Divergence:

L'opération divergence est une application qui à chaque vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ est associé un scalaire dont la valeur en tout point est donnée par :

$$div\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Il est utile de savoir que :

$$\frac{\partial}{\partial t} div\vec{\boldsymbol{A}} = div\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad divS\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\nabla}S.\vec{\boldsymbol{A}} + Sdiv\vec{\boldsymbol{A}}$$

1.3.8 Rotationnel:

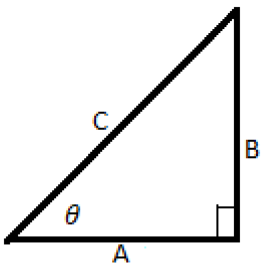
L'opération rotationnel est une application qui à chaque vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ est associé un champ vectoriel dont la valeur en chaque point est donnée par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\vec{\imath} - (\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})\vec{\jmath} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\vec{k}$$

Il est utile de savoir que : $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}M = \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}M = 0$ et $div\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{A}} = 0$

1.3.9 Généralités sur les triangles:

- Dans un triangle rectangulaire, on a les relations usuelles suivantes :



$$\sin\theta = \frac{A}{C}$$

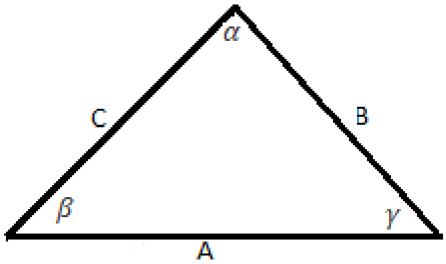
$$\cos\theta = \frac{B}{C}$$

$$\tan\theta = \frac{B}{A}$$

$$\text{cotan}\,\theta = \frac{A}{B}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

- Dans un triangle quelconque, on a les relations des sinus et cosinus suivantes :



$$\frac{sin\alpha}{A} = \frac{sin\beta}{B} = \frac{sin\gamma}{C}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A * B * cos\gamma}$$

- La somme des angles intérieurs d'un triangle quelconque est égale à 180^0.
- La surface d'un triangle est égale à : $S = \frac{1}{2}A \cdot Bsin\gamma = \frac{1}{2}A \cdot Csin\beta = \frac{1}{2}B \cdot Csin\alpha$
- La somme de n'importe quels deux côtés est supérieure au troisième.

Exercices :

1. Dans un repère orthonormé OXYZ on a les vecteurs :

   $\vec{\boldsymbol{A}} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{\boldsymbol{B}} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ et $\vec{\boldsymbol{C}} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$

   - Calculer le module de chaque vecteur.
   - Calculer les vecteurs $\vec{\boldsymbol{D}} = 2\vec{\boldsymbol{A}} + 3\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{C}}$ et $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{C}}$
   - Calculer le vecteur projection du vecteur $\vec{\boldsymbol{D}}$ sur le vecteur $\vec{\boldsymbol{E}}$

   - $|\vec{\boldsymbol{A}}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$
   - $|\vec{\boldsymbol{B}}| = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22}$
   - $|\vec{\boldsymbol{C}}| = \sqrt{{C_x}^2 + C^2 + {C_z}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
   - $\vec{\boldsymbol{D}} = 2\vec{\boldsymbol{A}} + 3\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{C}} = 16\vec{\imath} - 14\vec{\jmath} + 12\vec{k}$
   - $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} - 2\vec{\boldsymbol{C}} = 10\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$
   - $\vec{\boldsymbol{D}}_E = \frac{\vec{\boldsymbol{D}}.\vec{\boldsymbol{E}}}{|\vec{\boldsymbol{E}}|^2}\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{16*10+14*4-12*3}{10^2+4^2+3^2}\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{36}{25}\vec{\boldsymbol{E}}$

2. Dans l'exercice précédent, calculer :
   - l'angle entre $\vec{\boldsymbol{A}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$
   - l'angle entre $\vec{\boldsymbol{A}}$ et $\vec{\boldsymbol{C}}$
   - l'angle entre $\vec{\boldsymbol{B}}$ et $\vec{\boldsymbol{C}}$

   - $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 4 * 2 + (-3)(-3) + 2 * 3 = 23$
   - $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\cos(a, B) \rightarrow \cos(a, b) = \frac{\vec{\boldsymbol{A}}.\vec{\boldsymbol{B}}}{|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|} = \frac{23}{\sqrt{29}\sqrt{22}} \approx 0.91 \rightarrow \widehat{(a,b)} \approx 24.41^0$
   - $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}} = 4 * (-2) + (-3)(-1) + 2 * 1 = -3$
   - $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}} = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{C}}|\cos(a, c) \rightarrow \cos(a, c) = \frac{\vec{\boldsymbol{A}}.\vec{\boldsymbol{C}}}{|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{C}}|} = \frac{-3}{\sqrt{29}\sqrt{6}} \approx -0.23 \rightarrow \widehat{(a,c)} \approx 103.15^0$
   - $\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}} = 2 * (-2) + (-3)(-1) + 3 * 1 = 2$
   - $\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}} = |\vec{\boldsymbol{B}}||\vec{\boldsymbol{C}}|\cos(b, c) \rightarrow \cos(b, c) = \frac{\vec{\boldsymbol{B}}.\vec{\boldsymbol{C}}}{|\vec{\boldsymbol{B}}||\vec{\boldsymbol{C}}|} = \frac{2}{\sqrt{22}\sqrt{6}} \approx 0.17 \rightarrow \widehat{(b,c)} \approx 79.98^0$

3. Dans l'exercice précédent, calculer :
   - l'aire du parallélogramme construit à partir de $\vec{\boldsymbol{D}}\ et\ \vec{\boldsymbol{E}}$
   - le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{D}}\ et\ \vec{\boldsymbol{E}}$

   - $S = |\vec{\boldsymbol{D}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}}| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 16 & -14 & 12 \\ 10 & -4 & -3 \end{vmatrix} \right\|$

     $S = |90\vec{\imath} + 168\vec{\jmath} + 74\vec{k}| = \sqrt{90^2 + 168^2 + 174^2}$

     L'aire du parallélogramme : $S \approx 258\ u^2$
   - $V = |\vec{\boldsymbol{A}}.(\vec{\boldsymbol{D}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}})| = \left\| \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 16 & -14 & 12 \\ 10 & -4 & -3 \end{vmatrix} \right\|$

     Le volume du parallélépipède : $V = 8\ u^3$

4. Soit les vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$.
   - Démontrer que $|\vec{A}\wedge\vec{B}|^2 + (\vec{A}.\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2$
   - Démontrer que $\vec{A} \perp \vec{B}$ si $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$

- $|\vec{A}\wedge\vec{B}| = \left||\vec{A}| * |\vec{B}| * sin\theta\right|$

  $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| * |\vec{B}| * cos\theta$

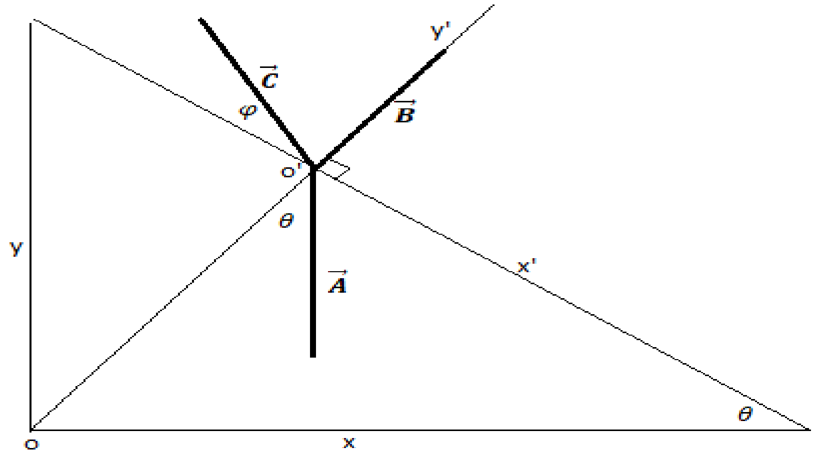
Donc : $|\vec{A}\wedge\vec{B}|^2 + (\vec{A}.\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2(cos^2\theta + sin^2\theta) = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2$

- $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}| \rightarrow |\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}-\vec{B}|^2 = (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})$

  $\rightarrow |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A}.\vec{B} \rightarrow \vec{A}.\vec{B} = -\vec{A}.\vec{B} \rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$

Donc : $\vec{A} \perp \vec{B}$

5. Soit les trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ *et* $\vec{C}$. Donner leurs projections sur les axes OX, OY, O'X' et O'Y' sachant que $|\vec{A}| = 10\,u, |\vec{B}| = 8\,u$ *et* $|\vec{C}| = 9\,u$, $\theta = 60^0$ *et* $\varphi = 15^0$.
   - Calculer la résultante $\vec{D} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ dans le système OXY et O'X'Y'.



	OX	OY	O'X'	O'Y'
$\vec{A}$	0	-10	10*sin60 ≈ 8.66	$-$10*cos60 = -5
$\vec{B}$	8*sin60 ≈ 6.93	8*cos60 = 4	0	8
$\vec{C}$	$-$9*sin15≈2.33	9*cos15≈ 8.69	$-$9*cos15 ≈ $-$ 8.69	9*sin15 ≈ 2.33
$\vec{D}$	4.60	2.69	$-$ 0.03	5.33

Remarque : $|\vec{D}| \approx \sqrt{28.40}\,u$ dans les deux systèmes.

6. Soit le vecteur $\vec{A} = 4xt^2\vec{\imath} - 3\sin(2t)\vec{\jmath} + \frac{2x}{t+5}\vec{k}$ où t et x sont des variables réelles indépendantes. Calculer $\frac{d\vec{A}}{dt}$ *et* $\frac{d\vec{A}}{dx}$.

- $\frac{d\vec{A}}{dt} = 8xt\vec{\imath} - 6cos(2t)\vec{\jmath} - \frac{2x}{(t+5)^2}\vec{k}$
- $\frac{d\vec{A}}{dx} = 4t^2\vec{\imath} + \frac{2}{t+5}\vec{k}$

7. Soit les fonctions $f(x,y,z)$ et $g(x,y,z)$définie dans l'espace des réels comme :
   - $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{\boldsymbol{r}}|$ et $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}$
   - Calculer $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}} f = \vec{\nabla} f(x,y,z)$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}} g = \vec{\nabla} g(x,y,z)$

- $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{\jmath} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$

  $\vec{\nabla}|\vec{\boldsymbol{r}}| = \frac{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

  Donc : $\vec{\nabla}|\vec{\boldsymbol{r}}| = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}$

- $\vec{\nabla} g(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}$

  $\vec{\nabla} g(x,y,z) = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{\imath} + \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{\jmath} + \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$

  $\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}|} = \frac{-(\overrightarrow{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

  Donc : $\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}|} = \frac{-\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|^3}$

8. Le vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}(t)$ est dépendant de la variable réelle t.
   - Démontrer que si sa direction est constante, alors $\left|\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt}\right| = \frac{d|\vec{\boldsymbol{V}}|}{dt}$.
   - Démontrer que si sa magnitude $|\vec{\boldsymbol{V}}|$ est constante, alors $\vec{\boldsymbol{V}} \perp \frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt}$

   Le vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}(t)$ est exprimé comme $\vec{\boldsymbol{V}}(t) = |\vec{\boldsymbol{V}}|\vec{\boldsymbol{v}}$ où $\vec{\boldsymbol{v}}$ est son vecteur unitaire.

   $\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt} = \frac{d|\vec{\boldsymbol{V}}|\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = |\vec{\boldsymbol{V}}|\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} + \vec{\boldsymbol{v}}\frac{d|\vec{\boldsymbol{V}}|}{dt}$

- Si la direction de $\vec{\boldsymbol{V}}$ est constante, alors $\vec{\boldsymbol{v}}$ est constante $\rightarrow$ $\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = 0$

  Donc : $\left|\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt}\right| = \frac{d|\vec{\boldsymbol{V}}|}{dt}$

- Si la magnitude $|\vec{\boldsymbol{V}}|$ est constante : $|\vec{\boldsymbol{V}}|^2 = \vec{\boldsymbol{V}}.\vec{\boldsymbol{V}} =$ constante $\rightarrow$ $\frac{d|\vec{\boldsymbol{V}}|^2}{dt} = 0$

  $\rightarrow 2\vec{\boldsymbol{V}}.\frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt} = 0$

  Donc : $\vec{\boldsymbol{V}} \perp \frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt}$

9. Soit le vecteur $\vec{\boldsymbol{V}} = 8xy\vec{\imath} - 6ycos(2z)\vec{\jmath} - \frac{2x}{(z+5)}\vec{k}$
   - Calculer $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{V}},\ div\vec{\boldsymbol{V}}\ et\ div\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{V}}$.

   $$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{V}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 8xy & -6ycos(2z) & -\frac{2x}{(z+5)} \end{vmatrix}$$

- $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{V}} = -12ysin(2z)\vec{\imath} + \frac{2}{(z+5)}\vec{\jmath} - 8x\vec{k}$

- $div\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{V}} = 8y - 6cos(2z) + \frac{2x}{(z+5)^2}$
- $div\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{V}} = 0$ (Théorème)

10. Soit le vecteur $\vec{\boldsymbol{r}} = acos\omega t\vec{\imath} + bsin\omega t\vec{\jmath}$ où a, b et ω des constantes réelles.

Calculer $\vec{\boldsymbol{r}} \wedge \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$ et $\vec{\boldsymbol{r}} \wedge \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2}$.

- $\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = -a\omega sin\omega t\vec{\imath} + b\omega acos\omega t\vec{\jmath}$

  $\rightarrow \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = -a\omega^2 cos\omega t\vec{\imath} - \omega^2 bsin\omega t\vec{\jmath}$

  $\rightarrow \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = -\omega^2\vec{\boldsymbol{r}}$

- $\vec{\boldsymbol{r}} \wedge \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ acos\omega t & bsin\omega t & 0 \\ -a\omega sin\omega t & b\omega acos\omega t & 0 \end{vmatrix}$

  $$\vec{\boldsymbol{r}} \wedge \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = ab\omega\vec{k}$$

- $\vec{\boldsymbol{r}} \wedge \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = -\omega^2\vec{\boldsymbol{r}} \wedge \vec{\boldsymbol{r}}$

  $\rightarrow \vec{\boldsymbol{r}} \wedge \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = 0$

Chapitre 2

Cinématique du point matériel

La cinématique est la branche de la mécanique qui décrit le mouvement d'un corps par apport au temps. La trajectoire est le lieu géométrique des positions successives occupées par le point matériel au cours du temps et par rapport à un système de référence choisi.

2.1 Le déplacement:

Déplacement est un vecteur reliant deux positions du mobile M_1 et M_2 aux instants t_1 et t_2 respectivement :

$$\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}} = \overrightarrow{\mathbf{OM_2}} - \overrightarrow{\mathbf{OM_1}}$$

2.2 La vitesse:

Le vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$ d'un mobile est le taux de variation de son vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ par rapport au temps. Cette variation peut concerner la direction de $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$, son module ou les deux. L'unité de la vitesse dans le système international (SI) est le mètre par seconde (m/s).

La vitesse moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 correspondant aux positions M_1 et M_2 est définie par le rapport : $\vec{\boldsymbol{V}}_m = \frac{\overrightarrow{\mathbf{OM_2}} - \overrightarrow{\mathbf{OM_1}}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\Delta t}$

Le vecteur vitesse instantanée d'un mobile, au temps t, est donnée par la relation

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{dt}$$

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{\boldsymbol{V}}$ est à chaque instant, tangent à la trajectoire et son sens est celui du mouvement.

2.3 L'accélération:

Le vecteur accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ traduit le taux de variation du vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$ en fonction du temps. Cette variation peut concerner la direction de la vitesse, son module ou les deux. L'unité de l'accélération dans le système international (SI) est le m/s^2 .

L'accélération moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 correspondant aux positions M_1 et M_2 est donnée par le rapport : $\vec{\mathbf{a}}_m = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{V}}}{\Delta t}$

$\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont les vitesses du mobile aux positions M_1 et M_2

Le vecteur accélération instantanée d'un mobile au temps t est donnée par la relation :

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{V}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{V}}}{dt}$$

$\vec{\boldsymbol{a}}$ est toujours orienté vers le côté concave de la trajectoire.

Passage de la vitesse à la position : $\vec{\boldsymbol{r}}(t) - \vec{\boldsymbol{r}}(0) = \int_0^t \vec{\boldsymbol{V}}(\tau)d\tau$

Passage de l'accélération à la vitesse : $\vec{\boldsymbol{V}}(t) - \vec{\boldsymbol{V}}(0) = \int_0^t \vec{\boldsymbol{a}}(\tau)d\tau$

Le mouvement est dit accéléré si $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{V}}$ est positif, et décéléré ou retardé si $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{V}}$ est négatif.

Quant au sens du mouvement il est indiqué par le sens de la vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}$.

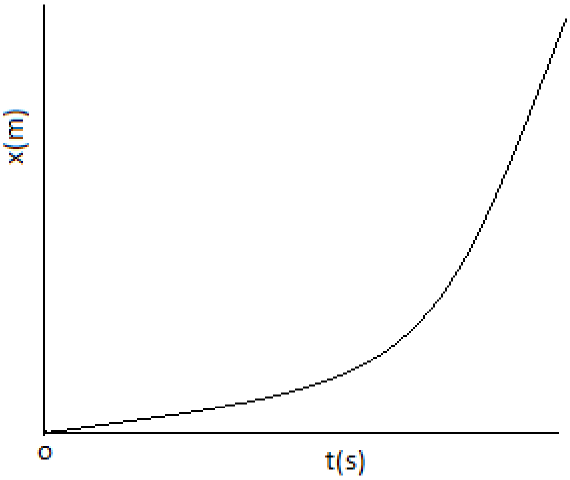
2.4 Mouvement rectiligne:

Mouvement rectiligne est un mouvement pour lequel la trajectoire suivie est droite. Le repère peut alors être réduit à une origine O et un axe OX porté par la trajectoire.

La position M du mobile est repérée par le vecteur position : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\vec{\imath}$

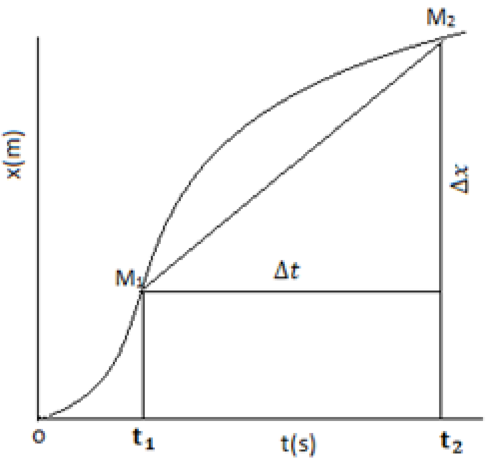
Le graphe de $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ constitue le diagramme des espaces.

Exemple : le diagramme des espaces dans le cas d'une chute libre d'un corps lâché à l'origine O d'un axe vertical orienté vers le bas est : $\boldsymbol{x(t)} = \frac{1}{2}gt^2$



Déplacement est un vecteur reliant deux positions du mobile M_1 et M_2 sur l'axe (OX) aux instants t_1 et t_2 respectivement : $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}} = \overrightarrow{\mathbf{OM_2}} - \overrightarrow{\mathbf{OM_1}} = (x_2 - x_1)\vec{\imath}$

La vitesse moyenne est $\vec{\mathbf{V}}_m = \frac{(x_2-x_1)}{\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_1}\vec{\imath} = \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{t}}\vec{\imath}$



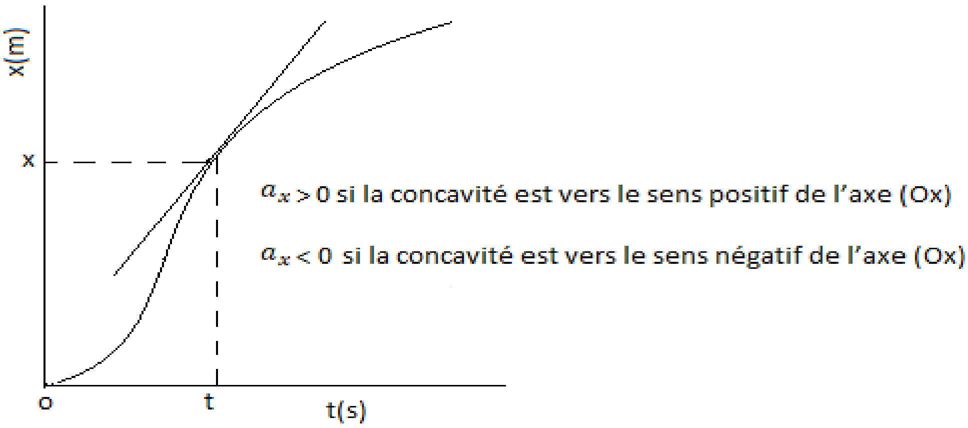
La vitesse moyenne est donc la pente de la sécante M_1M_2

la vitesse moyenne scalaire est donnée par le rapport $= \frac{\text{distance totale parcourue}}{\text{temps total mis}}$

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{\boldsymbol{V}} = V_x\vec{\imath} = \frac{dx}{\mathrm{dt}}\vec{\imath}$

$\frac{dx}{\mathrm{dt}}$ représente la pente de la tangente au diagramme des espaces au point correspondant à l'instant t.

