

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
USTO-MB D'ORAN**

Faculté de Génie Mécanique

Département de Génie Maritime

**Bases et Algorithmes de Calcul des Vibrations des
Systèmes Propulsifs Navals**

Support de Cours et Applications

Par: Ch. Kandouci

(Année académique 2020-2021)

AVANT-PROPOS

Ce travail est conçu pour les étudiants de master 1, spécialités ingénierie des systèmes propulsifs, architecture navale, et construction navale. Il concerne les vibrations à bord du navire, on y trouve les sources et les moyens de réduction des amplitudes de ces vibrations, la description mathématique des vibrations de tournoiement (whirling) et de torsion des systèmes propulsifs navals, ainsi que l'étude des systèmes vibratoires continus avec applications de quelques méthodes utilisées et exercices d'application résolus. L'un des traits dominants de ce travail est que la plupart des théories présentées et les expressions mathématiques associées sont confirmées par des exemples. Ce travail a pour objet de faciliter aux étudiants la compréhension du phénomène vibratoire et d'aider à assimiler les méthodes de résolution des problèmes concernant les vibrations des systèmes mécaniques en génie maritime.

TABLE DES MATIERES	Page
AVANT-PROPOS	
I. Introduction aux Vibrations des Systèmes Propulsifs Navals.....	1
I. 1. Les sources principales des vibrations globales de la coque.....	2
I. 2. Moyens pour réduire les vibrations à bord des navires.....	4
II. Méthodes Appliquées aux Systèmes Discrets ou Discrétisés.....	7
II. 1. La méthode des éléments finis.....	7
II. 1. 1. L'exemple de barre en extension.....	7
II. 1. 1a. Construction d'un élément de barre.....	8
II. 1. 1. b. Processus d'assemblage.....	9
II. 1. 1. c. Résolution du problème aux valeurs propres.....	12
II. 2. Méthode de Stodola.....	13
III. Vibrations des Systèmes Discrets à n Degrés de Liberté.....	17
III. 1. Vibrations libres axiales non amorties des systèmes à n degrés de liberté.....	17
III. 1. 1. Equations différentielles du mouvement et fréquences propres.....	17
III. 1. 2. Les modes propres.....	20
III. 1. 3. Les déformées modales.....	21
III. 1. 4. Orthogonalité des modes propres.....	22
III. 2. Vibrations libres non amorties de torsion des systèmes à n degrés de liberté, et application au système propulsif du navire.....	23
III. 2. 1. Schéma et modèle du système analysé.....	24
III. 2. 2. Equations différentielles du mouvement et fréquences propres.....	25
III. 2. 3. Modes propres des vibrations libres de torsion.....	26
III. 2. 4. Diagramme résonance-excitation.....	27
Exercice d'application.....	29
IV. Vibrations des Systèmes Continus.....	35
IV. 1. Vibrations longitudinales (axiales) d'une poutre.....	35
Exercice d'application.....	37
IV. 2. Vibrations transversales des poutres.....	40
IV. 2. 1. Modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli.....	40
IV. 2. 2. Résolution de l'équation générale	42
Exercice d'application.....	45
IV. 2. 3. Méthode de Rayleigh.....	48
Exercice d'application.....	49
IV. 2. 4. Méthode de Verechagine.....	52
IV. 2. 5. Méthode de Ritz.....	54
IV. 2.6. Méthode de Galerkin.....	55
Exercice d'application.....	56
IV. 3. Modèle et équations de Timoshenko.....	58
V. Les Méthodes des Matrices de Transfert.....	63
V. 1. La méthode conventionnelle des matrices de transfert relatives au vecteur d'état (TMM).....	63

V. 1. 1. Détermination des coefficients d'influence.....	66
V. 1. 1.a. Détermination des coefficients d'influence a_i^{YM} et a_i^{OM} d'une poutre encastrée-libre.....	66
V. 1. 1.b. Détermination des coefficients d'influence a_i^{YQ} et a_i^{OQ} d'une poutre encastrée-libre.....	68
V. 1. 2. Vibration de flexion libre d'une poutre.....	70
V. 1. 2.a. Le cas d'une poutre libre- libre.....	72
V. 1. 2. b. Le cas d'une poutre encastrée- encastrée.....	72
V. 1. 2. c. Le cas d'une poutre encastrée- libre.....	73
V. 1. 2. d. Le cas d'une poutre sur appuis simples aux extrémités.....	73
V.2. La méthode des matrices de transfert relatives aux vecteurs des coefficients constants des solutions des équations différentielles.....	74
V.2.1. Introduction.....	74
V.2. 2. Modèle mathématique.....	74
V. 2. 2. a. Cas de deux tronçons de poutre voisins ayant différentes caractéristiques mécaniques et/ou géométriques.....	77
V. 2. 2.b. Le cas d'une masse discrète reliant deux tronçons (i) et ($i+1$).....	78
V. 2. 2. c. Le cas d'un support élastique intermédiaire reliant deux tronçons (i) et ($i+1$).....	78
V. 2. 3. Fréquences propres des vibrations transversales verticales de la poutre.....	79
VI. Vibrations Transversales des Lignes de Propulsion Navales.....	81
VI. 1. Référentiels.....	81
VI. 2. Modèle physique de la ligne de propulsion navale.....	82
VI.3. Conditions aux limites.....	91
VI. 4. Relations entre les vecteurs des coefficients constants des solutions des équations.....	92
VI. 4. 1. Cas de deux tronçons d'arbres adjacents ayant différentes constantes du matériau et/ou différents diamètres.....	93
VI. 4. 2. Le cas d'une masse discrète reliant deux tronçons d'arbres (i) et ($i+1$).....	95
VI. 4. 3. Le cas d'un palier reliant deux tronçons d'arbres (i) et ($i+1$).....	95
VI.4. Fréquences propres des vibrations transversales.....	96
VI. 5. Amplitudes des vibrations transversales forcées et des contraintes.....	97
VII. Analyse des Vibrations de Tournoisement (whirling) d'un Arbre de Timoshenko à Section étagée muni de plusieurs masses discrètes.....	98
VII. 1. Modèle analysé et équations du mouvement.....	98
VII. 2. Vecteurs des coefficients des solutions des équations différentielles.....	103
VII. 2. 1. Le cas de deux tronçons d'arbres voisins avec des caractéristiques mécaniques et/ou géométriques différentes.....	104
VII. 2. 2. Le cas de deux tronçons d'arbres voisins (i) et ($i+1$) reliés par une masse discrète.....	108
VII. 2. 3. Fréquences naturelles, vitesses critiques de tournoisement et leurs modes correspondants	

VII. 3. Application à un rotor constitué d'un arbre de Timoshenko
à section étagée supportant trois disques identiques.....113

I. Introduction aux Vibrations des Systèmes Propulsifs Navals

L'économie de la navigation a entraîné une tendance à augmenter la capacité et la vitesse des navires pour répondre à la demande croissante de transport maritime. Pour soutenir cette évolution, les moteurs marins utilisés doivent être à la fois plus efficaces et plus robustes pour garantir des performances optimales et une bonne fiabilité. Les caractéristiques modales des phénomènes vibratoires, notamment les valeurs propres, les fréquences propres et les modes propres, sont essentielles pour comprendre et gérer les vibrations dans les systèmes mécaniques tels que les moteurs marins et les structures des navires.

Les valeurs propres représentent les solutions de l'équation caractéristique d'un système vibratoire, et servent à trouver les fréquences naturelles (propres) auxquelles le système vibre en l'absence de perturbations extérieures. Les fréquences propres sont les valeurs numériques exprimées en Hertz, en radian par seconde ou en tour par minute. Elles représentent les fréquences auxquelles les modes de vibration naturels se produisent dans le système. Localiser les fréquences propres sert à éviter les vitesses critiques et donc la résonance afin de concevoir des moteurs et des structures résistants aux vibrations. Les modes propres sont les configurations spécifiques de vibration du système à ses fréquences propres. Ils montrent comment les différentes parties du système se déplacent et oscillent à ces fréquences naturelles.

En utilisant ces caractéristiques modales, les ingénieurs peuvent concevoir des moteurs marins plus efficaces et plus robustes, minimiser les vibrations indésirables, et ainsi améliorer les performances et la durabilité des systèmes mécaniques utilisés dans la navigation maritime.

L'analyse vibratoire des machines et structures marines est l'une des plus importantes pendant le processus de conception ainsi que durant l'exploitation. Les vibrations du système propulsif comprennent trois types : les vibrations latérales ou transversales, les vibrations axiales et les vibrations de torsion. Ce dernier type de vibrations est généralement le plus dangereux pour la ligne d'arbres de propulsion et pour le vilebrequin du moteur principal. Le système de propulsion fonctionne dans des conditions d'exploitation très complexes. Cela a conduit à de nombreuses pannes du moteur. Le phénomène de rupture ou fissure du vilebrequin est le plus redouté. La cause de ce phénomène n'est pas seulement due à la surcharge, mais aussi au mode cyclique des vibrations se produisant dans le système vilebrequin - structure de bielle [1]. En pratique, pour remédier à ce problème, on utilise des amortisseurs de vibrations adaptés à chaque cas.

Le système de propulsion d'un navire est utilisé pour propulser le navire et contrôler sa manœuvre. Il est composé principalement d'un moteur principal, d'une ligne d'arbres avec paliers, et d'une hélice avec ou sans réducteur. Le système de transmission de la puissance est une partie essentielle du système propulsif.

En général, les vibrations latérales (transversales) du système propulsif ne sont pas dangereuses pour un système de propulsion fonctionnant à basse vitesse. Les contraintes normales et tangentielles dynamiques de flexion, les forces de cisaillement et les amplitudes de vibrations latérales de la ligne d'arbres ne sont pas aussi préoccupantes que les contraintes

tangentielles maximales induites par les vibrations de torsion. Habituellement, l'amplitude des vibrations latérales au niveau de l'hélice, (où l'amplitude est maximale), est très faible et ne dépasse pas 0,3 mm. Cependant, le calcul de ces vibrations est exigé dans le cas des longues lignes d'arbres. Durant les années 1990, on a enregistré de nombreux dommages des paliers des lignes d'arbres, en particulier dans le palier arrière du tube d'étambot. Les principales raisons à l'origine de ces dommages été dues à l'augmentation des déformations de la coque causées par l'utilisation de coques plus souples, et aux charges dynamiques de l'hélice non prises en compte dans l'alignement de la ligne arbres. Selon Volcy [1], les vibrations transversales sont dues à la disproportion entre la rigidité de la ligne d'arbres et la rigidité de la structure supportant celle-ci.

En plus de l'effet néfaste d'un point de vue ergonomique sur les personnes et sur l'équipage, les vibrations excessives et les contraintes variables sont la cause des dommages rencontrés en pratique sur les éléments structurels, tels que:

- cloisons, planchers, parois de réservoirs, et fixations des porques dans la zone de la poupe et les éléments du double fond,
- serres, couples et membrures, raidisseurs de cloison et cloisons ondulées au niveau des soutes, ...etc.

En plus, les vibrations excessives contribuent à la réduction de la durée de vie par fatigue des éléments de la ligne d'arbres (fissures au niveau des supports des arbres, des fondations et des paliers du tube d'étambot), et à l'augmentation de l'usure et de l'endommagement du joint presse étoupe. Ces vibrations sont aussi source de bruit excessif et de vibrations de la coque et de la superstructure.

I. 1. Les sources principales des vibrations globales de la coque

Les sources principales des vibrations globales de la coque du navire sont:

- a-** l'hélice propulsive,
- b-** le moteur principal,
- c-** l'état de la mer.

a- L'hélice propulsive

L'hélice propulsive travaillant dans un écoulement d'eau à répartition de vitesse irrégulière, cause la formation de pressions variables, qui se transmettent par la pale à l'arbre porte-hélice et au palier arrière du tube d'étambot, et aussi par l'eau environnante au bordé de la coque du navire (partie immergée de la poupe) [2].

Les pales de l'hélice ont une certaine épaisseur, c'est pourquoi leur mouvement induit des fluctuations des pressions hydrodynamiques. Sous l'effet de la forme de la poupe du navire, l'écoulement d'eau circulant vers l'hélice propulsive a une répartition de vitesse irrégulière, ce qui induit la formation de pressions variables sur les pales de l'hélice. Ces pressions provoquent des forces et des moments hydrodynamiques variables, qui se transmettent par l'hélice au palier arrière du tube d'étambot et la ligne d'arbres, et par conséquent, au double fond et à la coque du

navire par les supports des paliers. En plus, ces pressions variables agissent par l'eau environnante sur le bordé de la coque du navire (partie immergée de la poupe), provoquant ainsi des forces de surfaces. Les causes supplémentaires d'apparition des excitations variables de l'hélice propulsives sont:

- les conditions de travail de l'hélice sur mer houleuse et les mouvements du navire, ainsi que l'hétérogénéité du matériau de l'hélice et de la ligne d'arbres,
- le balourd dynamique de l'hélice (lorsque l'axe principal central d'inertie de l'hélice n'est pas confondu avec l'axe de rotation),
- le balourd hydrodynamique de l'hélice (les écarts de fabrication des pales ont une influence sur leurs propriétés hydrodynamiques),
- le balourd statique de l'hélice (lorsque le centre de gravité de l'hélice n'est pas situé sur l'axe de rotation).

Les fréquences (pulsations) des forces et des moments hydrodynamiques ont pour expression :

$$\Omega_{\nu} = \frac{2\pi}{60} n \nu z, \text{ rad / s} \quad (\text{I.1})$$

où

- n - la rotation de l'hélice, *tours / min*,
- z - nombre de pales de l'hélice,
- ν - 1, 2, ...

Les amplitudes de ces excitations hydrodynamiques dépendent des paramètres de construction et d'exploitation de l'hélice (en particulier son diamètre, sa vitesse de rotation, et aussi le nombre et la forme des pales), et aussi de la forme arrière causant l'irrégularité de la répartition des vitesses de l'écoulement d'eau vers l'hélice. Pour les vibrations axiales, latérales ou de torsion, la composante particulièrement importante est celle pour $\nu=1$, qui se produit à la fréquence $\Omega = n.z$ (première fréquence des pales).

Les forces et les moments hydrodynamiques générés par le travail de l'hélice propulsive dépendent en grande partie du degré de cavitation de celle-ci. La formation et la disparition de bulles de vapeur dans le cas d'une hélice cavitante, provoque l'apparition de pressions variables, dont les amplitudes peuvent être multiples, comparées au cas d'une hélice non-cavitante.

b- Le moteur principal

Les forces des gaz dans les cylindres constituent un système interne de forces excitatrices des vibrations du vilebrequin, qui n'ont pas d'effet sur la structure externe (lorsque le moteur est considéré comme corps rigide). Cependant, en pratique, se produisent des déformations de la fondation du moteur, constituant une source de forces et de moments excitateurs. Les fréquences de ces excitations sont :

$$f = knz \left[\text{min}^{-1} \right] \quad (1.2)$$

où:

n désigne la vitesse de rotation du moteur,

$k = 1, 2, 3...$ - pour le moteur à deux temps,

$k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}...$ - pour le moteur à quatre temps,

z - le nombre de cylindres du moteur.

Le niveau des excitations variables provoquées par les moteurs principaux dépend avant tout de leurs types. En augmentant le nombre de cylindres, et par conséquent, celui des manivelles, on diminue le degré d'irrégularité du couple moteur. L'équilibrage est effectué en montant des contrepoids sur les manivelles. Les buts de l'équilibrage sont, d'une part, la réduction des vibrations du moteur causées par les forces et les moments produits par la pression des gaz dans les cylindres et par les forces d'inertie des pièces en mouvement alternatif et de rotation (pistons, bielles, vilebrequin), et d'autre part, la diminution des charges exercées sur les coussinets du vilebrequin du moteur.

Les turbines à vapeur et les turbines à gaz utilisées comme source de propulsion principale se caractérisent par des excitations de vibrations à bord du navire à amplitudes beaucoup plus petites que celles générées par les moteurs alternatifs à combustion interne. Par conséquent, les turbines ne sont pas mentionnées comme source importante de vibrations globales de la coque du navire. Cela est dû au fait que leur balourd dynamique peut être réduit au minimum nécessaire.

c- L'état de la mer

Les excitations émanant de la construction de support de la ligne d'arbres sont dues aux mouvements et aux déformations de la coque du navire sur mer houleuse, causés par les vagues et par l'effet du vent. Si l'on considère le mouvement de la coque du navire comme corps rigide, sous l'effet de l'inertie de la ligne d'arbres, aux points de support apparaissent les forces d'interaction entre la ligne d'arbres et la coque. Les déformations de la coque du navire sous l'effet des facteurs externes susmentionnés provoquent l'apparition de forces supplémentaires dans les paliers, qui représentent l'action de la coque sur la ligne d'arbres de propulsion.

I. 2. Moyens pour réduire les vibrations à bord des navires

I. 2. a. Cas de l'hélice propulsive

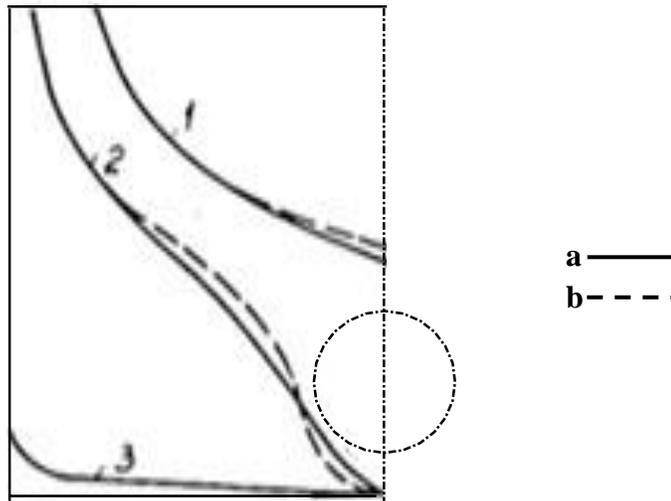
Comme découle de la théorie élémentaire des vibrations, les causes des fortes vibrations sont les amplitudes excessives des excitations hydrodynamiques par rapport à la rigidité dynamique du système vibratoire considéré, et aussi la résonance, qui est la superposition d'une fréquence propre avec une fréquence d'excitation. Donc, la diminution du niveau vibratoire (et des contraintes aussi) peut être obtenue par une réduction des forces excitatrices, ou par changement

des fréquences des composantes dominantes des excitations, ou encore en effectuant des modifications de la construction qui augmentent la rigidité dynamique et assurent un éloignement de la résonance. Cependant, ceci exige une analyse profonde pour chaque cas spécifique.

Pour réduire les amplitudes des excitations émanant de l'hélice propulsive, celle-ci et la forme de la partie immergée de la poupe doivent être conçues de façon à obtenir l'écoulement le plus homogène possible dans le plan de l'hélice, et aussi une hélice à bas niveau de cavitation et à balourd minimal. La mesure de l'irrégularité de la répartition de la vitesse de l'écoulement de l'eau dans le plan de l'hélice est estimée par la répartition de la vitesse de l'écoulement v_p , ou par le coefficient de sillage défini comme suit, (figure I. 1)

$$w = \frac{v - v_p}{v} \quad (I.3)$$

où v désigne la vitesse du navire. L'obtention à la partie supérieure du cercle de l'hélice, d'une valeur $w \leq 0.6$ donne une garantie partielle, que l'hélice propulsive et la forme arrière du navire ont été conçues correctement [2]. Ce coefficient dépend de la longueur, du remplissage et de l'élancement de la coque du navire. Plus la coque du navire est élancée et donc moins remplie, plus les valeurs de w sont petites. Cette influence désavantageuse de la géométrie de la coque, peut être compensée en concevant de manière adéquate la forme de la poupe, garantissant ainsi une amélioration de la répartition de la vitesse de l'écoulement dans le plan de l'hélice propulsive. La figure I. 1 représente un exemple de modification de la poupe (a), et l'amélioration de répartition de la vitesse dans le plan de l'hélice (b)



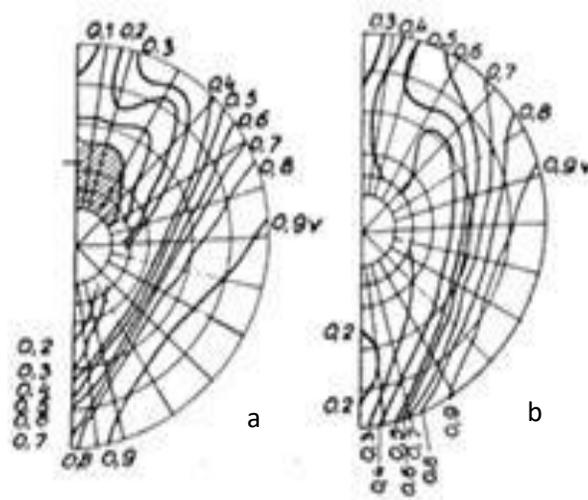


Figure I. 2: Influence de la modification de la forme de la poupe sur la répartition de la vitesse de l'écoulement vers l'hélice propulsive.

Sur la figure (I.2a,b) on a:

a - avant la modification, **b**- après la modification.

1- section du plan de l'hélice,

2- section du couple à la distance 0.1 LBP de la section **1**,

3 - section du maitre couple au milieu du navire.

I. 2. b. Cas du moteur principal

Concernant le problème des moteurs à pistons comme source de vibrations, du point de vue niveau des excitations, le moteur principal et les moteurs auxiliaires devraient avoir autant de cylindres que possible et un bon ordre d'allumage. Généralement les moteurs à six cylindres et plus, sont mieux équilibrés, et sont donc caractérisés par un moment excitateur plus petit. Pour le même nombre de cylindres, des moteurs avec des ordres d'allumage différents peuvent être caractérisés par des valeurs d'excitations différentes. On utilise des arrimages de retenue latéraux pour limiter les vibrations transversales du moteur, des amortisseurs de vibrations de torsion du volant moteur, ou une suspension élastique pour le moteur principal. Cette dernière solution exige l'installation d'accouplement élastique.

L'accouplement élastique sert à éviter la résonance et à diminuer les contraintes en changeant les paramètres dynamiques de la ligne d'arbres.

II. Méthodes Appliquées aux Systèmes Discrets ou Discrétisés

II. 1. La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis peut être envisagée comme une procédure particulière d'application de la méthode de Rayleigh-Ritz [3]. Elle consiste à subdiviser le corps déformable ou la structure en un certain nombre fini d'éléments (figure II. 1) de géométrie simple (segment de droite en mono-dimensionnel, triangle ou quadrangle en bi-dimensionnel, tétraèdre ou hexaèdre en tri-dimensionnel).

Dans certain cas, la subdivision de la structure est instantanée de part son état naturel (subdivision naturelle), c'est le cas des structures treillis, alors que pour d'autres types de structures continues comme les plaques, par exemple, la structure doit être artificiellement divisée en éléments avant d'appliquer le calcul matriciel adéquat à celle-ci.

Ces éléments artificiels, appelés « éléments finis», sont généralement choisis de façon à approcher de la manière la plus fidèle possible la structure continue.

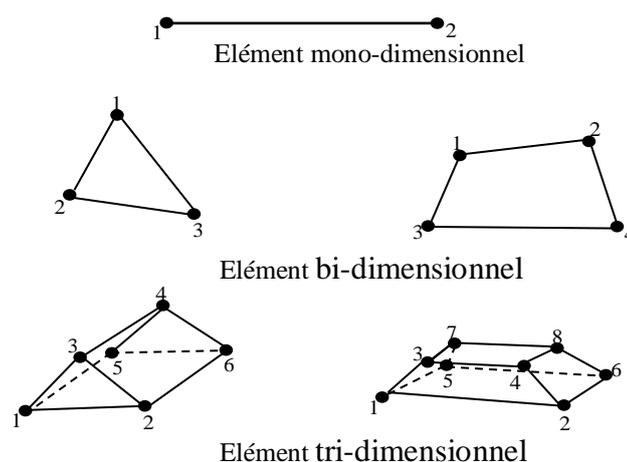


Figure II. 1. Modélisation par éléments finis.

Les déplacements sont ensuite représentés par des fonctions d'interpolation généralement de type polynomial continues par morceau. Les déplacements au sein de chaque élément sont définis par la superposition de fonctions simple représentant son comportement dans la structure. Les paramètres d'intensité de ces fonction sont les coordonnées généralisées de la méthode de Rayleigh -Ritz [3], et sont les valeurs locales des déplacements, dont l'identification permet de respecter la continuité des déplacements au niveau global.

II. 1. 1. L'exemple de barre en extension

II. 1. 1a. Construction d'un élément de barre

La barre représentée sur la figure (II. 2) est soumise à une charge répartie $p(t)$.

On divise la barre en N éléments de longueur l , et on interpole les déplacements par la formule

$$u(x,t) = u_1(t) \varphi_1(x) + u_2(t) \varphi_2(x) \quad (\text{II. 1})$$

où $u_1(t)$, $u_2(t)$ ont les degrés de liberté des nœuds, et $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sont les fonctions de forme choisies, vérifiant

$$u(0,t) = u_1(t), \quad u(l,t) = u_2(t)$$

Une interpolation linéaire donne les fonction de forme

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{l} \quad (\text{II. 2})$$

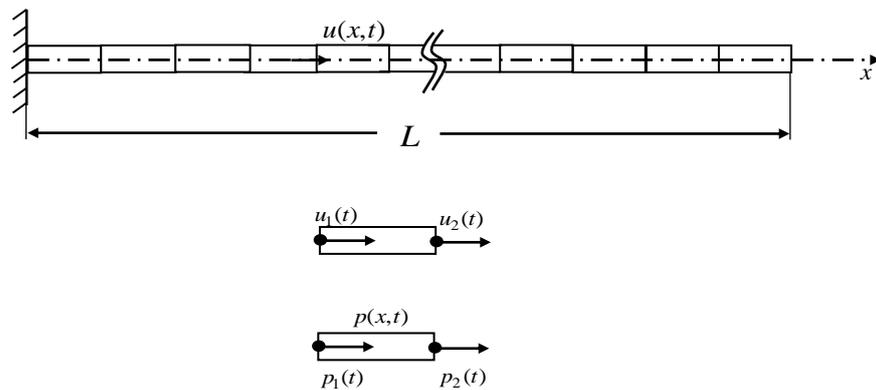


Figure II. 2. Barre en extension modélisée par éléments finis.

Sous forme matricielle; la relation (II. 1) s'écrit

$$u(x,t) = N_e(x) q_e(t) \quad \text{avec} \quad x \in \text{élément} \quad (\text{II. 3})$$

où $N_e(x)$ représente la matrice des fonctions de forme, et $q_e(t)$ la matrice des degrés de liberté

$$N_e(x) = [\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x)]$$

$$q_e(x) = [u_1(t) \quad u_2(t)]$$

Les énergies cinétique et de déformation de l'élément sont donnés par

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e \quad \text{et} \quad v_e = \frac{1}{2} q_e^T K_e q_e \quad (\text{II. 4})$$

où M_e et K_e sont les matrices élémentaires de masse et de raideur, et $m[\text{kg}/\text{m}]$ désigne la masse linéaire

$$M_e = \int_0^l m N_e^T N_e dx \quad \text{et} \quad K_e = \int_0^l EA \frac{dN_e^T}{dx} \frac{dN_e}{dx} dx \quad (\text{II. 5})$$

Le travail virtuel des forces extérieures est donné par

$$\delta v_{\text{ext},e} = -\delta q_e^T g_e(t) \quad (\text{II. 6})$$

avec $g_e(t)$ les charges généralisées conjuguées aux déplacements $q_e(t)$

$$g_e(t) = \int_0^l N_e^T p(x,t) dx + \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II. 7})$$

Pour l'élément de barre modélisé avec les fonctions d'interpolation linéaires on obtient

$$M_e = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 8})$$

Le terme discrétisé de charge pour une sollicitation uniforme p est donné par

$$g_e^{(1)} = \frac{pl}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 9})$$

On utilise les équations (II. 4) et (II. 6), on applique le principe de Hamilton à l'élément e

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e - \frac{1}{2} q_e^T K_e q_e \right) dt + \delta q_e^T g_e = 0$$

II. 1. 1. b. Processus d'assemblage

On collecte les $(N+1)$ déplacements nodaux (figure. II. 3) pour construire la matrice des déplacements structuraux q

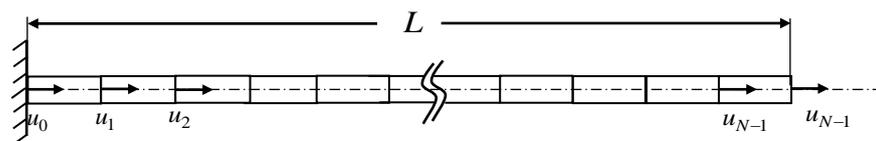


Figure II. 3. Déplacements nodaux du système.

$$q^T = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_N] \quad (\text{II. 10})$$

$$q_e = L_e q \quad (\text{II. 11})$$

L_e est une matrice d'incidence de dimension $2 \times (N+1)$, contenant uniquement des 1 et des 0.

