وزارة التعليـــم العـــالي و البحـــث العلـمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
FACULTÉ DE PHYSIQUE

Département de physique Energétique

Résumé du cours de physique1
Mécanique du point matériel
Avec des exercices corrigés

Réalisé par :

Dr YEDJOUR Afifa

Année Universitaire 2021/2022

Avant-propos

Ce cours s'adresse aux étudiants de première année du LM.D, pour aborder l'étude de la physique de manière classique, rassemblant les connaissances de base nécessaires qui décrivent la compréhension des phénomènes que nous observons par des lois et des relations mathématiques.

L'objectif du cours est de suivre, de comprendre les mouvements de tous ce que nous voyons et ensuite élaborer ou construire un modèle permettant de relier les différentes grandeurs observables par une loi physique.

Le présent polycopié comporte trois grands chapitres du cours de mécanique qui est tout à fait conforme au programme du socle commun issu en 2018.

Un rappel mathématique reste essentiel car les connaissances préalables sont recommandées. Les vecteurs, le produit scalaire, le produit vectoriels, l'analyse vectorielle et l'analyse dimensionnelles, tous ses outils mathématiques sont à notre service pour résoudre un problème physique.

Le premier chapitre traite la cinématique qui décrit le mouvement des objets en espace-temps. Les expressions vectorielles du déplacement de la vitesse et de l'accélération de différentes dimensions sont expliquées de façon assez détaillée. Le changement de repère est aussi étudié pour savoir comment sont reliées la vitesse et l'accélération de deux observateurs liés à deux repères différents en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Le deuxième chapitre décrit les mouvements en termes de force où déterminent les causes de ces mouvements. A partir de l'observation, il a été déduit la loi Kepler, puis la loi de Newton, connaissant alors la loi de gravitation universelle. A travers du mouvement des planètes nous définissons le moment cinétique par son terme invariant.

Dans le dernier chapitre, nous donnons toutes les formes d'énergies qui permettent d'agir et d'accomplir des tâches et de produire du travail. La relation d'invariance ou bien la conservation de l'énergie totale est bien expliquée que

nous l'appliquons de façon restreinte avec des exemples. Les différentes catégories de forces sont également citées. Il existe des forces qui dérivent un champ scalaire appelées les forces conservatives. En outre, il existe des forces non-conservatives où la variation de l'énergie totale mesure le travail des forces ne dérivant pas un potentiel.

Les chapitres sont familiarisés aux étudiants des SM et des ST et ils sont renforcés par des exercices ensuite corrigés et des exercices supplémentaires pour atteindre les objectifs du programme.

TABLE DE MATIERES

Chapitre 1 : Cinématique d'un point Matériel

RAPPELS MATHEMATIQUES

1. CALCUL VECTORIEL

Soit A et B deux points dans l'espace :

Coordonnées cartésiennes du point A : $A(x_A, y_{A,} z_A)$

Coordonnées cartésiennes du point B : $B(x_B, y_B, z_B)$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{cases} x_{AB} &= x_B - x_A \\ y_{AB} &= y_B - y_A \\ z_{AB} &= z_B - z_A \end{cases}$

Tout vecteur peut être décomposé en trois sous vecteurs dans une base orthonormée :

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{AB} = x_{AB}\,\vec{\imath} + y_{AB}\,\overrightarrow{\jmath} + z_{AB}\,\vec{k}$$

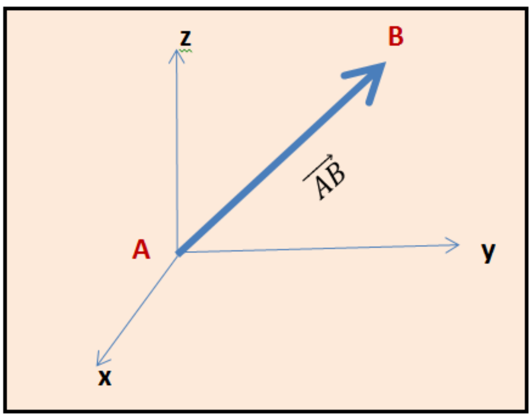
<u>Norme de $\overrightarrow{AB}$</u> : $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{{x_{AB}}^2 + {y_{AB}}^2 + {z_{AB}}^2}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Avec $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1.$

<u>Caractéristique du vecteur $\overrightarrow{AB}$</u>

- Direction est la droite **AB**
- Sens de **A** vers **B**
- Longueur AB ou la norme AB=$|\overrightarrow{AB}|$



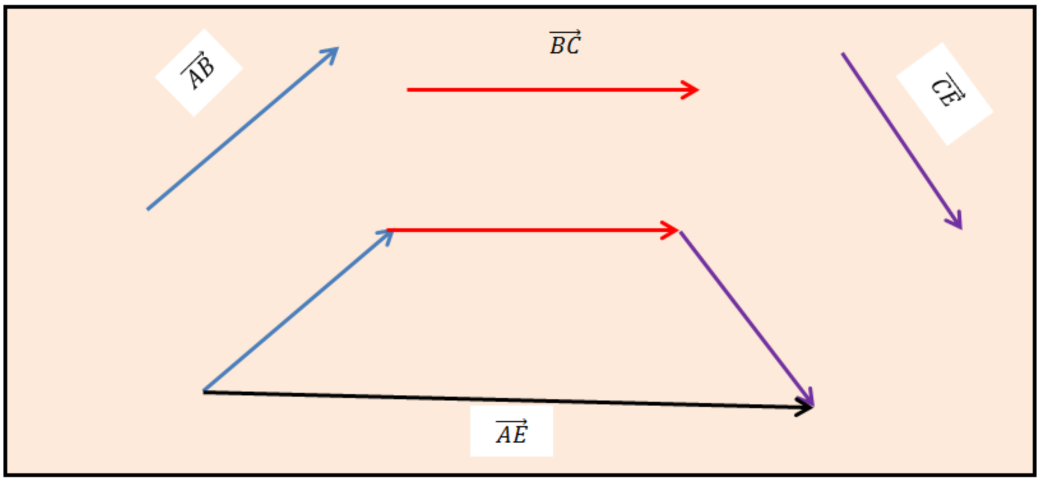
1.1 Propriétés des vecteurs

1.1.a Addition de vecteurs

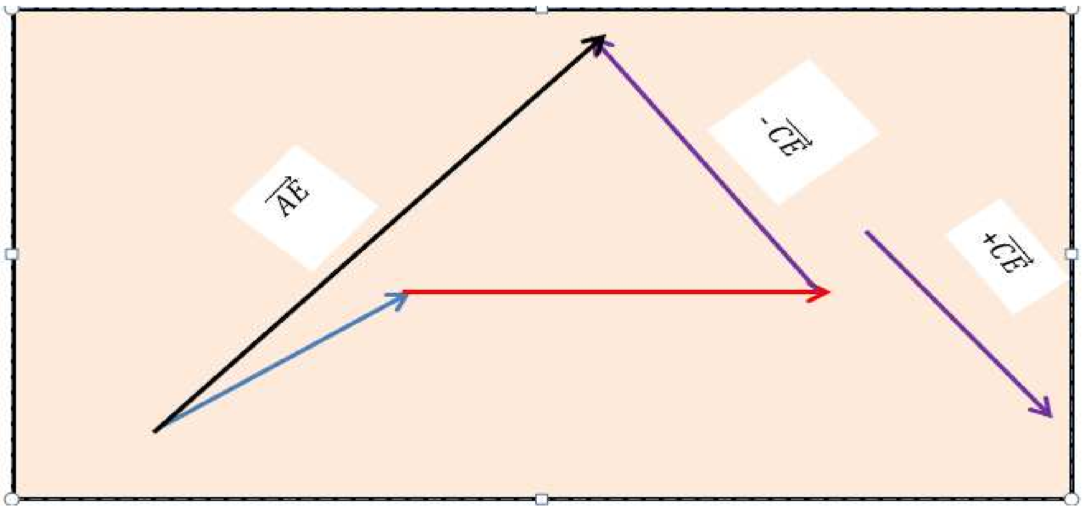
Le déplacement du point A vers le point E en passant par le point B et C est orienté par un vecteur de déplacement$\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AE}$ est une somme vectorielle de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}$.

A l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$



A l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$



$\overrightarrow{AC}$ et $-\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs opposés en direction mais de même module.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CE}$$

1.1.b Multiplication d'un vecteur par un scalaire

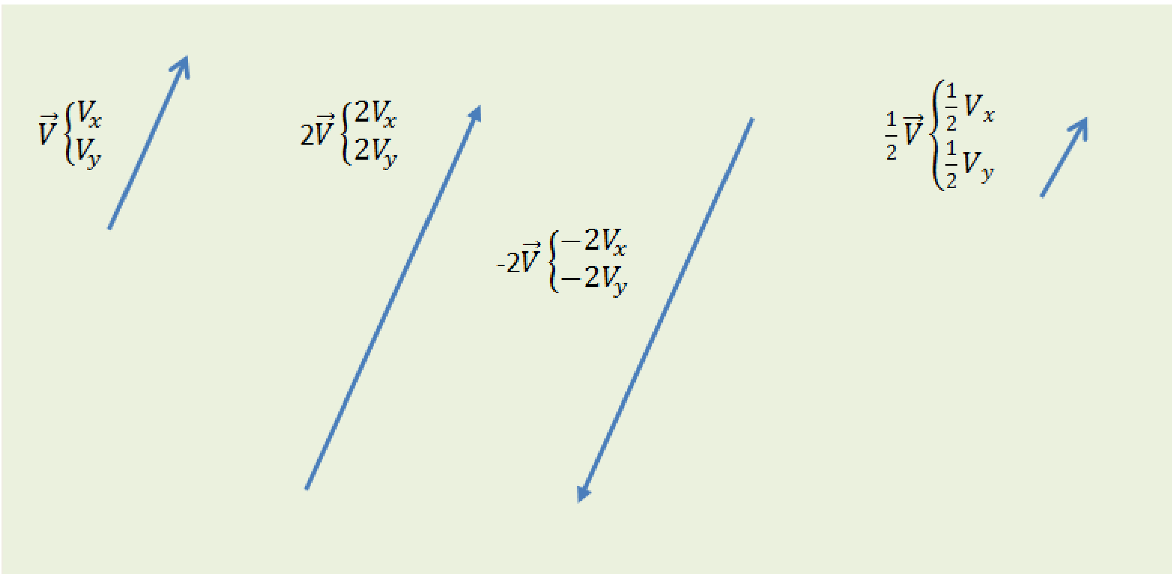
Dans un repère (0,x,y), un vecteur $\vec{V}$ s'écrit comme : $\vec{V} = |\vec{V_x}|\,\vec{\imath} + |\vec{V_y}|\,\vec{\jmath}$

$\vec{V_x}$ est a composante de $\vec{V}$ selon l'axe (0,x).

$\vec{V_y}$ est a composante de $\vec{V}$ selon l'axe (0,y).

<u>La norme de $\vec{V}$</u> $$|\vec{V}| = \sqrt{|\vec{V_x}|^2 + |\vec{V_y}|^2}$$

Les composantes de $\lambda\,.\,\vec{V}$:



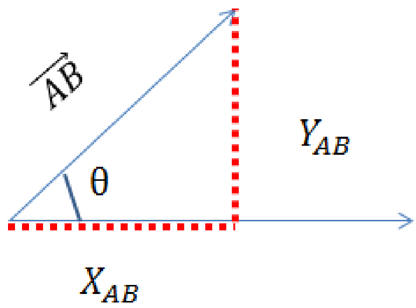
$$\boxed{\lambda\vec{V}\begin{pmatrix} \lambda V_x \\ \lambda V_y \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\frac{\vec{V}}{\lambda}\begin{pmatrix} \frac{V_x}{\lambda} \\ \frac{V_y}{\lambda} \end{pmatrix}}$$

Si $|\lambda| > 1$, la norme du vecteur résultant sera plus grand que $\vec{V}$.

Si $|\lambda| = 1$, la norme du vecteur résultant sera égale à $\vec{V}$. Si $|\lambda| > 1$, la norme du vecteur résultant sera plus petite que $\vec{V}$.

1.2 Vecteur unitaire

Dans le plan, l'angle $\theta(\overrightarrow{AB}\,, o\ x)$



La projection de $\vec{AB}$ sur le plan (o,x,y) :

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} X_{AB} = |\vec{AB}|\cos\theta \\ Y_{AB} = |\vec{AB}|\sin\theta \end{pmatrix}$$

$\vec{AB} = X_{AB}\,\vec{i} + Y_{AB}\,\vec{j}$

$\vec{AB} = |\vec{AB}|\cos\theta\,\vec{i} + |\vec{AB}|\sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{AB} = |\vec{AB}|\,(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\,)$

$\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

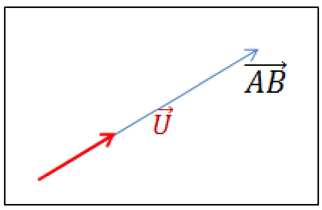
$$\boxed{\vec{U} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}}$$

$\vec{U} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

Vecteur unitaire $\vec{U}$ porté par $\vec{AB}$

$$\boxed{|\vec{U}| = \sqrt{\cos\theta^2 + \sin\theta^2}}$$

$$\boxed{|\vec{U}| = 1}$$



Chaque vecteur est porté par un vecteur unitaire dont le module est égal à 1.

1.3 Produit Scalaire de deux vecteurs

Le scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ peut-être défini de deux manières différentes :

produit de deux vecteurs

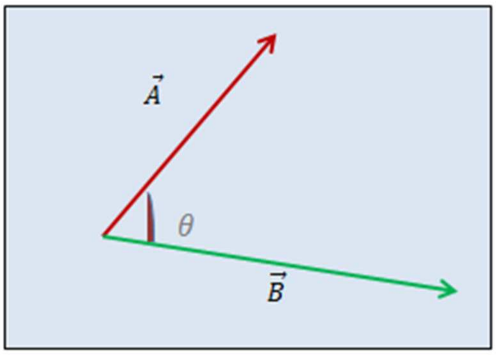
les composantes :

$$\vec{\imath} \,.\, \vec{\imath} = 1$$
$$\vec{\jmath} \,.\, \vec{\jmath} = 1$$
$$\vec{k} \,.\, \vec{k} = 1$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad \vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Projection de $\vec{A}$ sur $\vec{B}$

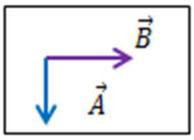


$$\boxed{\vec{A}\,.\,\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| \cos(\theta)}$$

L'angle (θ) entre les deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ est donné par :

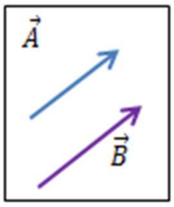
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}$$

$cos\frac{\pi}{2} = 0$



$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$

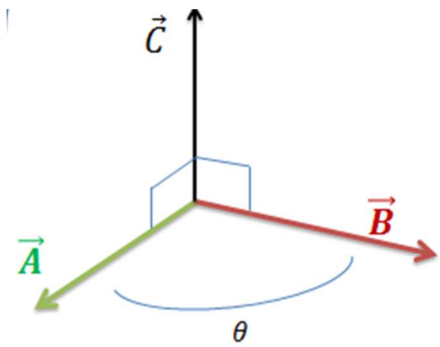
$cos0 = 1$



$\vec{A} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|$

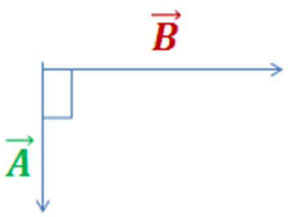
1.4 Produit Vectoriel de vecteurs

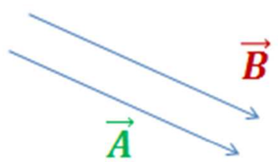
Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur dont les coordonnées dépendent des vecteurs de départ.



- Direction : $\perp \vec{A}$ et $\perp \vec{B}$
- Sens : de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$
- Module : $\left\|\overrightarrow{\vec{A} \wedge \vec{B}}\right\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| \sin(\theta)$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$





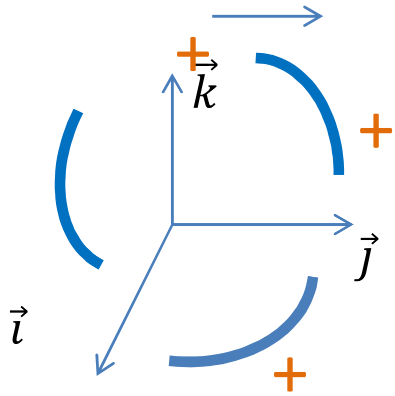
$\sin 0 = 0$

$$\boxed{\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}$$

$$\boxed{\vec{A} \mathbin{/\!/} \vec{B} \Leftrightarrow \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = 0}$$

méthode de calcul

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$$
$$\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$$



$$\vec{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{matrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{matrix}$$

$$\vec{A} \wedge \overrightarrow{B} = \vec{\imath}\,(A_y \times 0 - 0 \times B_y)$$
$$- \overrightarrow{\jmath}\,(A_x \times 0 - 0 \times B_x)$$
$$+ \overrightarrow{k}\,(A_x \times B_y - A_y \times B_x)$$

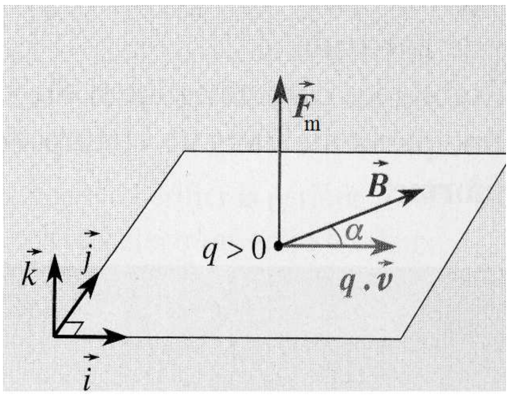
Résultat:

$$\boxed{\vec{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{k}\,(A_x \times B_y - A_y \times B_x)}$$

On appelle $\vec{C} = \overrightarrow{k}\,(A_x \times B_y - A_y \times B_x)$

direction :

$\vec{C} \perp$ au plan ($\vec{A}$ et $\vec{B}$)



Exemple : Force magnétique

$$\boxed{\overrightarrow{F_m} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \vec{B}}$$

Produit Vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ donnera un vecteur $\overrightarrow{F_m}$ qui sera $\perp$ au plan ($\vec{v}$, $\vec{B}$).

Résumé

Vecteur $\vec{A}$ s écrit dans l'espace

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

Le module de $\vec{A}$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

Vecteur unitaire de $\vec{A}$

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

Deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ avec : $\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$

Somme de deux vecteurs

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + (A_y + B_y)\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

Vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Avec $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = 1$; $\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 1$; $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$; $\vec{\jmath} \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{k} \cdot \vec{\imath} = 0$

Egalement :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| . \|\vec{B}\| \cos(\theta)$$

Où θ entre les deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$.

