Équations de la physique mathématique

Meriem Henkouche
Département de mathématiques
U.S.T.O.M.B

Table des matières

Introduction

Ce polycopié **Cours et Exercices** est destiné aux étudiants de L3 du cursus universitaire L.M.D mathématiques de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran (USTO-MB). Il vise à introduire des outils mathématiques pour établir le modèle des phénomènes physiques du type équation de la chaleur, équation des ondes etc ...
Le premier chapitre est consacré à des définitions et rappels généraux nécessaires.
Le second chapitre introduit les équations aux dérivées partielles du premier ordre comme l'équation du transport à coefficients constants et variables.
Le troisième chapitre traite de la transformée de Fourier et de Laplace pour résoudre certaines équations différentielles en passant par le calcul formel.
Le quatrième principal chapitre concerne les EDPs du second ordre qui proposent un modèle pour une large partie des phénomènes physiques. Il existe trois types d'équations EDPs du second ordre (hyperboliques, paraboliques, elliptiques). Une méthode commune de résolution est celle des courbes caractéristiques qui vont nous donner la forme standard pour chacune des trois classes d'EDPs afin de préparer la résolution. La méthode de séparation des variables est utilisée dans la résolution dans le cas de l'équation de la chaleur, des ondes etc...
Le dernier chapitre traite les principaux exemples d'EDPs du second ordre.

Notations

- Ensemble et topologie
  - $\partial\Omega$ bord du domaine Ω.
  - $\mathbb{1}_A$ pour $A \in \Omega$: La fonction indicatrice de A :

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \backslash A \end{cases}$$

- Espaces fonctionnels
  - $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, espace de Lebesgue des fonctions dont la puissance $p^{\text{ième}}$ est intégrable sur Ω.
  - $L^\infty(\Omega)$, espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées sur Ω.
  - $C^0(\Omega)$, espace des fonctions continues sur Ω.
  - $C^n_c(\Omega), n \in [0, \infty[$, espace des fonctions de classe $C^n(\Omega)$ à support compact.
  - $C^\infty(\Omega)$, espace des fonctions infiniment dérivables sur Ω.
- Opérations sur les fonctions
  - supp(f), support de la fonction f.
  - Pour une fonction réelle de la variable réelle : f' dérivée première de f, f'' dérivée seconde, $f^{(j)}$ dérivée j-ème.
  - $f * g$, produit de convolution.
- Notation multientier : $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$
  -

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$$

  - $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_d^{x_d}$ monôme.
  - $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ avec $N \geq |\alpha|$, $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$

Chapitre 1

Généralités

Des rappels d'analyse vectorielle sont nécessaires.

1.1 Fonction scalaire ou champ scalaire

Ces notations vont être utilisées durant tout ce polycopié.

Définition 1.1.1 Un champ vectoriel est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, où $n = 2$ ou 3.

Définition 1.1.2 (Gradient) Soit f un champ scalaire défini dans $\mathbb{R}^3$. On appelle gradient de f et on note $\mathbf{grad}(f)$ ou ∇ le vecteur

$$\mathbf{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est noté f_x et représente la dérivée partielle de f par rapport à x.

Définition 1.1.3 (Dérivée directionnelle) Étant donné un vecteur V unitaire de $\mathbb{R}^3$. On appelle dérivée directionnelle de f au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dans la direction de V le produit scalaire $\nabla f(M_0) \cdot V$.

Remarque 1.1 Si $\partial\Omega$ est le bord d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ la dérivée normale sur le bord $\partial\Omega$ est notée par : $\frac{\partial f}{\partial n}$, où n est le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur du domaine Ω en chaque point de son bord $\partial\Omega$. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n \tag{1.1.2}$$

1.2 Dérivation des fonctions composées

On rappelle les formules de dérivation des fonctions composées à plusieurs variables. Si

$$g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial g}{\partial s} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial g}{\partial t} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right.$$

On peut écrire

$$\left\{\begin{array}{lll} g_s & = & f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s \\ g_t & = & f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t \end{array}\right.$$

1.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivées d'ordre deux sont les dérivées premières de fonctions qui sont elles-mêmes dérivées premières d'une fonction

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

donc si f est une fonction régulière c'est à dire deux fois continûment dérivable on a : (Formule de Shwartz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

1.3.1 La formule de Taylor

Pour une fonction à trois variables réelles le développement local de la fonction s'écrit :

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x,y,z) + [h,k,l] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}[h,k,l] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$+ (h^2 + k^2 + l^2)\epsilon(h,k,l) \tag{1.3.1}$$

La matrice 3×3 ci-dessus est appelée le **Hessien** de f ou la matrice Hessienne de f. Elle est constituée de dérivées partielles secondes de f quand f est deux fois continûment dérivable.

1.4 Fonction vectorielle ou champ vectoriel

Définition 1.4.1 Un champ vectoriel est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, $p > 1$. En général p, n sont égaux à 2 ou 3.

Exemples 1.4.1 – La force gravitionnelle
- Le champ électrique
- La vitesse d'un fluide

Définition 1.4.2 (**Matrice Jacobienne**) Soit f un champ vectoriel défini de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice jacobienne de$f$ et on note $Jac(f)$ la matrice formée par les dérivées partielles de la fonction f.

Définition 1.4.3 (**Le Jacobien**) On appelle le Jacobien le déterminant de cette matrice Jacobienne de f.

1.5 Changement de variables

Soit dans le plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) et un changement de variables (X, Y) réalisant un C^1-difféomorphisme : $(x, y) \longmapsto (X, Y)$ est de classe C^1, inversible, d'inverse également inversible, la matrice jacobienne a un déterminant non nul :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial X} \end{pmatrix}, \ \det(J) \neq 0 \tag{1.5.1}$$

On considère une fonction f de (x, y), différentiable, et une fonction F de (X, Y) telle que $f(x, y) = F(X, Y)$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} \\ \frac{\partial F}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.5.2}$$

1.6 Théorème des fonctions implicites

Ce théorème prouve que pour une fonction f différentiable et bijective, une équation de la forme $f(x_1, x_2, x_3) =$ constante, permet localement de définir z comme une fonction de (x_1, x_2) aux points (x_1, x_2, z) où $\frac{\partial f}{\partial z}(x_1, x_2, z) \neq 0$. De plus en exploitant le fait que $df = 0$, on obtient :

$$z = Z(x_1, x_2) \text{ et } \frac{\partial Z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x_1, x_2, z) \text{ pour i} = 1, 2 \tag{1.6.1}$$

1.7 Éléments de géométrie

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un système de coordonnées (x, y, z) orthonormal.

1.7.1 Courbes

Une courbe continue $\mathscr{C}$ est un ensemble de points dont les coordonnées dépendent continûment d'un paramètre t :

$$C : t \longrightarrow M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_t \tag{1.7.1}$$

1. Si les fonctions sont de classe C^1 et que les dérivées par rapport à t ne s'annulent pas simultanément, on peut définir le vecteur tangent $\vec{v}(t_0)$ au point $M(t_0)$:

$$\vec{t_0} = \frac{dM}{dt}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dy} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{t_0}$$

2. Une courbe telle qu'en tout point $(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2 \neq 0$ est dite régulière, un paramétrage priviligié existe pour ces courbes, il s'agit de l'abscisse curviligne définie par :
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \|\vec{v}(t)\|\, dt$$
3. Cette abscisse curviligne permet d'obtenir des vecteurs tangents unitaires et donne un repère naturel en chaque point de la courbe (repère de Frenet) permettant de calculer une courbure et torsion.

Remarque 1.7.1 i. Dans $\mathbb{R}^2$, une courbe est définie (au moins localement) par une équation implicite $f(x, y) =$ constante.

ii. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, une courbe peut être définie comme l'intersection de deux surfaces.

Soit f une fonction de (x, y, z) et $\mathscr{C}$ une courbe donnée sous forme paramétrique par $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$. On définit la restriction F de f sur $\mathscr{C}$ par $F(t) = f(M(t))$. La dérivée de F le long de $\mathscr{C}$ par dérivation composée est donc :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{df(M(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial M}(M(t))\frac{dM}{dt}(t) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})_{M(t)} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

où l'on reconnaît le gradient de f, $(\frac{\partial f}{\partial M})$ appliqué au vecteur tangent à la courbe.

1.7.2 Surfaces

Définition 1.7.1 Une surface $\mathscr{S}$ est un ensemble de points dont les coordonnées dépendent continûment de deux paramètres (u, v). On écrit :

$$\mathscr{S} : (u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

Définition 1.7.2 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, une surface $\mathscr{S}$ peut être définie (au moins localement) par une équation implicite $f(x, y, z) =$ constante.

En différenciant cette expression au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la surface, on obtient :

$$0 = df_{M_0} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})_{M_0} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Proposition 1.7.1 Pour qu'un vecteur (dx, dy, dz) appartienne au plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0, il doit être orthogonal au gradient de f en M_0.

1.8 Opérateurs différentiels

Définition 1.8.1 (La divergence) Soit V une fonction de $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ qui à $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ fait correspondre (X, Y, Z). On appelle divergence du vecteur V et on note $div(V)$ ou $\nabla \cdot V$, le scalaire :

$$div(V) = \nabla \cdot V = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{1.8.1}$$

qui peut s'écrire :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (\nabla \cdot V) \tag{1.8.2}$$

$\cdot$ étant le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, $div(V)$ peut être positive, négative ou nulle.

Exemple 1.8.1 L'eau est un fluide incompressible, donc si V est le champ de vitesse du fluide, on a : $div(V) = 0$.

Définition 1.8.2 (**Rotationnel**) On appelle rotationnel d'un champ vectoriel V, le vecteur défini par :

$$Rot\, V = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{1.8.3}$$

On écrit de même

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (\nabla \wedge V) \tag{1.8.4}$$

Remarque 1.8.1 Ces notions sont trés utilisées en physique et dépendent du système de coordonnées choisi.

1.9 Formules de Stokes

1.9.1 Formule d'Ostrogradsky

Cette formule est connue sous le nom de la **formule de la divergence**.
Étant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ régulière, un champ vectoriel V défini sur Ω tout entier. Soit $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur de Ω. On a l'égalité suivante :

$$\int\int_{\partial\Omega} V \cdot n dS = \int\int\int_{\Omega} div(V) d\Omega \tag{1.9.1}$$

où dS représente l'élément d'aire sur $\partial\Omega$ et $d\Omega$ l'élément de volume dans Ω. Les expressions des éléments d'aire et de volume dépendant des systèmes de coordonnées choisis. **On dit alors que le flux d'un vecteur V sortant d'un domaine Ω est égal à l'intégrale sur ce domaine de sa divergence.**

1.9.2 Formule de Stokes ou du rotationnel

Soit C une courbe fermée orientée de $\mathbb{R}^3$ et S une surface quelconque de bord C. Soit t le vecteur unitaire tangent à C orienté dans le sens direct. On a :

$$\int_C V \cdot tdl = \int \int RotV \cdot ndS \tag{1.9.2}$$

où dl représente l'élément de longueur sur C et dS représente l'élément de surface sur S. Cette formule explicite la **circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe fermée** C.

1.9.3 Divergence et Rotationnel

On a à partir de la formule de la divergence si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$divV(M_0) = \lim_{\Omega \to M_0} \frac{\int \int_{\partial\Omega} V \cdot ndS}{mesure(\Omega)} \tag{1.9.3}$$

De même pour le rotationnel on a :

$$RotV(M_0) = \lim_{S \to M_0} \frac{\int_{\partial C} VdM}{mesure(S)} \tag{1.9.4}$$

1.10 Quelques formules d'analyse vectorielle

1.10.1 Champs de gradients

Définition 1.10.1 Si **V** est un champ de gradients c'est à dire si **V= grad f** (on dit qu'elle dérive d'un potentiel f), de plus la divergence de **V** est

$$divV = div(gradf) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.10.1}$$

Cet opérateur s'appelle le **Laplacien** et se note Δf.

Un champ de rotationnel est à divergence nulle.

$$div(RotV) = 0 \tag{1.10.2}$$

En particulier pour un fluide, un champ de Rotationnel représente la vitesse d'un fluide incompressible.

1.10.2 Diverses formules

$$Rot(gradf) = 0 \tag{1.10.3}$$

$$grad(fg) = fgrad(g) + ggrad(f) \tag{1.10.4}$$

$$div(aV) = adiv(V) + Vgrad(f) \tag{1.10.5}$$

$$Rot(aV) = aRot(V) + grad(a) \wedge V \tag{1.10.6}$$

1.10.3 Coordonnées cylindriques et sphériques

En coordonnées cylindriques l'opérateur Laplacien prend la forme suivante :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{1.10.7}$$

avec $U(r, \theta, z) = u(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. En coordonnées sphériques l'opérateur Laplacien devient :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \tag{1.10.8}$$

avec $U(r, \phi, \theta) = u(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$. Dans le cas où la fonction U ne dépend que de la distance à l'origine, le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ a la forme suivante :

$$\Delta U(r) = \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{dU}{dr} \tag{1.10.9}$$

Chapitre 2

Les EDPs du premier ordre

2.1 Préliminaires et définitions

Une EDP (**Équation différentielle aux dérivées partielles**) d'ordre 1 ou du premier ordre est une équation de la forme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \partial_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \mathbf{0} \tag{2.1.1}$$

$\partial_x u(x, y)$ désigne la dérivée partielle par rapport à x ($\partial_x u(x, y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$).
L'**ordre** d'une EDP est le plus grand ordre de dérivation qui apparaît dans l'équation 2.1.1.
La **dimension** d'une EDP est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u. Résoudre une EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d(d = 2)$, c'est trouver une fonction $u(x, y)$ différentiable dans Ω telle que l'équation (2.1.1) soit satisfaite. En général une EDP est complétée par des conditions aux bords de Ω du type :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \partial_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \mathbf{0} \text{ pour } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \boldsymbol{\Gamma} \subset \partial\boldsymbol{\Omega} \tag{2.1.2}$$

On parle de **Problème aux frontières** quand les conditions portent sur le bord complet du domaine. Quand ce dernier est d'extension infinie (exemple de l'étude de la propagation d'ondes dans l'atmosphère), on parle de **Problème extérieur**. Le problème de Cauchy est posé quand les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur de l'équation.

2.2 Conditions aux limites classiques

On se place dans le cas où une EDP est définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$.

2.2.1 Condition aux bords de Dirichlet

La condition de Dirichlet aux bords peut se définir comme la donnée d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ sur une partie Γ de la frontière de Ω, nous avons donc :

$$u(x) = f(x), \ \forall\, x \in \Gamma \subset \partial\Omega \tag{2.2.1}$$

ou

$$u(t,x) = f(x), \forall\, x \in \Gamma \subset \partial\Omega(t) \tag{2.2.2}$$

La fonction f est une donnée du problème.

Remarque 2.2.1 En mécanique des milieux continus, les conditions de Dirichlet reviennent à imposer une vitesse ou un déplacement sur le bord du milieu.

1. Condition aux bords de Neumann : On appelle condition de Neumann une condition qui donne une valeur à la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un problème du deuxième type est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.
2. Condition initiale ou condition de Cauchy : On rappelle que l'on a la donnée de la valeur de $u(t)$ en t_0, soit $u(t_0) = u_0,\ u_0 \in \mathbb{R}^n$.
3. On appelle condition de Fourier-Robin une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction et sa valeur sur le bord $\partial\omega$.
4. On appelle problème du troisième type un problème où les conditions sont de types différents sur des portions du bord.

Remarque 2.2.2 Rechercher une solution ou plusieurs d'une équation aux dérivées partielles n'est pas forcément simple, et doit être reprécisé pour chaque problème.

2.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles

2.3.1 L'équation du transport

Dans la notation $u(t,x)$ la variable t désigne la variable temps.

$$\begin{cases} u_t(t,x) + bu_x(t,x) = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

b pouvant être une constante réelle ou une fonction de la variable réelle x.

2.3.2 L'équation de Hamilton- Jacobi

$$\begin{cases} u_t(t,x) + f(\nabla u(t,x)) = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

∇ étant défini dans l'équation (1.1.1)

2.3.3 Loi de Conservation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x f(u(t,x)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

2.3.4 L'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Δ étant défini dans (1.10.1)

2.3.5 L'équation de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

2.3.6 L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

2.3.7 L'équation des ondes

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \Omega \\ u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = g(x), & x \in \Omega \\ u_t(0,x) = h(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

2.3.8 EDP linéaires ou non-linéaires

Définition 2.3.1 On appelle opérateur différentiel P associé à l'équation EDP du type (2.1.1) toute application qui à une fonction u associe le membre de gauche de l'équation (2.1.1).

Définition 2.3.2 On dit que l'EDP de l'équation (2.1.1) est linéaire si l'opérateur différentiel P associé est linéaire : Pour toute fonction u, v et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v)$. On dit que l'opérateur est non linéaire dans le cas contraire.

Exemples 2.3.1 L'opérateur $P_1 : u \longmapsto \partial_x u + \partial_y u$ est linéaire. L'opérateur P_2 défini par : $P_2 : u \longmapsto \partial_x u + u\partial_y u$ n'est pas linéaire car $P_2(\alpha u) \neq \alpha P_2(u)$, puisque $P_2(\alpha u) = \alpha\partial_x u + \alpha^2 u \partial_x u \neq \alpha P_2(u) = \alpha(\partial_x u + u\partial_y u)$.

2.4 Résolution d'une EDP du premier ordre

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$, $(x, u, p) \longmapsto F(x, u, p)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. L'EDP du premier ordre est l'équation (2.1.1) qu'on peut écrire :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Omega} \tag{2.4.1}$$

où ∇u est défini comme le $grad\, u$ (chapitre 1). Cette équation est complétée d'une condition dite au bord :

$$u(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma \tag{2.4.2}$$

où $\Gamma \subset \partial\Omega$ (sous ensemble du bord) et $g : \Gamma \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Remarque 2.4.1 Γ peut être un sous ensemble de Ω, dans ce cas la condition (2.4.2) n'est pas forcément une condition aux bords, mais on peut l'appeler une condition complémentaire.

On cherche une solution de l'équation (2.4.1) c'est à dire une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que l'équation (2.4.1) soit vérifiée. Dans certains cas, on exige que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et que u vérifie aussi la condition complémentaire.

2.4.1 La méthode des caractéristiques

On suppose $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ est une solution classique de (2.4.1).
Soit maintenant $x : I \longmapsto \Omega$ une courbe de classe $\mathbb{C}^1$ définie sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$. On pose :

$$z(s) = u(x(s)), \text{ et } p(s) = \nabla u(x(s)). \tag{2.4.3}$$

Si on suppose que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, les fonctions z, p sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, l'une à valeurs réelles, l'autre à valeurs vectorielles. En dérivant les deux fonctions % à s, on obtient :

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\dot{x}_j(s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(s)\dot{x}_j(s) \tag{2.4.4}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$

$$\dot{p}_j(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x(s))\dot{x}_i(s). \tag{2.4.5}$$

En dérivant l'équation (2.4.1) par rapport à x_j, on obtient :

$$0 = \tfrac{\partial F}{\partial x_j}(x, u(x), \nabla u(x)) + \tfrac{\partial F}{\partial u}(u, u(x), \nabla u(x))\tfrac{\partial u}{\partial x_j} + \tag{2.4.6}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u(x), \nabla u(x))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x). \tag{2.4.7}$$

Supposons que la courbe x choisie est telle que $\dot{x}(s) = \nabla_p F(x(s), z(s), p(s))$.
On va simplifier les trois équations ci-dessus : Les fonctions x, z et p vérifient un système d'équations différentielles appelé **système d'équations différentielles caractéristiques :**

$$\begin{cases} \dot{x}_j(s) &= \tfrac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)) \ (1 \leq j \leq n), \\ \dot{z}(s) &= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s); p(s)))p_j(s), \\ \dot{p}_j(s) &= -\tfrac{\partial F}{\partial x_j}(x(s), z(s), p(s)) - \tfrac{\partial F}{\partial u}(x(s), z(s); p(s))p_j(s) \ (1 \leq j \leq n). \end{cases} \tag{2.4.8}$$

Remarque 2.4.2 Ce système peut servir à montrer l'unicité et l'existence de solutions et même pour résoudre l'équation (2.4.1).

On doit chercher une courbe x, la fonction z (il s'agit de la fonction u restreint à cette courbe) et la fonction p (c'est le gradient de u restreint à cette courbe).

Remarque 2.4.3 Si on trouve "assez" de courbes comme solutions, dans le sens que la réunion des images de toutes ces courbes est tout Ω, on peut espérer de pouvoir construire une solution u de l'équation 2.4.1.

Exemple 2.4.1 Soit à résoudre l'équation

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u, & x_1, x_2 > 0 \\ u(x_1, 0) = g(x_1), & x_1 > 0 \end{cases} \tag{2.4.9}$$

Cette équation est une EDP du premier ordre, un cas particulier de (2.4.1) et de (2.4.2). Si on définit l'ouvert

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\right\},$$

la fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ par :

$$F(x_1, x_2, p_1, p_2) = x_1 p_2 - x_2 p_1 - u$$

alors (2.4.9) est un cas particulier du problème (2.4.1). Les équations différentielles caractéristiques sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(s) &= -x_2(s) && (2.4.10)\\ \dot{x}_2(s) &= x_1(s) && (2.4.11)\\ \dot{z}(s) &= -x_2(s)p_1(s) + x_1(s)p_2(s) = z(s) && (2.4.12) \end{aligned}$$

avec les données initiales :

$$x_1(0) = x > 0,\ x_2(0) = 0,\ z(0) = g(x).$$

Les solutions du système :

$$(x_1(s), x_2(s)) = (x \cos s, x \sin s)\text{et } z(s) = g(x) \exp s$$

Si on veut résoudre et calculer la solution du problème (2.4.1) en un point $(x_1, x_2) \in \Omega$, il faut résoudre le système :

$$\begin{aligned} x_1 = &\ x \cos s \\ x_2 = &\ x \sin s, \end{aligned}$$

x, s sont en fonction de x_1 et x_2. On obtient : $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $s = \arctan \frac{x_2}{x_1}$. La solution finale u du problème (2.4.1) :

$$u(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})e^{\arctan \frac{x_2}{x_1}},\ (x_1, x_2) \in \Omega$$

On vérifie que u est bien une solution.