Pour les élément 1 et 2 de la figure (II.3) on a

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation variationnelle se construit par sommation sur tous les éléments du système comme suit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{e=1}^N \left[\frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e - \frac{1}{2} q_e^T K_e q_e \right] dt + \sum_{e=1}^N \delta q_e^T g_e = 0 \quad (\text{II. 12})$$

Par substitution de l'équation (II. 11) dans l'équation (II. 12), l'équation variationnelle s'écrit en termes des déplacements structuraux comme suit

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{e=1}^N L_e^T M_e L_e \right) \dot{q} - \frac{1}{2} q^T \left(\sum_{e=1}^N L_e^T K_e L_e \right) q \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta q^T \left(\sum_{e=1}^N L_e^T g_e \right) dt = 0 \quad (\text{II. 13})$$

La matrice des masses du système est

$$M = \sum_{e=1}^N L_e^T M_e L_e \quad (\text{II. 14})$$

La matrice de rigidité globale s'écrit

$$K = \sum_{e=1}^N L_e^T K_e L_e \quad (\text{II. 15})$$

Le vecteur des charges structural est donné par

$$g = \sum_{e=1}^N L_e^T g_e \quad (\text{II. 16})$$

En pratique, la matrice des masses et la matrice des raideurs du système sont construites par affectation correcte des matrices élémentaires M_e et K_e dans les matrices du système M et K (figure II. 4)

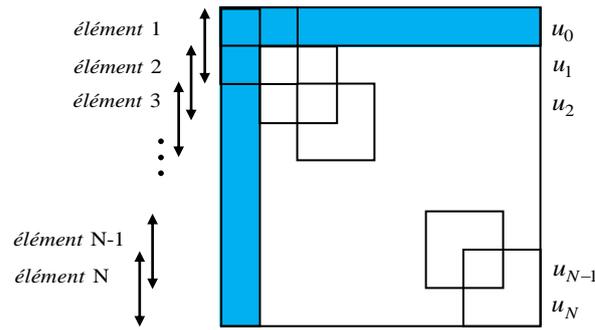


Figure II. 4. Assemblage des matrices structurales pour le modèle de la barre.

La zone en couleur bleu indique l'encastrement de la barre à son extrémité gauche et ne doit pas figurer dans la matrice. Les termes de masses et de raideur diagonaux des matrices élémentaires s'additionnent deux à deux sur la diagonale de la matrice structurale. Du fait de la numérotation séquentielle des degrés de liberté, les matrices K et M ont une forme tri-diagonale.

La longueur des éléments est $l = \frac{L}{N}$. Les matrices M et K de la barre encastree-libre sont

$$M = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(II. 17)

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des charges structural g contient les charges extérieures appliquées.

L'équation variationnelle s'écrit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - \frac{1}{2} q^T K q \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta q^T g dt = 0$$

On obtient l'équation discrétisée

$$K q + M \ddot{q} = 0 \quad (\text{II. 18})$$

Tenant compte de l'équation (II. 17), l'équation régissant l'équilibre dynamique au nœud (i) s'écrit

$$\frac{EA}{l} (-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + \frac{ml}{6} (\ddot{u}_{i-1} + 4\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = g_i(t) \quad (\text{II. 19})$$

II. 1. 1. c. Résolution du problème aux valeurs propres

Pour chaque nœud du système, l'équation d'équilibre lors des vibrations libres s'écrit

$$\frac{EA}{l} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{\omega^2 ml}{6} (u_{i-1} + 4u_i + u_{i+1}) = 0 \quad \text{avec } 0 < i < N \quad (\text{II. 20})$$

avec les conditions aux limites du cas encastré libre

$$u_0 = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{EA}{l} (u_{N-1} - u_N) + \frac{\omega^2 ml}{6} (u_{N-1} + 2u_N) = 0 \quad (\text{II. 22})$$

La solution générale a la forme

$$u_i = a \sin(i\mu + \phi) \quad \text{pour} \quad 0 < i < N$$

La substitution de cette solution générale dans l'équation (II. 20) donne la relation

$$\omega^2 = 6 \frac{EA}{ml^2} \frac{1 - \cos \mu}{2 + \cos \mu} \quad (\text{II. 23})$$

Le déphasage spatial est déduit de la condition aux limites (II. 21)

$$\phi = 0$$

L'équation caractéristique s'obtient par substitution de la solution générale et de la valeur propre donnée par l'équation (II. 23) dans la condition à la limite droite (II. 22), comme suit

$$\sin(\mu(N+)) - \sin(N\mu) + \frac{1 - \cos(\mu)}{2 + \cos(\mu)^2} [\sin(\mu(N+)) + 2\sin(N\mu)] = 0$$

soit,

$$\sin(\mu)\cos(N\mu) = 0$$

qui a pour solution

$$\mu = \frac{2r-1}{N} \frac{\pi}{2} \quad \text{avec } r = 1, 2, \dots$$

Les valeurs propres sont données par

$$\omega_r^2 = 6 \frac{EA}{ml^2} \frac{1 - \cos\left(\frac{2r-1}{N} \frac{\pi}{2}\right)}{2 + 1 - \cos\left(\frac{2r-1}{N} \frac{\pi}{2}\right)} \quad (\text{II. 24})$$

avec $l = \frac{L}{N}$, on trouve

$$\omega_r^2 = \frac{EA}{mL^2} \left(\frac{(2r-1)\pi}{2} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{2r-1}{N} \frac{\pi}{2} \right)^2 + \dots \right]$$

La fréquence propre est donnée par

$$\omega_r = (2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \left[1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2r-1}{N} \frac{\pi}{2} \right)^2 + \dots \right] \quad (\text{II. 25})$$

Le mode propre associé est

$$u_{i,(r)} = a \sin\left(i \frac{2r-1}{N} \frac{\pi}{2}\right) \quad r, i = 1, 2, \dots, N$$

II. 2. Méthode de Stodola

Le principe de cette méthode est basé sur une méthode itérative qui est beaucoup utilisée pour résoudre des problèmes de vibration quand les premières valeurs propres et leurs modes correspondants sont à déterminer.

En premier lieu, le mode fondamental est estimé d'avance par une approximation de la déformée. Pour commencer, on part du principe du système conservatif, donc:

$$[M] \ddot{X} + [K] X = 0$$

$$X_i = X_m \cdot \sin(\omega_i t) \quad (\text{II.9})$$

$$[K].X_{mi} - \omega_i^2 [M].X_{mi} = 0$$

En multipliant les deux termes de l'égalité (II.9) par $[K^{-1}]$, on obtient:

$$[K^{-1}].[K].X_{mi} - \omega_i^2 [K^{-1}].[M].X_{mi} = 0 \quad (\text{II.10})$$

sachant que $[K][K^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{la matrice identité}$, on obtient:

$$[K^{-1}].[M].X_{mi} = \frac{1}{\omega_i^2}.X_{mi} \quad (\text{II.11})$$

on pose $\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2}$ et $[K^{-1}].[M] = [D]$, et l'équation (II.11) s'écrira sous la forme

$$[D].X_{mi} = \lambda_i.X_{mi} \quad (\text{II.12})$$

Au départ, on donne une valeur à X, et on remplace celle-ci dans le terme gauche de l'équation (II.12), en effectuant le produit, on obtient un vecteur que l'on normalise par la suite. Le vecteur normalisé est injecté à nouveau dans le terme gauche de (II.12), et ainsi de suite jusqu'à atteindre la précision fixée d'avance comme test de convergence.

Après cela, il est possible d'obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres des modes supérieurs par la même méthode.

Si on supprime le premier mode par l'introduction de contraintes appropriées, le second mode deviendra dominant, si le premier et second modes sont supprimés et remplacés par des contraintes, le troisième mode deviendra dominant et ainsi de suite.

Puisque le nombre de modes naturels est égal au nombre de degrés de liberté (DDL), l'introduction de contraintes modales réduit le nombre de DDL et l'ordre de la matrice des coefficients sera $(n-1)$ quand l'itération a lieu pour le deuxième mode, etc.

Les contraintes modales peuvent être introduites en spécifiant que certains modes de déplacements sont nuls.

En tenant compte de la relation d'orthogonalité parmi les principaux modes de vibration, on aura:

$$X_p = (X_m)^{-1} X = [M_p]^{-1} (X_m)^T [M] X \quad (\text{II.13})$$

En éliminant le premier mode, on aura:

$$X_{p1} = [M_p]^{-1} (X_{mi})^T [M] X = 0 \quad (II.14)$$

Si le vecteur X est considéré comme (X_{mi}) ($i=1, \dots, n$), on voit que cette condition de contrainte coïncide avec l'orthogonalité du premier mode avec les modes supérieurs, tout en respectant la matrice $[M]$ et on aura:

$$M_{11} X_{m11} X_1 + M_{22} X_{m21} X_2 + \dots + M_{mn} X_{mn} X_n = 0 \quad (II.15)$$

En faisant un choix arbitraire sur X_1 , on a :

$$X_1 = \frac{-(M_{22} \cdot X_{m21} \cdot X_2) - \dots - (M_{mn} \cdot X_{mn} \cdot X_n)}{M_{11} \cdot X_{m11}} \quad (II.16)$$

En substituant l'expression de X_1 dans l'équation aux valeurs propres, on a :

$$[A] \cdot X_{mi} = \lambda_i \cdot X_{mi} \quad (II.17)$$

L'équation (II.17) donnera n équations avec $(n-1)$ inconnues, la première de ces équations sera une combinaison linéaire des $(n-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues

il en résulte

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & \cdot & \cdot & C_{1n} \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix} \quad (II.18)$$

$$C_{12} = \frac{-(M_{22} \cdot X_{m21})}{(M_{11} \cdot X_{m11})}$$

\cdot

\cdot

\cdot

$$C_{1n} = \frac{-(M_{nn} \cdot X_{mn})}{(M_{11} \cdot X_{m11})} \quad (II.19)$$

On aura donc :

$$X = T_{s1} \cdot \dot{X}$$

$$[A] \cdot T_{s1} \cdot \dot{X}_{mi} = \lambda_i \cdot X_{mi} \quad (II.20)$$

$$[A_1] \cdot X_{m2} = \lambda_3 \cdot X_{m3}$$

où

$$[A_1] = [A].T_{s1}$$

et

$$T_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

On commence les itérations à partir d'une déformée donnée et on aboutira par la suite avec la même procédure, à λ_2 et X_{m2} , de même que pour , λ_3 et X_{m3}

III. Vibrations des Systèmes Discrets à n Degrés de Liberté

Dans ses calculs, l'ingénieur se voit obligé de simplifier les systèmes à étudier à cause de leur complexité, et du temps que prend leur analyse. La discrétisation consiste à transformer une structure réelle ayant un nombre infini de degrés de liberté en un système « discret » doté d'un nombre limité de degrés de liberté.

Le système mécanique est dit discret lorsqu'il est représenté par des masses (ou des moments d'inertie massiques) et des ressorts sans masse appelés aussi élasticités non pesantes. Le système peut être discret c'est-à-dire qu'il peut exister sous formes de masses reliées par des ressorts, comme il peut être le résultat d'une discrétisation par la méthode des éléments finis, où la structure est divisée en (n) parties (figure III.1) dont la masse est concentrée au centre de masse de chacune d'entre elles. Ces masses seront reliées par des tronçons de masse négligeable et d'inertie équivalente.

III. 1. Vibrations libres axiales non amorties des systèmes à n degrés de liberté

III. 1. 1. Equations différentielles du mouvement et fréquences propres

La figure (III.1) représente un système à n degrés de liberté.

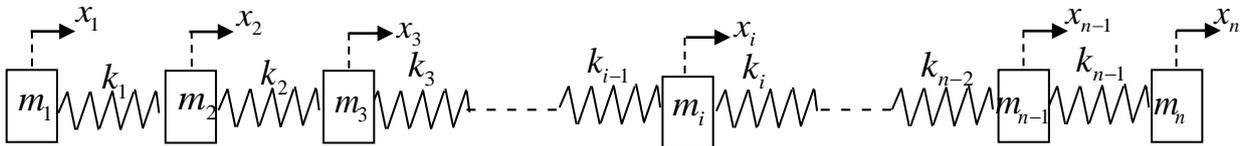


Figure III. 1: Système discret à n degrés de liberté.

-Energie cinétique et énergie potentielle du système

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 + \dots + \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \dots + \frac{1}{2} m_{n-1} \dot{x}_{n-1}^2 + \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 \quad (\text{III.1})$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_4)^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{i-1} (x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{1}{2} k_i (x_i - x_{i+1})^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{n-2} (x_{n-1} - x_{n-2})^2 + \frac{1}{2} k_{n-1} (x_{n-1} - x_n)^2$$

Formalisme de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, i \dots n-1, n) \quad (\text{III.2})$$

Pour ($i=1$):
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -k_1(x_1 - x_2) = 0$$

donc

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0 \text{ est la première équation différentielle.}$$

Pour ($i=2$):
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_2 - x_3)$$

donc

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = 0 \text{ est la deuxième équation différentielle.}$$

Pour ($i=3$):
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = m_3 \dot{x}_3, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = m_3 \ddot{x}_3$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_3}\right) = -k_2(x_3 - x_2) - k_3(x_3 - x_4)$$

donc

$$m_3 \ddot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2) + k_3(x_3 - x_4) = 0 \text{ est la troisième équation différentielle.}$$

Pour la i ème masse:
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = m_i \ddot{x}_i$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - k_i(x_i - x_{i+1})$$

donc

$$m_i \ddot{x}_i + k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + k_i(x_i - x_{i+1}) = 0 \text{ est la } i\text{ème équation différentielle.}$$

⋮

Pour la $i=n-1$
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n-1}}\right) = m_{n-1} \dot{x}_{n-1}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n-1}}\right) = m_{n-1} \ddot{x}_{n-1}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_{n-1}}\right) = -k_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) - k_{n-1}(x_{n-1} - x_n)$$

donc

$m_{n-1}\ddot{x}_{n-1} + k_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) + k_{n-1}(x_{n-1} - x_n) = 0$ est la $(n-1)$ -ième équation différentielle.

Pour la n ème masse
$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = m_n \dot{x}_n, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = m_n \ddot{x}_n$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_n}\right) = -k_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

donc

$m_n \ddot{x}_n + k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0$ est la n ème équation différentielle.

On remplace la solution $x_i = A_i \sin \omega t$ dans les équations différentielles (III.1), on simplifie par $A_i \sin \omega t$, et on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 A_1 + k_1(A_1 - A_2) &= 0 \\ -m_2 \omega^2 A_2 + k_1(A_2 - A_1) + k_2(A_2 - A_3) &= 0 \\ -m_3 \omega^2 A_3 + k_2(A_3 - A_2) + k_3(A_3 - A_4) &= 0 \\ &\vdots \\ -m_i \omega^2 A_i + k_{i-1}(A_i - A_{i-1}) + k_i(A_i - A_{i+1}) &= 0 \\ &\vdots \\ -m_{n-1} \omega^2 A_{n-1} + k_{n-2}(A_{n-1} - A_{n-2}) + k_{n-1}(A_{n-1} - A_n) &= 0 \\ -m_n \omega^2 A_n + k_{n-1}(A_n - A_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \tag{III.3}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante

Si on veut calculer par exemple le mode i , il faut injecter la fréquence propre correspondante ω_i dans le système d'équations, qui est représenté par la matrice $[k - M\omega_i^2]$ multipliée par le vecteur propre $X_i = [A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n]^T$, seulement, la matrice $[k - M\omega_i^2]$ devient singulière (son déterminant égal à zéro), on utilise alors les amplitudes relatives :

$$a_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1} \dots a_i = \frac{A_i}{A_1} \dots a_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_1}, \quad a_n = \frac{A_n}{A_1} \quad (\text{III.6})$$

A partir du système d'équations on obtient :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_1}{A_1} = 1, \\ a_2 &= \frac{A_2}{A_1} = 1 - \omega_i^2 \frac{M_1}{k_1}, \\ a_3 &= \frac{A_3}{A_1} = a_2 - \omega_i^2 \frac{(M_1 + M_2 a_2)}{k_2} \\ &\vdots \\ a_k &= \frac{A_k}{A_1} = a_{k-1} - \omega_i^2 \frac{\sum_{j=1}^k M_j a_j}{k_{k-1}} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{A_n}{A_1} = a_{n-1} - \omega_i^2 \frac{\sum_{j=1}^{n-1} M_j a_j}{k_{n-1}} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

III. 1. 3. Les déformées modales

Les déformées modales sont les courbes représentant les modes propres . On obtient :

Le premier mode (correspondant à ω_1)

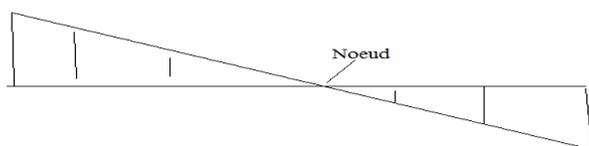


Figure III. 2a.

Le deuxième mode (correspondant à ω_2)

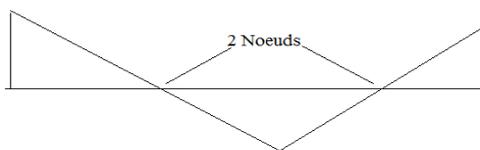


Figure III. 2b.

Le troisième mode (correspondant à ω_3)

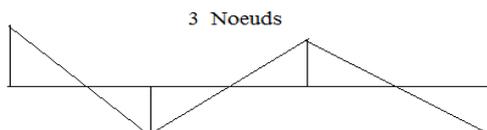


Figure III. 2c.

Ainsi de suite jusqu'au $(n-1)$ -ième mode correspondant à la fréquence propre ω_{n-1} . Si les calculs sont exactes, **le nombre de nœuds dans une vibration est égal au numéro du mode de la même vibration**, (voir figures (III. 2a)-(III. 2c)). Pour la configuration libre-libre, on obtient:

- le premier mode, on a 1 nœud,
- le deuxième mode, on a 2 nœuds,
- le troisième mode, on a 3 nœuds, ainsi de suite.

III. 1. 4. Orthogonalité des modes propres

Considérons le mode numéro r et le mode numéro s , ces deux modes vérifient les équations

$$(k - M \omega_r^2) X_r = \mathbf{0}, \text{ avec } X_r = \begin{Bmatrix} A_1^r \\ A_2^r \\ \vdots \\ A_i^r \\ \vdots \\ A_{n-1}^r \\ A_n^r \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad (k - M \omega_s^2) X_s = \mathbf{0}, \text{ avec } X_s = \begin{Bmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ \vdots \\ A_i^s \\ \vdots \\ A_{n-1}^s \\ A_n^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

On a donc les équations :

$$(k - M \omega_r^2) X_r = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad k X_r = \omega_r^2 M X_r \quad (\text{III.9})$$

$$(k - M \omega_s^2) X_s = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad k X_s = \omega_s^2 M X_s \quad (\text{III.10})$$

On multiplie les deux membres des équations (III.9) et (III.10) par X_s^T et X_r^T , respectivement, et on obtient

$$X_s^T k X_r = \omega_r^2 X_s^T M X_r \quad (\text{III.11})$$

$$X_r^T k X_s = \omega_s^2 X_r^T M X_s \quad (\text{III.12})$$

rappel

$$X_r^T = [A_1^r \quad A_2^r \quad \cdots \quad A_i^r \quad \cdots \quad A_{n-1}^r \quad A_n^r]$$

$$X_s^T = [A_1^s \quad A_2^s \quad \cdots \quad A_i^s \quad \cdots \quad A_{n-1}^s \quad A_n^s]$$

La matrice k est symétrique, et la matrice M est diagonale, donc nous avons les égalités suivantes

$$X_s^T k X_r = X_r^T k X_s \quad (\text{III.13})$$

$$X_s^T M X_r = X_r^T M X_s \quad (\text{III.14})$$

Compte tenu des particularités des matrices k et M , la soustraction des équations (III.11)-(III.12), produit

$$(X_r^T k X_s) - (X_s^T k X_r) = (\omega_r^2 - \omega_s^2)(X_s^T M X_r)$$

donc

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)(X_s^T M X_r) = 0 \quad (\text{III.15})$$

puisque

$$(\omega_r^2 \neq \omega_s^2), \text{ parce que } \omega_r \text{ et } \omega_s \text{ sont deux fréquences propres différentes,}$$

donc

$$(X_s^T M X_r) = 0, \text{ et vu que } M \text{ est une matrice diagonale donc } (X_s^T X_r) = 0$$

Ceci montre que le mode numéro r et le mode numéro s sont **orthogonaux**. Les modes propres sont dits orthogonaux.

Cette particularité est à l'origine d'une méthode efficace dite générale de recherche des fréquences propres. Le terme 'générale' veut dire que la méthode s'applique non seulement au système conservatif, mais aussi au système amorti et au système à paramètre physique (section) variable. C'est la méthode de Galerkin.

III. 2. Vibrations libres non amorties de torsion des systèmes à n degrés de liberté, (application au système propulsif du navire)

III. 2. 1. Schéma et modèle du système analysé

L'étude des vibrations de torsion est similaire à l'étude des vibrations axiales. Le calcul de ce type de vibrations est exigé par toutes les sociétés de classification du navire, Lloyd Register of Shipping (LR), Bureau Veritas (BV), DetNorskVeritas –Germanisher L'Ioyd (DNV-GL), etc...

Le moteur principal est pris en considération. Les figures (I.3) et (I.4) représentent respectivement un schéma simplifié et son modèle de calcul des vibrations de torsion du système propulsif du navire

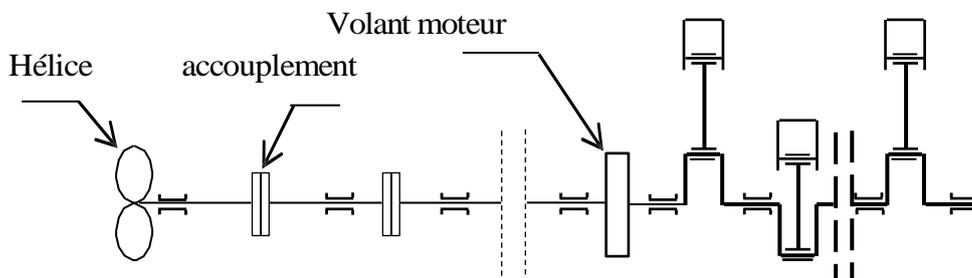


Figure III. 3: Schéma simplifié de l'appareil propulsif naval.

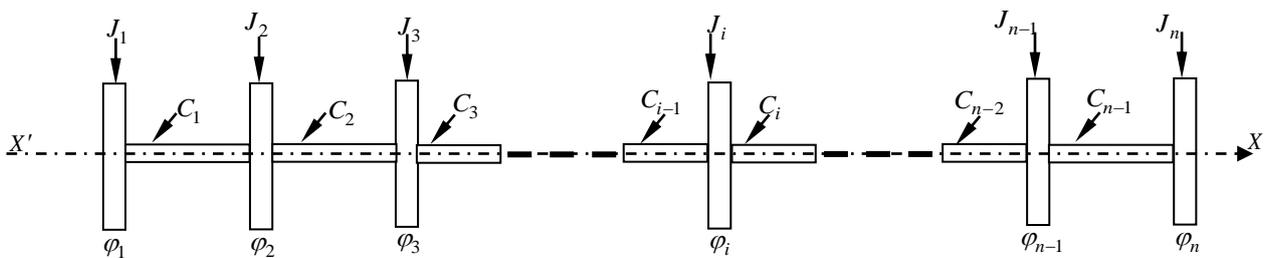


Figure III. 4: Modèle discret de calcul de l'installation propulsive, pour l'analyse des vibrations de torsion.

Si l'on compare le modèle de calcul schématisé sur la figure (III-1) avec le modèle de la figure (III-4), on voit que:

-les masse en [kg] ($m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_{n-1}, m_n$) ont été remplacées par les moments d'inertie massiques en [kg.m²] ($J_1, J_2, J_3, \dots, J_i, \dots, J_{n-1}, J_n$),

-les ressorts de traction-compression en [**N/m**] ($k_1, k_2, k_3, \dots k_i \dots k_{n-1}$) ont été remplacés par des ressorts de torsion en [**Nm/rad**] ($C_1, C_2, C_3, \dots C_i \dots C_{n-1}$),

-les déplacements linéaires en [**m**] ($x_1, x_2, x_3, \dots x_i \dots x_{n-1}, x_n$) ont été remplacés par les déplacements angulaires en [**rad**] ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_i \dots \varphi_{n-1}, \varphi_n$) autour de l'axe $X' X$.

III. 2. 2. Equations différentielles du mouvement et fréquences propres

On obtient le système d'équations différentielles régissant les vibrations libres de torsion du système propulsif, suivant

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\
 J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_1(\varphi_2 - \varphi_1) + C_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \\
 J_3 \ddot{\varphi}_3 + C_2(\varphi_3 - \varphi_2) + C_3(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0 \\
 J_i \ddot{\varphi}_i + C_{i-1}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + C_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) &= 0 \\
 J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + C_{n-2}(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + C_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \\
 J_n \ddot{\varphi}_n + C_{n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= 0
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

On remplace la solution $\varphi_i = A_i \sin \omega t$ dans les équations différentielles (III.16), on simplifie par $A_i \sin \omega t$, et on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
 -J_1 \omega^2 A_1 + C_1(A_1 - A_2) &= 0 \\
 -J_2 \omega^2 A_2 + C_1(A_2 - A_1) + C_2(A_2 - A_3) &= 0 \\
 -J_3 \omega^2 A_3 + C_2(A_3 - A_2) + C_3(A_3 - A_4) &= 0 \\
 \vdots & \\
 -J_i \omega^2 A_i + C_{i-1}(A_i - A_{i-1}) + C_i(A_i - A_{i+1}) &= 0 \\
 \vdots & \\
 -J_{n-1} \omega^2 A_{n-1} + C_{n-2}(A_{n-1} - A_{n-2}) + C_{n-1}(A_{n-1} - A_n) &= 0 \\
 -J_n \omega^2 A_n + C_{n-1}(A_n - A_{n-1}) &= 0
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

Si on veut calculer par exemple le mode i , il faut injecter la fréquence propre correspondante ω_i dans le système d'équations, qui est représenté par la matrice $[C - J\omega_i^2]$ multipliée par le vecteur propre $X_i = [A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n]^T$. Pour éviter la singularité de la matrice $[C - J\omega_i^2]$ (son déterminant égal à zéro), on utilise alors les amplitudes relatives,

$$a_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1} \dots a_i = \frac{A_i}{A_1} \dots a_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_1}, \quad a_n = \frac{A_n}{A_1} \quad (\text{III.21})$$

A partir du système d'équations on obtient :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_1}{A_1} = 1, \\ a_2 &= \frac{A_2}{A_1} = 1 - \omega_i^2 \frac{J_1}{C_1}, \\ a_3 &= \frac{A_3}{A_1} = a_2 - \omega_i^2 \frac{(J_1 + J_2 a_2)}{C_2} \\ &\vdots \\ a_k &= \frac{A_k}{A_1} = a_{k-1} - \omega_i^2 \frac{\sum_{j=1}^k J_j a_j}{C_{k-1}} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{A_n}{A_1} = a_{n-1} - \omega_i^2 \frac{\sum_{j=1}^{n-1} J_j a_j}{C_{n-1}} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

III. 2. 4. Diagramme résonance-excitation

Dans le cas d'une installation propulsive avec moteur principal diesel à deux temps, les excitations des vibrations de torsion sont les couples de torsion dus à la force des gaz et aux forces d'inertie. Ces excitations sont données par le constructeur du moteur principal sous la forme de série de Fourier suivante :

$$M(t) = M_0 + \sum_{\nu=1}^q B^{(\nu)} \sin(\nu z \Omega t + \theta^{(\nu)}),$$

$$\nu = 1, 2, \dots$$

z - désigne le nombre de pistons du moteur.

M_0 représente le couple moyen à pleine charge, q représente le nombre de composantes de la série de Fourier.