Produit Vectoriel de vecteurs

$$\vec{A} \wedge \overrightarrow{B} = (A_y \times B_z - A_z \times B_y)\vec{\imath} - \vec{}(A_x \times B_z - A_z \times B_x)\vec{\jmath} + (A_x \times B_y - A_y \times B_x)\vec{k}$$

Le module de $\vec{A} \wedge \overrightarrow{B}$

$$\left\|\vec{A} \wedge \overrightarrow{B}\right\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| \sin(\theta)\ \vec{A}\ et\ \vec{B}$$

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$$
$$\vec{\jmath} \wedge \overrightarrow{k} = \vec{\imath}$$
$$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

La **permutation** dans le sens opposé donne lieu à un vecteur accompagné de signe **négatif.**

2. GRANDEURS PHYSIQUES ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

2.1 Définition

Une grandeur physique est une quantité mesurable par exemple, on peut mesurer la **masse** avec une balance, on peut mesurer **le temps** avec un chronomètre et on peut mesurer une **longueur** avec une règle. Ces trois grandeurs sont appelées grandeur physique.

Nous citons dans le tableau suivant sept grandeurs physiques principales auxquelles corresponds à sept unités fondamentales.

Grandeur	Masse	Temps	Longueur	Intensité électrique	Température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Unité(SI)	Kg	Seconde	mètre	Ampère	Kelvin	Mol	Cd candéla
Dimension	M	T	L	I	θ	N	J

- Les unités dérivées : newton (N), le joule(J), Ohm (Ω) et le pascale dérivent des unités fondamentales du tableau ci-dessus.
- Les unités secondaires pour quelques grandeurs physiques sont : le litre, degré Celsius, calories.
- En plus des sept unités fondamentales, il existe le radian (rd) pour les angles.

2.2 Opérations sur les dimensions

Soit A, B et C sont des grandeurs physiques

[A+B] =[A] = B]

[A - B] =[A] = B]

[k A] =k[A] avec k est une constant, [k] =1

[k A] =[A]

[A . B] =[A] .[B]

$$\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[\mathrm{A}]}{[\mathrm{B}]} = [\mathrm{A}]\ [B]^{-1}$$

$[A^n] = [A]^n$ où n est un exposant.

2.3 Les unités

L'unité de mesure permet de mesurer une grandeur physique.

2.3 .a Les multiples des unités

Coefficient	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}
préfixe	déca	hecto	kilo	Méga	giga	téra	péta	Exa
symbole	da	H	k	M	G	T	P	E

2.3. b Les sous-multiples des unités

Coefficient	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
préfixe	déci	centi	milli	Micro	nano	pico	femto	atto
symbole	d	c	M	μ	n	p	f	a

Exercice

Une force appliquée à une particule est donnée par :

$$F = mr^{\alpha}v^{\beta}$$

Où m est une masse, r est une distance et v est une vitesse.

Utiliser les équations aux dimensions de F pour calculer $\alpha\ et\ \beta$.

$$[F] = [m][r^{\alpha}][v^{\beta}]$$

$$[m] = M$$

$$[F] = M[r]^{\alpha}\ [v]^{\beta}$$

$[F] = ML^{\alpha}\ [LT^{-1}]^{\beta}$

La dimension de la force est $[F] = MLT^{-2}$

$$MLT^{-2} = ML^{\alpha} L^{\beta} T^{-\beta}$$

$$LT^{-2} = L^{\alpha+\beta} T^{-\beta}$$

$$\beta = 2$$

$$1 = \alpha + \beta$$

$$\alpha = -1$$

L'expression de F est :$F = mr^{-1}v^2$ devient :

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

On trouve la force centrale ou bien la force normale à la trajectoire.

2.4 Opérateurs

2.4.a Gradient

On appelle gradient du champ scalaire U(x,y,z), le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla}U$$

La grandeur vectorielle $\vec{\nabla}$ représente l'opérateur nabla défini par:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

<u>En coordonnées cylindriques:</u>

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

<u>En coordonnées sphériques:</u>

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

2.4.b Divergence

Etant donné un champ de vecteurs:

$$\vec{A} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

On appelle divergence du vecteur A, le scalaire:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

<u>En coordonnées cylindriques:</u>

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

<u>En coordonnées sphériques:</u>

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

2.4.c Laplacien

Etant donné un champ de vecteurs:

$$\vec{A} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

On appelle laplacien du vecteur A, le vecteur:

$$\Delta\vec{A} = \Delta X\vec{i} + \Delta Y\vec{j} + \Delta Z\vec{k}$$

Ou Δ représente un nouvel opérateur, le laplacien défini par :

$$\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplacien d'un scalaire

La divergence du gradient d'une fonction scalaire U est égale à son laplacien:

$$div\,(\overrightarrow{grad}\,U) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \Delta U$$

Une fonction U à laplacien nul est dite fonction harmonique : sa valeur moyenne sur la surface d'une sphère est égale à sa valeur au centre de la sphère.

Laplacien d'un scalaire dans les systèmes cylindrique et sphérique

<u>En coordonnées cylindriques:</u>

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

<u>En coordonnées sphériques:</u>

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

2.4.d Rotationnel

Etant donné un champ de vecteurs:

$$\vec{A} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

On appelle rotationnel du vecteur A, le vecteur:

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = (\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})\vec{k}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs A dérive d'un potentiel scalaire U est que son rotationnel soit nul:

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}U) = \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla}U) = 0$$

Dans ce cas le champ est dit irrotationnel et il ne peut y avoir de lignes de champ fermés.

2.4.d.1 Rotationnel dans les systèmes cylindrique et sphérique

<u>En coordonnées cylindriques:</u>

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{u_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\vec{k}$$

En coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\vec{u_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{u_\varphi}$$

2.5 Dérivées et intégrales multiples

Dérivées :

Soit f une fonction scalaire de plusieurs variables, y, z, t, on dit que f est dérivable en x0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quand $x \to x_0$

ou $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lorsque $h \to 0$ admet respectivement une limite finie.

Soit $f = f(x,y,z,t)$

La dérivée totale par rapport au temps est :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{df}{dt}$$

Pour un temps constant la dérivée devient :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Coordonnées cartésiennes :

On se rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, le vecteur de position s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$

la différentielle à cette position donne à un tems fixe

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x}dx + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial y}dy + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial z}dz$$

or le vecteur déplacement infinitésimal s'écrit :

$d\overrightarrow{OM} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$

$df = \overrightarrow{grad}f \ . d\overrightarrow{OM}$ d'où $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$

$\overrightarrow{grad}$ est le gradient scalaire en coordonnées cartésiennes.

En coordonnées cylindriques :

La différentielle en coordonnées cylindriques d'une fonction scalaire $f = f(r, \theta, z)$ s'exprime :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1)$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est définie telle que :

$$df = \overrightarrow{grad}f \ . d\overrightarrow{OM} \qquad (2)$$

Une comparaison $d\overrightarrow{OM} = \mathrm{dr}\,\overrightarrow{\mathrm{u_r}} + \mathrm{rd\theta}\,\overrightarrow{\mathrm{u_\theta}} + \mathrm{dz}\,\overrightarrow{\mathrm{u_z}}$ et les deux equations (1) et (2) montre que l'expression du gradient en coordonnées cylindriques s'´ecrit :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

En coordonnées sphériques :

La différentielle en coordonnées sphériques d'une fonction scalaire $f = f(r, \theta, \varphi)$ s'exprime :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi \text{ et } df = \overrightarrow{grad}f \ . d\overrightarrow{OM}$$

On se rappelle qu'en coordonnées sphériques, le vecteur déplacement infinit esimal s'écrit: $d\overrightarrow{OM} = \mathrm{dr}\,\overrightarrow{\mathrm{u_r}} + \mathrm{rd\theta}\,\overrightarrow{\mathrm{u_\theta}} + \mathrm{r}\sin\theta\,\mathrm{d\varphi}\,\overrightarrow{\mathrm{u_\varphi}}$, en comparant ces deux relations nous tirons l'expression du gradient en coordonnées sphériques.

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

2.5.1. Circulation d'un champ de vecteur

Par définition, la circulation d'un champ de vecteur le long d'un chemin délimité par deux points A et B est déterminée par : $\overrightarrow{dC} = \vec{E}.\overrightarrow{dc}$. Ce chemin est découpé en une infinité de vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{dc}$

La circulation de A vers B est donné par $\int_{C_A}^{C_B} dC = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dc}$

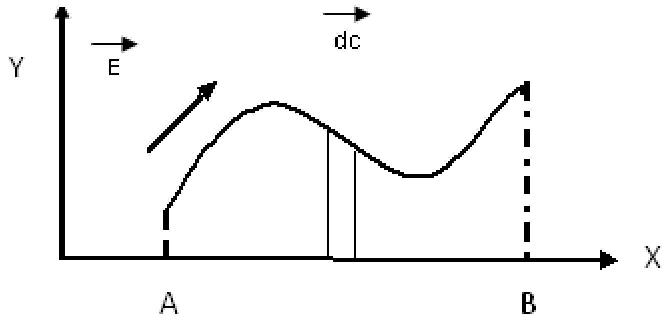


Figure 1. Circulation d'un vecteur long d'un chemin délimité par deux points A et B

On dit que le champ vecteur $\vec{E}$dérive du potentiel scalaire f si en tout point M du domaine la relation $\vec{E} = \overrightarrow{grad}\, f(M)$ est vérifiée :

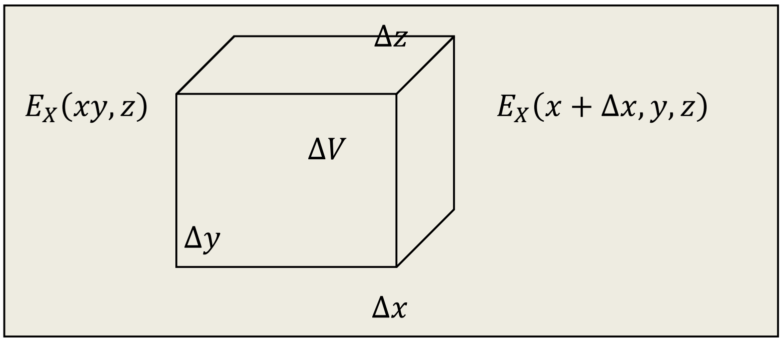
$$C_{A\to B} = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dc} = \overrightarrow{grad}\, f(M).\overrightarrow{dc} = df = f(A)–f(B)$$

Alors, la circulation du vecteur $\vec{E}$est indépendante du chemin choisi, puisqu' elle ne dépend que du point initial et du point final.

Si nous choisissons un contour fermé, nous utilisons le symbole $C = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dc}$. Dans ce cas particulier, on a $\oint \vec{E}.\overrightarrow{dc} = 0$.

2.5.2. Théorème de Green-Ostrogradsky

La divergence d'un vecteur est le flux extérieur d'un champ de vecteur par unité de volume. Ce théorème est beaucoup utilisé, il permet de passer d'une intégrale volumique à une intégrale surfacique. On choisit comme surface S un cube infinitésimale de côté $\Delta x, \Delta y\ et\ \Delta z$. Le flux $\emptyset$ du vecteur $\vec{E}$à travers une surface fermée est $\emptyset = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS}$.



En sommant les contributions des 3 faces.

$$\Delta\emptyset = \Delta\emptyset_x + \Delta\emptyset_y + \Delta\emptyset_z$$

$$\Delta\emptyset = \left(\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

$$\Delta\emptyset = div\,\vec{E}\,\Delta V$$

d'où finalement en intégrant: $\iiint div\,\vec{E}\; dV = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS}$, cette équation traduit le Théorème de Green-Ostrogradsky

Physiquement, dans le cas d'une charge isolée, on a une source de champ électrostatique, cela traduit que $div\,\vec{E} \neq 0$.

Le champ magnétique à flux conservatif, une ligne de champ se referme toujours sur elle-même: $div\,\vec{B} = 0$.

2.5.3 Théorème de Stokes

La circulation d'une grandeur vectorielle $\vec{F}$ sur un parcours fermé C est égale au flux de $\overrightarrow{rot}\vec{F}$ à travers une surface quelconque s'appuyant sur C.

Ce théorème est couramment utilisé, il permet de passer d'une intégrale simple à une intégrale surfacique.

Soit une force vectorielle $\vec{F}$ dans un espace donné. On veut calculer la circulation du vecteur $\vec{F}$ autour d'un contour fermé C. $C = \oint \vec{F}.\vec{d\ell}$.

Selon l'axe ox et oy , l'intégral devient:

$\oint \vec{F}.\vec{d\ell} = \iint \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{F}\right).\vec{dS}$ est le théorème de stokes.

Résumé

Grandeurs	Unités	Dimensions
Masse (m)	*Kg*	[m] = M
Longueur (d)	*m*	[d] = L
Temps (t)	*s*	[t] = T

S= L. ℓ
V=ℓ.L.H
ρ = m / V
E=$\frac{1}{2}$mv^2
v= d / t
F = m a
p= mv
P=F/S

Grandeurs Physiques Scalaires

Grandeurs	Unités	Dimensions
Volume (V)	m^3	L^3
Masse Volumique (ρ)	kg/m^3	$\frac{[M]}{[L]^3} = ML^{-3}$
Energie (E)	Joul	$[M]\,[L/T]^2 = ML^2T^{-2}$

Grandeurs Physiques Vectoriels

Grandeurs	Unités	Dimensions
Vitesse (V)	m/s	LT^{-1}
Force (F)	*Newton*	$M\,LT^{-2}$
Quantité de Mouvement (p)	kgm/s	$[M]\,[L/T] = M\,LT^{-1}$

Equation aux dimensions

$$[G] = M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}I^{\varphi}\theta^{\omega}N^{\mu}$$

Exemple1: Quelle est la dimension de « kx»
Solution : T =kx

$[T]$ = [k][x] ⇒ [k]=$\frac{[T]}{[x]}$= $\frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$

[k x] = ML T^{-2} [F]

Déduire la dimension de « **k x^2**

[k]$[x^2]$ = [k] $[x]^2 = ML^2T^{-2}$ = **[E]**

Energie de potentielle $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

Exemple2: Vérifier l'homogénéité de l'énergie:

$$E = \frac{m^a.p^b}{2}$$

$ML^2T^{-2} = M^a(MLT^{-1})^b$

$ML^2T^{-2} = M^{a+b}L^bT^{-b}$

$1 = a + b$
$b = 2$
$a = -1$

$$E = \frac{p^2}{2\,m}$$

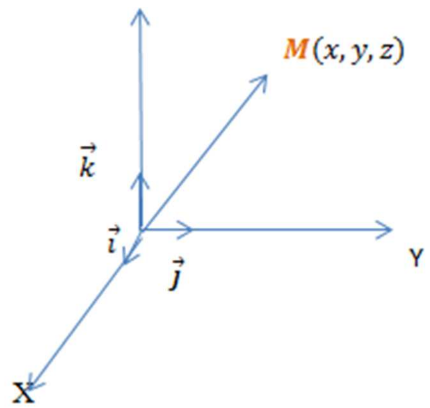
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Energie cinétique

Chapitre1 : Cinématique d'un point Matériel

1. Définitions

- **Cinématique**: Etude du mouvement d'un objet matériel dans l'espace et le temps.
- Objet matériel : est décrit comme un point matériel **M** de masse **m** de dimension négligeable.
- **Référentiel:** la notion du mouvement ou du repos est relatif / référentiel.
- **Exemple** : une personne est assise dans le train, le train roule /terre, terre tourne / Soleil , Soleil en mouvement / galaxie…..ect.
- Référentiel terrestre **(Sol):** Repère orthonormé de coordonnées cartésiennes dans l'espace $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ de Base orthonormée



Trois grandeurs principales pour étudier un mouvement d'un point M :

$$\textbf{Mouvement}\begin{cases} vecteur\ de\ position \\ vecteur\ de\ vitesse \\ vecteur\ d\ accélération \end{cases}$$

Dire que le point $\boldsymbol{M}$ est en mouvement, cela signifie que sa position par rapport à une origine $\boldsymbol{o}$ change au cours du temps. Dans le cas d'une voiture sur une route, un seul paramètre suffit pour déterminer sa position. Le mouvement est à une dimension, si nous choisissons l'axe (ox) : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$.

Pour un mouvement curviligne dans le plan, il faudra deux paramètres pour déterminer son vecteur de position par rapport à un repère choisi. $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Dans l'espace à trois dimensions, le vecteur de position est décrit par trois scalaires :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

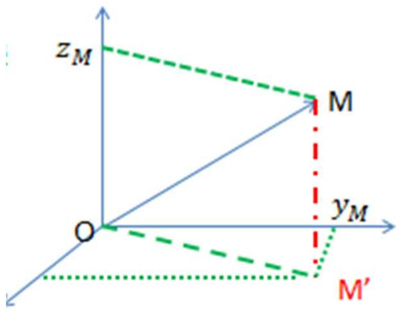
1.2 Vecteur de position en coordonnées cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + \mathrm{z(t)}\,\vec{k}$

$x(t)$, $\mathrm{y}(t)$et $\mathrm{z}(t)$ sont appelé les équations horaires

-

Equations Horaires : La variation des coordonnées en fonction du temps décrit l'équation horaire du mouvement



1.2.b mouvement rectiligne

supposons que sur l'axe (ox),l(objet M se déplace avec une vitesse v constant, et sur l'axe (0,y) la vitesse v varie au cours du temps.

Mouvement rectiligne uniforme : $\boldsymbol{x(t)} = \mathbf{v\ t} + \boldsymbol{x_0}$

Où,

x_0 est la position de M à t =0

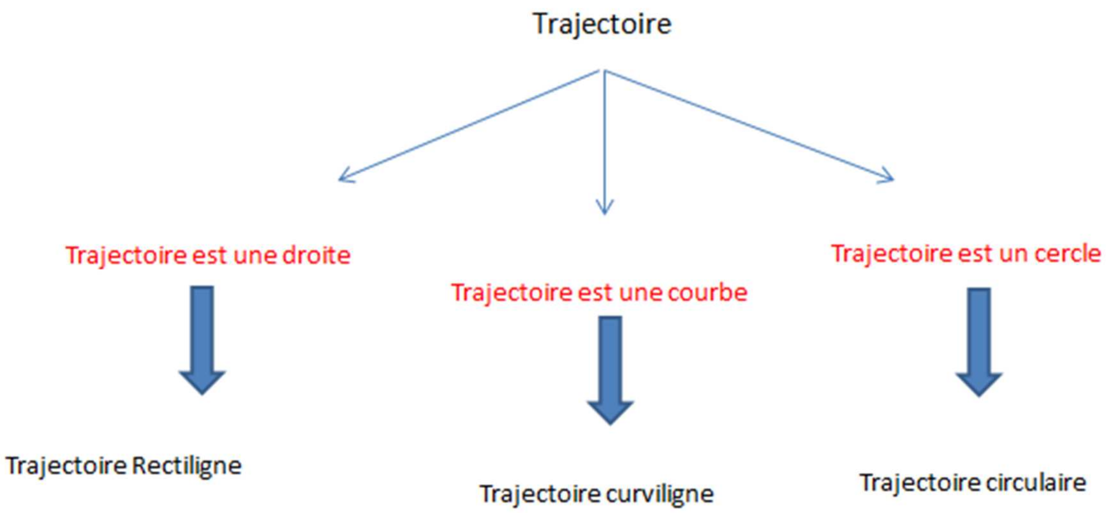
Mouvement rectiligne uniformément varié : $\mathbf{y}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a\,t^2} + \boldsymbol{v_0 t} + \boldsymbol{y_0}$

Avec

v_0, y_0 sont la vitesse et la position à t=0

1.2.c Trajectoire

La trajectoire est constituée par l'ensemble de positions successives occupées par ce point au cours du temps.