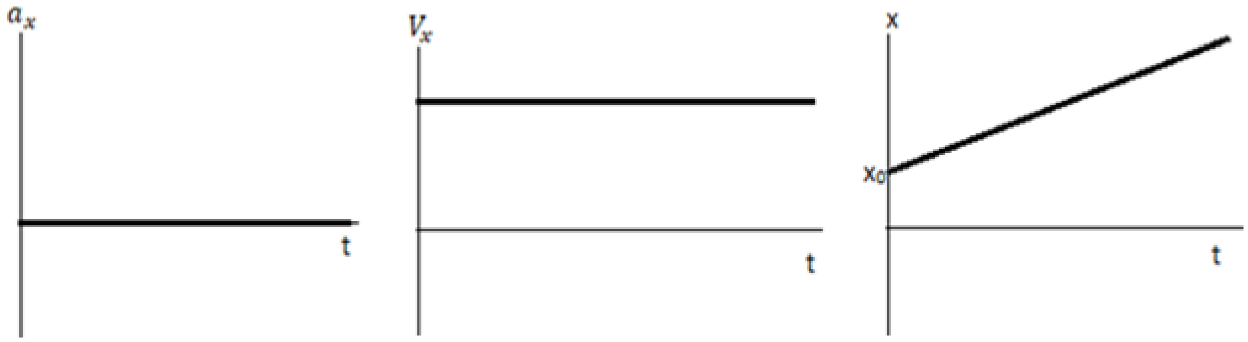
Le vecteur accélération instantanée $\vec{\boldsymbol{a}} = a_x\vec{\imath} = \frac{dV_x}{\mathrm{dt}}\vec{\imath} = \frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2}\vec{\imath}$



2.4.1 Mouvement rectiligne uniforme:

Le mouvement d'un mobile est uniforme lorsque la valeur algébrique de sa vitesse V_x est constante. C'est un mouvement sans accélération en vertu de la relation :

$$a_x = \frac{dV_x}{\mathrm{dt}} = 0 \rightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t V_x d\tau = V_x t \rightarrow \quad x(t) = x(0) + V_x t$$



2.4.2 Mouvement rectiligne uniformément varié:

Le mouvement d'un mobile est uniformément varié lorsque l'accélération du mobile a_x est constante.

$$a_x = \frac{dV_x}{\mathrm{dt}} \rightarrow V_x(t) - V_x(0) = \int_0^t a_x d\tau = a_x t \rightarrow \quad V_x(t) = V_x(0) + a_x t$$

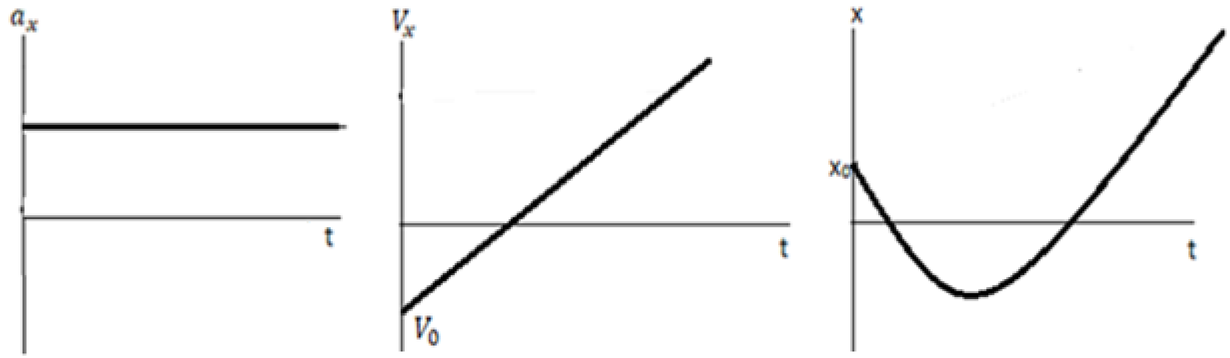
$$V_x = \frac{dx}{\mathrm{dt}} \rightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t V_x(\tau) d\tau = \int_0^t (V_x(0) + a_x \tau) d\tau$$

$$x(t) = x(0) + V_x(0)t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x(t) = x(0) + V_x(t)t - \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x(t) = x(0) + \frac{V_x(0) + V_x(t)}{2} t$$

$$x(t) = x(0) + \frac{V_x(t)^2 - V_x(0)^2}{2a_x}$$



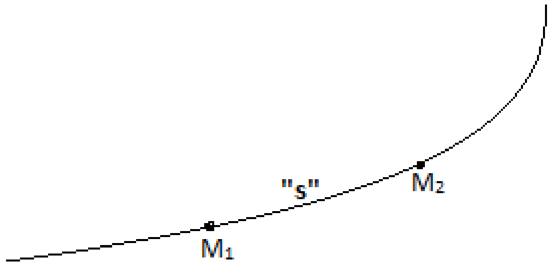
Natures particulières du mouvement rectiligne :

- V_x constante : le mouvement est rectiligne uniforme ;
- a_x constante : le mouvement est rectiligne uniformément varié ;
- $a_x\, V_x > 0$: le mouvement est accéléré (uniformément si a_x constante) ;
- $a_x\, V_x < 0$: le mouvement est décéléré ou retardé (uniformément si a_x constante).

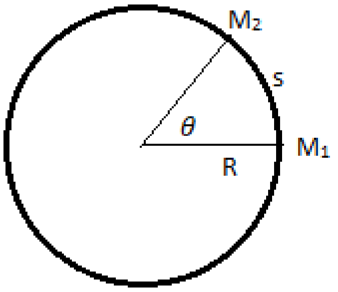
2.5 Mouvement curviligne:

On introduit l'abscisse « s » représentant la valeur algébrique de l'arc $\overleftrightarrow{M_1 M_2}$ entre deux instants t_1 et t_2 correspondant aux positions M_1 et M_2 . On définit, respectivement, la vitesse et l'accélération curvilignes par les relations :

$$V(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{et} \quad a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{\mathrm{dt}^2}$$



Exemple : Mouvement circulaire varié sur une trajectoire de rayon R :



$$s = R\theta$$
$$V = R\frac{d\theta}{dt}$$
$$a = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

En général, pour déterminer le mouvement curviligne d'un mobile, on utilise ses composantes intrinsèques qui sont ses projections algébriques sur :

- un axe tangentiel (MT) muni du vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_T$ dirigé dans le sens du mouvement
- un axe normal (MN) muni du vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_N$, orienté vers le côté concave de la trajectoire.

Le vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ est orientée selon le vecteur $\vec{\mathbf{u}}_T$: $\vec{\boldsymbol{v}} = v\vec{\mathbf{u}}_T = \frac{ds}{dt}\,\vec{\mathbf{u}}_T$

Le vecteur accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ a deux composantes : $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_N = a_T\vec{\mathbf{u}}_T + a_N\vec{\mathbf{u}}_N$

a_T et a_N sont, respectivement, les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

Les vecteurs unitaires $\vec{\mathbf{u}}_T$ et $\vec{\mathbf{u}}_N$ forment une base orthonormée appelée base de *Frenet*.

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\vec{\mathbf{u}}_T + \frac{ds}{dt}\,\frac{d\vec{\mathbf{u}}_T}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\vec{\mathbf{u}}_T + \frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\,\frac{d\vec{\mathbf{u}}_T}{ds}$$

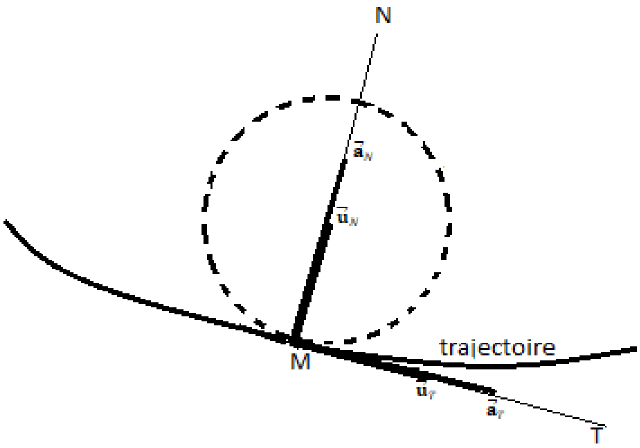
On admettra sans démonstration que : $\frac{d\vec{\mathbf{u}}_T}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{u}}_N$

ρ(s) est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.

Il en résulte l'expression explicite suivante de l'accélération :

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{dv}{dt}\vec{\mathbf{u}}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{\mathbf{u}}_N$$

Le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré est donne' par l'expression : $\rho = \frac{v^3}{|\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\vec{\boldsymbol{a}}|}$



Mouvement rectiligne varié : rectiligne signifie qu'il n'y a pas de variation de la direction du vecteur vitesse ; dans ce cas le rayon de courbure ρ de la trajectoire est infini et de ce fait la composante normale $a_N = 0$, et varié veut dire la composante tangentielle $a_T = \frac{dv}{dt} \neq 0$.

Mouvement circulaire uniforme : circulaire signifie que le mobile se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon R = ρ et de ce fait $a_N = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$, et uniforme veut dire $a_T = 0$.

2.6 Etude du mouvement en coordonnés polaires:

Ce système de coordonnées est approprié pour étudier les mouvements plans à symétrie de rotation. Le repérage s'effectue relativement à un axe polaire (OX), d'origine O appelée pôle. On peut alors repérer la position de tout point M du plan contenant (OX) par :

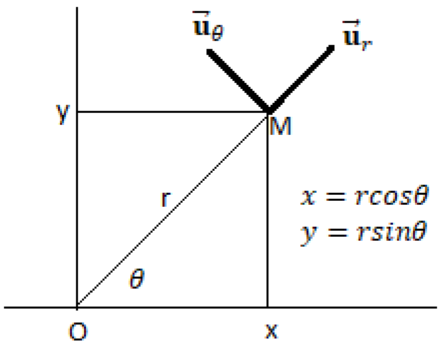
Le rayon polaire $r(t) = |\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}|$ et l'angle polaire $\theta(t) = (\overrightarrow{\boldsymbol{OX}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$

Dans ce système on utilise la base constituée par les vecteurs unitaires :

- $\vec{\mathbf{u}}_r$ ayant la direction et le sens de $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$
- $\vec{\mathbf{u}}_\theta$ obtenu par rotation de $\vec{\mathbf{u}}_r$ d'un angle 90^0 dans le sens trigonométrique.

La base $(\vec{\mathbf{u}}_r, \vec{\mathbf{u}}_\theta)$ est liée au point M, et de ce fait les directions des vecteurs unitaires peuvent varier avec le temps. Leurs dérivées vérifient un certain nombre de relations, notamment, on l'admettra :

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{u}}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{u}}_r$$



Les coordonnées polaires r et θ du point M sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

$$\vec{\mathbf{u}}_r = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\sin\theta \quad et \quad \vec{\mathbf{u}}_\theta = -\vec{\imath}\sin\theta + \vec{\jmath}\cos\theta$$

Le vecteur position est : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = r\vec{\mathbf{u}}_r$

Le vecteur vitesse est : $\vec{\boldsymbol{V}} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{u}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{u}}_\theta = \dot{r}\vec{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\vec{\mathbf{u}}_\theta$

Le vecteur accélération est : $\vec{\boldsymbol{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\mathbf{u}}_\theta$

2.7 Etude du mouvement en coordonnées cylindriques:

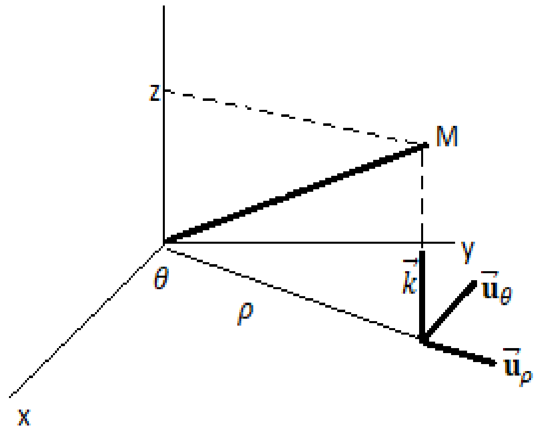
Lorsqu'un mouvement a lieu sur une surface cylindrique ou en spirale, on utilise souvent les coordonnées cylindriques que l'on définit par rapport au système cartésien.

Le mobile M est alors repéré dans la base $(\vec{\mathbf{u}}_\rho, \vec{\mathbf{u}}_\theta, \vec{\boldsymbol{k}})$ par :

les coordonnées polaires ρ et θ de sa projection sur le plan (O, X, Y) et sa coordonnée axiale z.

$$\vec{\mathbf{u}}_\rho = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\sin\theta \quad et \quad \vec{\mathbf{u}}_\theta = -\vec{\imath}\sin\theta + \vec{\jmath}\cos\theta$$

Le vecteur position est : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \rho\vec{\mathbf{u}}_\rho + z\vec{\boldsymbol{k}}$



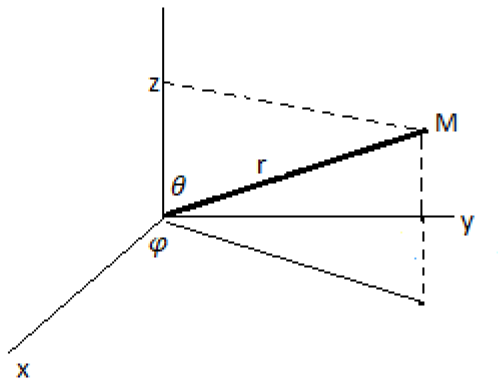
$x = \rho cos\theta$
$y = \rho sin\theta$
$z = z$

Le vecteur vitesse est : $\vec{V} = \frac{d\rho}{dt}\vec{\mathbf{u}}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{u}}_\theta + \dot{z}\vec{k} = \dot{\rho}\vec{\mathbf{u}}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{\mathbf{u}}_\theta + \dot{z}\vec{k}$

Le vecteur accélération est : $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{\mathbf{u}}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{\mathbf{u}}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$

2.8 Etude du mouvement en coordonnées sphériques:

Lorsqu'un mouvement a lieu sur une surface sphérique, on utilise souvent les coordonnées sphériques que l'on définit par rapport au système cartésien. Le mobile M est alors repéré dans la base $(\vec{\mathbf{u}}_{r,}, \vec{\mathbf{u}}_\theta, \vec{\mathbf{u}}_\varphi)$ par : (r, θ, φ) où r représentant la coordonnée radiale correspondant à la distance de l'origine O au mobile M, l'angle θ compris entre 0 et π, correspond à l'angle entre OM et l'axe OZ et l'angle φ compris entre 0 et 2π, correspond à l'angle entre le plan défini par l'axe OZ et OM avec l'axe OX.



$x = rsin\varphi cos\theta$
$y = rsin\varphi sin\theta$
$z = rcos\varphi$

$$\vec{\mathbf{u}}_r = \vec{i}cos\varphi sin\theta + \vec{j}sin\varphi sin\theta + \vec{k}cos\theta$$
$$\vec{\mathbf{u}}_\theta = \vec{i}cos\varphi cos\theta + \vec{j}sin\varphi cos\theta - \vec{k}sin\theta$$
$$\vec{\mathbf{u}}_\varphi = -\vec{i}sin\varphi + \vec{j}cos\varphi$$

Le vecteur position est : $\overrightarrow{OM} = r\vec{\mathbf{u}}_r$

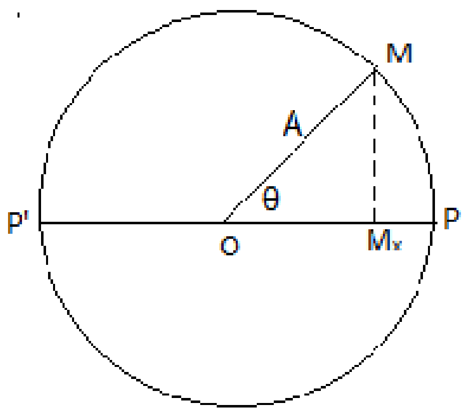
Le vecteur vitesse est : $\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{u}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{u}}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{\mathbf{u}}_\varphi = \dot{r}\vec{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\vec{\mathbf{u}}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{\mathbf{u}}_\varphi$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta)\vec{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta)\vec{\mathbf{u}}_\theta + (r\ddot{\varphi}sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta)\vec{\mathbf{u}}_\varphi$$

2.9 Le mouvement harmonique simple:

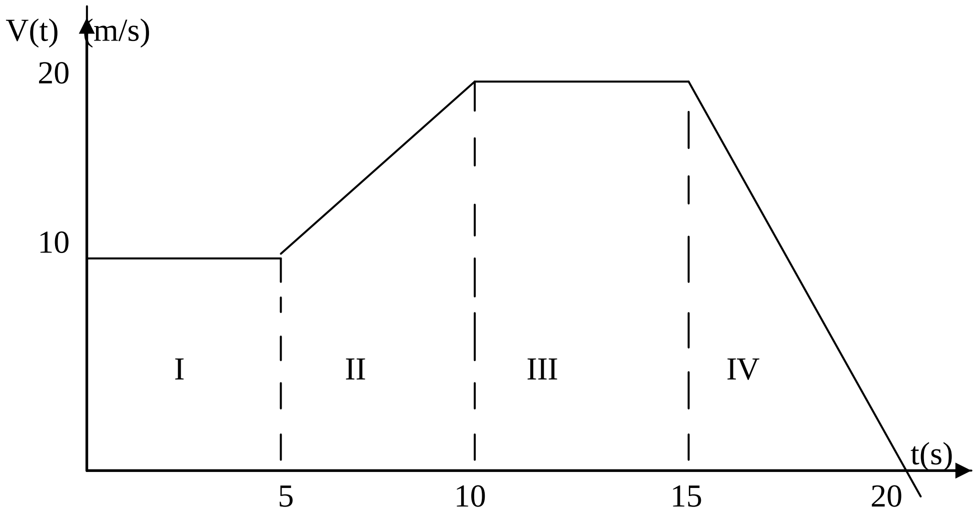
Considérons un point M qui se déplace sur un cercle de rayon A à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante. Lorsque M se déplace sur sa trajectoire, sa projection, M_x sur l'axe (OX), effectue des oscillations sur le segment PP' centrées en O.



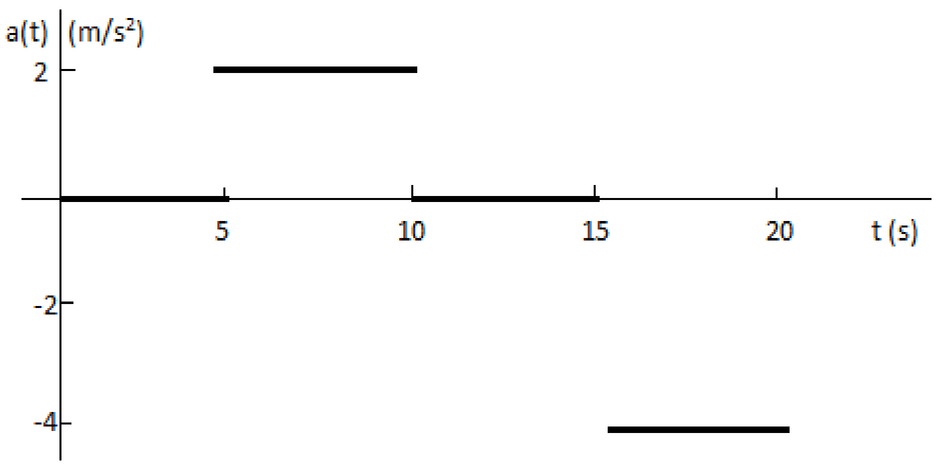
La projection M_x du mobile M a pour abscisse : $x = Acos\theta$
La valeur de l'angle $\theta(t)$ est $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$
Soit : $x = Acos(\theta_0 + \omega t)$
Le mouvement de M_x est un mouvement harmonique simple; ses caractéristiques sont :
A : l'amplitude
ω : la pulsation ou la fréquence angulaire
$\theta_0 + \omega t$: la phase et θ_0 la phase initiale.
Le mouvement harmonique est périodique:
$x(t) = x(t + \frac{2\pi}{\omega})$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.
Sa vitesse $V(t) = -A\omega sin(\theta_0 + \omega t)$
et son accélération $a(t) = -A\omega^2 cos(\theta_0 + \omega t) = -\omega^2 x(t)$

Exercices :

1. Le diagramme des vitesses d'un mobile A animé d'un mouvement rectiligne sur un axe OX est donné par la figure ci-dessous :
    - Tracer le diagramme de l'accélération en fonction du temps.
    - Quelles sont les différentes phases du mouvement et leur nature. Justifier.
    - Déterminer la position du mobile aux instants t = 10 s, et t = 20 s, sachant qu'à t = 0 s, le mobile est à 10 m de l'origine.
    - A quel instant le mobile rebrousse-t-il chemin ?



- Le graph de l'accélération :



- Entre 0 et 5 s, la vitesse est constante → l'accélération $a_1 = 0$
  → Mouvement rectiligne uniforme.
- Entre 5 s et 10 s, la vitesse varie uniformément → l'accélération est représentée par la pente $a_2 = \frac{10}{5} = 2\ m/s^2$
  → Mouvement rectiligne uniformément varié.
- Entre 10 s et 15 s, la vitesse est constante → l'accélération $a_3 = 0$
  → Mouvement rectiligne uniforme.
- Entre 15 s et 20 s, la vitesse varie uniformément → l'accélération est représentée par la pente $a_4 = \frac{-20}{5} = -4\ m/s^2$

→ Mouvement rectiligne uniformément varié.

- Le déplacement du mobile en t = 10 s est représenté par la distance initiale et les surfaces S_I et S_{II} dans le graph V(t) → X(10) = 10 + 5*10 + (10 +20)*5/2 = 135 m
- Le déplacement du mobile en t = 20 s est représenté par la distance initiale et la somme des surfaces S_I, S_{II}, S_{III} et S_{IV} dans le graph V(t) :
  → X(20) = 10 + 5*10 + (10 +20)*5/2 + 5*20 + 20*5/2 = 285 m
- A l'instant t = 20 s, la vitesse du mobile change de signe et devient négative.
  → Le mobile rebrousse chemin à cet instant.

2. Un objet est lancé vers le haut du sommet d'un immeuble avec une vitesse de 12.0 m/s. Il atteint le sol 4.25 s plus tard.
   - Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
   - Quelle est la hauteur de l'immeuble ?
   - Avec quelle vitesse atteint-il le sol ?
   - Le mouvement de l'objet est uniformément varié. Il atteint sa hauteur maximale quand sa vitesse s'annule. On choisit l'axe *Oz* orienté positivement vers le haut, avec origine le sommet de l' immeuble. La hauteur maximale atteinte par l'objet est donc :
     $H_{max} = z(t) = \frac{V(t)^2 - V(0)^2}{-2g} = \frac{V(0)^2}{2g} \approx 7.35\ m$
   - La hauteur de l'immeuble est égale à la valeur absolue de l'abscisse de l'objet au moment de sa collision avec le sol (soit à *t* = 4.25 *s*) : $z(t) = V(0)t - \frac{1}{2}\ gt^2$
     $h = |z(4.25)| \approx 37.5\ m$
   - La vitesse de la collision de l'objet avec le sol (soit à *t* = 4.25 *s*) :
     $V(t) = V(0) - gt$
     $V = V(4.25) \approx -29.65\ m/s$; le signe – résulte de l'orientation de l'axe.

3. Un mobile se déplace suivant une droite avec l'accélération : $a = 9 - t^2$.
   - Trouver les expressions de la vitesse et du déplacement en fonction du temps en considérant les conditions suivantes : $t = 3\ s;\ v = 2 m/s\ et\ x = 7\ m.$
   - En intégrant l'expression de l'accélération on obtient l'équation horaire de la vitesse :
     $v(t) = v(3) + \int_3^t a(\tau)d\tau = 2 + \int_3^t (9 - \tau^2)d\tau$
     Donc, $v(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 9t - 16$
   - En intégrant l'expression de la vitesse, on obtient l'équation horaire de la position :
     $x(t) = x(3) + \int_3^t v(\tau)d\tau = 2 + \int_3^t (-\frac{1}{3}\tau^2 + 9\tau - 16)d\tau$
     Donc, $x(t) = -\frac{1}{9}t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 16t + \frac{25}{2}$

4. Le mouvement rectiligne d'un mobile est défini par l'équation :
   $s = 3t^3 - 2t^2 + 12t + 1.$
   - Calculer la vitesse et l'accélération
   - Etudier la nature du mouvement
   - La vitesse du mobile est $v = \frac{ds}{dt} = 9t^2 - 4t + 12$
     La vitesse v est toujours positive car $\Delta = -416 < 0$ et le coefficient de $t^2 > 0$

- L'accélération du mobile est $a = \frac{dv}{dt} = 18t - 4$
- Le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe du produit « $a \cdot v$». Quant au sens du mouvement il est indiqué par le signe de v qui est toujours positive dans notre cas.