(dans le cas d'un moteur à **quatre temps** on a $\nu = 0.5, 1, 1.5, \dots$)

La figure (III. 5) représente un exemple de diagramme résonance excitation d'une installation propulsive, dont le moteur principal est à deux temps. A titre d'exemple, on a considéré uniquement deux harmoniques du moteur, qui sont les deux premières composantes dangereuses de la série de Fourier.

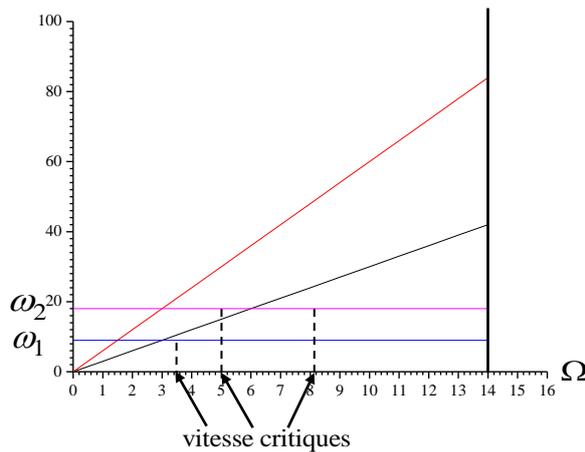


Figure III. 5: Diagramme ' Résonance-Excitation'.

Sur le diagramme ci-dessus, on a représenté la vitesse de rotation du moteur sur l'axe des abscisses, tandis que les deux premières fréquences propres sont représentées sur l'axe des ordonnées. Les deux lignes obliques représentent les deux fréquences des deux premières harmoniques du moteur à deux temps, $(1 z \Omega)$ et $(2 z \Omega)$, respectivement.

A l'intersection d'une fréquence propre avec une fréquence d'excitation, on projette sur l'axe des abscisses et on obtient la vitesse critique.

Pour éviter le phénomène de résonance, la condition exigée par les sociétés de classification est la suivante :

$$\Omega \geq 1.15\omega_{propre} \quad \text{ou} \quad \Omega \leq 1.15\omega_{propre}$$

Exercice d'application

Lors de l'exploitation d'un groupe de machines, on a enregistré de fortes vibrations de torsion à la vitesse de rotation 230 rad/s, (figure III. 6).

-Citer les possibilités permettant d'éviter ce phénomène.

-On opte pour un amortisseur type gomme, trouver sa rigidité adéquate.

Données :

J_1 [kgm^2] - moment d'inertie de la machine motrice,

J_2 [kgm^2] - moment d'inertie de la machine réceptrice,

$C_1 = \frac{GI_0}{L}$ [Nm/rad] - la rigidité à la torsion de l'arbre.

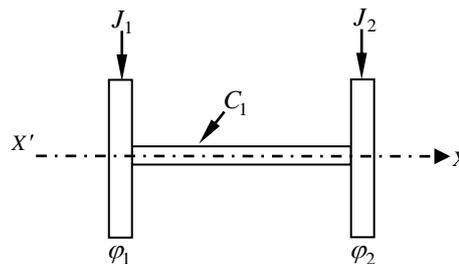


Figure III. 6: Modèle discret d'un groupe de machine.

Solution de l'exercice

C'est un système discret à deux degrés de liberté φ_1 et φ_2

Energie cinétique du système :

$$E_c = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2$$

Energie potentielle du système :

$$E_p = \frac{1}{2} C_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2.),$$

avec

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 - \left(\frac{1}{2} C_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \right)$$

$$i = 1) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = J_1 \dot{\varphi}_1, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = J_1 \ddot{\varphi}_1 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \right) = -C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases}$$

donc

$J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ est la première équation différentielle

$$i = 2) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = J_2 \dot{\varphi}_2, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = J_2 \ddot{\varphi}_2 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \right) = -C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) (-1) = -C_1 (\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases}$$

donc

$J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ est la deuxième équation différentielle

Le système d'équations différentielle régissant les vibrations de torsion est donné par:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Nous avons un système de deux équations différentielles couplées, la solution est :

$$\varphi_i = A_i \sin \omega t \quad (2)$$

$$\dot{\varphi}_i = \omega A_i \cos \omega t \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi}_i = -\omega^2 A_i \sin \omega t \quad (4)$$

Après substitution des équations (2) et (4) dans le système d'équations (1), on obtient

$$\begin{cases} J_1 (-\omega^2 A_1 \sin \omega t) + C_1 (A_1 - A_2) \sin \omega t = 0 \\ J_2 (-\omega^2 A_2 \sin \omega t) + C_1 (A_2 - A_1) \sin \omega t = 0 \end{cases} \quad (5)$$

On simplifie par $\sin \omega t$, et on obtient :

$$\begin{cases} -J_1 \omega^2 A_1 + C_1 (A_1 - A_2) = 0 \\ -J_2 \omega^2 A_2 + C_1 (A_2 - A_1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Le système d'équations (6) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} -J_1\omega^2 + C_1 & -C_1 \\ -C_1 & -J_2\omega^2 + C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Le déterminant du système est

$$\det = (-J_1\omega^2 + C_1)(-J_2\omega^2 + C_1) - C_1^2 = [J_1J_2\omega^4 - \omega^2C_1(J_1 + J_2)] + C_1^2 - C_1^2$$

$$\det = \omega^2 [J_1J_2\omega^2 - C_1(J_1 + J_2)]$$

$$\det = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0$$

ou

$$J_1J_2\omega^2 - C_1(J_1 + J_2) = 0 \quad \text{donc} \quad \omega_{prop.} = \sqrt{\frac{C_1(J_1 + J_2)}{J_1J_2}}$$

Puisqu'on a enregistré de fortes vibrations avec la vitesse d'exploitation $\Omega = 230 \text{ rad/s}$, donc cette valeur est une fréquence propre du système donc :

$$\omega_{prop.} = \sqrt{\frac{C_1(J_1 + J_2)}{J_1J_2}} = 230 \text{ rad/s}$$

Premier cas:

Pour éviter ce problème, le groupe de machine doit fonctionner à une vitesse $\Omega \geq (1.15)230 \text{ rad/s}$ ou $\Omega \leq (0.85)230 \text{ rad/s}$

par conséquent

$$\Omega \geq (1.15) \frac{230.60}{6.28} = 2527.070 \text{ tours/min} \quad \text{ou} \quad \Omega \leq (0.85) \frac{230.60}{6.28} = 1867.834 \text{ tours/min.}$$

Deuxième cas:

Si on est obligé de faire fonctionner le système à la vitesse $\Omega = 230 \text{ rad/s}$, on doit changer la fréquence propre du système, ce qui veut dire, changer un paramètre dynamique du système (la rigidité C_1 du système), qui vérifie la condition :

$$230 \geq (1.15)\tilde{\omega}_{prop.}; \quad (\tilde{\omega}_{prop.} \text{ est la nouvelle valeur de la fréquence propre qu'on veut avoir})$$

$$\tilde{\omega}_{prop.} = \sqrt{\frac{\tilde{C}_1(J_1 + J_2)}{J_1J_2}}; \quad (\tilde{C}_1 \text{ est la nouvelle valeur de la rigidité de l'arbre qu'on doit avoir})$$

donc

$$\begin{aligned}
 230 &= \sqrt{\frac{C_1(J_1+J_2)}{J_1J_2}} \geq (1.15) \sqrt{\frac{\tilde{C}_1(J_1+J_2)}{J_1J_2}} \Rightarrow \frac{C_1(J_1+J_2)}{J_1J_2} \geq (1.15)^2 \frac{\tilde{C}_1(J_1+J_2)}{J_1J_2} \\
 &\Rightarrow C_1 \geq (1.15)^2 \tilde{C}_1 \\
 &\Rightarrow \frac{GI_0}{L} \geq (1.15)^2 \frac{\tilde{GI}_0}{L} \\
 &\Rightarrow I_0 \geq (1.15)^2 \tilde{I}_0 \\
 &\Rightarrow \frac{\pi d^4}{32} \geq (1.15)^2 \frac{\pi \tilde{d}^4}{32} \\
 &\tilde{d}^4 \leq \frac{d^4}{(1.15)^2}
 \end{aligned}$$

$\tilde{d} = d \sqrt{\frac{1}{1.15}}$, on doit donc diminuer la valeur du diamètre de l'arbre.

\tilde{d} est la valeur limite que doit avoir le diamètre afin d'avoir

$$\Omega = 230 \geq (1.15) \omega_{propre}$$

On peut aussi éviter la résonance en faisant fonctionner le groupe de machine à une des vitesses inférieures à la fréquence propre. Avec des calculs similaires on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned}
 230 &= \sqrt{\frac{C_1(J_1+J_2)}{J_1J_2}} \leq (0.85) \sqrt{\frac{\tilde{C}_1(J_1+J_2)}{J_1J_2}} \Rightarrow \frac{C_1(J_1+J_2)}{J_1J_2} \leq (0.85)^2 \frac{\tilde{C}_1(J_1+J_2)}{J_1J_2} \\
 &\Rightarrow C_1 \leq (0.85)^2 \tilde{C}_1 \\
 &\Rightarrow \frac{GI_0}{L} \leq (0.85)^2 \frac{\tilde{GI}_0}{L} \\
 &\Rightarrow I_0 \leq (0.85)^2 \tilde{I}_0 \\
 &\Rightarrow \frac{\pi d^4}{32} \leq (0.85)^2 \frac{\pi \tilde{d}^4}{32} \\
 &\tilde{d}^4 \geq \frac{d^4}{(0.85)^2}
 \end{aligned}$$

$\tilde{d} = d \sqrt{\frac{1}{0.85}}$, on doit donc augmenter la valeur du diamètre de l'arbre.

De cette façon, on a changé la fréquence propre. Cette solution est appelée en langue anglaise, shifting from resonance to the **left side**, ou shifting from resonance to the **right side**. La fréquence d'exploitation est supérieure (ou inférieure) à la fréquence propre du système. Le système dans ce cas est dit **flexible** ou **rigide** selon la résolution choisie de diminuer ou d'augmenter le diamètre.

Troisième cas:

On veut garder la vitesse d'exploitation $\Omega = 230 \text{ rad/s}$ et ne veut pas changer le diamètre. Dans ce cas il faut calculer la rigidité $C_{amor.}$ de l'amortisseur qu'on doit ajouter au système, figure (I-7) :

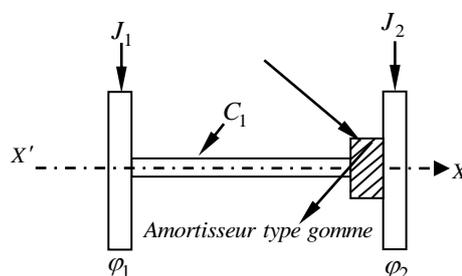


Figure (III. 7).

Le système équivalent est le suivant :

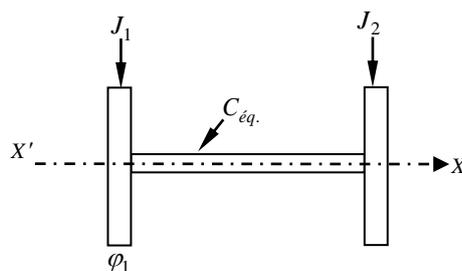


Figure III. 8: Modèle équivalent.

La rigidité équivalente est :

$$\frac{1}{C_{eq.}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{amor.}}$$

$$\Rightarrow C_{eq.} = \frac{C_1 C_{amor.}}{C_1 + C_{amor.}}$$

Dans ce cas la fréquence propre du système est :

$$\omega_{prop.} = \sqrt{\frac{C_{eq.}(J_1 + J_2)}{(J_1 J_2)}}$$

Pour éviter la résonance il faut avoir

$$\begin{aligned} \Omega = 230 &\geq (1.15)\omega_{prop.} \\ \Rightarrow 230 &\geq (1.15)\sqrt{\frac{C_{eq.}(J_1 + J_2)}{(J_1 J_2)}} \\ \Rightarrow (230)^2 &\geq (1.15)^2 \frac{C_{eq.}(J_1 + J_2)}{(J_1 J_2)} \Rightarrow C_{eq.} \leq \frac{J_1 J_2 (230)^2}{(1.15)^2 (J_1 + J_2)} \end{aligned}$$

$$\text{On prend } C_{eq.} = \frac{J_1 J_2 (230)^2}{(1.15)^2 (J_1 + J_2)}$$

Connaissant la rigidité $C_{eq.}$, on peut déduire la rigidité $C_{amor.}$ de l'amortisseur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{eq.}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{amor.}} \Rightarrow \frac{1}{C_{amor.}} = \frac{1}{C_{eq.}} - \frac{1}{C_1} \\ \Rightarrow C_{amor.} &= \frac{C_{eq.} C_1}{C_1 - C_{eq.}} \end{aligned}$$

IV. Vibrations des Systèmes Continus

Les éléments de construction sous forme de différents types de poutres, plaques etc... exécutent souvent des mouvements vibratoires. Dans ces éléments, la masse est répartie habituellement de façon continue, tandis que les liaisons élastiques en font un tout indissociable. Le problème de vibrations des systèmes à masse répartie (appelés systèmes continus) est plus difficile que l'analyse des systèmes à masses concentrées, parce qu'on doit résoudre des équations différentielles à dérivées partielles.

Ces systèmes possèdent une distribution continue de la masse et de l'élasticité. Pour simplifier les calculs, ils sont considérés comme homogènes, isotropiques, et obéissant à la loi de Hooke avec:

σ : Contrainte normale;

E : module de Young,

ε : Déformation

Le calcul de la position de chaque particule dans le corps élastique exige une infinité de coordonnées, ainsi chaque corps possède un nombre infini de DDL. L'avantage de ce type de modèles réside dans l'analyse directe de la structure à étudier sans avoir recours à sa modification (discrétisation). On se limite dans ce chapitre à discuter les éléments de base de ce domaine.

IV. 1. Vibrations longitudinales (axiales) d'une poutre

On considère la poutre homogène simple, à section constante A , réalisée avec un matériau linéaire et élastique, à coefficient d'élasticité longitudinale constant E et masse volumique ρ (figure IV.1). On suppose que le mouvement des sections de la poutre s'effectue suivant la direction de l'axe x . Le déplacement d'une section quelconque de la poutre est fonction de deux variables qui sont la coordonnée x et le temps t .

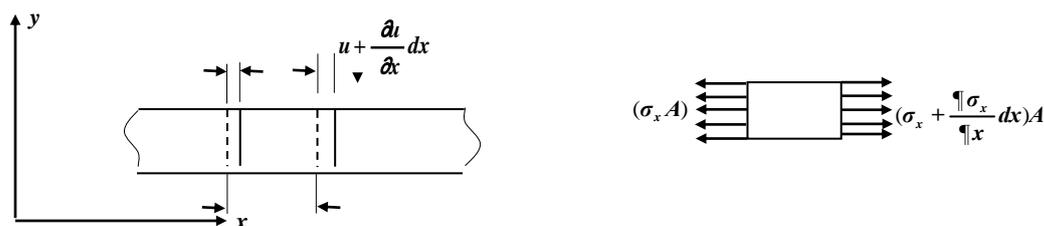


Figure IV. 1.

Sur l'élément de longueur dx , séparé de la poutre, agisse à l'instant donné t , d'un côté la force $(\sigma_x A)$, et de l'autre côté la force $(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx)A$. L'équation de mouvement de l'élément est

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx)A - (\sigma_x A)$$

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx A ; \quad u = u(x, t) \quad (IV.1a)$$

Après simplification, on obtient

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

La déformation relative dans la direction de l'axe x de la poutre est

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

cette déformation s'exprime selon la loi de Hooke par

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (IV.1b)$$

après remplacement de l'équation (IV.1b) dans l'équation du mouvement (IV.1a), on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (IV.2)$$

avec

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (IV.3)$$

L'équation (IV.2) est appelée l'équation d'onde, elle est vérifiée par toute équation ayant la forme

$$u = f_1(x + ct) + f_2(x - ct) \quad (IV.4)$$

(ceci peut être vérifié par substitution dans l'équation). où les composantes f_1 et f_2 représentent l'onde, se déplaçant dans la poutre dans deux directions opposées. c est la vitesse. Cette vitesse dépend des constantes du matériau qui sont le module de Young E et la masse volumique ρ .

Pour analyser les vibrations longitudinales de la poutre, il faut résoudre l'équation (IV.2). Pour y parvenir, on applique la méthode dite de séparation des variables (méthode de Fourier), cherchant la solution sous forme du produit de deux fonctions à une seule variable chacune. Le produit :

$$T(t).X(x).$$

On écrit donc

$$u = u(x, t) = T(t)X(x) \quad (\text{IV.5})$$

Après substitution de l'équation (IV.5) dans l'équation (IV.2), on obtient

$$\ddot{T}(t)X(x) - c^2T(t)X''(x) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

où

$$\ddot{T}(t) = \frac{d^2T(t)}{dt^2} ; \quad X''(x) = \frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

En considérant une vibration harmonique, c-a-d,

$$T(t) = \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{T}(t) = \omega \cos \omega t \quad \text{et} \quad \ddot{T}(t) = -\omega^2 \sin \omega t$$

et en séparant les variables, l'équation (IV.6) s'écrit sous la forme

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 \quad (\text{IV.7})$$

A partir de l'équation (IV.7), on obtient les deux équations différentielles ordinaires suivantes

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Les intégrales générales des équations (IV.8) et (IV.9) donnent respectivement les fonctions

$$T(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (\text{IV.10})$$

$$X(x) = B_1 \cos \frac{\omega x}{C} + B_2 \sin \frac{\omega x}{C} \quad (\text{IV.11})$$

où

A_1, A_2 – sont des constantes définies par les conditions initiales,

B_1, B_2 – des constantes définies par les conditions aux limites.

Exercice d'application

Etudier les vibrations longitudinales naturelles (libres), de la poutre homogène simple encastrée-libre, de longueur l , schématisée sur la figure (IV.2).

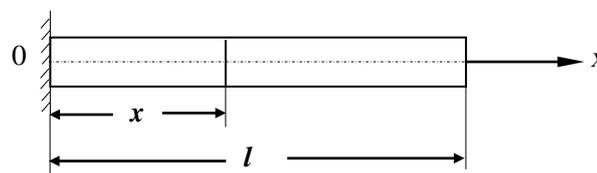


Figure IV. 2: Poutre homogène à section constante.

$$X(x) = B_1 \cos \frac{\omega x}{C} + B_2 \sin \frac{\omega x}{C}$$

Les conditions aux limites sont

$$\text{à } x=0, \quad \text{on a } u(0,t)=0$$

$$\text{à } x=l, \quad \text{on a : l'effort normal } N_{x=l} = 0 \text{ donc } s_{x=l} = 0 \quad \text{P}$$

$$\varepsilon_{x=l} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=l} = 0$$

Tenant compte de ces conditions aux limites dans les équations (IV.5), on obtient

$$X(0) = B_1 = 0 \tag{IV.12}$$

$$\begin{aligned} X(l) &= -\frac{\omega}{C} B_1 \sin \frac{\omega l}{C} + \frac{\omega}{C} B_2 \cos \frac{\omega l}{C} = 0 \\ \Rightarrow -\omega B_1 \sin \frac{\omega l}{C} + \omega B_2 \cos \frac{\omega l}{C} &= 0 \end{aligned}$$

Par résolution de ce système d'équations on obtient :

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ \cos \frac{\omega l}{C} = 0 \end{cases} \tag{IV.13}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_i &= \frac{k\pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2l} \quad \text{avec } k = 1, 3, 5, \dots, \\ & \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Les deux premières basses fréquences propres sont :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_1 &= \frac{\pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2l} \quad \text{correspondant à } k = 1 \\ \omega_2 &= \frac{3\pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2l} \quad \text{correspondant à } k = 3 \end{aligned}$$

L'équation (IV.14) démontre le nombre infini de fréquence propres des vibrations naturelles (libres) de la poutre, qui représente un système à une infinité de degrés de liberté. En attribuant les valeurs de ω_i , on a les constantes correspondantes A_{1i} et A_{2i} dans l'équation (IV.10). La sommation des différentes solutions nous donne la solution générale des vibrations libres de la poutre encastree-libre sous la forme

$$u = \sum_{i=1,3,5,\dots} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left(A_{1i} \cos \frac{i\pi ct}{2l} + A_{2i} \sin \frac{i\pi ct}{2l} \right) \quad (\text{IV.15})$$

Dans l'équation (IV.15), la constante B_2 n'apparait pas, car on considère qu'elle est incluse dans les constantes A_{1i} et A_{2i} . La constante B_1 étant déjà trouvée égale à zéro (voir Eq. IV.13). Pour trouver les constantes A_{1i} et A_{2i} , il faut tenir compte des conditions initiales. Si la poutre a été initialement pendant un bref moment, soumise à une force de traction \mathbf{P} , provoquant son allongement unitaire $\varepsilon_0 = \frac{P}{EA}$, les conditions initiales peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$\text{à } t=0 \quad \text{on a } u = \varepsilon_0 x \quad (\text{IV.16})$$

$$\text{quand } t=0 \quad \text{on a } \dot{u} = \frac{du}{dt} = 0$$

A partir de la première condition de l'équation (IV.16), on obtient

$$\sum_{i=1,3,5,\dots} A_{1i} \sin \frac{i\pi x}{2l} = \varepsilon_0 x \quad (\text{IV.17})$$

la deuxième condition de l'équation (IV.16) est vérifiée lorsque $A_{2i} = 0$.

Les constantes A_{1i} sont déterminées comme coefficients du développement en série de Fourier, de la fonction $f(x) = \varepsilon_0 x$, on obtient

$$A_{1i} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{2\varepsilon_0}{l} \int_0^l x \sin \frac{i\pi x}{2l} dx = \frac{8\varepsilon_0 l}{i^2 \pi^2} (-1)^{\frac{i-1}{2}}$$

on remplace la valeur de A_{1i} et on obtient finalement la vibration \mathbf{u} sous forme de série de Fourier

$$u = u(x,t) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{i\pi ct}{2l} \quad (IV.18)$$

Sur les figures (IV.3) sont représentées les formes des vibrations pour $i=1, 3$ et 5 . Avec l'accroissement de l'indice i , les formes des vibrations correspondantes diminuent très vite. Ceci résulte de l'équation (IV.18), dans laquelle, le coefficient de l'amplitude est inversement proportionnel à i^2 ,

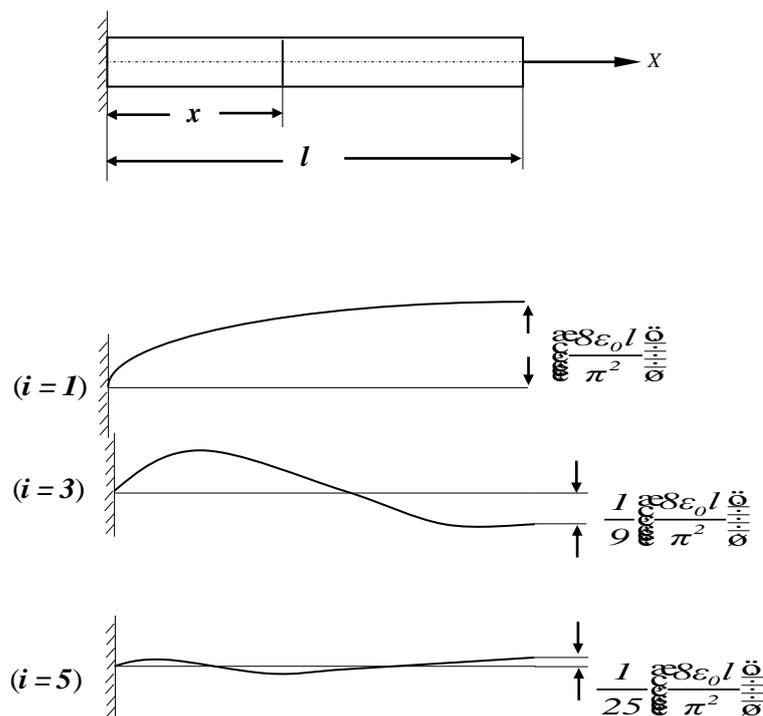


Figure IV.3: Les trois premiers modes ou formes des vibrations.

IV. 2. Vibrations transversales des poutres

IV. 2. 1. Modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli

Considérons les forces et les moments agissant sur un élément de poutre comme indiqué sur la figure IV. 4, [4]

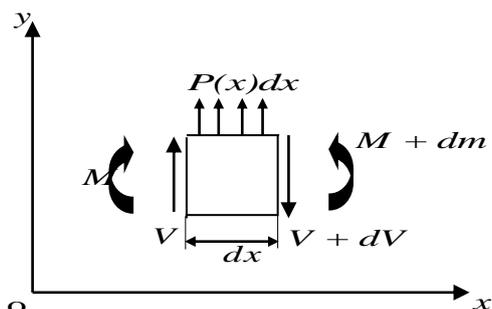


Figure (IV.4).

V et M représentent respectivement, l'effort tranchant et le moment fléchissant, $P(x)$ représente la charge de la poutre par unité de longueur (charge répartie).

La sommation des forces sur l'axe des (y) implique:

$$dV - P(x).(dx) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

La sommation des moments donne

$$dM - V.dx - \frac{1}{2} P(x).(dx)^2 = 0 \quad (\text{IV.20})$$

de l'équation (IV.19), on a

$$\frac{dV}{dx} = P(x)$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (\text{IV.21})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = P(x) \quad (\text{IV.22})$$

D'après la théorie de flexion des poutres [4] on a

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{IV.23})$$

En remplaçant (IV.23) dans (IV.22), on obtient:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2y}{dx^2}) = P(x) \quad (\text{IV.24})$$

Pour une poutre vibrant autour de sa position d'équilibre, sous l'action de son propre poids, la charge par unité de longueur est égale à la charge d'inertie due à sa masse et son accélération.

Puisque la force d'inertie a la même direction que $P(x)$ on obtient (on supposant un mouvement harmonique):

$$P(x) = \frac{w}{g} \omega^2 y \quad (\text{IV.25})$$

ou $\frac{w}{g}$ est la masse par unité de longueur.

En utilisant (IV.25), l'équation de la vibration transversale se réduit à

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 y}{dx^2}) - \frac{w}{g} \omega^2 y = 0 \quad (\text{IV.26})$$

Dans le cas où la rigidité à la flexion est constante, définie par le produit EI , l'équation (IV.24) peut être écrite comme suit:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{w}{g} \omega^2 y = 0 \quad (\text{IV.27})$$

En introduisant la constante $\lambda^4 = \frac{w \cdot \omega^2}{EI \cdot g}$, on obtient l'équation des vibrations:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \lambda^4 y = 0 \quad (\text{IV.28})$$

Dont la solution générale est la suivante :

$$y = y(x) = a.ch\lambda.x + b.sh\lambda.x + c.\cos \lambda.x + d \sin \lambda.x \quad (\text{IV.29})$$

IV. 2. 2. Résolution de l'équation générale (cas d'une poutre sur deux appuis simples)

Considérant la poutre à section transversale constante d'aire A , reposant sur deux appuis à ses extrémités (figure IV.5)

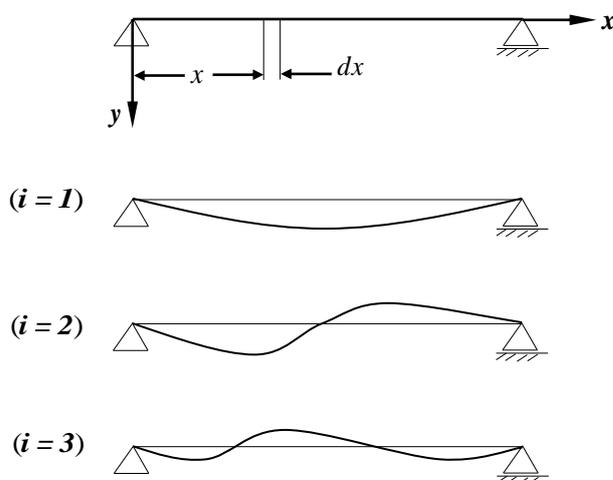


Figure IV. 5: Poutre sur deux appuis simples et les modes propres de ses vibrations transversales.

Dans le cas d'une sollicitation statique $q(N/m)$, l'équation de la ligne de flexion est donnée par la résistance des matériaux

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (IV.30)$$

où EI_z – désigne la rigidité à la flexion verticale de la poutre. Dans le cas de vibration de la poutre, la flexion y est fonction de deux variables : l'abscisse x et le temps t .