Exemple:

Les coordonnées du point M sont:

x(t)=t+1, y(t) =$t^2 - 1$, $z = 0$

Ecrire le vecteur de position de M et déduire sa trajectoire sur le plan (xoy).

Solution :

$$\overrightarrow{OM} = (t + 1)\,\vec{\imath} + (t^2 - 1)\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$$

Mouvement est plan (xoy)

$$\begin{aligned} x(t) &= t + 1 \\ y(t) &= t^2 - 1 \end{aligned}$$

En éliminant le temps

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = (x - 1)^2 - 1 \end{cases}$$

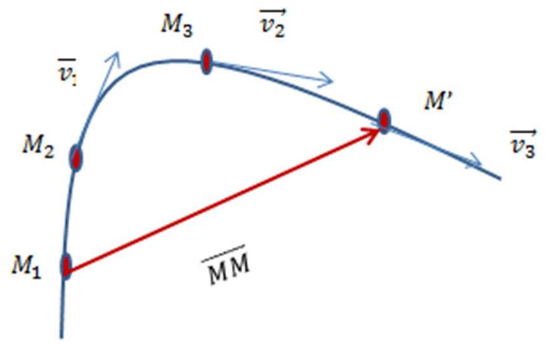
<u>Equation de la trajectoire</u>

$y(x) = x^2 - 2x$ Trajectoire parabolique

1.3. Vecteur Vitesse en coordonnées Cartésiennes

1.3.a. Mouvement rectiligne

Vitesse: déplacement de l objet **M** par unité de temps $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{\Delta t}}$ **(m/s).**



Vecteur Vitesse

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

$\overrightarrow{MM'}$: **Vecteur de déplacement**

- Direction : tangente à la trajectoire
- Sens : sens du mouvement
- Norme: $\mathrm{v} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|}{\Delta t}$

3.2 Vitesse moyenne

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{oM'} - \overrightarrow{oM}}{\Delta t} = \frac{(x'-x)\,\vec{\imath} + (y'-y)\,\vec{\jmath} + (z'-z)\,\vec{k}}{\Delta t}$$

Exemple :

Un objet matériel **M** se déplace dans le plan XOY. A l'instant t son vecteur de position est donné par :

$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{2t\,\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath}}$ **(m)**

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de M .

2. Trouver la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps t=1s et t=2 s ainsi sa norme

<u>Solution :</u>

1. Equation de la trajectoire **x=$2t$, y = t^2**

   De **x** : t =$\frac{x}{2}$ on remplace dans **y** = $\left(\frac{x}{2}\right)^2$

On trouve : **y =** $\frac{1}{4}x^2$

2.

t_1 =1s , $x_1 = 2, y_1 = 1$

t_2 =2s , $x_2 = 4$, $y_2 = 4$

$$\vec{v} = \frac{(x_2 - x_1)\,\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\,\vec{\jmath}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{(4-2)\,\vec{\imath} + (4-1)\,\vec{\jmath}}{(2-1)}$$

donne

$\vec{v} = 2\ \vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}$

Norme de $\vec{v}$

$|\vec{v}|$ = $\sqrt{(2)^2 + (3)^2}$

$|\vec{v}|$ =$\sqrt{13}\ m/s$

3.3 Vitesse instantanée

$v_{instantannée}$= $\lim\limits_{\Delta t \to 0} vitesse\ moyenne$

Exemple : Compteur vitesse de voiture ou moto, radar

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Avec $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath}+'y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

$\vec{v}$ = $\frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$+ $\frac{dz}{dt}\vec{k}$

$\vec{v}$ = $\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath}$+ $\dot{z}\vec{k}$

Norme de$\vec{v}$ $|\vec{v}|$ = $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$

Exemple : Un objet matériel **M** est repéré par ses coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé,

$$x(t) = 2\cos(2t), \qquad y(t) = 2\sin(2t)$$

- Déterminer l'équation de la trajectoire de **M** .
- Trouver les composantes du vecteur vitesse ainsi sa norme.

Solution 1. $x(t)^2 = (2\cos(2t))^2$; $y(t)^2 = (2\sin(2t))^2$;

$\boldsymbol{x(t)^2 + y(t)^2 = 4[\cos(2t)^2 + \sin(2t)^2]}$

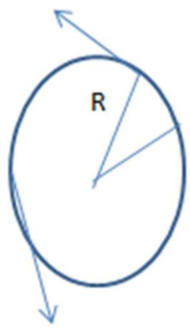
$\boldsymbol{x(t)^2 + y(t)^2 = 4}$ **Equation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon 2**

2. $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$$\dot{x} = -4\sin(2t)$$
$$\dot{y} = +4\cos(2t)$$

$\vec{v} = -4\,\boldsymbol{\sin(2t)\,\vec{i}} + \boldsymbol{4\cos}(2t\vec{j}$ **:** $|\vec{v}| = 4$ (SI)

1.3.b Mouvement circulaire uniforme



$\vec{v}$

$V = \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t}$ avec $\widehat{MM'} = \theta$

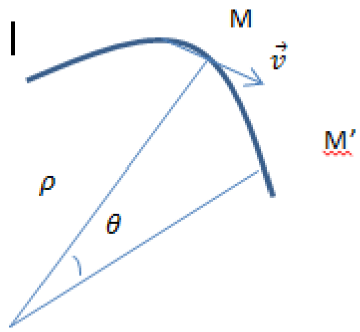
Direction: tangente à la trajectoire

Sens: sens de mouvement

$V = R\frac{\theta}{\Delta t} = R\omega$

ω est une vitesse angulaire (rad/s)

1.3.c mouvement curviligne



$\widehat{MM'} = \rho\,\theta$

$\widehat{MM'}$: Abscisse curviligne (m)

θ : Abscisse angulaire (rad)

ρ : Rayon de la courbe

V = $\frac{\widehat{MM'}}{\Delta t}$; Δt $\rightarrow$ 0 V=$\rho\,\frac{d\theta}{dt}$

V= $\rho\,\dot{\theta}$

V= $\rho\,\omega$

V: vitesse curviligne (m/s)

$\dot{\theta}$ accélération curviligne (rad/s)

<u>Caractéristiques du vecteur vitesse :</u>

Direction tangente à la courbe

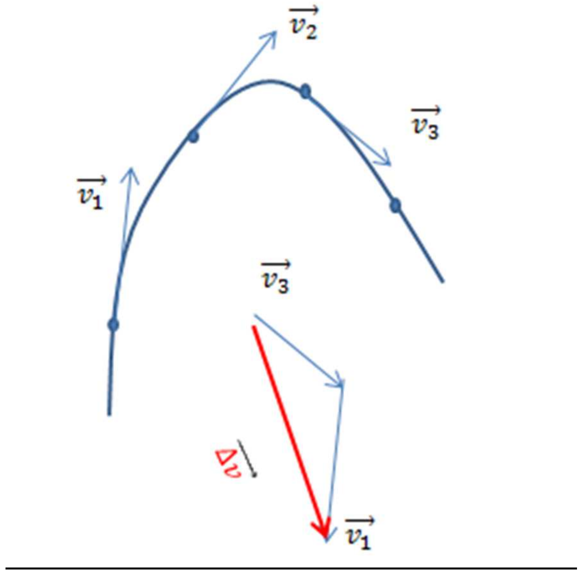
Sens : sens du Mouvement

Module V= $\rho\,\dot{\theta}$

1.4. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Accélération : variation de vitesse de l objet **M** par unité de temps **a** = $\frac{v}{\Delta t}$ **(m/s^2).**

4.1 Vecteur accélération moyenne



$\overrightarrow{\Delta v} > 0$ ce qui implique $\overrightarrow{v_3} > \overrightarrow{v_1}$

$\vec{a}$ *et* $\overrightarrow{\Delta v}$ même sens mouvement accéléré

$\overrightarrow{\Delta v} < 0$ donne $\overrightarrow{v_3} < \overrightarrow{v_1}$

$\vec{a}$ *et* $\overrightarrow{\Delta v}$ de sens opposés mouvement décéléré

Dans ces deux cas : Mouvement rectiligne non uniforme

$\overrightarrow{\Delta v} = 0, |\overrightarrow{v_3}| = |\overrightarrow{v_1}|$ Mouvement rectiligne uniforme

Accélération moyenne

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v'} - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(v_{x'} - v_x)\,\vec{i} + (v_{y'} - v_y)\,\vec{j} + (v_{z'} - v_z)\,\vec{k}}{\Delta t}$$

4.3 Vecteur accélération en instantanée

Accélération instantanée :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{d^2\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt^2}}$$

$$\vec{a} = \frac{\boldsymbol{d^2x}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\boldsymbol{d^2z}}{\boldsymbol{dt}}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{d^2x}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{d^2z}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$$

Exemple: Trouver les composantes de la +vectrice accélération de l'objet **M** ainsi sa norme.

$$\overrightarrow{OM} = 2\ \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{2t})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{2}sin\ (2t)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{v} = -4\ \boldsymbol{sin}\ (\boldsymbol{2t})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{4cos}(2t)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{d\vec{v}}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -4\sin(2t) \\ \dot{y} &= +4\cos(2t) \end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= -8\,cos\,(2t) \\ \ddot{y} &= -8\sin(2t) \end{aligned}$$

$|\vec{a}|$ = 8 **m/$\boldsymbol{s^2}$**

Relation entre $\vec{\boldsymbol{a}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$:

$$\vec{a} = -8\ \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{2t})\vec{\boldsymbol{\imath}} - 8\,sin\,(2t)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

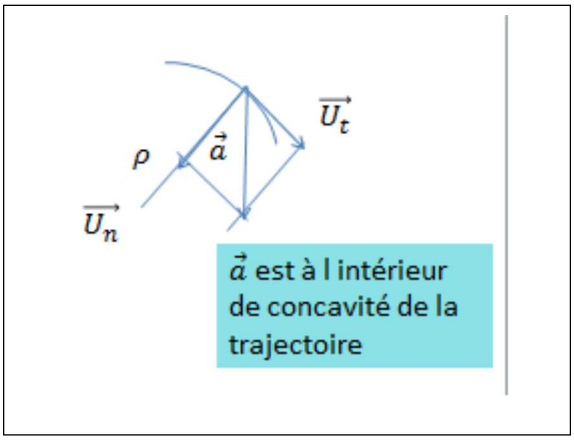
$$\vec{a} = -4\ [\boldsymbol{2}\ \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{2t})\vec{\boldsymbol{\imath}} + 2\,sin\,(2t)]\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{a} = -4\,\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$$

$\vec{a}\ et\ \overrightarrow{OM}$ sont colinéaires

5. Composantes intrinsèques du vecteur accélération

1.5.1 Base de Frenet



$$\vec{v} = |\vec{v}|\,\overrightarrow{U_t}$$

$$\overrightarrow{U_t}\ (\theta, s, t)$$

$$|\vec{v}| = v\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\,\overrightarrow{U_t} + |\vec{v}|\,\frac{d\,\overrightarrow{U_t}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\,\overrightarrow{U_t} + |\vec{v}|\,\frac{d\,\overrightarrow{U_t}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$ds = \rho\, d\theta\ ;\ \frac{d\,\overrightarrow{U_t}}{d\theta} = \overrightarrow{U_n}$$

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\,\overrightarrow{U_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\overrightarrow{U_n}$$

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{\rho}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{d|\vec{v}|}{dt}^{2} + \frac{v^{2}}{\rho}^{2}}$$

1.5.2 Rayon de courbure

$$\vec{a}\wedge\vec{v} = \begin{array}{ccc} \overrightarrow{U_n} & \overrightarrow{-U_t} & \vec{k} \\ a_t & a_n & 0 \\ 0 & v & 0 \end{array}$$

$$|\vec{a}\wedge\vec{v}| = \frac{v^3}{\rho}$$

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{a}\wedge\vec{v}|}$$

- $\rho = cste$ *Trajectoire circulaire*
- $\rho = \rho(t)$ *Trajectoire curviligne*

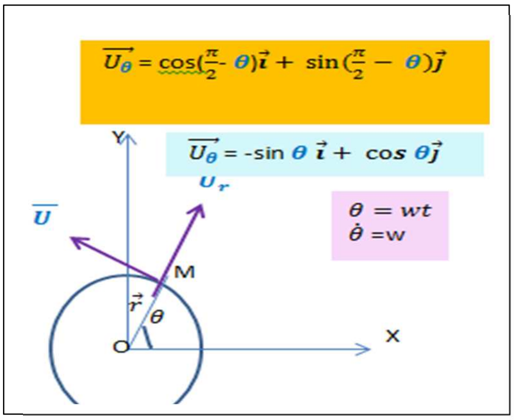
1.6 Base polaire et rayon de courbure

1.6.1 Vecteur de position en coordonnées polaires

D abord, le vecteur de position en

$\overrightarrow{OM}$ en Coordonnées Cartésiennes (XOY)

S ecrit comme :



$\overrightarrow{OM}$ = x(t) $\vec{\boldsymbol{i}} + y(t)\vec{j}$

Par projection

x(t) = r(t) cos(wt)

y(t) = r(t) sin(wt)

on remplace dans $\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM}$ = = r(t) cos(wt) $\vec{\boldsymbol{i}}$ + r(t) sin(wt)$\vec{j}$

$\overrightarrow{U_r}$ = cos(wt) $\vec{\boldsymbol{i}}$ + sin(wt)$\vec{j}$

Où $\left\|\overrightarrow{U_r}\right\|$ =1

$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$ = - sin $wt\ \vec{\boldsymbol{i}}$ + cos $wt\vec{j}$

$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} = \overrightarrow{U_\theta}$

Vecteur de position en coordonnées polaires s écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \text{r(t)}\ \overrightarrow{U_r}}$$

$\overrightarrow{U_r}$ vecteur unitaire radial dépend de $\boldsymbol{\theta}$ et **t**

$\overrightarrow{U_\theta}$ vecteur unitaire transversal dépend de $\boldsymbol{\theta}$ et **t**

1.6.2 Vecteur de vitesse en coordonnées polaires

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$\vec{v} = \frac{d(\text{r(t)}\,\overrightarrow{U_r})}{dt} = \dot{r}\,(\text{t})\overrightarrow{U_r} + \text{r(t)}\,\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$

où

$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{v} = \dot{r}\,(\text{t})\overrightarrow{U_r} + \text{r(t)}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (\text{r}\,\dot{\theta})^2}$

$\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r}$

Mouvement circulaire uniforme

r(t) = R; $\dot{r}\,(\text{t}) = 0$

$\vec{v} = \text{R}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$ la loi de Kepler

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} \\ \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r} \end{array}}$$

1.6.3 Accélération en coordonnées Polaires

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + \text{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{a} = \frac{d[\dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + \text{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}]}{dt} = \frac{d\,[\dot{r}\,\overrightarrow{U_r}]}{dt} + \frac{d[\text{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}]}{dt}$

$\vec{a} = \frac{d\dot{r}}{dt}\,\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\,\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \text{r}\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \text{r}\,\dot{\theta}\,\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$

$\vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \text{r}\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \text{r}\,\dot{\theta}\,(-\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r}\,)$

$\vec{a} = [\ddot{r} \;- r\,\dot{\theta}^2]\;\overrightarrow{U_r} + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} \;+\; \text{r}\;\ddot{\theta}\,)\,\overrightarrow{U_\theta}$

Composante radiale :

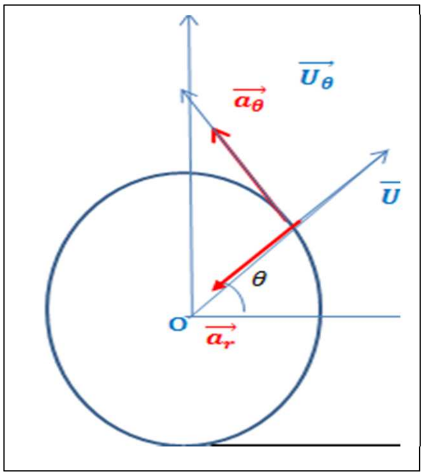
$\|a_r\| = [\,\ddot{r} \;- r\,\dot{\theta}^2\,]$

Composante angulaire :

$\|a_\theta\| \;=\; [2\,\dot{r}\,\dot{\theta} \;+\; \mathrm{r}\;\ddot{\theta}]$

<u>Le module de $\vec{a}$</u>

$\|a\| = \sqrt{\|a_r\|^2 + \|a_\theta\|^2}$



Cas particulier

Mouvement circulaire

$\dot{r} = 0,\ \dot{\theta} = \omega$

$\vec{a} = \; -R\,\dot{\theta}^2\ \overrightarrow{U_r}$

$\|a_r\| \; = [R\,\dot{\theta}^2\,]$

Avec la relation linant les coordonnées angulaires des

Coordonnées curvilignes

$\boldsymbol{v^2 = R^2\ \dot{\theta}^2}$

On trouve la fameuse relation de Kepler

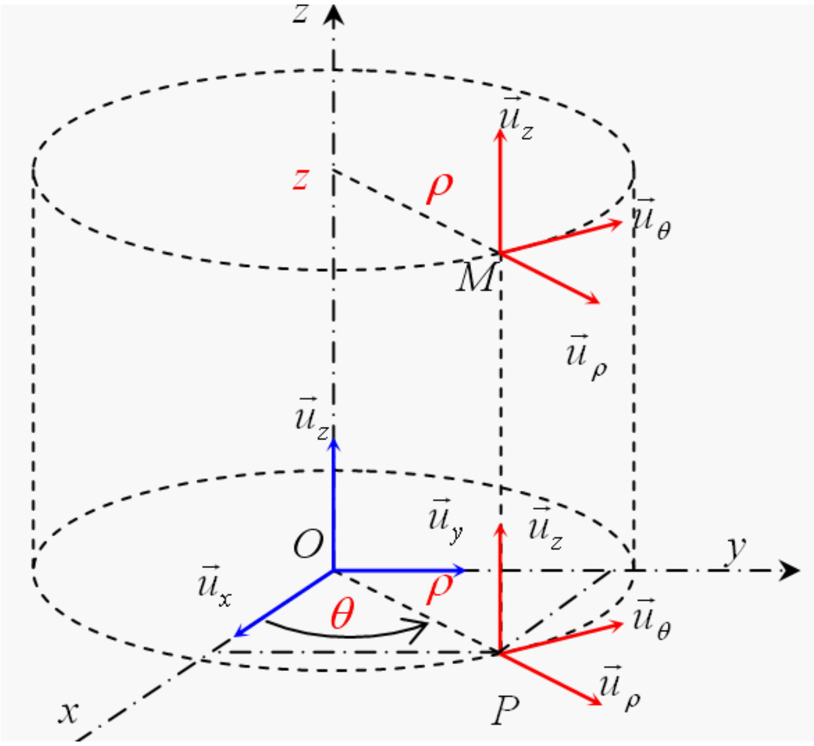
$\vec{\boldsymbol{a}} = \; -\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{R}}\overrightarrow{\boldsymbol{U_r}}$

L'accélération tangentielle est nulle et l'accélération normale est dirigée vers le centre **O**

1.8 les coordonnées dans l éspace

1.7.a Vecteur de position en coordonnées cylindriques

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques ρ, θ et z dans la base associée au repère cylindrique $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.