  Donc Le mouvement est : accéléré pour les valeurs de $\mathrm{t} > 2/9$ et décéléré pour $0 < \mathrm{t} < \frac{2}{9}$.

5. Un mobile se déplace suivant l'axe OX avec une vitesse $v = 2t - 5$ (m/s)
   - Calculer son accélération ainsi que son équation horaire sachant qu'à l' instant $t = 0$, le mobile se trouvait au point d'abscisse $x = 6$ (m).
   - Etudier la nature du mouvement
   - L'accélération du mobile est $a = \frac{dv}{dt} = 2$ (m/s^2), l'accélération est constante.
   - En intégrant l'expression de la vitesse on obtient l'équation horaire :
     $x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau = 6 + \int_0^t (2\tau - 5)d\tau = t^2 - 5t + 6$
   - Etudions le signe de "$a * v$" $= 2(2t - 5)$: il est positif pour $t > 5/2$ (mouvement accéléré) et négatif pour $t < 5/2$ (mouvement décéléré).

6. Un mobile se déplace en mouvement rectiligne. Son accélération est donnée par : $a = -\frac{\pi^2}{4}\,x.$
   Sachant qu'a l'instant $\mathrm{t} = 1$ s , le mobile se trouvait :
   au point d'abscisse $x = 1\,m$ avec une vitesse $v = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,m/s$:
   - Déterminer la nature du mouvement, écrire son équation horaire.
   - On remarque que nous avons une équation différentielle qui est l'équation caractéristique du mouvement rectiligne sinusoïdal : $a + \omega^2\,x = 0$ avec $\omega^2 = \frac{\pi^2}{4}$
     et sa solution est de la forme : $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$ avec $x(1) = 1$
     avec une vitesse $v(t) = -A\omega sin(\omega t + \varphi)$ avec $v(1) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
     $x(1) = Acos(\omega + \varphi) = 1 \quad et \quad v(1) = -A\omega sin(\omega + \varphi) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
     Par conséquent : $\omega tan(\omega + \varphi) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
     Puisque $\omega = \frac{\pi}{2}$, alors : $tan(\omega + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \omega + \varphi = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}$
     $\rightarrow A = \frac{1}{cos(\omega+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
     Donc l'équation horaire du mouvement rectiligne sinusoïdal est :
     $x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3})$
     Pulsation $\omega = \frac{\pi}{2}\,rad/s$, amplitude $A = \frac{2}{\sqrt{3}}\,m$ et phase initiale $\varphi = -\frac{\pi}{3}\,rad.$

7. Le mouvement plan d'un mobile est défini par : $x = sin^2(t)$ et $y = 1 + \cos(2t)$
   - Déterminer la trajectoire du mouvement.
   - Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération
   - Sachant que $\cos(2t) = 1 + 2sin^2(t)$, on obtient la relation entre x et y suivante :
     $y = 2(1 - x)$ qui est l'équation d'une droite. Puisque $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le 2$:
     La trajectoire est donc un segment de droite joignant les points (1,0) et (0,2)
   - Le vecteur vitesse a les coordonnées :
     $v_x = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$ et $v_y = -2\sin(2t)$

Donc, $v_y = -2v_x$ avec $v_x(0) = v_y(0) = 0$ et $v_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

- Le vecteur accélération a les coordonnées : $a_x = 2\cos(2t)$ et $a_y = -\cos(2t)$
  Donc, $a_y = -\frac{1}{2}a_x$ avec $a_x(0) = 2$, $a_y(0) = -1$ et $a_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, $a_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

8. Une particule se déplace dans un plan *XY* selon la loi : $a_x = 2sint$ et $a_y = 3cost.$
   Sachant que pour *t* = 0 on ait : $x = 0$ et $y = -2$; $V_x = -2$ et $V_y = 0$.
   - Trouver l'équation du mouvement.
   - Trouver l'équation de la trajectoire.

- $v_x(t) - v_x(0) = \int_0^t a_x d\tau \quad \rightarrow \quad v_x(t) = -2cost$
  $v_y(t) - v_y(0) = \int_0^t V_y d\tau \quad \rightarrow \quad v_y(t) = 3sint$
  $x(t) - x(0) = \int_0^t v_x d\tau \quad \rightarrow \quad x(t) = -2sint$
  $y(t) - y(0) = \int_0^t v_y d\tau \quad \rightarrow \quad y(t) = -3cost + 1$
  En utilisant la propriété trigonométrique : $(sint)^2 + (cost)^2 = 1$
  $\rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
  La trajectoire est une ellipse qui est centrée en (0,1) avec petit axe a = 2 et grand axe b = 3.

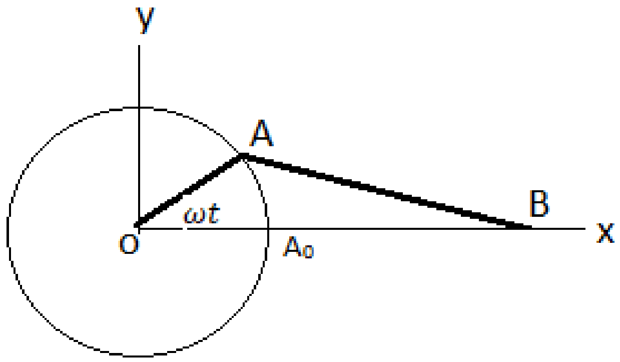
9. Soit un mobile M en mouvement tel que : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = 6cost\vec{\imath} + 6sint\vec{\jmath} + (8t-3)\vec{k}$
   - Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, X, Y, Z) ?
   - Exprimer $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{a}}$ en coordonnées cylindriques et déterminer leur module ?
   - Trouver $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{a}}$ dans la base de *Frenet* ?
   - En déduire le rayon de courbure ρ ?

- La nature de la trajectoire dans le plan (O, X, Y) :
  $x = 6cost \;\; et \;\; y = 6sint$
  D'où $x^2 + y^2 = 36$
  Le mouvement dans le plan (O,X,Y) est circulaire de rayon R= 6 m et de centre O
  Suivant l'axe Oz : $z = 8t - 3$; le mouvement est rectiligne suivant OZ.
  Donc le mouvement suivant l'espace (O, X, Y, Z) est hélicoïdal.
- La position du mobile M, sa vitesse et son accélération sont donc exprimées en coordonnées cylindriques comme :
  $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = 6\vec{\mathbf{u}}_\rho + (8t-4)\vec{\boldsymbol{k}}$
  $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{dt} = 6\vec{\mathbf{u}}_\theta + 8\vec{\boldsymbol{k}}$ avec $|\vec{\boldsymbol{v}}| = 10\, m/s$
  $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\vec{\mathbf{u}}_\rho$ avec $|\vec{\boldsymbol{a}}| = 6\, m/s^2$
- $\vec{\boldsymbol{v}}$ et $\vec{\boldsymbol{a}}$ dans la base de *Frenet :*
  $\vec{\boldsymbol{v}} = 10\vec{\mathbf{u}}_T$
  $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_N = a_T\vec{\mathbf{u}}_T + a_N\vec{\mathbf{u}}_N = \frac{dv}{dt}\vec{\mathbf{u}}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{\mathbf{u}}_N$
  Puisque $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$, donc $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{v^2}{\rho}\vec{\mathbf{u}}_N = 6\vec{\mathbf{u}}_N$
  $\frac{v^2}{\rho} = a_N \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_N}$

  Donc, le rayon de courbure est : $\rho = \frac{50}{3}\; m$

10. Un bras *OA* tournant avec une vitesse angulaire uniforme ω autour d'un axe *OZ*, est. articulé en *A* avec une tige *AB*. La tige *AB* est solidaire d'un curseur *B* pouvant coulisser le long de l'axe *OX*. Le bras et la tige peuvent se croiser lorsque la tige passe par derrière l'articulation en *O*. Sachant que *AB* = *L* et *OA* = *R* :

- Trouver l'équation du mouvement de *B*, sachant que B passe en A_0 au temps $t = 0$
- A quel instant la vitesse s'annule-t-elle ?



- En utilisation la loi des cosinus : $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OBcos(\omega t)$
  $L^2 = R^2 + x^2 - 2xRcos(\omega t) \;\; \rightarrow \;\; x(t) = Rcos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)}$
  On peut vérifier que $x(0) = R + L$
- $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega Rsin(\omega t) - \frac{\omega R^2 \sin(2\omega t)}{2\sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}$
- La vitesse s'annule quand $\omega t = k\pi \quad \rightarrow \quad t = \frac{k\pi}{\omega}$ où k est un entier.

11. Soit le vecteur position d'un mobile $\vec{\boldsymbol{r}} = 2t^2\vec{\imath} + (5 - 3t)\vec{\jmath} - t^3\vec{k}$.

- Calculer sa vitesse et son accélération.
- Etudier la nature du mouvement.

- La vitesse du mobile $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 3t^2\vec{k}$
  Son module $|\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{9 + 16t^2 + 9t^4}$
- L' accélération du mobile $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{\imath} - 6t\vec{k}$
  Son module $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{16 + 36t^2}$
  Le produit scalaire $\vec{\boldsymbol{a}}.\vec{\boldsymbol{v}} = 16t + 18t^3$ est positif
  Par conséquent, le mouvement du mobile est accéléré.
- Le rayon de courbure est donne' par la relation : $\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\wedge\vec{a}|}$
  $\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\vec{\boldsymbol{a}} = 18t\vec{\imath} + 12t^2\vec{\jmath} + 12\vec{k}$
  Donc, le rayon de courbure est : $\rho = \frac{(9+16t^2+9t^4)^{3/2}}{(144+324t^2+144t^4)^{1/2}}$

12. En coordonnées cylindriques, le vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = (t^2 + 2)\vec{\mathbf{u}}_\rho + 2t\vec{\boldsymbol{k}}$ avec $\theta = 2t$

- Calculer sa vitesse et son accélération dans la base $(\vec{\mathbf{u}}_\rho, \vec{\mathbf{u}}_\theta, \vec{\boldsymbol{k}})$
- Calculer sa vitesse et son accélération dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

- Le vecteur vitesse est $\vec{\boldsymbol{V}} = \dot{\rho}\vec{\mathbf{u}}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{\mathbf{u}}_\theta + \dot{z}\vec{\boldsymbol{k}} = 2t\vec{\mathbf{u}}_\rho + 2(t^2 + 2)\vec{\mathbf{u}}_\theta + 2\vec{\boldsymbol{k}}$
- Le vecteur accélération est $\vec{\boldsymbol{a}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{\mathbf{u}}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{\mathbf{u}}_\theta + \ddot{z}\vec{\boldsymbol{k}}$
  $\vec{\boldsymbol{a}} = -(4t^2 + 6)\vec{\mathbf{u}}_\rho + 8t\vec{\mathbf{u}}_\theta$

- Puisque $\vec{\mathbf{u}}_\rho = \vec{\imath}cos\theta + \vec{\jmath}sin\theta$ *et* $\vec{\mathbf{u}}_\theta = -\vec{\imath}sin\theta + \vec{\jmath}cos\theta$

  $\rightarrow \vec{V} = 2\,[tcos(2t) - (t^2+2)\sin(2t)]\vec{\imath} + 2\,[tsin(2t) + (t^2+2)\cos(2t)]\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

  $\rightarrow \vec{a} = -[(4t^2+6)\cos(2t) + 8t\sin(2t)]\vec{\imath} - [(4t^2+6)\sin(2t) - 8t\cos(2t)]\vec{\jmath}$

13. On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel cartésien : $x = 3t$ et $y = 2t^2 - 3t$
    - Déterminer l'équation de la trajectoire, Quelle est son allure ?
    - Calculer la vitesse du mobile
    - Montrer que son accélération est constante
    - Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de *Frenet* et en déduire le rayon de courbure.

- $x = 3t \rightarrow t = \frac{x}{3} \rightarrow y = \frac{2}{9}x^2 - x$

  $\rightarrow$ La trajectoire est une parabole.
- La vitesse du mobile :

  $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 3$ et $v_y(t) = \frac{dx}{dt} = 4t - 3$

  Le module de la vitesse : $|\vec{v}| = \sqrt{16t^2 - 24t + 18}\; m/s$
- L'accélération du mobile :

  $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = 0$ et $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = 4$

  L'accélération du mobile est constante : $|\vec{a}| = 4\; m/s^2$
- Dans le repère de *Frenet*, l'accélération tangentielle :

  $a_T(t) = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{16t-12}{\sqrt{16t^2-24t+18}}$

  L'accélération normale : $a_N(t) = \sqrt{a^2 - a_T{}^2} = \frac{12}{\sqrt{16t^2-24t+18}}$
- Le rayon de courbure : $\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(16t^2-24t+18)^{3/2}}{12}\; m$

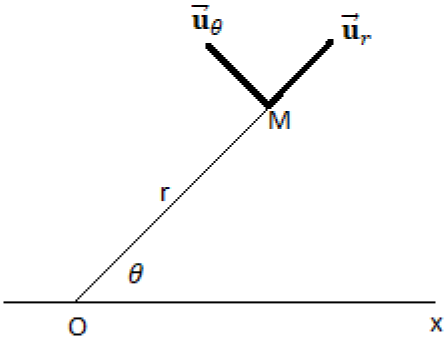
14. Convertir le vecteur $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$

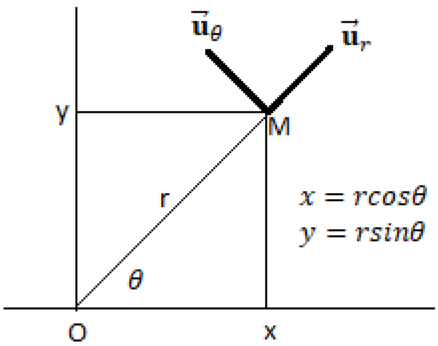
    suivant les coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.

- Nous avons $\vec{\mathbf{u}}_r = \vec{\imath}cos\theta + \vec{\jmath}sin\theta$ *et* $\vec{\mathbf{u}}_\theta = -\vec{\imath}sin\theta + \vec{\jmath}cos\theta$

  En inversant, on obtient :

  $\rightarrow \vec{\imath} = \vec{\mathbf{u}}_r cos\theta - \vec{\mathbf{u}}_\theta sin\theta$ *et* $\vec{\jmath} = \vec{\mathbf{u}}_r sin\theta + \vec{\mathbf{u}}_\theta cos\theta$





$\vec{A} = A_x(\vec{\mathbf{u}}_r cos\theta - \vec{\mathbf{u}}_\theta sin\theta) + A_y(\vec{\mathbf{u}}_r sin\theta + \vec{\mathbf{u}}_\theta cos\theta)$

$\vec{A} = (A_x cos\theta + A_y sin\theta)\vec{\mathbf{u}}_r + (A_y cos\theta - A_x sin\theta)\vec{\mathbf{u}}_\theta = A_r\vec{\mathbf{u}}_r + A_\theta\vec{\mathbf{u}}_\theta$

$$\begin{cases} A_r = A_x cos\theta + A_y sin\theta \\ A_\theta = A_y cos\theta - A_x sin\theta \end{cases}$$

15. Convertir le vecteur $\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ suivant les coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques.

- Nous avons :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{u}}_r = \vec{\imath}cos\varphi sin\theta + \vec{\jmath}sin\varphi sin\theta + \vec{k}cos\theta \\ \vec{\mathbf{u}}_\varphi = -\vec{\imath}sin\varphi + \vec{\jmath}cos\varphi \\ \vec{\mathbf{u}}_\theta = \vec{\imath}cos\varphi cos\theta + \vec{\jmath}sin\varphi cos\theta - \vec{k}sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_r\vec{\mathbf{u}}_r + A_\varphi\vec{\mathbf{u}}_\varphi + A_\theta\vec{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\begin{cases} A_x = A_r cos\varphi sin\theta - A_\varphi sin\varphi + A_\theta cos\varphi cos\theta \\ A_y = A_r sin\varphi sin\theta + A_\varphi cos\varphi + A_\theta sin\varphi cos\theta \\ A_z = A_r cos\theta - A_\theta sin\theta \end{cases}$$

En inversant les coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} A_r = A_x cos\varphi sin\theta + A_y sin\varphi sin\theta + A_z cos\theta \\ A_\theta = A_x cos\varphi cos\theta + A_y sin\varphi cos\theta - A_z sin\theta \\ A_\varphi = -A_x sin\varphi + A_y cos\varphi \end{cases}$$

Chapitre 3

Le mouvement relatif

Considérerons un mobile M et les deux systèmes de coordonnées cartésiennes suivants :
$\Re$ (O, X, Y, Z), supposé fixe, qui est appelé repère absolu et $\Re'$ (O′, X′, Y′, Z′), en mouvement quelconque par rapport à $\Re$ (O, X, Y, Z), qui est le repère relatif.

3.1 Le mouvement absolu:

Le mouvement du mobile M considéré par rapport au repère absolu $\Re$ (O, X, Y, Z) est caractérisé par les grandeurs :

- le vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
- la vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$
- l'accélération absolue $\vec{\mathbf{a}}_a = \frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$

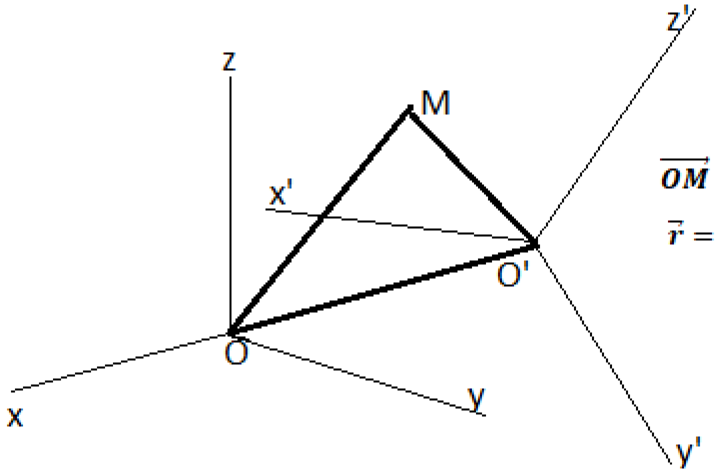
Les dérivations sont effectuées dans $\Re$ dans lequel la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est invariable.

3.2 Le mouvement relatif:

Le mouvement du mobile M considéré par rapport au repère $\Re'$ (O′, x′, y′, z′), est caractérisé par les grandeurs :

- le vecteur position $\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} = (\vec{\boldsymbol{r}}'|\Re') = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$
- la vitesse relative $\vec{\mathbf{V}}_r = (\frac{d\vec{r}'}{dt}\Big| \Re') = \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'$
- l'accélération relative $\vec{\mathbf{a}}_r = (\frac{d\vec{\mathbf{V}}_r}{dt}\Big| \Re') = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$

Les dérivations sont effectuées dans $\Re$' dans lequel la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ est invariable.



$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}$$

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{r}}'$$

3.3 Composition des vecteurs vitesses:

La relation de Chasles permet d'écrire : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\mathbf{r}}_0 + x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{\boldsymbol{k}}'$$

Donc la vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_0}{dt} + \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}'}{dt}$

$$\vec{\mathbf{V}}_a = (\frac{d\vec{\mathbf{r}}_0}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{\boldsymbol{k}}'}{dt}) + \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{\boldsymbol{k}}'$$

$$\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$$

avec vitesse d'entrainement $\vec{\mathbf{V}}_e = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_0}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$ qui représente la vitesse du repère $\Re'$ par rapport au repère $\Re$. Le premier terme $\frac{d\vec{\mathbf{r}}_0}{dt}$ représente la vitesse de translation de l'origine O′ par rapport à $\Re$ et le deuxième terme traduit le changement d'orientation du référentiel mobile $\Re'$ et vitesse relative

$$\vec{\mathbf{V}}_r = \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{\boldsymbol{k}}'$$

Soit $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ le vecteur représentant la vitesse angulaire du changement d'orientation du référentiel mobile $\Re'$ par apport au référentiel fixe $\Re$. Les vitesses d'entrainement et relative $\vec{\mathbf{V}}_e$ et $\vec{\mathbf{V}}_r$ sont exprimées par :

$$\vec{\mathbf{V}}_e = (\vec{\boldsymbol{V}}(O')|\Re) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\boldsymbol{r}}'|\Re')$$

$$\vec{\mathbf{V}}_r = (\frac{d\vec{\boldsymbol{r}'}}{dt}\Big|\Re')$$

3.4 Composition des vecteurs accélérations:

L'accélération absolue définie dans le repère $\Re$ est :

$$\vec{\mathbf{a}}_a = \frac{d\vec{\mathbf{V}}_a}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_a = (\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{\boldsymbol{k}}'}{dt^2}) + (\ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}') + 2(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{\boldsymbol{k}}'}{dt})$$

$$\vec{\mathbf{a}}_a = \vec{\mathbf{a}}_e + \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_c$$

Avec $\vec{\mathbf{a}}_e = (\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{\boldsymbol{k}}'}{dt^2})$ représentant l'accélération d'entrainement du point coïncidant par rapport au repère absolu $\Re$,

$\vec{\mathbf{a}}_r = (\ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}')$ représentant l'accélération relative, et

$\vec{\mathbf{a}}_c = 2(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{\boldsymbol{k}}'}{dt})$ est une accélération complémentaire, dite de Coriolis.

Ces accélérations peuvent être exprimées en fonction du vecteur $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ représentant la vitesse angulaire du changement d'orientation du référentiel mobile $\Re'$ par apport au référentiel fixe $\Re$ par :

$$\vec{\mathbf{a}}_e = (\vec{\boldsymbol{a}}(O')|\Re) + (\dot{\vec{\boldsymbol{\Omega}}}\wedge\vec{\boldsymbol{r}}'|\Re') + \vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\vec{\boldsymbol{r}}'|\Re')$$

$$\vec{\mathbf{a}}_r = (\frac{d\vec{\mathbf{V}}_r}{dt}\Big|\Re')$$

$$\vec{\mathbf{a}}_c = 2\vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\mathbf{V}}_r|\Re')$$

On peut conclure que si deux repères sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, alors les accélérations d'un point matériel M mesurées dans l'un ou l'autre de ces repères, sont égales ; ce type de repères sont appelés « repères galiléens ».

On peut aussi conclure que si le repère mobile $\Re'$ est en translation par rapport au repère fixe $\Re$ ou si le mobile M est fixe par rapport au repère mobile $\Re'$, l'accélération de Coriolis s'annule.