En appliquant le principe de D'Alembert, on peut examiner les vibrations transversales de la poutre, comme une poutre sollicitée par un système de forces d'inertie. En considérant l'hypothèse de petite flexion de la poutre, on prendra en compte la force d'inertie due à

l'accélération $\ddot{y} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ dans le sens de l'axe y . La masse élémentaire dm de l'élément de poutre de longueur dx et de masse volumique constante ρ est:

$$dm = \rho A dx$$

la valeur de la force d'inertie dF de l'élément est donnée par la formule suivante

$$dF = -\ddot{y} dm = -\rho A \ddot{y} dx$$

L'intensité de la charge de cette force d'inertie est

$$q_F = \frac{dF}{dx} = -\rho A \ddot{y}$$

On remplace $q = q_F$ dans l'équation (IV-30) et on change la dérivée ordinaire en dérivée partielle, on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0; \quad y = y(x, t) \quad (\text{IV.31})$$

avec

$$a^2 = \frac{EI_z}{A\rho}.$$

On cherche la solution de l'équation (IV.31) sous la forme :

$$y = y(x, t) = X(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (\text{IV.32})$$

où:

$$X = X(x).$$

Si l'on remplace l'équation (IV.32) dans l'équation (IV-31), on obtient l'équation différentielle de la fonction de forme $X=X(x)$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \lambda^4 X = 0 \quad (\text{IV.33})$$

où:

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\omega^2 A \rho}{EI_z}.$$

La solution générale de l'équation (IV.33) a la forme

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x \quad (\text{IV.34})$$

Les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 s'obtiennent à partir des conditions aux limites du problème.

Pour le cas la poutre sur appuis simples, schématisée sur la figure (IV.5), la flèche y et le moment fléchissant $M = -EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ devraient être nuls. Par conséquent on a les conditions aux limites suivantes:

a) à $x=0$, on a $X(x=0) = 0$ et $\left. \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$

b) à $x=l$, on a $X(x=l) = 0$ et $\left. \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right|_{x=l} = 0$

Les conditions (a) nous donnent

$$C_2 = C_4 = 0$$

Les conditions (b) conduisent au système d'équation

$$\begin{cases} C_1 \sin \lambda l + C_3 \sinh \lambda l = 0 \\ -C_1 \sin \lambda l + C_3 \sinh \lambda l = 0 \end{cases}$$

Pour que le système d'équations obtenu ait une solution non triviale, il faut que le déterminant de ce système soit nul, donc

$$\begin{vmatrix} \sin \lambda l & \sinh \lambda l \\ -\sin \lambda l & \sinh \lambda l \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$\sin \lambda l \cdot \sinh \lambda l = 0 \quad (\text{IV.35})$$

Vu que $\sinh \lambda l = 0$ seulement lorsque $\lambda l = 0$, ce qui implique $\omega = 0$ (la solution triviale), il faut donc prendre en considération

$$\sin \lambda l = 0 \quad (\text{IV.36})$$

L'équation (IV.36) est vérifiée lorsque $\alpha_j l$ prend les valeurs suivantes

$$\lambda_j l = j\pi \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \dots$$

Ces valeurs nous permettent de déduire les fréquences propres des vibrations transversale naturelles de la poutre schématisée sur la figure (IV.5), qui sont

$$\lambda = \omega^{1/2} \left(\frac{A\rho}{EI_z} \right)^{1/4} \Rightarrow \omega = \lambda^2 \left(\frac{EI_z}{A\rho} \right)^{1/2}$$

pour $\lambda_j = \frac{j\pi}{l}$, on trouve

$$\omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{A\rho}} \quad (\text{IV.37})$$

Sur la figure (IV.5) sont aussi représentées les trois premières formes de vibrations naturelles.

Exercice d'application

Déterminer la basse fréquence des vibrations naturelles de la poutre à section constante, encastree-libre, schématisée sur la figure (IV.6)

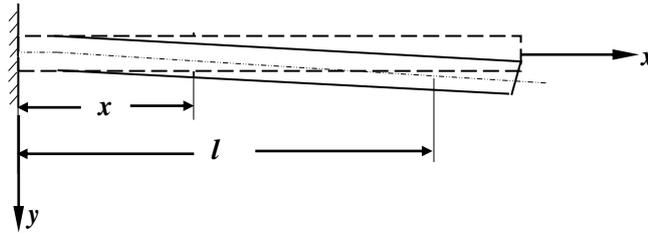


Figure IV. 6: Poutre encastree-libre vibrante.

La solution générale concernant la fonction de forme $X(x)$ est donn e par l'équation (IV.34), on a :

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x$$

Les conditions aux limites pour la fonction de forme sont :

a) - à la section de l'encastrement, la flèche est nulle aussi bien que la rotation de la section par flexion, donc :

$$\text{à } x=0 \text{ on a } X(x=0) = 0 \text{ et } \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = X'(0) = 0$$

b) - à l'extrémité libre de la poutre, le moment fléchissant $M = -EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ainsi que l'effort

tranchant $T = \frac{\partial M}{\partial x} = -EI_z \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ sont nuls, donc :

$$\text{à } x=l \text{ on a: } \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \text{ et } \frac{d^3 X}{dx^3} = 0$$

A partir de ces conditions aux limites, on obtient l'équation des fréquences propres suivante :

$$\cosh \lambda l \cdot \cos \lambda l = -1$$

qui doit être v rifi e pour que la solution du problème ne soit pas triviale. La plus petite racine de cette équation est

$$\lambda_1 l = 1.875$$

D'où l'on obtient la valeur de la basse fréquence propre des vibrations transversales de la poutre sch matis e sur la figure (IV-6)

$$\omega_1 = \frac{3.52}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}$$

Pour le cas de la poutre sur appuis simples, schématisée sur la **figure (IV-5)**, la flèche y et le moment fléchissant $M = -EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ devraient être nuls au niveau des appuis. Par conséquent on a les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} \text{a) quand } x=0 \text{ on a } X(x=0) = 0 \text{ et } \left. \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \\ \text{b) quand } x=l \text{ on a } X(x=l) = 0 \text{ et } \left. \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 \end{aligned}$$

Les conditions (a) nous donnent:

$$C_2 = C_4 = 0$$

Les conditions (b) conduisent au système d'équation:

$$\begin{cases} C_1 \sin \lambda l + C_3 \sinh \lambda l = 0 \\ -C_1 \sin \lambda l + C_3 \sinh \lambda l = 0 \end{cases}$$

Pour que le système d'équations obtenu ait une solution non triviale, il faut que le déterminant de ce système soit nul, donc

$$\begin{vmatrix} \sin \lambda l & \sinh \lambda l \\ -\sin \lambda l & \sinh \lambda l \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\sin \lambda l \cdot \sinh \lambda l = 0 \quad (\text{c})$$

Vu que $\sinh \lambda l = 0$ seulement lorsque $\lambda l = 0$, ce qui implique $\omega = 0$ (la solution triviale), il faut donc prendre en considération

$$\sin \lambda l = 0 \quad (\text{d})$$

L'équation (d) est vérifiée lorsque $\lambda_j l$ prend les valeurs suivantes

$$\lambda_j l = j\pi \text{ où } j=1, 2, \dots$$

Ces valeurs nous permettent de déduire les fréquences propres des vibrations transversales naturelles de la poutre schématisée sur la figure (IV-5), qui sont

$$\omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{A\rho}} \quad (\text{e})$$

Sur la **figure (IV.5)** sont aussi représentées les trois premières formes (modes) de vibrations naturelles transversales.

IV. 2. 3. Méthode de Rayleigh

La méthode de Rayleigh est une méthode énergétique appliquée au système conservatif, utilisée pour le calcul approximatif de la basse fréquence propre des vibrations naturelles.

Dans le cas des vibrations transversales (vibrations de flexion) d'une poutre de rigidité EI_z , l'énergie élastique V tenant compte uniquement du moment fléchissant M est donnée par la formule

$$V = \int_0^l \frac{M^2}{2EI_z} dx \quad (\text{IV.38})$$

qui après substitution de l'expression du moment fléchissant dans l'équation (IV.23) on obtient

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z (y'')^2 dx$$

Sachant que la vibration $y = y(x, t) = X(x).T(t)$, avec $T(t) = \sin \omega t$, l'énergie élastique maximal V_{max} correspond à $T(t) = \sin \omega t = 1$ on aura :

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z (X''(x))^2 dx \quad (\text{IV.39})$$

La masse élémentaire d'un tronçon de longueur dx est

$$dm = \rho dv = \rho A dx$$

cette masse élémentaire a pour énergie cinétique

$$\begin{aligned} dE_c &= \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial (X(x)T(t))}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} dm (X(x))^2 \left(\frac{dT(t)}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} dm (X(x))^2 (\dot{T}(t))^2 = \frac{1}{2} dm (X(x))^2 (\omega \cos \omega t)^2 = \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

L'énergie cinétique maximale de cette masse élémentaire dm correspond à par $\cos \omega t = 1$, on obtient

$$dE_{c_{max}} = \frac{1}{2} dm (X(x))^2 \omega^2$$

d'où l'énergie cinétique maximale de poutre

$$E_{c\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (X(x))^2 \omega^2 dx \quad (\text{IV.41})$$

Dans l'équation (IV.41), on a remplacé dm par $\rho A dx$. Pour le système conservatif, on a

$$E_{c\max} = V_{\max}$$

d'où l'expression de la fréquence propre

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI_z (X''(x))^2 dx}{\int_0^l \rho A (X(x))^2 dx} \quad (\text{IV.42})$$

NB : Avant d'appliquer la méthode de Rayleigh, il faut trouver la fonction de forme $X(x)$, correspondant à la basse (première) fréquence propre, donc correspondant au premier mode naturel (propre). La déformée statique est considérée comme la première déformée modale.

Exercice d'application de la méthode de Rayleigh

Déterminer la basse fréquence des vibrations transversales libres, de la poutre encastree à son extrémité gauche et supportant une masse M à son extrémité droite (figure IV.7).

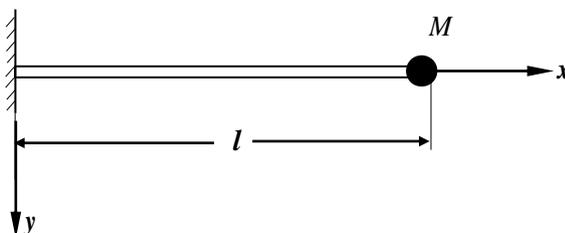


Figure IV. 7: Poutre supportant une masse à son extrémité libre.

Solution

La figure (IV.8), schématise la déformée statique sous l'effet du poids P de la masse M . Dans la méthode de Rayleigh, cette déformée statique est considérée comme le premier mode (première déformée modale) des vibrations de flexion appelées aussi vibrations transversales,

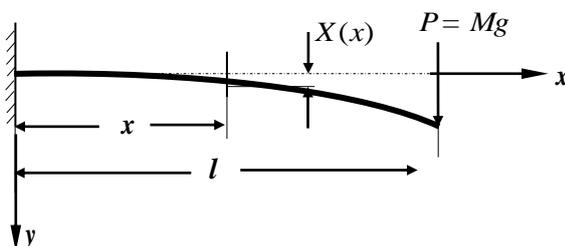


Figure IV. 8: Poutre déformée statiquement sous l'effet du poids de la masse M .

On utilise donc la résistance des matériaux pour trouver l'équation de la ligne de flexion, figure (IV.9) :

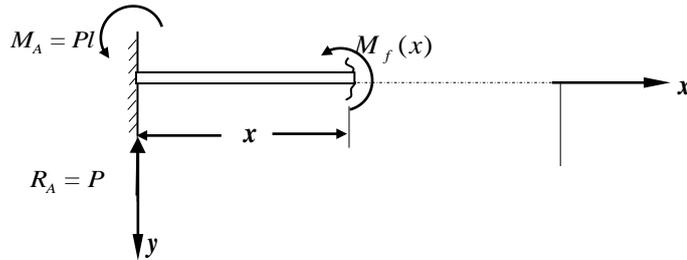


Figure IV. 9: Forces et moments agissant sur la section d'abscisse (x) .

Des équations d'équilibre résultent les égalités suivantes :

$$R_A = P, \quad M_A = Pl$$

-Le moment fléchissant à la distance x de l'encastrement est :

$$M_f(x) = R_A x - Pl \quad (1)$$

Dans le cas d'une poutre simple (de Euler-Bernouli) de rigidité EI_z , avec l'axe y dirigé vers le bas, l'équation de la courbure de flexion sans tenir compte de l'effort tranchant est :

$$EI_z X''(x) = -M_f(x) \quad (2)$$

Tenant compte de l'équation (1) on obtient :

$$X''(x) = \frac{1}{EI_z} (Pl - R_A x) \quad (3)$$

L'équation (IV.41) nous donne :

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z (X''(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z \left(\frac{1}{EI_z} (Pl - R_A x) \right)^2 dx$$

On obtient

$$V_{\max} = \frac{I}{2EI_z} \int_0^l (Pl - R_A x)^2 dx$$

Tenant compte de $R_A = P$, on obtient

$$V_{max} = \frac{P^2 l^3}{6EI_z}$$

Il reste à trouver la fonction de forme $X(x)$ pour trouver la valeur de l'énergie cinétique totale

$$E_{c\max\text{ totale}} = E_{c\max\text{ poutre}} + E_{c\max\text{ masse } M}$$

$$E_{c\max\text{ poutre}} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (X(x))^2 \omega^2 dx$$

$$E_{c\text{ masse } M} = \frac{1}{2} M V_M^2, \quad V_M \text{ représente la vitesse de la masse } M$$

$$V_M = \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)_{x=l} = \left(\frac{\partial (X(x)T(t))}{\partial t} \right)_{x=l} = \left(X(x) \frac{dT(t)}{dt} \right)_{x=l} = \left(X(x) \frac{d \sin \omega t}{dt} \right)_{x=l}$$

$$V_M = (X(x) \omega \cos \omega t)_{x=l} = X(l) \omega \cos \omega t$$

L'énergie cinétique maximale de la masse M correspond à $\cos \omega t = 1$, on trouve :

$$E_{c\max\text{ masse } M} = \frac{1}{2} M (X(l) \omega)^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 (X(l))^2 \quad (4)$$

L'intégration de l'équation (3) nous donne :

$$X(x) = \frac{1}{EI_z} (Plx - R_A \frac{x^2}{2}) + C$$

et

$$X(x) = \frac{1}{EI_z} (Pl \frac{x^2}{2} - R_A \frac{x^3}{6}) + Cx + D \quad (5)$$

A l'encastrement à la limite gauche de la poutre, on a $X'(0) = 0$ et $X(0) = 0$, par conséquent :

$$C = 0 \quad \text{et} \quad D = 0$$

d'où:

$$E_{c\max\text{ poutre}} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (X(x))^2 \omega^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \omega^2 \left(Pl \frac{x^2}{2EI_z} - R_A \frac{x^3}{6EI_z} \right)^2 dx$$

Avec $R_A = P$ on obtient

$$\begin{aligned}
 E_{c\max\text{ poutre}} &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \omega^2 \left(Pl \frac{x^2}{2EI_z} - P \frac{x^3}{6EI_z} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\rho A}{(EI_z)^2} \omega^2 \int_0^l \left(P^2 l^2 \frac{x^4}{4} - 2P^2 l \frac{x^5}{12} + P^2 \frac{x^6}{36} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho A}{(EI_z)^2} \omega^2 \left(P^2 l^2 \frac{x^5}{20} - P^2 l \frac{x^6}{36} + P^2 \frac{x^7}{36.7} \right)_0^l = \frac{1}{2} \frac{\rho A}{(EI_z)^2} \omega^2 \left(P^2 \frac{l^7}{20} - P^2 \frac{l^7}{36} + P^2 \frac{l^7}{36.7} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{(EI_z)^2} \omega^2 \left(P^2 \frac{l^6}{20} - P^2 \frac{l^6}{36} + P^2 \frac{l^6}{36.7} \right) = \frac{1}{2} \frac{m}{(EI_z)^2} \omega^2 \left(P^2 \frac{l^6}{20} - P^2 \frac{l^6}{36} + P^2 \frac{l^6}{36.7} \right)
 \end{aligned}$$

$m = \rho Al$ représente la masse de la poutre.

On remplace $x=l$ dans l'équation (5) et on obtient :

$$X(l) = \frac{1}{EI_z} \left(Pl \frac{l^2}{2} - P \frac{l^3}{6} \right) = \frac{Pl^3}{3EI_z}$$

On peut maintenant trouver l'énergie cinétique maximale de la masse M

$$\begin{aligned}
 E_{c\max\text{ masse } M} &= \frac{1}{2} M (X(l)\omega)^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 (X(l))^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 M \left(\frac{Pl^3}{3EI_z} \right)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 M \frac{P^2 l^6}{9(EI_z)^2}
 \end{aligned}$$

Sachant que le système est considéré conservatif, on a

$$V_{\max} = E_{c\max\text{ totale}} = E_{c\max\text{ poutre}} + E_{c\max\text{ masse } M}$$

donc

$$\frac{P^2 l^3}{6EI_z} = \frac{1}{2} \frac{m}{(EI_z)^2} \omega^2 \left(P^2 \frac{l^6}{20} - P^2 \frac{l^6}{36} + P^2 \frac{l^6}{36.7} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 M \frac{P^2 l^6}{9(EI_z)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{P^2 l^3}{6EI_z} &= \frac{1}{2} \frac{m}{(EI_z)^2} \omega^2 \left(P^2 \frac{l^6}{20} - P^2 \frac{l^6}{36} + P^2 \frac{l^6}{36.7} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 M \frac{P^2 l^6}{9(EI_z)^2} \\
 \omega^2 &= \frac{\frac{P^2 l^3}{3EI_z}}{\frac{m}{(EI_z)^2} \left(P^2 \frac{l^6}{20} - P^2 \frac{l^6}{36} + P^2 \frac{l^6}{36.7} \right) + M \frac{P^2 l^6}{9(EI_z)^2}}
 \end{aligned}$$

IV. 2. 4. Méthode de Verechagine

Dans l'exercice précédent, on avait l'équation de flexion

$$EI_z X''(x) = -M_f(x)$$

donc

$$EI_z X(x) = -\int_0^x \int_0^x M_f(x) dx dx \quad \text{P} \quad EI_z X(x) = -\int_0^x \left(\int_0^x M_f(x) dx \right) dx \quad (\text{IV.43})$$

Lorsque le diagramme des moments fléchissant est une figure dont on connaît le centre de gravité, tel que un rectangle, un carré ou un triangle, on utilise la méthode de **Verechagine** (Verechtchaguine), pour trouver la valeur de cet double intégral, qui nous permettra de trouver l'équation de la ligne de flexion $x(x)$.

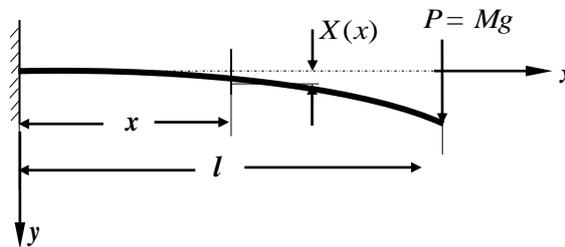


Figure (IV.10).

Le diagramme réel des moments fléchissant correspondant est

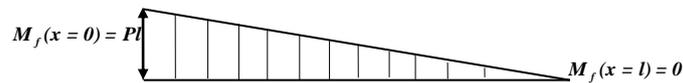


Figure (IV.11).

On veut trouver l'expression de la fonction de forme de flexion $X(x)$, à un point quelconque x . On enlève la force P et on applique au système une force unitaire $F=1$, au point considéré d'abscisse x (figure IV-12).

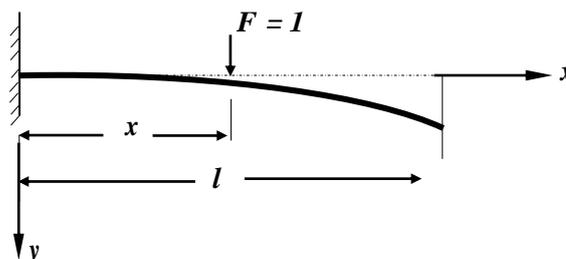


Figure (IV.12).

On obtient le diagramme des moments fléchissant suivant :

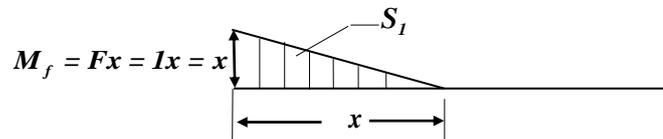


Figure IV.13: Diagramme des moments fléchissants dus à la force unitaire.

Ensuite on calcule la surface S_I :

$$S_I = \frac{1}{2}(x.x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{IV.44})$$

Le centre de gravité de ce triangle est situé à la distance $x/3$.

On revient au diagramme réel des moments fléchissant et on calcule le moment fléchissant en ce point

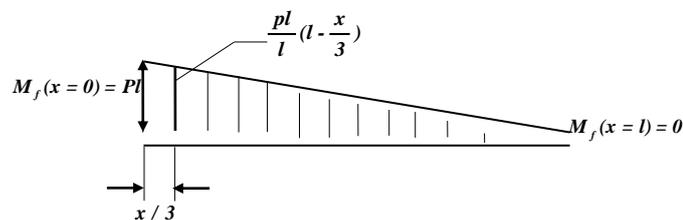


Figure IV.14: Diagramme réel des moments fléchissants.

Ensuite on multiplie cette valeur par la surface S_I et on trouve :

$$\frac{pl}{l}(l - \frac{x}{3}) \frac{1}{2}x^2 = \frac{Px^2}{2}(l - \frac{x}{3}) \quad (\text{IV.45})$$

D'où l'équation de la ligne de flexion

$$X(x) = \frac{pl}{l}(l - \frac{x}{3}) \frac{1}{2}x^2 = \frac{Px^2}{2}(l - \frac{x}{3}) \quad (\text{IV.46})$$

IV. 2. 5. Méthode de Ritz

Cette méthode est appliquée aux systèmes conservatifs, elle est basée sur le choix des fonctions de forme $X(x)$, qui minimisent l'intégral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} E(x, \dot{x}, t) dt \quad (IV.47)$$

avec $E(x, \dot{x}, t)$ devient une fonction

$$E = E_c - E_p$$

On remplaçant $X(x)$ par

$$X(x) = a\psi_1(x) + a\psi_2 + a\dots\dots\dots + a\psi_n(x) \quad (IV.48)$$

où ψ_i sont des fonctions approximatives.

La condition sur le choix des $\psi_i(x)$ pour l'étude des vibrations par la méthode de Ritz, est de vérifier les conditions aux limites, et pas forcément l'équation des vibrations. L'intégral (IV.47) des coefficients a_i

$$I = I(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (IV.49)$$

Pour que l'intégral I soit minimal, elle doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad (IV.50)$$

IV. 2.6. Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin repose sur le principe d'orthogonalité des modes propres. Galerkin en a profiter pour l'appliquer à l'orthogonalité entre l'équation régissant les vibrations et les fonctions de formes approximatives vérifiant le champs des déplacements

$$I = \int_0^L (X^{IV} - \frac{\rho\omega^2}{EI} X) \cdot \psi_i(x) \cdot dx = 0 \quad (IV.51)$$

Si l'on pose:

$$W = \int_0^L EI \cdot X^{IV} \cdot \psi_i(x) \cdot dx = 0 \quad (IV.52)$$

et

$$T = \int_0^L \rho \cdot X \cdot \psi_i(x) \cdot dx = 0 \quad (IV.53)$$

L'équation (IV .51) donne : $W - \omega^2 T = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{W}{T}$

ω étant la pulsation (fréquence) propre.

Exercice d'application de la méthode de Galerkin

Trouver les fréquences propres de vibration d'une poutre encadrée-encadrée de longueur L , de rigidité à la flexion EI , et de masse par unité de longueur m (Fig. IV.15) à l'aide de méthode de Galerkin avec les fonctions approximatives suivantes :

$$\varphi_1 = \cos\left[\frac{2\pi x}{L} - 1\right] \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \cos\left[\frac{4\pi x}{L} - 1\right] \quad (2)$$

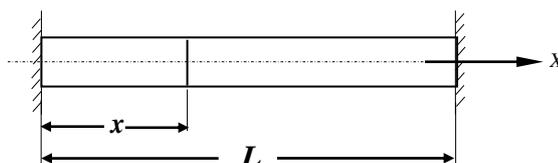


Figure (IV.15).

Solution

L'équation régissant les vibrations transversales de la poutre est donnée

$$\frac{d^4W}{dx^4} - \beta^4 W = 0 \quad (3)$$

où

$$\beta^4 = \frac{m\omega^2}{EI} \quad (4)$$

avec ω désignant la fréquence propre de vibration de la poutre. En utilisant les fonctions approximatives (1) et (2), la supposée fonction de forme est:

$$W(x) = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = C_1 \cos\left[\frac{2\pi x}{L} - 1\right] + C_2 \cos\left[\frac{4\pi x}{L} - 1\right] \quad (5)$$

La substitution de l'équation (5) dans l'équation (3) donne le résidu comme

$$R(C_1, C_2) = C_1 \left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + C_1\beta^4 + C_2 \left[\left(\frac{4\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + C_2\beta^4 \quad (6)$$

La méthode de Galerkin donne

$$\int_{x=0}^L R\varphi_i dx = 0 \quad i=1,2 \quad (7)$$

qui peut s'exprimer en utilisant les équations (6), (1) et (6), comme

$$\int_{x=0}^L \cos\left(\frac{2\pi x}{L}-1\right) \left\{ \begin{array}{l} C_1 \left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) C_1 \beta^4 \\ + C_2 \left[\left(\frac{4\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + C_2 \beta^4 \end{array} \right\} dx = 0 \quad (8)$$

$$\int_{x=0}^L \cos\left(\frac{4\pi x}{L}-1\right) \left\{ \begin{array}{l} C_1 \left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) C_1 \beta^4 \\ + C_2 \left[\left(\frac{4\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + C_2 \beta^4 \end{array} \right\} dx = 0 \quad (9)$$

ou bien

$$C_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] - \beta^4 \right\} - C_2 \beta^4 = 0 \quad (10)$$

$$-C_1 \beta^4 + C_2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] - \beta^4 \right\} = 0 \quad (11)$$

Pour une solution non-triviale des équations (10) et (11), le déterminant de la matrice des coefficients C_1 et C_2 doit être égal à zéro. Ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] - \beta^4 & -\beta^4 \\ -\beta^4 & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4\pi}{L}\right)^4 - \beta^4 \right] - \beta^4 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Après simplification de l'équation (12), on obtient l'équation des fréquences suivante

$$(\beta L)^8 - 15.900(\beta L)^4 + 7,771,000 = 0 \quad (13)$$

La solution de l'équation (13) est

$$\beta L = 4.741 \quad \text{ou} \quad 11.140 \quad (14)$$

Ainsi, on obtient les valeurs de la première et la deuxième fréquences propres:

$$\omega_1 = \frac{22.48}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{22.48}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Les vecteurs propres correspondants aux fréquences propres ω_1 et ω_2 peuvent s'obtenir par résolution de l'équation (10) ou (11), avec la valeur appropriée de β . Les résultats sont les suivants:

$$\text{-Pour } \omega_1: \quad \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}^1 = \begin{Bmatrix} 23.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{-Pour } \omega_2: \quad \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} -0.69 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

IV. 3. Modèle et équations de Timoshenko

Considérons un élément de poutre en mouvement, à l' instant (t) comme sur la figure (IV.16), [5]

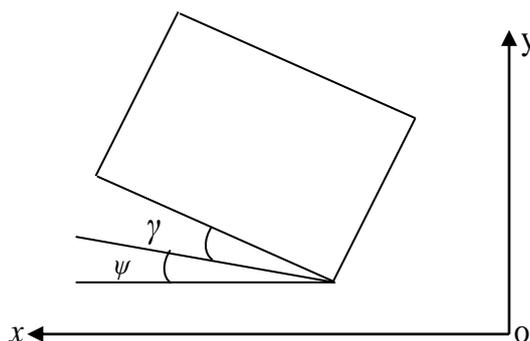


Figure IV.16. Position fléchie d'un élément de poutre de Timoshenko.