$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{u_\rho} + z\,\overrightarrow{u_z}$

La projection de M sur l'axe oz donne la hauteur (z).

La projection de M sur le plan (xoy) donne le point P (les coordonnées polaires ($\rho\,\overrightarrow{u_\rho}$)).

Par conséquent, le vecteur de position en les coordonnées cylindriques s ecrit :

$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{u_\rho} + z\,\overrightarrow{u_z}$

1.7.b Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$\vec{v} = \frac{d(\rho\,\overrightarrow{u_\rho}+z\,\overrightarrow{u_z})}{dt} = \dot{\rho}\;\overrightarrow{u_\rho} + \rho\,\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\;\overrightarrow{u_z}$

La compsante z est ne dépend pas de l'angle θ.

En effet,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\;\overrightarrow{u_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

1.7.c Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

Par definition

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{a} = \frac{d(\dot{\boldsymbol{\rho}}\ \overrightarrow{u_\rho}+\rho\ \dot{\boldsymbol{\theta}}\ \overrightarrow{\boldsymbol{U_\theta}}+\dot{\boldsymbol{z}}\ \overrightarrow{u_z})}{dt} = \frac{d\ (\dot{\boldsymbol{\rho}}\ \overrightarrow{u_\rho})}{dt} + \frac{d[\rho\ \dot{\boldsymbol{\theta}}\ \overrightarrow{\boldsymbol{U_\theta}}]}{dt} + \frac{\boldsymbol{d^2 z}}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$

De meme que l accélération en les coordonnées polaires, on trouve

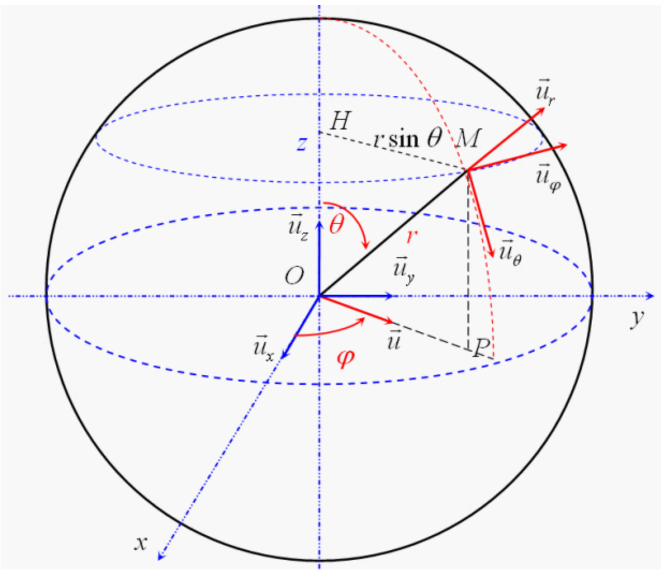
$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho}\ - \rho\ \dot{\theta}^2]\ \overrightarrow{U_\rho}\ + (2\ \dot{\rho}\ \dot{\theta}\ +\ \rho\ \ddot{\theta}\ )\ \overrightarrow{U_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

1.7.2 Vecteur de position en coordonnées sphériques

Dans ce système, la positon du point M est donnée par (r, θ et φ) dans la base associée au repère sphériques ($\overrightarrow{u_r}\ .\overrightarrow{u_\theta}\ \overrightarrow{u_\varphi}$).

Le vecteur de position s'ecrit :

$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{u_r}$



Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ est radial (suivant le rayon r).

L'angle θ décrit un demi cercle variant entre 0 et π ($\pi \geq \theta \geq 0$).

L angle φ decrit un cercle variant entre 0 et 2 π ($2\pi \geq \varphi \geq 0$).

Cette base ($\overrightarrow{u_r}$.$\overrightarrow{u_\theta}$ $\overrightarrow{u_\varphi}$) qui est mobile forme un triède directe orthonormée.

1.7.3 Relation entre les coordonnées sphériques et cartésiennes

Nous observons sur la figure ci-dessus la projection du point M sur l axe oz donne le point H. le coté OH est la composante z

Z= $r\ cos\theta$

P est la projection de M sur le plan (xoy),

0P =HM = $r\ sin\theta$

En faisant la projection de OP une fois sur l axe ox :

X= OP cos φ

X= $r\ sin\theta \cos\varphi$

Et une autre fois sur l axe oy :

Y= OP sin φ

Y= $r\ sin\theta \sin\varphi$

En fin, la relation Relation entre les coordonnées sphériques et cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x = sin\theta \cos\varphi \\ y = sin\theta \sin\varphi \\ z = r\ cos\theta \end{cases}$$

Mouvement Relative

Définition :

1.8 Mouvement Relative :

On signale que le repos comme le mouvement sont des notions relations relatives, ils dépendent de la situation du mobile par rapport au repère (Repère (fixe par rapport à quoi et mobile par rapport à quoi.

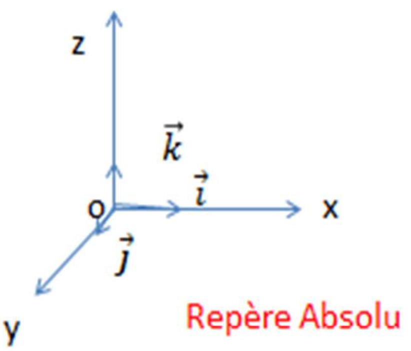
Soit un point M mobile et 2 systèmes d’axes de coordonnées

-oxyz (repére R de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

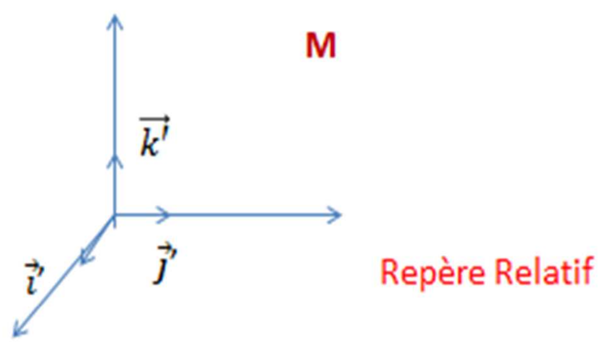
-o’x’y’z’(repère R’ de base $\vec{i}$’, $\vec{j}$’ et $\vec{k}'$

Nous appelons le repère absolu le repère R (fixe) et le repère relatif repère mobile.

Exemple : 2 observateurs, l’un est dans le train, l’autre est sur le quai.



$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\vec{j} + z\,\vec{k}$$
$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{a_a} = \frac{d\,\vec{v_a}}{dt}\Big|_R = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$



$$\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$
$$\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big|_{R'} = \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'}$$
$$\vec{a_r} = \frac{d\,\vec{v_r}}{dt}\Big|_{R'} = \ddot{x}'\vec{i'} + \ddot{y}'\vec{j'} + \ddot{z}'\vec{k'}$$

1.8.a relation entre les positions

Relation de chasles :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

On dérive dans R

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big]R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big]R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big]R$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big]\mathbf{R} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big]\mathbf{R} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

Vitesse d'entrainement du repère R' par rapport à R

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big]R + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\,\overrightarrow{\jmath'}$$

Avec

ω est la vitesse angulaire (rd/s)

Vitesse relative

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big]R + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$ est un terme de rotation

1.8.b relation entre les vitesse

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$

Mouvement de translation

$$\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = 0$$

Si O est confondu avec O' (les 2 repères sont fixes $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big]R = 0$

1.8.c Relation entre les accélérations

$$\overrightarrow{a_a} = = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\,t^2}\right]R$$

Avec $\boldsymbol{\overrightarrow{a_a}}$**:** accélération absolue

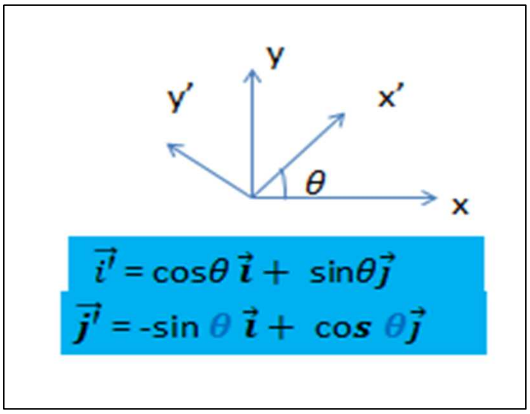
$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]\mathbf{R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]\mathbf{R} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]\mathbf{R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]\mathbf{R} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\,t^2}\right]R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]\mathbf{R} + \ddot{x}'\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}'\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}'\overrightarrow{k'} + \dot{x}'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} + \dot{x}'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$+ x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + 2\dot{x}'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]\mathbf{R} + x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$



En remplaçons les dérivés des vecteurs unitaires par leurs expresssionsn on trouve :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\,\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$$

$\overrightarrow{a_c}$ est l'accélération Coriolis (complémentaire).

$$\overrightarrow{a_e} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right]\mathbf{R} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$\overrightarrow{a_e}$ est l'accélération complémentaire

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

$$|\overrightarrow{a_a}| = \sqrt{(a_r)^2 + (a_e)^2 + (a_c)^2}$$

Cas particulier

$\vec{\omega}$ est constante et oo' sont confondus, cela revient à éliminer deux termes $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ =0 et

$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$ =0

La relation devient :

$\overrightarrow{a_e} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_e}$

Résumé

Vecteur de position en coordonnées cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + \mathrm{z(t)}\,\vec{k}$

Vecteur Vitesse moyenne

$$\vec{v} = \frac{(x' - x)\,\vec{\imath} + (y' - y)\,\vec{\jmath} + (z' - z)\,\vec{k}}{\Delta t}$$

Vecteur Vitesse instantanée

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Vecteur accélération moyenne

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v'} - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(v_{x'} - v_x)\,\vec{\imath} + (v_{y'} - v_y)\,\vec{\jmath} + (v_{z'} - v_z)\,\vec{k}}{\Delta t}$$

Vecteur accélération instantanée

$$\vec{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d^2x}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{d^2z}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{k}}$$

Mouvement rectiligne uniforme (vitesse = cste)

$$x(t) = \mathbf{v}\ t + x_0$$

Mouvement rectiligne uniformément varié

$$\mathrm{y}(t) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\,t^2 + v_0 t + y_0$$

Equation de trajectoire

Y=f(x)

Trajectoire droite Y=Ax+B

Trajectoire parabolique Y= Ax^2

Trajectoire circulaire $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ où R =cste

Trajectoire curviligne R $= \rho(t)$

<u>Repère de Frenet $(\overrightarrow{U_t}, \overrightarrow{U_n})$</u>

$$\vec{\mathrm{v}} = \|\vec{v}\|\overrightarrow{\mathrm{U_t}}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Composantes intrinsèques du vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\,\overrightarrow{U_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\overrightarrow{U_n}$$

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\,;\ \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\|\vec{a}\|^2 = \|a_t\|^2 + \|a_n\|^2$$

Le rayon de courbure

$$\rho = \frac{v^3}{\left|\vec{a} \wedge \vec{v}\right|}$$

Base polaire $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta})$

Vecteur de position en coordonnées polaires

$\overrightarrow{OM}$ = r(t) $\overrightarrow{U_r}$

<u>**Vecteur de vitesse en coordonnées polaires**</u>

$\vec{v} = \dot{r}(t)\overrightarrow{U_r} + r(t)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$

Accélération en coordonnées Polaires

$$\vec{a} = [\ddot{\boldsymbol{r}} \ \ - \boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}^2]\ \overrightarrow{\boldsymbol{U_r}} + (2\,\dot{r}\,\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}\ \ddot{\boldsymbol{\theta}})\ \overrightarrow{\boldsymbol{U_\theta}}$$

Avec

$\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{U_r}}}{\boldsymbol{dt}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}\ \overrightarrow{\boldsymbol{U_\theta}}$

$\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{U_\theta}}}{\boldsymbol{dt}} = = - \dot{\boldsymbol{\theta}}\ \overrightarrow{\boldsymbol{U_r}}$

Mouvement circulaire uniforme

$$\dot{r} = 0,\ \dot{\theta} = \omega$$

$$\vec{a} = -\boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}^2\ \overrightarrow{\boldsymbol{U_r}}$$

L’accélération normale est dirigée vers le centre **O**

Mouvement relative :

Vitesse absolue $\overrightarrow{v_a} = \dot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{\boldsymbol{k}}$

Vitesse relative : $\overrightarrow{v_r} = \dot{x}'\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}'} + \dot{y}'\overrightarrow{\jmath'} + \dot{z}'\vec{\boldsymbol{k}}$’

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$$

Mouvement de translation

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt}\Big|$R

Mouvement de rotation

$\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\ \overrightarrow{O'M}$

Mouvement de translation de rotation

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt}\Big|$R + $\vec{\omega}\Lambda\ \overrightarrow{O'M}$

Si O est confondu avec O’ (les 2 repères sont fixes)

$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big]_R = 0$

Relation entre les accélérations

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$

$\overrightarrow{a_a} = \ddot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{\boldsymbol{k}}$

$\overrightarrow{a_r} = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$

$\overrightarrow{a_c} = 2\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$

$\overrightarrow{a_e} = \frac{\boldsymbol{d^2\overrightarrow{OO'}}}{\boldsymbol{dt^2}}\Big]_{\mathbf{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$\vec{\omega}$ est constante et oo’ sont confondus $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$, $\frac{\boldsymbol{d^2\overrightarrow{OO'}}}{\boldsymbol{dt^2}} = 0$

$\overrightarrow{a_e} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_e}$

Exercices corrigés

Exercice 1

Le mouvement d'une particule en fonction de temps est décrit dans un plan (xoy) par son vecteur de position en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = 2t\vec{\imath} + 3t^2\,\vec{\jmath}$$

1. Etudier la nature du mouvement de la particule dans les axes OX et OY. Trouver l'équation de la trajectoire.
2. Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération ainsi que leurs module.
3. Déterminer dans la base de Frenet la vitesse et les coordonnées intrinsèques de l'accélération.
4. Déduire le rayon de courbure. Conclure.

Solution :

1. En coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath}$$

$$X = 2t; \;\; Y = 3t^2$$

Selon l'axe OX le mouvement est linéaire avec le temps, cela traduit que le mouvement est uniforme (la vitesse est constante) suivant l'axe OX, l'équation horaire est :

$X = vt + X_0$

Par identification avec $X = 2t$

on trouve $X_0 = 0$, $\|v\| = 2\,m/s$

$$\vec{v} = 2\vec{\imath}$$

Par contre, le mouvement suivant l'axe OY est un mouvement uniformément varié l'équation horaire :

$$Y = \frac{1}{2}at^2\,\vec{j} + v_{Y/0}\,t + \quad Y_0$$

Avec ($v_{Y/0} = 0$, $Y_0 = 0$)

Par identification avec $= 3t^2$, on trouve son module $a = 6m/s^2$.

Equation de la trajectoire : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t^2 \end{cases}$

En éliminant le temps $t = \frac{X}{2}$ et on remplace dans : $Y = 3\left(\frac{X}{2}\right)^2$

On trouve l'équation de la trajectoire :

$$Y = \frac{3}{4}X^2$$

2. Vitesse en coordonnées cartésiennes

$\vec{v} = \dot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\vec{\jmath}$

$\vec{v} = 2\vec{\boldsymbol{\imath}} + 6t\vec{\jmath}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 36t^2}$$

Accélération en coordonnées cartésiennes

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \ddot{y}\vec{\jmath}$

$\vec{a} = 6\vec{\jmath}$

$$\|\vec{a}\| = 6$$

3. La vitesse et l'accélération dans la base de Frenet :

$\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\overrightarrow{U_t}$

$$\vec{v} = \sqrt{4 + 36t^2}\overrightarrow{U_t}$$

L’accélération dans la base de Frenet

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}_t\|^2 + \|\vec{a}_n\|^2$$

L’accélération tangentielle

$$\|\vec{a}_t\| = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$$

$$\|\vec{a}_t\| = \frac{d(\sqrt{4 + 36t^2})}{dt}$$

$$\|\vec{a}_t\| = \frac{36t}{\sqrt{4 + 36t^2}}$$

En déduire l’accélération normale :

$$\|\vec{a}_n\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}_t\|^2$$

$$\|\vec{a}_n\|^2 = 6 - \left(\frac{36t}{\sqrt{4 + 36t^2}}\right)^2$$

$$\|\vec{a}_n\|^2 = \frac{144}{4 + 36t^2}$$

$$\|\vec{a}_n\| = \frac{12}{\sqrt{4 + 36t^2}}$$

4. Le rayon de courbure

5. $\|\vec{a}_n\| = \frac{v^2}{\rho}$

$$\rho = \frac{v^2}{\|\vec{a}_n\|} = \frac{4 + 36t^2}{\frac{12}{\sqrt{4 + 36t^2}}}$$

$$\rho = \frac{(4 + 36t^2)^{3/2}}{12}$$

Le rayon de courbure dépend du temps, par conséquent, la trajectoire est une courbe de rayon $\rho(t)$ variable.

Exercice2

Le mouvement d'un point M est décrit par :

$$r = 2a\, cos\theta$$

Où $\theta = \omega t$ avec $a\ et\ \omega$ sont des constantes.

Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires. Ainsi que leurs normes.