2.4.2 Équation du transport linéaire à coefficients variables

Théorème 2.4.1 Soient g, b deux fonctions dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tels que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |b(x)| < \infty$, alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + b(x)\partial_x u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x) \end{cases} \tag{2.4.13}$$

Démonstration. L'équation de transport est une équation d'évolution, la variable t pour le temps et la variable x pour l'espace. Pour utiliser (2.4.1), on va remplacer t par x_0 et x par x_1. L'équation (2.4.13) devient :

$$\begin{cases} \partial_{x_0} u(x_0, x_1) + b(x_1)\partial_{x_1} u(x_0, x_1) = 0, & x_0 > 0, x_1 \in \mathbb{R} \\ u(0, x_1) = g(x_1) \end{cases} \tag{2.4.14}$$

Si on pose $\Omega = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 : x_0 > 0\}$ et $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x_0, x_1, u, p_0, p_1) = p_0 + b(x_1)p_1$. On remarque que l'équation (2.4.14) est un cas particulier de (2.4.1).

Unicité : Soit u une solution de (2.4.14). Les équations différentielles caractéristiques pour ce cas sont :

$$\dot{x}_0(s) = 1$$

$$\dot{x}_1(s) = b(x_1(s)),$$

$$\dot{z}(s) = p_0(s) + b(x_1(s))p_1(s) = 0$$

La dernière égalité résulte de la définition de z et du fait que u soit solution de (2.4.14). Comme le problème est linéaire, il suffit de résoudre ces trois équations différentielles qui sont indépendantes des équations différentielles pour p_1 et p_1. Pour les données initiales $x_0(0) = 0, x_1(0) = x \in \mathbb{R}$, $z(0) = u(0,x) = g(x)$ on obtient :

$$x_0(s) = s,$$

$$z(s) = z(0) = g(x).$$

En particulier, on sait que toute solution u est constante sur toute courbe caractéristique. En utilisant la théorie des équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz, existence d'une solution maximale), pour l'équation $\dot{x}_1(s) = b(x_1(s))$, on sait que cette équation différentielle admet pour donnée initiale $x_1(0) = x \in \mathbb{R}$ une solution unique définie pour tout $s \in \mathbb{R}$. (b est localement lipshitzienne et globalement bornée). Le même argument montre que pour tout point (x_0, x_1) du demi plan Ω, il existe une courbe caractéristique **unique** qui traverse à la fois le point (x_0, x_1) et un point unique de la forme $(0, x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$. On utilise que $x_0(s) = s$ et que x_1 est définie globalement. Comme la solution u est constante sur toute courbe caractéristique, $u(x_0, x_1)$ est alors déterminée par la valeur de u en $(0, x)$, c'est à dire par $g(x)$. Ce qui montre l'unicité de la solution u de l'équation de transport.

Existence : Pour définir un candidat de solution on utilise les équations caractéristiques : Pour tout point (x_0, x_1) du demi-plan Ω il existe une courbe caractéristique unique qui traverse à la fois le point (x_0, x_1) et un point **unique** de la forme $(0, x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$. Donc, étant donné un point t, $t = (x_0, x_1) \in \Omega$, on prend cette courbe caractéristique et le point $(0; x)$ sur cette courbe et on définit

$$u(x_0, x_1) = g(x)$$

On peut montrer facilement que la fonction u ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est solution de l'équation de transport.

Remarque 2.4.4 On peut montrer de la même manière que pour tout g, b, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |b(x)| < \infty$, le problème non-homogène suivant admet une solution unique :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) = f(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{2.4.15}$$

Exemple 2.4.2 Le cas de coefficients constants
pour tout $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'équation de transport linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b\partial_x u(t,x) = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{2.4.16}$$

admet une solution unique, donnée par :

$$u(t,x) = g(x - tb) \tag{2.4.17}$$

Les équations différentielles caractéristiques sont ici particulièrement simples :

$$\dot{x}_0(s) = 1,$$
$$\dot{x}_1(s) = b,$$
$$\dot{z}(s) = 0$$

Comme dans la démonstration du théorème on fait l'identification $x_0 \leftrightarrow t$ et $x_1 \leftrightarrow x$. On peut donc conclure :

Proposition 2.4.1 Plus généralement, le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) = f(t,x) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{2.4.18}$$

admet la solution unique donnée par :

$$u(t,x) = g(x - bt) + \int_0^t f(\tau, x - bt + b\tau)d\tau.$$

2.5 L'équation des ondes en une dimension

2.5.1 L'équation des ondes sur $\mathbb{R}$

Elle est de la forme :

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Les fonctions $u_+, u_1 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ sont données. L'équation des ondes est une équation à dérivées du second ordre, mais on peut la réecrire comme un système d'équations à dérivées partielles du premier ordre. On peut la factoriser :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})u = u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{2.5.2}$$

Si on pose $\nu(t,x) = (\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})u(t,x)$, alors on obtient un système d'équations de transport pour les fonctions u, ν :

$$\begin{cases} \nu_t + \nu_x = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_t - u_x = \nu, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \nu(0,x) = u_1(x) - u_0'(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

Comme dans l'exemple (2.4.2), on obtient comme solution :

$$\nu(t,x) = a(x - t)$$

où $a(x) = \nu(0,x) = u_t(0,x) - u_x(0,x) = u_1 - u_0'(x),\ x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_0(x+t) + \int_0^t \nu(\tau, x + t - \tau)d\tau && (2.5.4) \\ &= u_0(x+t) + \int_0^t a(x + t - 2\tau)d\tau && (2.5.5) \\ &= u_0(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(\tau)d\tau. && (2.5.6) \end{aligned}$$

Par définition donc la solution u de l'équation des ondes par la formule de d'Alembert :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\tau)d\tau. \tag{2.5.7}$$

Théorème 2.5.1 Pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et tout $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ l'équation des ondes (2.5.1) admet une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ unique. Celle-ci est donnée par la formule de d'Alembert (2.5.7).

2.5.2 L'équation des ondes sur un intervalle borné

Soit maintenant l'équation des ondes sur un intervalle borné avec conditions au bord de Dirichlet :

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, & t > 0, x \in (0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = 0; & t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x); & x \in (0,L), \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.5.8}$$

Ici, les fonctions $u_0, u_1 : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont données. Le problème (2.5.8) est aussi l'équation d'une corde vibrante. L'intervalle $(0,L)$ représente la corde, la valeur $u(t,x)$ le déplacement (en direction orthogonale) en temps $(t \geq 0)$ d'un point x de la corde. La condition au bord de Dirichlet veut dire que les deux extrémités de la corde sont fixées (pas de déplacement possible). La fonction u_0 est le déplacement initial de la corde, la fonction u_1 est la vitesse initiale de la corde.

Théorème 2.5.2 Pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^2([0,L])$ tel que $u_0(0) = u_0(L) = 0$ et pour tout $u_1 \in \mathcal{C}^1([0,L])$ il existe une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times [0,L])$ unique du problème (2.5.8).

Définition 2.5.1 Unicité : Par linéarité, il suffit de montrer que si u est une solution de (2.5.8) pour les données initiales $u_0 = u_1 = 0$, alors $u = 0$. Soit donc u une solution pour ces données initiales. On prolonge la solution u en une fonction impaire (par rapport à la variable x) sur $\mathbb{R}_+ \times [-L,+L]$ et puis en u une fonction $2L-$ périodique (par rapport à la variable x) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. La fonction ainsi obtenue est une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ (problème (2.5.1)) pour les données initiales $u_0 = u_1 = 0$. Par unicité (Théorème 2.5.1) on a : $u = 0$.

Existence : On prolonge les fonctions u_0, u_1 en des fonctions impaires sur l'intervalle $[-L,+L]$ et puis en des fonctions $2L-$ périodiques sur tout $\mathbb{R}$. Les fonctions qu'on obtient ainsi seront aussi appelées u_0, u_1. On définit u comme dans la formule d'Alembert, alors on montre facilement que la restriction de cette fonction u à l'ensemble $\mathbb{R}_+ \times [0;L]$ est une solution du problème (2.5.8)

2.6 Étude d'un système différentiel

On étudie dans cette section un système différentiel de la forme :

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{R}} \tag{2.6.1}$$

Où P, Q, R sont des fonctions définies dans (2.6.1).

2.6.1 Définitions et généralités

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct, on désigne par $\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ un point de l'espace et on note soit $\mathbf{f}(\mathbf{M})$ ou $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ la valeur d'une fonction $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{M}$. Soient $\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ trois fonctions supposées de classe $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$, des variables $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$. On s'intéresse à la résolution du système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{$\mathcal{S}$}$$

Remarque 2.6.1 Le système ($\mathcal{S}$) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0 \tag{2.2}$$

Définition 2.6.1 On appelle **solution du système** ($\mathcal{S}$) **une courbe** ($\mathcal{C}$), dont la tangente en tout point $\mathbf{M}$ de coordonnées (x,y,z) en lequel P,Q,R ne s'annulent pas simultanément, est dirigé par le vecteur de coordonnées $(P(\mathbf{M}),Q(\mathbf{M}),R(\mathbf{M}))$.

Rechercher une solution du système ($\mathcal{S}$) revient à trouver une repésentation paramétrique $t\longmapsto \mathbf{M}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ de la courbe ($\mathcal{C}$), telle que en tout point de paramètre t on ait :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}(t)=\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = k(t)\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}_{\mathbf{M}(t)} \tag{2.3}$$

On déduit donc la coliéarité du vecteur tangent à ($\mathcal{C}$) au point $\mathbf{M}(t)$ et du vecteur de composantes $(P,Q,R)_{\mathbf{M}(t)}$. Si P,Q et R en s'annulent pas en $\mathbf{M}(t)$, alors

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{P(\mathbf{M}(t))}=\frac{\frac{dy}{dt}}{Q(\mathbf{M}(t))}=\frac{\frac{dz}{dt}}{R(\mathbf{M}(t))} \tag{2.4}$$

Si $\mathbf{P}$ $(\text{resp}\mathbf{Q},\text{resp}\mathbf{R})$ ne s'annule pas en $\mathbf{M}(t)$ alors il en est de même pour $\frac{dx}{dt}$ (resp($\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}$)). On supposera dans la suite que $\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ non simultanément nuls.

Remarque 2.6.2 Quand la solution existe, la résolution directe du système (2.3) donne une repésentation paramétrique d'une courbe solution de ($\mathcal{S}$). Puisque le problème est posé dans $\mathbb{R}^3$, une technique alternative pour caractériser une courbe est de la définir comme intersection de deux surfaces.

2.6.2 Intégrales premières

Définition 2.6.2 On appelle **intégrale première** du système (2.3) une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ des trois variables x, y, z non constante, et telle que, pour toute solution $(\mathcal{C})$: $t \longmapsto (x(t), y(t)), z(t))$ de $(\mathcal{S})$, la fonction $t \longmapsto f(x(t), y(t), z(t))$ soit constante.

Théorème 2.6.1 Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ des trois variables x, y, z est une intégrale première de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, dans tout domaine où les solutions de $(\mathcal{S})$ sont définies elle vérifie :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) + \mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{0} \qquad (\mathcal{E})$$

Démonstration. Soit $t \longmapsto \mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une solution de $(\mathcal{S})$, et f une intégrale première ; par dérivation composée on a :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\mathbf{f}(\mathbf{M}(\mathbf{t})) = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}(\mathbf{t})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{M}(\mathbf{t})) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{M}(\mathbf{t})) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{M}(\mathbf{t})) \tag{2.5}$$

Le membre de gauche est nul. (car $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont respectivement proportionnels à P,Q, R, et que la fonction $t \longmapsto f(x(t), y(t), z(t))$ est constante). Géométriquement l'équation $(\mathcal{E})$ correspond à l'orthogonalité du gradient de la fonction décrivant la surface $\sum_{f,\mathbf{M}_0}$ et du vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en $\mathbf{M}_0$, avec :

$$\sum_{f,\mathbf{M}_0} = \left\{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{M}) = f(\mathbf{M}_0)\right\} \tag{2.6}$$

Comme le gradient est normal au plan tangent à la surface. $\mathcal{C}$ est tracée sur $\sum_{f,\mathbf{M}_0}$, son vecteur tangent appartient donc au plan tangent à la surface. D'autre part , si f_1, f_2 sont deux intégrales premières de $(\mathcal{S})$, et si $\mathbf{M}_0$ est un point de la courbe solution $\mathcal{C}$, alors les surfaces : $\sum_{\mathbf{f_1},\mathbf{M_0}} : \mathbf{f_1}(\mathbf{M}) = \mathbf{f_1}(\mathbf{M_0})$ et $\sum_{\mathbf{f_2},\mathbf{M_0}} : \mathbf{f_2}(\mathbf{M}) = \mathbf{f_2}(\mathbf{M_0})$ contiennent toutes les deux courbes $\mathcal{C}$.
Déterminer si $\sum_{f_1,\mathbf{M}_0} \cap \sum_{f_2,\mathbf{M}_0}$ permet de définir $\mathcal{C}$ et si d'autres intégrales premières contenant $\mathcal{C}$ peuvent être définies. C'est l'objet de la section suivante.

Définition 2.6.3 Trois fonctions f, g, h de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ sont dites **fonctionnellement indépendantes** si les seules fonctions différentiables H telles que la fonction $(x, y, z) \longmapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ soit constante, sont les fonctions constantes.

Théorème 2.6.2 Soient f, g, h trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. Si le jacobien

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h})}{\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} \tag{2.7}$$

ne s'annule pas dans Ω, alors $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ sont fonctionnellement indépendantes.

Démonstration. La fonction

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \longmapsto \mathbf{H}(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}), \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}), \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}))$$

de la définition précédente est constante si et seulement si sa différentielle est nulle. Avec les formules de changement de variable et de la différentielle on a :

$$0 = dH = (\frac{\partial H}{\partial f}\ \frac{\partial H}{\partial g}\ \frac{\partial H}{\partial h})\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \qquad \forall (dx, dy, dz)$$

Si

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

Le système admet seulement la solution triviale $(\frac{\partial H}{\partial f}, \frac{\partial H}{\partial g}, \frac{\partial H}{\partial h}) = 0$ correspond à une fonction H constante. □

Théorème 2.6.3 Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. Si la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

est de rang 2, alors f, g sont fonctionnellement indépendantes.

Démonstration. En considérant une fonction $(x, y, z) \longmapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z)))$ on obtient :

$$0 = dH = (\frac{\partial H}{\partial f}, \frac{\partial H}{\partial g})\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \qquad \forall (dx, dy, dz)$$

Si la matrice centrale est de rang 2, seule la solution triviale $(\frac{\partial H}{\partial f}, \frac{\partial H}{\partial g}) = 0$ est possible.

Théorème 2.6.4 Soient f, g deux intégrales premières indépendantes du système différentiel :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{$\mathcal{S}$}$$

Toute intégrale première de ce système s'exprime alors en fonction de f et de g.

Démonstration. Soient f, g, h trois intégrales premières du système différentiel $(\mathcal{S})$ avec f et g indépendantes. En utilisant le théorème (2.6.1) :

$$\begin{cases} P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} & = 0 \\ P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z} & = 0 \\ P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y} + R\frac{\partial h}{\partial z} & = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$$

Comme P, Q, R ne sont pas simultanément nuls, la matrice du système ne peut pas être de rang 3 (sinon la seule solution serait la solution triviale).

D'après le théorème (2.6.2), les trois fonctions ne sont pas indépendantes. Il existe donc une fonction H non constante telle que :

$$H(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)) = 0$$

ce qui nous amène à :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial f}, \frac{\partial H}{\partial g}, \frac{\partial H}{\partial h}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

comme f et g sont indépendantes, d'après le théorème (2.6.3) les deux premières lignes sont indépendantes et donc et $\frac{\partial H}{\partial h}$ ne peut donc être nul sans que $\frac{\partial H}{\partial f}$ et $\frac{\partial H}{\partial g}$ le soient, ce qui est impossible (H non constante). Finalement $\frac{\partial H}{\partial h} \neq 0$; le théorème sur les fonctions implicites permet d'exprimer h en fonction de f et g.

D'où on arrive au résultat suivant :

Théorème 2.6.5 Soient f et g deux intégrales premières indépendantes du système différentiel :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{$\mathcal{S}$}$$

Alors, pour tout couple de réels (a, b), les courbes $\mathcal{C}_{ab}$, intersection des surfaces $f(x,y,z) = a$ et $g(x,y,z) = b$ sont solutions du système $(\mathcal{S})$.

Proposition 2.6.1 (Mécanisme pour une nouvelle intégrale première) On dispose d'un mécanisme simple pour construire une nouvelle intégrale première contenant $\mathcal{C}_{ab}$.

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est une fonction telle que $\mathcal{F}(a) = b$ alors la courbe $\mathcal{C}_{ab}$ appartient à la surface d'équations $h(x,y,z) = 0$ avec :

$$h(x,y,z) = \mathcal{F}(f(x,y,z)) - g(x,y,z)) \tag{2.8}$$

□

2.6.3 Méthode de résolution

Pour résoudre le système $(\mathcal{S})$, il faut donc déterminer deux intégrales premières indépendantes.

Toute intégrale première du système différentiel $(\mathcal{S})$ doit satisfaire $(\mathcal{E})$, donc :

$$\begin{cases} df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

En posant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = A(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = B(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = C(x,y,z) \end{cases}$$

On aboutit au résultat.

Proposition 2.6.2 Pour obtenir une intégrale première f du système différentiel :

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{R}} \tag{$\mathcal{S}$}$$

il suffit de déterminer trois fonctions A, B, C telles que :

$$\begin{cases} df = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz \\ 0 = A(x,y,z)P(x,y,z) + B(x,y,z)Q(x,y,z) + C(x,y,z)R(x,y,z) \end{cases} \tag{2.10}$$

Remarque 2.6.3 la relation :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

peut s'exprimer :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$$

Donc, pour tout couple de réels (a, b) tels que $a\beta + b\delta \neq 0$:

$$\frac{a\alpha + b\gamma}{a\beta + b\delta} = \frac{a\lambda\beta + b\lambda\delta}{a\beta + b\delta} = \lambda = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Pour trouver les intégrales premières on utilise la propriété suivante :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \implies \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{Adx + Bdy}{AP + BQ} \ \ (\text{si } AP + BQ \neq 0) \tag{2.11}$$

Exemple 2.6.1 Soit à résoudre le système suivant :

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

$P(x,y,z) = x(y-z), Q(x,y,z) = y(z-x), R(x,y,z) = z(x-y)$.

$$\begin{cases} df = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz \\ 0 = A(x,y,z)x(y-z) + B(x,y,z)y(z-x) + C(x,y,z)z(x-y) \end{cases}$$

On sait aussi que $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$.
$P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.
Dans cet exemple $P+Q+R = 0$ (car $xy - xz + yz - yx + zx - zy = 0$), on trouve $A = B = C = 1$. La première intégrale : $df_1 = dx + dy + dz \ \ f_1 : (x,y,z) \longmapsto x + y + z + Constante$.
On a de plus :

$$yzP + xzQ + xyR = 0$$

donc :

$$A(x,y,z) = yz, \quad B(x,y,z) = xz, \quad C(x,y,z) = xy$$

convient, ce qui conduit à une deuxième intégrale première :

$$df_2 = yzdx + xzdy + xydz \quad \implies f_2 : (x,y,z) \longmapsto xyz + \text{Constante}.$$

Les fonctions $(x,y,z) \longmapsto x+y+z$ et $(x,y,z) \longmapsto xyz$ étant indépendantes, les solutions du système considéré sont donc les intersections des surfaces $x + y + z = a$ et $xyz = b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2.7 EDP quasi-linéaires du premier ordre

Définition 2.7.1 Soient u, v, w trois fonctions supposées de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on appelle **équation aux dérivées partielles quasi-linéaires du premier ordre**, d'inconnue f, une équation de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \tag{$\mathcal{E}$}$$

2.7.1 Recherche de solutions

Une solution f de $\mathcal{E}$ peut être vue comme une fonction associant à un point (x, y) du plan une altitude $z = f(x, y))$, et peut être interprétée comme une surface de $\mathbb{R}^3$. On choisit donc les solutions de $\mathcal{E}$ sous forme implicite, i.e. des fonctions φ définissant implicitement f comme solution de $\mathcal{E}$:

$$\varphi(x, y, z) = \text{Constante} \Longrightarrow \ z = f(x, y)$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites, en tout point où $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{z}}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{z}}} \tag{2.1}$$

f est alors solution de $\mathcal{E}$ si :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

φ est donc une intégrale première du système :

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} \tag{$\mathcal{S}$}$$

Le système $(\mathcal{S})$ est appelé **système caractéristique** de $(\mathcal{E})$.