Cet élément aura un déplacement u par rapport à sa position d'équilibre et la rotation de sa surface extérieure est divisé en deux composantes ψ et γ , par définition représentant respectivement, la rotation due au moment fléchissant et celle due à l'effort tranchant. Il en résulte:

$$\frac{du}{dx} = \psi + \gamma \quad (IV.54)$$

Considérons maintenant les forces et les moments agissant sur ce même élément (figure IV. 17)

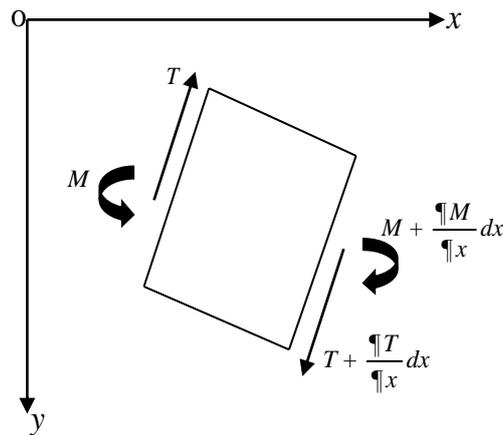


Figure IV.17. Forces et moment agissant sur un élément poutre.

Suivant la théorie de flexion des poutres de Timochenko [5], on a

$$M = EI \frac{d\psi}{dx} \quad (\text{IV.55})$$

$$T = \bar{k}GA\gamma \quad (\text{IV.56})$$

où T désigne l'effort tranchant, A l'aire de la section transversale, G le module de Kirchoff, et \bar{k} le facteur de correction du cisaillement.

Des équations (IV.54) et (IV.56), on obtient

$$T = \bar{k}GA\left(\frac{du}{dx} - \psi\right) \quad (\text{IV.57})$$

L'équation de mouvement de rotation de l'élément de longueur dx est donnée par

$$T \cdot dx + dx \cdot \frac{\partial M}{\partial x} = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cdot dx \quad (\text{IV.58})$$

En substituant (IV.55) et (IV.57) dans (IV.58), on obtient:

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \bar{k}GA \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi\right) - \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{IV.59})$$

L'équation de mouvement de translation de l'élément dx est

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = \rho \cdot A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot dx \quad (\text{IV.60})$$

On substitue T par son expression donnée par l'équation (IV.57), on obtient

$$\rho.A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \bar{k}GA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{IV.61})$$

On dérivant l'équation (IV.59) par rapport à (x) on obtient

$$EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \bar{k}GA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (\text{IV.62})$$

On additionnant les équations (IV.61) et (IV.62), on obtient

$$EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (\text{IV.63})$$

De l'équation (IV.61), on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\bar{k}G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{IV.64})$$

et

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = -\frac{\rho}{\bar{k}G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \quad (\text{IV.65})$$

La substitution des équations (IV.64) et (IV.65) dans (IV.63) donne après quelques manipulations, une équation où ψ est fonction de u , ainsi

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = -\frac{\rho}{\bar{k}G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (\text{IV.66})$$

Si l'équation (IV.61) est dérivée par rapport à (x) et si la dérivée du/dx est obtenue de l'équation (IV.63), en utilisant une procédure similaire à la précédente, il est possible d'obtenir une équation où ψ est indépendante de u , telle que

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\bar{k}G} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\bar{k}G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0 \quad (\text{IV.67})$$

L'équation de mouvement de rotation de l'élément s'obtient par des manipulations similaires

$$EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\bar{k}G} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\bar{k}G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0 \quad (\text{IV.68})$$

La solution de l'équation (IV.62) a la forme suivante

$$u(x, t) = V(x).e^{j\omega t}$$

laquelle substituée dans l'équation (IV.66) donne

$$EI \frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} + \rho I \omega^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \left(\frac{\rho I \omega^2}{kG} - A\right) V(x) = 0 \quad (\text{IV.69})$$

La solution $V(x)$ est de la forme

$$V(x) = A.e^{\eta.x} + B.e^{-\eta.x} + C.e^{j\xi.x} + D.e^{-j\xi.x} \quad (\text{IV.70})$$

La substitution de $V(x) = \alpha.e^{m.x}$ dans l'équation (IV.64) nous donne

$$E m^4 + \rho I \omega^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) m^2 + \rho \omega^2 \left(\frac{\rho I \omega^2}{kG} - A\right) = 0 \quad (\text{IV.71})$$

qui est de la forme suivante:

$$P m^4 + Q m^2 + R = 0 \quad (\text{IV.72})$$

$$P m^4 + Q m^2 + R$$

avec

$$P = EI;$$

$$Q = \rho I \omega^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right)$$

$$R = \rho \omega^2 \left(\frac{\rho I \omega^2}{kG} - A\right)$$

On aura donc :

$$Q^2 - 4PR = \rho^2 I^2 \omega^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right)^2 - 4EI \rho \omega^2 \left(\frac{\rho I \omega^2}{kG}\right) = \rho I \omega^2 \left\{ \rho I \omega^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) - 4EA \right\}$$

Cette expression est toujours positive. Ainsi si $-4PR$ est positif, l'expression:

$$-Q = \sqrt{Q^2 - 4PR}$$

est positive et on aura deux solutions réelles, l'expression:

$$-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}$$

sera par contre négative et on aura deux solutions imaginaires pures. Toutefois, si $-4PR$ est négatif alors on aura quatre solutions imaginaires pures.

La condition pour que $-4PR$ soit positif est

$$\left(\frac{\rho I \omega^2}{\bar{k}G}\right) - A \leq 0$$

ceci est vrai si

$$\omega^2 \leq \frac{\bar{k}GA}{\rho I}$$

Les solutions seront obtenues en premier, dans le cas où cette dernière condition est vérifiée, alors les quatre solutions de m deviennent

$$m = \pm \left[\frac{-\rho I \omega^2 \left(1 + \frac{E}{\bar{k}G}\right) \pm \sqrt{\left\{ \rho I \omega^2 \left(1 - \frac{E}{\bar{k}G}\right)^2 + 4EA \right\}}}{2EI} \right]^{1/2}$$

$$= \pm \eta$$

$$m = \pm j \left[\frac{-\rho I \omega^2 \left(1 + \frac{E}{\bar{k}G}\right) \pm \sqrt{\left\{ \rho I \omega^2 \left(1 - \frac{E}{\bar{k}G}\right)^2 + 4EA \right\}}}{2EI} \right]^{1/2}$$

$$= \pm j\xi$$

La solution de l'équation (IV.64) s'écrit à présent comme suit

$$V(x) = A e^{\eta \cdot x} + B e^{-\eta \cdot x} + C e^{j\xi \cdot x} + D e^{-j\xi \cdot x} \quad (\text{IV.73})$$

Les coefficients constants de la solution (IV.73), A , B , C , D , sont déterminés à partir des conditions aux limites.

V. Les Méthodes des Matrices de Transfert

Quand les poutres présentent de nombreuses discontinuités géométriques ou massiques, certaines méthodes énumérées précédemment sont mal adaptées. C'est la raison pour laquelle, les méthodes basées sur le calcul matriciel ont été développées. En particulier les deux méthodes des matrices de transfert qui consiste à diviser la ligne d'arbres en un certain nombre de tronçons, chacun étant caractérisé par une matrice.

Il existe deux méthodes de matrices de transfert:

1- la méthode conventionnelle "(TMM)" [6,13], introduite par Myklestad et généralisée par Prohl, relative aux vecteurs d'état, qui est adaptée au système discret (méthode des éléments finis), ainsi qu'aux systèmes continus (modèle de Euler-Bernoulli, modèle de Rayleigh, et modèle de Timochenko).

2- la méthode des matrices de transfert relatives aux vecteurs des coefficients constants des solutions des équations différentielles régissant les vibrations. Cette méthode a été publiée par Kolenda [14, 15]. Nous verrons dans ce travail des applications de cette méthode au modèle de Euler-Bernoulli et au modèle de Timoshenko.

La relation entre deux vecteurs extrêmes, qui sont les vecteurs d'état pour la première méthode, et les vecteurs des coefficients constants des solutions des équations différentielles pour la seconde, est obtenue en multipliant les matrices de transfert des tronçons de la poutre entre elles, construites à partir de l'équilibre dynamique et la continuité des déplacements.

V. 1. La méthode conventionnelle des matrices de transfert relatives au vecteur d'état (TMM)

La figure (V.1a) représente une poutre continue à section variable. Sur la figure (V. 1b), cette poutre est discrétisée avec des masses concentrées reliées entre elles par des segments de poutre sans masse de rigidité uniforme [7]. La figure (V. 1c) schématise le diagramme du corps rigide de la i ème masse concentrée, et la figure (V. 1d) représente les forces et les moments agissant sur le i ème tronçon de poutre. (l_i et I_i) désignent la longueur et le moment d'inertie de la section transversale du i ème tronçon de poutre, respectivement. E représente le module de Young du matériau de la poutre.

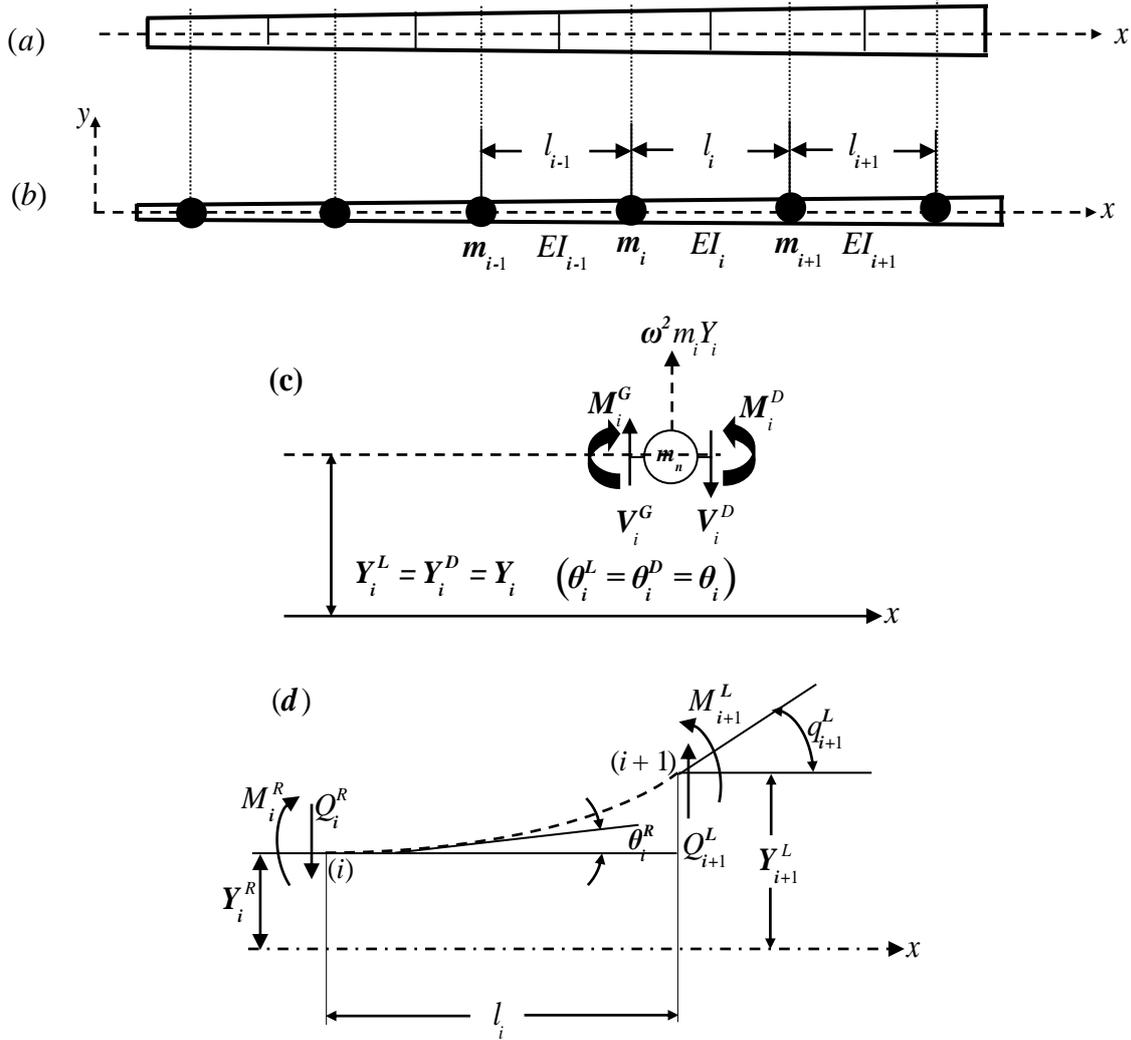


Figure V.1: (a) Poutre continue à section variable, (b) poutre discrétisée, (c) diagramme du corps rigide de la i ème masse concentrée, (d) forces et moments internes agissant sur le i ème tronçon de poutre sans masse.

Du diagramme du corps libre de la i ème masse discrète m_i , représenté sur la figure (V.1. c), on a

$$\sum F_y = Q_i^R + \omega^2 m_i Y_i - Q_{i+1}^L = 0 \quad \text{et} \quad \sum M_z = M_{i+1}^L - M_i^R = 0$$

ou

$$Q_i^R = Q_{i+1}^L - \omega^2 m_i Y_i \quad (\text{V. 1a})$$

$$M_i^R = M_{i+1}^L \quad (\text{V. 1b})$$

En plus, les conditions de continuité à la station (i) exigent que

$$\psi_i = \psi_i^R = \psi_i^L \quad (\text{V. 1c})$$

$$Y_i = Y_i^R = Y_i^L \quad (\text{V. 1d})$$

Dans les équations (V. 1a)-(V. 1d), Y_i^L , ψ_i^L , M_i^L , Q_i^L désignent le déplacement transversal, la rotation, le moment fléchissant et l'effort tranchant au coté gauche de la station (i), respectivement. Y_i^R , ψ_i^R , M_i^R , Q_i^R sont les grandeurs correspondantes au coté droit de la station (i). ω représente la fréquence (pulsation) propre de la poutre entière.

Sous forme matricielle, les équations (V. 1a)-(V. 1d) s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} Y_i^R \\ \theta_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m_i\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_i^L \\ \theta_i^L \\ M_i^L \\ Q_i^L \end{Bmatrix} \quad (\text{V. 2a})$$

ou

$$\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = [G_s]_i \cdot \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^L \quad (\text{V. 2b})$$

avec

$$[G_s]_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m_i\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V. 3})$$

$[G_s]_i$ est appelée matrice de transfert de la station (i).

De façon similaire, à partir du diagramme du corps libre du tronçon de poutre (i) schématisé sur la figure (V. d) on obtient

$$\sum F_y = Q_{i+1}^L - Q_i^R = 0 \quad \text{et} \quad \sum M_z = M_{i+1}^L + Q_{i+1}^L l_i - M_i^R = 0$$

ou

$$Q_{i+1}^L = Q_i^R \quad (\text{V. 4a})$$

$$M_{i+1}^L = M_i^R - Q_{i+1}^L l_i = M_i^R - Q_i^R l_i \quad (\text{V. 4b})$$

En plus, de la figure (V. d), on a les relations suivantes

$$\theta_{i+1}^L = \theta_i^R + a_i^{\theta M} M_{i+1}^L + a_i^{\theta Q} Q_{i+1}^L \quad (\text{V. 4c})$$

$$Y_{i+1}^L = Y_i^R + l_i \theta_{i+1}^L + a_i^{YM} M_{i+1}^L + a_i^{YQ} Q_{i+1}^L \quad (\text{V. 4d})$$

Dans les équations (V. 4a)-(V. 4d) a_i^{YM} et $a_i^{\theta M}$ désignent les déplacements linéaire et angulaire de la station $(i+1)$ relative à la station (i) dus à un moment unitaire appliqué à la station $(i+1)$, alors que a_i^{YQ} et $a_i^{\theta Q}$ représente les déplacements dus à une force unitaire appliquée à la même station.

Par substitution des équations (V. 4a,b) dans les équations (V. 4c,d), on obtient

$$\theta_{i+1}^L = \theta_i^R + a_i^{\theta M} M_i^R + (a_i^{\theta Q} - a_i^{\theta M} l_i) Q_i^R \quad (\text{V. 4e})$$

$$Y_{i+1}^L = Y_i^R + l_i \theta_i^R + a_i^{YM} M_i^R + (a_i^{YQ} - a_i^{YM} l_i) Q_i^R \quad (\text{V. 4f})$$

Sous forme matricielle, les équations (V. 4e,f) et (V. 4a,b) s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} Y_{i+1}^L \\ \theta_{i+1}^L \\ M_{i+1}^L \\ Q_{i+1}^L \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_i & a_i^{YM} & (a_i^{YQ} - a_i^{YM} l_i) \\ 0 & 1 & a_i^{\theta M} & (a_i^{\theta Q} - a_i^{\theta M} l_i) \\ 0 & 0 & 1 & -l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_i^R \\ \theta_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} \quad (\text{V. 5a})$$

ou

$$\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1}^L = [G_F]_i \cdot \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^R \quad (\text{V. 5b})$$

avec

$$[G_F]_i = \begin{pmatrix} 1 & l_i & a_i^{YM} & (a_i^{YQ} - a_i^{YM} l_i) \\ 0 & 1 & a_i^{\theta M} & (a_i^{\theta Q} - a_i^{\theta M} l_i) \\ 0 & 0 & 1 & -l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V. 6})$$

V. 1. 1. Détermination des coefficients d'influence

V. 1. 1.a. Détermination des coefficients d'influence a_i^{YM} et $a_i^{\theta M}$ d'une poutre encastree-libre

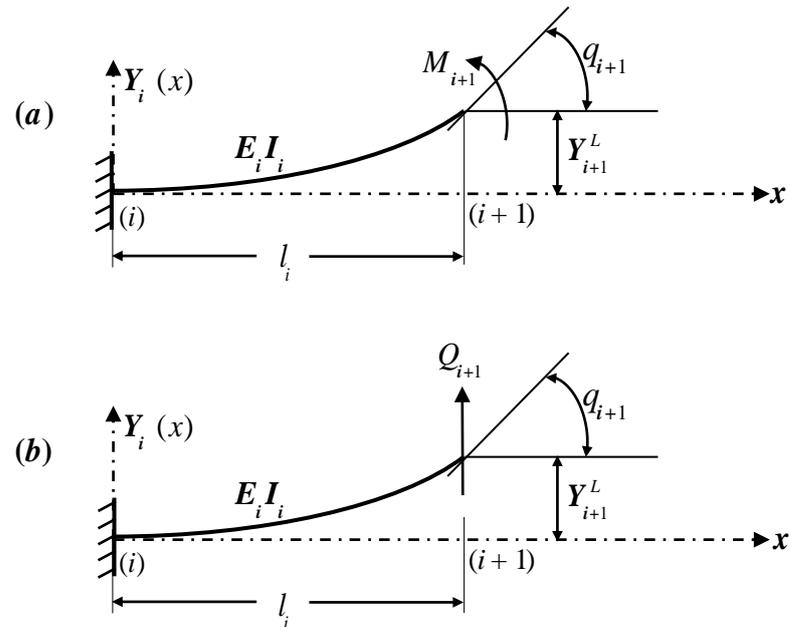


Figure V.2: Courbe de flexion d'une poutre encastree-libre soumise à son extrémité libre à: (a) un moment fléchissant M_{i+1} et (b) un effort tranchant Q_{i+1} , avec (i) et $(i+1)$ les numéro des stations.

Pour la poutre uniforme soumise un moment fléchissant M_{i+1} (figure V. 2a) sa courbe de flexion est donnée par

$$Y''(x) = M_{i+1} / E_i I_i \quad (\text{V. 7})$$

Après intégration on obtient

$$Y'(x) = C_1 + \frac{M_{i+1}}{E_i I_i} x \quad (\text{V. 8})$$

$$Y(x) = C_1 x + C_2 + \frac{M_{i+1}}{2E_i I_i} x^2 \quad (\text{V. 9})$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites. Pour la poutre encastree libre de la figure (V. 2), on obtient

$$\begin{aligned} \text{à } x = 0, \quad Y(x) = 0 \quad \text{et} \quad Y'(x) = 0 \end{aligned} \quad (\text{V. 10})$$

d'où

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad C_2 = 0$$

$$\text{à } x = l_i, \quad Y(x) = Y_{i+1} \quad \text{et} \quad Y'(x) = \theta_{i+1} \quad (\text{V. 11})$$

Finalement, on obtient

$$Y'(x) = \frac{M_{i+1}}{E_i I_i} x \quad (\text{V. 12})$$

$$Y(x) = \frac{M_{i+1}}{2E_i I_i} x^2 \quad (\text{V. 13})$$

D'où les expressions pour θ_{i+1} et Y_{i+1}

$$\theta_{i+1} = \frac{M_{i+1}}{E_i I_i} l_i \quad (\text{V. 14a})$$

$$Y_{i+1} = \frac{M_{i+1}}{2E_i I_i} l_i^2 \quad (\text{V. 14b})$$

Les expressions ci dessus permettent de trouver le déplacement linéaire a_i^{YM} et le déplacement angulaire $a_i^{\theta M}$ pour la station $(i+1)$, relativement à la station (i) dus à un moment unitaire ($M_{i+1} = 1$) appliqué à la station $(i+1)$. On obtient

$$a_i^{YM} = \frac{l_i^2}{2E_i I_i} \quad (\text{V. 15a})$$

$$a_i^{\theta M} = \frac{l_i}{E_i I_i} \quad (\text{V. 15b})$$

a_i^{YM} et $a_i^{\theta M}$ sont les coefficients d'influence des équations (V. 4e) et (V. 4f).

V. 1. 1.b. Détermination des coefficients d'influence a_i^{YQ} et $a_i^{\theta Q}$ pour une poutre encastrée-libre

Pour la poutre uniforme soumise un moment fléchissant Q_{i+1} (figure V. 2b) sa courbe de flexion peut être déterminée à l'aide de la relation

$$\bar{Q}(x) = -EI_z Y'''(x) \quad (\text{V. 16})$$

où $\bar{Q}(x)$ désigne l'amplitude de $Q(x,t)$. Si l'on remplace EI_z et $\bar{Q}(x)$ par $E_i I_i$ et Q_{i+1} , respectivement, on obtient

$$Y'''(x) = -\frac{Q_{i+1}}{E_i I_i} \quad (\text{V. 17})$$

Par intégration de l'équation (V. 17), on obtient

$$Y''(x) = -\frac{Q_{i+1}}{E_i I_i} x + D_1 \quad (\text{V. 18})$$

$$Y'(x) = -\frac{Q_{i+1}}{2E_i I_i} x^2 + D_1 x + D_2 \quad (\text{V. 19})$$

$$Y(x) = -\frac{Q_{i+1}}{6E_i I_i} x^3 + \frac{D_1}{2} x^2 + D_2 x + D_3 \quad (\text{V. 20})$$

Les conditions aux limites de la poutre de la figure (V. 4b) sont

$$\text{à } x=0, \quad Y(x)=0, \quad Y'(x)=0 \quad \text{et} \quad M(x)=Q_{i+1}l_i \quad (\text{V. 21a,b,c})$$

$$\text{à } x=l_i, \quad Y(x)=Y_{i+1}, \quad Y'(x)=\theta_{i+1} \quad \text{et} \quad M(x)=0 \quad (\text{V. 22})$$

on obtient

$$D_2 = D_3 = 0$$

L'expression de $Y(x)$ est donnée par

$$Y(x) = -\frac{Q_{i+1}}{6E_i I_i} x^3 + \frac{D_1}{2} x^2 \quad (\text{V. 23})$$

L'équation (V. 7) peut s'écrire sous la forme

$$M(x) = E_i I_i Y''(x) \quad (\text{V. 24})$$

On dérive deux fois par rapport à x l'équation (V. 23), on substitue le résultat dans l'équation (V. 24) et on déduit

$$M(x) = -Q_{i+1}x + E_i I_i D_1 \quad (\text{V. 25})$$

La condition (V. 21c) s'écrit

$$M(x) = -Q_{i+1}l_i + E_i I_i D_1 = 0 \quad (\text{V. 26})$$

ainsi on obtient la constante D_1

$$D_1 = \frac{Q_{i+1}l_i}{E_i I_i} \quad (\text{V. 27})$$

On substitue la valeur obtenue de la constante D_1 dans l'équation (V. 23), on obtient

$$Y(x) = \frac{Q_{i+1}}{E_i I_i} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{l_i}{2} x^2 \right) \quad (\text{V. 28})$$

On dérive par rapport à x cette dernière équation et on obtient les expressions suivantes

$$Y'(x) = \frac{Q_{i+1}}{E_i I_i} \left(-\frac{x^2}{2} + l_i x \right) \quad (\text{V. 29})$$

$$Y(x) = \frac{Q_{i+1}}{E_i I_i} (-x + l_i) \quad (\text{V. 30})$$

L'application des conditions aux limites à $x=l_i$ données par les équations (V. 22) aux équations (V. 28) et (V. 29) produit

$$Y_{i+1} = \frac{Q_{i+1}}{3E_i I_i} l_i^3 \quad (\text{V.31})$$

$$\theta_{i+1} = \frac{Q_{i+1}}{2E_i I_i} l_i^2 \quad (\text{V.32})$$

A partir de ces deux dernières expressions et compte tenu de la figure (V. 2b), on obtient le déplacement linéaire a_i^{YQ} et le déplacement angulaire $a_i^{\theta Q}$ pour la station $(i+1)$, relativement à la station (i) dus à une force unitaire ($Q_{i+1} = 1$) appliquée à la station $(i+1)$. On obtient

$$a_i^{YQ} = \frac{Y_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{l_i^3}{3E_i I_i} \quad (\text{V.33a})$$

$$a_i^{\theta Q} = \frac{\theta_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{l_i^2}{2E_i I_i} \quad (\text{V.33b})$$

Si on injecte les valeurs des coefficients d'influence ($a_i^{YM}, a_i^{\theta M}$) et ($a_i^{YQ}, a_i^{\theta Q}$) donnés par les équations et (V.14a, b) et (V.33a, b) dans l'équation (V.6), on obtient

$$[G_F]_i = \begin{pmatrix} 1 & l_i & \frac{l_i^2}{2E_i I_i} & -\frac{l_i^3}{6E_i I_i} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{E_i I_i} & -\frac{l_i^2}{2E_i I_i} \\ 0 & 0 & 1 & -l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.34})$$

La matrice de transfert de la section (i) est le produit matriciel suivant

$$[G]_i = [G_F]_i [G_F]_i = \begin{pmatrix} 1 + \frac{l_i^3 m_i \omega^2}{6E_i I_i} & l_i & \frac{l_i^2}{2E_i I_i} & -\frac{l_i^3}{6E_i I_i} \\ \frac{l_i^2 m_i \omega^2}{2E_i I_i} & 1 & \frac{l_i}{E_i I_i} & -\frac{l_i^2}{2E_i I_i} \\ l_i m_i \omega^2 & 0 & 1 & -l_i \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.35})$$

V. 1. 2. Vibration de flexion libre d'une poutre

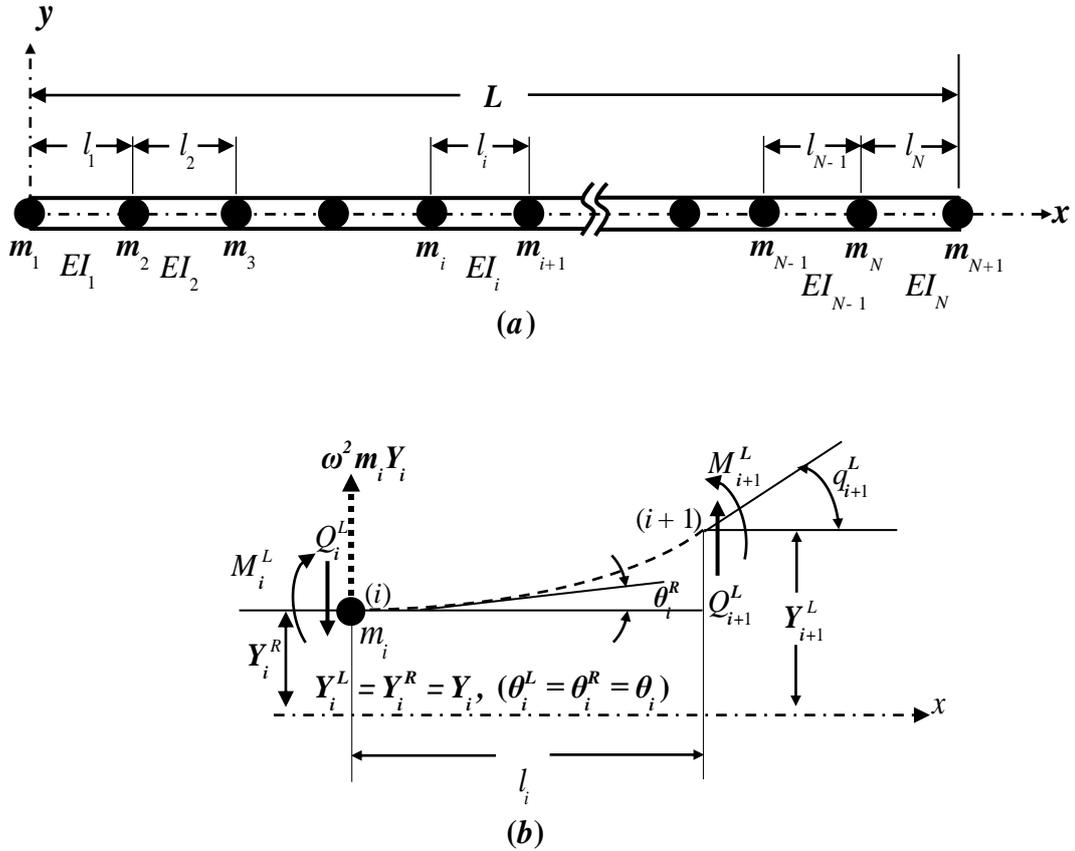


Figure V.3: Modèle discret d'une poutre en flexion contenant (N+1) stations et (N) champs. La section (i) est composée d'une station i et d'un champ (i).