Solution

1. Le vecteur de position en coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r(t)}\ \overrightarrow{U_r}$

   On donne :

$$\overrightarrow{OM} = 2a\, cos\omega t \overrightarrow{U_r}$$

L'équation de la vitesse :

$\vec{v} = \dot{r}\ \overrightarrow{U_r} + \mathrm{r}\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{U_\theta}$

On dérive :

$r = 2a\, cos\omega t\ ;\ \dot{r} = -2a\omega sin\omega t\ ;\ \ddot{r} = -2a\omega^2\, cos\omega t$

$\theta = \omega t\ ;\ \dot{\theta} = \omega\ ;\ \ddot{\theta} = 0$

$\vec{v} = -2a\omega sin\omega t\ \overrightarrow{U_r} + 2a\ \omega cos\omega\ \overrightarrow{U_\theta}$

$$\|\vec{v}\| = 2a\omega\sqrt{(-sin\omega t)^2 + (cos\omega t)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = 2a\omega$$

L'accélération en en coordonnées polaires

$\vec{a} = [\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2]\ \overrightarrow{U_r} + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + \mathrm{r}\ \ddot{\theta}\,)\ \overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{a} = [-2a\omega^2\, cos\omega t - 2a\omega^2\, cos\omega t]\ \overrightarrow{U_r} + [\ 4a\omega^2 sin\omega t + 0\ ]\overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{a} = [-4a\omega^2 \cos\omega t]\overrightarrow{U_r} + +[4a\omega^2 \sin\omega t]\overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{a} = 4a\omega^2 [\cos\omega t + \sin\omega t]$

$\| \vec{a} \| = 4a\omega^2$

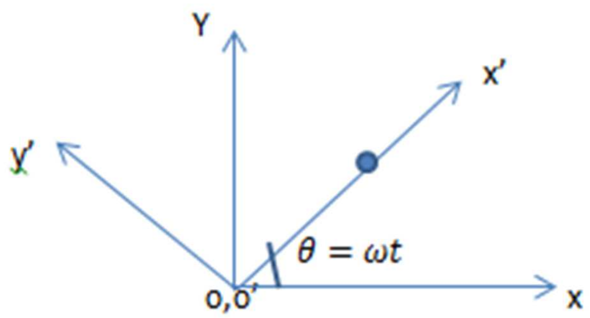
Exercice3

Un repère $R'(o', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ tourne autour de l'axe $0z$ d'un repère fixe $R(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ avec une vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$. Sachant que

$0z$ et $0'z'$ sont confondus (voir la figure), un point m se déplace sur l'axe $(o'x')$ avec une vitesse constante$v = a$. où a est une constante positive.

On suppose qu'à t=0, le point m est à l'origine

1. Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entrainement et en déduire la vitesse absolue.
2. Déterminer l'accélération relative, l'accélération d'entrainement et en déduire l'accélération absolue.



Solution

1. Vitesse relative

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big]$R'

$\overrightarrow{v_r}$ = a $\vec{\imath'}$

Etant donné le mouvement est uniforme $(v = a = cst)$dans le repère R'.

$x' = vt + x'_0$

$x' = = at$

Le vecteur de position

$\overrightarrow{O'M}$= x' $\vec{\imath}'$

$\overrightarrow{O'M}$= a t $\vec{\imath}'$

Vitesse d'entrainement

$\vec{v_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]$R + $\vec{\omega}\Lambda\, \overrightarrow{O'M}$

O eto' sont confondus, ce qui implique : $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0$

$\vec{v_e} = \vec{\omega}\, \Lambda\, \overrightarrow{O'M}$

Le repére R' tourne autour de l'axe oz avec une vitesse angulaire ω

En effet, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

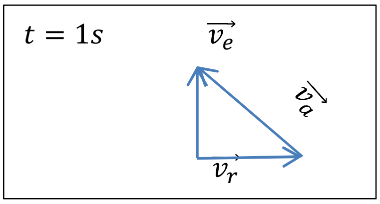
$\vec{v_e} = \omega\vec{k}\, \Lambda$ at $\vec{\imath}' = \omega$ a t $\vec{k}\, \Lambda\, \vec{\imath}'$ avec $\vec{k} = \vec{k}'$

$\vec{v_e} = \omega$ a t $\vec{\jmath}'$

La vitesse absolue

$$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$$

$\vec{v_a}$ = a $\vec{\imath}' + \omega$ a t $\vec{\jmath}'$



$\|\vec{v_a}\| = a\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$

2. Accélération relative

$$\vec{a_r} = \frac{d\,\vec{v_r}}{dt}\Big]_{R'} = 0$$

L'accélération d'entrainement

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\Big]_{R} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

o et o' sont confondus et ω est constante

l'équation devient :

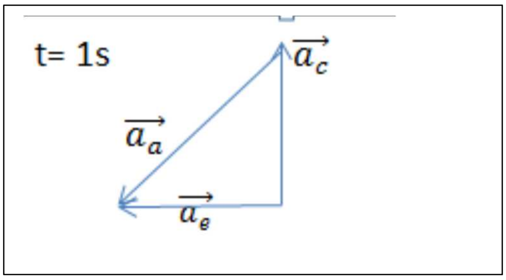
$$\vec{a_e} = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a_e} = \vec{\omega} \wedge \vec{v_e}$$

$$\vec{a_e} = \omega\vec{k} \wedge \omega \text{ a t } \vec{j'} = \omega^2 \text{ a t } \vec{k'} \wedge \vec{j'}$$

$$\vec{a_e} = -at\omega^2\,\vec{\imath'}$$

L'accélération Coriolis



$$\vec{a_c} = 2\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

$$\vec{a_c} = 2\,\omega\vec{k} \wedge \text{a}\,\vec{\imath'}$$

$$\vec{a_c} = 2\text{a}\,\omega\vec{k} \wedge \vec{\imath'}$$

$$\vec{a_c} = 2\text{a}\,\omega\vec{j'}$$

$$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

$$\vec{a_a} = \vec{0} - \text{at}\omega^2\,\vec{\imath'} + 2\text{a}\,\omega\vec{j'}$$

$$\vec{a_a} = -\text{at}\omega^2\,\vec{\imath'} + 2\text{a}\,\omega\vec{j'}$$

$$\|\vec{a_a}\| = a\omega\sqrt{4 + \omega^2 t^2}$$

<u>Exercice (examen de physique1 ST(2020)</u>

Un objet m est repéré par ses coordonnées cartésiennes dans le repère fixe :

$$R(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 3t^2 + 4 \end{cases}$$

Ses coordonnées cartésiennes par rapport au repère mobile sont :

$$R'(o',\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')\begin{cases} x' = t^2 + t + 4 \\ y' = t \\ z' = 2t^2 \end{cases}$$

1. Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entrainement et en déduire la vitesse absolue.
2. Déterminer l'accélération relative, l'accélération d'entrainement et en déduire l'accélération absolue.

Solution :

Vitesse absolue :

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big]_R = \dot{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$R(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})\begin{cases} \dot{x} = 2t + 1 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 6t \end{cases}$$

$$\vec{v_a} = (2t + 1)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \vec{\jmath} + 6t\vec{\boldsymbol{k}}$$

Vitesse relative

$$R'(o',\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')\begin{cases} \dot{x}' = 2t + 1 \\ \dot{y}' = 1 \\ \dot{z}' = 4t \end{cases}$$

$$\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big]_{R'} = \dot{x}'\vec{\boldsymbol{\imath}}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{\boldsymbol{k}}'$$

$$\vec{v_r} = (2t + 1)\vec{\boldsymbol{\imath}}' + \vec{\jmath}' + 4t\,\vec{\boldsymbol{k}}'$$

$$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$$

$$\vec{v_e} = \vec{v_a} - \vec{v_r}$$

Mouvement de translation $\vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{k}}'$

$$\vec{v_e} = 2t\,\vec{k}'$$

Accélération absolue

$$\overrightarrow{a_a} = = \frac{d\,\overrightarrow{v_a}}{dt}\Big]_R = \ddot{x}\vec{\boldsymbol{i}} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$R(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \begin{cases} \ddot{x} = 2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 6 \end{cases}$$

$\overrightarrow{a_a} = 2\vec{\boldsymbol{i}} + 6\vec{\mathrm{k}}$

Accélération relative

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\,\overrightarrow{v_r}}{dt}\Big]_{R'} = \ddot{x}'\vec{\boldsymbol{i}}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{\boldsymbol{k}}'$$

$$R'(o', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}) \begin{cases} \ddot{x}' = 2 \\ \ddot{y}' = 0 \\ \ddot{z}' = 4 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\,\overrightarrow{v_r}}{dt}\Big]_{R'} = 2\vec{\boldsymbol{i}}' + 4\vec{\boldsymbol{k}}'$$

Accélération Coriolis (complémentaire) $\overrightarrow{a_c} = 0$ parce qu'il n'y a pas de mouvement de rotation, c'est un mouvement de translation.

L'accélération d'entrainement

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$

$2\vec{\boldsymbol{i}} + 6\vec{\mathrm{k}} = 2\vec{\boldsymbol{i}}' + 4\vec{\boldsymbol{k}}' + \overrightarrow{a_e} + \mathbf{0}$

Pour un mouvement de translation $\vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{i}}'$, $\vec{j} = \vec{j}'$ **et** $\vec{k} = \vec{k}'$

$\overrightarrow{a_e} = 2\vec{k}$, l'accélération est constante , alors, le mouvement de R' est un mouvement rectiligne uniformément varié (accéléré).

Exercice supplémentaires

Exercice 1

La position du point matériel M est repérée dans un repère orthonormé R (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), par :

$x = 2t$ et $y = 4t^2 - 4t$.

1/ Déterminer l'équation de la trajectoire, Quelle est son allure ?

2/Calculer la vitesse du mobile.

3/Montrer que son accélération est constante.

4/Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet.

5/En déduire le rayon de courbure

Exercice2:

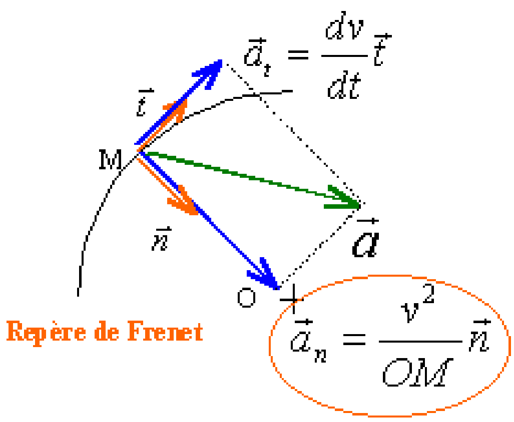
Les coordonnées cartésiennes dans un plan (0,x,y) d'un point mobile M sont données par : **x = R. cos(wt) ; y = R. sin(wt)** . avec R et w sont des constantes

1. Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules. Montrer que le vecteur accélération est colinéaire au vecteur de position.
2. Quelle est l'équation de la trajectoire de M dans le repère cartésien ? Quelle est la nature de cette trajectoire?

Exercice 3 :

On donne l'équation paramétrique du vecteur de position d'un point mobile par rapport à un repère cartésien : $\overrightarrow{OM} = 2t\vec{i} + (4t^2 - 4t)\vec{j}$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire.
2. Calculer le vecteur vitesse du mobile ainsi que sa norme.
3. Donner la valeur de l'accélération et montrer qu'elle est indépendante du temps.
4. Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet voir figure.



5. En déduire le rayon de courbure.

Exercice 4 :

Les coordonnées polaires d'un point M (d'origine O) sont paramétrées par : la distance à l'origine $r = at$ un angle $\theta = \omega t$ où a et ω sont des constantes.

1. Déterminer la vitesse et l'accélération de M dans le système de coordonnées polaires. En déduire leurs normes.
2. Déterminer le rayon de courbure ρ.
3. Déterminer la vitesse et l'accélération du point M dans le système de Frenet et retrouver l'expression de la norme de l'accélération.

Exercice 5:

Dans un repère orthonormé R(O,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) les coordonnées cartésiennes d'une particule M à chaque instant t sont données par :

$$\boldsymbol{x = \cos at^2} \text{ et } \boldsymbol{y = \sin a\, t^2} \quad \textbf{; a est une constante positive}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule.

2. Ecrire le vecteur de position dans ce repère.

3. Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Ainsi que leurs normes.

4. Déterminer la composante tangentielle γ_t et la composantes normale γ_n de l'accélération. En déduire le rayon de courbure ρ en fonction du temps.

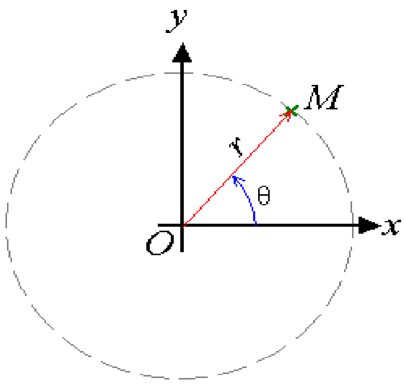
Exercice 6 :

Les coordonnées polaires d'un point M (d'origine O) sont paramétrées par : la distance à l'origine $r = 2a\ cos\theta$ et un angle $\theta = \omega t$ où a et ω est une constante (voir figure).

Représenter sur la figure la base($\overrightarrow{U_r}$, $\overrightarrow{U_\theta}$)

1. Ecrire le vecteur de position $\overrightarrow{OM}$ dans cette base.
2. Déterminer la vitesse et l'accélération de M, en déduire leurs normes.
3. Déterminer le rayon de courbure ρ . Quelle est la nature de la trajectoire ?
4. Déterminer la vitesse et l'accélération du point M dans le système de Frenet.
5. Montrer que le centre de courbure (C) est donné par ;

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho}{v^2}\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{v}$$



6. Déterminer alors le centre de courbure $\overrightarrow{OC}$.
7. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'accélération dans la base $(\vec{i}\ et\ \vec{j})$

   Représenter le vecteur vitesse et le vecteur d'accélération dans le système de Frenet.

Exercice 7 :

Un point matériel décrit une trajectoire définie en coordonnées polaires par l'équation suivante : $\rho = \rho_0(1+\cos\theta)$, où $\rho_0 = 30cm$.

1)- Etudier le mouvement dans le cas où $\theta = \omega = cst \succ 0$, déterminer alors la vitesse et l'accélération en tout point de la trajectoire.

2)- Calculer la longueur s de la trajectoire.

Exercice 8 :

Soit un point M de coordonnées $(1,1,\sqrt{2})$ dans un repère orthonormé (o,xyz).

a)- Calculer les coordonnées cylindriques de M.

b)- Calculer les coordonnées sphériques de M. Pour chaque question donner une représentation.

Exercices 9

Nous supposons qu'un repère R'(O,i',j') est en mouvement de rotation par rapport au repère fixe R(O,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$). R' tourne par rapport à R autour de l'axe oz (oz = oz') perpendiculaire au plan (xoy)avec une vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$: $\dot{\theta} = w$ (figure 1).

1. Détreminer la vitesse d'entrainement, en déduire la vitesse absolue.
2. Déterminer l'accélération d'entrainement, de Coriolis. En déduire l'accélération absolue.

Exercice 10

Dans le plan xOy , une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante Un mobile M se déplace sur la droite Ox' suivant la loi : r = a sinθ avec $\theta = wt$ et a= cte .

1. Déterminer à l'instant t en fonction de a et w, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile x'Oy'. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.
2. Déterminer à l'instant t en fonction de a et w, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile x'Oy' . En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Exercice11

Un repère R'(OX'Y') en rotation par rapport à un repère R(OXY) fixe, suivant l'axe (OZ), avec une vitesse angulaire w constante. On considère l'angle θ entre l'axe (OX) et (OX') tel que θ=wt. Soit un mobile M suivant l'axe (OX') et obéissant à la relation suivante x'= Be^{-t} (B= const)

a) Déterminer la vitesse relative, d'entrainement et absolue

b) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue.

<u>Exercice 12</u> :

Sur la terrasse d'une maison en cours de construction, un pot de sable suspendu à un fil commence à descendre d'une hauteur h au moment où une voiture vient de passer à une vitesse constante $\vec{v}$.

1. Si le pot descend avec une vitesse constante $\vec{v}$, trouver l'équation de la trajectoire par rapport au conducteur de la voiture.
2. Trouver alors l'équation de la trajectoire quand il descend avec une accélération constante.

Chapitre 2 Dynamique d’un point matériel

2.1 Généralité

Dans cette partie, nous étudions la dynamique d’un objet matériel qui décrit les mouvements en termes de force. Comme il a été procédé historiquement, l’observation des corps célestes a été notée soigneusement en premier, par certains chercheurs. A partir de cette observation, ils ont pu déduire les lois cinématiques du mouvement avec Kepler, puis exprimé ces lois en termes de force avec Newton. Ces lois ont beaucoup servis à prévoir d’autres mouvements comme par exemple ceux des satellites ou des vaisseaux interplanétaires.

2.2 Repère Galiléen - repère d’inertie

Galilée est le premier qui a suggéré un principe d’inertie.

2.2.a Enoncé du Principe d’inertie

si un objet n est soumis à aucune force(isolé), cela veut dire, que cet objet

- soit il se déplace en ligne droite avec une vitesse constante.
- soit il est au repos.

Un repère d’inertie est un repère dans lequel une particule libre se déplace avec une vitesse constante.

L’accélération d’une particule, peut s’expliquer simplement par des forces liées à la particule et son environnement.

Une particule qui se déplace en mouvement rectiligne uniforme dans un tel repère n’est soumise à aucune force (ou les forces agissant se compensent).

2.2.b Masse du point Matériel.

Une masse caractérise l’inertie d’un corps, elle distingue une partie d’un autre.

La masse est une grandeur mesurable qu'on peut la mesurer par une balance.

2.3 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par sa vitesse.

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

$\vec{p}$ est une quantité vectoriel qui a la même direction que la vitesse.

L'unité de $\vec{p}$ est Kg m/s

On peut énoncer le principe d'inertie de la manière suivante :

Une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère Galiléen.

Les expériences ont montré que la quantité de mouvement d'un système isolé est conservée.

2.4 Force

La force est une grandeur mesurable que l'on mesure par un dynamomètre.

L'unité de a force est le Newton.

La force résulte de la variation de la quantité de mouvement d'un objet de masse M.

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Si la variation Δt est très courte $\Delta t \to 0$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La force et la variation de la quantité de mouvement sont orientées dans le même sens.

2.5 Lois de Newton

Les lois de Newton se traduisent en termes de force, le principe d'inertie et la conservation de la quantité de mouvement.

Première loi de Newton :

Tout corps n'est soumis à aucune force extérieure est dit qu'il est isolé.

Un corps isolé :

- Soi il est au repos (arret de mouvement)
- Soi il est e mouvement mais en mouvement rectiligne uniorme.

Deuxième loi de newton :

La masse de l'objet **m** est constante, si cette masse possède une accélération $\vec{a}$, cela veut dire qu'elle est soumise à une force :

$$\vec{F} = \mathbf{m}\,\vec{a}$$

Si l'objet **m** est soumis à plusieurs forces,

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\sum_k \vec{F}_k = \mathbf{m}\,\vec{a}$$

Troisième loi de Newton :

Soit un système isolé contient deux point matériel M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 respectivement sont en interaction mutuelle. D'après le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

Où : $$\vec{F}_{12} = -\ \vec{F}_{21}$$

Cette équation traduit le principe de l'action et de la réaction.