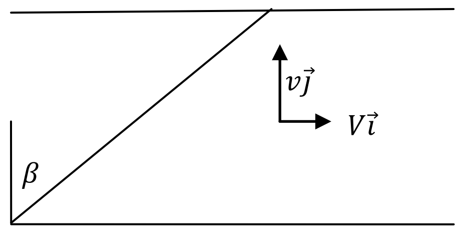
Exercices :

1. Un nageur traverse une rivière, de largeur L = 0.25 km, d'une rive à l'autre, perpendiculairement au courant, à une vitesse constante v = 2 km/h. La vitesse du courant est $V = 1\ km/h$. Ces vitesses sont mesurées par rapport à un observateur placé sur une des rives.
   - Quelle est la trajectoire, la vitesse du nageur et le temps mis pour atteindre l'autre rive.
   - Quelle doit être sa direction de départ si le nageur veut atteindre un point directement opposé à l'autre rive. En déduire le temps mis pour atteindre la rive opposé dans ce cas.

- Le nageur est dévié d'un angle β de sa direction initiale tel que : $tan\beta = \frac{V}{v} = \frac{1}{2}$

  $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r = V\vec{\imath} + v\vec{\jmath}$

  Le module de la vitesse absolue $|\vec{\mathbf{V}}_a| = \sqrt{V^2 + v^2}$



- La position du nageur est :

  $x = Vt \quad et \quad y = vt$
- Sa trajectoire est une droite : $y = \frac{v}{V}x$
- Le temps mis par le nageur pour atteindre l'autre rive :

  $T = \frac{L}{v} = 0.125\ h$
- La distance parcourue :

  $$D = |\vec{\mathbf{V}}_a|T = L\sqrt{1 + \frac{V^2}{v^2}} = 0.125\sqrt{5}\ km$$
- Pour atteindre un point directement opposé à l'autre rive, la vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a$ doit être perpendiculaire aux deux rives avec une magnitude :

  $|\vec{\mathbf{V}}_a| = \sqrt{v^2 - V^2}$

  La vitesse du nageur doit être orientée opposée au courant avec un angle α :

  $$\alpha = arctan\frac{V}{\sqrt{v^2-V^2}} = arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$
- Le temps mis pour atteindre la rive opposé $T' = \frac{L}{\sqrt{v^2-V^2}} = \frac{0.25}{\sqrt{3}}\ h$

2. Un mobile est décrit par le vecteur position dans un repère fixe **R** par :

   $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = 3t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + (3t+4)\vec{k}$ et par $\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} = (2-3t)\vec{\imath}' + (t^2 - t)\vec{\jmath}' + t\vec{k}'$ dans un repère mobile **R'**. Ce dernier est en mouvement rectiligne par rapport à **R**.
   - Déterminer la vitesse absolue et la vitesse relative de M.
   - En déduire la vitesse d'entraînement et la nature du mouvement de **R'** par rapport à **R**.
   - Déterminer l'accélération absolue et l'accélération relative du mobile M

- La vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{dt} = 3\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 3\vec{k}$
- La vitesse relative $\vec{\mathbf{V}}_r = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}{dt} = -3\vec{\imath}' + (2t-1)\vec{\jmath}' + \vec{k}'$

  Puisque les deux repères sont en mouvement rectiligne l'un de l'autre :

  $\vec{\imath} = \vec{\imath}', \quad \vec{\jmath} = \vec{\jmath}' \quad et \quad \vec{k} = \vec{k}'$
- En utilisant la relation de décomposition des vitesses : $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$

  Alors, la vitesse d'entraînement $\vec{\mathbf{V}}_e = \vec{\mathbf{V}}_a - \vec{\mathbf{V}}_r = 6\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

  Son module $|\vec{\mathbf{V}}_e| = \sqrt{41}$ est constant et indépendant du temps t.

  Donc, le mouvement de **R'** par rapport à **R** est un mouvement rectiligne uniforme.

- L'accélération absolue du mobile M : $\vec{\mathbf{a}}_a = \frac{d\vec{\mathbf{V}}_a}{dt} = 2\vec{j}$
- L'accélération relative du mobile M : $\vec{\mathbf{a}}_r = (\frac{d\vec{\mathbf{V}}_r}{dt}\Big| \mathrm{R}') = 2\vec{j}$

  $\vec{\mathbf{a}}_a = \vec{\mathbf{a}}_r$ parce que le mouvement de **R'** par rapport à **R** est un mouvement rectiligne uniforme.

3. Un mobile est décrit par le vecteur position dans un repère mobile **R'** par :
   $\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} = 5t\vec{\imath}' + (2t^2 - t)\vec{j}' - 2t\vec{k}'$. Ce repère est en mouvement de translation rectiligne par apport à un repère fixe **R**, de vecteur vitesse $\vec{\mathbf{V}}_e = 2t\vec{\imath} + \vec{j} + \vec{k}$

   - Trouver l'expression de la vitesse absolue de M par rapport au repère **R**
   - En déduire le vecteur position de M dans le repère fixe **R**, sachant qu'à l'instant t = 0, dans le repère **R**, M est au point (0, 1, -2).
   - Calculer l'accélération relative $\vec{\mathbf{a}}_r$ et absolue $\vec{\mathbf{a}}_a$ du mobile M.

- La vitesse relative $\vec{\mathbf{V}}_r = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}{dt} = 5\vec{\imath}' + (4t - 1)\vec{j}' - 2\vec{k}'$

  Puisque les deux repères sont en mouvement rectiligne l'un de l'autre :

  $\vec{\imath} = \vec{\imath}'\ ,\quad \vec{j} = \vec{j}' \quad et \quad \vec{k} = \vec{k}'$

  En utilisant la relation de décomposition des vitesses : $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$

  Alors, la vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a(t) = (2t + 5)\vec{\imath} + 4t\vec{j} - \vec{k}$
- le vecteur position de M dans le repère fixe **R**:

  $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(0) + \int_0^t \vec{\mathbf{V}}_a(\tau)d\tau = \vec{j} - 2\vec{k} + (t^2 + 5t)\vec{\imath} + 2t^2\vec{j} - t\vec{k}$

  Donc, $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t) = (t^2 + 5t)\vec{\imath} + (2t^2 + 1)\vec{j} - (t + 2)\vec{k}$
- L'accélération relative $\vec{\mathbf{a}}_r = (\frac{d\vec{\mathbf{V}}_r}{dt}\Big| \mathrm{R}') = 4\vec{j}$
- L'accélération absolue $\vec{\mathbf{a}}_a = \frac{d\vec{\mathbf{V}}_a}{dt} = 2\vec{\imath} + 4\vec{j}$

  On peut vérifier que pour ce cas : $\vec{\mathbf{a}}_a = \vec{\mathbf{a}}_e + \vec{\mathbf{a}}_r$ parce que $\vec{\mathbf{a}}_c = 0$

4. Un repère mobile **R'** (OX', OY', OZ) est en rotation par rapport à un repère fixe **R** (OX, OY, OZ) suivant l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante Ω.
   Un mobile M se déplace sur la droite OX' suivant la loi : $x' = A\cos\Omega t$, A une constante.

   - Déterminer la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile X'OY' à l'instant t en fonction de A et Ω.
   - En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection.
   - Montrer que le module de celle-ci est constant.
   - Déterminer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis de M par leurs projections dans le repère mobile X'OY' à l'instant t en fonction de A et Ω.
   - Déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

- $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t) = \mathrm{A}\cos\Omega t\vec{\imath}'$ et $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega\vec{k}'$

  Sachant que: $\vec{\imath}' = cos\Omega t\vec{\imath} + sin\Omega t\vec{j}\ ,\ \vec{j}' = -sin\Omega t\vec{\imath} + cos\Omega t\vec{j}$ et $\vec{k}' = \vec{k}$

  La vitesse relative $\vec{\mathbf{V}}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t)}{dt}\Big| \mathrm{R}'\right) = -\mathrm{A}\Omega\sin\Omega t\vec{\imath}'$

  $\vec{\mathbf{V}}_r = -\mathrm{A}\Omega\sin\Omega t[cos\Omega t\vec{\imath} + sin\Omega t\vec{j}\,]$

  La vitesse d'entraînement $\vec{\mathbf{V}}_e = \left(\vec{\boldsymbol{V}}(O')\big|\mathrm{R}\right) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\boldsymbol{r}}'|\mathrm{R}') = 0 + \Omega\vec{k}'\wedge\mathrm{A}\cos\Omega t\,\vec{\imath}'$

  $\vec{\mathbf{V}}_e = A\Omega\cos\Omega t\vec{j}' = A\Omega\cos\Omega t[-sin\Omega t\vec{\imath} + cos\Omega t\vec{j}]$

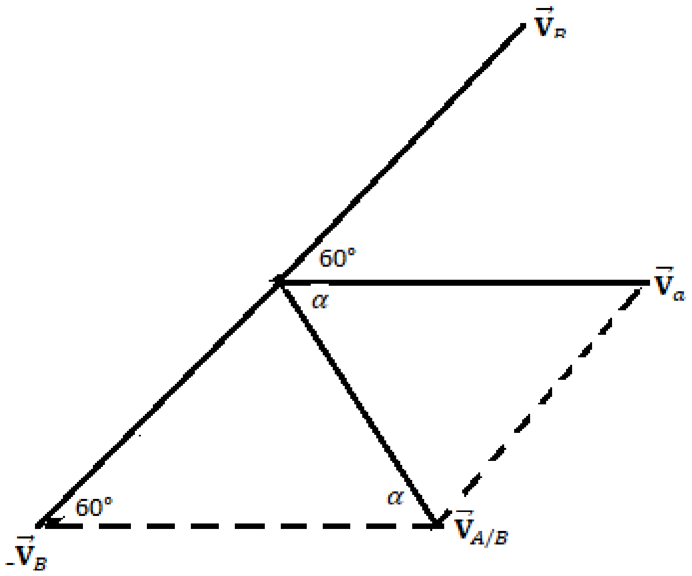
- La vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r = A\Omega\cos\Omega t\vec{j}' - A\Omega\sin\Omega t\vec{i}' = A\Omega[-\sin\Omega t\vec{i}' + \cos\Omega t\vec{j}']$
  On peut vérifier que $\vec{\mathbf{V}}_a = A\Omega[-\sin 2\Omega t\vec{i} + \cos 2\Omega t\vec{j}]$
  $|\vec{\mathbf{V}}_a| = A\Omega$, le module de la vitesse absolue est constant.
- L'accélération relative $\vec{\mathbf{a}}_r = (\frac{d\vec{\mathbf{V}}_r}{dt}\Big| \mathrm{R}') = -A\Omega^2\cos\Omega t\vec{i}'$
  $\vec{\mathbf{a}}_r = -A\Omega^2\cos\Omega t[\cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}]$
  L'accélération d'entrainement $\vec{\mathbf{a}}_e = (\vec{\boldsymbol{a}}(O')|\mathrm{R}) + (\dot{\vec{\boldsymbol{\Omega}}}\wedge\vec{\boldsymbol{r}}'|\mathrm{R}') + \vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\vec{\boldsymbol{r}}'|\mathrm{R}')$
  $\vec{\mathbf{a}}_e = 0 + 0 + \Omega\vec{k}'\wedge(\Omega\vec{k}'\wedge A\cos\Omega t\,\vec{i}' = -A\Omega^2\cos\Omega t\vec{i}'$
  $\vec{\mathbf{a}}_e = -A\Omega^2\cos\Omega t[\cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}]$
  L'accélération de Coriolis $\vec{\mathbf{a}}_c = 2\vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\mathbf{V}}_r|\mathrm{R}') = 2\Omega\vec{k}'\wedge(-A\Omega\sin\Omega t\vec{i}') = -2A\Omega^2\sin\Omega t\vec{j}'$
  $\vec{\mathbf{a}}_c = -2A\Omega^2\sin\Omega t[-\sin\Omega t\vec{i} + \cos\Omega t\vec{j}]$
  L'accélération absolue $\vec{\mathbf{a}}_a = \vec{\mathbf{a}}_e + \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_c$
  $\vec{\mathbf{a}}_a = -2A\Omega^2\cos\Omega t\vec{i}' - 2A\Omega^2\sin\Omega t\vec{j}'$
  $\vec{\mathbf{a}}_a = -2A\Omega^2[\cos 2\Omega t\vec{i} + \sin 2\Omega t\vec{j}]$
  On peut vérifier que $\vec{\mathbf{a}}_a = \frac{d\vec{\mathbf{V}}_a}{dt}$
  $|\vec{\mathbf{a}}_a| = 2A\Omega^2$, le module de L'accélération absolue est constant.

5. Un repère **R'** (OX', OY', OZ) en rotation par rapport à un fixe **R** (OX, OY, OZ) suivant l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante Ω. Un mobile M se déplace sur la droite OX' suivant la loi : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t) = Ate^{\omega t}\vec{i}'$, A une constante.
   - Déterminer les vitesses relative, d'entrainement et absolue.
   - Déterminer les accélérations relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue.

- La vitesse relative $\vec{\mathbf{V}}_r = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\Big| \mathrm{R}'\right) = A(1 + \omega t)e^{\omega t}\vec{i}'$
- La vitesse d'entrainement :
  $\vec{\mathbf{V}}_e = (\vec{\boldsymbol{V}}(O')|\mathrm{R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\boldsymbol{r}}'|\mathrm{R}') = 0 + \Omega\vec{k}'\wedge Ate^{\omega t}\vec{i}' = A\Omega te^{\omega t}\vec{j}'$
  Sachant que : $\vec{i}' = \cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}$, $\vec{j}' = -\sin\Omega t\vec{i} + \cos\Omega t\vec{j}$ et $\vec{k}' = \vec{k}$
  La vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$
  $\vec{\mathbf{V}}_a = [-\Omega t\sin\Omega t + (1 + \omega t)\cos\Omega t]Ae^{\omega t}\vec{i} + [\Omega t\cos\Omega t + (1 + \omega t)\sin\Omega t]Ae^{\omega t}\vec{j}$
- L'accélération relative $\vec{\mathbf{a}}_r = (\frac{d\vec{\mathbf{V}}_r}{dt}\Big| \mathrm{R}') = A\omega[(2 + \omega t)]e^{\omega t}\vec{i}'$
  $\vec{\mathbf{a}}_r = A\omega[(2 + \omega t)]e^{\omega t}[\cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}\,]$
  L'accélération d'entrainement :
  $\vec{\mathbf{a}}_e = (\vec{\boldsymbol{a}}(O')|\mathrm{R}) + (\dot{\vec{\boldsymbol{\Omega}}}\wedge\vec{\boldsymbol{r}}'|\mathrm{R}') + \vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\vec{\boldsymbol{r}}'|\mathrm{R}')$
  $\vec{\mathbf{a}}_e = 0 + 0 + \Omega\vec{k}'\wedge(\Omega\vec{k}'\wedge Ate^{\omega t}\vec{i}' = -A\Omega^2te^{\omega t}\vec{i}' = -A\Omega^2te^{\omega t}[\cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}]$
  L'accélération de Coriolis :
  $\vec{\mathbf{a}}_c = 2\vec{\boldsymbol{\Omega}}\wedge(\vec{\mathbf{V}}_r|\mathrm{R}') = 2\Omega\vec{k}'\wedge A(1 + \omega t)e^{\omega t}\vec{i}'$
  $\vec{\mathbf{a}}_c = 2\Omega A(1 + \omega t)e^{\omega t}\vec{j}' = 2\Omega Ae^{\omega t}(1 + \omega t)[-\sin\Omega t\vec{i} + \cos\Omega t\vec{j}]$
  L'accélération absolue $\vec{\mathbf{a}}_a = \vec{\mathbf{a}}_e + \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_c$
  $\vec{\mathbf{a}}_a = Ae^{\omega t}\{[(\omega^2 - \Omega^2)t + 2\omega)][\cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}] + [2\Omega(1 + \omega t)][-\sin\Omega t\vec{i} + \cos\Omega t\vec{j}]\}$
  On peut vérifier que $\vec{\mathbf{a}}_a = \frac{d\vec{\mathbf{V}}_a}{dt}$
  avec $\vec{\mathbf{V}}_a = (\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t)}{dt}\Big| \mathrm{R})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(t) = Ate^{\omega t}[\cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}]$

6. Une bille tombe sans vitesse initiale d'un immeuble de hauteur H. La chute de celle-ci est. libre selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération g.
   - Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?
   - Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\boldsymbol{a}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?
   - La distance parcourue par la bille dans sa chute libre après un temps t est :
     $z = H - \frac{1}{2} g t^2$
     La distance parcourue par la voiture avec une vitesse constante au cours de la même durée t est $x = vt$
     Par élimination du temps, on obtient l'équation de la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile lié à la voiture:
     $z = H - \frac{1}{2v^2} g x^2$; la trajectoire est donc une parabole.
   - La distance parcourue par la bille dans sa chute libre après un temps t est : $z = H - \frac{1}{2} g t^2$
     La distance parcourue par la voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\boldsymbol{a}$ au cours de la même durée t est :
     $x = \frac{1}{2} \boldsymbol{a} t^2$
     Par élimination du temps, on obtient l'équation de la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile lié à la voiture :
     $z = H - \frac{g}{\boldsymbol{a}} x$; la trajectoire est une droite.

7. Deux mobiles A et B se déplacent dans deux voies rectilignes avec les vitesses respectives : $V_A = 20$ m/s et $V_B = 30$m/s.
   - Déterminer le vecteur vitesse relative de A par rapport à B quand les deux mobiles roulent dans la même direction.
   - Déterminer le vecteur vitesse relative de A par rapport à B quand les deux mobiles roulent en sens inverses.
   - Déterminer le vecteur vitesse relative de A par rapport à B quand les deux mobiles roulent maintenant sur deux voies qui se coupent formant entre elles un angle de 60°.
   - La vitesse relative de A par rapport à B : $\vec{\mathbf{V}}_{A/B} = \vec{\mathbf{V}}_A - \vec{\mathbf{V}}_B$
     Soit $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ deux vecteurs unitaires parallèles aux deux voies rectilignes.
   - Les deux mobiles roulent dans la même direction : $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}$
     Donc, $\vec{\mathbf{V}}_{A/B} = 20\vec{\mathbf{u}} - 30\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{-10}\vec{\mathbf{u}}$
   - Les deux mobiles roulent en sens inverses : $\vec{\mathbf{u}} = -\vec{\mathbf{v}}$
     Donc, $\vec{\mathbf{V}}_{A/B} = 20\vec{\mathbf{u}} + 30\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{50}\vec{\mathbf{u}}$
   - Les deux mobiles roulent sur deux voies qui se coupent formant entre elles un angle de 60° :



$$\vec{\mathbf{V}}_{A/B} = 20\vec{\mathbf{u}} - 30\vec{\mathbf{v}} \quad \rightarrow \quad \left|\vec{\mathbf{V}}_{A/B}\right| = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2x20x30cos60} = 10\sqrt{7}\, m/s$$

La direction du vecteur vitesse relative $\vec{\mathbf{V}}_{A/B}$ est défini par l'angle α de telle manière que :

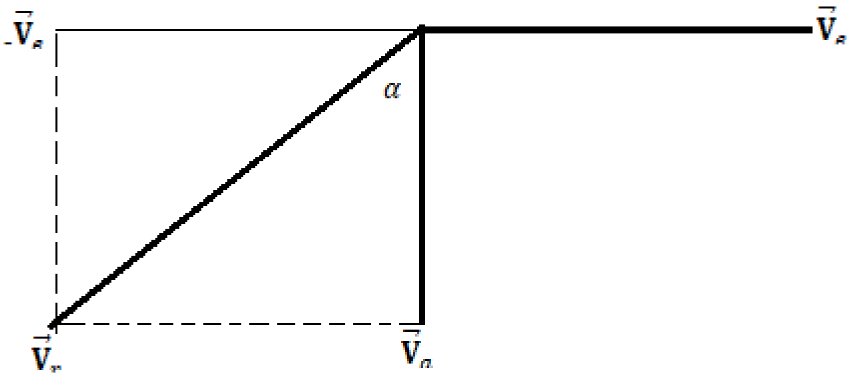
$$\frac{|\vec{\mathbf{V}}_{A/B}|}{sin60} = \frac{|\vec{\mathbf{V}}_B|}{sin\alpha} \quad \rightarrow \quad sin\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{V}}_B|}{|\vec{\mathbf{V}}_{A/B}|} sin60 = \frac{3}{2\sqrt{7}} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)$$

$$\alpha \approx 79.11^0$$

8. Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de 30 m/s.
   - Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse constante de 40 m/s sur une voie horizontale.
   - La vitesse de la voiture par apport au sol représente la vitesse d'entrainement.
     La vitesse des flocons par apport au sol représente la vitesse absolue.
     La vitesse des flocons par apport à la voiture représente la vitesse relative.

$$\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$$

$$\rightarrow \quad \vec{\mathbf{V}}_r = \vec{\mathbf{V}}_a - \vec{\mathbf{V}}_e$$



La voie est horizontale :

$$\vec{\mathbf{V}}_a = -30\vec{\jmath} \quad et \quad \vec{\mathbf{V}}_e = 40\vec{\imath}$$

$$\rightarrow \quad \vec{\mathbf{V}}_r = -40\vec{\imath} - 30\vec{\jmath}$$

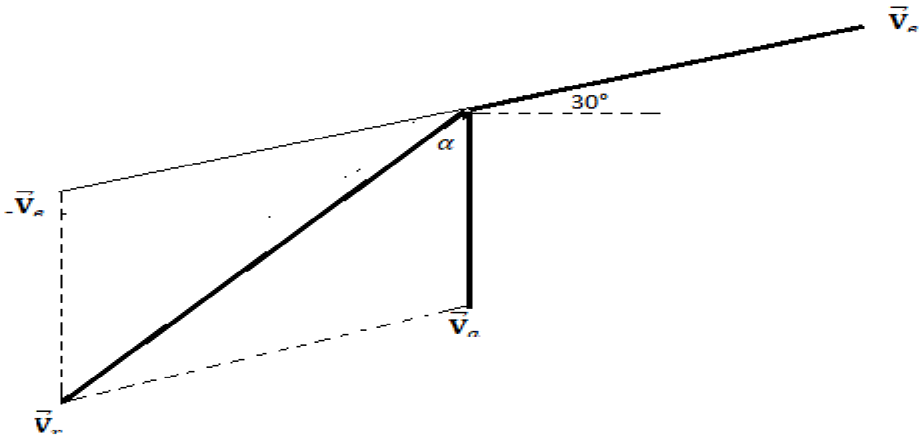
$$\left|\vec{\mathbf{V}}_r\right| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\, m/s$$

Les flocons tombent sous un angle : $\alpha = arctan\frac{V_e}{V_a} = arctan\frac{4}{3} \approx 53.13^0$

   - Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse constante de 40 m/s sur une voie avec une inclinaison ascendante d'un angle de 30° :