La matrice de transfert totale de la poutre schématisée sur la figure (V. 3a) est donnée par

$$\begin{aligned}
 [G]_i &= [G_S]_{N+1} [G]_N [G]_{N-1} \dots [G]_2 [G]_1 = [G_S]_{N+1} \prod_{i=1}^N [G]_i = \\
 &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \quad (V.36)
 \end{aligned}$$

d'où, la relation entre les vecteurs d'état à la limite gauche et à la limite droite de la poutre entière

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{N+1}^R = [G] \cdot \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_1^L \quad (V.37)$$

La relation matricielle (V.37) s'écrit sous la forme des équations suivantes

$$Y_{N+1}^R = G_{11}Y_1^L + G_{12}\theta_1^L + G_{13}M_1^L + G_{14}Q_1^L \quad (\text{V.38a})$$

$$\theta_{N+1}^R = G_{21}Y_1^L + G_{22}\theta_1^L + G_{23}M_1^L + G_{24}Q_1^L \quad (\text{V.38b})$$

$$M_{N+1}^R = G_{31}Y_1^L + G_{32}\theta_1^L + G_{33}M_1^L + G_{34}Q_1^L \quad (\text{V.38c})$$

$$Q_{N+1}^R = G_{41}Y_1^L + G_{42}\theta_1^L + G_{43}M_1^L + G_{44}Q_1^L \quad (\text{V.38d})$$

En appliquant les conditions aux limites aux équations ci-dessus, on obtient les fréquences propres.

V. 1. 2.a. Le cas d'une poutre libre- libre

Pour une poutre libre-libre, les moments fléchissants et les efforts tranchants sont nuls aux deux extrémités de la poutre. Les conditions aux limites s'écrivent

$$M_1^L = 0, \quad Q_1^L = 0 \quad (\text{V.39a,b})$$

$$M_{N+1}^R = 0, \quad Q_{N+1}^R = 0 \quad (\text{V.40a,b})$$

La substitution des équations (V.39a,b) et (V.40a,b) dans les équations (V.38c) et (V.38d) produit

$$G_{31}Y_1^L + G_{32}\theta_1^L = 0 \quad (\text{V.41a})$$

$$G_{41}Y_1^L + G_{42}\theta_1^L = 0 \quad (\text{V.41b})$$

La solution non-triviale du système des équations (V.41a,b) exige que le déterminant soit nul, c-a-d

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} G_{31} & G_{32} \\ G_{41} & G_{42} \end{vmatrix} = G_{31}G_{42} - G_{32}G_{41} = 0 \quad (\text{V.42})$$

L'expression (V.42) représente l'équation des fréquences d'une poutre libre-libre

V. 1. 2. b. Le cas d'une poutre encastree- encastree

Poutre une poutre de Euler-Bernoulli, les rotations et les déplacements sont nuls aux encastrements, on a donc

$$Y_1^L = 0, \quad \theta_1^L = 0 \quad (\text{V.43a,b})$$

$$Y_{N+1}^R = 0, \quad \theta_{N+1}^R = 0 \quad (\text{V.44a,b})$$

La substitution des équations (V.43a,b) et (44a,b) dans les équations (V.38c) et (V.38d) produit

$$G_{13}M_1^L + G_{14}Q_1^L = 0 \quad (\text{V.45a})$$

$$G_{23}M_1^L + G_{24}Q_1^L = 0 \quad (\text{V.45b})$$

On écarte la solution triviale du système des équations (V.45a,b), et on obtient l'équation des fréquences d'une poutre encastrée-encastrée

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} G_{13} & G_{14} \\ G_{23} & G_{24} \end{vmatrix} = G_{13}G_{24} - G_{14}G_{23} = 0 \quad (\text{V.46})$$

V. 1. 2. c. Le cas d'une poutre encastrée- libre

Poutre une poutre de Euler-Bernoulli, les rotations et les déplacements sont nuls à encastrement, alors qu'à l'extrémité libre, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls

$$Y_1^L = 0, \quad \theta_1^L = 0 \quad (\text{V.47a,b})$$

$$M_{N+1}^R = 0, \quad Q_{N+1}^R = 0 \quad (\text{V.48a,b})$$

La substitution des équations (V.47a,b) et (48a,b) dans les équations (V.38c) et (V.38d) produit

$$G_{33}M_1^L + G_{34}Q_1^L = 0 \quad (\text{V.49a})$$

$$G_{43}M_1^L + G_{44}Q_1^L = 0 \quad (\text{V.49b})$$

La solution non-triviale du système des équations (V.49a,b), exige que

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44} \end{vmatrix} = G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34} = 0 \quad (\text{V.50})$$

L'expression (V.50) est l'équation des fréquences propres d'une poutre encastrée-libre.

V. 1. 2. d. Le cas d'une poutre sur appuis simples aux extrémités

Dans ce cas, les déplacements et les moments fléchissants sont nuls aux deux extrémités

$$Y_1^L = 0, \quad M_1^L = 0 \quad (\text{V.51a,b})$$

$$Y_{N+1}^R = 0, \quad M_{N+1}^R = 0 \quad (\text{V.52a,b})$$

La substitution des équations (V.51a,b) et (52a,b) dans les équations (V.38c) et (V.38d) produit

$$G_{12}\theta_1^L + G_{14}Q_1^L = 0 \quad (\text{V.53a})$$

$$G_{32}\theta_1^L + G_{34}Q_1^L = 0 \quad (\text{V.53b})$$

Ainsi, on obtient l'équation des fréquences propres de la poutre sur appuis simples

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44} \end{vmatrix} = G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34} = 0 \quad (\text{V.53c})$$

V.2. La méthode des matrices de transfert relatives aux vecteurs des coefficients constants des solutions des équations différentielles

V.2.1. Introduction

Cette méthode fut énoncée par Janusz Kolenda. Les auteurs de la référence [8] l'ont aussi appelée "Méthode des vecteurs des coefficients des solutions des équations différentielles".

Dans le cas de tronçons d'arbres possédant les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques, cette méthode possède l'avantage de remplacer un nombre important de matrices multipliées entre elles par une seule matrice, dans laquelle, les arguments des fonctions sont remplacés par la somme des arguments correspondants apparaissant dans la suite des matrices [8, 9]. Cette avantage n'existe pas dans la méthode des matrices de transfert relatives aux vecteurs d'état (TMM).

V.2. 2. Modèle mathématique

La figure (V.4) représente une poutre à section étagée avec encastrement à l'extrémité gauche et appui simple à l'extrémité droite, divisée en n tronçons uniformes de longueur L_i , [désignés par (1), (2), ..., (i), (i+1), ..., (n-1), (n)], supportant plusieurs masses discrètes et reposant sur des supports intermédiaires élastique.

Chaque masse discrète située à la fin du (i ème) tronçon a une masse m_i et un moment d'inertie massique diamétral $J_{d,i}$. Le coefficient de rigidité du (i ème) support intermédiaire est désigné par (k_i).

On suppose que les axes principaux centraux d'inertie des sections transversales des tronçons de poutre coïncident avec l'axe x , et que son matériau est isotrope. Pour chaque tronçon (i), un

système de coordonnées fixe (x_i, y_i, z_i) est adopté, dont les axes sont respectivement parallèles aux axes du système de référence (X, Y, Z) .

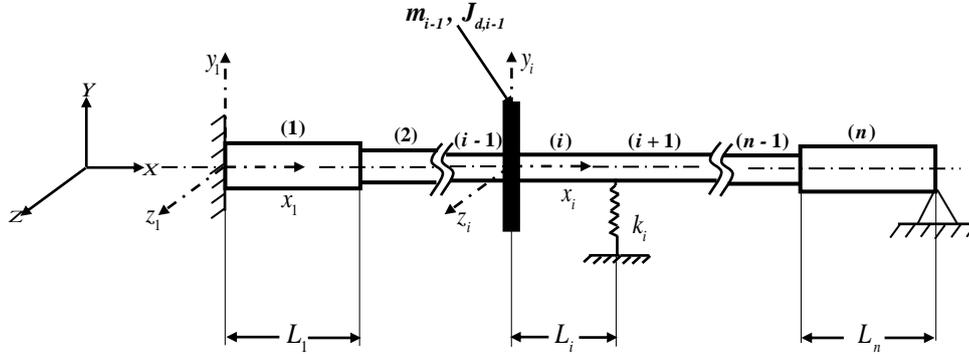


Figure (V.4): Modèle physique du système.

L'équation différentielle régissant les vibrations transversales verticales du $i^{\text{ème}}$ tronçon de poutre est

$$\rho_i S_i \frac{\partial^2 u_{y,i}(x,t)}{\partial t^2} + E_i I_i \frac{\partial^4 u_{y,i}(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{V.54a})$$

avec E_i désignant le module d'élasticité (N/m^2), S_i l'aire de la section transversale (m^2), I_i le moment d'inertie diamétral (m^4) du $i^{\text{ème}}$ tronçon, et ρ_i représente la densité du matériau de la poutre (kg/m^3), alors que $u_{y,i}(x,t)$ est la vibration du centre de gravité de la section transversale du $i^{\text{ème}}$ tronçon dans la direction verticale (y), à la coordonnée axiale $x = x_i$ et l'instant t . En cas de vibrations libres, on a

$$u_{y,i}(x,t) = \bar{u}_{y,i}(x) e^{j\omega t} \quad (\text{V.54b})$$

$\bar{u}_{y,i}(x)$ est la fonction de forme des vibrations et ω désigne la fréquence (pulsation) propre de la poutre. La substitution de l'équation (V.54b) dans l'équation (V.54a) donne

$$\bar{u}_{y,i}(x) = a_{i1} \cos \lambda x + a_{i2} \sin \lambda x + a_{i3} \cosh \lambda x + a_{i4} \sinh \lambda x \quad (\text{V.55})$$

avec

$$\lambda = \lambda_i = \omega^{1/2} (\rho_i S_i / E_i I_i)^{1/4}$$

la rotation par flexion est

$$\theta_{z,i}(x,t) = \frac{\partial u_{y,i}(x,t)}{\partial x} \quad (\text{V.56})$$

On désigne par $u_i = \{u_{y,i}, \theta_{z,i}\}^T$ le vecteur des vibrations. Il en résulte

$$u_y(x,t) = \bar{u}_y(x) e^{j\omega t} \quad (\text{V.57})$$

La partie réelle de ce vecteur s'écrit sous la forme

$$\bar{u}_i(x) = C_i(x) a_i \quad (\text{V.58})$$

avec

$$C_i(x) = \begin{bmatrix} \cos \lambda x & \sin \lambda x & \cosh \lambda x & \sinh \lambda x \\ -\lambda \sin \lambda x & \lambda \cos \lambda x & \lambda \sinh \lambda x & \lambda \cosh \lambda x \end{bmatrix}$$

alors que

$a_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}\}$ représente le vecteur des coefficients constants pour le i ème tronçon de poutre. Les forces et les moment internes sont donnés par la théorie technique des poutres

$$T_{y,i}(x,t) = -EI_i \frac{\partial^3 u_{y,i}(x,t)}{\partial x^3} \quad (\text{V.59a})$$

$$M_{z,i}(x,t) = -EI_i \frac{\partial^2 u_{y,i}(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{V.59b})$$

$T_{y,i}(x,t)$ est l'effort tranchant dans la direction y de la section de coordonnée axiale x du i ème tronçon de poutre, et $M_{y,i}(x,t)$ désigne le moment fléchissant dans le plan vertical.

Compte tenu de l'équation (V.54b), ces forces et moments internes peuvent s'écrire sous la forme

$$T_{y,i}(x,t) = \bar{T}_{y,i}(x) e^{j\omega t} \quad (\text{V.60a})$$

$$M_{y,i}(x,t) = \bar{M}_{y,i}(x) e^{j\omega t} \quad (\text{V.60b})$$

Si $p_i = \{T_{y,i}, M_{z,i}\}^T$ est désigné comme vecteur des forces et des moments internes, ceci donne

$$p_i = \bar{p}_i(x) e^{j\omega t} \quad (\text{V.61a})$$

$$\bar{p}_i(x) = D_i(x) a_i \quad (\text{V.61b})$$

avec

$$D_i(x) = E_i I_i \begin{bmatrix} -\lambda^3 \sin \lambda x & \lambda^3 \cos \lambda x & -\lambda^3 \sinh \lambda x & -\lambda^3 \cosh \lambda x \\ \lambda^2 \cos \lambda x & \lambda^2 \sin \lambda x & -\lambda^2 \cosh \lambda x & -\lambda^2 \sinh \lambda x \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites du système de l figure (V.4) sont

$$\bar{u}_{y,1}(0)=0, \quad \bar{\theta}_{z,1}(0)=0 \quad (\text{V.62a,b})$$

$$\bar{u}_{y,N}(L_N)=0, \quad \bar{M}_{z,N}(L_N)=0 \quad (\text{V.62c,d})$$

V. 2. 2. a. Cas de deux tronçons de poutre voisins ayant différentes caractéristiques mécaniques et/ou géométriques

Un exemple de deux tronçons de poutre adjacents est schématisé sur la figure (V. 5). Les axes du système de coordonnées x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} du i ème tronçon de poutre sont respectivement parallèles aux axes du référentiel x_1, x_2, x_3 . L_i désigne la longueur du i ème tronçon

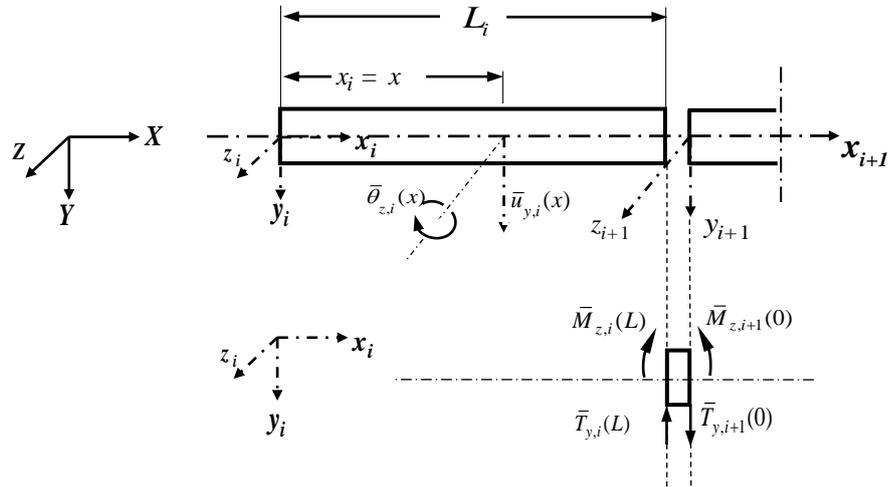


Figure V. 5 : Illustration schématique des déplacements et des forces (moments) internes agissant au niveau de la jonction de deux tronçons adjacents (i) et ($i+1$).

A la jonction de deux tronçons ayant différentes constantes du matériau et/ou différents diamètres, les équations de continuité des déplacements et les équations d'équilibre des forces (moments) internes s'écrivent

$$\bar{u}_i(L_i) = \bar{u}_{i+1}(0) \quad (\text{V.63})$$

$$\bar{p}_i(L_i) = \bar{p}_{i+1}(0) \quad (\text{V.64})$$

Tenant compte des équations (V.58) et (V.61b), les équations (V.63) et (V.64) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$C_i(L_i) a_i = C_{i+1}(0) a_{i+1} \quad (\text{V.65})$$

$$D_i(L_i) a_i = D_{i+1}(0) a_{i+1} \quad (\text{V.66})$$

$$B_i = \begin{bmatrix} C_{i+1,0} \\ D_{i+1,0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{i,L_i} \\ D_{i,L_i} \end{bmatrix} \quad (\text{V.67})$$

La matrice B_i peut être considéré comme une matrice de transfert relative aux vecteurs des coefficients a_i et a_{i+1} .

V. 2. 2.b. Le cas d'une masse discrète reliant deux tronçons (i) et ($i+1$)

Le cas où la section de jonction de deux tronçons passe par le centre de gravité d'une masse discrète, les équations suivantes sont vérifiées

$$u_i(L_i) = u_{i+1}(0) \quad (\text{V.68})$$

$$p_i(L_i) = p_{i+1}(0) - M_i \frac{\partial^2 u_i(L_i)}{\partial t^2} \quad (\text{V.69})$$

où M_i est la matrice d'inertie diagonale de la masse discrète m_i située à la fin du i -ième

tronçon d'arbre, avec $M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & J_{i,d} \end{bmatrix}$.

Tenant compte des équations (V.58) et (V.61b), les équations (V.68) et (V.69) peuvent s'écrire comme

$$C_i(L_i) a_i = C_{i+1}(0) a_{i+1} \quad (\text{V.70})$$

$$D_i(L_i) a_i = D_{i+1}(0) a_{i+1} + \omega^2 M_i C_i(L_i) a_i \quad (\text{V.71})$$

$$a_{i+1} = \begin{bmatrix} C_{i+1}(0) \\ D_{i+1}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_i(L_i) \\ D_i(L_i) - \omega^2 M_i C_i(L_i) \end{bmatrix} a_i \quad (\text{V.72})$$

d'où

$$a_{i+1} = R_i a_i \quad (\text{V.73})$$

R_i représente la matrice de transfert à travers la masse discrète.

V. 2. 2. c. Le cas d'un support élastique intermédiaire reliant deux tronçons (i) et ($i+1$)

Le cas où la jonction entre deux tronçons se fait au niveau d'un support élastique intermédiaire, les équations de continuité des vibrations et les équations d'équilibre des forces (et moments) internes suivantes sont vérifiées

$$u_i(L_i) = u_{i+1}(0) \quad (\text{V.74})$$

$$p_i(L_i) = p_{i+1}(0) - K_i u_i(L_i) \quad (\text{V.75})$$

où K_i est la matrice de rigidité du $i^{\text{ème}}$ support intermédiaire

$$K_i = \begin{bmatrix} k_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.76})$$

Tenant compte des équations (V.58) et (V.61b), les équations (V.74) et (V.75) peuvent s'écrire

$$C_i(L_i) a_i = C_{i+1}(0) a_{i+1} \quad (\text{V.77})$$

$$D_i(L_i) a_i = D_{i+1}(0) a_{i+1} - K_i C_i(L_i) a_i \quad (\text{V.78})$$

$$a_{i+1} = \begin{bmatrix} D_{i+1}(0) \\ C_{i+1}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_i(L_i) + K_i C_i(L_i) \\ C_i(L_i) \end{bmatrix} a_i \quad (\text{V.79})$$

$$S_i = \begin{bmatrix} D_{i+1}(0) \\ C_{i+1}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_i(L_i) + K_i C_i(L_i) \\ C_i(L_i) \end{bmatrix} \quad (\text{V.80})$$

où S_i désigne la matrice de transfert à travers le support élastique intermédiaire.

Une fois les matrices de transfert calculées, on détermine les vecteurs des coefficients des solutions des équations différentielles, du second jusqu'au $n^{\text{ième}}$ tronçon d'arbre (a_2, a_3, \dots, a_N) , en fonction de a_1 , qui représente le vecteur des coefficients des solutions des vibrations du premier tronçon ($i=1$). Pour le système illustré sur la figure (V. 4), on obtient

$$\begin{aligned} a_2 &= B_1 a_1, \\ a_3 &= B_2 a_2 = B_2 B_1 a_1 \\ a_4 &= R_3 a_3 = R_3 B_2 B_1 a_1 \\ &\vdots \\ a_n &= B_{n-1} \dots S_3 \dots R_3 B_2 B_1 a_1. \end{aligned} \quad (\text{V.81})$$

V. 2. 3. Fréquences propres des vibrations transversales verticales de la poutre

Les conditions aux limites (V.62a,b,c,d) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \bar{u}_{y,1}(0) \\ \bar{\theta}_{z,1}(0) \end{bmatrix} = C_1(0) a_1 = 0 \quad (\text{V.82a})$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \bar{u}_{y,N}(L_N) \\ \bar{M}_{z,N}(L_N) \end{bmatrix} = G(L_N)a_N = 0 \quad (\text{V.82b})$$

avec

$$G(L_N) = \begin{bmatrix} \cos \lambda L_N & \sin \lambda L_N & \cosh \lambda L_N & \sinh \lambda L_N \\ EI_N \lambda^2 \cos \lambda L_N & EI_N \lambda^2 \sin \lambda L_N & -EI_N \lambda^2 \cosh \lambda L_N & -EI_N \lambda^2 \sinh \lambda L_N \end{bmatrix}$$

En utilisant les relations données par l'équation (V.81), les équation (V.82a) et (V.82b) s'écrivent sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} C_1(0) \\ G(L_N)B_{n-1} \dots S_3 \dots R_3 B_2 B_1 \end{bmatrix} a_1 = 0 \quad (\text{V.83})$$

Finalement, l'équation des fréquences propres du système de la figure (V.4) est

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} C_1(0) \\ G(L_N)B_{n-1} \dots S_3 \dots R_3 B_2 B_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{V.84})$$

VI. Vibrations Transversales des Lignes de Propulsion Navales

VI. 1. Référentiels

Considérons la partie de la ligne d'arbres schématisée sur la figure (VI.1), tournant à la vitesse angulaire constante ω_0 , soumise aux excitations hydrodynamiques de l'hélice propulsive $f_{0,\alpha}$ ($\alpha = 2, 3, 5, 6$) relativement au référentiel fixe x_1, x_2, x_3 . Pour l'arbre porte hélice (*nr.* 1), on considère le système fixe de coordonnées cartésiennes x_{11}, x_{12}, x_{13} dont les axes sont respectivement parallèles aux axes x_1, x_2, x_3 , et un système de coordonnées mobile $\tilde{x}_{11}, \tilde{x}_{12}, \tilde{x}_{13}$, tournant avec l'arbre et dont les axes coïncident avec les axes du système de coordonnées x_{11}, x_{12}, x_{13} , respectivement, aux instants $t_0 = 2k\pi/\omega_0$, $k = 1, 2, \dots$

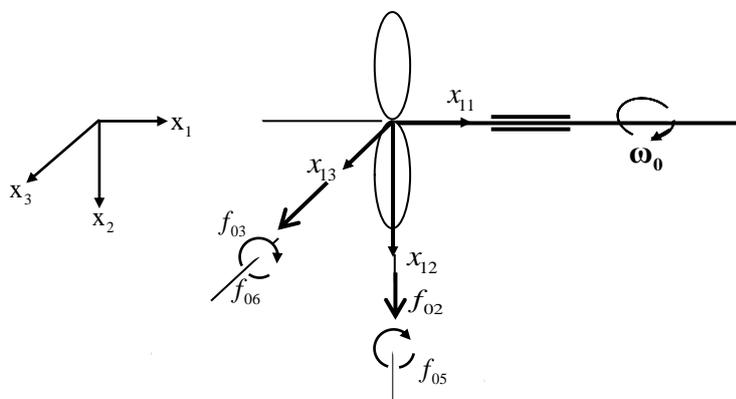


Figure VI. 1 : Excitations hydrodynamiques dues au travail de l'hélice propulsive.

Les forces et les moments dans le système tournant sont désignés par $\tilde{f}_{0\alpha}$, et sont déterminés à partir des forces et des moments $f_{0,\alpha}$ ($\alpha = 2, 3, 5, 6$) par la relation suivante:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{f}_{02} \\ \tilde{f}_{03} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{02} \\ f_{03} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI. 1})$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{02} &= f_{02} \cos(\omega_0 t) + f_{03} \sin(\omega_0 t) \\ \tilde{f}_{03} &= -f_{02} \sin(\omega_0 t) + f_{03} \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (\text{VI. 2})$$

La résultante des forces transversales f_{02} et f_{03} à tout instant est donnée par

$$f_R = (f_{02}^2 + f_{03}^2)^{1/2} \quad (\text{VI. 3})$$

alors que dans le système de coordonnées tournant, la résultantes des forces transversales \tilde{f}_{02} et \tilde{f}_{03} à tout instant est égale à

$$\tilde{f}_R = (\tilde{f}_{02}^2 + \tilde{f}_{03}^2)^{1/2} \quad (\text{VI.4})$$

qui peut s'exprimer comme

$$\begin{aligned} \tilde{f}_R &= \left[(f_{02} \cos(\omega_0 t) + f_{03} \sin(\omega_0 t))^2 + (-f_{02} \sin(\omega_0 t) + f_{03} \cos(\omega_0 t))^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[(f_{02})^2 + (f_{03})^2 \right]^{1/2} = f_R \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

Une relation analogue peut être obtenue entre les moments f_{05}, f_{06} et $\tilde{f}_{05}, \tilde{f}_{06}$. La démonstration ci-dessus veut dire, que les vibrations transversales d'une section arbitraire de la ligne d'arbres peuvent être déterminées par rapport à un système de coordonnées fixe. Ceci est avantageux vu les propriétés anisotropiques de l'élasticité des supports des paliers /les rigidités des supports des paliers dans les directions transversales (verticale et horizontale) sont en général différentes, l'arbre tournant et les supports des paliers constituent un système variable dans le temps.

Dans ce qui suivra, les vibrations transversales $u_{y,i}^{(v)}(x,t)$ et $u_{z,i}^{(v)}(x,t)$ du i -ième tronçon d'arbre dans la section de coordonnées axiale x sont décrites par des équations différentielles à coefficients constants dans le système de coordonnées fixe, x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} , dont les axes sont respectivement parallèles aux axes du référentiel x_1, x_2, x_3 .

VI. 2. Modèle physique de la ligne de propulsion navale

Le modèle physique de la partie du système propulsif analysée est représenté sur la figure (VI.2), ce modèle est utilisé par la société de classification (LR) [10], pour le calcul des vibration latérales (transversales) de la ligne de propulsion navale. Dans cette partie de la ligne d'arbres, l'effet des excitations hydrodynamiques de l'hélice propulsive est considérable. Précisément, l'arbre porte hélice, l'arbre passant dans le tube d'étambot ainsi que les arbres intermédiaires, tenant compte du palier de butée axiale, ainsi que du pignon et des paliers du réducteur. On suppose que :

- le matériau de la ligne d'arbre est isotrope,
- l'hélice, les accouplements à brides et le pignon du réducteur constituent des masses discrètes,
- les axes principaux centraux d'inertie des sections transversales des arbres coïncident avec l'axe de rotation.

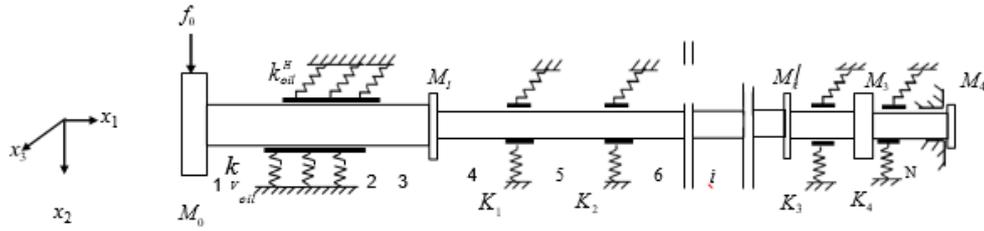


Figure. VI. 2 : Modèle physique de la ligne d'arbres de propulsion analysée.