Théorème 2.7.1 Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les intégrales premières du système caractéristique $(\mathcal{S})$. Si φ et ϕ sont deux intégrales premières indépendantes et F une fonction de deux variables non constantes, alors les solutions s'écrivent sous forme implicite :

$$\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})), \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))) = \text{Constante} \tag{2.7.3}$$

Exemple 2.7.1

$$\mathbf{y}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{x}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0} \tag{$\mathcal{E}_1$}$$

Le système caractéristique de $(\mathcal{E}_\mathbf{1})$ est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = & -\frac{dy}{x} \\ 0 = & dz \end{cases} \tag{$\mathcal{S}_1$}$$

On voit que $(x, y, z) \longmapsto \varphi(x, y, z) = z$ est une intégrale première. De plus :

$$0 = xdx + ydy = d(x^2 + y^2)$$

Autrement dit, $(x, y, z) \longmapsto \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$ est également une intégrale première. Toutes les solutions sont donc définies implicitement sous la forme :

$$(x, y) \longmapsto F(x^2 + y^2, f(x, y)) = \text{Constante}$$

ce qui conduit à

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

les solutions sont les surfaces de révolution d'axe $(O, \vec{z})$.

2.7.2 Les courbes caractéristiques

Définition 2.7.2 $u; v; w$ étant trois fonctions supposées de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on appelle **courbes caractéristiques** de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$u(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y} = w(x, y, f(x, y)) \tag{$\mathcal{E}$}$$

Les solutions de son système caractéristique

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)} \tag{$\mathcal{S}$}$$

Théorème 2.7.2 En utilisant la proposition 2.6.1, une infinité de surfaces solutions passe par courbe caractéristique.

Définition 2.7.3 Avec les notations et les hypothèses de la définition suivante, une courbe $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ est dite caractéristique en aucun point, s'il n'existe aucun point $\mathbf{M}$ de $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ où le vecteur tangent soit colinéaire au vecteur de composantes $(u(\mathbf{M}), v(\mathbf{M}), w(\mathbf{M}))$.

Définition 2.7.4 On appelle **pied de la caractéristique** passant par le point de coordonnées (x, y) le point d'intersection de la caractéristique et de la ligne sur laquelle les conditions initiales sont données (en général l'axe des abscisses).

2.7.3 Problème de Cauchy

Définition 2.7.5 u, v, w étant trois fonctions supposées de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, f_0 une fonction également analytique définie sur une courbe régulière $\mathcal{N}_0$ donnée sous forme paramétrique $t \longmapsto (x_0(t), y_0(t))$; on appelle **problème de Cauchy** le système suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y} & = & w(x, y, f(x, y)) \\ f(x_0(t), y_0(t)) & = & f_0(t) \text{ sur } \mathcal{N}_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles assortie d'une condition aux limites donnée sur une courbe.

2.7.4 Étude du problème de Cauchy

Si l'on dispose d'une fonction f_0 donnée le long d'une courbe paramétrée, peut-on obtenir la solution au voisinage de celle-ci ? Et si, oui, peut-on ainsi de proche en proche obtenir la solution dans un plus grand.
Les hypothèses d'analycité conduisent à chercher la solution sous la forme d'un développement en série autour de la courbe $\mathcal{N}_0$ où f est connue. Quand la solution existe (condition nécessaire), un développement limité à l'ordre 1 de f autour de (x_0, y_0).

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f_0(x_0, y_0) + dx\frac{\partial f_0}{\partial x}(x_0, y_0) + dy\frac{\partial f_0}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\sqrt{dx^2 + dy^2})$$

$\frac{\partial f_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_0}{\partial y}$ sont supposées connues.

- La courbe $\mathcal{N}_0$ étant régulière, on peut définir une tangente en tout point, et donc supposer que f_0 est donnée en fonction de l'abscisse curviligne s (qui rend le vecteur tangent $\vec{t}(s)$ unitaire). On suppose, en tout point de $\mathcal{N}_0$, la valeur de f est donnée par :
  $$f(x_0(s), y_0(s)) = f_0(s)$$
  Ceci nous permet d'obtenir la valeur de la dérivée tangentionnelle de f.
  $$\frac{df_0}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y_0}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial M}(M_0(s))\vec{t}(s) \tag{2.5}$$
  La condition aux limites donne donc une première équation linéaire sur les dérivées partielles du premier ordre.
- Est-ce que l'EDP écrite sur $\mathcal{N}_0$ permet-elle d'obtenir une deuxième équation indépendante ? Comme par hypothèse :
  $$u(x_0, y_0, f(x_0, y_0))\frac{\partial f}{\partial x} + v(x_0, y_0, f(x_0, y_0))\frac{\partial f}{\partial y} = w(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$
  on a donc le système matriciel suivant :
  $$\begin{pmatrix} u(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) & v(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} =$$
  $$\begin{pmatrix} w(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \\ \frac{df_0}{ds} \end{pmatrix}$$
  Avec la condition du déterminant :
  $$\begin{vmatrix} u(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) & v(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.6}$$

On peut donc obtenir le long de $\mathcal{N}_0$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, ce qui permet grâce aux formules de Taylor à l'ordre 1, d'obtenir de la solution f, un développement limité au voisinage de la courbe. La condition est donc que le déterminant (2.6) ne s'annule pas sur $\mathcal{N}_0$, on dit alors que $\mathcal{N}_0$ ne doit pas être dans la projection dans le plan (x, y) d'une courbe caractéristique. Cette condition est suffisante :

Théorème 2.7.3 (**Théorème de Cauchy-Kowalewski**) u, v, w étant trois fonctions analytiques dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$u(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x} + v(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y} = w(x, y, f(x, y)) \qquad (\mathcal{E})$$

Alors la donnée d'une condition initiale analytique sur une courbe régulière $\mathcal{N}_0$, qui n'est caractéristique en aucun point, **définit une unique solution analytique de** $(\mathcal{E})$, appelée solution du **Problème de Cauchy** relatif à la courbe $\mathcal{N}_0$.

Remarque 2.7.1 Ce théorème donne un résultat **local** d'existence et d'unicité de la solution analytique autour de la courbe de condition initiale. Il ne donne pas à priori d'information sur la taille du domaine d'existence de la solution. De même des solutions non-analytiques sont susceptibles de coexister.

2.7.5 Méthode des caractéristiques

Un problème est bien posé si la condition limite n'est pas donnée le long d'une caractéristique. Considérons un problème de Cauchy bien posé, où la courbe de condition limite $\mathcal{N}_0$ n'est pas une caractéristique et déterminons comment construire la courbe caractéristique qui passe par le point (x_0, y_0) de $\mathcal{N}_0$ correspondant à l'abscisse curviligne s_0. Cette courbe caractéristique $\mathcal{C}$ dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$t \longmapsto (x_c(t), y_c(t), z_c(t))$$

est solution de :

$$\begin{cases} \frac{dx_c}{dt} & = & u(x_c(t), y_c(t), z_c(t)) \\ \frac{dy_c}{dt} & = & v(x_c(t), y_c(t), z_c(t)) \\ \frac{dy_c}{dt} & = & w(x_c(t), y_c(t), z_c(t)) \end{cases} \qquad (2.7)$$

avec

$$x_c(0) = x_0,\ y_c(0) = y_0,\ z_c(0) = f_0(s_0). \qquad (2.8)$$

Donc on voit que la courbe caractéristique est solution d'un système d'équations différentiel ordinaires. La courbe caractéristique étant tracée sur la surface solution, $z_c(t)$ est la valeur de la fonction cherchée au point $(x_c(t), y_c(t))$:

$$z_c(t) = f(x_c(t), y_c(t))$$

Remarque 2.7.2 Il est donc relalivement simple d'obtenir la solution de l'équation aux dérivées partielles le long d'une caractéristique.

2.8 Exercices corrigés

Exercice 2.8.1 Soit l'équation (EDP) suivante, déterminer si cette EDP est linéaire ou non linéaire :

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Solution : Cette EDP est non linéaire. L'opérateur L associé est non linéaire du fait que $L(\alpha u) = \alpha^2 L(u)$. □

Exercice 2.8.2 Résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} 4\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - 3\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) & = & 0 \\ u(0,x) & = & x^3 \end{cases}$$

Solution : C'est une équation de transport. En utilisant l'exemple 2.4.2 et l'équation (2.4.17) la solution est $u(t,x) = (x + \frac{3}{4})^3$. □

Exercice 2.8.3 a) Résoudre :

$$\begin{cases} u_t + 2u_x & = & 0 \\ u(t=0,x) & = & \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

b) Évaluer $u(\frac{1}{2}, x)$.

Solution : a) C'est une équation de transport. $u(t,x) = g(x-2t)$, donc :

$$u(t,x) = \frac{1}{(x-2t)^2+1}$$

b) $u(\frac{1}{2}, x) = \frac{1}{(x-1)^2+1}$. □

Exercice 2.8.4 Soit à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - 4\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(t,0) = t^2. \end{cases}$$

Solution : Il s'agit d'une équation de transport. La solution est $u(t,x) = g(t-xb)$ $-4\partial_x u(x,t) + \partial_t u(x,t) = 0$ et $u(0,t) = t^2$. La solution est donc $u(x,t) = (t + \frac{1}{4}x)^2$.

□

Exercice 2.8.5 Soit l'équation (E) suivante :

$$\mathbf{z}\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dx}} = \sqrt{\mathbf{1-z^2}} \qquad (E)$$

Solution : y ne figure pas dans l'équation donc $dy = 0$. On peut déduire $y = Cte = C_1$.

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{dz}}{\sqrt{\mathbf{1-z^2}}}$$

$$dx = \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} \Longrightarrow x + \sqrt{1-z^2} = C_2$$

Une autre intégrale première. Géométriquement ce sont les cercles dans le plan d'équations $y = C_1$ et $z^2 + (C_2 - x)^2 = 1$. □

Exercice 2.8.6 Soit l'équation différentielle

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Trouver la solution qui passe par l'ellipse γ d'équations $z = my$ et $x^2 + (y-1)^2 = R^2$.

Solution : Le système différentiel associé :

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

$x^2 + y^2$ est une intégrale première. Toutes les solutions sont de la forme $z = F(x^2 + y^2)$, où F est de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $U = z$ et $V = x^2 + y^2$, nous savons que des intégrales premières, la courbe γ a pour équation $x^2 = R^2 - (t-1)^2$, $y = t$, $z = mt$. En éliminant t entre $mt = a$ et $R^2 + t^2 - (t-1)^2 = b$, ce qui impose $m \neq 0$ et donne $b - R^2 - \frac{2a}{m} - 1 = 0$. Donc $H(u,v) = \frac{2u}{m} - V + R^2 - 1$ et la solution est la paraboloïde de révolution $2z = m\,[x^2 + y^2 - R^2 - 1]$. $\square$

Exercice 2.8.7 Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mathbf{f}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{f^2}}$$

Solution : i) $\sqrt{1-f^2} = 0$ définit les deux solutions $f_1 : (x,y) \longmapsto +1$ et $f_2 : (x,y) \longmapsto -1$.

ii) Dans le cas où$|f| < 1$: Le système caractéristique de $(\mathcal{S}_1)$ est donné par :

$$\begin{cases} dy = & 0 \\ \frac{dx}{z} = & \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_1)$$

La première équation donne l'intégrale première ϕ_1 :

$$\phi_1 : (x,y,z) \longmapsto y$$

La seconde permet de déduire l'intégrale première ϕ_2 :

$$dx = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz = -d(\sqrt{1-z^2})$$

$$0 = dx + d(\sqrt{1-z^2})$$

et donc, finalement :

$$\phi_2 = (x,y,z) \longrightarrow x + \sqrt{1-z^2}$$

Les deux fonctions étant indépendantes, toute solution est donc définie implicitement par

$$F(y, x + \sqrt{1 - f^2(x,y)}) = \text{Constante}$$

ce qui implique que :

$$x + \sqrt{1 - f^2(x,y)} = \psi(y)$$

ψ étant une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, le domaine d'existence de la solution est alors l'ensemble des (x,y) tels que $|x - \psi(y)| < 1$. Donc :

$$f^2(x,y) = 1 - (x - \psi(y))^2$$

On parle de tuyau dont la section circulaire de rayon 1 reste orthogonale à la ligne des centres d'équation $y \longmapsto (\psi(y), y, 0)$.

$\square$

Exercice 2.8.8 Chercher la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mathbf{y(x+y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + x(x+y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + z(x+y)\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0}$$

Solution : On peut transformer l'équation en :

$$\frac{dx}{y(x+y)} = \frac{dy}{x(x+y)} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

nous avons :

$$xdx = ydy$$

ce qui donne :

$$xdx - ydy = 0$$

d'où en intégrant :

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_2$$

$c_2 = \sqrt{x^2 - y^2}$. De plus l'équation initiale peut se transformer en :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dy}{x}$$

En multipliant par z on a :

$$\frac{z}{y}dx = \frac{z}{x}dy = dz$$

Soient $P(x, y, z) = y(x + y)$, $Q(x, y, z) = x(x + y)$, $R(x, y, z) = z(x + y)$. Soit à chercher P_1, Q_1, R_1 pour que $PP_1 + QQ_1 + RR_1 = 0$. Si on prend $P_1 = Q_1 = \frac{1}{z}$ on peut par un petit calcul montrer que $R_1 = -\frac{(x+y)}{z^2}$. On peut déduire :

$$u_1(x, y, z) = \int P_1 dx + \int Q_1 dy + \int R_1 dz$$

$$u_1(x, y, z) = \int \frac{dx}{z} + \int \frac{dy}{z} + \int -\frac{(x+y)}{z^2} dz$$

Soit

$$u_1(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x+y}{z} = C_1$$

$$2\frac{(x+y)}{z} = C_1 \Longrightarrow 2C_1 z = x + y$$

Le résultat final est :

$$C_1 = \frac{(x+y)}{2}, \;\; C_2 = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

$\square$

Exercice 2.8.9 Résoudre l'EDP suivante :

$$\mathbf{\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+x^2} = \frac{dz}{y+z}}$$

Solution : Le système correspondant est :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+x^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y+x^2}{x}$$

d'où $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$
Par ailleurs nous avons :

$$\frac{d}{dx}(\frac{y}{x}) = \frac{x \cdot y' - y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{y}{x}) = \frac{1}{x}(y' - \frac{y}{x}) = 1$$

$$(\frac{y}{x})' = 1 \Longrightarrow \frac{y}{x} = x + C_1.$$

D'où

$$y = x^2 + C_1 x$$

Si on considère la première équation et la troisième on a :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{y+z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y+z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}$$

Donc :

$$\frac{dz}{dx} = z' = x + C_1 + \frac{z}{x}$$

$$\frac{z'}{x} = 1 + \frac{C_1}{x} + \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{z}{x}) = \frac{xz' - z}{x^2} = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = 1 + \frac{C_1}{x} + \frac{z}{x^2} - \frac{z}{x^2} = 1 + \frac{C_1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{z}{x}) = 1 + \frac{C_1}{x}$$

$$\frac{z}{x} = x + C_2 + C_1 \ln x \Longrightarrow z = x^2 + C_2 x + C_1 x \ln x$$

Les deux courbes intégrales : $y = C_1 x + x^2$; $z = C_1 x \ln x + C_2 x + x^2$ sont les solutions du système. □

Exercice 2.8.10 Déterminer la surface $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation :

$$\mathbf{yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy}$$

en passant par la circonférence : $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$.

Solution : Le système différentiel associé est :

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy}$$

La résolution du système

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} \Longrightarrow xzdx = yzdy$$

donne :

$$x^2 - y^2 = C_1$$

De même

$$\frac{dx}{yz} = \frac{-dz}{2xy} \Longrightarrow 2xydx = -yzdz$$

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = C_2$$

La solution générale est : $\Phi(x^2 - y^2, x^2 + \frac{z^2}{2}) = 0$. D'où

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \varphi(x^2 - y^2) \qquad (\mathfrak{C})$$

φ est une fonction arbitraire.

1.

$$x^2 + y^2 = 16,\, z = 3 \Longrightarrow x^2 = 16 - y^2$$

$$16 - y^2 + \frac{z^2}{2} = \varphi(x^2 - y^2)$$

$$2\varphi(x^2 - y^2) = 32 - y^2 + z^2$$

2. En remplaçant $z = 3$, il vient : $2\varphi(16 - 2y^2) = 41 - y^2$. Si on pose $u = 16 - 2y^2$, on obtient $\varphi(u) = \frac{25+u}{2}$. En utilisant $(\mathfrak{C})$ on obtient :

$$\varphi(x^2 - y^2) = \frac{25 + x^2 - y^2}{2} = x^2 + \frac{z^2}{2}$$

$$25 + x^2 - y^2 = 2x^2 + z^2$$

D'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

C'est une sphère de centre 0 et de rayon 5.
On peut également trouver la solution en résolvant le système avec $z = 3$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x^2 + \frac{z^2}{2} = C_2 \end{cases}$$

$C_1 = 16 - 2y^2$, $C_2 = \frac{41}{2} - y^2$ et $2C_2 - C_1 = 25$ donne la solution précédente.

□

Exercice 2.8.11 Déterminer la surface $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation :

$$\mathbf{\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4}$$

et passant par la parabole : $\mathbf{y^2 = z, x = 0}$.

Solution : Le système caractéristique est :

$$xdx = ydy = \frac{dz}{4}.$$

On a :

$$\begin{aligned} xdx &= ydy \Longrightarrow x^2 - y^2 = C_1 \\ xdx = \frac{dz}{4} &\Longrightarrow x^2 - \frac{z}{2} = C_2 \end{aligned}$$

La solution générale s'écrit :

$$\Phi(x^2 - y^2, x^2 - \frac{z}{2}) = 0$$

d'où

$$x^2 - \frac{z}{2} = \varphi(x^2 - y^2)$$

Où φ est une fonction arbitraire. Comme $y^2 = z, x = 0$, alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x^2 - \frac{z}{2} = C_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -z = C_1 x^2 \\ -\frac{z}{2} = C_2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{C_1}{2} = C_2.$$

En remplaçant C_1, C_2, on obtient $z = x^2 + y^2$ appelée paraboloïde de révolution. □

Exercice 2.8.12 Soit à intégrer :

$$\mathbf{(x^2 + y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

Solution : Le système différentiel correspondant est :

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{0}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} &\Longrightarrow \frac{dx + dy}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{dx - dy}{x^2 + y^2 - 2xy} \\ &\Longrightarrow \frac{d(x + y)}{(x + y)^2} = \frac{d(x - y)}{(x - y)^2} \end{aligned}$$

On a :

$$-\frac{1}{x + y} = -\frac{1}{x - y} + Constante.$$

ou

$$\frac{y}{x^2 - y^2} = C_1.$$

Par ailleurs

$$dz = 0 \Longrightarrow z = C_2.$$

La solution générale est :

$$\Phi(\frac{y}{x^2 - y^2}, z) = 0$$

D'où $z = \varphi(\frac{y}{x^2 - y^2})$, φ est une fonction arbitraire. □

Exercice 2.8.13 Déterminer la solution générale $u = f(x, y, z)$ de l'équation :

$$\mathbf{yz}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{xz}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} - \mathbf{xy}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

Solution : Le système correspondant est :

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-xy}$$

les deux intégrales premières

$$x^2 - y^2 = C_1, \;\; y^2 + z^2 = C_2$$

On trouve $u = \Phi(x^2 - y^2, y^2 + z^2)$. $\square$

Chapitre 3

Transformations intégrales

3.1 Transformation de Laplace

Définition 3.1.1 Étant donnée une fonction f de la variable réelle t pour $t \geq 0$. On suppose $f(t)$ continue par tranches. Pour assurer l'existence de certaines intégrales, on impose des restrictions complémentaires à la fonction f. On suppose qu'il existe des constantes réelles positives M et s_0 tels que :

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \tag{3.1}$$

pour toute valeur arbitraire de t dans $[0, +\infty[$.

Soit maintenant $p \in \mathbb{C}$, où $p = a + ib \ \ (a > 0)$, $e^{-pt}f(t)$ est une fonction de la variable réelle t :

$$e^{-pt}f(t) = e^{-(a+ib)t}f(t) = e^{-at}f(t)e^{-ibt} = e^{-at}f(t)\cos bt - i\,e^{-at}f(t)\sin bt$$

Si on considère l'intégrale impropre :

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t))dt = \int_0^\infty \cos bt\,dt - i\int_0^\infty e^{-at}f(t)\sin bt\,dt. \tag{3.2}$$

Proposition 3.1.1 Si $f(t)$ vérifie la condition (3.1) et $a > s_0$, alors les intégrales de la partie de droite de (3.2) existent et la convergence de ces intégrales est absolue.

Démonstration.

$$\left|\int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos bt dt\right| \leq \int_0^\infty \left|e^{-at}f(t)\cos bt\right| dt <$$

$$< M\int_0^\infty e^{-at}e^{s_0 t}dt < M\int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}dt = \frac{M}{a - s_0}.$$

De même on estime la seconde intégrale, donc l'intégrale $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ existe.

On définit donc une fonction $F(p)$.

Définition 3.1.2 On appelle transformée de Laplace ou image L image de $f(t)$ la fonction $F(p)$ définie par :

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \tag{3.3}$$

$f(t)$ est appelée l'original ou fonction objet.

Notation 3.1.1

$$F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$$

De même on note $L(f(t)) = F(p)$.

Remarque 3.1.1 Comme nous le verrons dans la suite les transformées de Laplace sont utilisées dans la résolution des équations différentielles ordinaires. Connaissant l'image on peut trouver l'original soit au moyen des tables (cf. Table (3.1) ci-dessous) soit par des méthodes exposées plus bas.

Proposition 3.1.2 Si deux fonctions continues $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ possèdent une même image $L(F(p))$ alors ces fonctions sont identiquement égales.