- $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$

  $\rightarrow \ \vec{\mathbf{V}}_r \ = \vec{\mathbf{V}}_a - \vec{\mathbf{V}}_e$



$\vec{\mathbf{V}}_a = -30\vec{j} \ \ et \ \ \vec{\mathbf{V}}_e = 40cos30\vec{\imath} + 40sin30\vec{j}$

$\rightarrow \ \ \vec{\mathbf{V}}_r \ = -20\sqrt{3}\vec{\imath} \ - 50\vec{j}$

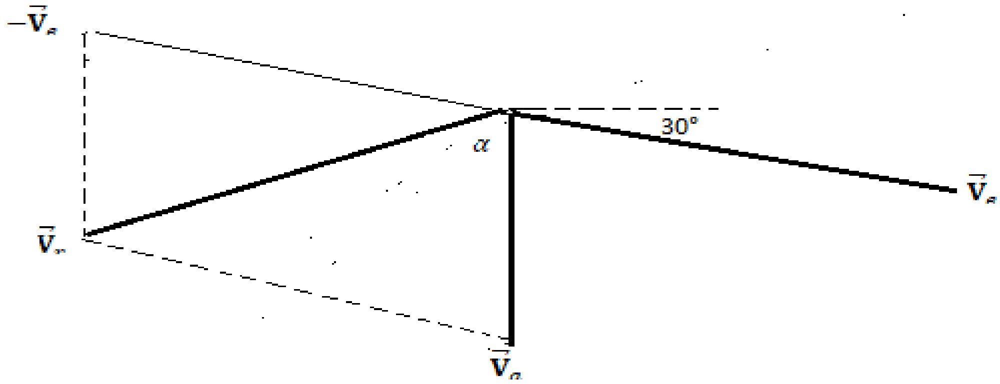
$|\vec{\mathbf{V}}_r| = 10\sqrt{37}\, m/s$

Les flocons tombent sous un angle : $\alpha = arctan\frac{2\sqrt{3}}{5} \approx \ 34.72^0$

- Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse constante de 40 m/s sur une voie avec une inclinaison descendante d'un angle de 30° :

- $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$

  $\rightarrow \ \vec{\mathbf{V}}_r \ = \vec{\mathbf{V}}_a - \vec{\mathbf{V}}_e$



$\vec{\mathbf{V}}_a = -30\vec{j} \ \ et \ \ \vec{\mathbf{V}}_e = -40cos30\vec{\imath} - 40sin30\vec{j}$

$\rightarrow \ \ \vec{\mathbf{V}}_r \ = -20\sqrt{3}\vec{\imath} \ - 10\vec{j}$

$|\vec{\mathbf{V}}_r| = 10\sqrt{13}\, m/s$

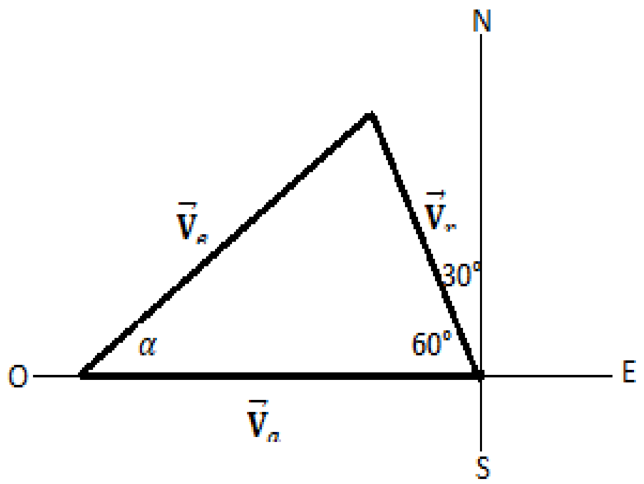
Les flocons tombent sous un angle : $\alpha = arctan2\sqrt{3} \approx \ 73.90^0$

9. Le mouvement d'un bateau s'effectue dans la direction Ouest par rapport à la terre à une vitesse de 10 km/hr. Son mouvement s'effectue dans la direction du Nord 30° Ouest à une vitesse de 8 km/hr par rapport à l'eau.
   - Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport à la terre.

- $\vec{\mathbf{V}}_a$ est la vitesse absolue du bateau par rapport à la terre, $\vec{\mathbf{V}}_e$ est la vitesse d'entrainement du courant d'eau par rapport à la terre, et $\vec{\mathbf{V}}_r$ est la vitesse du bateau par rapport à l'eau :

  $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_e + \vec{\mathbf{V}}_r$

  $\rightarrow \ \vec{\mathbf{V}}_e \ = \vec{\mathbf{V}}_a - \vec{\mathbf{V}}_r$



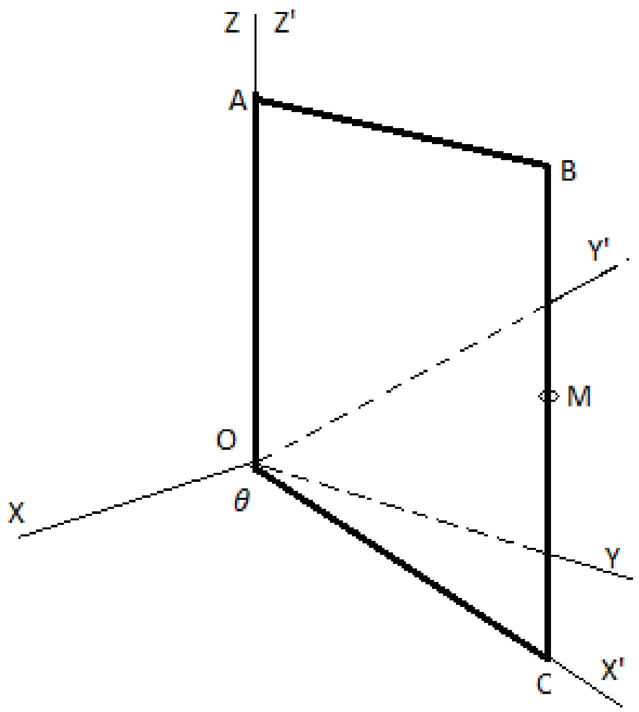
$\rightarrow \quad |\vec{\mathbf{V}}_e| = \sqrt{|\vec{\mathbf{V}}_a|^2 + |\vec{\mathbf{V}}_r|^2 - 2|\vec{\mathbf{V}}_a||\vec{\mathbf{V}}_r|cos60} = \sqrt{84}$ km/hr

La direction du vecteur vitesse d'entrainement $\vec{\mathbf{V}}_e$ est défini par l'angle α de telle manière que :

$\frac{|\vec{\mathbf{V}}_e|}{sin60} = \frac{|\vec{\mathbf{V}}_r|}{sin\alpha} \quad \rightarrow \quad sin\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{V}}_r|}{|\vec{\mathbf{V}}_e|} sin60 = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \approx 49.11^0$

10. Un carrée OABC de coté L tourne autour de son coté OA à la vitesse angulaire ω constante. Un point matériel M se déplace suivant BC à partir de B avec une accélération constante **a** et une vitesse initiale V_o au point B.



- Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue du point matériel M.
- Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entraînement du point matériel M.
- En déduire sa vitesse absolue.
- Déterminer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement, l'accélération de Coriolis.
- En déduire son accélération absolue.

- Le vecteur de position par rapport au repère absolu :

  $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} + \overrightarrow{\mathbf{CM}} = L\vec{\boldsymbol{\imath}}' + (L - x)\vec{\mathbf{k}}$ avec $x = \frac{1}{2}At^2 + V_0 t$

  En utilisant : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{O'M}}$, $\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{k}}'$, $\vec{\omega} = \omega\vec{\mathbf{k}}$, $\frac{d\vec{\boldsymbol{\imath}}'}{dt} = \omega\vec{\boldsymbol{\jmath}}'$ et $\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = -\omega\vec{\boldsymbol{\imath}}'$

- La vitesse absolue $\vec{\mathbf{V}}_a = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{dt} = L\frac{d\vec{\imath}'}{dt} - (At + V_0)\vec{\mathbf{k}} = L\omega\vec{\boldsymbol{\jmath}}' - (At + V_0)\vec{\mathbf{k}}$

  $\vec{\mathbf{V}}_a = L\omega\vec{\boldsymbol{\jmath}}' - (At + V_0)\vec{\mathbf{k}}$

- L'accélération absolue $\vec{\mathbf{a}}_a = \frac{d\vec{\mathbf{V}}_a}{dt}$

  $\vec{\mathbf{a}}_a = -L\omega^2\vec{\boldsymbol{\imath}}' - A\vec{\mathbf{k}}$

- La vitesse relative $\vec{\mathbf{V}}_r = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{O'M}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{dt}$

  $\vec{\mathbf{V}}_r = -(At + V_0)\vec{\mathbf{k}}$

- La vitesse relative d'entraînement $\vec{\mathbf{V}}_e = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{O'O}}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\mathbf{O'M}}$

  $\vec{\mathbf{V}}_e = L\omega\vec{\boldsymbol{\jmath}}'$

- La vitesse absolue :

  $\vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_r + \vec{\mathbf{V}}_e = L\omega\vec{\boldsymbol{\jmath}}' - (At + V_0)\vec{\mathbf{k}}$ **.** On retrouve le même résultat.

- L'accélération relative :

  $\vec{\mathbf{a}}_r = \frac{d\vec{\mathbf{V}}_r}{dt} = -A\vec{\mathbf{k}}$

- L'accélération d'entraînement :

  $\vec{\mathbf{a}}_e = \frac{d^2\overrightarrow{\mathbf{O'O}}}{dt^2} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\mathbf{O'M}}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{\mathbf{O'M}} = \omega\vec{\mathbf{k}}\wedge L\omega\vec{\boldsymbol{\jmath}}'$

  $\vec{\mathbf{a}}_e = -L\omega^2\vec{\boldsymbol{\imath}}'$

- L'accélération de Coriolis :

  $\vec{\mathbf{a}}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{\mathbf{V}}_r = 0$

- L'accélération absolue :

  $\vec{\mathbf{a}}_a = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_e + \vec{\mathbf{a}}_c$

  $\vec{\mathbf{a}}_a = -L\omega^2\vec{\boldsymbol{\imath}}' - A\vec{\mathbf{k}}$ **.** On retrouve le même résultat.

Chapitre 4

Dynamique du point matériel

La dynamique est l'analyse de la relation entre les forces appliquées sur un corps et les changements du mouvement de ce corps. Elle explique la relation qui existe entre les forces et les autres grandeurs cinématiques.

4.1 Repère galiléen:

Un repère galiléen est un repère constitué d'un système libre soi au repos ou en mouvement rectiligne uniforme. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

4.2 La Force:

Une force est définie par une droite d'action, un sens, un point d'application et une intensité.
L'unité de la force est : Newton (N) ($kgms^{-2}$).
Il existe deux types de forces :

- Forces d'interaction à distance comme :
  La force de gravitation : $F = G\frac{mM}{r^2}$
  La force électrique : $\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}$, $F = k\frac{qQ}{r^2}$
  La force magnétique : $\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{v}}\wedge\vec{\boldsymbol{B}}$, $F = \mu_0\frac{I_1 I_2 l}{2\pi r}$
- Forces de contact comme :
  La force de frottement : $F = \mu N$
  La forces élastique : $F = K(L - L_0)$

4.3 La quantité de mouvement:

La quantité de mouvement d'une particule est une grandeur vectorielle définit par le produit de sa masse par son vecteur vitesse instantanée : $\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}$
La quantité de mouvement d'un système isolé est conservée.
Une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement constante.

4.4 La loi fondamentale de la dynamique:

La loi fondamentale de la dynamique est donnée par les lois de Newton :

- Principe d'inertie : Dans un repère R Galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé, est soit au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.
- Principe fondamentale de la dynamique : Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point M de masse **m** et son accélération $\vec{\mathbf{a}}$ sont liées par la loi : $\mathbf{m}\vec{\mathbf{a}} = \sum_i \vec{F_i}$
- Principe d'action et de réaction : La force exercée par un premier corps sur un deuxième corps est égale et opposée à la force exercée par le deuxième sur le premier :
  $\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}$

4.5 Loi fondamentale généralisée de la dynamique:

La variation de la quantité de mouvement d'un corps par rapport au temps est égale à la résultante des forces extérieures appliquées :

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \sum_i \vec{F_i}$$

4.6 Le moment d'une force:

Le moment d'une force appliquée à un point matériel situé au point M, par rapport au point fixe O est défini par :

$$\vec{\mathbf{M}}_o = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$$

4.7 Le moment cinétique:

Le moment cinétique d'un point matériel de masse **m** et de vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$, par rapport au point O est défini par :

$$\vec{\mathbf{L}}_o = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathbf{p}}$$

4.8 Théorème du moment cinétique:

La dérivée du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point fixe O dans un référentiel galiléen est égale à la somme des moments par rapport au même point O des forces extérieures appliquées au point M :

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_o}{dt} = \sum_i \vec{\mathbf{M}}_{i/o}$$

Exercices :

1. Un corps (M) de masse m se déplace suivant le vecteur position :

$\vec{\boldsymbol{r}} = (t^2 + 3t)\vec{\imath} - t^3\vec{\jmath} + (3t - 1)\vec{k}$

- Trouver la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ agissant sur le corps.
- Le moment $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ de $\vec{\boldsymbol{F}}$ par rapport à l'origine O.
- La quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{p}}$ du corps et son moment cinétique $\vec{\boldsymbol{L}}$ par rapport à l'origine.
- Vérifier que : $\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt}$ $et\ \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}$

- D'après le principe fondamental de la dynamique :

  $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = m(2\vec{\imath} - 6t\vec{\jmath})$

- Le moment $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ de $\vec{\boldsymbol{F}}$ par rapport à l'origine O est égal :

  $$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ (t^2 + 3t) & -t^3 & (3t - 1) \\ 2m & -6mt & 0 \end{vmatrix}$$

  $\vec{\boldsymbol{\tau}} = 6mt(3t - 1)\vec{\imath} + 2m(3t - 1)\vec{\jmath} - 2mt^2(2t + 9)\vec{k}$

- La quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{p}}$ est égale :

  $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = m[(2t + 3)\vec{\imath} - 3t^2\vec{\jmath} + 3\vec{k}]$

- Le moment cinétique $\vec{\boldsymbol{L}}$ par rapport à l'origine O est égal :

  $$\vec{\mathbf{L}}_o = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathbf{p}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ (t^2 + 3t) & -t^3 & (3t - 1) \\ m(2t + 3) & -3mt^2 & 3m \end{vmatrix}$$

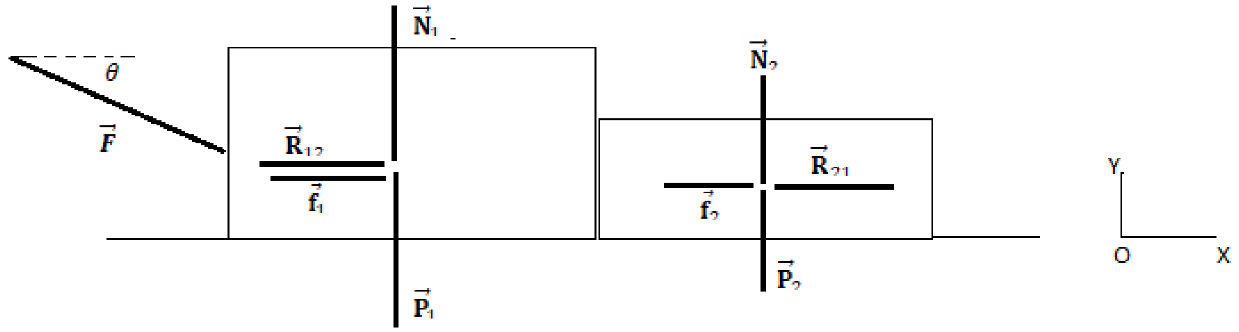
  $\vec{\mathbf{L}}_o = 3mt^2(2t - 3)\vec{\imath} + m(3t^2 - 2t - 3)\vec{\jmath} - 2m(2t + 9)\vec{k}$

- On peut vérifier que :

  $\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} = m[2\vec{\imath} - 6t\vec{\jmath}]$ est égale à la force $\vec{\boldsymbol{F}}$.

  $\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = 6mt(3t - 1)\vec{\imath} + 2m(3t - 1)\vec{\jmath} - 2mt^2(2t + 9)\vec{k}$ est égale au moment $\vec{\boldsymbol{\tau}}$.

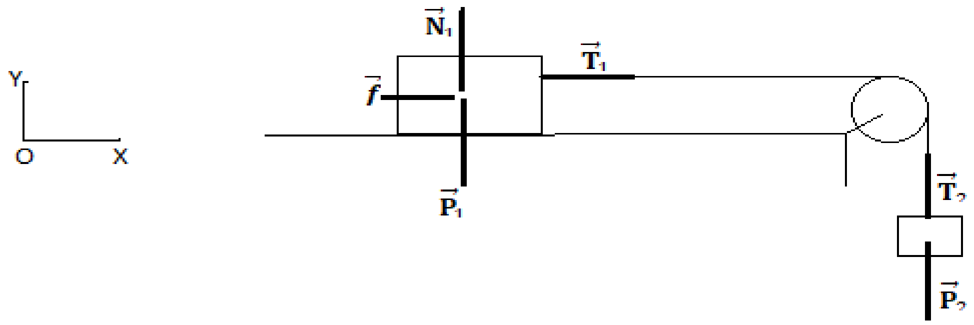
2. Deux corps (M1) de mass $\mathbf{m_1}$ et (M2) de masse $\mathbf{m_2}$ sont placées en contact sur une table horizontale. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre les corps (M1), (M2) et la surface de contact sont respectivement μ_s et μ_d . Une force $\vec{\boldsymbol{F}}$ faisant un angle θ avec l'horizontal et de module constant, est appliquée sur le corps (M1) :



- Déterminer le module maximum de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ nécessaire pour faire bouger les deux corps.
- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour chaque masse dans le cas de mouvement.
- En déduire l'accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ du système.
- Déterminer la force de contact entre les deux corps.

- La mass (M1) étant en état statique est soumise aux forces :
  $\vec{F}$, son poids $\vec{\mathbf{P}}_1$, la réaction de la table $\vec{\mathbf{N}}_1$, la réaction de la mass (M2) $\vec{\mathbf{R}}_{12}$ et la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_{s1}$:
  $\vec{F} + \vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_{12} + \vec{\mathbf{f}}_{s1} = 0$
  La mass (M2) étant aussi en état statique est soumise aux forces :
  son poids $\vec{\mathbf{P}}_2$, la réaction de la table $\vec{\mathbf{N}}_2$, la réaction de la mass (M1) $\vec{\mathbf{R}}_{21}$ et la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_{s2}$:
  $\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{R}}_{21} + \vec{\mathbf{f}}_{s2} = 0$
  En projetant ces deux équations sur l'axe horizontal OX et vertical OY :
  OX : $Fcos\theta - R_{12} - f_{s1} = 0$
  $R_{21} - f_{s2} = 0$
  OY : $-Fsin\theta - P_1 + N_1 = 0$
  $-P_2 + N_2 = 0$
  Principe d'action et de réaction : $R_{12} = R_{21}$
  $f_{s1} = \mu_s N_1 = \mu_s(Fsin\theta + P_1) = \mu_s(Fsin\theta + m_1 g)$
  et $f_{s2} = \mu_s N_2 = \mu_s P_2 = \mu_s m_2 g$
  $Fcos\theta - \mu_s(Fsin\theta + m_1 g) - \mu_s m_2 g = 0$
  Donc : $F = \frac{\mu_s}{cos\theta - \mu_s sin\theta}(m_1 + m_2)g$
- la relation fondamentale de la dynamique pour chaque masse dans le cas de mouvement :
  La mass (M1) : $\vec{F} + \vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_{12} + \vec{\mathbf{f}}_{d1} = m_1\vec{\mathbf{a}}_1$
  La mass (M2) : $\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{R}}_{21} + \vec{\mathbf{f}}_{d2} = m_2\vec{\mathbf{a}}_2$
  Où on a remplacé les forces de frottements statiques $\vec{\mathbf{f}}_s$ par des forces de frottement dynamiques $\vec{\mathbf{f}}_d$.
  En projetant ces deux équations sur l'axe horizontal OX et vertical OY :
  OX : $Fcos\theta - R_{12} - f_{d1} = m_1 a_1$
  $R_{21} - f_{d2} = m_2 a_2$
  OY : $-Fsin\theta - P_1 + N_1 = 0$
  $-P_2 + N_2 = 0$
  $f_{d1} = \mu_d N_1 = \mu_d(Fsin\theta + P_1) = \mu_d(Fsin\theta + m_1 g)$
  et $f_{d2} = \mu_d N_2 = \mu_d P_2 = \mu_d m_2 g$
  Principe d'action et de réaction : $R_{12} = R_{21}$
  Le système de mass (M1) et (M2) se déplace avec la même accélération : $a_1 = a_2 = a$
  $Fcos\theta - \mu_d(Fsin\theta + m_1 g) - \mu_d m_2 g = (m_1 + m_2)a$
  Donc, l'accélération des deux masses est :
  $$a = \frac{F(cos\theta - \mu_d sin\theta) - \mu_d(m_1 + m_2)g}{(m_1 + m_2)}$$
- La force de contact entre les deux corps $R_{12} = R_{21} = R$
  $R = m_2 a + f_{d2} = m_2(a + \mu_d g)$
  $$R = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}(cos\theta - \mu_d sin\theta)F$$

3. Deux corps (M1) de mass $\mathbf{m_1}$ et (M2) de masse $\mathbf{m_2}$ sont reliés par un fil inextensible passant par une poulie de masse négligeable (voir figure). Les coefficients de frottement statique et dynamique entre le corps (M1) et la surface de contact sont μ_s et μ_d respectivement.



- Etudier la condition d'équilibre statique des deux corps (M1) et (M2).
- Etudier le mouvement du système.
- Calculer la tension du fil reliant les deux corps.

- La mass (M1) étant en état statique est soumise aux forces :

  son poids $\vec{\mathbf{P}}_1$, la réaction de la surface de contact $\vec{\mathbf{N}}_1$, la tension du fil $\vec{\mathbf{T}}_1$ et la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_s$:

  $\vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{f}}_s = 0$

  La mass (M2) étant aussi en état statique est soumise aux forces :

  son poids $\vec{\mathbf{P}}_2$ et la tension du fil $\vec{\mathbf{T}}_2$:

  $\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{T}}_2 = 0$

  En projetant ces deux équations sur l'axe horizontal OX et vertical OY :

  OX : $T_1 - f_s = 0$

  OY : $-P_1 + N_1 = 0$

  $-P_2 + T_2 = 0$

  Le fil est inextensible et la poulie est de masse négligeable $\rightarrow$ $T_1 = T_2 = T$

  $f_s = \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g$

  $\rightarrow$ $m_2 g - f_s = 0$ $\rightarrow m_2 - \mu_s m_1 = 0$

  Donc, la condition d'équilibre statique des deux corps (M1) et (M2) est :

  $m_2 = \mu_s m_1$

- le principe fondamental de la dynamique pour chaque masse dans le cas de mouvement :

  La mass (M1) : $\vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{f}}_d = m_1\vec{\mathbf{a}}_1$

  La mass (M2) : $\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{T}}_2 = m_2\vec{\mathbf{a}}_2$

  Où on a remplacé la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_s$ par la force de frottement dynamique $\vec{\mathbf{f}}_d$ pour la mass (M1).