2.6 Application des lois de Newton

2.6.a Poids d'un objet au voisinage de la terre

L'expérience montre que le mouvement de chute libre en prenant soin d'éliminer les frottements sur l'air est un mouvement à accélération constante :

$$\vec{P} = \mathbf{m}\,\vec{g}$$

$\vec{P}$:est le poids de l'objet s exprime en Newton

m :est la masse constante de l'objet s'exprime en kg

$\vec{g}$:est appelé accélération de la pesanteur s'exprime en m/s^2.

2.6.b Loi de gravitation universelle

C'est Newton qui a étudié le phénomène de gravitation au voisinage de la terre à partir des hypothèses et des observations en aboutissant à la loi d'attraction que la terre exerce sur la lune.

$$F = G\,\frac{m_1\ m_2}{r_{12}^2}$$

Où le facteur = $6.667\ 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-1}$.

2.6.c Force de contact

Soit un poids $\vec{P}$ d'un objet **m** en équilibre sur une table horizontale.

Les forces qui maintiennent cet objet en équilibre est :

- Premièrement la force de l'objet qui s'exerce sur la terre $\vec{P}$.
- Puis, il y'a la force de contact $\vec{C}$que les molécules de la table exerce sur l'objet.

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire à l'équilibre :

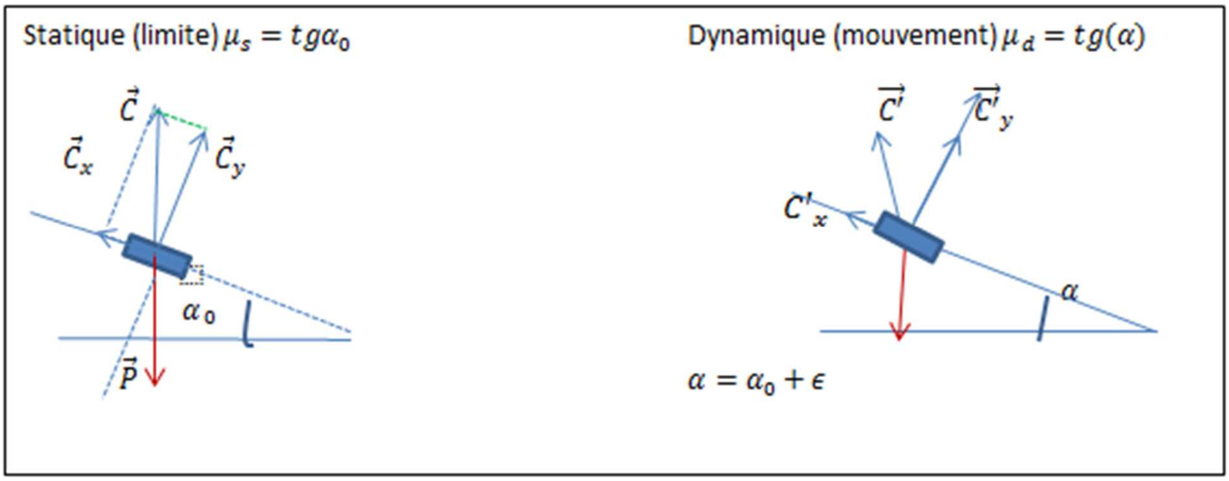
$$\overrightarrow{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\vec{C} = -\vec{P}$$

Le principe d'action et de réaction ne peut être appliqué qu'entre deux forces de même nature physique. En effet, l'action n'est pas le poids de l'objet sur la table.

2.6.d Frottement

Les frottements sont responsables des liaisons entre deux systèmes en contact. Il a été montré expérimentalement que le rapport entre les composantes donne un coefficient constant appelé coefficient de frottementμ.



<u>Etude statique (à l'équilibre)</u>

Nous plaçons un objet de masse (m) sur une planche horizontale, puis nous soulevons l'une des extrémités de la planche d'un angle αque fait la planche avec l'horizontal.

Pour une succession de valeur α , il existe une valeur d'un angle limite α_0 auquel le l'objet reste en équilibre,

Principe fondamental de la dynamique

$$\sum_k \vec{F}_k = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

Selon l'axe (o,x)

$$- \|\vec{P}_x\| + \vec{C}_x = 0$$

$$- \|\vec{P}\| \, sin\alpha_0 + \|\vec{C}_x\| = 0$$

Selon l'axe (o,y)

$$- \|\vec{P}_y\| + \vec{C}_y = 0$$

$$- \|\vec{P}\| \, cos\alpha_0 + \|\vec{C}_y\| = 0$$

Il a été trouvé au laboratoire que le rapport entre les deux de la force de contact $\vec{C}$ est contant:

Par définition $\mu_s = \dfrac{\|\vec{C}_x\|}{\|\vec{C}_y\|}$

Le coefficient de frottement μ_s caractérise le frottement entre deux surfaces à l'équilibre.

Etude Dynamique (mouvement) :

En faisant croitre d'une petite valeur l'angle α ($\alpha > \alpha_0$), l'objet se met à glisser, son mouvement est un mouvement uniformément accéléré.

$$\sum_k \vec{F}_k = \mathbf{m}\, \vec{\boldsymbol{a}}$$

$$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

Selon l'axe (o,x)

$$- \|\vec{P}_x\| + \vec{C}_x = \mathbf{m}\, \vec{\boldsymbol{a}}$$

$$- \|\vec{P}\| \, sin\,\alpha + \|\vec{C}_x\| = \mathbf{m}\, \|\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{x}}\|$$

Selon l'axe (o,y)

$$- \|\vec{P}_y\| + \vec{C}_y = 0$$

$$-\left\|\vec{P}\right\| \cos\alpha + \left\|\vec{C}_y\right\| = 0$$

L’expérience montre que le rapport entre les deux composantes de $\vec{C}$ reste constant.

Par définition

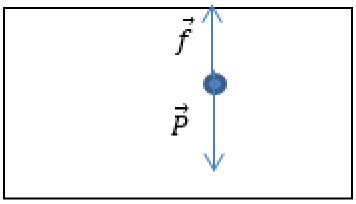
$$\mu_d = \frac{\left\|\overrightarrow{C'}_x\right\|}{\left\|\overrightarrow{C'}_y\right\|}$$

En effet, il a été prouvé que le coefficient de frottement μ_d est inférieur au coefficient de fortement statique μ_s.

2.6.e Autre type de frottement

<u>Résistance de l’air</u>

L’exemple le plus visible dans ce type de frottement est la descente d’un parachute



Le corps de masse (m) tombe avec une vitesse constante. La force de résistance de l’air est constamment opposée à la vitesse et lui est proportionnelle.

$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

Dépend du milieu et de la géométrie du corps.

2.7 Chute d’un corps dans un milieu visqueux

La relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} - k\vec{v} = \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}$$

Par une projection sur l’axe vertical $F - kv = m\frac{dv}{dt}$

La vitesse varie selon une loi exponentielle

$$v = v_0(1 - e^{-t/\tau})$$

Où v_0 est la vitesse limite qui est déterminé à l'état d'équilibre $v_0 = \frac{F}{k}$.

Avec $\tau = \frac{m}{k}$, pour $t = \tau$, $v = 0.63v_0$.

2.8 Force élastique

L'oscillatoire sinusoïdale constitue une bonne représentation de beaucoup de phénomènes réels d'oscillation. Il répond à des lois très simple :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$$

$$x = A\cos(wt)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath}$$

$$v_x = -Awsin(wt)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath}$$

$$a_x = -Aw^2\cos(wt)$$

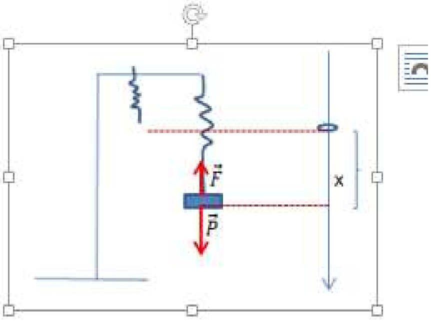
En effet ; $\vec{a} = -w^2\,\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$ sont colinéaire.

Une force de ce type est la forc de raideur par exemple un ressort.

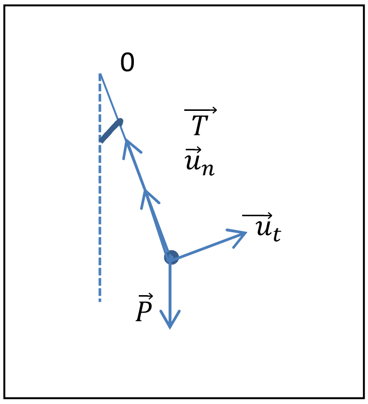
Le ressort a une longueur à videl_0, si on exerce une force$\vec{F}$ sur l'une de ses extrémités, il s'allonge d'une longueur x nommée élongation. À l'état d'équilibre, La longueur nouvelle du ressort est $l = l_0 + x$. L'état d'équilibre revient à dire qu'il existe une force de rappel s'oppose au sens du mouvement.

$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$; K est la constante de raideur du ressort.



2.9 Application « Etude du mouvement d'un pendule simple dans la base de Frenet »

Le pendule simple est caractérisé par masse (m) et la longueur du fil ℓ et l'angle θque le fil avec la verticale



En utilisant le Principe Fondamentale de la dynamique (PFD)

$$\sum_k \vec{F}_k = \mathbf{m}\,\boldsymbol{\vec{a}}$$

$$\vec{T} + \vec{P} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

Projection sur l'axe normal

$$T - mg\,cos\theta = m\frac{v^2}{\ell}$$

Projection sur l'axe tangentiel

$$-mgsin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

La relation entre les coordonnées curviligne et les coordonnées angulaire est :$v = \ell\theta$

Dans le cas des petites oscillations $\sim\theta$, l'équation différentielle qui régit le mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Qui admet une solution : $\theta = \theta_0 \cos(wt + \varphi)$ avec $w^2 = \frac{g}{\ell}$

$\theta_0$et φ sont des constantes qui peuvent être calculer à partir des conditions initiales.

La période du pendule est calculée à partie de la pulsation $T = \frac{2\pi}{w}$ que donne

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

La période est indépendante de la masse du pendule.

Pour calculer la vitesse à un instant t , on multiplie l'équation (2) par $d\theta$:

$$-mgsin\theta d\theta = m\frac{dv}{dt}d\theta$$

$$-gsin\theta d\theta = \ell\frac{d\theta}{dt}d\theta$$

En faisant l'intégrale

$$g\int_0^{\theta} sin\theta\ d\theta = \int_{\dot{\theta}}^{0} \ell\dot{\theta}d\theta$$

g$[cos\theta]_0^{\theta} = -\ell\frac{\dot{\theta}^2}{2}$

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\frac{g}{\ell}\ [1 - cos\theta]}$$

Nous pouvons facilement déduire la vitesse ($v = \ell\dot{\theta}$):

$$v = \sqrt{2g\,\ell[1 - cos\theta]}$$

2.10 Moment cinétique

2.10.a Généralités

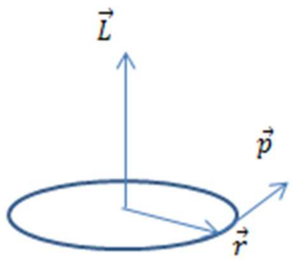
Chaque planète décrit une trajectoire elliptique où le soleil occupe l'un des foyers (première loi de Kepler).

- Au cours du mouvement de la planète, $\boldsymbol{rw^2}$est invariant au cours du temps. ($w = \dot{\theta}$) est la vitesse angulaire de la planéte et ($\boldsymbol{r}$) joint le centre du soleil à la planète.

Définition :

Le moment cinétique est une grandeur vectorielle

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$



$\vec{L}$ est le moment cinétique.

$\vec{p}$ =m $\vec{v}$est la quantité de mouvement par rapport à l'origine (0).

$\vec{L}$ est perpendiculaire au plan défini par $\vec{r}$ et$\vec{p}$, tel que le trièdre

par $\vec{r}$, $\vec{p}$ et $\vec{L}$ soit directe. $\vec{L} \perp au\ plan\ (\ \vec{r}$ et$\vec{p}$).

Son module : $\|\vec{L}\| = mvrsin\theta$

2.10.b Théorème du moment cinétique (TMC)

Il a été montré que La variation de la quantité de mouvement par rapport au temps est donné par :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

De la même manière la variation du moment cinétique par rapport au temps donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\vec{r} \wedge \vec{p})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{v}$ et m$\vec{v}$ sont paralléles

$\vec{v} \wedge m\,\vec{v}$ =0

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$\vec{r} \wedge \vec{F} = \mu(\vec{F})$ est appelé le moment d'une force.

Le théorème du moment cinétique devient

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

La variation du moment cinétique est reliée au moment de la force.

Cette relation n'est qu'une autre façon d'écrire la relation fondamentale de la dynamique

- Si $\vec{F} = \vec{0}$, la quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés.

- Si $\vec{F}$ est centrale ($\vec{F} // \vec{r}$) le moment cinétique se conserve bien que la quantité de mouvement varie$\boldsymbol{\vec{L} = mr^2\dot{\theta}}$.

2.10.c Application « Etude du mouvement d'un pendule simple en utilisant TMC»

En utilisant le théorème du moment cinétique, trouver l'équation différentielle du pendule simple.

<u>Solution</u>

Le théorème du moment cinétique $\qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

Les forces appliquées sur la masse (m)sont :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$$

D'Où

$$\mu(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{T}$$

avec

$$\vec{P} = P_n \vec{u}_n + P_t \vec{u}_t$$

$$\vec{P} = = -mg\, cos\theta\, \vec{u}_n + -mg\, sin\theta\, \vec{u}_t$$

$$\vec{T} = T\vec{u}_n$$

$$\vec{r} = -\ell \vec{u}_n$$

En remplaçant dans l'expression du moment des forces :

$$\mu(\vec{F}) = \vec{r} \wedge (P_n \vec{u}_n + P_t \vec{u}_t) + \vec{r} \wedge \vec{T}$$

Sachant : $\vec{u}_n \wedge \vec{u}_n = \vec{0}$; $\vec{u}_n \wedge \vec{u}_t = \vec{k}$

On trouve $\mu(\vec{F}) = \vec{r} \wedge P_t \vec{u}_t$

$$\mu(\vec{F}) = mg\ell \, sin\theta \, \vec{k}$$

Le moment cinétique

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$\vec{p}$ = m $\vec{v}$ = $\vec{p} = mv\vec{u}_t$

$\vec{L} = -\ell\vec{u}_n \wedge mv\vec{u}_t$

$\vec{L} = -m\ell v\vec{k}$

$v = \ell \, \dot{\theta}$

Devient

$\vec{L} = -m \, \ell^2 \, \dot{\theta}\vec{k}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = -m \, \ell^2 \, \ddot{\theta}\vec{k}$

Le théorème du moment cinétique

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$-m \, \ell^2 \, \ddot{\theta} \, \vec{k} = mg\ell \, sin\theta\vec{k}$

En passant au module

$\ell \, \ddot{\theta}$=$g\ell sin\theta$, pour des faible $sin\theta \sim \theta$

on trouve l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \, \theta = 0$

admet une solution de la forme

$\theta = \theta_0 \cos(wt + \varphi)$

$\dot{\theta} = -\omega\theta_0 \sin(wt + \varphi)$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0\cos(wt+\varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

$$\ddot{\theta} - \omega^2\theta = 0$$

Par identification $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$

Alors $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

La période $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

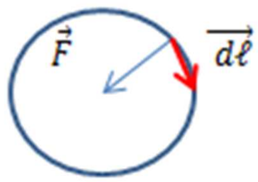
Chapitre 3 Travail et énergie

3.1 Définition

Nous appelons travail élémentaire de la force selon le déplacement$d\ell$, le produit scalaire :

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

dW =0 si $\vec{F} \perp \overrightarrow{d\ell}$



$dW = F\, d\ell$ $\vec{F} // \overrightarrow{d\ell}$

Si la force n'est ni perpendiculaire ni parallèle au déplacement

$$dW = F\, d\ell \cos\theta$$

L'unité du travail est le joule.

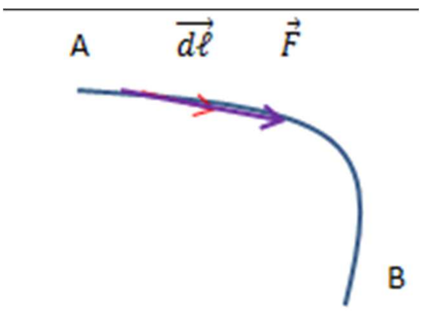
3.2 Théorème de l'énergie cinétique

Le travail mesure la variation de l'énergie cinétique$d(\frac{1}{2}mv^2)$.

Si une force variable agit sur une particule au cours d'un déplacement fini de A à B, le travail effectué entre A et B devient :

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

$$\vec{F} // \overrightarrow{d\ell}$$



$$W_A^B = \int_A^B F\, d\ell = \int_A^B m \frac{dv}{dt}\, d\ell = \int_A^B m \frac{d\ell}{dt}\, dv$$

$$W_A^B = m \int_A^B v\, dv = \frac{1}{2} m\, v_B^2 - \frac{1}{2} m\, v_A^2$$

L’énergie cinétique au point B $= E_{c/B} = \frac{1}{2} m\, v_B^2$

L’énergie cinétique au point A $= E_{c/A} = \frac{1}{2} m\, v_A^2$

Le théorème du moment cinétique est :

$$W_A^B = E_{c/B} - E_{c/A} = \Delta E_c$$

L’énergie cinétique est une grandeur scalaire positive.

Le travail est une variation de l’énergie cinétique. Si cette variation est positive, cela veut dire que la force et le déplacement sont de même sens, l’énergie cinétique augmente.

Si la variation de l’énergie cinétique est négative, la force et le déplacement sont de sens opposé, l’énergie cinétique diminue.

3.3 L’énergie potentielle

L’énergie potentielle d’une masse (m) à l’altitude (h)est défini comme :

$$E_p = mgh + cs\ t$$

Cette constante en général est fixée de manière que $E_p = 0$ pour $h = 0$, d4O%/

$$E_p = mgh$$

Dans le cas d'une force de gravitation et celui de la force élastique la variation de l'énergie cinétique aboutit à une variation égale et opposée d'une variation de l'énergie potentielle.

$$\Delta E_c = -\,\Delta E_p$$

Ainsi $W_A^B = -\ \Delta E_p$

Cette relation d'invariant appliquée entre deux point A et B :

$$E_{c/B} - E_{c/A} = -\,(E_{p/B} - E_{p/A})$$

devient

$$E_{c/A} + E_{p/A} = E_{c/B} + E_{p/B}$$

Cette nouvelle énergie que l'on appelle énergie mécanique. $E_T = E_c + E_p$ .Q'on écrit la relation de conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{T/A} = E_{T/B}$$

3.4 Etude de l'énergie d'un ressort pendant son mouvement

Sur un plan horizontal, nous considérons un ressort fixé par un de ses extrémités à un point (o), l'autre extrémité est attaché à une particule de masse (m). la particule est soumise à une force de type $\vec{F} = -kx\vec{\imath}$., au cours du déplacement de la particule du point A à un point B

Le travail effectué :

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}\,.\,\overrightarrow{d\ell} = \int_A^B -kx\,dx = \frac{1}{2}\,kx_A^2 - \frac{1}{2}\,kx_B^2$$

La variation de l'énergie cinétique est :

$$\Delta E_c = E_{c/B} - E_{c/A}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m\,v_B^2 - \frac{1}{2} m\,v_A^2$$

Les points A et B sont arbitraires, on déduit l'énergie mécanique $E_T = E_c + E_p$.