3.2 Images des différentes fonctions standards

I. Soit la fonction $\sigma_0(t)$ la fonction unité de Heaviside définie par :

$$\begin{cases} f(t) = & 1 \quad \text{pour } t \geq 0, \\ f(t) = & 0 \quad \text{pour } t < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

L'image de la fonction $\sigma_0(t)$:

$$L(\sigma_0(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p}|_0^\infty = \frac{1}{p}$$

On notera :

$$\sigma_0(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \frac{1}{p}$$

La représentation de la fonction $\sigma_0(t)$:

II. Soit $f(t) = \sin t$. On calcule la transformée de Laplace de $f(t)$.

$$L(\sin t) = \int_0^\infty e^{-pt} \; sintdt = \frac{e^{-pt}(-p\sin t - \cos t)}{p^2+1}|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1} \tag{3.2}$$

Donc :

$$\sin t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{p^2+1}$$

III. Soit $f(t) = \cos t$,

$$L(\cos t) = \int_0^\infty e^{-pt} \cos t dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p\cos t)}{p^2+1}|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

$$\cos t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2+1} \tag{3.3}$$

3.3 Images des fonctions $\sin at, \cos at, a > 0$

Considérons l'image de la fonction $f(at)$ avec $a > 0$.

Proposition 3.3.1 Si $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} f(t)$ alors

$$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a}) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} f(at). \tag{3.1}$$

En effet : On pose $z = at \ \ dz = a\,dt$, on obtient :

$$L(f(at)) = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}} f(z)dz$$

D'où le résultat obtenu.

Exemple 3.3.1 D'après la formule (3.2) et en utilisant (3.1) on a :

$$\sin at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{a}\frac{1}{(\frac{p}{a})^2 + 1}$$

ou

$$\sin at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{a}{p^2 + a^2}. \tag{3.2}$$

Exemple 3.3.2 D'après les formules (3.3) et (3.1) :

$$\cos at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{a}\frac{\frac{p}{a}}{(\frac{p}{a})^2 + 1}$$

$$\cos at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2 + a^2}. \tag{3.3}$$

3.3.1 Diverses Propriétés

Théorème 3.3.1 Si $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$, alors $F(p + \alpha)$ est l'image de la fonction $e^{-\alpha t}f(t)$,

$$\begin{cases} \text{Si} & F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t) \\ \text{alors} & F(p+\alpha) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} e^{-\alpha t}f(t). \end{cases} \tag{3.4}$$

on suppose que $Re(p + \alpha) > s_0$.

Preuve 3.3.1

$$L(e^{-\alpha t}f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t)dt.$$

Donc

$$L(e^{-\alpha t}f(t)) = F(p + \alpha) \tag{3.5}$$

3.3.2 Images des fonctions $\mathbf{e^{-\alpha t}}, \mathbf{sh}\,\alpha\mathbf{t}, \mathbf{ch}\,\alpha\mathbf{t}, \mathbf{e^{-\alpha t}}\sin\mathbf{at}, \mathbf{e^{-\alpha t}}\sin\mathbf{at}, \mathbf{e^{-\alpha t}}\cos\mathbf{at}$

Comme $1 \doteqdot \frac{1}{p}$ et la formule (3.4) alors :

$$\frac{1}{p+\alpha} \doteqdot e^{-\alpha t}. \tag{3.6}$$

de même

$$\frac{1}{p-\alpha} \doteqdot e^{\alpha t}. \tag{3.7}$$

(3.6) et (3.7) donnent

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) \doteqdot \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$$

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \doteqdot sh\alpha t. \tag{3.8}$$

en faisant la somme des deux formules :

$$\frac{p}{p^2-\alpha^2} \doteqdot ch\alpha t. \tag{3.9}$$

De la formule (3.2) et de la formule (3.4) :

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteqdot e^{-\alpha t}\sin at. \tag{3.10}$$

De la formule (3.3) et (3.4)) on a :

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteqdot e^{-\alpha t}\cos at. \tag{3.11}$$

Exemple 3.3.3 Trouver l'original $F(p)$ dont l'image est donnée par :

$$F(p) = \frac{7}{p^2+10p+41}.$$

Solution : Transformons $F(p)$:

$$\frac{7}{p^2+10p+41} = \frac{7}{(p+5)^2+16} = \frac{7}{4}\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Donc,

$$F(p) = \frac{7}{4}\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

$$F(p) \doteqdot \frac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t.$$

3.3.3 Dérivation de l'image

Théorème 3.3.2 Si $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$, alors

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t^n f(t) \tag{3.12}$$

Démonstration. Si $f(t)$ vérifie la condition (3.1) alors l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t) dt < \infty \tag{3.13}$$

En effet : $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, $a > s_0$; de plus $a > 0$ et $s_0 > 0$. On sait qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que $a < s_0 + \epsilon$, et que $\int_0^\infty e^{-(p-\epsilon)t} |f(t)| \, dt$ est finie. Par ailleurs :

$$\int_0^\infty \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt = \int_0^\infty \left| e^{-(p-\epsilon)t} e^{-\epsilon t} t^n f(t) \right| dt.$$

La fonction $e^{-\epsilon t} t^n f(t)$ étant bornée par un nombre N pour tout $t > 0$, on a :

$$\int_0^\infty \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt < N \int_0^\infty \left| e^{-(p-\epsilon)t} f(t) \right| dt = N \int_0^\infty e^{-(p-\epsilon)t} |f(t)| \, dt < \infty.$$

Ainsi l'intégrale (3.13) existe. Or elle peut être considérée comme la dérivée du n-ième ordre par rapport au paramètre p de l'intégrale. □

Donc de $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \, dt$ on obtient :

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

ces deux égalités nous donnent :

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t)$$

D'où la formule (3.12) du théorème énoncé. □

Proposition 3.3.2 Pour n quelconque on a :

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t^n. \tag{3.14}$$

Démonstration. Du fait que $\frac{1}{p} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} 1$ on a :

$$(-1) \frac{d}{dp} (\frac{1}{p}) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t$$

ou

$$\frac{1}{p^2} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t.$$

De même :

$$\frac{2}{p^3} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t^2.$$

et donc pour n quelconque et par récurrence la formule (3.14)

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t^n.$$

Exemples 3.3.1 1. En utilisant la proposition précédente on peut déduire de la formule :

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin atdt$$

Puis en dérivant par rapport au paramètre p les premier et second membres :

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t \sin at.$$

2. On peut également déduire de $\cos at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2+a^2}$ et de la formule (3.12) la formule :

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t \cos at.$$

3. De même de la formule :

$$\frac{1}{p+\alpha} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} e^{-\alpha t}$$

et de la proposition précédente on peut déduire :

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} te^{-\alpha t}$$

3.3.4 Image des dérivées

Théorème 3.3.3 Si $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$ alors

$$pF(p) - f(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f'(t). \tag{3.15}$$

Démonstration.

$$L(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt \tag{3.16}$$

On suppose que toutes les dérivées $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$, satisfont la condition (3.1) et donc l'intégrale (3.16). Effectuant l'intégration par parties de cette dernière nous trouvons :

$$L(f'(t)) \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = e^{-pt} f(t)|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

en utilisant la condition (3.1) nous avons :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0, \quad \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(p).$$

D'où

$$L(f'(t)) = -f(0) + pF(p).$$

Proposition 3.3.3

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f''(t)$$

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f''(t). \tag{3.17}$$

De manière plus générale l'image de la dérivée d'ordre n :

$$p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f^{(n)}(t). \tag{3.18}$$

Remarque 3.3.1 Dans le cas où $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ nous avons :

$$\begin{aligned} &F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t), \\ &pF(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f'(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &p^nF(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

3.3.5 Tableau récapitulatif

Table 3.1 – **Dictionnaire d'images**

n$^{\text{os}}$	$F(p)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$sh\alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$ch\alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\sin at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
11	$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)F_2(p)$	$f_1(t)*f_2(t)$

3.4 Transformée de Laplace et équations différentielles

Étant donnée une équation différentielle linéaire du n-ième ordre aux coefficients constants a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n :

$$\mathbf{a_0\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx(t)=f(t)} \tag{3.1}$$

On cherche une solution de cette équation $x=x(t)$ pour $t\geq 0$, vérifiant les conditions initiales :

$$\mathbf{x(0)=x_0,\ x'(0)=x'_0,\ldots,x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}}. \tag{3.2}$$

La méthode

La méthode est la méthode du calcul opérationnel. On notera par $\overline{x}(p)$ l'image de $x(t)$; $\overline{x}(p) \;\dot{\to}\; x(t)$. On pose $p=a+ib$ et prenons l'image de part et d'autre de l'équation différentielle (3.1)

$$a_0\int_0^\infty e^{-pt}\frac{d^nx}{dt^n}dt+a_1\int_0^\infty e^{-pt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}dt+\ldots+a_n\int_0^\infty e^{-pt}x(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt. \tag{3.3}$$

qui devient :

$$\begin{aligned}a_0\Big(p^n\overline{x}(p)-[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x'_0+p^{n-3}x''_0+\ldots+x_0^{(n-1)}]\Big)\\ +a_1\Big(p^{n-1}\overline{x}(p)-[p^{n-2}x_0+p^{n-3}x'_0++\ldots+x_0^{(n-2)}]\Big)+\ldots\ldots\ldots+\\ a_{n-1}\Big(p\overline{x}(p)-[x_0]\Big)+a_n\overline{x}(p)=F(p).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Cette équation est appelée équation image d'inconnue $\overline{x}(p)$. En isolant $\overline{x}(p)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{x}(p)\Big[a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n\Big]=\\ =a_0\Big[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x'_0+\ldots+x_0^{(n-1)}\Big]+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +a_{n-2}\left[px_0+x'_0\right]+a_{n-1}\left[x_0\right]+F(p)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Il s'ensuit que $\overline{x}(p)$ est ainsi défini. On notera par $\varphi_n(p)$ l'expression :

$$\varphi_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n. \tag{3.6}$$

Donc :

$$\mathbf{\overline{x}(p)=\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}+\frac{F(p)}{\varphi_n(p)}} \tag{3.7}$$

Où $\psi_{n-1}(p)$ est le premier terme du second membre de (3.5). Si les conditions initiales sont : $x_0=x'_0=x''_0=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$, le terme $\psi_{n-1}(p)=0$, donc :

$$\overline{x}(p)=\frac{F(p)}{\varphi_n(p)} \tag{3.8}$$

ou

$$\overline{x}(p)=\frac{F(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n} \tag{3.9}$$

Exemple 3.4.1 Soit à résoudre l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t$$

vérifiant les conditions initiales : $x_0 = x'_0 = 0$ pour $t = 0$.

Solution : L'équation s'écrit :

$$\overline{x}(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2}$$

ou

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{p^2}\,\frac{1}{(p^2 + 3p + 2)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)}.$$

En utilisant les formules du tableau (Table 3.1) on trouve :

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

3.4.1 Théorème de décomposition

On suppose que l'image L d'une certaine fonction est une fraction rationnelle régulière de p : (cf. équation(3.7))

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}$$

Toute fraction rationnelle peut se mettre sous forme de fractions élémentaires de quatre types suivants :

1. $\frac{A}{p-a}$
2. $\frac{A}{(p-a)^k}$
3. $\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a^2}$, où les racines du dénominateur sont complexes, c'est à dire $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$,
4. $\frac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$ où $k \geq 2$, les racines du dénominateur sont complexes.

Pour les fractions du type 1. on a en utilisant le tableau 3.1

$$\frac{A}{p-a} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} Ae^{at}$$

Pour les fractions du type 2. les formules (9) et (4) du tableau (3.1)

$$\frac{A}{(p-a)^k} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at} \tag{3.10}$$

Pour les fractions de type 3. on a :

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} = \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right) + \left(B - \frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= A\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}+$$
$$+\Big(B-\frac{Aa_1}{2}\Big)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}$$

On note par M le premier terme et N le second on a :

$$M \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}$$

$$N \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \Big(B-\frac{Aa_1}{2}\Big)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}.$$

en définitive :

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} e^{-\frac{a_1}{2}t}\times$$
$$\times\left[A\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right] \tag{3.11}$$

Les équations du type 4 sont plus compliquées et comportent des calculs fastidieux qui se résolvent à l'aide du tableau (3.1).

3.4.2 Application aux circuits électriques

Une application principale de la transformation de Laplace est la résolution des équations différentielles. On étudie la charge d'un condensateur dans un circuit RLC, soit le montage suivant : A l'instant $t=0$, $i(t=0)=0$, $q(t=0)=0$. La tension $v(t)$ aux bornes est :

$$\mathbf{v(t)=L\,\frac{di(t)}{dt}\,+R\,i(t)+\frac{q(t)}{C}} \tag{3.12}$$

La charge $q(t)$ du condensateur est liée à l'intensité du courant $i(t)$.

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}\Longrightarrow q(t)=\int_0^t i(u)du+q(0)=\int_0^t i(u)du$$

L'équation (3.12) devient :

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(u)du \tag{3.13}$$

Soient $V(p)$ et $I(p)$ les transformés de Laplace des tensions et intensité respectivement. Calculons la transformation de l'équation différentielle :

$$V(p)=L\left[pI(p)-i(0)\right]+RI(p)+\frac{1}{C}\frac{I(p)}{p} \tag{3.14}$$

On pose $Z(p)=R+Lp+\frac{1}{Cp}$, qu'on appelle impédance opérationnelle, on a donc :

$$V(p)=Z(p)I(p);\qquad \text{avec } Z(p)=R+Lp+\frac{1}{Cp} \tag{3.15}$$

Comme $I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)}$ on va déduire par inversion $i(t)$. De plus le basculement de l'inverseur à $t = 0$, est équivalent à appliquer aux bornes du circuit une différence de potentiel de la forme :

$$v(t) = VH(t) \tag{3.16}$$

Sa transformée de Laplace est :

$$V(p) = V\frac{1}{p} \tag{3.17}$$

$$I(p) = \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}\frac{V}{p} = \frac{V}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{V}{L}\frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} \tag{3.18}$$

– Recherche des pôles de cette fraction :

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

– Calcul du discriminant :

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = \frac{R^2 - 4\frac{L}{C}}{L^2}$$

$$\Delta = 0 \ \Leftrightarrow\ R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{3.19}$$

1^{er} **cas :** $R = R_c,$ le dénominateur admet une racine double : $r = -\frac{R}{2L}$.

$$I(p) = \frac{V}{L}\frac{1}{(p + \frac{R}{2L})^2}.$$

Le tableau des originaux (Table (3.1), page 44) nous donne :

$$i(t) = \frac{V}{L}te^{-\lambda t}H(t) \ \text{ avec } \ \lambda = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$2^{\text{ème}}$ **Cas :** $R > R_c,$ le dénominateur admet deux racines réelles :

$$r = \pm\frac{-R \pm \sqrt{R^2 - R_c^2}}{2L}$$

Comme ces deux racines sont négatives, notons :

$$r_{\pm} = -\lambda_{\pm}$$

Donc :

$$I(p) = \frac{V}{L}\frac{1}{(p - r_+)(p - r_-)} = \frac{V}{L}\frac{1}{(p + \lambda_+)(p + \lambda_-)} \tag{3.20}$$

On peut décomposer en fractions simples :

$$\frac{1}{(p + \lambda_+)(p + \lambda_-)} = \frac{A}{(p + \lambda_+)} + \frac{B}{(p + \lambda_-)} \tag{3.21}$$

De $p = \pm\lambda_+$ il vient :

$$A = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \ \ et \ B = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

On a donc :

$$I(p) = \frac{V}{L(\lambda_+ - \lambda_-)}\Big(\frac{1}{p+\lambda_-} - \frac{1}{p+\lambda_+}\Big) = \frac{V}{R}\Big(\frac{1}{p+\lambda_-} - \frac{1}{p+\lambda_+}\Big) \tag{3.22}$$

On peut déduire du tableau des originaux (Table (3.1), page 44) l'expression de $i(t)$:

$$i(t) = \frac{V}{R}\Big(e^{-\lambda_- t} - e^{-\lambda_+ t}\Big)H(t) \tag{3.23}$$

$3^{\text{ème}}$ **cas :** $R < R_c$, le dénominateur admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_\pm = \frac{-R \pm j\sqrt{R_c^2 - R^2}}{2L}$$

On pose

$$r_\pm = \lambda \pm j\omega$$

avec

$$\begin{cases} \lambda = \frac{R}{2L} \\ \omega = \frac{\sqrt{R_c^2 - R^2}}{2L} \end{cases}$$

la transformée du courant :

$$I(p) = \frac{V}{L}\,\frac{1}{(p+\lambda+j\omega)(p+\lambda-j\omega)} = \frac{V}{L}\,\frac{1}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \tag{3.24}$$

De la Table ((3.1), page 44), on déduit l'expression de $i(t)$.

$$i(t) = \frac{V}{L}\,\frac{1}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t H(t). \tag{3.25}$$

3.4.3 Systèmes d'équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel

On peut considérer des systèmes d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} 3\frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 3y &= 0 \end{cases}$$

vérifiant les conditions initiales : $x(0) = 0, y(0) = 0$ pour $t = 0$.

Solution : Désignons $x(t) \Leftarrow \overline{x}(p)$, $y(t) \Leftarrow \overline{y}(p)$ le système des équations auxilliaires :

$$\begin{cases} (3p+2)\overline{x}(p + p\overline{y}(p) = \frac{1}{p}, \\ p\overline{x}(p) + (4p+3)\overline{y}(p) = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système, nous trouvons :

$$\begin{cases} \overline{x}(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{1}{10(11p+6)}, \\ \overline{y}(p) = -\frac{1}{(11p+6)(p+1)} = \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6}\Big). \end{cases}$$

Avec le tableau des images nous trouvons les solutions cherchées :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t} \\ y(t) = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}). \end{cases}$$

Avec cet exemple, on peut illustrer la méthode des systèmes linéaires d'ordre supérieur.

3.4.4 Théorème de convolution

Théorème 3.4.1 Si $F_1(p)$et $F_2(p)$ sont les images des fonctions f_1,et f_2 c'est à dire si

$$F_1(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f_1(t) \ et \ F_2(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f_2(t)$$

alors $F_1(p) \times F_2(p)$ est l'image de la fonction

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Autrement dit

$$F_1(p)F_2(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \tag{3.26}$$

Démonstration. Cherchons l'image de la fonction :

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau,$$

Nous avons :

$$L(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau) = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt$$

L'intégrale double est prise dans le domaine limité par les droites $\tau = 0, \tau = t$.

$$L(\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = L(\int_0^\infty \left[f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau.$$

Posons$z = t - \tau$ dans l'intégrale précédente on obtient :

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z) dz =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z) dz = e^{-p\tau} F_2(p).$$

Donc,

$$L\Big(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \Big) = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} F_2(p) d\tau$$

$$F_2(p) \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau = F_2(p) F_1(p).$$

On déduit donc :

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\leftarrow}}} F_1(p) F_2(p)$$

Remarque 3.4.1 1. $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ est appelée convolution (ou produit de composition) des deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$. On a de plus par changement de variables $t-\tau=z$:

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

2. Si $F(p) \doteqdot f(t)$, alors

$$\frac{1}{p}F(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{3.27}$$

En effet : Si $f_1(t)=f(t),\ f_2(t)=1,$ alors $F_1(p)=F(p),\ F_2(p)=\frac{1}{p}$. On remplace dans la formule (3.26) on obtient la formule (3.27).

Exemple 3.4.2 Soit à résoudre :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t)$$

Avec les conditions initiales :$x_0(0) = x_0'(0) = 0$ pour $t=0$. L'équation donnant la solution :

$$\overline{x}(p)(p^2+1)=F(p)$$

où $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$. Donc $\overline{x}(p)=\frac{1}{p^2+1}F(p)$. On pose : $F_2(p)=\frac{1}{p^2+1}$ $F(p)=F_1(p)$, de plus $\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t$. On obtient :

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau. \tag{3.28}$$

3.5 Exercices corrigés

Exercice 3.5.1 Trouver l'original de $F(p)=\frac{1}{(p-a)(p-b)}$, avec a, b sont deux réels distincts. (F est la transformée de Laplace).

Solution : Pour a et b distincts, on a

$$F(p)=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-b}\right]$$

L'original $f(t)$ est donc :

$$f(t)=\frac{1}{a-b}\left[e^{-at}-e^{bt}\right]$$

Exercice 3.5.2 Utiliser le produit de convolution pour trouver l'original de :

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$$

avec $a\neq b$, a, $b\in\mathbb{R}$

Solution : On peut écrire $F(p)$ comme :

$$F(p)=\frac{p}{p^2+a^2}\times\frac{1}{b}\frac{b}{p^2+b^2}$$

$$\frac{p}{p^2+a^2} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \cos at$$
$$\frac{1}{p^2+b^2} = \frac{b}{p^2+b^2} \times \frac{1}{b} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \frac{1}{b}\sin bt$$

L'original est par conséquent :

$$f(t) = \cos at * \frac{1}{b}\sin bt$$

$*$ désigne la convolution des deux fonctions.

Exercice 3.5.3 Calculer la transformée de Laplace suivante : $(t^2+t-e^{-3t})U(t))$. Calculer l'original suivant : $L^{-1}[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}]$

Solution : $U(t)$ est la fonction qui vaut 1 pour $t \geq 0$ et 0 ailleurs. En utilisant :

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t^n$$
$$F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+3}$$

Pour calculer $L^{-1}(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)})$ on a :

$$\frac{p+2}{(p+3)(p+4)} = -\frac{1}{p+3} + \frac{2}{p+4}$$

Donc :

$$L^{-1}(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}) = -e^{-3t} + 2e^{-4t}$$

Exercice 3.5.4 1. Trouver la solution de l'équation : $x'' + 5x' + 6x = 12$ avec $x(0) = x'(0) = 0$.

2. Déterminer la solution des équations suivantes :

$$x'' + 3x' + 2x = t \text{ avec } x(0) = x'(0) = 0.$$

3. Mêmes questions avec l'équation : $x'' + 2x' + 5x = \sin t$ avec $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$.