  En projetant ces deux équations sur l'axe horizontal OX et vertical OY :

  OX : $T_1 - f_d = m_1 a_1$

  OY : $-m_1 g + N_1 = 0$

  $-m_2 g + T_2 = -m_2 a_2$

  Le fil est inextensible et la poulie est de masse négligeable $\rightarrow$ $T_1 = T_2 = T$ et $a_1 = a_2 = a$

  $f_d = \mu_d N_1 = \mu_d m_1 g$

  $(m_2 - \mu_d m_1)g = (m_1 + m_2)a$

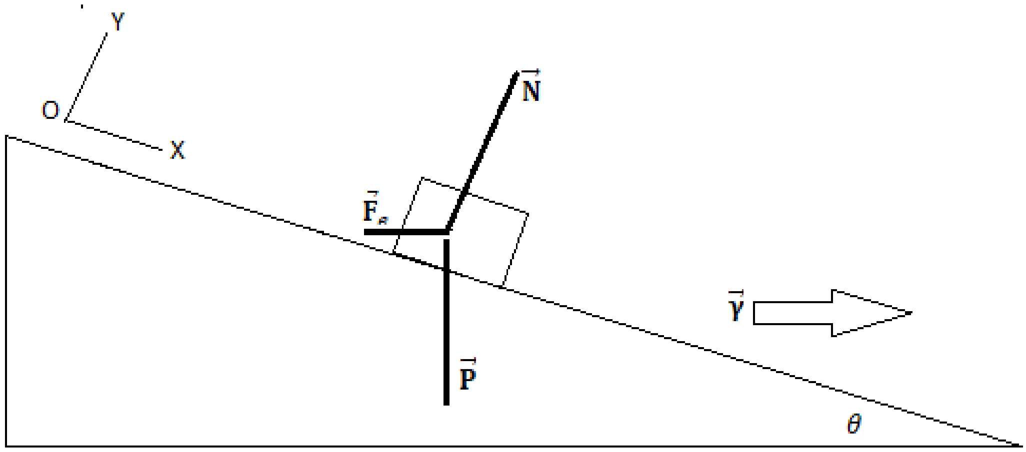
  Donc l'accélération du système est :

  $$a = \frac{(m_2 - \mu_d m_1)}{(m_1 + m_2)} g$$

- La tension du fil T est :

  $$T = m_2(g - a) = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu_d)}{(m_1 + m_2)} g$$

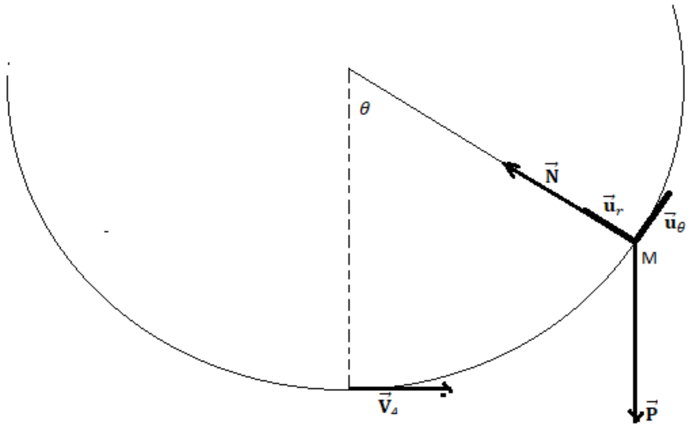
4. Un point matériel (M) de mass **m** se déplace sans frottement sur la surface inclinée d'un block (B). Ce dernier se déplace sur l'horizontale avec une accélération constante $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$. Sachant que la vitesse initiale du point matériel (M) est nulle par apport au block (B) :



- ○ Etudier le mouvement de (M) dans le repère mobile **R'**.
- ○ Déterminer la réaction du block (B) sur la mass m.
- ○ Déduire l'accélération $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ pour que le point matériel (M) se soulève du plan incliné.
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le repère mobile **R'** :
  $\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{F}}_e + \vec{\mathbf{F}}_c = m\vec{\mathbf{a}}_r$
  où $\vec{\mathbf{F}}_e = -m\vec{\boldsymbol{\gamma}}$ force d'inertie d'entrainement et $\vec{\mathbf{F}}_c = 0$ force d'inertie de Coriolis.
  En projetant sur les axes OX et OY :
  $mgsin\theta - m\gamma cos\theta = ma_r \quad \rightarrow \quad a_r = gsin\theta - \gamma cos\theta$
  $-mgcos\theta + N - m\gamma sin\theta = 0$
- La réaction du block (B) sur la mass m : $N = m(gcos\theta + \gamma sin\theta)$
- Le point matériel (M) se soulève du plan incliné $\rightarrow \quad N = 0$
  $gcos\theta + \gamma sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = -gcotan\theta$
  Le block (B) doit se déplacer avec une accélération orientée vers la gauche.

5. Un point matériel (M) de mass m se déplace sans frottement à l'intérieur d'une surface circulaire de rayon R et de centre O. La masse m est lancée de A avec une vitesse initiale v_A.
En utilisant le Principe fondamentale de la dynamique :
- ○ Déterminer l'expression de la vitesse de la masse m.
- ○ Déterminer à quel angle la vitesse s'annule.
- ○ En déduire l'expression de la réaction $\vec{N}$ de la surface sur le point matériel (M).

En appliquant le théorème du moment cinétique :
- ○ Trouver une équation différentielle régissant θ(t).



- En appliquant le principe fondamental de la dynamique :
  $\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = m\vec{\mathbf{a}}$
  En utilisant les coordonnées polaires :
  $m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\mathbf{u}}_\theta] = (mgcos\theta - N)\vec{\mathbf{u}}_r - mgsin\theta\vec{\mathbf{u}}_\theta$
  Puisque $r = R \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$
  $\rightarrow \quad \begin{cases} mR\dot{\theta}^2 = -mgcos\theta + N \\ R\ddot{\theta} = -gsin\theta \end{cases}$
  La vitesse $v = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad vdv = -gRsin\theta d\theta$
  $\int_{c_A}^{v} vdv = \int_0^{\theta} -gRsin\theta d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(v^2 - {v_A}^2) = gR(cos\theta - 1)$
  L'expression de la vitesse de la masse m est :
  $v = \sqrt{{v_A}^2 - 2gR(1 - cos\theta)}$
- L'objet s'arrête : $v = 0 \quad \rightarrow \quad cos\theta = 1 - \frac{{v_A}^2}{2gR}$
  $\theta = arcos(1 - \frac{{v_A}^2}{2gR})$
- La réaction $\vec{\boldsymbol{N}}$ de la surface sur le point matériel (M) :
  $N = mR\dot{\theta}^2 + mgcos\theta = m\frac{v^2}{R} + mgcos\theta$
  $N = m\frac{{v_A}^2 - 2gR(1 - cos\theta)}{R} + mgcos\theta = m\frac{{v_A}^2 - gR(2 - 3cos\theta)}{R}$
- Le théorème du moment cinétique : $\vec{\mathbf{L}}_o = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{\mathrm{v}}$
  $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -R\vec{\mathbf{u}}_r$ et $\vec{\mathrm{v}} = v\vec{\mathbf{u}}_\theta$
  Donc, $\vec{\mathbf{L}}_o = -mRv\vec{\mathbf{k}}$
  Le moment des forces : $\vec{\mathbf{M}}_o = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$
  $\vec{\mathbf{M}}_o = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge (\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}}) = -R\vec{\mathbf{u}}_r \wedge (mgcos\theta - N)\vec{\mathbf{u}}_r - mgsin\theta\vec{\mathbf{u}}_\theta = mgRsin\theta\vec{\mathbf{k}}$
  $\frac{d\vec{\mathbf{L}}_o}{dt} = \sum_i \vec{\mathbf{M}}_{i/o} \quad \rightarrow -mR\frac{dv}{dt}\vec{\mathbf{k}} = mgRsin\theta\vec{\mathbf{k}} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -gsin\theta$
  On retrouve le même résultat.

6. Une particule de charge q et de masse m, se déplaçant avec une vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ dans un champ électromagnétique : un champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}} = E\vec{\boldsymbol{\imath}}$ et un champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}} = B\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, subit une force de la forme : $\vec{\boldsymbol{F}} = q(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}})$. On suppose $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$ constants en module et direction. Initialement, la particule est à l'origine avec une vitesse initiale nulle.
   - Etudier le mouvement de la particule et trouver l'équation différentielle du mouvement.
   - En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour la particule :
     $m\vec{\boldsymbol{a}} = q(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}) \quad \rightarrow \quad m(\ddot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \ddot{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \ddot{z}\vec{\boldsymbol{k}}) = q[E\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\dot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{z}\vec{\boldsymbol{k}}) \wedge B\vec{\boldsymbol{\jmath}}]$
     $m(\ddot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \ddot{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \ddot{z}\vec{\boldsymbol{k}}) = q[E\vec{\boldsymbol{\imath}} + B(\dot{x}\vec{\boldsymbol{k}} - \dot{y}\vec{\boldsymbol{\imath}})] = q\{(E - B\dot{y})\vec{\boldsymbol{\imath}} + B\dot{x}\vec{\boldsymbol{k}}\}$
     $\begin{cases} m\ddot{x} = q(E - B\dot{z}) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qB\dot{x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{q}{m}(E - B\dot{z}) \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{q}{m}B\dot{x} \end{cases}$
     Puisque $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$
     $y(t) = 0$

$\dot{z} = \frac{q}{m}Bx \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{q}{m}\left(E - \frac{q}{m}B^2x\right) \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + (\frac{qB}{m})^2 x = \frac{q}{m}E$

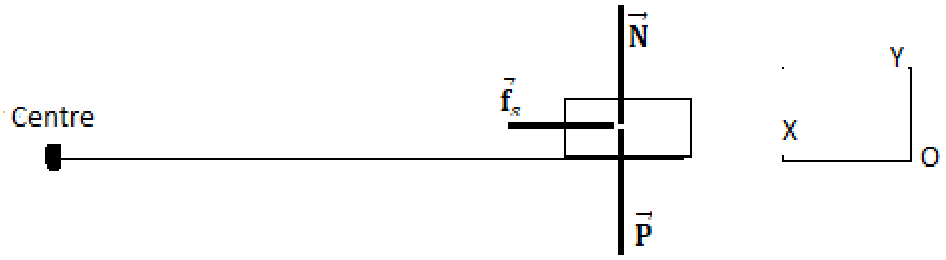
On peut montrer que les solutions des équations différentielles x(t) et z(t) sont :

$x(t) = -\frac{mE}{qB^2}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mE}{qB^2}$

$z(t) = -\frac{mE}{qB^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{E}{B}t$

7. Une automobile de mass 1000 kg entre dans un virage circulaire de rayon R = 100 m.
   - Si la chaussée n'est pas inclinée, quelle doit être le coefficient de frottement statique entre les pneus et la chaussée pour éviter le glissement de la voiture roulant avec une vitesse v = 25 m/s.
   - Quelle est l'inclinaison de la chaussée pour permettre une vitesse de 25 m/s par tous les temps (sans frottement).
   - Si la chaussée est surélevé de 30^0 par rapport à l'horizontale et le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0.1$, trouver la valeur de la vitesse maximale à laquelle l'automobile peut rouler sans risque.

- La chaussée étant horizontale, l'automobile est soumise aux forces : son poids $\vec{\mathbf{P}}$, la réaction de la surface $\vec{\mathbf{N}}$ et la force de frottement statique sur les pneus $\vec{\mathbf{f}}_s$:



En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{f}}_s = m\vec{\mathbf{a}}$

Le mouvement étant uniforme et circulaire, l'accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est orientée vers le centre du virage avec une magnitude $a = \frac{v^2}{R}$

En projetant l'équation sur l'axe radial OX et vertical OY :

OX : $f_s = ma$

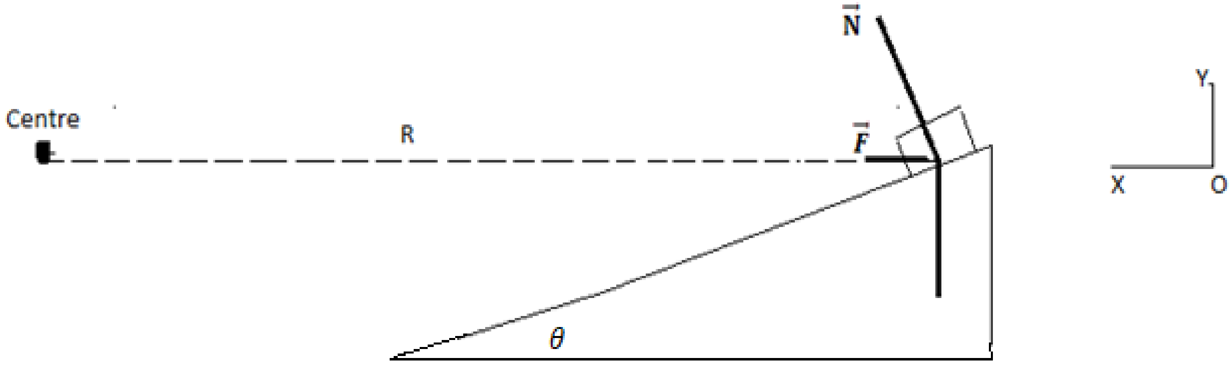
OY : $-P + N = 0$

$f_s = \mu_s N = \mu_s mg$

Donc $\mu_s mg = m\frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad \mu_s = \frac{v^2}{Rg}$

A.N : $\mu_s = 0.625$

- Dans l'absence de frottement, la chaussée est inclinée par un angle θ :



L'automobile est soumise aux forces de son poids $\vec{\mathbf{P}}$ et la réaction de la surface de la chaussée $\vec{\mathbf{N}}$:

En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = m\vec{\mathbf{a}}$

Le mouvement étant uniforme et circulaire, l'accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est orientée vers le centre du virage avec un module $a = \frac{v^2}{R}$

En projetant l'équation sur l'axe horizontal et radial OX et vertical OY :

OX : $Nsin\theta = ma$

OY : $-P + Ncos\theta = 0$

$N = \frac{mg}{cos\theta} \quad \rightarrow \quad mgtan\theta = ma = m\frac{v^2}{R}$

$tan\theta = \frac{v^2}{Rg} \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{v^2}{Rg}\right)$

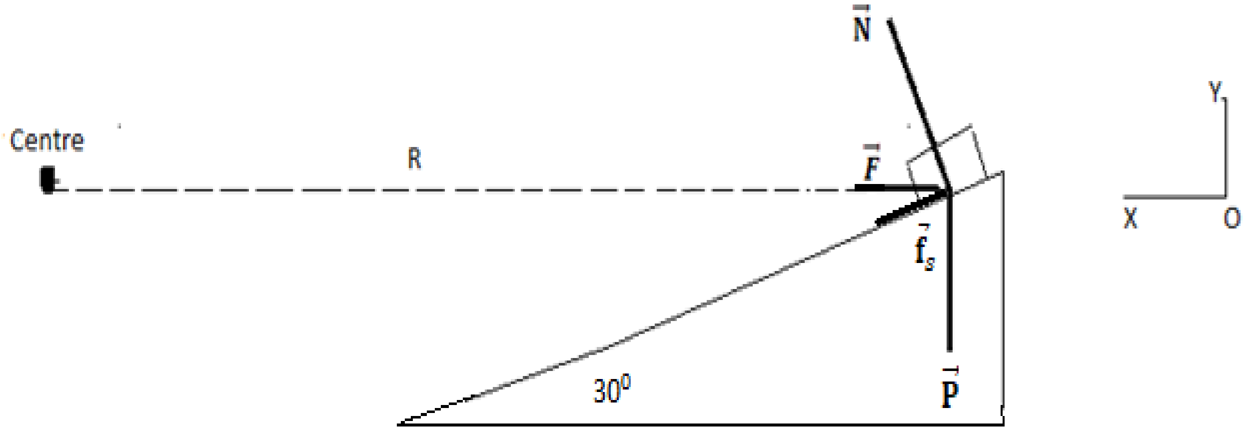
A.N : L'inclinaison $\theta \approx 33^0$

- La chaussée étant surélevé et les frottements statiques sur les pneus sont présents : L'automobile est soumise aux forces : son poids $\vec{\mathbf{P}}$, la réaction de la surface $\vec{\mathbf{N}}$ et la force de frottement statique sur les pneus $\vec{\mathbf{f}}_s$:

En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{f}}_s = m\vec{\mathbf{a}}$

Le mouvement étant uniforme et circulaire, l'accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est orientée vers le centre du virage avec un module $a = \frac{v^2}{R}$



En projetant l'équation sur l'axe radial OX et vertical OY :

OX : $Nsin\theta + f_s cos\theta = ma$

OY : $-P + Ncos\theta - f_s sin\theta = 0$

$f_s = \mu_s N$

$\rightarrow \quad N = \frac{mg}{cos\theta - \mu_s sin\theta}$

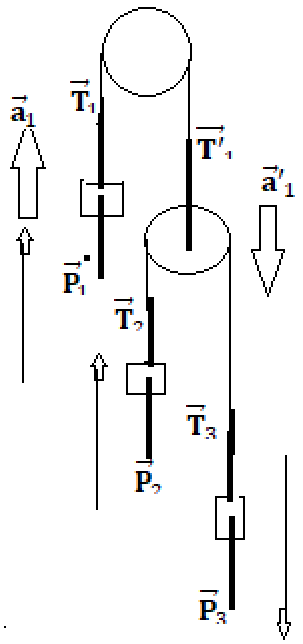
$\rightarrow \quad v^2 = \frac{sin\theta + \mu_s cos\theta}{cos\theta - \mu_s sin\theta} Rg$

Donc la vitesse maximale à laquelle l'automobile peut rouler sans risque est :

$$v = \sqrt{\frac{sin\theta + \mu_s cos\theta}{cos\theta - \mu_s sin\theta} Rg}$$

A.N : $v \approx 26.54\ m/s$

8. Trouver les accélérations des corps de la figure ci-dessous en négligeant les forces de frottement ainsi que les masses des poulies et celles des fils que nous considérons comme inextensibles.



- En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour les trois masses séparément :
  La masse M1 : $\vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 = m_1\vec{\mathbf{a}}_1$
  En projetant sur l'axe ascendant : $-m_1 g + T_1 = m_1 a_1$
  La masse M2 : $\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{T}}_2 = m_2\vec{\mathbf{a}}_2$
  L'accélération $\vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{a}}_{2r} + \vec{\mathbf{a}}_e$ où l'accélération d'entrainement $\vec{\mathbf{a}}_e = \vec{\mathbf{a}}'_1 = -\vec{\mathbf{a}}_1$
  En projetant sur l'axe ascendant : $-m_2 g + T_2 = m_2(a_{2r} - a_1)$
  La masse M3 : $\vec{\mathbf{P}}_3 + \vec{\mathbf{T}}_3 = m_3\vec{\mathbf{a}}_3$
  L'accélération $\vec{\mathbf{a}}_3 = \vec{\mathbf{a}}_{3r} + \vec{\mathbf{a}}_e$ où l'accélération d'entrainement $\vec{\mathbf{a}}_e = \vec{\mathbf{a}}'_1 = -\vec{\mathbf{a}}_1$
  En projetant sur l'axe descendant : $m_3 g - T_3 = m_3(a_{3r} + a_1)$
  Puisque les poulies sont de mass négligeable et les fils sont inextensibles :
  $\rightarrow\ a_{2r} = a_{3r} = a_r$, $T_1 = T'_1 = T_2 + T_3$ et $T_2 = T_3 = T$
  Les trois projections deviennent :

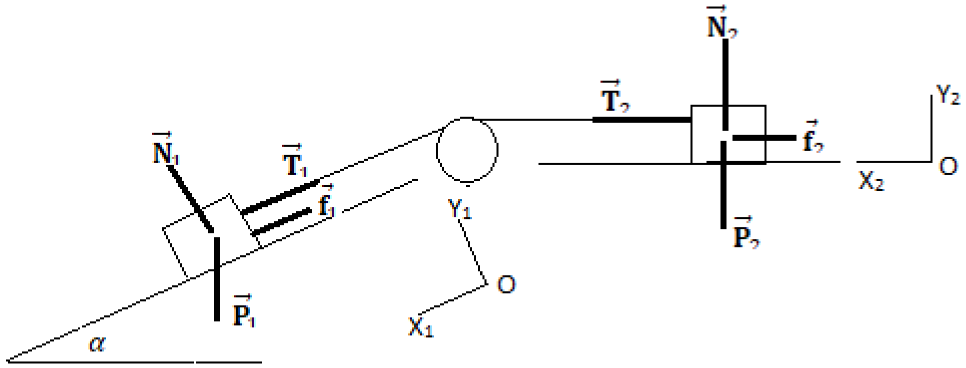
$$\begin{cases} -m_1 g + 2T = m_1 a_1 \\ -m_2 g + T = m_2(a_r - a_1) \\ m_3 g - T = m_3(a_r + a_1) \end{cases}$$

  C'est un système de trois équations avec trois inconnues $a_1, a_r\ et\ T$:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} \\ a_r = \dfrac{2(m_1m_3 - m_1m_2)}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} \\ T = \dfrac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} m_1 g \end{cases}$$

  On remarque que si $m_2 = m_3$; l'accélération relative a_r s'annule.
  On remarque aussi que si $m_1 = \frac{4m_2m_3}{m_2+m_3}$; l'accélération absolue a_1 s'annule.

9. Etudier le cas statique et le cas dynamique des deux corps de la figure ci-dessous en négligeant les masses des poulies et celles des fils que nous considérons comme inextensibles. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre les corps (M1) et (M2) et la surface de contact sont $\mu_s\ et\ \mu_d$ respectivement.



- Cas statique :

La mass (M1) étant en état statique est soumise aux forces : son poids $\vec{\mathbf{P}}_1$, la réaction de la surface $\vec{\mathbf{N}}_1$, la tension $\vec{\mathbf{T}}_1$ et la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_{1s}$:

$\vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{f}}_{1s} = 0$

En projetant sur les deux OX_1 et OY_1 axes :

OX_1 : $m_1 g sin\alpha - T_1 - f_{1s} = 0$

OY_1 : $-m_1 g cos\alpha + N_1 = 0 \;\; \rightarrow \;\; N_1 = m_1 g cos\alpha$

La mass (M2) étant en état statique est soumise aux forces : son poids $\vec{\mathbf{P}}_2$, la réaction de la surface $\vec{\mathbf{N}}_2$, la tension $\vec{\mathbf{T}}_2$ et la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_{2s}$:

$\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{T}}_2 + \vec{\mathbf{f}}_{2s} = 0$

En projetant sur les deux OX_2 et OY_2 axes :

OX_2 : $T_2 - f_{2s} = 0$

OY_2 : $-m_2 g + N_2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; N_2 = m_2 g$

sachant que $f_{1s} = \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g cos\alpha$, $f_{2s} = \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g$

et $T_1 = T_2 = T$ car les fils sont sans mass et inextensibles.