Où,

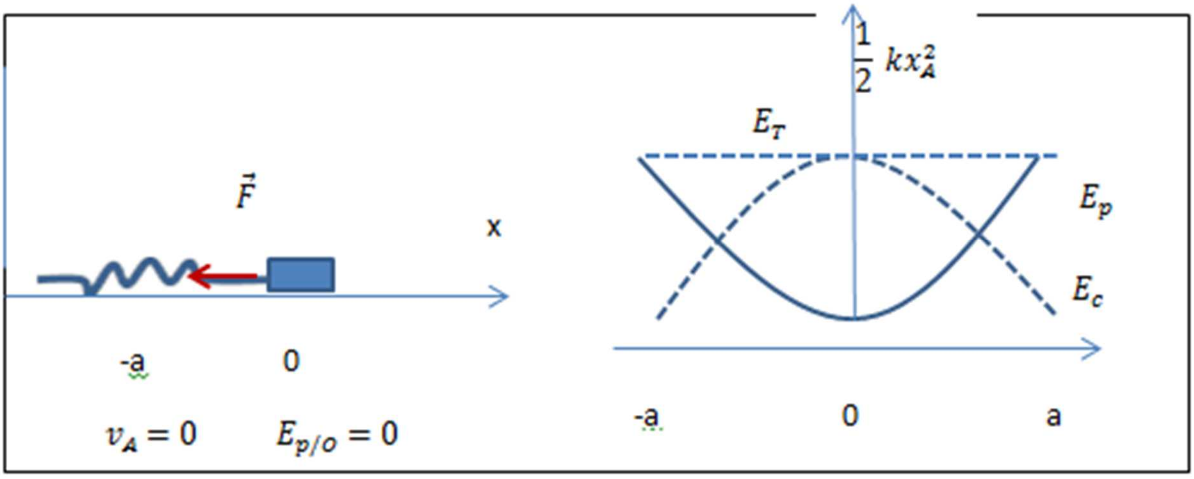
$$E_{T/A}=\frac{1}{2}\,kx_A^2+\frac{1}{2}m\,v_A^2 \quad .\, E_{T/B}=\frac{1}{2}\,kx_B^2+\frac{1}{2}m\,v_B^2$$

Exemple :

Une masse (m) glisse sans frottement sur une droite horizontale (x'0x) et sans vitesse initiale du point (A) lorsque le ressort se comprime à l'abscisse $x = -a$.

La seule force qui travail est la force de rappel : $\vec{F} = -kx\vec{\imath}$

Energie totale au point A : $E_{T/A}=\frac{1}{2}\,kx_A^2+0$



Par conservation de l'énergie totale ou l'énergie mécanique, l'énergie potentielle de la particule m se transforme en énergie cinétique.

3.5 Forces conservatives et forces non-conservatives

3.5. a Force conservative ou Force dérive d'un potentiel

Une force dérive d'un potentiel si le travail de cette force pour un déplacement de A vers b mesure la différence de potentiel évaluée au point A et au point B.

$$W_A^B = E_{p/A} - E_{p/B} = -\Delta E_p$$

Ou l'énergie totale est conservée $E_T = cst$

$$\Delta E_T = 0$$

- Cette relation implique que le travail de la force est indépendant du chemin suivi pour aller de A vers B.
- Si la trajectoire et fermée (lepoint final coïncide le point initial (A=B) , cela veut dire que
  $E_{p/A} = E_{p/B}$, le travail est nul $W_A^B = 0$
- En utilisant le théorème de Stokes $\oint \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$= $\iint \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{F}\right).\overrightarrow{dS}$, nous déduisons $\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{F}\right) = 0$ pour une force conservative.

<u>L'expression de définition de l'energie potentielle :</u>

- Par définition :

$$dE_p = -dW$$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

- L'élément de déplacement

$$\overrightarrow{d\ell} = \mathrm{dx}\vec{\imath} + \mathrm{dy}\vec{\jmath} + \mathrm{dz}\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$$

- L'élément de travail est une fonction scalaire

$$\vec{\imath}\,.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

$$dW = \vec{F}\ .\ \overrightarrow{d\ell}$$

$$dW = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = -(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz)$$

Cela implique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} = -F_x \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} = -F_y \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial z} = -F_z \end{cases}$$

On dit que $\vec{F}$ est le gradient d'une fonction scalaireE_p avec un signe (-) :

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$

Exercice :

Soit un champ scalaire $V(x, y, z) = 3x^2yz^{-2}$

Déduire la force qui résulte de ce champ de potentiel.

Solution :

$\vec{F} = 6xyz^{-2}\,\vec{\imath} + 3x^2z^{-2}\vec{\jmath} - 6x^2yz^{-1}\vec{k}$

3.5. b Force non conservative

Les forces non conservatives sont la force auxquelles :

$$\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) \neq 0$$

On cite les forces de frottements, lorsque dans un système, en plus il y'a des force dérivant un potentiel, glisse d'autres force qui ne dérivent pas un potentiels, la variation de l'énergie mécanique mesure le travail des forces ne dérivant pas un potentiel (W_f).

$$\Delta E_T = W_f$$

L'énergie mécanique n'est pas conservée.

3.6 Exercice corrigé

Une particule mobile dans un plan (xoy) est soumise à une force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$$

1. Calculer le travail de $\vec{F}$ suivant le chemin
   a- de o vers A en passant par B.
   b- suivant la droite 0A

2. Montrer que $\vec{F}$ est une force conservative.
   Déterminer l'énergie potentilleE_p . On donne E_p au point (0,0) est nulle.

<u>Solution</u>

$$dW = F_x\, dx + F_y\, dy$$

$$dW = (y^2 - x^2)\, dx + 2xy\, dy$$

a) $W_o^A = W_0^B + W_B^A$

$$W_0^B : x = 0, dx = 0; y\ varie\ de\ 0 \rightarrow 1$$

$$W_0^B = \int_0^1 2xy\, dy$$

$$W_0^B = 2x \int_0^1 y\, dy$$

$$W_0^B = 2x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$W_0^B = 0$$

$$W_B^A : y = 1, dy = 0\,; x\ varie\ de\ 0 \rightarrow 1$$

$$W_B^A = \int_0^1 (y^2 - x^2)\, dx$$

$$W_B^A = \int_0^1 (1^2)\,dx - \int_0^1 (x^2)\,dx$$

$$W_B^A = \ {}_0^1[x] - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$W_B^A = (1-0) - \frac{(1^3 - 0^3)}{3}$$

$$W_B^A = 1 - \frac{1}{3}$$

$$W_B^A = \frac{2}{3}\text{ Joule}$$

$$W_o^A = 0 + \frac{2}{3}$$

$$W_o^A = \frac{2}{3}\ joule$$

b) Suivant la droite 0A/

L'equation d'une droite y=ax, avec a est la pente (a=1).y=x ;

dx =dy

On remplace :

$$dW = (x^2 - x^2)\,dx + 2xx\,dx$$

$$dW = 2x^2$$

$$W_0^A = \int_0^1 (2x^2)\,dx$$

$$W_0^A = 2\int_0^1 (x^2)\,dx$$

$$W_0^A = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$W_0^A = \frac{2}{3}\ joule$$

<u>Conclusion</u> *: le travail est indépendant du chemin suivi.*

2/ $\vec{F}$ est une force conservative si $\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) = 0$

$$\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) = \begin{array}{ccc} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ F_x & F_Y & 0 \end{array}$$

$$\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\right) = 2y - 2y = 0$$

$\vec{F}$ est conservative.

3/ $\vec{F}$ dérive d'un potentiel. On peut écrire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} = -F_x \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} = -F_y \end{cases}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = -2xy$$

$$E_p = \int 2xy\,dy$$

$$E_p = 2x \int y\,dy$$

$$E_p = 2x\frac{y^2}{2} + cst(x)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -(x^2 - y^2) = y^2 + cst'(x)$$

$$cst'(x) = -x^2 + y^2 - y^2$$

$$cst'(x) = -x^2$$

$$cst(x) = -\int x^2\,dx$$

$$cst(x) = -\frac{x^3}{3} + cst(y)$$

$$E_p = 2x\frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + cst(y)$$

$$E_p(0,0) = 0$$

$$cst(y) = 0$$

$$E_p = 2x\frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

Résumé :

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) est la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Où m est la masse de l’objet (Kg) et $\vec{a}$ désigne l’accélération (m/s^2. La force appliquée sur l’objet s’exprime en Newton.

- Parmi les forces on cite le poids

$$\vec{P} = \mathbf{m}\,\vec{g}$$

- La force de Gravitation

$$\vec{F} = G\,\frac{m_1\ m_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}$$

- La force de frottement

$$f = \mu\, C_n$$

Avec μ est le coefficient de frottement et C_n est la réaction normal au plan.

- . La force de résistance de l’air

$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

k dépend du milieu et de la géométrie du corps et $\vec{v}$ la vitesse de propagation.

- Force de rappel d’un ressort

$$\vec{F} = -kx\vec{u}$$

Mouvement de rotation

1) Moment d’une force

$\mu(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\ \Lambda\vec{F}$

$\mu(\vec{F})$ est le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport au point O.

2) Moment cinétique

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

Où la quantité de mouvement : $\vec{p}$ =m $\vec{v}$.

Son module : $\|\vec{L}\| = mvrsin\theta$

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Une centrale $\vec{F}$ exercée sur un objet matériel dans un repère galiléen, son moment cinétique se conserve bien que la quantité de mouvement varie$\boldsymbol{\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_r}$**.**

Travail et énergie

- **Travail**

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

$$W_A^B = \int_A^B F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

- Le théorème du moment cinétique est :

$$W_A^B = \Delta E_c$$

Dans le cas d'une force de gravitation et celui de la force élastique

$$W_A^B = -\Delta E_p$$

Energie mécanique.

$$E_T = E_c + E_p$$

Conservation de l’énergie mécanique :

$$E_{T/A} = E_{T/B}$$

$$\Delta E_T = 0$$

<u>Forces conservatives</u>

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

$$\Delta E_T = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{F} = 0$$

<u>Force non conservative</u>

$$\vec{F} \neq -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

$$\Delta E_T = W_f$$

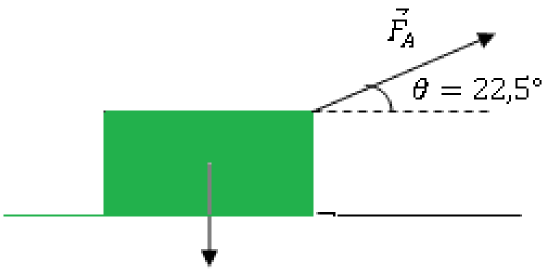
Avec W_f mesure le travail de force de frottement

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{F} \neq 0$$

3.7 Exercices corrigés

Exercice :

On tire une brique de 55 kg. La corde qui tire la brique a un angle de 22,5 degrés au-dessus d'un plan horizontal. Le coefficient de frottement dynamique entre la brique et le plan est 0,1. Si on exerce une force de 65 N sur la corde, quelle est l'accélération de la brique.



Solution

$$\sum_k \vec{F}_k = \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}$$

$$\vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_A = \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}$$

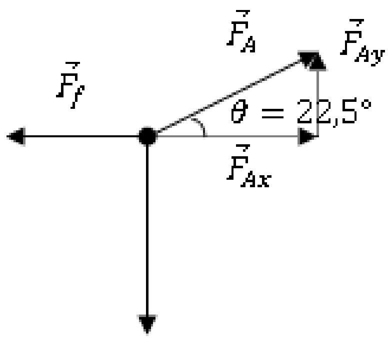
La force exercée sur la brique peut être décomposée en deux composantes horizontale et verticale.

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Ay}$$

Où

$$\vec{F}_{Ax} = \vec{F}_A \cos\theta = 65{,}0\ N \times \cos 22{,}5° = 60{,}1\ N$$

$$\vec{F}_{Ay} = \vec{F}_A \sin\theta = 65{,}0\ N \times \sin 22{,}5° = 24{,}87 = 24{,}9\ N$$



D'abord on calcul la force de réaction brique-plan

Projection sur l'axe oy

$$\|\vec{C}_y\| - \|\vec{P}\| + \|\vec{F}_{Ay}\| = 0$$

$$\|\vec{C}_y\| + (-539\ N) + 24{,}9\ N = 0$$

$$\|\vec{C}_y\| = 539\ N - 24{,}9\ N = 514{,}1\ N = 514\ N$$

Calcul de la force de frottement :

$$\vec{F}_f = \mu \times \|\vec{C}_y\| = 0{,}100 \times 514\ N = 51{,}4\ N$$

Projection sur l'axe ox :

$$-\|\vec{F}_f\| + \|\vec{F}_{Ax}\| = m\ \|\vec{a}_x\|$$

$$\|\vec{a}_x\| = \frac{-\|\vec{F}_f\| + \|\vec{F}_{Ax}\|}{m}$$

$$\|\vec{a}_x\| = \frac{60{,}1\ N + (-51{,}4\ N)}{55}$$

$$\|\vec{a}_x\| = 0{,}16\, m/s^2$$

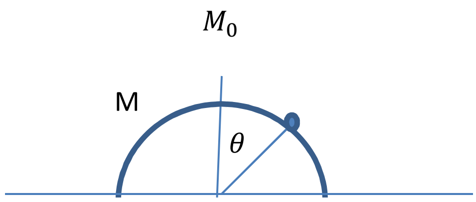
Exercice (examen de rattrapage ST2020)

Une particule de masse m glisse sans vitesse initiale du point M_0 situé en haut d' une demi sphère de rayon R et de centre O. sachant que le coefficient de frottement dynamique entre la masse et la surface de la sphère est μ_d

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver la relation suivante :

$$g(sin\theta - \mu_d cos\theta) = \frac{dv}{dt} - \frac{\mu_d}{R}v^2$$

2. Nous supposons que les frottements sont négligeables :
   - Donner l'expression de la vitesse
   - Donner l'expression de la réaction de la sphère sur la masse m
   - Déduire l'angle θ_m sous lequel la particule quitte la surface de la sphère.



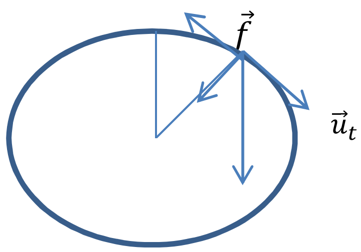
Solution

1. Coefficient de frottement dynamique

$$\mu_d = \frac{\|\vec{C'}_t\|}{\|\vec{C'}_n\|}$$

$\|\vec{C'}_t\| = \|\vec{f}\|$ (force de frottement)

$\|\vec{C'}_n\|$ force de réaction de la surface de la sphère sur la masse



Le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum_k \vec{F}_k = \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}$$

$$\vec{P} + \vec{C} = \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}$$

$$\vec{C} = \vec{f} + \vec{C}_n$$

$$\vec{P} = \vec{P}_t + \vec{P}_n$$

Projection sur l'axe tangentiel

$$\vec{u}_t : \|\vec{P}\| \, sin\,\theta - \|\vec{f}\| = \mathbf{m}\,\|\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{t}}\|$$

Projection sur l'axe normal

$$\vec{u}_n : \|\vec{P}\| \, cos\,\alpha + \|\vec{C}_n\| = \mathbf{m}\,\|\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}}\|$$

$$\|\vec{f}\| = \mu_d \|\vec{C}_n\|$$

$$m\|\vec{g}\| \, sin\,\theta + \|\vec{f}\| = \mathbf{m}\,\frac{\boldsymbol{d\,v}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$m\|\vec{g}\| \, cos\;\theta + \|\vec{C}_n\| = \mathbf{m}\,\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}$$

$$m\|\vec{g}\| \, sin\,\theta + \mu_d\|\vec{C}_n\| = \mathbf{m}\,\frac{\boldsymbol{d\,v}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\|\vec{C}_n\| = \mathbf{m}\,\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}} - m\|\vec{g}\| \, cos\;\theta$$

En remplaçant :

$\|\vec{C}_n\|$ dans $m\|\vec{g}\| \, sin\,\theta + \mu_d\|\vec{C}_n\| = \mathbf{m}\,\frac{\boldsymbol{d\,v}}{\boldsymbol{dt}}$

On trouve

$$g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta) = \frac{dv}{dt} - \frac{\mu_d}{R} v^2$$

2. En négligeant les forces de frottements ($\mu_d = 0$)

   L'equation devient :

$$g\ sin\theta = \frac{dv}{dt}$$

En multiplie l'équation par $d\theta$:

$$g \int_0^{\theta} sin\theta\ d\theta = \int_{\dot{\theta}}^{0} \frac{dv}{dt} d\theta$$

Avec :

$$v = R\dot{\theta}$$

$$g \int_0^{\theta} sin\theta\ d\theta = \int_0^{v} dv\ \frac{v}{R}$$

$$gR \int_0^{\theta} sin\theta\ d\theta = \int_0^{v} vdv$$

$$gR\ [-cos\theta]_0^{\theta} = \frac{v^2}{2}$$

Devient :

$$v^2 = 2gR\ (1 - cos\theta)$$

$$v = \sqrt{2gR\ (1 - cos\theta)}$$

En deduire l'angle θ_m :

La particule quitte la surface de la sphère lorsque $\|\vec{C}_n\| = 0$.

$$0 = \mathbf{m}\ \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{R}} - m\|\vec{g}\|\ cos\theta_m$$

En remplace l'expression de la vitesse :

$$m\,\frac{2gR\,(1-cos\theta_m)}{R} = m\|\vec{g}\|\,cos\,\theta_m$$

On trouve

$$cos\,\theta_m = \frac{2}{3}$$

$$\theta_m = 48^0$$

<u>Exercice (examen St2020)</u>

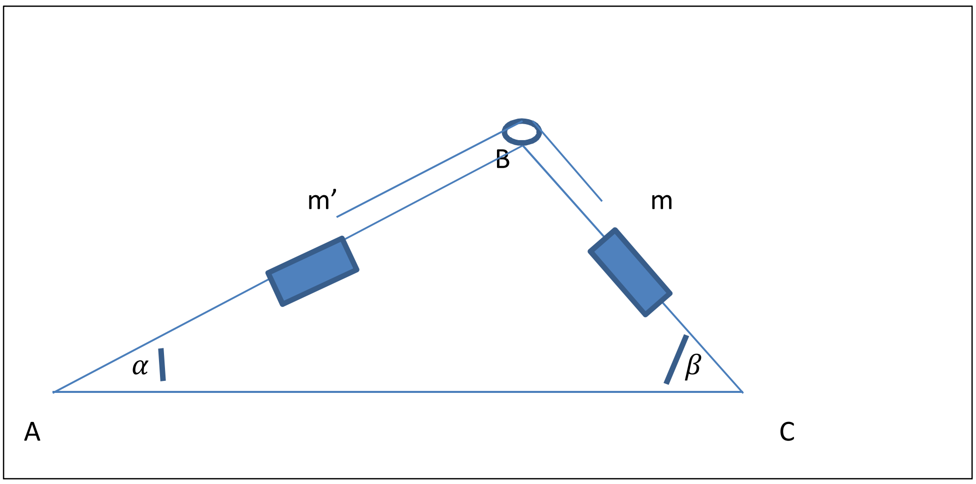
La figure ci-contre représente deux masses $m\,et\,m'$ qui sont reliées par un fil inextensibles, la masse $m' = 7.5kg$est placée sur un plan incliné BC d'angle β, le contact de m et le plan incliné est caractérisé par un coefficient de frottement statiqueμ_s et un coefficient de frottement dynamique μ_d. L'autre extrémité du fil, la masse m'est placée sur un plan inclné AB lisse (sans frottement) d'angle α.