Solution : 1. Si on considère les transformées de Laplace de part et d'autre de l'équation et on note par $F(p)$ celle de $x(t)$ la fonction inconnue. En utilisant (3.3.3) il vient :

$$pF(p) - x(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} x'(t)$$
$$p^2 - px'(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} x''(t)$$

On a :

$$p^2 + 5p + 6)F(p) = \frac{12}{p} \implies F(p) = \frac{12}{p(p^2+5p+6} = \frac{12}{p(p+2)(p+3)}.$$

Une décomposition en éléments simples donne :

$$F(p) = \frac{2}{p} - \frac{6}{p+2} + \frac{4}{p+3}$$

Nous déduisons par le tableau dictionnaire des originaux (Table (3.1) page 44)

$$x(t) = 2 - 6e^{-2t} + 4e^{-3t}.$$

2. Avec la même méthode on a pour l'équation :

$$x'' + 3x' + 2x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

De même on note par $F(p)$ la transformé de Laplace de $x(t)$ on trouve :

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+3p+2)}$$

$$F(p) = \frac{1}{2p^2} - \frac{3}{4p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)}$$

On déduit l'expression de $x(t)$ (cf. dictionnaire (3.1) page 44) :

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

3. Pour l'équation $x'' + 2x' + 5x = \sin t$ avec $x(0) = 2, x'(0) = 1$. On note par $F(p)$ la transformée de Laplace :

$$F(p) = \frac{p+4}{(p^2+2p+5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}$$

$$\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5} + \frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

$$\frac{11}{10}(\frac{p+1}{((p+1)^2+2^2)}) + \frac{29}{10\cdot 2}\frac{2}{((p+1)^2+2^2)} - \frac{1}{10}\times\frac{p}{(p^2+1)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(p^2+1)}$$

$$x(t) = e^{-t}(\frac{11}{10}\cos 2t + \frac{29}{20}\sin 2t) - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\ sint.$$

3.6 Transformation de Fourier

3.6.1 Transformée de Fourier d'une fonction d'une variable

Définition 3.6.1 Soit $f(x)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable t. On appelle transformée de Fourier de $f(t)$ la fonction complexe de la variable réelle s, $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ définie par :

$$F(s) = \mathcal{F}\left[f\right](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f(t)dt. \tag{3.1}$$

Remarque 3.6.1 1. Cette intégrale n'existe pas toujours.

2. En physique, la variable concernée est, soit une longueur, soit un temps. La notation s représente une longueur. La variable s a alors les dimensions de l'inverse d'une longueur. Elle est appelée le vecteur d'onde. Si $f(t)$ dépend du temps t, alors la transformée de Fourier va être définie par :

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp 2i\pi\omega t dt \tag{3.2}$$

où la variable ω, qui a les dimensions de l'inverse d'un temps, est la fréquence angulaire.

Définition 3.6.2 Une fonction f appartient à l'espace $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ des fonctions sommables (intégrables dans $\mathbb{R}$) si son intégrale est absolument convergente (intégrales impropres de Riemann) c'est à dire si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty \tag{3.3}$$

Remarque 3.6.2 1.

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \left| e^{-2i\pi st} f(t) \right| = |f(t)|$$

2. La courbe d'équation $y = |\mathcal{F}(f)(s)|$ est appelée spectre de f.
   On démontre que $\lim\limits_{|s| \longrightarrow \infty} |\mathcal{F}(f)(s)| = 0$

Théorème 3.6.1 Toute fonction $f(x)$ de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ (intégrable) a une transformée de Fourier continue et bornée, et tend vers 0 lorsque $|s| \longrightarrow \infty$.

Proposition 3.6.1 1. Si f est paire, l'intégrale de Fourier s'écrit :

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos 2\pi st - i \sin 2\pi st) dt \tag{3.4}$$

En écrivant $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Or les fonctions $t \longmapsto f(t)\cos 2\pi st$ et $t \longmapsto f(t)\sin 2\pi st$ sont respectivement paire et impaire. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos 2\pi st dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos 2\pi st dt$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin 2\pi st dt = 0$$

En résumé si f est paire, $\mathcal{F}(f)(s)$ est un nombre réel et

$$\mathcal{F}(f)(s) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos 2\pi st dt$$

2. Si f est impaire alors on a :

$$\mathcal{F}(f)(s) = -2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin 2\pi st dt$$

3.6.2 Exemples de transformées

1. La fonction "Porte" ou signal notée Π_T est définie pour $T > 0$ par :

$$\begin{cases} \text{si } t \in [-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}] & \Pi_T(t) = \frac{1}{T} \\ \text{si } t \notin [-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}] & \Pi_T(t) = 0 \end{cases}$$

T est un nombre strictement positif. En posant $u = \frac{t}{T}$, on obtient :

$$\mathcal{F}(\Pi_T)(s) = \frac{\sin \pi sT}{\pi sT}$$

On sait que

$$\lim_{T \longmapsto 0} \frac{\sin \pi sT}{\pi sT} = 1$$

Lorsque $T \longrightarrow 0$, on admet que la fonction Π_T tend vers une limite, appelée **distribution de Dirac** et sera notée δ. on a donc : $\mathcal{F}(\delta) = 1$. Si on calcule la transformée de Laplace on a : $\mathscr{L}(\delta) = 1$.
La représentation graphique de δ par une ‟impulsion unité″ est justifié par le fait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(t)dt = 1$$

2. **Fonctions exponentielles** :

$$\text{pour } a > 0,\ f : t \longmapsto e^{-a|t|}$$

f étant paire on a :

$$\mathcal{F}(f)(s) = 2\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos 2\pi s t dt$$

Le calcul nous conduit :

$$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 s^2}$$

3.6.3 Propriétés de la transformation de Fourier

1. $\mathcal{F}$ **est linéaire** : $\forall\, f,\, g$ deux fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, λ, μ complexes :

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{F}(f) + \mu\mathcal{F}(g)$$

2. **Transformée d'une dérivée** : Si f est continue et si $\frac{df}{dt} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ alors on a :

$$\mathcal{F}(\frac{df}{dt}) : s \longmapsto 2i\pi s\mathcal{F}(f)(s)$$

3. **La multiplication par** t : Si la fonction $t \longmapsto tf(t)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ alors on a :

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{F}(f)) : s \longmapsto -2i\pi\, \mathcal{F}(tf(t))(s)$$

4. **Image d'une translatée (Formule du retard si** $a > 0$**)** Pour a réel, on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(t-a)$$

g est la translatée de f ou le signal f "retardé"de a ($a > 0$). Pour tout réel a on a :

$$\mathcal{F}(g) : s \longmapsto e^{-2i\pi a s}\mathcal{F}(f)(s)$$

5. **Translation de l'image.** Soit a un réel

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi a t}f(t)) : s \longmapsto \mathcal{F}(f)(s-a)$$

6. **Changement d'échelle.** Pour $\omega > 0$

$$\mathcal{F}(f(\omega t)) : s \longmapsto \frac{1}{\omega}\mathcal{F}(f)(\frac{s}{\omega})$$

7. **Produit de convolution.** Soient f, g deux fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ alors $f*g$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)*\mathcal{F}(g)$. ($f*g$ désigne le produit de convolution de f et de g).
$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du \tag{3.5}$$
8. **Parseval-Plancherel.** Si f est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et
$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2 .$$
Si de plus $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ alors
$$< f, g >=< \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) >$$
De même si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f alors la suite $(\mathcal{F}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{F}(f)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

3.6.4 Inversion de la transformation de Fourier

Définition 3.6.3 Soit f une fonction de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de fourier inverse ou conjuguée de f la fonction notée $\overline{\mathcal{F}}(f)$ et définie

$$\overline{\mathcal{F}}(f) : s \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi st} f(t)dt$$

On peut en général obtenir $f(t)$ à partir de $F(s)$ par la transformation dite de Fourier inverse :
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(s) \exp 2i\pi st ds \tag{3.6}$$

Théorème 3.6.2 (Formule d'inversion) Si f et $\mathcal{F}(f)$ sont dans $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ alors :

$$\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f)(t) = \frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

Où $f(t+0)$ et $f(t-0)$ représentent la limite à droite et à gauche en t . Si f est continue en t alors :
$$\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f))(t) = f(t).$$

Donc on peut écrire :

$$\mathscr{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(s)ds$$

3.6.5 Lien avec la transformation de Laplace

Pour f appartenant à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, on définit les fonctions f^+ et f^- telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \ < 0,\ & f^+(t) = 0, \quad\quad f^-(t) = 0 \\ \forall t \ \geq 0,\ & f^+(t) = f(t), \quad f^-(t) = f(-t) \end{aligned}$$

TABLE 3.2 – **Transformées de Fourier des fonctions usuelles**

f	$\mathcal{F}$
$\Pi_A(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{A}{2},\frac{A}{2}]}(t),\ \ A > 0$	$\frac{\sin \pi A\nu}{\pi\nu}$
$\frac{\sin^2 at}{t^2}\ (a > 0)$	$\pi a(1 - \pi\frac{\lvert\nu\rvert}{a}\mathbb{1}_{(\lvert\nu\rvert\leq\frac{a}{\pi}})$
$e^{-a\lvert t\rvert}\ \ \ (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
$e^{-at^2}\ \ \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-(\frac{\pi^2\nu^2}{a})}$
$1 - 2\frac{\lvert t\rvert}{A}\mathbb{1}_{(\lvert t\rvert\leq\frac{A}{2})}$	$\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\pi A\nu}{\pi^2 A\nu^2}$
$e^{-at}\mathbb{1}_{t\geq 0}\ \ \ (a > 0)$	$\frac{1}{a+2i\pi\nu}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi e^{-2\pi\lvert\nu\rvert}$
$\frac{\sin t}{t}$	$\pi\mathbb{1}_{(\lvert\nu\rvert\leq\frac{1}{2\pi})}$

Théorème 3.6.3

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \ \mathscr{F}(f)(s) = \mathscr{L}(f^+)(2i\pi s) + \mathscr{L}(f^-)(-2i\pi s)$$

$\mathscr{L}$ dénote la transformée de Laplace (cf. 3.1.1.)

Démonstration. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\mathscr{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi dt} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi st} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f(t)dt$$

On pose $u = -t$ dans la première intégrale on obtient :

$$\mathscr{F}(f)(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{2i\pi su} f(-u)du + \int_{0}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f(t)dt$$

$$\mathscr{F}(f)(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{2i\pi st} f^-(u)du + \int_{0}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f^+(t)dt$$

Or

$$\mathscr{L}(f)(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

D'où

$$\int_{0}^{+\infty} e^{2i\pi su} f^-(u)du = \mathscr{L}(f^-)(-2i\pi s)$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f^+(t)dt = \mathscr{L}(f^+)(2i\pi s)$$

On déduit le résultat :

$$\mathscr{F}(f)(s) = \mathscr{L}(f^+)(2i\pi s) + \mathscr{L}(f^-)(-2i\pi s).$$

3.6.6 Exercices corrigés

Exercice 3.6.1 Déterminer les transformées de Fourier des fonctions réelles ($t \in \mathbb{R}$) suivantes :

a)
$$t \longmapsto \mathbb{1}_{[-T,+T]}(t), \quad T \in \mathbb{R}^{+,*}$$

b)
$$t \longmapsto \frac{\sin t}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^{*}$$

c)
$$t \longmapsto \exp^{-|t|/T} \quad T \in \mathbb{R}^{+,*}$$

d)
$$t \longmapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}.$$

Solution : a) Si
$$f : t \longmapsto \mathbb{1}_{[-T,+T]}(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En calculant la transformée de Fourier on a :
$$\mathscr{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ut}\mathbb{1}_{[-T,+T]}(t)dt = \int_{-T}^{+T} e^{-2i\pi ut}dt = [-\frac{e^{-2i\pi ut}}{2i\pi u}]_{-T}^{+T}$$
$$\mathscr{F}(f)(u) = \frac{1}{2i\pi u}\left[-e^{2i\pi uT} + e^{2i\pi uT}\right]$$

On pose $\alpha = 2\pi uT,$ nous avons : $e^{\alpha i} - e^{-\alpha i} = 2i\sin\alpha$. Donc :
$$\mathscr{F}(f)(u) = \frac{\sin 2\pi uT}{\pi u}$$

b) Pour la fonction $f : t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$. Par définition :
$$\mathscr{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ut} f(t)dt$$

Par la formule inverse :
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathscr{F}(f))(u)e^{2i\pi ut}du$$

De plus
$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ut} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ut}\mathbb{1}_{[-T,+T]}(t)dt$$

D'où
$$F(u) = \frac{\sin 2\pi uT}{\pi u}$$

Comme $f(t) = \mathbb{1}_{[-T,+T]}(t)dt$ alors :
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin 2\pi uT}{\pi u})e^{2i\pi ut}du.$$

Quand on pose $T = \frac{1}{2\pi}$ alors
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{\pi u}e^{2i\pi ut}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\frac{\sin u}{u})(-t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(t).$$

c) La fonction $f : t \longmapsto \exp -\frac{|t|}{T}$ est définie par :

$$\exp -|t|T = \begin{cases} e^{-\frac{t}{T}} & \text{si}\, t > 0 \\ e^{\frac{t}{T}} & \text{si}\, t < 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(f)(s) &= \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{T}} e^{-2i\pi s} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-2i\pi s} dt \\ &= \left[\frac{e^{-2i\pi s} e^{\frac{t}{T}}}{\frac{1}{T} - 2i\pi s} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-\frac{t}{T}} e^{-2i\pi s}}{-2i\pi s - \frac{1}{T}} \right]_{0}^{+\infty} \\ \mathscr{F}(f)(s) &= \frac{T}{1 - 2i\pi s} + \frac{T}{1 + 2i\pi s} \\ \mathscr{F}(e^{-|t|/T})(\nu) &= \frac{2T}{1 + 4\pi^2\nu^2T^2} \end{aligned}$$

d) Chercher la transformée de Fourier de la fonction : $f : t \longmapsto f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$. En utilisant la formule d'inversion (3.6)

$$e^{-|t|/T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2T}{1 + 4\pi^2\nu^2T^2} e^{2i\pi\nu t} d\nu.$$

En choisissant $T = \frac{1}{2\pi}$

$$e^{-2\pi|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \nu^2} e^{2i\pi\nu T} d\nu = \mathscr{F}(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + \pi^2})(-t)$$

Comme la fonction $e^{-2\pi|t|}$ est paire on a alors :

$$\mathscr{F}(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + x^2})(\nu) = e^{-2\pi|\nu|}.$$

Exercice 3.6.2 a) Trouver les transformations de Fourier des fonctions définies :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Solution : a) La fonction f peut être écrite dans son triangle :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si}\, x \in]-1, 0[\\ 1 - x & \text{si}\, x \in]0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par une intégration par parties on a :

$$\int_{-1}^{0} (1 + x) e^{-2i\pi\xi x} dx = \frac{i}{2\pi\xi} + \frac{1}{4\pi^2}\xi^2 - \frac{e^{1i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}.$$

De même on trouve :

$$\int_0^1 (1-x)e^{-2i\pi\xi x}dx = \frac{-i}{2\pi\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{-2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}$$

b) La transformée de Fourier-Plancherel est une isométrie de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ sur lui-même. En utilisant cette isométrie (relation de Parseval), on déduit

$$\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \pi x}{\pi^4 x^4} dx.$$

En posant $y = \pi x$, la première intégrale donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \pi x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 3.6.3 Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$-\frac{d^2 f}{dt^2}(t) + f(t) = e^{-t^2},\ t \in \mathbb{R}$$

Solution : On prend la transformée de Fourier de part et d'autre de l'équation :

$$\mathscr{F}(\frac{d^2 f}{dt^2})(u) + F(u) = \mathscr{F}(e^{-t^2}),\ t \in \mathbb{R}$$

De plus

$$\mathscr{F}(\frac{d^2 f}{dt^2})(u) = -4\pi^2 u^2 F(u)$$

$$F(u)(1+4\pi^2u^2) = \mathscr{F}(e^{-t^2}) \Longrightarrow F(u) = \frac{\mathscr{F}(e^{-t^2})}{1+4\pi^2u^2} = \mathscr{F}(e^{-t^2}) \times \mathscr{F}(e^{-|t|})$$

D'où en utilisant l'exercice 1 on déduit :

$$f(t) = e^{-|t|} * e^{-t^2}$$

$*$ étant la convolution de deux fonctions définie dans l'équation (3.5)

Exercice 3.6.4 Soit à résoudre l'équation (E') :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{3.7}$$

de plus

$$y > 0,\ \frac{\partial\phi}{\partial x} \longrightarrow 0,\ \ \phi \longrightarrow 0.$$

$$\|(x,y)\| \longrightarrow +\infty,\ \phi(x,0) = 1,\ \ \text{pour } \|x\| \leq 1 \text{ et } \phi(x,0) = 0,\ \ \text{pour } \|x\| > 1.$$

On notera par $\widehat{\phi}(\nu, y)$ la transformée de Fourier par rapport à x de $\phi(x,y)$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ en fonction de $\widehat{\phi}(\nu, y)$.
2. Calculer en intégrant par parties (en prenant en compte les conditions citées) l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} e^{-2i\pi\nu x} dx$$

3. En considérant la transformée de Fourier de l'équation (E'), déduire $\widehat{\phi}(\nu, y)$ puis $\phi(x, y)$.

Solution :

$$\widehat{\phi}(\nu, y) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, y) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

1.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{-2i\pi\nu x} dx\Big)$$
$$= \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial y^2}(\nu, y)$$

2. En intégrant par parties l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} e^{-2i\pi\nu x} dx$$

On pose :

$$dv = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} dx, \;\; u = e^{-2i\pi\nu x}$$
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)$$

Donc :

$$I = \Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) e^{-2i\pi\nu x}\Big)_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

en deux fois par parties

$$dv = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \; u = e^{-2i\pi\nu x}, \;\; u' = -2i\pi\nu$$

$$I = 2i\pi\mu \left[\phi(x, y) e^{-2i\pi\nu x} + 2i\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{-2i\pi\nu x}\right]$$
$$2i\pi\nu \left[\phi(x, y) e^{-2i\pi\nu}\right]_{-\infty}^{+\infty} - 4\pi^2\nu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{-2i\pi\nu x} dx$$
$$= -4\pi^2\nu^2 \widehat{\phi}(x, y)$$

3. En opérant par la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ l'équation différentielle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\Big) e^{-2i\pi\nu x} dx = 0$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial y^2}(\nu, y) - 4\pi^2\nu^2 \widehat{\pi}(\nu, y) = 0$$

$$\widehat{\phi} \longrightarrow 0, \quad \text{y grand}$$

$$4\pi^2\nu^2 \widehat{\phi}(\nu, y) = \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial y^2}(\nu, y)$$

$$\ddot{\phi}(y) - 4\pi^2\nu^2 \phi(y) = 0 \implies \widehat{\phi}(\nu, y) = Ce^{-2\pi|\nu|y}$$

$$C = \widehat{\phi}(\nu, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,0)e^{-2i\pi\nu x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}dx = \int_{-}^{+} \phi(x,0)e^{-2i\pi\nu x}dx$$

qui est égal à :

$$\frac{e^{2i\pi \ nu} - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} = \frac{sin2\pi\nu}{\pi\nu}$$

Donc

$$C = \frac{\sin 2\pi\nu}{\pi\nu} \text{ et } \widehat{\phi}(\nu, y) = \frac{\sin 2\pi\nu}{\pi\nu} e^{-2\pi|\nu|y}$$

Or on a :

$$e^{-2\pi|\nu|y} = \mathcal{F}(\frac{y}{\pi}\frac{1}{t^2+y^2})(\nu)$$

et

$$\frac{\sin 2\pi\nu}{\pi\nu} = \mathcal{F}(\phi(x,0))(\nu)$$

On sait que :

$$\mathcal{F}(F) \cdot \mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(F * G)$$

Donc :

$$\phi(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{d\tau}{(x-\tau)^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(\frac{x-1}{y}) + \arctan(\frac{x+1}{y})\Big)$$

Exercice 3.6.5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Chercher la solution qui satisfait les conditions :

$$f(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\cos x.$$

Solution : 1. On fait un changement d'opérateur et on pose :

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2}(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{3.10}$$

Donc pour que f satisfasse l'équation de départ, il faut et il suffit que F satisfasse l'équation précédente.

2. Si F satisfait l'équation précédente alors la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$ est une fonction de la variable u appelée h_1 et la fonction $\frac{\partial F}{\partial v}$ une fonction de variable v appelée h_2. Nous avons donc :

$$F(u,v) = g_1(u) + g_2(v) \text{ avec } g_1' = h_1; \;\; g_2' = h_2.$$

3. La solution générale s'écrit alors :

$$f(x,t) = g_1(u) + g_2(v) = g_1(x+t) + g_2(t-x).$$

La fonction g_1 décrit une onde qui se déplace vers la droite et la fonction g_2 décrit une onde qui se déplace vers la gauche. Pour trouver la solution finale avec les conditions initiales nous avons :

$$f(x,0) = g_1(x) + g_2(-x) = \sin x \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g_1'(x) - g_2'(-x) = \cos x \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g_1'(x) + g_2'(-x) = -\cos x \tag{3.13}$$

Donc $g_1' = 0$ et $g_2'(-x) = -\cos x$, c'est à dire $g_2(x) = \sin(-x)$. Par conséquent, la solution unique cherchée f s'écrit :

$$f(x,t) = \sin(x-t).$$

Chapitre 4

Équations aux dérivées partielles du second ordre

4.1 Généralités

On va considérer des EDP du second ordre car elle interviennent dans les plus courants phénomènes physiques. L'inconnue u est une fonction réelle de deux variables réelles définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.1.1 Une EDP quasi-linéaire du second ordre est une EDP de la forme :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^2}+\mathbf{2b}(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{y}}+\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}^2}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{p},\mathbf{q}). \tag{4.1}$$

L'inconnue est la fonction $u(x,y)$. On pose $p=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q=\frac{\partial u}{\partial y}$. a,b,c,F sont des fonctions définies dans un domaine Ω par hypothèses.