La condition d'équilibre statique est donc : $m_1(sin\alpha - \mu_s cos\alpha) = \mu_s m_2$

- Cas dynamique :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour les deux masses séparément :

La masse M1 : $\vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{f}}_{1d} = m_1 \vec{\mathbf{a}}_1$

Où on a remplacé les forces de frottements statiques $\vec{\mathbf{f}}_s$ par des forces de frottement dynamiques $\vec{\mathbf{f}}_d$.

En projetant sur les deux axes OX_1 et OY_1 :

OX_1 : $m_1 g sin\alpha - T_1 - f_{1d} = m_1 a_1$

OY_1 : $-m_1 g cos\alpha + N_1 = 0 \;\; \rightarrow \;\; N_1 = m_1 g cos\alpha$

La masse M2 : $\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{T}}_2 + \vec{\mathbf{f}}_{2d} = m_2 \vec{\mathbf{a}}_2$

Où on a remplacé les forces de frottements statiques $\vec{\mathbf{f}}_s$ par des forces de frottement dynamiques $\vec{\mathbf{f}}_d$.

En projetant sur les deux axes OX_2 et OY_2 :

OX_2 : $T_2 - f_{2d} = m_2 a_2$

OY_2 : $-m_2 g + N_2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; N_2 = m_2 g$

$f_{1d} = \mu_d N_1 = \mu_d m_1 g cos\alpha$ et $f_{2d} = \mu_d N_2 = \mu_d m_2 g$

Puisque les fils sont sans mass et inextensibles

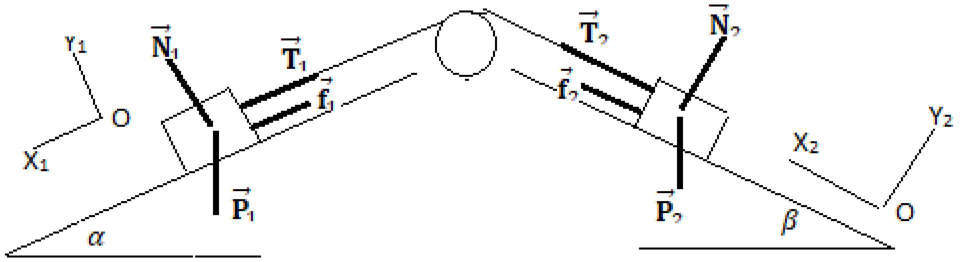
$\rightarrow \;\; a_1 = a_2 = a \;\; et \;\; T_1 = T_2 = T$

L'accélération du système est : $a = \frac{(sin\alpha - \mu_d cos\alpha) m_1 - \mu_d m_2}{m_1 + m_2} g$

La tension du fil est : $T = \frac{(sin\alpha - \mu_d cos\alpha + \mu_d) m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

10. Etudier le cas statique et le cas dynamique des deux corps de la figure ci-dessous en négligeant les masses des poulies et celles des fils que nous considérons comme inextensibles. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre les corps (M1) et (M2) et la surface de contact sont μ_s *et* μ_d respectivement.

- Cas statique :



La mass (M1) étant en état statique est soumise aux forces : son poids $\vec{\mathbf{P}}_1$, la réaction de la surface $\vec{\mathbf{N}}_1$, la tension $\vec{\mathbf{T}}_1$ et la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_{1s}$:

$\vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{f}}_{1s} = 0$

En projetant sur les deux axes OX_1 et OY_1 :

OX_1 : $m_1 g sin\alpha - T_1 - f_{1s} = 0$

OY_1 : $-m_1 g cos\alpha + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g cos\alpha$

La mass (M2) étant en état statique est soumise aux forces : son poids $\vec{\mathbf{P}}_2$, la réaction de la surface $\vec{\mathbf{N}}_2$, la tension $\vec{\mathbf{T}}_2$ et la force de frottement statique $\vec{\mathbf{f}}_{2s}$:

$\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{T}}_2 + \vec{\mathbf{f}}_{2s} = 0$

En projetant sur les deux axes OX_2 et OY_2 :

OX_2 : $-m_2 g sin\beta + T_2 + f_{2s} = 0$

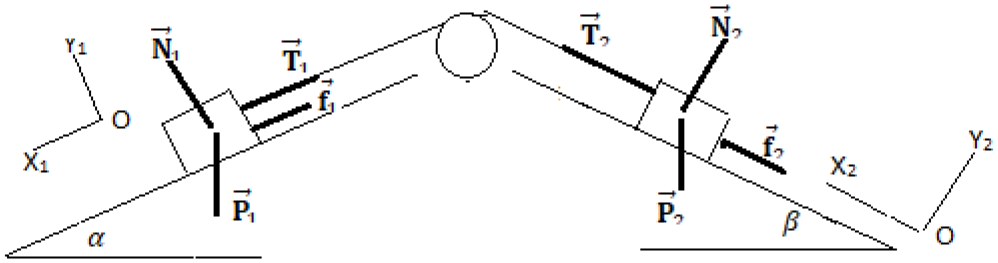
OY_2 : $-m_2 g cos\beta + N_2 = 0 \rightarrow N_2 = m_2 g cos\beta$

sachant que $f_{1s} = \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g cos\alpha$, $f_{2s} = \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g cos\beta$

et $T_1 = T_2 = T$; les fils sont sans mass et inextensibles.

La condition d'équilibre statique est : $m_1(sin\alpha - \mu_s cos\alpha) = m_2(sin\beta - \mu_s cos\beta)$

- Cas dynamique : On est confronté à deux cas :
  - $m_1(sin\alpha - \mu_s cos\alpha) > m_2(sin\beta - \mu_s cos\beta)$



→ La mass M1 est en mouvement descendant et la mass M2 ascendant :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour les deux masses séparément :

La masse M1 : $\vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{T}}_1 + \vec{\mathbf{f}}_{1d} = m_1 \vec{\mathbf{a}}_1$

Où on a remplacé les forces de frottements statiques $\vec{\mathbf{f}}_s$ par des forces de frottement dynamiques $\vec{\mathbf{f}}_d$.

En projetant sur les deux axes OX_1 et OY_1 :

OX_1 : $m_1 g sin\alpha - T_1 - f_{1d} = m_1 a_1$

OY_1 : $-m_1 g cos\alpha + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g cos\alpha$

La masse M2 : $\vec{\mathbf{P}}_2 + \vec{\mathbf{N}}_2 + \vec{\mathbf{T}}_2 + \vec{\mathbf{f}}_{2d} = m_2 \vec{\mathbf{a}}_2$

Où on a remplacé les forces de frottements statiques $\vec{\mathbf{f}}_s$ par des forces de frottement dynamiques $\vec{\mathbf{f}}_d$.

En projetant sur les deux axes OX_2 et OY_2 :

$OX_2 : -m_2 g sin\beta + T_2 - f_{2d} = m_2 a_2$
$OY_2 : -m_2 g cos\beta + N_2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; N_2 = m_2 g cos\beta$
$f_{1d} = \mu_d N_1 = \; \mu_d m_1 g cos\alpha \;\;\; , \;\; f_{2d} = \mu_d N_2 = \; \mu_d m_2 g cos\beta$
Puisque la poulie et les fils sont sans mass et inextensibles
$\rightarrow \; a_1 = a_2 = a \; et \; T_1 = T_2 = T$
L'accélération du système est : $a = \frac{(sin\alpha - \mu_d cos\alpha)m_1 - (sin\beta + \mu_d cos\beta)m_2}{m_1 + m_2} g$

- $m_1(sin\alpha - \mu_s cos\alpha) < m_2(sin\beta - \mu_s cos\beta)$

$\rightarrow$ La mass M1 est en mouvement ascendant et la mass M2 en mouvement descendant :
Par analogie au premier cas :
L'accélération du système est : $\tilde{a} = \frac{(sin\beta - \mu_d os\beta)m_1 - (sin\alpha + \mu_d cos\alpha)m_2}{m_1 + m_2} g$
On remarque que $a \neq -\tilde{a}$ et cela est du à la présence des forces de frottement.

Chapitre 5

Travail et Energie

5.1 Travail d'une force:

Le travail d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel en déplacement entre deux points A et B est :

$$W_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{(A)}^{(B)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Le travail d'une force $\vec{F}$ perpendiculaire au vecteur déplacement est nul.

Le travail d'une force $\vec{F}$ constante en magnitude et direction est égal :

$$W_{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$$

L'unité du travail est : joule (J) = Newton-mètre (N·m)

5.2 Puissance d'une force:

La puissance d'une force $\vec{F}$ à chaque instant est :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La puissance d'une force est aussi définie comme la variation instantanée de son travail :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

L'unité de la puissance est : Watt = joule/s

5.3 Force conservative:

Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

Toute force conservative dérive d'une fonction potentielle $E_p(x, y, z)$ tel que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p(x, yz) = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \quad \rightarrow \quad W_{AB} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Si une force $\vec{F}$ est conservative, son rotationnel est nul : $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \end{cases}$

5.4 Energie Cinétique:

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

L'énergie cinétique peut aussi être définie en terme de quantité de mouvement comme :

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

5.5 Energie Potentielle:

L'énergie potentielle est la fonction potentielle associée à la force conservative.

L'énergie potentielle est définie à une constante près ; elle est toujours rapportée à un référentiel pris comme origine pour la calculer.

Le travail d'une force conservative $\vec{F}$ est relié à l'énergie potentielle par l'expression :

$$W_{AB} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Voici quelques exemples d'Energies potentielles :

Energie potentielle d'un ressort de raideur K est :

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2$$

Energie potentielle gravitationnelle d'une masse m dans le champ crée par une masse M est :

$$E_p = -G\frac{mM}{r^2}$$

Energie potentielle de pesanteur est :

$$E_p = mgz$$

5.6 Théorème de l'énergie cinétique:

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées entre ces deux positions.

$$\Delta E_c = \sum_i W_i$$

5.7 Energie Mécanique Totale:

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme des énergies cinétiques et potentielles :

$$E_T = E_c + E_p$$

5.8 Principe de Conservation de l'Energie Mécanique Totale:

L'énergie mécanique totale d'un point matériel soumis à des forces conservatives est conservée.

$$(E_T)_{(A)} = (E_T)_{(B)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(A)} + (E_P)_{(A)} = (E_C)_{(B)} + (E_P)_{(B)} \quad \rightarrow \quad \Delta E_T = 0$$

5.9 Forces non Conservatives:

Si une des forces n'est pas conservative, l'énergie mécanique n'est pas conservée. Dans ce cas :

$$\Delta E_T = \sum_i W_i \; (forces\ non\ conservatives)$$

Exercices :

1. Soit la force $\vec{\boldsymbol{F}} = 8xy\vec{\imath} - (x^2 + y^2)\vec{\jmath}$ appliquée à un point matériel en le déplacement entre deux points A(0,1) et B(1,2) :
   - Calculer le travail de cette force suivant le chemin $y = x + 1$
   - Calculer le travail de cette force suivant le chemin $y = x^2 + 1$
   - Que peut-on conclure à propos de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$?
   - Suivant le chemin $y = x + 1 \quad \rightarrow \quad dy = dx \;\; et \;\; 0 \leq x \leq 1$

     $$W_{AB}^{(1)} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l} = \int_{(A)}^{(B)} (8xydx - (x^2 + y^2)dy$$

     $$W_{AB}^{(1)} = \int_{(A)}^{(B)} (8x(x + 1)dx - (x^2 + (x + 1)^2)dy$$

     $$W_{AB}^{(1)} = \int_0^1 (6x^2 + 6x - 1)dx = 4$$
   - Suivant le chemin $y = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad dy = 2xdx \;\; et \;\; 0 \leq x \leq 1$

     $$W_{AB}^{(2)} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l} = \int_{(A)}^{(B)} (8xydx - (x^2 + y^2)dy$$

     $$W_{AB}^{(2)} = \int_{(A)}^{(B)} [8x(x^2 + 1)]dx - [x^2 + (x^2 + 1)^2]2xdx$$

     $$W_{AB}^{(2)} = \int_0^1 (-2x^5 + 2x^3 + 6x)dx = \frac{19}{6}$$
   - Puisque les travaux de la force suivant les deux chemins sont différents, on peut conclure que la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ n'est pas conservative.

2. Soit la force $\vec{\boldsymbol{F}} = y^2\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$. Calculer son travail suivant les chemins suivants :
   - $O(0,0,0) \rightarrow A(1,0,0) \rightarrow \;\; B(1,1,0)$
   - La droite $O(0,0,0) \rightarrow B(1,1,0)$
   - La parabole reliant $O(0,0,0) \rightarrow B(1,1,0)$: $\;\; y = x^2$ dans le plan XOY
   - Le chemin fermé : $O(0,0,0) \rightarrow A(1,0,0) \rightarrow \;\; B(1,1,0) \;\; \rightarrow \;\; C(0,1,0) \;\; \rightarrow \;\; O(0,0,0)$
   - Calculer $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{F}}$, que peut-on conclure à propos de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$?
   - Calculer le travail de $\vec{\boldsymbol{F}}$ de $O(0,0.0) \rightarrow B(1,1,0)$ d'une manière générale.
   - Suivant le chemin $O(0,0) \rightarrow A(1,0,0) \rightarrow \;\; B(1,1,0)$

     $$W_{OAB}^{(1)} = W_{OA}^{(1)} + W_{AB}^{(1)} = \int_{(O)}^{(A)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l} + \int_{(A)}^{(B)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l}$$

     Suivant $O(0,0.0) \rightarrow A(1,0,0)$: On a $y = 0 \quad \rightarrow \quad dy = 0 \;,\; dz = 0 \;\; et \;\; 0 \leq x \leq 1$

     $W_{OA}^{(1)} = \int_{(O)}^{(A)} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 0dx - 0dy = 0$.

     La force est perpendiculaire au déplacement OA.

     Suivant $A(1,0,0) \rightarrow \;\; B(1,1,0)$: On a $\;\; x = 1 \quad \rightarrow \quad dx = 0 \;,\; dz = 0 \;\; et \;\; 0 \leq y \leq 1$

$$W_{AB}^{(1)} = \int_{(A)}^{(B)} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 y^2(0) + 2ydy = 1$$

Donc, $W_{OAB}^{(1)} = 1$

- Suivant la droite $O(0,0,0) \rightarrow B(1,1,0)$: $\quad y = x \quad \rightarrow \quad dx = dy\ ,\ dz = 0\ \ et\ \ 0 \leq x \leq 1$

$$W_{OB}^{(2)} = \int_{(A)}^{(B)} x^2dx + 2x^2dx = \int_0^1 3x^2dx = 1$$

- Suivant la parabole reliant $O(0,0,0) \rightarrow B(1,1,0)$:

$y = x^2\ \rightarrow dy = 2xdx\ ,\ dz = 0\ \ et\ \ 0 \leq x \leq 1$

$$W_{OB}^{(3)} = \int_{(A)}^{(B)} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 5x^4dx = 1$$

- Suivant le chemin fermé :

$O(0,0,0)\ \rightarrow\ A(1,0,0) \rightarrow\ B(1,1,0)\ \rightarrow\ C(0,1,0)\ \rightarrow\ O(0,0,0)$

$W_{OABCO}^{(4)} = W_{OA}^{(4)} + W_{AB}^{(4)} + W_{BC}^{(4)} + W_{CO}^{(4)}$

$$W_{OABCO}^{(4)} = \int_{(O)}^{(A)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l} + \int_{(A)}^{(B)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l} + \int_{(B)}^{(C)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l} + \int_{(C)}^{(O)} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{l}$$

Suivant $O(0,0,0)\ \rightarrow\ A(1,0,0)$: $\quad W_{OA}^{(4)} = W_{OA}^{(1)} = 1$

Suivant $A(1,0.0)\ \rightarrow\ B(1,1,0)$: $\quad W_{AB}^{(4)} = W_{AB}^{(1)} = 1$

Suivant $B(1,1,0)\ \rightarrow\ C(0,1,0)$: On a $\ y = 1 \quad \rightarrow\ \ dy = 0\ \ ,\ \ dz = 0\ \ et\ \ 0 \leq x \leq 1$

$$W_{BC}^{(4)} = \int_{(B)}^{(C)} y^2dx + 2xydy = \int_1^0 dx + 2x(0)dx = -1$$

Suivant $C(0,1,0)\ \rightarrow\ O(0,0,0)$: On a $\ x = 0 \quad \rightarrow\ \ dx = 0\ ,\ dz = 0\ \ et\ \ 0 \leq y \leq 1$

$W_{BC}^{(4)} = \int_{(B)}^{(C)} y^2dx + 2xydy = \int_1^0 dx + 2x(0)dx = -1$

$W_{OABCO}^{(4)} = W_{OA}^{(4)} + W_{AB}^{(4)} + W_{BC}^{(4)} + W_{CO}^{(4)} = 0$

- $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy & 0 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\vec{k} = 0$

On peut conclure que la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ est conservative. On remarque que son travail est indépendant du chemin. On remarque aussi que le travail suivant un chemin fermé est nul.

- Cherchons la fonction potentielle associée à la force $\vec{\boldsymbol{F}}$:

$$\begin{cases} y^2 = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ 2xy = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{c} E_p(x,y,z) = -xy^2 + C(y,z) \\ E_p(x,y,z) = -xy^2 + C(y,z) \\ E_p(x,y,z) = E_p(x,y) \end{array}$$

$E_p(x,y,z) = -xy^2 + C(y)$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = -2xy + \frac{dC}{dy} \quad \rightarrow \quad \frac{dC}{dy} = 0 \quad \rightarrow \quad C(y) = constante\ K$$

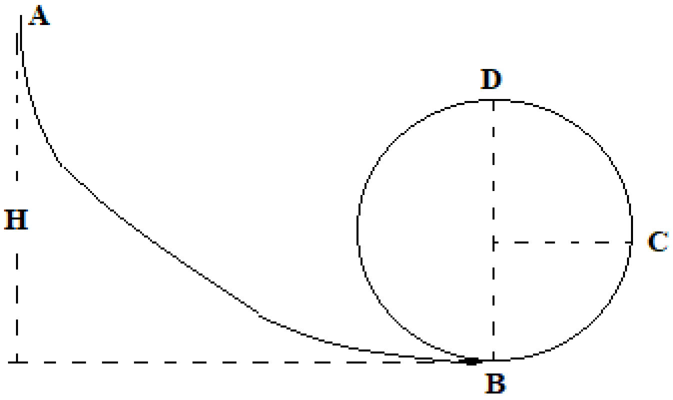
La fonction potentielle associée à la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ est égale :

$E_p(x,y,z) = -xy^2 + K$

D'une manière générale, le travail de $\vec{F}$ de $O(0,0,0) \rightarrow B(1,1,0)$ est égale :

$W_{OB} = -\Delta E_p = E_p(O) - E_p(B) = E_p(0,0,0) - E_p(1,1,0) = 1$

3. Un corps de mass M est relâché sans vitesse initiale du haut d'une montagne de hauteur H comme le montre la figure ci-dessous.



- ○ Trouver les vitesses du corps M aux points B, C et D.
- ○ Trouver les forces de réaction de la surface sur le corps M aux points C et D.
- Dans l'absence de frottement, on a conservation d'énergie mécanique totale :

  $(E_T)_{(A)} = (E_T)_{(B)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(A)} + (E_P)_{(A)} = (E_C)_{(B)} + (E_P)_{(B)}$

  En prenant le niveau (B) comme référence initiale de l'énergie potentielle

  $\rightarrow \ (E_P)_{(B)} = 0$

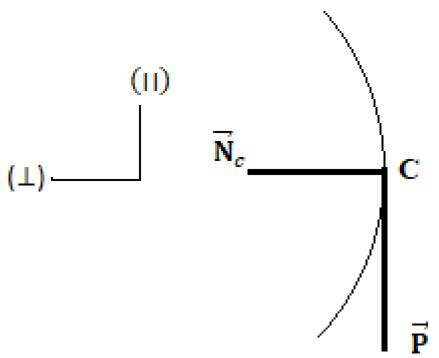
  Puisque $v_A = 0 \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(A)} = 0$

  $\rightarrow \quad MgH = \frac{1}{2}Mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gH}$
- $(E_T)_{(A)} = (E_T)_{(C)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(A)} + (E_P)_{(A)} = (E_C)_{(C)} + (E_P)_{(C)}$

  $MgH = \dfrac{1}{2}Mv_c^2 + MgR \quad \rightarrow \quad v_c = \sqrt{2g(H-R)}$
- $(E_T)_{(A)} = (E_T)_{(D)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(A)} + (E_P)_{(A)} = (E_C)_{(D)} + (E_P)_{(D)}$

  $MgH = \dfrac{1}{2}Mv_D^2 + 2MgR \quad \rightarrow \quad v_D = \sqrt{2g(H-2R)}$
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour le corps au point C :

  $\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}}_c = M\vec{\mathbf{a}}_c$



En projetant sur les deux axes (II) et (⊥) :

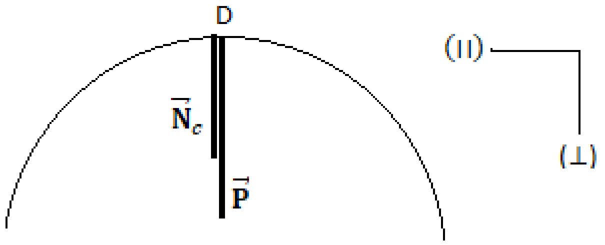
(II) : $Ma_{\shortparallel} = -Mg$

(⊥) : $Ma_{\perp} = N_c$

$$N_c = M\frac{v_c^2}{R} = 2\frac{(H-R)}{R}Mg$$

- En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour le corps au point D :

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}}_D = M\vec{\mathbf{a}}_D$$



En projetant sur les deux axes (II) et (⊥) :

$(\text{II}) : Ma_{\text{II}} = 0$

$(\perp) : Ma_{\perp} = Mg + N_D \quad \rightarrow \quad N_D = Ma_{\perp} - Mg$

$$N_D = M\frac{v_D^2}{R} - Mg = \frac{(2H-5R)}{R}Mg$$

4. Quelle vitesse faut-il donner à une fusée pour qu'elle échappe au champ gravitationnel de la terre ? Accélération de gravité à la surface de la terre $g_0 = 9.81\ m/s^2$, Rayon de la terre $R = 6.36x10^6 m$.
   - En appliquant le principe de la conservation d'énergie mécanique totale :

$(E_T)_{(I)} = (E_T)_{(F)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(I)} + (E_P)_{(I)} = (E_C)_{(F)} + (E_P)_{(F)}$

$$\frac{1}{2}mv_I^2 - G\frac{mM}{R^2} = \frac{1}{2}mv_F^2 - G\frac{mM}{r^2}$$

La fusée échappe à la gravité $\quad \rightarrow \quad r = \infty \ et \ v_F = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_I^2 - G\frac{mM}{R^2} = 0 \quad \rightarrow \quad v_I^2 = 2G\frac{M}{R^2}$$

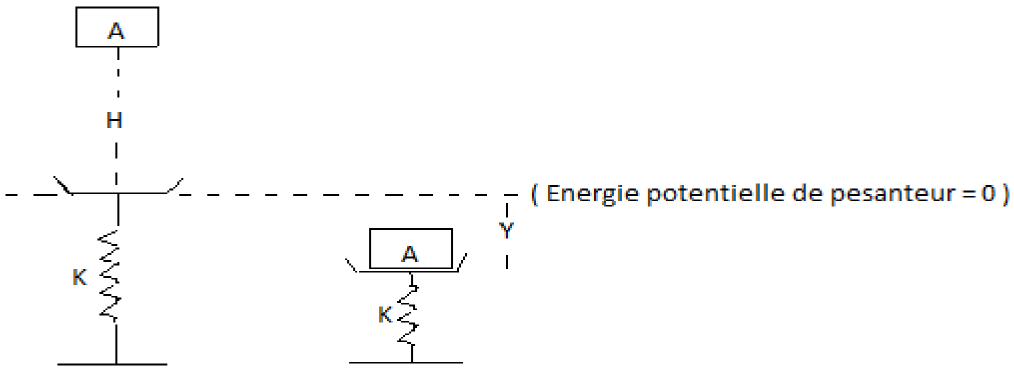
La force du poids définie par la loi universelle de la gravitation :

$$mg_0 = G\frac{mM}{R^2} \quad \rightarrow \quad g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

$$\rightarrow \quad v_I^2 = 2g_0R$$

A.N : $v_I = 1.12x10^4 m/s$

5. Une masse M tombe d'une hauteur H sur un ressort libre de raideur K.
   - Trouver la distance de compression maximale du ressort.