Sachant que la poulie est de masse négligeable, $\alpha = 30^0$ et $\beta = 60^0$

1. Donner l'expression de la masse limite (minimale) m qui correspond au début du glissement. La masse m reste immobile.
2. On prend$m = 10kg$. Le système se met en mouvement, en utilisant le principe fondamental de dynamique

   a/ calculer l'accélération du mouvement

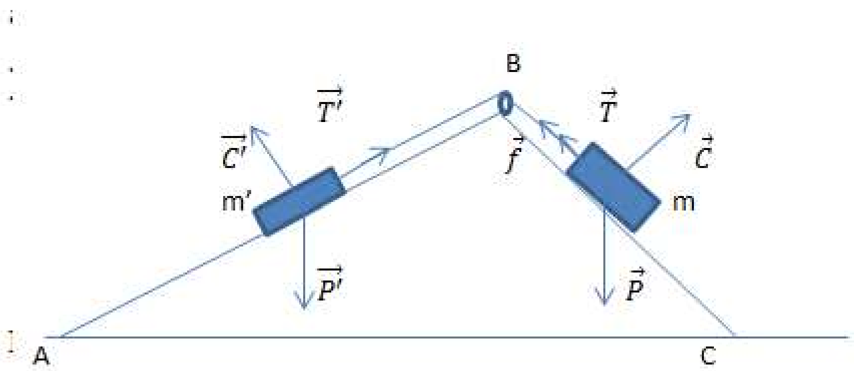
   b/ calculer la distance d que parcours la masse m' en une durée de $2s$.



Solution

Mouvement statique

$\sum\vec{F} = \vec{0}$



Pour la masse m'

$$\vec{P'} + \vec{C'} + \vec{T'} = \vec{0}$$

$$\vec{P'} = \vec{p'}_x + \vec{p'}_y$$

Projection sur l'axe ox :

$$\left\|\vec{T'}\right\| - \left\|\vec{P'}_x\right\| = 0$$

$$\left\|\vec{T'}\right\| - \left\|\vec{P'}\right\| sin\alpha = 0$$

$$\left\|\vec{T'}\right\| = \left\|\vec{P'}\right\| sin\alpha$$

Projection sur l'axe oy :

$$\left\|\vec{C'}\right\| - \left\|\vec{P'}_y\right\| = 0$$

$$\left\|\vec{C'}\right\| - \left\|\vec{P'}\right\| cos\alpha = 0$$

$$\left\|\vec{C'}\right\| = \left\|\vec{P'}\right\| cos\alpha$$

Pour la masse m :

$$\vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_x + \vec{p}_y$$

Projection sur l'axe ox :

$$-\|\vec{T}\| + \|\vec{P}_x\| = 0$$

$$-\|\vec{T}\| + \|\vec{P}\| sin\beta - \|\vec{f}\| = 0$$

$$\|\vec{T}\| = \|\vec{P}\| sin\beta - \|\vec{f}\|$$

Projection sur l'axe oy :

$$\|\vec{C}\| - \|\vec{P}_y\| = 0$$

$$\|\vec{C}\| - \|\vec{P}\| cos\beta = 0$$

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{P}\| cos\beta$$

On utilise la relation :

$$\mu_s = \frac{\|\vec{f}\|}{\|\vec{C}\|}$$

Alors : $\|\vec{f}\| = \mu_s \|\vec{C}\|$

$$\|\vec{T}\| = \|\vec{P}\| sin\beta - \mu_s \|\vec{C}\|$$

$$\|\vec{T}\| = \|\vec{P}\| sin\beta - \mu_s \|\vec{P}\| cos\beta$$

$$\|\vec{T}\| = m_{min} \|\vec{g}\| sin\beta - \mu_s m_{min} \|\vec{g}\| cos\beta$$

$$\|\vec{T}\| = m_{min} \|\vec{g}\| (sin\beta - \mu_s cos\beta)$$

Etant donné la poulie est négligeable : $\|\vec{T}\| = \|\vec{T}'\|$

$$m_{min}\|\vec{g}\|(sin\beta - \mu_s cos\beta\ ) = \left\|\overrightarrow{P'}\right\|\ sin\alpha$$

$$m_{min}\|\vec{g}\|(sin\beta - \mu_s cos\beta\ ) = m'\|\vec{g}\|sin\alpha$$

$$m_{min} = \frac{m' sin\alpha}{(sin\beta - \mu_s cos\beta\ )}$$

$$m_{min} = \frac{7.5.\,0.5}{0.86 - 0.5.0.5}$$

$$m_{min} = 6.147kg$$

<u>Etude dynamique :</u>

a) $\sum\vec{F} = m\ \vec{a}$

Projection sur l'axe ox :

Pour la masse m' :

$$\left\|\overrightarrow{T'}\right\| - \|\vec{P'}_x\| = m'\ \vec{a}$$

$$\left\|\overrightarrow{T'}\right\| - \left\|\overrightarrow{P'}\right\|\ sin\alpha = m'\ \vec{a}$$

Pour la masse m :

$$-\|\vec{T}\| + \|\vec{P}_x\| = m\ \ \|\vec{a}\|$$

$$-\|\vec{T}\| + \|\vec{P}\|sin\beta - \|\vec{f}\| = m\ \|a\|$$

On faisant la somme et pour $\|\vec{T}\| = \left\|\overrightarrow{T'}\right\|$

$$\|\vec{P}\|sin\beta - \|\vec{f}\| - \|\overrightarrow{P'}\|sin\alpha = (m + m')\ \|a\|$$

$$\|a\| = \frac{\|\vec{P}\|sin\beta - \|\vec{f}\| - \|\overrightarrow{P'}\|sin\alpha}{(m + m')}$$

Avec $\|\vec{f}\| = \mu_d\|\vec{C}\| = \ \mu_d\|\vec{P}\|cos\beta$

$$\|a\| = \|\vec{g}\| \frac{msin\beta - \mu_d m\, cos\beta - m' sin\alpha}{(m + m')}$$

$$\|a\| = \|\vec{g}\| \frac{10.0.86 - 0.3.10.0.5 - 7.5.0.5}{(10 + 7.5)}$$

$$\|\vec{g}\| = 9.81\, m/s^2$$

$$\|a\| = 1.877 m/s^2$$

b)

$$d = \frac{1}{2} a t^2$$

$$d = \frac{1}{2}.\, 1.877.\, 2^2$$

$$d = 3.755 m$$

Exercice

Une particule de masse $m = 6kg$ se déplace dans un plan (xoy), ses coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 6 \\ y = -4t^3 \end{cases}$$

1. Ecrire le vecteur de position, le vecteur vitesse et vecteur accélération dans la base cartésiennes.
2. Calculer la force $\vec{F}$qui agit sur la masse à t=2s.
3. Calculer la quantité de mouvement$\vec{p}$, en déduire le moment cinétique de cette force.

Solution

1. Vecteur de position :

$\overrightarrow{OM} = x(t)\, \vec{i} + y(t)\vec{j}$

$\overrightarrow{OM} = (3t^2 - 6)\, \vec{i}\, - 4t^3 \vec{j}$

Vecteur vitesse

$\vec{v} = \dot{x}\vec{\boldsymbol{i}} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{\boldsymbol{k}}$

$\vec{v} = 6t\vec{\boldsymbol{i}} - \mathbf{12}t^2\,\vec{j}$

Vecteur accélération

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\boldsymbol{i}} + \ddot{y}\vec{j}$

$$\vec{a} = 6\,\vec{\boldsymbol{i}} - \mathbf{24}\,\boldsymbol{t}\,\vec{j}$$

2. La force :

$$\vec{F} = \mathbf{m}\,\vec{a}$$

$$\vec{F} = \mathbf{6}(6\,\vec{\boldsymbol{i}} - \mathbf{24}\,\boldsymbol{t}\,\vec{j})$$

3. La quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

$$\vec{p} = 6(6t\vec{\boldsymbol{i}} - \mathbf{12}t^2\,\vec{j})$$

Déduire le moment cinétique :

$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

$$\vec{L} = \begin{matrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6 & -4t^3 & 0 \\ 36t & 72 & 0 \end{matrix}$$

$\vec{L} = (72(3t^2 - 6) - 144t^4$

$\vec{L} = (-144t^4 + 216t^2 - 432)\vec{k}$

Exercice

En utilisant le théorème du moment cinétique, trouver l'équation différentielle du pendule simple.

Solution

Le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

Les forces appliquées sur la masse (m)sont :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$$

D'où

$$\mu(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{T}$$

avec

$$\vec{P} = P_n \vec{u}_n + P_t \vec{u}_t$$

$$\vec{P} = = -mg\, cos\theta\, \vec{u}_n + -mg\, sin\theta\, \vec{u}_t$$

$$\vec{T} = T\vec{u}_n$$

$$\vec{r} = -\ell\vec{u}_n$$

En remplaçant dans l'expression du moment des forces :

$$\mu(\vec{F}) = \vec{r} \wedge (P_n \vec{u}_n + P_t \vec{u}_t) + \vec{r} \wedge \vec{T}$$

Sachant : $\vec{u}_n \wedge \vec{u}_n = \vec{0}$; $\vec{u}_n \wedge \vec{u}_t = \vec{k}$

On trouve : $\mu(\vec{F}) = \vec{r} \wedge P_t \vec{u}_t$

$$\boldsymbol{\mu(\vec{F}) = mg\ell\, sin\theta\, \vec{k}}$$

Le moment cinétique :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$\vec{p}$ =m $\vec{v}$= $\vec{p} = mv\vec{u}_t$

$\vec{L} = -\ell\vec{u}_n \wedge mv\vec{u}_t$

$\vec{L} = -m\ell v\vec{k}$

$v = \ell\,\dot{\theta}$

Devient :

$$\vec{L} = -\, m\, \ell^2\, \dot{\theta}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\, m\, \ell^2\, \ddot{\theta}\vec{k}$$

Le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$-\, m\, \ell^2\, \ddot{\theta}\, \vec{k} = mg\ell\, sin\theta\vec{k}$$

En passant au module :

$\ell\, \ddot{\theta}$=$g\ell sin\theta$, pour des faible $sin\theta \sim \theta$

On trouve l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\, \theta = 0$$

admet une solution de la forme :

$$\theta = \theta_0 \cos(wt + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = -\, \omega\theta_0 \sin(wt + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -\, \omega^2\theta_0 \cos(wt + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -\, \omega^2\theta$$

$$\ddot{\theta} - \omega^2\theta = 0$$

Par identification $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$

Alors : $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

La période : $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$

3.8 Exercice supplémentaires

Exercice 1

Une bille de masse m est lancée d'un point A avec une vitesse initiale et effectue le parcours lisse (sans frottement), suivant les lettres ABC formé par une sphère de rayon R (figure 2).

1. En utilisant le Principe fondamentale de la dynamique et les coordonnées polaires dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, montrer qu'on trouve ces deux expressions. C'est la force de contact, $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

$$g \sin\theta = -R\ddot{\theta} \qquad (1)$$

$$g \cos\theta - \frac{C}{m} = -R\dot{\theta}^2 \qquad (2)$$

2. Déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en tout point. En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la vitesse v au point A si la bille atteint le point C avec une vitesse nulle.

3. En utilisant le théorème du moment cinétique et le système de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$, retrouver l'expression (1) de la 1ère question.

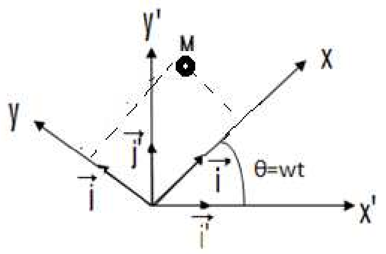


figure 1

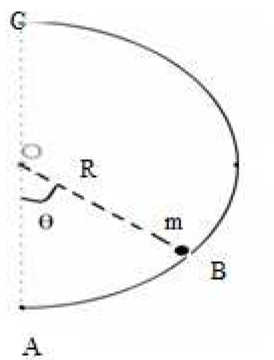


figure 2

Exercice 2

Soit un point matériel M soumis à un champ de force F : $F = (2xy)\vec{i} + x^2\vec{j}$

A-Calculer le travail de la force *F suivant :*

1/ le chemin O(0,0) $\longrightarrow$ A(0,1) $\longrightarrow$ B(1,1).

2 / la droite OB.

3/ le trajet fermé : O(0,0) $\rightarrow$ A(0,1) $\longrightarrow$ B(1,1) $\rightarrow$ C(1,0) $\longrightarrow$ O(0,0)

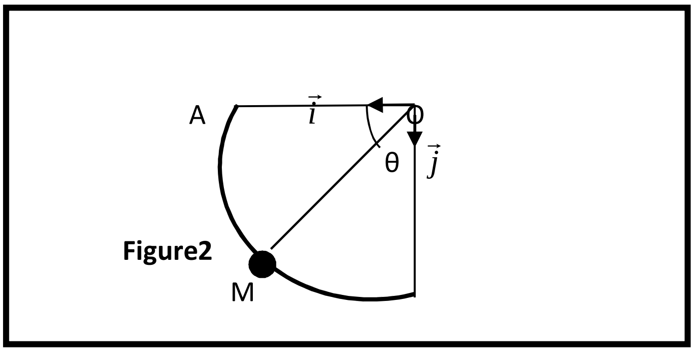
B- *F* est-elle conservative ? Conclure.

C- En déduire l'énergie potentielle Ep résultante de ce champ de forceEp(0,0)=0.

Exercice 3 :

Une particule de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire AOB de rayon **a** (Figure 2).

1. Déterminer le travail du poids de A à M.
2. Déterminer le travail de la force de contact surface-particule.
3. Déterminer l'énergie potentielle E_p de m au point M. On donne $E_p(B) = 0$
4. Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la vitesse de la particule au point M. En déduire son énergie cinétique E_c.
5. Calculer l'énergie mécanique E_m en ce point M.



Exercice 4 La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est 8*N* et qui repose sur un plan rugueux (avec frottement) incliné d'un angle θ. Le coefficient de frottement μ est 0.40. On prend g =10m/s^2 .

Que représente $\vec{F}_{\perp}$, $\vec{F}_{/\!/}$, $\vec{F}_n$et $\vec{F}_f$ sur la figure.

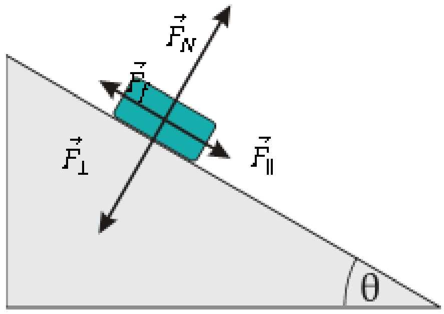
En utilisant le principe fondamental de dynamique :

a/déterminer l'angle d'inclinaison $\theta_0$pour que le corps commence à glisser avec une vitesse constante ?

b/ Quelle sera la force de réaction normale $\vec{F_n}$ au plan pour une inclinaison de θ =35 degrés.

1/ Quelle est la force de frottement dans ce cas.

2) calculer l'accélération de mouvement.



Exercice5

Soit le champ de potentiel $2x^2 - xy + yz$

Trouver l'expression de la force dans le système des coordonnées cartésiennes. Cette force est-elle conservative ?

Exercice 6

Une particule de masse *m* se déplace sous l'action d'une force centrale de rayon r.

$\vec{F} = -\frac{C}{r^2}\overrightarrow{u_r}$. C est une constante.

Montrer que :

a/ l'énergie totale s'écrit comme :E= - $\frac{C}{2r}$.

b/ la vitesse est $v = \sqrt{\frac{C}{mr}}$

c/ le moment cinétique $L = \sqrt{mcr}$

Exercice 7 :

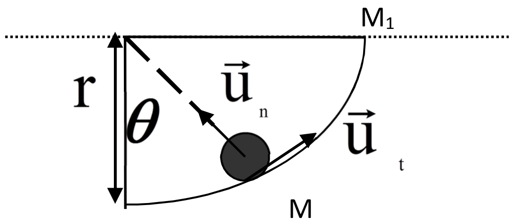
Une bille de masse m initialement au repos en M_O susceptible de glisser sans frottement à l'intérieure d'un quart de cercle de rayon r .

1/ Représenter les forces appliquées à la bille. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, trouver les projections des forces sur les axes normale et tangentiel.

2/ Trouver l'expression de la vitesse v en un point M.

3 / Trouver l'expression de la force de contact entre la bille et la surface intérieure du cercle.

4/ Quelle est la vitesse maximale **V_{MAX}** atteinte ?



Exercice 8 :

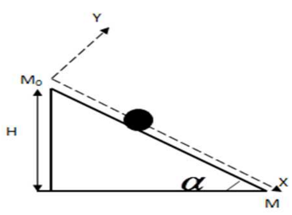
Un objet matériel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure d'un plan incliné d'angle α et de hauteur H, sans vitesse initiale en M_O voir figure2 (tourner la page). Nous considérons le frottement existe entre l'objet et la pente avec un coefficient de frottement μ. On note g l'intensité du champ de pesanteur,

1/ Représenter les forces exercées sur l'objet m. En déduire la composante de la force de contact entre l'objet et le plan incliné.

2/ Déterminer le travail du poids et le travail de la force de frottement.

3/ En déduire l'expression de la vitesse V en un point M en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

4/ Quelle est la condition sur μ pour que la bille commence à glisser.



References

[1] Alonso M. et Finn E. , Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique, Dunod, (2004).

[2] Feynman R., Le cours de physique de Feynman, 5 volumes, Dunod, (2013).

[3] Stocker H., Jundt F. et Guillaume G., Toute la physique, Dunod, (2007).

[4] cinématique du point., Michel Henry, Université de Maine France, (2009). http://numeliphy.unisciel.fr/consultation/liste/module/mecanique1