Exemples 4.1.1

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.2}$$

   Cette équation appelée équation des ondes est à considérer pour étudier les processus des vibrations transversales d'une corde, ou des vibrations longitudinales d'une tige ou des oscillations du courant électrique.

2. On s'intéresse à la propagation des ondes dans une ligne électrique. Le voltage E à un point x et à l'instant t est solution de l'équation

   $$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial\mathbf{x}^2}=\mathbf{LC}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial\mathbf{t}^2}+(\mathbf{RC}+\mathbf{LG})\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{t}}+\mathbf{RGE} \tag{4.3}$$

   R désigne la résistance par unité de longueur de la ligne électrique, L la self par unité de longueur, C la capacité et G la conductivité.

4.2 Courbes caractéristiques

4.2.1 Le problème de Cauchy

Soit (E) l'équation :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^2}+\mathbf{2b}(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{y}}+\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}^2}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{p},\mathbf{q}). \tag{4.1}$$

Soit $\gamma : t \longmapsto (x = \varphi(t), y = \psi(t))$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ dont tout point est régulier c'est à dire tel que $(\frac{d\varphi}{dt})^2 + (\frac{d\psi}{dt})^2 > 0$. On cherche une solution de (E) (4.1) qui vérifie des conditions supplémentaires sur la courbe γ : On suppose connue la valeur de u sur γ ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{y}$.

Rappels 4.2.1 a) Soient $x(t), y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$ parcourant la courbe $\gamma(t)$. On appelle abscisse curviligne une primitive de $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$; c'est une fonction s telle que $(\frac{ds}{dt})^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2$.

b) Soit

$$\overrightarrow{T} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ds}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{ds}}\overrightarrow{e_2} = \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{ds}}\left[\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}\overrightarrow{e_2}\right]$$

avec $\left\|\overrightarrow{T}\right\| = 1$. Le vecteur $\overrightarrow{T}$ est tangent à la courbe γ, de plus le vecteur normal $\overrightarrow{N} = -\frac{dy}{ds}\overrightarrow{e_1} + \frac{dx}{ds}\overrightarrow{e_2}$. N s'obtient à partir du vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Définition 4.2.1 1. On appelle dérivée normale la grandeur $\frac{du}{dn} =< gradu, \overrightarrow{N} >$

2. φ une fonction de classe $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$, $\lim_{\mathbf{h}\longrightarrow\mathbf{0}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h}}\left[\varphi(\mathbf{M}+\mathbf{h}\overrightarrow{N}) - \varphi(\mathbf{M})\right] = \frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{dn}}(\mathbf{M})$

On pose maintenant

$$\begin{aligned}
H(t) &= u\left[\varphi(t), \psi(t)\right] \\
U(t) &= \tfrac{\partial u}{\partial x}\left[\varphi(t), \psi(t)\right] \\
V(t) &= \tfrac{\partial u}{\partial y}\left[\varphi(t), \psi(t)\right] \\
W(t) &= \tfrac{du}{dn}\left[\varphi(t), \psi(t)\right]
\end{aligned}$$

nous avons alors :

$$\frac{du}{dn}(\varphi(t), \psi(t)) = -\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\frac{d\psi}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))\frac{d\varphi}{ds} =< grad\, u, \overrightarrow{N} >$$

Donc

$$\begin{aligned}
W(t) &= -U(t)\frac{d\psi}{ds} + V(t)\frac{d\varphi}{ds} \\
\frac{dH}{dt} &= U(t)\frac{d\varphi}{ds} + V(t)\frac{d\psi}{ds}
\end{aligned}$$

Remarque 4.2.1 1. Si on connaît U, V et H on connait W et H, réciproquement si on connaît W et H on connaît W et $\frac{dH}{dt}$. Le système linéaire précédent permet de déterminer U et V car tout point de γ est régulier $((\frac{dx}{ds})^2 + \frac{dy}{ds})^2 > 0)$.

2. Si on suppose H, U, V connues, c'est à dire $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ sur γ. Si u est complètement déterminée, ses dérivées secondes doivent être déterminés sur γ.

En dérivant le système précédent on a :

$$\begin{cases} U'(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \\ V'(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \\ F(\varphi(t),\psi(t),H(t),U(t),V(t)) = a(\varphi(t),\psi(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\varphi(t),\psi(t)) + \\ 2b(\varphi(t),\psi(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t),\psi(t)) + c(\varphi(t),\psi(t))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\varphi(t),\psi(t)). \end{cases}$$

Le déterminant Δ est :

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) & 0 \\ 0 & \varphi(t) & \psi'(t) \\ a(\varphi(t),\psi(t)) & 2b(\varphi(t),\psi(t)) & c(\varphi(t),\psi(t)) \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta = c[\varphi'(t))]^2 - 2b\varphi'(t)\psi'(t) + a[\psi'(t)]^2}$$

En résumé si $\Delta \neq 0$ les dérivées secondes sur γ sont déterminées de façon unique. Si $\Delta = 0$ le système précédent a soit aucune, soit une infinité de solutions.

Définition 4.2.2 1. Les courbes caractéristiques sont les courbes γ qui annulent $\Delta(t)$:

$$\Delta(t) = c(\varphi(t),\psi(t))[\psi'(t)]^2 - 2b(\varphi(t),\psi(t))[\varphi'(t)\psi'(t)] +$$

$$a(\varphi(t),\psi(t)[\psi'(t)]^2.$$

2. On dit que γ n'est caractéristique en aucun point si $\forall t \ \Delta(t) \neq 0$.

Théorème 4.2.1 a) Si $a \neq 0$, les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle :

$$\mathbf{a(x,y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0} \tag{4.2}$$

b) Si $c \neq 0$, les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle :

$$\mathbf{c(x,y)(\frac{dx}{dy})^2 - 2b(x,y)\frac{dx}{dy} + a(x,y) = 0} \tag{4.3}$$

c) Si $a = c = 0$, les solutions sont les droites $x =$ constante et $y =$ constante.

Remarque 4.2.2 Si pour $\Delta = 0$ alors lorqu'on divise par $(\varphi'(t))^2$ on obtient :

$$c - 2b\frac{\psi'(t)}{(\varphi'(t))^2} + a(x,y)\frac{(\psi(t))^2}{(\varphi(t))^2} = 0$$

Comme $y = f(x)$ on pose $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, il vient :

$$\mathbf{a(x,y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0}$$

Démonstration. Soit $\gamma : x = \varphi(t), y(t) = \psi(t))$ une courbe caractéristique.
Supposons $a(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$ au voisinage de t_0. Si $\varphi'(t) = 0$ alors $\psi'(t)$ doit être aussi nul. De plus en remplaçant on a : $\Delta(t) = 0$ donc $\psi'(t) = 0$. Cela ne peut pas définir une courbe, donc dans un domaine où $a(x, y) \neq 0$, $\varphi'(t) \neq 0$. La tangente à γ n'est pas verticale, γ est définie par une fonction $y = f(x)$ c'est à dire $x = x$, $y = f(x)$ et $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f'(x)$, $\Delta = 0$ est alors équivalente à

$$a(x,y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0$$

Pour b) si $c \neq 0$, les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle

$$c(x,y)(\frac{dx}{dy})^2 - 2b(x,y)\frac{dx}{dy} + a(x,y) = 0$$

On raisonne de la même façon qu'en a. □

4.3 Classification des équations

Définition 4.3.1 1. Une équation (4.1) (E) telle que $\mathbf{b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0}$ dans un domaine D est dite hyperbolique dans ce domaine. Elle admet alors 2 familles de courbes caractéristiques dans ce domaine

2. Une équation telle que $\mathbf{b^2(x,y) = a(x,y)c(x,y)}$ dans un domaine D est dite parabolique dans D. Elle n'admet dans D qu'une famille de courbes caractéristiques.
3. Une équation telle que $\mathbf{b^2(x,y) < a(x,y)c(x,y)}$ dans un domaine D est dite elliptique dans D. Elle n'admet pas de courbes caractéristique (réelles).

Les termes hyperbolique, parabolique, elliptique représentent le type, le genre ou la nature de l'équation (E) en question.

Exemples 4.3.1 1. Dans l'équation des ondes :

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{4.1}$$

$\mathbf{a(t,x) = 1}$, $\mathbf{b = 0}$, $\mathbf{c(t,x) = -a^2}$; $b^2 - ac = a^2$. L'équation est de nature hyperbolique.

2. L'équation de la chaleur ou équation de Fourier définie par :

$$\mathbf{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{4.2}$$

Cette équation est liée à des problèmes posés par les processus de diffusion de la chaleur, de la filtration de liquide ou de gaz dans un milieu poreux (exemple du pétrole dans les grès sous couverture).

$$\mathbf{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ a(x,y) = 0,\ b(x,y) = 0,\ c(x,y) = -a^2,\ b^2 - ac = 0}.$$

L'équation est du type parabolique.

3. L'équation de Laplace est définie par :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} = \mathbf{0} \tag{4.3}$$

Cette équation est liée aux problèmes posés par les champs électriques et magnétiques.

$$\mathbf{a(x,y) = 1,\ b(x,y) = 0,\ c(x,y) = 1.}$$

$$\mathbf{b^2 - ac = 0 - 1 < 0}$$

L'équation est donc elliptique.

4.4 Réduction à la forme standard

4.4.1 Changement de variable

Soit le changement de variables $X_1 = \xi(x,y)$ et $X_2 = \eta(x,y)$, deux nouvelles variables, on suppose que $J(x,y) = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$.

$$\mathbf{J(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ dans un ouvert de } \mathbf{\Omega} \textbf{ de } \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Avec ce changement de variables, nous allons déterminer la forme de l'équation avec ces nouvelles variables X_1 et X_2. $u(x,y) = u(X_1, X_2)$ avec le fait que $J(x,y) \neq 0$. Nous avons donc :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1}} \frac{\partial \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2}} \frac{\partial \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}}$$

De même pour y :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1}} \frac{\partial \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2}} \frac{\partial \mathbf{X_2}}{\partial}$$

Si $J \neq 0$ on peut calculer $\frac{\partial u}{\partial X_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial X_2}$ en fonction de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial u}{\partial y}$.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{X_1^2}} \frac{\partial \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1} \partial \mathbf{X_2}} \frac{\partial \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}} \right] + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1}} \frac{\partial^2 \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}^2}$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1} \partial \mathbf{X_2}} \frac{\partial \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2^2}} \frac{\partial \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}} \right] + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2}} \frac{\partial^2 \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}^2}$$

En réduisant les termes et les simplifiant :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1^2}} \left(\frac{\partial \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 + \mathbf{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1} \partial \mathbf{X_2}} \frac{\partial \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2^2}} \left(\frac{\partial \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 +$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1}} \frac{\partial^2 \mathbf{X_1}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2}} \frac{\partial^2 \mathbf{X_2}}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Pour la variable y on a :

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}(\frac{\partial X_1}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}(\frac{\partial X_2}{\partial y})^2 +}$$

$$\mathbf{\frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2}}.$$

Pour les deux variables x et y on a :

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}(\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial y}) + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}(\frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial y})}$$

$$\mathbf{+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\frac{\partial X_2}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y}}$$

Nous allons exprimer l'équation initiale (4.1) sous forme :

$$\mathbf{A\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial X_2}}$$

avec

$$\mathbf{A = a\Big(\frac{\partial X_1}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial X_1}{\partial y}\Big)^2}$$

$$\mathbf{B = a\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial x} + b\Big(\frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial y}\Big) + c\frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial y}}$$

$$\mathbf{C = a\Big(\frac{\partial X_2}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial X_2}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial X_2}{\partial y}\Big)^2}.$$

Proposition 4.4.1 Le type de l'équation est conservé par le changement de variables.

$$\mathbf{B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)} \tag{4.2}$$

Démonstration. La démonstration est calculatoire.

Si on choisit un changement de variables de telle sorte que l'un des termes A, B, C s'annule, (par exemple $A = 0$). Supposons $a \neq 0$ et soit un couple (X_1, X_2) de telle sorte que $A = 0$. Donc :

$$0 = a\Big(\frac{\partial X_1}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_1}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial X_1}{\partial y}\Big)^2.$$

Comme $a \neq 0$ alors $\frac{\partial X_1}{\partial y} \neq 0$ car si $\frac{\partial X_1}{\partial y} = 0$ alors $\frac{\partial X_1}{\partial x} = 0$ et $J = 0$, $\frac{\partial X_1}{\partial y} \neq 0$. De plus :

$$a\Big(\frac{\frac{\partial X_1}{\partial x}}{\frac{\partial X_1}{\partial y}}\Big)^2 + 2b\Big(\frac{\frac{\partial X_1}{\partial x}}{\frac{\partial X_1}{\partial y}}\Big) + c = 0$$

Soit donc $X_1(x, y) =$ constante, la fonction implicite d'une courbe $\gamma,$ comme $\frac{\partial X_1}{\partial y} \neq 0 : \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial X_1}{\partial x}}{\frac{\partial X_1}{\partial y}}$ nous avons alors :

$$a\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - 2b\frac{dy}{dy} + c = 0. \quad \gamma \text{ est une courbe caractéristique}$$

En résumé : Soit $\varphi(x, y) = k$ l'équation d'une courbe caractéristique. Si on pose $X_1 = \varphi(x, y)$ l'équation obtenue par ce changement de variables aura un coefficient nul pour $\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}$. Dans le cas de deux familles de courbes caractéristiques, si $\psi(x, y) = 1$ est l'équation de la seconde famille et si l'on pose $X_2 = \psi(x, y)$ l'équation obtenue aura un coefficient nul pour $\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$.

4.5 Formes standards

4.5.1 Équations hyperboliques

Théorème 4.5.1 Soient $\varphi_1(x,y) = C_1$ et $\varphi_2(x,y) = C_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique si on pose $X_1 = \varphi_1(x,y)$ et $X_2 = \varphi_2(x,y)$ l'équation hyperbolique deviendra :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1} \partial \mathbf{X_2}} = \mathbf{G}\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2}}, \mathbf{u}, \mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}\Big) \tag{4.1}$$

Si on pose $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$ on a :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{Y_1^2}} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{Y_2^2}} = \mathbf{H}\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{Y_1}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{Y_2}}, \mathbf{u}, \mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}\Big) \tag{4.2}$$

G, H sont des fonctions dépendant des équations en question.

Démonstration. La première partie découle des calculs précédents. Pour le changement de variables (Y_1, Y_2) :

$$\frac{\partial u}{\partial X_1} = \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial X_2} = \frac{\partial u}{\partial Y_1} - \frac{\partial u}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1 \partial Y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}$$

□

Des exemples sont traités à titre d'exercice dans la section (4.6).

4.5.2 Équations paraboliques

Théorème 4.5.2 Soit $\varphi(x,y) = C$ la famille de courbes caractéristiques d'une équation parabolique. Soit $X_1 = \varphi(x,y)$ et X_2 une fonction indépendante de X_1 $\Big(\frac{D(X_1,X_2)}{D(x,y)} \neq 0\Big)$. L'équation (E) (4.1)devient :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2^2}} = \mathbf{G}\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_1}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X_2}}, \mathbf{u}, \mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}\Big) \tag{4.3}$$

Démonstration. X_1 annule le terme en $\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}$. B coefficient de $\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}$ est aussi nul. L'équation des caractéristiques est :

$$\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 = a\Big(\frac{dy}{dx} - \frac{b}{a}\Big)^2$$

car $b^2 = ac$.
Soit alors $\varphi_1(x,y) = C$, l'équation d'une caractéristique qui définit implicitement y comme fonction de x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$$

Si on pose $X_1 = \varphi_1(x,y)$: $\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial X_1}{\partial y} = 0$. De plus :

$$B = a\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial x} + b\Big(\frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial y}\Big) + c\frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial y}$$

$$= a\left[\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial X_1}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{X_2}{\partial y} = 0\right]$$

Pour un exemple voir section des exercices.

4.5.3 Équations elliptiques

L'équation des caractéristiques est

$$\mathbf{a\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0}$$

Les solutions étant complexes sont écrites sous la forme :

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{ac-b^2}{a^2}}}$$

$$\mathbf{X_1 = \eta_1(x,y) + i\psi_1(x,y) = \lambda_1 \ \lambda_1 \in \mathbb{C}}$$

$$\mathbf{X_2 = \eta_2(x,y) - i\psi_2(x,y) = \lambda_2 \ \lambda_2 \in \mathbb{C}}$$

Le changement de variables est : $Y_1 = \eta_1$; $Y_2 = \psi_1$.

Théorème 4.5.3 Soient $\varphi_1(x,y) = C_1$, $\varphi_2(x,y) = C_2$, les solutions complexes de :

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{ac-b^2}{a^2}}}$$

On pose :

$$\mathbf{Y_1 + iY_2 = \varphi_1(x,y) \quad Y_2 - iY_2 = \varphi_2(x,y)}$$

(E) devient

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = G\Big(\frac{\partial u}{\partial Y_1}, \frac{\partial u}{\partial Y_2}, u, Y_1, Y_2\Big)}$$

La démonstration est assez simple, un exemple est traité en exercice (cf. section (4.6) Exercice 4.6.2 3.e)).

4.6 Exercices corrigés

Exercice 4.6.1 Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

1) Donner sa nature. 2) Déterminer les courbes caractéristiques et la forme standard.

Solution : 1. $b^2 - ac = \frac{x^2y^2}{4} - x^2(-6y^2) = \frac{x^2y^2}{4} + 6x^2y^2 = \frac{25x^2y^2}{4}$. Quantité positive pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, donc l'équation est de type hyperbolique pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

2. Les équations des courbes caractéristiques sont solutions de l'équation :

$$x^2(\frac{dy}{dx})^2 + xy\frac{dy}{dx} - 6y^2 = 0$$

Les solutions sont :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}a = \frac{(-xy)+\sqrt{25x^2y^2}}{2x^2} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-xy)-\sqrt{25x^2y^2}}{2x^2} = \frac{-3y}{x}.$$

On résoud ces équations carctéristiques par la méthode de séparation de variables :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(y) = \ln(x) + \text{constante}.$$

On déduit :

$$x^2C = y$$

C est une constante réelle l'intégration. D'où $C_1 = \frac{y}{x^2}$. Pour la seconde solution :

$$-3\ln x = \ln y \Longrightarrow y = C_2x^{-3} \Longrightarrow C_2 = yx^3.$$

On prendra donc :

$$X_1 = C_1 \text{ et } X_2 = C_2.$$

3. **La forme standard**
Nous effectuons le changement de variables :

$$X_1 = \frac{y}{x^2},\;\; X_2 = x^3y$$

Nous avons donc :

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = -2x^{-3}y, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x} = 3x^2y$$
$$\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial y} = x^3.$$

La règle de dérivation des fonctions composées donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x} = -2x^{-3}y\frac{\partial u}{\partial X_1} + 3x^2y\frac{\partial u}{\partial X_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{6}{x^4}y\frac{\partial u}{\partial X_1} - 2x^{-3}y\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1}\frac{\partial X_2}{\partial x}\Big) +$$
$$6xy\frac{\partial u}{\partial X_2} + 3x^2y\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\frac{\partial X_2}{\partial x}\Big)$$
$$= 4x^{-6}y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 12x^{-1}y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1} + 9x^4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2} + 6x^{-4}y\frac{\partial u}{\partial X_1} + 6xy\frac{\partial u}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -2x^{-3}\frac{\partial u}{\partial X_1} - 2x^{-3}y\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\frac{X_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y}\Big) + 3x^2\frac{\partial u}{\partial X_2} +$$

$$3x^2y\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\frac{\partial X_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\frac{\partial X_2}{\partial y}\Big).$$

$$=-2x^{-5}y\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+3x^5y\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}-2x^{-3}\frac{\partial u}{\partial X_1}+3x^2\frac{\partial u}{\partial X_2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^{-2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\frac{\partial X_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y}\Big)+x^3\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\frac{\partial X_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\frac{\partial X_2}{\partial y}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+x^6\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}.$$

En remplaçant dans l'équation initiale on a :

$$(-25xy^2)\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+(8x^{-2}y-2x^{-3}y)\frac{\partial u}{\partial X_1}+(3x^3y+3x^2y)\frac{\partial u}{\partial X_2}=0$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}-\frac{2(4x-1)}{25x^4y}\frac{\partial u}{\partial X_1}-\frac{3x(x+1)}{25y}\frac{\partial u}{\partial X_2}=0$$

Comme $x^5=X_2/X_1$ et $y^5=X_1^3X_2^2$. La forme standard est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}-2\frac{(4X_2^{1/5}-X_1^{1/5}))}{25X_2^{6/5}}\frac{\partial u}{\partial X_1}-3\frac{(X_2^{1/5}+X_1^{1/5})}{25X_1X_2^{1/5}}\frac{\partial u}{\partial X_2}=0$$

Exercice 4.6.2 Soit $(E1)$ l'équation (EDP) suivante :