$f_0 = [f_{02}, f_{03}, f_{05}, f_{06}]^T = \{f_{0\alpha}\}$, où f_0 représente le vecteur des excitations hydrodynamiques, $\alpha=2$ concerne la force transversale verticale, $\alpha=3$ la force transversale horizontale, $\alpha=5$ le moment de flexion dans le plan horizontal, et $\alpha=6$ le moment de flexion dans le plan vertical,

$M_0 = [m_{ij}]$, $i = 2, 3, 5, 6$, $j = 2, 3, 5, 6$ représente la matrice d'inertie de l'hélice propulsive incluant la masse d'eau ajoutée,

M_1 est la matrice d'inertie de l'accouplement à brides, (arbre porte hélice avec arbre intermédiaire),

M_2 désigne la matrice d'inertie de l'accouplement à brides, (arbre intermédiaire avec arbre du réducteur),

M_3 - la matrice d'inertie du pignon du réducteur,

M_4 - la masse de la bride du palier de butée axiale,

k_{oil}^V , k_{oil}^H représentent les coefficients de rigidité du film d'huile dans le palier d'étambot considéré comme support élastique continu du type de Winkler, dans la direction verticale et horizontale, respectivement.

K_1 et K_2 sont les matrices de rigidité du film d'huile réduites aux points de support de l'arbre dans les paliers intermédiaires,

K_3 et K_4 - les matrices de rigidité du film d'huile réduites au point de support dans les palier du réducteur.

Le système est supposé linéaire. Si l'on néglige l'effet gyroscopique dans l'arbre, les vibrations transversales du i -ième tronçon d'arbre sont non couplées et peuvent être décrites par les équations différentielles suivantes

$$\rho_i S_i \frac{\partial^2 u_{y,i}(x,t)}{\partial t^2} + E_i I_i \frac{\partial^4 u_{y,i}(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{VI.6})$$

$$\rho_i S_i \frac{\partial^2 u_{z,i}(x,t)}{\partial t^2} + E_i I_i \frac{\partial^4 u_{z,i}(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{VI.7})$$

où E_i représente le module d'élasticité (N/m^2), S_i l'aire de la section transversale (m^2), I_i le moment d'inertie diamétral (m^4) du i ème tronçon d'arbre, ρ_i la masse volumique du matériau de l'arbre (kg/m^3), alors que $u_{y,i}$ est la vibration du centre de la section transversale du i ème tronçon d'arbre dans la direction verticale (y), à la coordonnée axiale $x = x_i$ et à l'instant t , $u_{z,i}$ désigne la vibration dans la direction horizontale .

Les rotations par flexion sont

$$\theta_{z,i}(x,t) = \frac{\partial u_{y,i}(x,t)}{\partial x} \quad (\text{VI.8})$$

$$\theta_{y,i}(x,t) = -\frac{\partial u_{z,i}(x,t)}{\partial x} \quad (\text{VI.9})$$

Pour le tronçon d'arbre supporté par le palier d'étambot ($i=2$), les vibrations transversales sont décrites par les équations suivantes

$$\rho_i S_i \frac{\partial^2 u_{y,2}(x,t)}{\partial t^2} + E_i I_i \frac{\partial^4 u_{y,2}(x,t)}{\partial x^4} + k_{oil}^V u_{y,2} = 0 \quad (\text{VI.10})$$

$$\rho_i S_i \frac{\partial^2 u_{z,2}(x,t)}{\partial t^2} + E_i I_i \frac{\partial^4 u_{z,2}(x,t)}{\partial x^4} + k_{oil}^H u_{z,2} = 0 \quad (\text{VI.11})$$

$u_i = \{u_{y,i}, u_{z,i}, \theta_{y,i}, \theta_{z,i}\}$ désigne le vecteur des vibrations à la section de coordonnée axiale

$x_{i1} = x$.

Selon la théorie technique des poutres [4], les efforts tranchants et les moments fléchissant s'expriment comme suit

$$T_{y,i}(x,t) = -EI_i \frac{\partial^3 u_{y,i}}{\partial x^3}, \quad T_{z,i}(x,t) = -EI_i \frac{\partial^3 u_{z,i}}{\partial x^3} \quad (\text{VI.12})$$

$$M_{z,i}(x,t) = -EI_i \frac{\partial^2 u_{y,i}}{\partial x^2}, \quad M_{y,i}(x,t) = EI_i \frac{\partial^2 u_{z,i}}{\partial x^2} \quad (\text{VI.13})$$

$T_{y,i}(x,t)$ et $T_{z,i}(x,t)$ sont les efforts tranchants dans les directions y et z , respectivement. Les indices i et x se réfèrent au i .ième tronçon d'arbre et à sa section, respectivement. $M_{z,i}$ et $M_{y,i}$ désignent les moments fléchissants dans le plan vertical et dans le plan horizontal.

$p_i = p_i(x, t) = \{T_{y,i}, T_{z,i}, M_{y,i}, M_{z,i}\}$ désigne le vecteur des forces et des moments internes.

Les contraintes tangentielles et normales induites par ces forces et moments internes sont

$$\tau_{y,i} = \frac{T_{y,i}}{A_i}, \quad \tau_{z,i} = \frac{T_{z,i}}{A_i}, \quad \sigma_{i,y} = \frac{M_{i,y}}{W_i}, \quad \sigma_{i,z} = \frac{M_{i,z}}{W_i} \quad (\text{VI.14a})$$

W_i représente le module à la flexion du i ème tronçon d'arbre.

$\sigma_i = \sigma_i(x, t) = \{\tau_{y,i}, \tau_{z,i}, \sigma_{i,y}, \sigma_{i,z}\}$ est le vecteur des contraintes dans la section de coordonnées axiale $x_{i1} = x$, dans le repère fixe x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} .

La relation (VI.1) sert à trouver les contraintes dans la repère mobile $\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \tilde{x}_{i3}$, ainsi :

$$\tilde{\sigma}_{ix} = T \sigma_{ix} \quad (\text{VI.14b})$$

où

$$T = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t & 0 & 0 \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ 0 & 0 & \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix}$$

Les excitations hydrodynamiques agissant sur l'hélice tournant à la vitesse ω_0 sont exprimées sous la forme de série de Fourier suivante

$$f_{0\alpha} = f_{0\alpha}^{(0)} + \sum_{\nu} f_{0\alpha}^{(\nu)} \cos(\nu \omega_0 t + \theta_{0\alpha}^{(\nu)}), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (\text{VI.15})$$

qui peut être écrite sous la forme complexe

$$f_{0\alpha} = \sum_{\nu} \bar{f}_{0\alpha}^{(\nu)} e^{j\nu \omega_0 t}, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (\text{VI.16})$$

où $\bar{f}_{0\alpha}^{(\nu)}$ est l'amplitude complexe définie par l'expression

$$\bar{f}_{0\alpha}^{(\nu)} = \hat{f}_{0\alpha}^{(\nu)} e^{i\theta_{0\alpha}^{(\nu)}} \quad (\text{VI.17})$$

Dans laquelle, $\hat{f}_{0\alpha}^{(\nu)}$ est l'amplitude réelle de la ν -ième composante des excitations hydrodynamiques de l'hélice propulsive dans la direction α , $\theta_{0\alpha}^{(\nu)}$ la phase initiale de cette composante, et ω_0 représente la vitesse angulaire de l'hélice propulsive.

On cherche les vibrations, les forces (moments) internes et les contraintes comme parties réelles des expressions suivantes:

$$u_{y,i}(x,t) = \sum_v \bar{u}_{y,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.18})$$

$$u_{z,i}(x,t) = \sum_v \bar{u}_{z,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.19})$$

$$\theta_{z,i}(x,t) = \sum_v \bar{\theta}_{z,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.20})$$

$$\theta_{y,i}(x,t) = \sum_v \bar{\theta}_{y,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.21})$$

$$T_{y,i}(x,t) = \sum_v \bar{T}_{y,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.22})$$

$$T_{z,i}(x,t) = \sum_v \bar{T}_{z,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.23})$$

$$M_{y,i}(x,t) = \sum_v \bar{M}_{y,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.24})$$

$$M_{z,i}(x,t) = \sum_v \bar{M}_{z,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.25})$$

$$\tau_{y,i}(x,t) = \sum_v \bar{\tau}_{y,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.26})$$

$$\tau_{z,i}(x,t) = \sum_v \bar{\tau}_{z,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.27})$$

$$\sigma_{y,i}(x,t) = \sum_v \bar{\sigma}_{y,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.28})$$

$$\sigma_{z,i}(x,t) = \sum_v \bar{\sigma}_{z,i}^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.29})$$

On substitue les équations (VI.17) et (VI.18) dans les équations différentielles (VI.6) et (VI.7), et compte tenu des relations (VI.8) et (VI.9), on obtient

$$u_i(x,t) = \sum_v \bar{u}_i^{(v)}(x) e^{jv\omega_0 t} \quad (\text{VI.30})$$

$$\bar{u}_i^{(v)}(x) = C_i^{(v)}(x) a_i^{(v)} \quad (\text{VI.31})$$

$$C_i^{(v)}(x) = \left[\left(C_i^{(v)}(x) \right)_1 : \left(C_i^{(v)}(x) \right)_2 \right], \quad i \neq 2, \quad (\text{VI.32})$$

où

-pour $i \neq 2$ et $v = 0$, on a:

$$\left(C_i^{(0)}(x)\right)_1 = \begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(C_i^{(0)}(x)\right)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ -3x^2 & -2x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-pour $i \neq 2$ et $\nu \neq 0$, on obtient:

$$\left(C_i^{(\nu)}(x)\right)_1 = \begin{bmatrix} \cos \lambda x & \sin \lambda x & ch \lambda x & sh \lambda x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \sin \lambda x & \lambda \cos \lambda x & \lambda sh \lambda x & \lambda ch \lambda x \end{bmatrix}$$

$$\left(C_i^{(\nu)}(x)\right)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda x & \sin \lambda x & ch \lambda x & sh \lambda x \\ \lambda \sin \lambda x & -\lambda \cos \lambda x & -\lambda sh \lambda x & -\lambda ch \lambda x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec $\lambda = \lambda_i^{(\nu)} = \left[\nu^2 \omega^2 A_i \rho_i / (E_i I_i) \right]^{1/4}$.

Pour l'arbre passant dans le tube d'étambot ($i=2$), on substitue les équations (VI.17) et (VI.18) dans les équations différentielles (VI.10) et (VI.11), et on obtient

$$u_2(x,t) = \sum_{\nu} \bar{u}_2^{(\nu)}(x) e^{j\nu\omega t} \quad (\text{VI.33})$$

$$\bar{u}_2^{(\nu)}(x) = C_2^{(\nu)}(x) a_2^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VI.34})$$

$$C_2^{(\nu)}(x) = \left[\left(C_2^{(\nu)}(x)\right)_1 ; \left(C_2^{(\nu)}(x)\right)_2 \right] \quad (\text{VI.35})$$

où

-pour $i = 2$ et $\nu = 0$, on a:

$$\left(C_{2x}^{(0)}(x)\right)_1 = \begin{bmatrix} Q_{\nu} & N_{\nu} & S_{\nu} & T_{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\nu}(S_{\nu} - N_{\nu}) & \lambda_{\nu}(Q_{\nu} - T_{\nu}) & \lambda_{\nu}(Q_{\nu} + T_{\nu}) & \lambda_{\nu}(N_{\nu} + S_{\nu}) \end{bmatrix}$$

avec

$$\lambda_{\nu} = \left(k_{oil}^{\nu} / 4 E_2 I_2 \right)^{1/4}, \quad Q_{\nu} = \cos(\lambda_{\nu} x) ch(\lambda_{\nu} x), \quad N_{\nu} = \cos(\lambda_{\nu} x) sh(\lambda_{\nu} x),$$

$$S_{\nu} = \sin(\lambda_{\nu} x) ch(\lambda_{\nu} x), \quad T_{\nu} = \sin(\lambda_{\nu} x) sh(\lambda_{\nu} x)$$

$$\left(C_{2x}^{(0)}(x) \right)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_H & N_H & S_H & T_H \\ \lambda_H (S_H - N_H) & \lambda_H (T_H - Q_H) & -\lambda_H (Q_H + T_H) & -\lambda_H (N_H + S_H) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où

$$\lambda_H = (k_{oil}^H / 4 E_2 I_2)^{1/4}, \quad Q_H = \cos(\lambda_H x) ch(\lambda_H x), \quad N_H = \cos(\lambda_H x) sh(\lambda_H x),$$

$$S_H = \sin(\lambda_H x) ch(\lambda_H x) \quad T_H = \sin(\lambda_H x) sh(\lambda_H x)$$

a/pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^V - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) < 0$, on a:

$$\left(C_2^{(\nu)}(x) \right)_1 = \begin{bmatrix} \cos \lambda_{V^-} x & \sin \lambda_{V^-} x & ch \lambda_{V^-} x & sh \lambda_{V^-} x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_{V^-} \sin \lambda_{V^-} x & \lambda_{V^-} \cos \lambda_{V^-} x & \lambda_{V^-} sh \lambda_{V^-} x & \lambda_{V^-} ch \lambda_{V^-} x \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{V^-} = \left[(\nu^2 \omega^2 \rho A_2 - k_{oil}^V) / (EI_2) \right]^{1/4},$$

b/pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^V - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) > 0$, on obtient:

$$\left(C_2^{(\nu)}(x) \right)_1 = \begin{bmatrix} Q_{V^+} & N_{V^+} & S_{V^+} & T_{V^+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{V^+} (N_{V^+} - S_{V^+}) & \lambda_{V^+} (Q_{V^+} - T_{V^+}) & \lambda_{V^+} (Q_{V^+} + T_{V^+}) & \lambda_{V^+} (N_{V^+} + S_{V^+}) \end{bmatrix},$$

où

$$\lambda_{V^+} = \left[(k_{oil}^V - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) / (4EI_2) \right]^{1/4}, \quad S_{V^+} = \sin(\lambda_{V^+} x) ch(\lambda_{V^+} x),$$

$$N_{V^+} = \cos(\lambda_{V^+} x) sh(\lambda_{V^+} x), \quad Q_{V^+} = \cos(\lambda_{V^+} x) ch(\lambda_{V^+} x), \quad T_{V^+} = \sin(\lambda_{V^+} x) sh(\lambda_{V^+} x)$$

c/pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^H - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) < 0$, on a:

$$\left(C_2^{(\nu)}(x) \right)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda_{H^-} x & \sin \lambda_{H^-} x & ch \lambda_{H^-} x & sh \lambda_{H^-} x \\ \lambda_{H^-} \sin \lambda_{H^-} x & -\lambda_{H^-} \cos \lambda_{H^-} x & -\lambda_{H^-} sh \lambda_{H^-} x & -\lambda_{H^-} ch \lambda_{H^-} x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{H^-} = \left[(\nu^2 \omega_0^2 \rho A_2 - k_{oil}^H) / (EI_2) \right]^{1/4}$$

d/pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^H - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) > 0$, on obtient:

$$\left(C_2^{(\nu)}(x) \right)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{H^+} & N_{H^+} & S_{H^+} & T_{H^+} \\ \lambda_{H^+} (S_{H^+} - N_{H^+}) & \lambda_{H^+} (T_{H^+} - Q_{H^+}) & -\lambda_{H^+} (Q_{H^+} + T_{H^+}) & -\lambda_{H^+} (N_{H^+} + S_{H^+}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où

$$\lambda_{H^+} = \left[(k_{oil}^H - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) / (4EI_2) \right]^{1/4},$$

$$Q_{H^+} = \cos(\lambda_{H^+} x) \operatorname{ch}(\lambda_{H^+} x), \quad N_{H^+} = \cos(\lambda_{H^+} x) \operatorname{sh}(\lambda_{H^+} x),$$

$$S_{H^+} = \sin(\lambda_{H^+} x) \operatorname{ch}(\lambda_{H^+} x), \quad T_{H^+} = \sin(\lambda_{H^+} x) \operatorname{sh}(\lambda_{H^+} x)$$

$a_i^{(\nu)} = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i8}]^T$ représente le vecteur des coefficients constants des solutions des équations différentielles régissant les vibrations transversales verticales et horizontales du i ème tronçon d'arbres.

Le vecteur des forces et moments internes peut s'écrire sous la forme suivante

$$p_i(x, t) = \sum_{\nu} \bar{p}_i(x) e^{j\nu\omega_0 t} \quad (\text{VI.36})$$

$$\bar{p}_i(x) = D_i^{(\nu)}(x) a_i^{(\nu)} \quad (\text{VI.37})$$

$$D_i^{(\nu)}(x) = \left[\left(D_i^{(\nu)}(x) \right)_1 ; \left(D_i^{(\nu)}(x) \right)_2 \right]$$

où :

-pour $i \neq 2$ et $\nu = 0$, on a:

$$\left(D_i^{(0)}(x) \right)_1 = E_i I_i \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6x & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(D_i^{(0)}(x) \right)_2 = E_i I_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 6x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-pour $i \neq 2$ et $\nu \neq 0$, on obtient:

$$\left(D_i^{(\nu)}(x) \right)_1 = E_i I_i \begin{bmatrix} -\lambda^3 \sin \lambda x \lambda^3 \cos \lambda x - \lambda^3 \sinh \lambda x - \lambda^3 \cosh \lambda x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2 \cos \lambda x \lambda^2 \sin \lambda x - \lambda^2 \cosh \lambda x - \lambda^2 \sinh \lambda x \end{bmatrix}$$

$$\left(D_i^{(v)}(x)\right)_2 = E_i I_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^3 \sin \lambda x & \lambda^3 \cos \lambda x & -\lambda^3 \sinh \lambda x & -\lambda^3 \cosh \lambda x \\ -\lambda^2 \cos \lambda x & -\lambda^2 \sin \lambda x & \lambda^2 \cosh \lambda x & \lambda^2 \sinh \lambda x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\lambda = \lambda_i^{(v)} = \left[\nu^2 \omega_0^2 A_i \rho_i / (E_i I_i) \right]^{1/4}.$$

Pour l'arbre passant dans le tube d'étambot ($i = 2$), on obtient pour $\nu = 0$:

$$D_2^{(0)}(x) = \left[\left(D_2^{(0)}(x)\right)_1 ; \left(D_2^{(0)}(x)\right)_2 \right],$$

$$\left(D_2^{(0)}(x)\right)_1 = 2E_i I_i \begin{bmatrix} \lambda_V^3 (N_V + S_V) & \lambda_V^3 (Q_V + T_V) & \lambda_V^3 (T_V - Q_V) & \lambda_V^3 (S_V - N_V) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_V^2 T_V & \lambda_V^2 S_V & \lambda_V^2 N_V & \lambda_V^2 Q_V \end{bmatrix},$$

$$\left(D_2^{(0)}(x)\right)_2 = 2E_i I_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_H^3 (N_H + S_H) & \lambda_H^3 (Q_H + T_H) & \lambda_H^3 (T_H - Q_H) & \lambda_H^3 (S_H - N_H) \\ -\lambda_H^2 T_H & -\lambda_H^2 S_H & \lambda_H^2 N_H & \lambda_H^2 Q_H \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a/ pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^V - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) < 0$, on a:

$$\left(D_2^{(v)}(x)\right)_1 = E_i I_i \begin{bmatrix} -\lambda_{V^-}^3 \sin \lambda_{V^-} x & \lambda_{V^-}^3 \cos \lambda_{V^-} x & -\lambda_{V^-}^3 sh \lambda_{V^-} x & -\lambda_{V^-}^3 ch \lambda_{V^-} x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{V^-}^2 \cos \lambda_{V^-} x & \lambda_{V^-}^2 \sin \lambda_{V^-} x & -\lambda_{V^-}^2 ch \lambda_{V^-} x & -\lambda_{V^-}^2 sh \lambda_{V^-} x \end{bmatrix}$$

b/ pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^V - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) > 0$, on obtient:

$$\left(D_2^{(v)}(x)\right)_1 = 2E_i I_i \begin{bmatrix} \lambda_{V^+}^3 (N_{V^+} + S_{V^+}) & \lambda_{V^+}^3 (Q_{V^+} + T_{V^+}) & \lambda_{V^+}^3 (T_{V^+} - Q_{V^+}) & \lambda_{V^+}^3 (S_{V^+} - N_{V^+}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{V^+}^2 T_{V^+} & \lambda_{V^+}^2 S_{V^+} & -\lambda_{V^+}^2 N_{V^+} & -\lambda_{V^+}^2 Q_{V^+} \end{bmatrix}$$

c/ pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^H - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) < 0$, on a:

$$\left(D_2^{(v)}(x)\right)_2 = E_i I_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_{H^-}^3 \sin \lambda_{H^-} x & \lambda_{H^-}^3 \cos \lambda_{H^-} x & -\lambda_{H^-}^3 sh \lambda_{H^-} x & -\lambda_{H^-}^3 ch \lambda_{H^-} x \\ -\lambda_{H^-}^2 \cos \lambda_{H^-} x & -\lambda_{H^-}^2 \sin \lambda_{H^-} x & \lambda_{H^-}^2 ch \lambda_{H^-} x & \lambda_{H^-}^2 sh \lambda_{H^-} x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d/pour $\nu \neq 0$ et $(k_{oil}^H - \nu^2 \omega^2 \rho A_2) > 0$, on obtient:

$$\left(D_2^{(v)}(x)\right)_2 = 2E_i I_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{H^+}^3 (N_{H^+} + S_{H^+}) & \lambda_{H^+}^3 (Q_{H^+} + T_{H^+}) & \lambda_{H^+}^3 (T_{H^+} - Q_{H^+}) & \lambda_{H^+}^3 (N_{H^+} - S_{H^+}) \\ -\lambda_{H^+}^2 T_{H^+} & -\lambda_{H^+}^2 S_{H^+} & \lambda_{H^+}^2 N_{H^+} & \lambda_{H^+}^2 Q_{H^+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

VI.3. Conditions aux limites

Sur les systèmes propulsifs équipés d'une hélice à masse considérable, l'effet gyroscopique peut influencer les vibrations de tournoiement (whirling vibration). Lorsqu'une énorme masse ayant des moments d'inerties transversales et polaires considérables tourne, le moment gyroscopique apparaît. La vitesse de rotation est aussi une cause de ce phénomène.

Tenant compte de l'amortissement et des effets gyroscopiques dus au travail de l'hélice propulsive, les conditions aux limites à l'extrémité gauche (au droit de l'hélice) du système peuvent s'écrire sous la forme

$$-T_{y,1}(0,t) + m_{02} \frac{\partial^2 u_{y,1}(0,t)}{\partial t^2} + c_{02} \frac{\partial u_{y,1}(0,t)}{\partial t} = f_{02} \quad (\text{VI.38})$$

$$-T_{z,1}(0,t) + m_{03} \frac{\partial^2 u_{z,1}(0,t)}{\partial t^2} + c_{03} \frac{\partial u_{z,1}(0,t)}{\partial t} = f_{03}, \quad (\text{VI.39})$$

$$-M_{y,1}(0,t) - m_{05} \frac{\partial^2 \theta_{y,1}(0,t)}{\partial t^2} - c_{05} \frac{\partial \theta_{y,1}(0,t)}{\partial t} = -f_{05}, \quad (\text{VI.40})$$

$$-M_{z,1}(0,t) - m_{06} \frac{\partial^2 \theta_{z,1}(0,t)}{\partial t^2} - c_{06} \frac{\partial \theta_{z,1}(0,t)}{\partial t} = -f_{06}, \quad (\text{VI.41})$$

Les équations (VI.40) et (VI.41) peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$-\bar{M}_{y,1}(0) + m_{05} (\nu \omega)^2 \bar{\theta}_{y,i}(0) + c_{05} j \nu \omega \bar{\theta}_{y,i}(0) = -\bar{f}_{05} \quad (\text{VI.42})$$

$$-\bar{M}_{z,1}(0) + m_{06} (\nu \omega)^2 \bar{\theta}_{z,i}(0) + c_{06} j \nu \omega \bar{\theta}_{z,i}(0) = -\bar{f}_{06} \quad (\text{VI.43})$$

$$-\bar{T}_{y,1}(0) + (-(\nu \omega)^2 m_{02} + j \nu \omega c_{02}) \bar{u}_{y,1}(0) = \bar{f}_{02}, \quad (\text{VI.44})$$

$$-\bar{T}_{z,1}(0) + (\nu\omega)^2 m_{03} + j\nu\omega c_{03} \bar{u}_{z,1}(0) = f_{03} \quad (\text{VI.45})$$

Les équations (VI.42)-(VI.45) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$-D_1^{(\nu)}(0)a_1^{(\nu)} + (\nu\omega)^2 \bar{E} \left((\nu\omega)^2 M_0 + j\nu\omega\beta \right) C_1^{(\nu)}(0)a_1^{(\nu)} = \bar{E}f_0 \quad (\text{VI.46})$$

$$\left(-D_1^{(\nu)}(0) + (\nu\omega)^2 \bar{E} \left((\nu\omega)^2 M_0 + j\nu\omega\beta \right) C_1^{(\nu)}(0) \right) a_1^{(\nu)} = \bar{E}f_0 \quad (\text{VI.47})$$

avec

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} - \text{matrice diagonale}$$

Les conditions aux limites à l'extrémité droite du système sont

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_{y,1}(L_N, t) - m_4 \frac{\partial^2 u_{y,1}(L_N, t)}{\partial t^2} = 0, \\ -T_{z,1}(L_N, t) - m_4 \frac{\partial^2 u_{z,1}(L_N, t)}{\partial t^2} = 0 \\ -M_{y,1}(L_N, t) + J_4 \frac{\partial^2 \theta_{y,1}(L_N, t)}{\partial t^2} = 0, \\ -M_{z,1}(L_N, t) + J_4 \frac{\partial^2 \theta_{z,1}(L_N, t)}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{VI.48})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\bar{T}_{y,1}(L_N) + (\nu\omega)^2 m_4 \bar{u}_{y,1}(L_N) = 0 \\ -\bar{T}_{z,1}(L_N) + (\nu\omega)^2 m_4 \bar{u}_{z,1}(L_N) = 0, \\ -\bar{M}_{y,1}(L_N) - (\nu\omega)^2 J_4 \bar{\theta}_{y,1}(L_N) = 0 \\ -\bar{M}_{z,1}(L_N) - (\nu\omega)^2 J_4 \bar{\theta}_{z,1}(L_N) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{VI.49})$$

Finalement, les conditions aux limites à l'extrémité droite s'écrivent

$$\left[-D_1^{(\nu)}(L_N) + (\nu\omega)^2 \bar{E} M_4 C_N^{(\nu)}(L_N) \right] a_N^{(\nu)} = 0 \quad (\text{VI.50})$$

VI. 4. Relations entre les vecteurs des coefficients constants des solutions des équations

Un exemple de deux tronçons d'arbres adjacents est schématisé sur la figure (VI. 3). Les axes du système de coordonnées x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} du i ème tronçon d'arbre sont respectivement parallèles aux axes du référentiel x_1 , x_2 , x_3 . $L_i = L$ désigne la longueur du i ème tronçon.

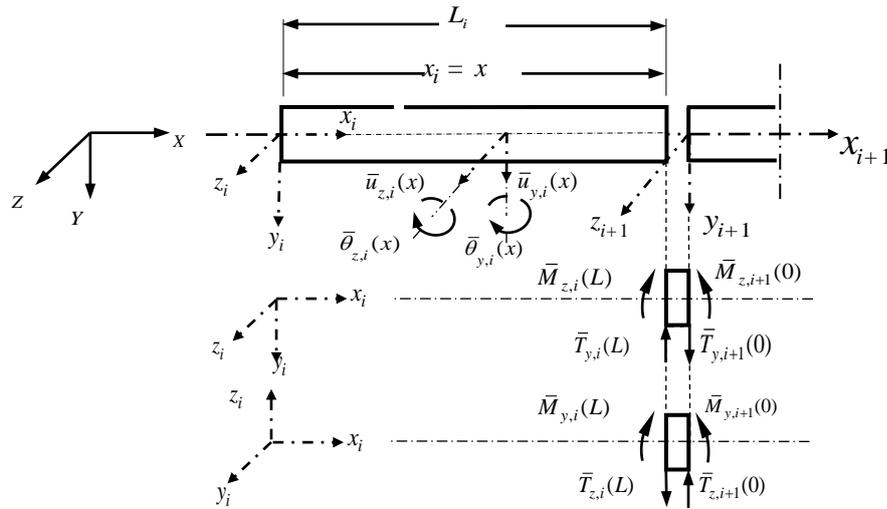


Figure VI. 3 : Illustration schématique des déplacements et des forces (moments) internes agissant au niveau de la jonction de deux tronçons d’arbres adjacents (i) et ($i+1$).