- Dans l'absence de frottement, on a conservation d'énergie mécanique totale :

$(E_T)_{(I)} = (E_T)_{(F)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(I)} + (E_P)_{(I)} = (E_C)_{(F)} + (E_P)_{(F)}$

$v_I = v_F = 0 \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(I)} = (E_C)_{(F)} = 0 \quad \rightarrow \quad (E_P)_{(I)} = (E_P)_{(F)}$

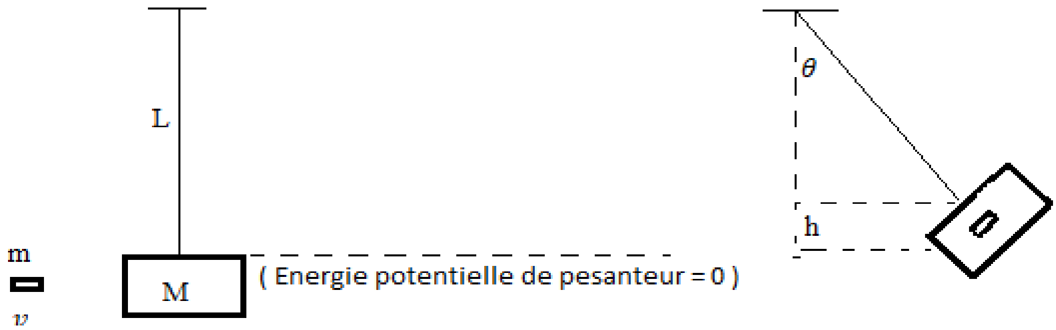
Le niveau zéro de l'énergie potentielle de pesanteur est indiqué sur la figure.

$\rightarrow \quad Mgh = -Mgy + \frac{1}{2}Ky^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}Ky^2 - Mgy - Mgh = 0$

C'est une équation de deuxième degré. Seule la racine positive est acceptable.

$$y = \frac{Mg + \sqrt{M^2g^2 + 2MgKh}}{K} = \frac{Mg}{K}(1 + \sqrt{1 + 2\frac{Kh}{Mg}})$$

6. Une balle de masse m est tirée d'un pistolet avec une vitesse v. Elle percute un block en bois de masse M attache' au bout d'un fil de longueur L. Les deux corps (Block+balle) s'écartent d'un angle θ.
   - Trouver la vitesse de la balle v en fonction de l'angle θ.



- La conservation de quantité de mouvement avant et après la collision entre la balle et le block :

  Choc mou $\rightarrow \quad mv = (m + M)V \quad \rightarrow \quad V = \frac{m}{(m+M)}v$

  Dans l'absence de frottement, on a conservation d'énergie mécanique totale :

  $(E_T)_{(I)} = (E_T)_{(F)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(I)} + (E_P)_{(I)} = (E_C)_{(F)} + (E_P)_{(F)}$

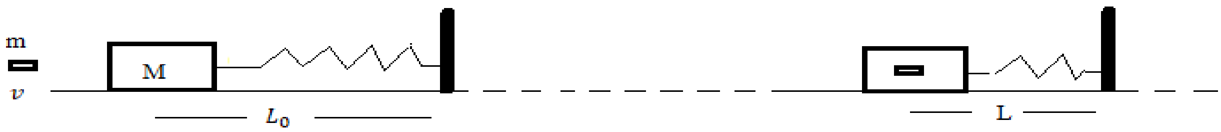
  $\frac{1}{2}(m + M)V^2 + 0 = 0 + (m + M)gh \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2g}V^2 = \frac{1}{2g}[\frac{m}{(m + M)}v]^2$

  $\rightarrow \quad v = \frac{(m + M)}{m}\sqrt{2gh}$

  $h = L(1 - cos\theta) = 2Lsin^2(\frac{\theta}{2})$

  $\rightarrow \quad v = 2\sin(\frac{\theta}{2})\frac{(m + M)}{m}\sqrt{gL}$

7. Une balle de masse m est tirée d'un pistolet avec une vitesse v. Elle percute un block en bois de masse M attachée à un ressort libre de raideur K. Le coefficient de frottement dynamique entre le block en bois (M) et la surface de contact est μ_d .
   - Trouver la vitesse de la balle v en fonction de la compression maximale du ressort.



- La conservation de quantité de mouvement avant et après la collision entre la balle et le block :

  Choc mou $\rightarrow \quad mv = (m + M)V \quad \rightarrow \quad V = \frac{m}{(m+M)}v$

  En présence de frottement, on n'a pas de conservation d'énergie mécanique totale, on utilise le théorème de l'énergie cinétique :

  $\Delta E_c = (E_C)_{(F)} - (E_C)_{(I)} = \sum_i W_i = W(\vec{\mathbf{P}}) + W(\vec{\mathbf{N}}) + \mathrm{W}(\vec{\mathbf{f}}) + \mathrm{W(ressort)}$

$$(E_C)_{(I)} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{(m+M)}v^2 \quad et \quad (E_C)_{(F)} = 0$$

La somme des travaux des forces :

$$\sum_i W_i = \mathrm{W}(\vec{\mathbf{f}}) + \mathrm{W(ressort)} = -f(L_0 - L) - \frac{1}{2}K(L - L_0)^2$$

$W(\vec{\mathbf{P}}) = W(\vec{\mathbf{N}}) = 0$; ces forces sont perpendiculaires au déplacement.

La compression maximale du ressort $(L_0 - L) = X$

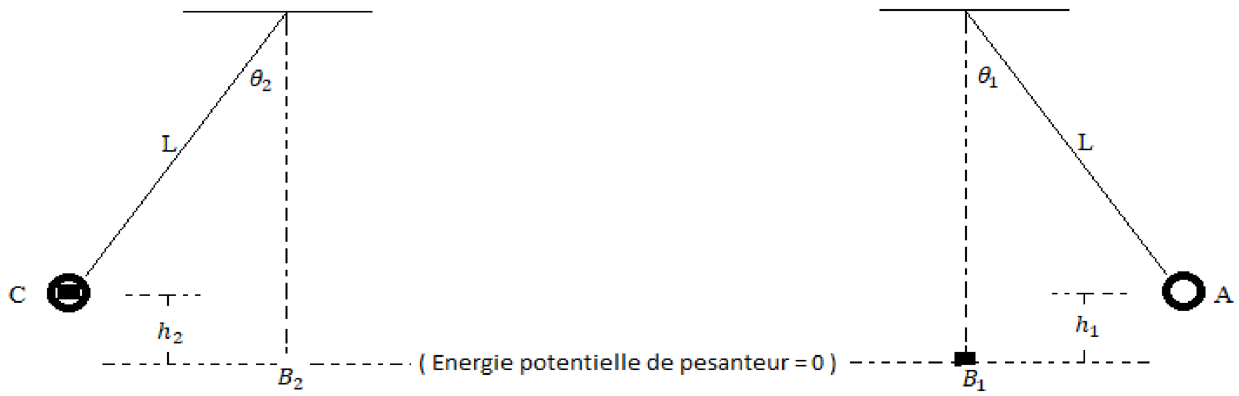
La force de frottement $f = \mu_d(m+M)g$

$$\rightarrow \frac{1}{2}KX^2 + \mu_d(m+M)gX - \frac{1}{2}\frac{m^2}{(m+M)}v^2 = 0$$

La vitesse de la balle est :

$$\rightarrow v = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2\mu_d gX + \frac{KX^2}{(m+M)}}$$

8. Une masse M attachée au bout d'un fil de longueur L est écartée d'angle θ_1 au point A et relâchée sans vitesse initiale. Au point B, elle percute et se colle à une petite masse m. Les deux corps (M+m) s'écartent d'un angle θ_2.
   - Trouver la relation entre les deux angles θ_1 et θ_2.



- La chute de la masse M de (A) à (B_1) :

Dans l'absence de frottement, on a conservation d'énergie mécanique totale :

$$(E_T)_{(A)} = (E_T)_{(B_1)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(A)} + (E_P)_{(A)} = (E_C)_{(B_1)} + (E_P)_{(B_1)}$$

$$0 + Mgh_1 = \frac{1}{2}MV_{B_1}^2 + 0 \quad \rightarrow \quad V_{B_1} = \sqrt{2gh_1}$$

- La collision entre M et m :

La conservation de quantité de mouvement avant et après la collision entre la balle et le block :

Choc mou $\rightarrow \quad MV_{B_1} = (m+M)V_{B_2} \quad \rightarrow \quad V_{B_2} = \frac{m}{(m+M)}V_{B_1} = \frac{m}{(m+M)}\sqrt{2gh_1}$

- Mouvement des deux masses M et m de (B_2) à (C) :

$$(E_T)_{(B_2)} = (E_T)_{(c)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(B_2)} + (E_P)_{(B_2)} = (E_C)_{(c)} + (E_P)_{(c)}$$

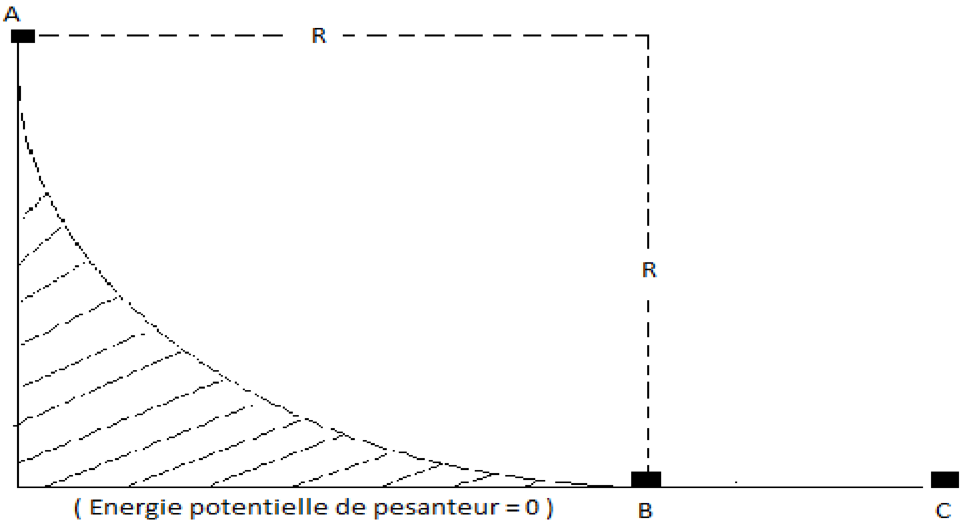
$$\frac{1}{2}(m+M)V_{B_2}^2 + 0 = 0 + (m+M)gh_2 \quad \rightarrow \quad h_2 = \frac{V_{B_2}^2}{2g} = (\frac{M}{m+M})^2 h_1$$

$$h_1 = L(1 - cos\theta_1) = 2Lsin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad et \quad h_2 = L(1 - cos\theta_2) = 2Lsin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

La relation entre les deux angles θ_1 et θ_2 est :

$$sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = (\frac{M}{m+M})sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

9. Un corps de mass M est relâché sans vitesse initiale du haut d'un quart de cercle de rayon R comme le montre la figure ci-dessous. Le corps est soumis à une force de frottement de magnitude constante f tout le long de son parcours. Il atteint le point B avec une vitesse v et s'arrête au point C.



- ○ Trouver la magnitude de la force de frottement $\vec{\mathbf{f}}$
- ○ Trouver la distance BC.
- En présence de frottement, on n'a pas de conservation d'énergie mécanique totale, on utilise le théorème de l'énergie cinétique sur le quart de cercle :

  $\Delta E_c = (E_C)_{(B)} - (E_C)_{(A)} = \sum_i W_i = W(\vec{\mathbf{P}}) + W(\vec{\mathbf{N}}) + \mathrm{W}(\vec{\mathbf{f}})$

  La force de réaction $\vec{\mathbf{N}}$ est perpendiculaire au déplacement : $W(\vec{\mathbf{N}}) = 0$

  $\rightarrow \quad \frac{1}{2}Mv^2 - 0 = MgR - f\frac{\pi R}{2}$

  $\rightarrow \quad f = \frac{2}{\pi R}[MgR - \frac{1}{2}Mv^2]$

- Sur le parcours (BC) : $\Delta E_c = (E_C)_{(C)} - (E_C)_{(B)} = \sum_i W_i = W(\vec{\mathbf{P}}) + W(\vec{\mathbf{N}}) + \mathrm{W}(\vec{\mathbf{f}})$

  Les forces du poids $\vec{\mathbf{P}}$ et de la réaction $\vec{\mathbf{N}}$ sont perpendiculaires au déplacement :

  $\rightarrow \quad W(\vec{\mathbf{P}}) = W(\vec{\mathbf{N}}) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 - \frac{1}{2}Mv^2 = -fD \quad \rightarrow \quad D = \frac{Mv^2}{2f}$

  La distance d'arrêt BC est égale à : $D = \frac{\pi R v^2}{4gR - 2v^2}$

10. Une pompe à eau a une puissance $P = 12\ hp$. Elle est utilisée à pomper de l'eau d'un puits de profondeur H avec un débit de $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 2\frac{m^3}{mn}$.

- ○ Quelle est la profondeur maximale du point si le rendement de la pompe est $\varepsilon = 80\%$.
- Par unité de temps, la pompe fait un travail égal à l'énergie potentielle de la pesanteur de l'eau. La puissance nécessaire pour pomper l'eau d'une profondeur H est donc égale à :

  $\varepsilon P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{(\Delta m)gH}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}gH = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}gH$

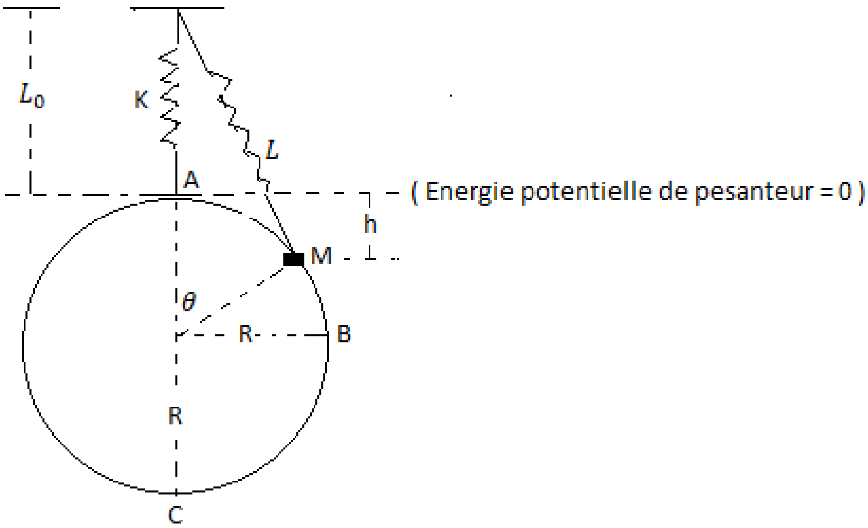
  $\rightarrow \quad H = \frac{\varepsilon P}{\rho g \frac{\Delta V}{\Delta t}}$

  A.N : $P = 12\ hp = 12x746 = 8952\ Watts$

  $H \approx 22\ m$

11. Un corps de mass M est attaché à un ressort de raideur K comme le montre la figure ci-dessous. Le ressort est libre et n'est pas tendu au point A.

- Si la vitesse du corps au point C est v_c, Trouver la vitesse du corps au point B et A.



- Dans l'absence de frottement, on a conservation d'énergie mécanique totale :

$$(E_T)_{(M)} = (E_T)_{(c)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(M)} + (E_P)_{(M)} = (E_C)_{(c)} + (E_P)_{(c)}$$

$$(E_T)_{(c)} = (E_C)_{(c)} + (E_P)_{(c)} = \frac{1}{2}Mv_c^2 - 2MgR + \frac{1}{2}K(2R)^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2 - 2MgR + 2KR^2$$

$$(E_T)_{(M)} = (E_C)_{(M)} + (E_P)_{(M)} = \frac{1}{2}Mv^2 - Mgh + \frac{1}{2}K(L-L_0)^2$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 - Mgh + \frac{1}{2}K(L-L_0)^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2 - 2MgR + 2KR^2$$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{v_c^2 + \frac{K}{M}[4R^2 - (L-L_0)^2] - 2g(2R-h)}$$

$$h = R(1-cos\theta) = 2Rsin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad et \quad L = \sqrt{(L_0+R)^2 + R^2 - 2R(L_0+R)cos\theta}$$

- au point B : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $h = R$ et $L = \sqrt{(L_0+R)^2 + R^2}$

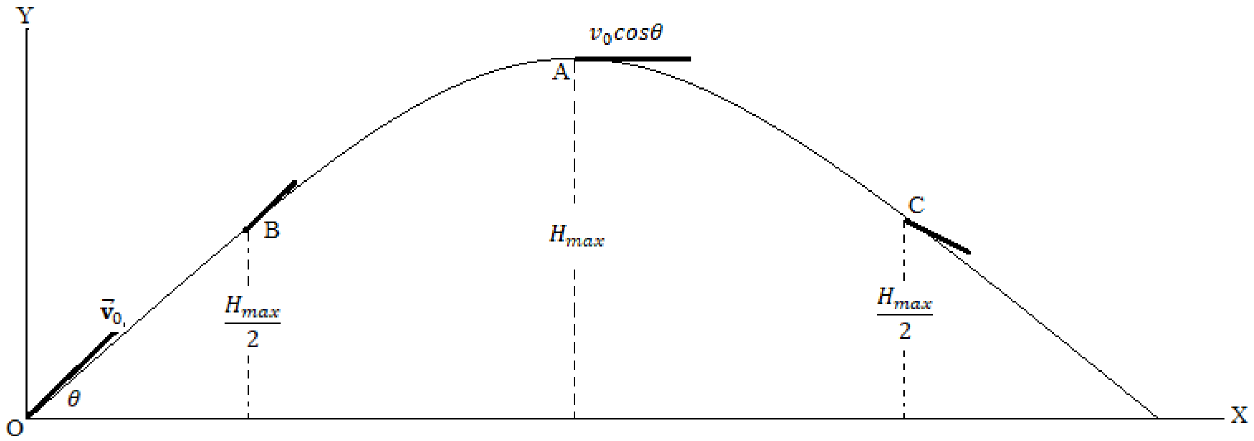
$$v_B = \sqrt{v_c^2 + 2\frac{K}{M}\left[R^2 - L_0^2 - RL_0 + L_0\sqrt{L_0^2 + 2RL_0 + 2R^2}\right] - 2gR}$$

- au point A : $\theta = 0$, $h = 0$ et $L = L_0$

$$v_A = \sqrt{v_c^2 + \frac{4K}{M}R^2 - 4gR}$$

12. Un projectile est lancé avec une vitesse de grandeur v_0 dirigée selon un angle θ avec l'horizontale.

- Calculer la hauteur maximale H_{max} atteinte par le projectile.
- Calculer la vitesse du projectile lorsqu'il a atteint la moitié de sa plus grande hauteur.



- Dans l'absence de frottement, on a conservation d'énergie mécanique totale :
  $(E_T)_{(O)} = (E_T)_{(M)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(O)} + (E_P)_{(O)} = (E_C)_{(M)} + (E_P)_{(M)}$
  La hauteur maximale H_{max} est atteinte par le projectile au point A lorsque :
  $v_A = v_0 cos\theta$
  $$\frac{1}{2}Mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}Mv_0^2 cos^2(\theta) + MgH_{max}$$
  $$\rightarrow \quad H_{max} = \frac{v_0^2(1 - cos^2(\theta))}{2g} = \frac{v_0^2 sin^2(\theta)}{2g}$$
- $(E_T)_{(O)} = (E_T)_{(B)} \quad \rightarrow \quad (E_C)_{(O)} + (E_P)_{(O)} = (E_C)_{(B)} + (E_P)_{(B)}$
  $\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mg\frac{H_{max}}{2} \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_0^2 - gH_{max}}$
  $$\rightarrow \quad v_B = v_0\sqrt{1 - \frac{sin^2(\theta)}{2}}$$
  $v_B = v_c$ Il y'a deux positions B et C avec la même vélocité où la hauteur $H = \frac{H_{max}}{2}$
  En général, il y'a toujours deux positions avec la même hauteur dans la trajectoire parabolique avec la même vélocité ; une ascendante et l'autre descendante.

Bibliographie

[1] AHMED FIZAZI, Cahier de la Mécanique du Point Matériel, OPU, Algérie, 2013.
[2] LAMRIA BENALLEGUE, MOHAMMED DEBIANE, AZEDDINE GOURARI, et AMMAR MAHAMDIA, Physique I Mécanique du Point Matériel, Edité par la Faculté de Physique U.S.T.H.B. Algérie, 2011.
[3] ZIANI NOSSAIR, BOUTAOUS AHMED, Mécanique du Point Matériel, Cours et exercices, Edité par la Faculté de Physique USTO, MB, Algérie, 2015
[4] HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale : Cinématique du point matériel, OPU, 2016.
[5] HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale : Dynamique du point matériel, OPU, 2016.