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2}=0 \qquad (E1)$$

1. Déterminer la nature de $(E1)$, ainsi que les caractéristiques.
2. Réduisez à la forme standard.
3. Mêmes questions pour les équations :

$$a)\, x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$b)\, x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$c)\, x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$d)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$e)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Solution : 1. Pour l'équation $(E1)$, $b = 0, a = y^2, c = -x^2$, $b^2 - ac = 0 - y^2(-x^2) = x^2 \cdot y^2 > 0$. L'équation est de type hyperbolique pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Les courbes caractéristiques sont obtenues par le biais du polynôme caractéristique :

$$y^2(\frac{dy}{dx})^2 - x^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \text{ et } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Les courbes caractéristiques s'obtiennent en résolvant les deux équations précédentes soit :

$$X_1 = y^2 - x^2; \;\; X_2 = y^2 + x^2$$

De plus :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x}, & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x}, & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x, & 2y \\ 2x, & 2y \end{vmatrix} = -8xy \neq 0, \quad \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

$$u(x,y) = u(X_1, X_2) = u(y^2 - x^2, y^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \cdot \frac{X_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1}(-2x) + \frac{\partial u}{\partial X_2}(2x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \cdot \frac{X_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1}(2y) + \frac{\partial u}{\partial X_2}(2y).$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1}(2y) + \frac{\partial u}{\partial X_2}(2y)$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^2) = -2x; \;\; \frac{\partial X_2}{\partial x} = 2x.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1}(-2x) + \frac{\partial u}{\partial X_2}(2x)\right]$$

En développant on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}(-4x^2) + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} - 2\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 8y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + 2\frac{\partial u}{\partial X_1} + 2\frac{\partial u}{\partial X_2}$$

$(E1)$ devient :

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}(-8x^2y^2 - 8x^2y^2) - 2\frac{\partial u}{\partial X_1}(x^2 + y^2) + 2\frac{\partial u}{\partial X_2}(y^2 - x^2).$$

De plus on a : $X_2^2 - X_1^2 = 4x^2y^2$. $(E1)$ redevient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{X_1}{2(X_2^2 - X_1^2)} \cdot \frac{\partial u}{\partial X_2} - \frac{X_2}{2(X_2^2 - X_1^2)} \cdot \frac{\partial u}{\partial X_1}$$

Soient $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1 - X_2$. Avec ce changement de variables on a :

$$\frac{\partial u}{\partial X_1} = \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}; \quad \frac{\partial u}{\partial X_2} = \frac{\partial u}{\partial X_2} = \frac{\partial u}{\partial Y_1} - \frac{\partial u}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = \frac{1}{2(X_2^2 - X_1^2)} \left[X_1 \frac{\partial u}{\partial Y_1} - X_1 \frac{\partial u}{\partial Y_2} - X_2 \frac{\partial u}{\partial Y_1} - X_2 \frac{\partial u}{\partial Y_2} \right]$$

Soit $X_2^2 - X_1^2 = -Y_1 Y_2$. La forme standard de $(E1)$ devient :

$$2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} \right] = \frac{1}{Y_2} \frac{\partial u}{\partial Y_2} - \frac{1}{Y_1} \frac{\partial u}{\partial Y_1}.$$

2. Pour l'équation a) $a(x,y) = x^2$; b(x,y)=xy, $c(x,y) = y^2$. L'équation est du type parabolique car $b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$. Le polynôme caractéristique des courbes caractéristiques :

$$x^2 (\frac{dy}{dx})^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

donne la solution double $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ d'où $y = Cx$. Pour la forme standard on pose $X_1 = \frac{y}{x}$ et $X_2 = y$. De plus :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X_1}{\partial x}, & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x}, & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} -\frac{y}{x^2} & , & \frac{1}{x} \\ 0 & , & 1 \end{array} \right| = -\frac{x+y}{x^2} \neq 0, \quad \forall\, x \neq 0, y \neq 0.$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1} (-\frac{y}{x^2}) + \frac{\partial u}{\partial X_2} \cdot 0$$

car $\frac{\partial X_2}{\partial x} = 0$. D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial X_1}$$

par ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \cdot 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \cdot 1.$$

En évaluant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, il vient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial X_1} \cdot \frac{-y}{x^2}) = \frac{-y}{x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial X_1}) \right] + \frac{\partial u}{\partial X_1} \left[\frac{2y}{x^3} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x} \right] + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2}\left[\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\right] + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial X_1}$$

car : $\frac{\partial X_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ et $\frac{\partial X_2}{\partial x} = 0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial X_1}\cdot -\frac{y}{x^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1}(-\frac{1}{x^2}) - \frac{y}{x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}\frac{\partial X_2}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{y}{x^2}\left[\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\right] - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial X_2})$$

On sait que :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial X_2}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}\right] + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

En remplaçant dans l'équation a) :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}(y^2) = 0, \quad \forall y \neq 0$$

Donc en intégrant $\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}(X_2^2) = 0, (X_2 = y)$ on a :

$$u(X_1, X_2) = f(X_1)X_2 + g(X_1)$$

et en remplaçant on a : $u(x, y) = yf(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$. f et g sont des fonctions arbitraires.

3. Pour l'équation b) :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$a(x, y) = x^2$, $b = 0$, $c(x, y) = -y^2$ $b^2 - ac = x^2y^2 > 0$. Cette équation est de type hyperbolique. Le polynôme caractéristique :

$$x^2(\frac{dy}{dx})^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow (\frac{dy}{dx})^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

On a : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

$$y = C_1 x, \quad yx = C_2$$

$$X_1 = xy, \quad X_2 = \frac{y}{x}$$

car

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = C \ln x \Longleftrightarrow y = C_1 x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$
$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$
$$\ln y + \ln x = C \Longleftrightarrow yx = C_2.$$

C_1, C_2 sont des constantes réelles. De plus on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x}, & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x}, & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & , & x \\ -\frac{y}{x^2} & , & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} \neq 0, \quad \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial X_2}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial X_2}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1} y + \frac{\partial u}{\partial X_2}(-\frac{y}{x^2}).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial X_2}) = y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial X_1}) + y\frac{2}{x^3}\frac{\partial u}{\partial X_2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial X_2})$$
$$= y\left[y\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}\right] + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial X_2} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial X_2}) = x\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial X_1}) + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial X_2})$$
$$= x\left[\frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial u}{\partial X_1})\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial u}{\partial X_1})\frac{\partial X_2}{\partial y}\right]$$
$$+ \frac{1}{x}\left[\frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial u}{\partial X_2})\frac{\partial X_2}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial u}{\partial X_2})\frac{\partial X_2}{\partial y})\right]$$
$$= x\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}x + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}x + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\frac{1}{x}\right]$$
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

En multipliant par $-y^2$, en rajoutant et en remplaçant :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1}x + \frac{\partial u}{\partial X_2}(\frac{1}{x})$$

La forme standard devient :

$$-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial X_2} = 0$$

Puis :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{1}{2X_1}\frac{\partial u}{X_2} = 0$$

4. Pour l'équation c) :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$a(x,y) = x^2,\ b(x,y) = -xy,\ c(x,y) = y^2.\ \ b^2 - ac = 0.$ L'équation est du type parabolique. Le polynôme caractéristique :

$$x^2(\frac{dy}{dx})^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

qui s'écrit :

$$(x\frac{dy}{dx}+y)^2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

On trouve :

$$X_1(x,y)=xy,\ \ X_2(x,y)=x$$

De plus on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x}, & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x}, & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & , & x \\ 1 & , & 0 \end{vmatrix} = -x \neq 0, \quad \forall x\neq 0, y\neq 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X_1}y+\frac{\partial u}{\partial X_2}\cdot 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial X_1}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial X_2}\cdot 0=\frac{\partial u}{\partial X_1}x$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=y(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1}\frac{\partial X_2}{\partial x})+(\frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\frac{\partial X_2}{\partial x})\\ &=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial X_1}+y(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1}\frac{\partial X_2}{\partial x})=xy\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1}+\frac{\partial u}{\partial X_1}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\frac{\partial X_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2\partial X_1}\frac{\partial X_2}{\partial y})=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}$$

En substituant dans l'EDP :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}-(2xy+y)\frac{\partial u}{\partial X_1}-\frac{\partial u}{\partial X_2}=0$$

On divise par $x^2(x\neq 0)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}-\frac{(2x+1)}{x^2}\frac{\partial u}{\partial X_1}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial X_2}=0$$

Comme $x=X_2$ et $y=\frac{X_1}{X_2}$ la forme standard devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}-\frac{(2X_2+1)}{X_2^2}\frac{\partial u}{\partial X_1}-\frac{1}{X_2^2}\frac{\partial u}{\partial X_2}=0$$

5. Pour le cas d)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Le polynôme caractéristique :

$$(\frac{dy}{dx})^2)+2\frac{dy}{dx}+2=0$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} C_1 = x + y - ix \\ C_2 = x + y + ix \end{cases}$$

Les courbes caractéristiques sont :

$$\begin{cases} X_1(x,y) = x + y \\ X_2(x,y) = x \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x}, & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x}, & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & , & 1 \\ 1 & , & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad \forall x, \forall y.$$

Les formules des fonctions composées nous permettent d'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial X_1} + \frac{\partial U}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial X_1} + \frac{\partial U}{\partial X_2}\right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial U}{\partial X_1})\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial U}{\partial X_1})\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial U}{\partial X_2})\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial U}{\partial X_2})\frac{\partial X_2}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2 \partial X_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} \end{aligned}$$

De même pour y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial X_1}) = \frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial U}{\partial X_1})\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial U}{\partial X_1})\frac{\partial X_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2}$$

De plus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial X_1}) =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial U}{\partial X_1})\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial U}{\partial X_1})\frac{\partial X_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2 \partial X_1}.$$

En remplaçant dans l'équation d) la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = 0$$

6. Pour l'équation e) on a : $b = 0, a = 1, c = x^2,\ \ b^2 - ac = -x^2; \forall x \neq 0$. L'équation est donc elliptique.
   Pour les courbes caractéristiques :

$$(\frac{dy}{dx})^2 + x^2 = 0 \Longrightarrow (\frac{dy}{dx})^2 = -x^2 = i^2x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = ix; \quad \frac{dy}{dx} = -ix$$

   Donc :

$$2y - ix^2 + K_1; \quad 2y + ix^2 = K_2$$

   On déduit les courbes $Y_1 = 2y\,;\ Y_2 = -x^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x\frac{\partial u}{\partial Y_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial Y_1}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\frac{\partial u}{\partial Y_2} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}$$

   L'équation devient :

$$-2\frac{\partial u}{\partial Y_2} + 4x^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}\Big) = 0$$

   ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = \frac{1}{2Y_2}\frac{\partial u}{\partial Y_2}.$$

Exercice 4.6.3 Étant donnée l'équation de type suivant :

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Déterminer le type de l'équation, donner la forme standard.

Solution :

$$b^2 - ac = x^4$$

$$a(x,y) = x\ \ b(x,y) = 0\ \ c(x,y) = -x^3.$$

L'équation donnée est hyperbolique pour $x \neq 0$. Les courbes caractéristiques sont données par :

$$x(\frac{dy}{dx})^2 - x^3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = x; \quad \frac{dy}{dx} = -x;$$

On a donc :

$$\frac{1}{2}x^2 + y = C_1; \quad C_2 = \frac{1}{2}x^2 - y.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad X_1 = \frac{1}{2}x^2 - y; \quad X_2 = \frac{1}{2}x^2 + y$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial X_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial X_2} \\
&= x\frac{\partial f}{\partial X_1} + x\frac{\partial f}{\partial X_2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial X_1} + \frac{\partial X_2}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial X_2} \\
&= -\frac{\partial f}{\partial X_1} + \frac{\partial f}{\partial X_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial f}{\partial X_1} + \frac{\partial f}{\partial X_2} + \\
& x^2\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}\Big) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de départ on a :

$$4x^3\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} = 0$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \implies f(X_1, X_2) = g(X_1) + h(X_2). \tag{4.1}$$

où g, h sont des fonctions arbitraires. On a donc :

$$f(x, y) = g(\frac{1}{2}x^2 - y) + h(\frac{1}{2}x^2 + y)$$

Exercice 4.6.4 Donner la forme d'une corde vibrante au moment $t = \frac{\pi}{2a}$ si son mouvement est défini par l'équation $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et par les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &=& a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
U(x,t)|_{t=0} &=& \sin x \\
\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)|_{t=0} &=& 1
\end{array}\right. \tag{4.2}$$

Solution : Quand on écrit l'équation précédente pour $(t, x) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

$b^2 - ac = 0 - 1 \times (-a^2) = a^2 > 0$, l'équation est hyperbolique. Le polynôme caractéristique $(\frac{dx}{dt})^2 - a^2 = 0 \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = a$; et $\frac{dx}{dt} = -a$. D'où

$$x = at + C_1, \;\; x = at + C_2$$

La forme standard s'obtient en posant : $X_1 = x - at$ et $X_2 = x + at$. $\frac{\partial X_1}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial X_1}{\partial t} = -a$, de même $\frac{\partial X_2}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial X_1}{\partial t} = a$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial X_1}(-a) + \frac{\partial u}{\partial X_2}(a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}(-a) + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}\cdot a\right] +$$

$$a(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}(-a) + a\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(-a\frac{\partial u}{\partial X_1} + a\frac{\partial u}{\partial X_2})$$

$$= -a\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial X_1}) + a\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial X_2})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X_2 \partial X_1}\right] - \frac{a^2\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

D'après l'équation (4.2) l'expression précédente vaut $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. On calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2})$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial u}{\partial X_1})\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_1}(\frac{\partial u}{\partial X_2})\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_2}(\frac{\partial u}{\partial X_2})\frac{\partial X_2}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$

$$a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2}) = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2})$$

$$4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = 0$$

On déduit :

$$u(X_1, X_2) = \psi_1(X_2) + \psi_2(X_1)$$

Donc

$$u(X_1, X_2) = \psi_1(x + at) + \psi_2(x - at) \tag{4.3}$$

ψ_1, ψ_2 sont des fonctions arbitraires calculées plus loin. Pour $t = 0$ et en utilisant les conditions initiales de (4.2) on a :

$$\begin{cases} \psi_1(x) + \psi_2(x) = \sin x \\ a\psi_1'(x) - a\psi_2'(x) = 1 \end{cases}$$

En dérivant par rapport à t la première équation :

$$\psi_1'(x) = \frac{a\cos x + 1}{2a} \Longrightarrow \psi_1(x) = \sin x + \frac{1}{2a} + \frac{K_1}{2}$$

On déduit de même

$$\psi_2(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2a} - \frac{K_1}{2}$$

On déduit la solution

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+at) + \sin(x-at)\right]$$

En utilisant les formules trigonométriques il vient :

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(at) + t$$

Si $t = \frac{\pi}{2a}$ alors $u(x, \frac{\pi}{2a}) = \frac{\pi}{2a}$.

Exercice 4.6.5 En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0, 0 \leq x \leq l$$

avec les conditions aux limites : $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0$ et $u(x,t)|_{t=0} = f(x)$. f est une fonction développable en série de Fourier dans l'intervalle $0 \leq x \leq l$, ($l > 0$). Un exemple de fonction de f avec $l = \pi$:

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \text{ et } x < 0 \end{cases}$$

Solution : Soit $u(x,t) = f(x)\cdot g(t)$, on trouve :

$$\begin{cases} f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x \\ g(t) = Ke^{-\omega^2 t} \qquad\qquad \text{on choisit K=1} \end{cases}$$

On applique les conditions aux limites :

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x = 0 \Longrightarrow B = 0$$

De même

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = -A\omega\sin\omega l = 0 \Longrightarrow A \neq 0\ et\ \omega l = k\pi \Longrightarrow \omega = \frac{k\pi}{l}$$

La solution est

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} u_k(x,t) = \sum_{k\geq 1} A_k \cos\frac{k\pi}{l} x e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Comme $u(x,0) = \sum_{k\geq 1} A_k \cos\frac{k\pi}{l}x = f(x)$. Les coefficients de Fourier A_k sont déterminés par :

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx.$$

Dans le cas de f définie ci-dessus : $l = \pi$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\cos kx\,dx = \frac{3\cdot(-1)^k - 1}{k^2}.$$

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1}\left[\frac{3\cdot(-1)^k - 1}{k^2}\right]\cos kx e^{-k^2 t}.$$

Chapitre 5

Les équations fondamentales de la physique mathématique

5.1 Équation de la chaleur

Elle est de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u^2}}. \tag{5.1}$$

Elles sont utilisées dans l'étude de problèmes posés par les processus de diffusion de la chaleur, de la filtration de liquides ou de gaz dans un milieu poreux (exemple de la filtration du pétrole et des gaz dans le grès sous couverture). C'est une équation de type parabolique (cf. 4.3.1. 2.).

5.1.1 Équation de la propagation de la chaleur dans une barre

Soit une barre homogène de longueur l. On veut étudier le processus de la propagation de la chaleur dans la barre. Notons par $u(x,t)$ la température dans la section de la barre d'abscisse x à l'instant t. Expérimentalement on a établi que la vitesse de propogation de la chaleur pénétrant par la section d'abscisse x dans un intervalle de temps unité, est donnée par la formule :

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} S \tag{5.2}$$

S désigne la surface de la section de la barre considérée, k est le coefficient de conduction thermique. Par ailleurs on sait que la vitesse du flux de chaleur est égale à $q = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. ΔQ est la quantité de chaleur, passant par la section S au cours du temps Δt. Soit l'élément de la barre, compris entre les sections d'abscisse x_1 et x_2, $(x_2 - x_1)$. La quantité de chaleur, passant par la section d'abscisse x_1 au cours du temps Δt sera :

$$\Delta Q_1 = -k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} S\Delta t, \tag{5.3}$$

De même pour x_2 :

$$\Delta Q_2 = -k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S\Delta t. \tag{5.4}$$

L'apport de chaleur au cours du temps sera :

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = [-k \frac{\partial u}{\partial x}]\Big|_{x=x_1} S\Delta t] - [-k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S\Delta t] \approx k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \, S\Delta t \tag{5.5}$$

La formule a été obtenue en utilisant le théorème de Lagrange. On a de plus :

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \Delta x S \, \Delta u \tag{5.6}$$

Δu est l'élévation de la température au cours du temps Δt.

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \tag{5.7}$$

c est la capacité calorifique de la substance de la barre, ρ est la densité de la substance de la barre ($\rho \, \Delta x \, S$ est la masse de l'élément de la barre). En utilisant les équations (5.5) et (5.7) on obtient :

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \, \Delta t = c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \, \Delta t$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On pose $\frac{k}{c\rho} = a^2$, et on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.8}$$

Cette dernière équation est appelée **équation de la chaleur dans une barre homogène**. Pour qu'elle soit complètement déterminée, la fonction $u(x,t)$ doit vérifier les conditions initiales qui correspondent aux conditions physiques du problème. Les conditions initiales correspondent au premier problème aux limites pour $0 \leq t \leq T$ sont les suivantes :

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{5.9}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t) \tag{5.10}$$

$$u(l,t) = \psi_2(t) \tag{5.11}$$

On démontre que sous ces conditions l'équation (5.8) admet une solution unique dans le domaine $0 \leq x \leq l, \; 0 \leq t \leq T$.

5.1.2 Propagation de la chaleur dans une barre infinie

On suppose qu'à l'instant initial la température de diverses sections d'une barre infinie soit fixée. Si la barre coincide avec l'axe Ox, le problème mathématique s'énonce de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x^2}}, \qquad -\infty < \mathbf{x} < \infty \quad \mathbf{t} > \mathbf{0} \tag{5.12}$$

avec la condition initiale $u(x,0) = \phi(x)$. Pour la résolution appliquons la méthode de séparation des variables.

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 \\ \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} T' + a^2\lambda^2 T = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

La solution est :

$$\begin{cases} T = Ce^{-a^2\lambda^2 t} \\ X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \end{cases}$$

Comme $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ on a :

$$u_\lambda(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

$$= e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]$$

la constante C est incluse dans $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$. La solution $u(x,t)$ est par conséquent :

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \tag{5.13}$$

Avec les conditions initiales : $t = 0, \quad u(x,0) = \phi(x)$. Donc :

$$\phi(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \tag{5.14}$$

peut être représentee par une intégrale de Fourier.

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha, \;\; sB(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha$$

En reportant dans (5.13), on obtient :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha)\cos\lambda + (\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha)\sin\lambda x]d\lambda \tag{5.15}$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{-a^2\lambda^2 t}[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)d\alpha)d\lambda \tag{5.16}$$

On inverse l'ordre d'intégration :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi(\alpha)\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha - x)d\lambda]\,d\alpha \tag{5.17}$$

On pose $\beta = \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}}$; $a\lambda\sqrt{t} = z$ dans l'intégrale :

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha - x)d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta z dz \tag{5.18}$$

$$\frac{dK(\beta)}{d\beta} = K'(\beta) = -\int_0^{+\infty} e^{-z^2} z\sin\beta z dz = \frac{1}{2}[e^{-z^2}\sin\beta\, z]_0^\infty - \frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\,\beta z dz$$

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2}K(\beta)$$

$$K(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

$$K(0) = \int_0^\infty e^{-z^2}dz = \frac{sqrt\pi}{2}$$

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2/4} \tag{5.19}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} \tag{5.20}$$

En définitive l'équation suivante appelée **Intégrale de Poisson**.

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)}{4a^2 t}} d\alpha \tag{5.21}$$

5.2 Équation des ondes

Elle est de la forme :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{a}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \tag{5.1}$$

On est conduit à considérer dans les processus de vibrations transversales d'une corde les vibrations longitudinales d'une tige, des oscillations du courant électrique dans un fil. Cette équation est du type hyperbolique.
Dans le cas de l'équation des vibrations de la corde $(a^2 = \frac{T}{\rho}$, ρ étant la densité linéaire de la corde et T étant la tension), et pour déterminer complètement le mouvement de la corde l'équation (5.1) ne suffit pas. Des conditions initiales sont nécessaires aux extrémités de la corde $(x = 0,\ x = l)$ au temps $t = 0$:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

De plus au temps $t = 0$, la forme de la corde est donnée par la fonction :
$u(x,0) = |_{t=0} = f(x)$. De plus on doit fixer la vitesse au moment initial en chaque point de la corde, déterminée par la fonction $\varphi(x)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x) \tag{5.3}$$

5.2.1 Oscillations électriques dans les conducteurs

Le courant électrique dans un conducteur est caractérisé par la grandeur $i(x,t)$ et la tension $v(x,t)$ qui dépendent de la coordonnée x du point du conducteur et du temps t. En partant des équations du télégraphe :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0 \tag{5.5}$$

En dérivant par rapport à t la première équation et par rapport à x la seconde équation on obtient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial v}{\partial t} + ARv \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial i}{\partial t} + ARi \tag{5.7}$$

R est la résistance et L est le coefficient d'autoinduction, A le coefficient de fuite de la chaleur dans le conducteur. Si l'on veut négliger la fuite de courant par l'isolation (A=0) et la résistance (R=0) les équations précédentes se ramènent à des équations d'ondes :

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 i}{\partial t^2};\quad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{5.8}$$

$a^2=\frac{1}{CL}$. Les conditions initiales et aux limites sont formulées pour le problème en tenant compte des conditions physiques.

5.2.2 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de séparation des variables

Soit donc le système à résoudre :

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=0\\ u(l,t)=0\\ u(x,0)=f(x)\\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases} \tag{5.9}$$

On cherche une solution non nulle telle que : $\mathbf{u(x,t)=X(x)\cdot T(t)}$ dans (5.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X(x)\cdot T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)\cdot T''(t)$$

$$X(x)\cdot T''(t)=a^2X''(t)$$

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Deux quantités indépendantes de x et de t respectivement qu'on pose égal à $-\lambda$. On aura donc :

$$\frac{\mathbf{T''}}{\mathbf{a^2T}}=\frac{\mathbf{X''}}{\mathbf{X}}=-\lambda$$

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ T''+a^2\lambda T=0\end{cases} \tag{5.10}$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases}X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sin\sqrt{\lambda}x\\ T(x)=C\cos a\sqrt{\lambda}x+D\sin a\sqrt{\lambda}t\end{cases} \tag{5.11}$$

A, B, C, D sont des constantes réelles arbitraires. La solution s'obtient donc :

$$u(x,t) = (A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x)(C\cos\sqrt{\lambda}t + D\sin\sqrt{\lambda}t) \tag{5.12}$$

En allant vers les conditions initiales on a :

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

Pour $x = 0$, $0 = A \cdot 0 + B\sin 0 = A \Longrightarrow A = 0$

$$0 = A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Longrightarrow B\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

$B \neq 0$ (car si $B = 0$, $X = 0$, $u = 0$), donc $\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$ Donc $X(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x$. Les valeurs de λ sont appelées valeurs propres pour le problème aux limites. Les fonctions $X(x)$ correspondantes sont appelées les fonctions propres.

Remarque 5.2.1 Au lieu de $-\lambda$ on aurait pu prendre $\lambda^2 = k^2$.

$$X'' - k^2X = 0$$

La solution générale $X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$. La solution générale la solution autre que zéro dans le cas d'une équation de cette forme ne peut pas vérifier les conditions aux limites.

Connaissant $\sqrt{\lambda}$ nous pouvons écrire :

$$T(t) = C\cos\frac{a_n\pi}{l}t + D\sin\frac{a_n\pi}{l}t \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

On aura :

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x(C_n\cos\frac{a_n\pi}{l}t + D_n\sin\frac{a_n\pi}{l}t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{a_n\pi}{l}t + D_n\sin\frac{a_n\pi}{l}t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{5.13}$$

La solution (5.13) doit satisfaire aux conditions initiales suivantes :

$$u(x,0) = f(x) \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x) \tag{5.15}$$

dans (5.13) en $t = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{5.16}$$

Si $f(x)$ est développable en série de Fourier dans $[0, l]$, la condition (5.16) sera vérifiée si l'on pose

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}dx \tag{5.17}$$

On dérive par rapport à t, puis en $t = 0$ on a :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{a_n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Les coefficients de Fourier de cette série satisfont

$$D_n \frac{a_n \pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} dx \tag{5.18}$$

Donc :

$$D_n = \frac{2}{a_n \pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \tag{5.19}$$

5.3 Les équations de Laplace

Ces équations sont utilisées dans la résolution de problèmes posés par les champs électriques et magnétiques. Deux types d'équations sont connues, le premier cas est le cas de deux variables, l'équation est de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.1}$$

Elle est du type elliptique (cf. définition 4.3.1 3.). Le deuxième cas est à trois variables indépendantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{5.2}$$

5.3.1 Équation de Laplace en coordonnées cylindriques

Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique de 3 variables :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{5.3}$$

Soient les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z)

$$x = r \cos \phi \;\; y = r \sin \phi \;\; z = z \tag{5.4}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; \phi = \arctan \frac{y}{x} \;\; z = z \tag{5.5}$$

On notera par $u^*(r, \phi, z)$ la solution en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} (\frac{\partial r}{\partial x})^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} (\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

De manière analogue :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} (\frac{\partial r}{\partial y})^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}.$$

En outre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}$$

En remplaçant dans l'équation (5.3) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} = 0 \tag{5.6}$$

C'est l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (cf. (1.10.7)). Dans le plan l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} = 0 \tag{5.7}$$

(r, ϕ) étant les coordonnées polaires dans le plan.

5.3.2 Le problème de Dirichlet pour un anneau

Dans le domaine D (anneau) limité par les cercles centrés C_1 d'équations $x^2+y^2 = R_1^2$ et $x^2 + y^2 = R_2^2$ prenant les valeurs limites :

$$u|_{C_1} = u_1 \tag{5.8}$$
$$u|_{C_2} = u_2 \tag{5.9}$$

u_1, u_2 sont des constantes réelles. L'équation va prendre la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \tag{5.10}$$

La solution :

$$u = C_1 \ln r + C2 \tag{5.11}$$

$$\begin{cases} u_1 = C_1 \ln R_1 + C_2 \\ u_2 = C_1 \ln R_2 + C_2 \end{cases}$$

Les valeurs de C_1 et de C_2 sont :

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad C_2 = u_1 - (u_2 - u_1)\frac{\ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

La solution u est de la forme :

$$u = u_1 + \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}(u_2 - u_1) \tag{5.12}$$

5.3.3 La résolution du problème de Dirichlet pour le cercle

Soit l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{r=R} = f(\varphi) \end{cases} \tag{5.13}$$

$f(\varphi)$ est une fonction donnée sur le cercle (φ est l'angle polaire). On cherche à trouver une fonction $u(r, \varphi)$ continue dans le cercle (y compris sur la frontière), vérifiant l'équation de Laplace avec les conditions :

$$u|_{r=R} = f(\varphi).$$

En coordonnées polaires on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{5.14}$$

ou

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{5.15}$$

Par la méthode de séparation de la variable :

$$u = \Phi(\varphi) \cdot R(r)$$

Portant dans (5.15) on a :

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r) + r\Phi(\varphi)R'(r) + \Phi''(\varphi)R(r) = 0$$

D'où

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2 \tag{5.16}$$

Le premier terme ne dépend pas de r. On a donc :

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -k^2 \tag{5.17}$$

ou

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0 \tag{5.18}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0 \tag{5.19}$$

La solution générale de (5.18) est :

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi \tag{5.20}$$

On cherche une solution sous la forme $R = r^m$ dans (5.19) on obtient :

$$r^2m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2r^m = 0 \tag{5.21}$$

ou

$$m^2 - k^2 = 0$$

qui possèdent deux solutions linéairement indépendantes r^k, et r^{-k}. La solution générale de (5.19) sera :

$$R = Cr^k + Dr^{-k} \tag{5.22}$$

En portant la solution dans (5.20) et dans (5.22) on a :

$$u_k = (A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi)(C_kr^k + D_kr^{-k}) \tag{5.23}$$

Si $k = 0$ les équations (5.18) et (5.19) donnent

$$\Phi'' = 0; \quad rR'' + R' = 0$$

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0\ln r)$$

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi) + B_n\sin n\varphi)r^n \tag{5.24}$$

La constante C est incluse dans A_n et B_n. La condition initiale $u|_{r=R} = f(\varphi)$ donne pour $r = R$

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi) + B_n \sin n\varphi)R^n \tag{5.25}$$

La fonction f doit admettre un développement en série de Fourier dans $[-\pi, +\pi]$ et $A_n R^n$ et $B_n R^n$ soient ses coefficients :

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \\ B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \end{cases} \tag{5.26}$$

La solution finale :

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos n(t-\varphi)(\frac{r}{R})^n dt \tag{5.27}$$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^n \cos n(t-\varphi)]dt \tag{5.28}$$

Car :

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n \cos n(t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n[e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}] =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)})^n + (\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)})^n]$$

$$1 + \frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}$$

$$\frac{1 - (\frac{r}{R})^2}{1 - 2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi) + (\frac{r}{R})^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}$$

La formule finale de la solution :

$$u(r,\varphi) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(t-\varphi) + r^2}dt \tag{5.29}$$

Remarque 5.3.1 Comme $f(\varphi)$ est continue, la fonction $u(r,\varphi)$ définie par (5.29) vérifie (5.15) et quand $r \longmapsto R$ on aura $u(r,\varphi) \longmapsto f(\varphi)$; et $u(r,\varphi)$ est bien la solution du problème de Dirichlet posé pour le cercle.

5.4 Exercices corrigés

Exercice 5.4.1 Résoudre par la méthode de séparation des variables l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= h(x), \quad x > 0 \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

Où $u(x,t)$ est définie sur $[0,L] \times [0,\infty]$, $h \in [0,L]$ $(L, D$ étant deux réels positifs non nuls).

Solution : L'équation peut se mettre sous la forme :

$$D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$$

On pose $D = a^2$. Cette équation est parabolique du fait que $b = 0$,$c = 0$,$b^2 - ac = 0$
On écrit la solution sous la forme :

$$u(x,t) = f(x) \times g(t)$$

x, t sont deux variables indépendantes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g'(t)f(x) = a^2 f''(x)g(t)$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = a^2\frac{f''(x)}{f(x)}$$

Du fait que les deux variables x, t sont indépendantes, le rapport étant constant, soit $-\omega^2$ cette constante,

$$\begin{cases} \frac{g'(t)}{g(t)a^2} = -\omega^2 \\ \frac{f''(t)}{f(x)}) - \omega^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g'(t) + \omega^2 a^2 g(t) &= 0 \qquad (5.1) \\ f''(x)) + \omega^2 f(x) &= 0 \qquad (5.2) \end{aligned}$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} f(x) = A\cos x\omega x + B\sin\omega x \\ g(t) = C\exp(-a^2\omega^2 t) \end{cases}$$

La solution est donc :

$$u(x,t) = C(A\cos\omega x + B\sin\omega x)\exp(-a^2\omega^2 t) \qquad (5.3)$$

On peut prendre $C = 1$ car $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont également des constantes.
En utilisant les conditions initiales : $u(0,t) = 0$ on remplace dans l'équation (5.3) on trouve $A = 0$.
On remplace $u(L,t) = 0$ dans l'équation (5.3)

$$u(L,t) = (A\cos\omega L + B\sin\omega L)\exp -(a^2\omega^2 L) = 0 \Longrightarrow B\sin\omega L = 0$$

$$\sin\omega L = 0 \Longrightarrow \omega L = k\pi \Longrightarrow \omega = \frac{k\pi}{L}$$

pour la dernière équation $u(x,0) = h(x)$

$$h(x) = (B\sin\omega x)\exp -(a^2\omega^2 \times 0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Les coefficients B_n sont ceux du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2L$ égale à $h(x)$ pour $0 \leq x \leq L$.

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\frac{n\pi}{L}sds$$

Donc

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{a^2n^2\pi^2t}{L^2})\sin\frac{n\pi x}{L}\cdot\int_0^L h(s)\sin\frac{n\pi s}{L}ds. \tag{5.4}$$

La tempéature $u(x,t)$ est la somme harmonique sinusoïdaux en x et exponentielle en $t(D = a)$.

Remarque 5.4.1 Dans le cas où $a = 1$, l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq l,\ t > 0$$

satisfaisant aux conditions aux limites.

$$u(x,t)_{|x=0} = u(x,t)|_{x=l} = 0$$

et aux conditions initiales :

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si}\, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l - x & \text{si}\, \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

On trouve

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2t}{l^2}}\sin(\frac{2n+1}{l})\pi x$$

Exercice 5.4.2 On donne une corde fixée aux extrémités $x = 0$, $x = l$. Supposons qu'initialement la corde occupe la position en ligne brisée, représentée par la ligne brisée OAB. Trouver la forme de la corde à tout moment t si les vitesses initiales sont nulles.

Solution : Soit l'équation de la corde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La résolution se fait par la méthode de séparation des variables :

$$u(x,t) = f(x)\cdot g(t)$$

On a :

$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) & = & 0 \qquad (1) \\ u(x,0) = \varphi(x) & = & \begin{cases} \frac{2h}{l}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l}(l-x) & \text{si } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) & = & 0 \end{cases}$$

On a :

$$u(x,t) = f(x)\cdot g(t) = (A\cos\omega x + B\sin\omega x)\cdot(C\cos\omega at + D\sin\omega at)$$

Les conditions de (1) nous amènent à $A = 0$, $\omega = \frac{k\pi}{l}$. On fixe $B = 1$ la solution serait de la forme :

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} u_k(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{k\geq} \left[C_k \cos\frac{k\pi}{l}at + D_k \sin\frac{k\pi}{l}x \right] \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

$$C_k = \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} \frac{2h}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}xdx + \int_{l/2}^{l} \frac{2h(l-x)}{l} \sin\frac{k\pi}{l}xdx \right]$$

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

$$D_k = 0 = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

La solution est donc :

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}at.$$

Exercice 5.4.3 Quelle méthode proposez-vous pour résoudre l'équation de Laplace suivante ?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dans la zone $0 \leq x \leq M$, $0 \leq y \leq N$, vérifiant les conditions : $u(x,0) = 0$
$u(x,N) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M,y) = 0$, ($M$, N étant deux réels positifs).

Solution : On cherche une solution du type $u(x,y) = X(x)Y(y)$ avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u(x,N) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = 0 \\ \frac{\partial u}{y}(M,y) = 0 \end{cases}$$

Avec les dérivées successives l'équation devient :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = K$$

$K = 0$:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = 0 \\ -\frac{Y''}{Y} = 0 \end{cases}$$

On obtient pour la première : $X(x) = A_1 + B_1$
Pour le deuxième $Y(y) = C_1 y + D_1$. A_1, B_1, C_1, D_1 sont des constantes à déterminer.

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \Longrightarrow Y(0) = 0$$

$$u(x,N) = X(x)Y(N) = 0 \Longrightarrow Y(N) = 0$$

$$Y(0) = D_1 = 0 \;\; Y(N) = 0 = C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$$

D'où $u(x,y) = 0$. Par ailleurs, indépendamment du cas $K = 0$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y)_{|(0,y)} = X(0)Y'(y) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0$$

$K<0$: On pose $K=-\nu^2$ on obtient :

$$Y(y) = A\exp(\nu y) + B\exp(-\nu y)$$

$$Y(0) = A + B = 0 \implies B = -A$$
$$Y(N) = A\exp\nu N + B\exp(-\nu N) = 0$$
$$Y(N) = A(\exp\nu N - \exp(-\nu N) = 0 \implies A = 0$$

On déduit

$$u(x,t) = 0$$

$K>0$: On pose $K=\nu^2$

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \\ X''(x) - \nu^2 X(x) = 0 \end{cases}$$

qui devient

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0,\ Y(N) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) - \nu^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\begin{array}{rcl} Y(y) & = & A\cos\nu y + B\sin\nu y \\ Y(0) & = & A = 0 \\ Y(N) & = & 0\times\cos\nu N + B\sin\nu N = 0 \end{array}$$

$B\neq 0$ car sinon $u(x,y)$ serait nulle.

$$\sin\nu N = 0 \Longrightarrow \nu N = k\pi \Longrightarrow \nu_k = \frac{k\pi}{N}.$$

$$Y_k = B_k\sin(\frac{n\pi y}{N}).\ \nu_k^2 = (\frac{n\pi}{N})^2\ Y(0) = Y(N) = 0$$

De même pour $X(x)$:

$$X(x) = C\exp(\nu x) + D\exp(-\nu x)\ X(0) = C + D = 0 \Longrightarrow D = -C$$

$$X(x) = C(\exp(\nu x) - \exp(-\nu x)) = 2Csinh(\nu x) = 2Csinh(\frac{n\pi}{N}x)$$

$sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$, est le sinus hyperbolique.
Donc :

$$X(x) = X_k(x) = 2C_k sinh(\frac{k\pi x}{N})$$

Pour chaque $k\in\mathbb{N}, n\geq 1$

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = 2C_k sinh(\frac{n\pi x}{N})\times B_k\sin(\frac{k\pi y}{N})$$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi y}{N} sinh(\frac{k\pi x}{N})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M,y) = f(y)$$

En dérivant terme à terme :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{N} a_k \cos \frac{k\pi y}{N} sinh(\frac{k\pi x}{N})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{k\pi}{N} \cos \frac{k\pi y}{N} sinh(\frac{k\pi M}{N})$$

D'où

$$a_k = \frac{2}{N} \int_0^N f(y) \cos(\frac{k\pi y}{N}) dy \Big/ (\frac{k\pi}{N}) sinh(\frac{k\pi M}{N}).$$

Exercice 5.4.4 En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a > 0$$

avec la condition initiale : $u(x,0) = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est la température à l'instant t.

Solution : L'exercice se résoud en trois étapes :

1 : Notons par $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier d'une fonction f.

$$\mathscr{F}(u(t,x))(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x\nu} u(t,x) dx$$

De plus

$$\mathscr{F}(\frac{\partial^n u}{\partial x^n})(\nu) = (2i\pi\nu)^n \mathscr{F}(u(t,x))$$

Pour $n = 2$ on a :

$$\mathscr{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\nu) = (2i\pi\nu)^2 \mathscr{F}(u(t,x))$$

Donc

$$\mathscr{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\nu) = 4i^2\pi^2\nu^2 \mathscr{F}(u(t,x))$$

2 :

$$\mathscr{F}(\frac{\partial u}{\partial t})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-2i\pi x\nu} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) dx$$

$$\mathscr{F}(\frac{\partial u}{\partial t})(\nu) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-2i\pi x\nu} u(t,x) dx$$

D'où

$$\mathscr{F}(\frac{\partial u}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathscr{F}(u(t,x)).$$

3 : En allant vers l'équation

$$\mathscr{F}(\frac{\partial u}{\partial t})(\nu) = a\mathscr{F}(\frac{\partial^2}{\partial x^2})(\nu) = ai^2\pi^2\nu^2 \widehat{f}(u(t,x))(\nu)$$

On note par :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{F}(u(t,x))(\nu) = (\widehat{f}(u(t,x))(\nu))'$$

Si on pose $y = \widehat{f}(u(t,x))(\nu)$ alors et comme elle est fonction de t on a :

$$\frac{y'}{y} = 4i^2\pi^2\nu^2$$

$y = C\exp^{-4a\pi^2\nu^2 t}$.

$$(\widehat{u(0,x)})(\nu) = C \quad = \widehat{\varphi(x)} = C$$

Nous avons donc :

$$\widehat{u(t,x)})(\nu) = \widehat{\varphi(x)}(\nu) \times \exp^{-4\pi^2\nu^2 t} = \widehat{\varphi(x)} \times \widehat{g}(t))(\nu).$$

Cherchons la fonction $g(t)$ telle que $\widehat{g}(t) = \exp^{-4\phi^2 t\nu^2 t}$.
Sachant que $\mathscr{F}(\exp^{-at^2})(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$.
On trouve : $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}}\exp^{-\frac{\nu^2}{4t}}$.
Si $f(t) = \exp^{-at^2}$, $a > 0$ alors $f'(t) = -2ta\exp^{-at^2} = -2atf(t)$
d'où

$$f'(t) + 2taf(t) = 0$$

$$\mathscr{F}(f'(t))(\nu) + 2a(\mathscr{F}(tf(t))(\nu) = 0$$

$$(2i\pi\nu)\widehat{f}(\nu) + 2a(\mathscr{F}(tf(t)))(\nu) = 0$$

Donc on a :

$$(2i\pi\nu)\widehat{f}(\nu) = -2\pi\frac{1}{-2i\pi}(\widehat{f})'(\nu)$$

$$(\widehat{f})'(\nu) + 2\pi\nu\widehat{f}(\nu) = 0$$

La solution générale s'écrit :

$$\widehat{f}(\nu) = K\exp(-\pi\nu^2), \;\; K = \widehat{f}(0).$$

$$\widehat{f}(0) = \int_R \exp(-ax^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Longrightarrow \widehat{f}(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

$$\widehat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

car

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2}) = 1$$

du fait que la densité de la loi normale $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$ a une intégrale égale à un.

Bibliographie

[1] Brézis, H. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Dunod, 1999.

[2] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, 1997.

[3] Claire David, Pierre Gosselet. Equations aux dérivées partielles, Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris, 2012.

[4] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Collection Grenoble, Sciences, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[5] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Tomes 7 et 8. Gauthier-Villars, Paris, 1978.

[6] A. Grégoire, Analyse numérique et optimisation, Éditions École polytechnique, Ellipses, Paris, 2005.

[7] Hervé Reinhard. Équations aux dérivées partielles, Introduction. Dunod, 2001.

[8] W. Rudin. Analyse réelle et complexe : cours et exercices. Dunod, 1998.

[9] L. Schwartz. Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, 1980.

[10] K. Yosida. Functional analysis (6th edition). Springer, 1980.