VI. 4. 1. Cas de deux tronçons d’arbres adjacents ayant différentes constantes du matériau et/ou différents diamètres

A la jonction de deux tronçons d’arbres ayant différentes constantes du matériau et/ou différents diamètres, les équations de continuité des déplacements et les équations d’équilibre des forces (moments) internes s’écrivent

$$u_i^{(v)}(L) = u_{i+1}^{(v)}(0) \quad (\text{VI.51})$$

$$p_i^{(n)}(L) = p_{i+1}^{(n)}(0) \quad (\text{VI.52})$$

En prenant en considération les équations (VI.31) et (VI.37), les équations (VI.53) et (VI.54) peuvent s’écrivent

$$C_i^{(v)}(L) a_i^{(v)} = C_{i+1}^{(v)}(0) a_{i+1}^{(v)} \quad (\text{VI.53})$$

$$D_i^{(v)}(L) a_i^{(v)} = D_{i+1}^{(v)}(0) a_{i+1}^{(v)} \quad (\text{VI.54})$$

$$B_i = \begin{bmatrix} C_{i+1}^{(v)}(0) \\ D_{i+1}^{(v)}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_i^{(v)}(L) \\ D_i^{(v)}(L) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.55})$$

La matrice B_i peut être considérée comme matrice de transfert relative au vecteur des coefficients constants des solutions des équations différentielles régissant les vibrations transversales verticales et horizontales. Cette matrice possède la forme diagonale en bloc suivante

$$B_i = \begin{bmatrix} B_i^{(1)} & 0 \\ 0 & B_i^{(2)} \end{bmatrix}, B_i^{(1)} = B_i^{(2)} = \begin{bmatrix} e_1 \cos \lambda L & e_1 \sin \lambda L & e_2 \cosh \lambda L & e_2 \sinh \lambda L \\ -e_3 \sin \lambda L & e_3 \cos \lambda L & e_4 \sinh \lambda L & e_4 \cosh \lambda L \\ e_2 \cos \lambda L & e_2 \sin \lambda L & e_1 \cosh \lambda L & e_1 \sinh \lambda L \\ -e_4 \sin \lambda L & e_4 \cos \lambda L & e_3 \sinh \lambda L & e_3 \cosh \lambda L \end{bmatrix}_{(i)}$$

où:

$$(e_1)_i = \frac{1}{2} + \frac{(EI\lambda^2)_i}{2(EI\lambda^2)_{i+1}}, \quad (e_2)_i = \frac{1}{2} - \frac{(EI\lambda^2)_i}{2(EI\lambda^2)_{i+1}},$$

$$(e_3)_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_{i+1}} + \frac{(EI\lambda^3)_i}{2(EI\lambda^3)_{i+1}}, \quad (e_4)_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_{i+1}} - \frac{(EI\lambda^3)_i}{2(EI\lambda^3)_{i+1}}$$

Pour les $(s-1)$ tronçons d'arbres suivants, la relation suivante est vérifiée

$$a_{i+s}^{(\nu)} = B_{i+s-1}^{(\nu)} G_{i+s-2}^{(\nu)} \dots B_i^{(\nu)} a_i^{(\nu)} \quad (\text{VI.56})$$

Dans ce type de calcul, le nombre de matrices multipliées entre elles peut être considérable, toutefois, ces matrices B_i possèdent une commodité avantageuse, lorsque les tronçons d'arbres sont réalisés avec le même matériau et sont de même diamètre, l'expression (VI.56) se réduit à

$$a_{i+s}^{(\nu)} = G_i^{(\nu)} a_i^{(\nu)} \quad (\text{VI.57})$$

où la matrice $G_i^{(\nu)}$ est obtenue à partir de la matrice $B_i^{(\nu)}$ en tenant compte des égalités, dans ce cas précis, suivantes :

$$(e_1)_i = (e_3)_i = 1, \quad (e_2)_i = (e_4)_i = 0$$

et en remplaçant L_i par

$$L_i = \sum_{p=i}^{p=i+s-1} L_p \quad (\text{VI.58})$$

C'est à dire que la multiplication de ce type de matrices de transfert dans le cas ci-dessus, peut être remplacée par la sommation des arguments apparaissant dans ces matrices. La propriété de souplesse de cette technique n'existe pas dans la méthode connue des matrices de transfert relatives aux vecteurs d'état (TMM).

Il convient de souligner que l'adoption d'un modèle linéaire d'amortissement interne (modèle de Voigt) n'élimine pas la propriété suscitée de cette technique.

VI. 4. 2. Le cas d'une masse discrète reliant deux tronçons d'arbres (i) et (i+1)

Le cas où la section de jonction de deux tronçons d'arbres passe par le centre de gravité d'une masse discrète (ex. accouplement à brides, pignon du reducteur etc...), les équations suivantes sont vérifiées

$$u_i^{(\nu)}(L) = u_{i+1}^{(\nu)}(0) \quad (\text{VI.59})$$

$$p_i^{(\nu)}(L) = p_{i+1}^{(\nu)}(0) - M_i \frac{\partial^2 u_i^{(\nu)}(L)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.60})$$

où M_i est la matrice d'inertie diagonale de la masse discrète m_i située à la fin du i -ième tronçon d'arbre, avec $M_i = [m_i, m_i, J_i, J_i]$, J_i est le moment d'inertie de la masse m_i .

Compte tenu des expressions (VI.31) et (VI.37), on déduit

$$C_i^{(\nu)}(L) a_i^{(\nu)} = C_{i+1}^{(\nu)}(0) a_{i+1}^{(\nu)} \quad (\text{VI.61})$$

$$a_{i+1}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} C_{i+1}^{(\nu)}(0) \\ D_{i+1}^{(\nu)}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_i^{(\nu)}(L) \\ D_i^{(\nu)}(L) - (\nu\omega_0)^2 M_i C_i^{(\nu)}(L) \end{bmatrix} a_i^{(\nu)} \quad (\text{VI.62})$$

$$a_{i+1}^{(\nu)} = R_i^{(\nu)} a_i^{(\nu)}, \quad (\text{VI.63})$$

où $R_i^{(\nu)}$ représente la matrice de transfert à travers la masse discrète sans tenir compte de l'effet gyroscopique de cette masse.

VI. 4. 3. Le cas d'un palier reliant deux tronçons d'arbres (i) et (i+1)

Le cas où la jonction entre deux tronçons d'arbres se fait au niveau d'un palier intermédiaire, les équations de continuité des vibrations et les équations d'équilibre des forces (et moments) internes suivantes sont vérifiées

$$u_i^{(\nu)}(L) = u_{i+1}^{(\nu)}(0) \quad (\text{VI.64})$$

$$p_i^{(\nu)}(L) = p_{i+1}^{(\nu)}(0) + \overline{EK}_i^{(\nu)} u_i^{(\nu)}(L) \quad (\text{VI.65})$$

où $K_i^{(\nu)}$ est la matrice de rigidité de dynamique du i ème palier intermédiaire pour la pulsation (fréquence) $\nu\omega_0$, et qui a la forme

$$K_i^{(\nu)} = K_i^{(\nu)}(\nu\omega_0) = \begin{bmatrix} K_{22}^{(\nu)} & K_{23}^{(\nu)} & K_{25}^{(\nu)} & K_{26}^{(\nu)} \\ K_{32}^{(\nu)} & K_{33}^{(\nu)} & K_{35}^{(\nu)} & K_{36}^{(\nu)} \\ K_{52}^{(\nu)} & K_{53}^{(\nu)} & K_{55}^{(\nu)} & K_{56}^{(\nu)} \\ K_{62}^{(\nu)} & K_{63}^{(\nu)} & K_{65}^{(\nu)} & K_{66}^{(\nu)} \end{bmatrix}$$

Tenant compte des équations (VI.31) et (VI.37), les équations (VI.64) et (VI.65) s'écrivent

$$C_i^{(\nu)}(L) a_i^{(\nu)} = C_{i+1}^{(\nu)}(0) a_{i+1}^{(\nu)} \quad (\text{VI.66})$$

$$D_i^{(\nu)}(L) a_i^{(\nu)} = D_{i+1}^{(\nu)}(0) a_{i+1}^{(\nu)} + \bar{E}K_i^{(\nu)}C_i^{(\nu)}(L) a_i^{(\nu)} \quad (\text{VI.67})$$

$$a_{i+1}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} D_{i+1}^{(\nu)}(0) \\ C_{i+1}^{(\nu)}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_i^{(\nu)}(L) - \bar{E}K_i^{(\nu)}C_i^{(\nu)}(L) \\ C_i^{(\nu)}(L) \end{bmatrix} a_i^{(\nu)}$$

$$S_i^{(\nu)} = \begin{bmatrix} D_{i+1}^{(\nu)}(0) \\ C_{i+1}^{(\nu)}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_i^{(\nu)}(L) - \bar{E}K_i^{(\nu)}C_i^{(\nu)}(L) \\ C_i^{(\nu)}(L) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.68})$$

où $S_i^{(\nu)}$ est la matrice de transfert à travers le palier intermédiaire.

Une fois les matrices de transfert calculées, on détermine les vecteurs des coefficients des solutions des équations différentielles, du second jusqu'au n ème tronçon d'arbre $(a_2^{(\nu)}, a_3^{(\nu)}, \dots, a_N^{(\nu)})$, en fonction de $a_1^{(\nu)}$, qui représente le vecteur des coefficients des solutions des vibrations du premier tronçon ($i=1$).

Pour le système illustré sur la figure (VI. 2), on obtient

$$\begin{aligned} a_2^{(\nu)} &= B_1^{(\nu)} a_1^{(\nu)}, \\ a_3^{(\nu)} &= B_2^{(\nu)} B_1^{(\nu)} a_1^{(\nu)}, \\ a_4^{(\nu)} &= R_3^{(\nu)} B_2^{(\nu)} B_1^{(\nu)} a_1^{(\nu)}, \\ &\vdots \\ a_N^{(\nu)} &= B_{N-1}^{(\nu)} \dots S_4^{(\nu)} R_3^{(\nu)} B_2^{(\nu)} B_1^{(\nu)} a_1^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.69})$$

IV.4. Fréquences propres des vibrations transversales

En utilisant les relations données par l'équation (VI.69), l'équation (VI.50) décrivant les conditions à la limite droite du système, s'écrit sous la forme suivante

$$\left[-D_1^{(\nu)}(L_N) + (\nu\omega)^2 \bar{E} M_4 C_N^{(\nu)}(L_N) B_{n-1} B_{n-2} \dots B_1 \right] a_1^{(\nu)} = 0 \quad (\text{VI.70})$$

On regroupe les conditions aux limites gauche et droite, et on déduit

$$\begin{bmatrix} -D_1^{(\nu)}(0) + (\nu\omega)^2 \bar{E} \left((\nu\omega)^2 M_0 \right) C_1^{(\nu)}(0) \\ -D_1^{(\nu)}(L_N) + (\nu\omega)^2 \bar{E} M_4 C_N^{(\nu)}(L_N) B_{n-1} B_{n-2} \dots B_1 \end{bmatrix} a_1 = \bar{E} \bar{f}_0 \quad (\text{VI.70})$$

Les vibrations libres apparaissent lorsque cessent les forces excitatrices ($\bar{f}_0 = 0$).

Habituellement, pour le calcul des vibrations libres, seule la masse d'eau ajoutée est prise en compte. L'amortissement du à l'eau de mer est pris en compte lors du calcul des vibrations forcées. On détermine les fréquences propres par résolution de l'équation suivante

$$\begin{vmatrix} -D_1^{(\nu)}(0) + (\nu\omega)^2 \bar{E} \left((\nu\omega)^2 M_0 \right) C_1^{(\nu)}(0) \\ -D_1^{(\nu)}(L_N) + (\nu\omega)^2 \bar{E} M_4 C_N^{(\nu)}(L_N) B_{n-1} B_{n-2} \dots B_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{VI.71})$$

VI. 5. Amplitudes des vibrations transversales forcées et des contraintes

L'expression (VI.70) sert à trouver les coefficients des vibrations forcées du premier tronçon d'arbre ($i=1$) comme suit, (dans ce cas, la masse d'eau ajoutée ainsi que l'amortissement de l'eau de mer sont pris en compte):

$$a_1 = \begin{bmatrix} -D_1^{(\nu)}(0) + (\nu\omega)^2 \bar{E} \left((\nu\omega)^2 M_0 \right) C_1^{(\nu)}(0) \\ -D_1^{(\nu)}(L_N) + (\nu\omega)^2 \bar{E} M_4 C_N^{(\nu)}(L_N) B_{n-1} B_{n-2} \dots B_1 \end{bmatrix}^{-1} \bar{E} \bar{f}_0 \quad (\text{VI.70})$$

En utilisant les relations données par les équations (VI.69) les vecteurs des coefficients

$a_2^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)}$ peuvent être calculés. Ensuite, les amplitudes des vibrations transversales verticales et transversales horizontales de tout le système d'arbres de propulsion peuvent être déterminées.

En utilisant les équations (VI.14a) et (VI.14b), les amplitudes des contraintes tangentielles moyennes, ainsi que les amplitudes des contraintes normales, dans une section arbitraire du (i ème) arbre, de coordonnée axiale x , peuvent être déterminées.

VII. Analyse des Vibrations de Tournoisement (whirling) d'un Arbre de Timoshenko à Section étagée muni de plusieurs masses discrètes [16]

Les arbres munis de disques sont appelés rotors et représentent en général les modèles dynamiques des turbines à plusieurs étages. Les disques peuvent être flexibles ou considérés rigides. Dans ce chapitre, nous exposons l'algorithme de calcul dynamique des vibrations de tournoisement (whirling) du rotor multi-masses en utilisant la théorie des poutres de Timoshenko, tenant compte des effets gyroscopiques des disques et de l'arbre, ainsi que l'application à un exemple numérique [16]. Le phénomène de tournoisement est la résultante des vibrations transversales (dîtes aussi latérales), dans les plans vertical et horizontal.

VII. 1. Modèle analysé et équations du mouvement

La figure (VII.1), représente un arbre de Timoshenko composé de n segments d'arbres uniformes [notés par (1), (2), ..., (i), (i+1), ..., (n-1), (n)] chacun ayant la longueur correspondante L_i , supportant plusieurs disques rigides, ayant chacun une masse m_i , le moment d'inertie polaire $J_{P,i}$, et le moment d'inertie diamétral $J_{d,i}$. La division est faite au niveau de la section reliant deux segments d'arbres adjacents ayant des propriétés mécaniques et/ou géométriques différentes, et au niveau de la section transversale passant par le centre de gravité du disque (i) reliant deux segments d'arbres adjacents (i) et (i+1). Le système est supposé linéaire, et on admet que chaque disque représente une masse discrète. A chaque segment d'arbre (i), est fixé un système de coordonnées immobile (x_i, y_i, z_i) , dont les axes sont respectivement parallèles aux axes du système de référence fixe (X, Y, Z) .

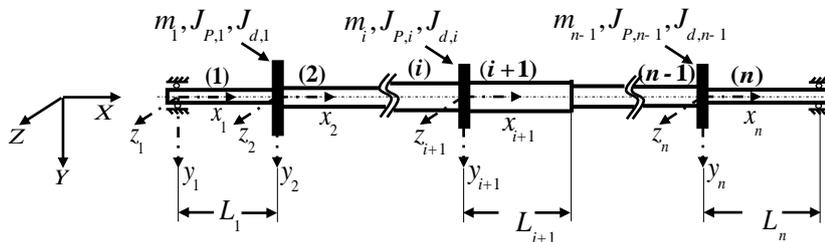


Figure VII.1: Arbre de Timoshenko à section étagée supportant plusieurs disques rigides.

Les équations différentielles du mouvement peuvent être obtenue selon le principe de Hamilton, ou en appliquant la deuxième loi de Newton. Compte tenu de l'effet des moment

gyroscopique de l'arbre, du cisaillement, et de l'inertie de rotation, les équations du mouvement du (*i*ème) segment d'arbre peuvent être présentées comme suit

$$\bar{k}_i S_i G_i \left(\frac{\partial^2 u_{y,i}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_{z,i}(x,t)}{\partial x} \right) - \rho_i S_i \frac{\partial^2 u_{y,i}(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{VII.1})$$

$$\bar{k}_i S_i G_i \left(\frac{\partial^2 u_{z,i}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_{y,i}(x,t)}{\partial x} \right) - \rho_i S_i \frac{\partial^2 u_{z,i}(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{VII.2})$$

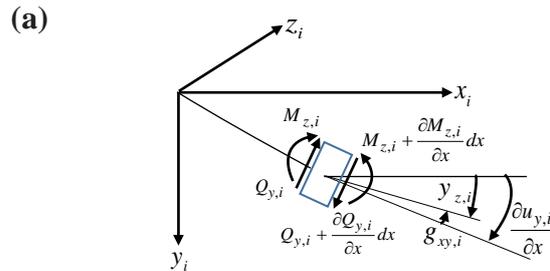
$$E_i I_{z,i} \frac{\partial^2 \psi_{z,i}(x,t)}{\partial x^2} + \bar{k}_i G_i S_i \left(\frac{\partial u_{y,i}(x,t)}{\partial x} - \psi_{z,i}(x,t) \right) - \rho_i I_i \frac{\partial^2 \psi_{z,i}(x,t)}{\partial t^2} - \rho_i I_{i,p} \Omega \frac{\partial \psi_{y,i}(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{VII.3})$$

$$E_i I_{y,i} \frac{\partial^2 \psi_{y,i}(x,t)}{\partial x^2} + \bar{k}_i G_i S_i \left(\frac{\partial u_{z,i}(x,t)}{\partial x} - \psi_{y,i}(x,t) \right) - \rho_i I_i \frac{\partial^2 \psi_{y,i}(x,t)}{\partial t^2} + \rho_i I_{i,p} \Omega \frac{\partial \psi_{z,i}(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{VII.4})$$

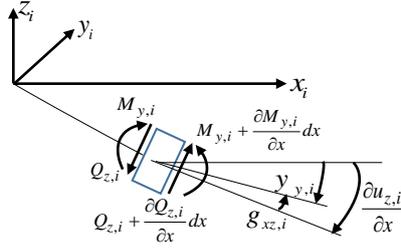
où:

$E_i (N / m^2), G_i (N / m^2), I_y = I_z = I_i (m^4), I_{i,p} (m^4), S_i (m^2), \rho_i (kg / m^3)$ sont le module d'élasticité, le module de cisaillement, le moment d'inertie diamétral, le moment d'inertie polaire, l'aire de la section transversale et la masse volumique du *i*ème tronçon d'arbre. $u_{y,i}(x,t), u_{z,i}(x,t)$ et $\psi_{z,i}(x,t), \psi_{y,i}(x,t)$ représentent les composantes du déplacement transversal et les rotations par flexion correspondantes, respectivement. \bar{k}_i est le facteur de correction du cisaillement.

Un élément (dx) du *i*ème tronçon d'arbre de Timoshenko avec son système de coordonnées fixe $s (x_i, y_i, z_i)$ est schématisé sur les figures (VII.2a,b). Les quantités $\frac{\partial u_{y,i}}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_{z,i}}{\partial x}$ représentent les rotations de l'axe élastique de l'élément, $\psi_{z,i}$ et $\psi_{y,i}$ désignent les rotations dues aux moments fléchissants, tandis que $g_{xy,i}$ et $g_{xz,i}$ sont les angles dus aux efforts tranchants entre l'axe élastique et la perpendiculaire à la face du cisaillement, sur (a) le plan xy , et (b) le plan xz ,



(b)



**Figure VII. 2: Élément dx du $i^{\text{ème}}$ tronçon d'arbre de Timoshenko:
(a)- dans le plan $(x_i y_i)$, (b)- dans le plan $(x_i z_i)$.**

Pour éviter de résoudre des équations couplées, on introduit les variables complexes suivantes

$$u_i(x,t) = u_{y,i}(x,t) + j u_{z,i}(x,t), \quad (\text{VII.5a})$$

$$\psi_i(x,t) = \psi_{z,i}(x,t) + j \psi_{y,i}(x,t), \quad (\text{VII.5b})$$

avec $j = \sqrt{-1}$. Les équations (VII.1-4) sont combinées pour obtenir deux équations différentielles partielles du mouvement en multipliant les équations (VII.2) et (VII.4) par j et en les ajoutant ensuite aux équations (VII.1) et (VII.3), respectivement. Les équations (VII.1) -(VI. 4) deviennent

$$\bar{k}_i S_i G_i \left(\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial x} \right) - \rho_i I_i \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{VII.6})$$

$$E_i I_i \frac{\partial^2 \psi_i(x,t)}{\partial x^2} + \bar{k}_i G_i S_i \left(\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} - \psi_i(x,t) \right) - \rho_i I_i \frac{\partial^2 \psi_i(x,t)}{\partial t^2} + j \rho_i I_{i,p} \Omega \frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{VII.7})$$

Après quelques substitutions, les équations (VII.6) et (VII.7) peuvent être réécrites sous la forme découplée suivante

$$E_i I_i \frac{\partial^4 \psi_i(x,t)}{\partial x^4} + \rho_i S_i \frac{\partial^2 \psi_i(x,t)}{\partial t^2} - \rho_i I_i \left(1 + \frac{E_i}{\bar{k}_i G_i} \right) \frac{\partial^4 \psi_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_i^2 I_i}{\bar{k}_i G_i} \frac{\partial^4 \psi_i(x,t)}{\partial t^4} + j \rho_i I_{i,p} \Omega \left(\frac{\partial^3 \psi_i(x,t)}{\partial t \partial x^2} - \frac{\rho_i}{\bar{k}_i G_i} \frac{\partial^3 \psi_i(x,t)}{\partial t^3} \right) = 0 \quad (\text{VII.8})$$

$$E_i I_i \frac{\partial^4 u_i(x,t)}{\partial x^4} + \rho_i S_i \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} - \rho_i I_i \left(1 + \frac{E_i}{\bar{k}_i G_i} \right) \frac{\partial^4 u_i(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho_i^2 I_i}{\bar{k}_i G_i} \frac{\partial^4 u_i(x,t)}{\partial t^4}$$

$$+j\rho_i I_{i,p}\Omega \left(\frac{\partial^3 u_i(x,t)}{\partial t \partial x^2} - \frac{\rho_i}{k_i G_i} \frac{\partial^3 u_i(x,t)}{\partial t^3} \right) = 0 \quad (\text{VII.9})$$

Les solutions des équations (VII.8) et (VII.9) sont

$$u_i(x,t) = \bar{u}_i(x) e^{\pm j\omega t} \quad (\text{VII.10a})$$

$$\psi_i(x,t) = \bar{\psi}_i(x) e^{\pm j\omega t} \quad (\text{VII.10b})$$

où $\bar{u}_i(x)$ and $\bar{\psi}_i(x)$ sont respectivement, les fonctions de formes des vibrations $u_i(x,t)$ et $\psi_i(x,t)$, alors que ω est la fréquence (pulsation) de tournoiement du système que constitue l'arbre de Timoshenko et les disques. L'indice supérieur (+) et inférieur (-) font référence au tournoiement (whirl) avant et arrière, respectivement. La substitution des équations (VII.10a,b) dans les équations (VII.8) et (VII.9) permet d'obtenir les équations suivantes

$$\frac{d^4 \bar{u}_i(x)}{dx^4} + (r_1 + r_2) \frac{d^2 \bar{u}_i(x)}{dx^2} - (r_3 - r_1 r_2) \bar{u}_i(x) = 0 \quad (\text{VII.11})$$

$$\frac{d^4 \bar{\psi}_i(x)}{dx^4} + (r_1 + r_2) \frac{d^2 \bar{\psi}_i(x)}{dx^2} - (r_3 - r_1 r_2) \bar{\psi}_i(x) = 0 \quad (\text{VII.12})$$

où

$$r_1 = \frac{\rho_i \omega^2}{k_i G_i}, \quad r_2 = \frac{(\rho_i I_i \omega^2 \pm \rho_i I_{i,p} \Omega \omega)}{E_i I_i}, \quad r_3 = \frac{\rho_i S_i \omega^2}{E_i I_i} \quad (\text{VII.13})$$

Les solutions des équations (VII.11) et (VII.12) sont

$$\bar{u}_i(x) = a_{i1} \sin \lambda_1^{(i)} x + a_{i2} \cos \lambda_1^{(i)} x + a_{i3} \sinh \lambda_2^{(i)} x + a_{i4} \cosh \lambda_2^{(i)} x \quad (\text{VII.14})$$

$$\bar{\psi}_i(x) = \tilde{a}_{i1} \sin \lambda_1^{(i)} x + \tilde{a}_{i2} \cos \lambda_1^{(i)} x + \tilde{a}_{i3} \cosh \lambda_2^{(i)} x + \tilde{a}_{i4} \sinh \lambda_2^{(i)} x \quad (\text{VII.15})$$

où

$$\lambda_1^{(i)} = \left\{ \frac{1}{2} \left[4(r_3 - r_1 r_2) + (r_1 + r_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VII.16})$$

$$\lambda_2^{(i)} = \left\{ \frac{1}{2} \left[4(r_3 - r_1 r_2) + (r_1 + r_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VII.17})$$

En substituant les équations (VII.10a,b) dans les équation (VII.6), on obtient

$$\tilde{a}_{i1} = -\beta_1^{(i)} a_{i2}, \quad \tilde{a}_{i2} = \beta_1^{(i)} a_{i1}, \quad \tilde{a}_{i3} = \beta_2^{(i)} a_{i4}, \quad \tilde{a}_{i4} = \beta_2^{(i)} a_{i3} \quad (\text{VII.18})$$

Les solutions(VII.14) et(VII.15) peuvent être réécrites comme suit

$$\bar{u}_i(x) = a_{i1} \sin \lambda_1^{(i)} x + a_{i2} \cos \lambda_1^{(i)} x + a_{i3} \sinh \lambda_2^{(i)} x + a_{i4} \cosh \lambda_2^{(i)} x \quad (\text{VII.19})$$

$$\bar{\psi}_i(x) = a_{i1} \beta_1^{(i)} \cos \lambda_1^{(i)} x - a_{i2} \beta_1^{(i)} \sin \lambda_1^{(i)} x + a_{i3} \beta_2^{(i)} \cosh \lambda_2^{(i)} x + a_{i4} \beta_2^{(i)} \sinh \lambda_2^{(i)} x \quad (\text{VII.20})$$

Si l'on désigne $w_i = \{u_i, \psi_i\}$ comme vecteur des vibrations, il s'exprime par

$$w_i = \bar{w}_i(x) e^{\pm j\omega t} \quad (\text{VII.21})$$

$$\bar{w}_i(x) = A_i(x) V_i \quad (\text{VII.22})$$

où

$$A_i(x) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_1^{(i)} x & \cos \lambda_1^{(i)} x & \sinh \lambda_2^{(i)} x & \cosh \lambda_2^{(i)} x \\ \beta_1^{(i)} \cos \lambda_1^{(i)} x & -\beta_1^{(i)} \sin \lambda_1^{(i)} x & \beta_2^{(i)} \cosh \lambda_2^{(i)} x & \beta_2^{(i)} \sinh \lambda_2^{(i)} x \end{bmatrix}$$

et V_i représente le vecteur des coefficients des solutions du i ème tronçon d'arbre

$$V_i = [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}]^T \quad (\text{VII.23})$$

Selon la théorie des poutres de Timoshenko, les composantes du moments fléchissant et de l'effort tranchant sont données par

$$M_{z,i}(x,t) = -E_i I_i \frac{\partial \psi_{z,i}(x,t)}{\partial x}, \quad M_{y,i}(x,t) = E_i I_i \frac{\partial \psi_{y,i}(x,t)}{\partial x} \quad (\text{VII.24a})$$

$$Q_{y,i}(x,t) = \bar{k}_i G_i S_i \gamma_{xy,i}(x,t), \quad Q_{z,i}(x,t) = \bar{k}_i G_i S_i \gamma_{xz,i}(x,t) \quad (\text{VII.24b})$$

où

$$\gamma_{xy,i}(x,t) = \frac{\partial u_{y,i}(x,t)}{\partial x} - \psi_{z,i}(x,t), \quad \gamma_{xz,i}(x,t) = \frac{\partial u_{z,i}(x,t)}{\partial x} - \psi_{y,i}(x,t) \quad (\text{VII.25})$$

$\gamma_i(x,t) = \gamma_{xy,i}(x,t) + j\gamma_{xz,i}(x,t)$ est la représentation complexe de l'angle du cisaillements.

En prenant en compte les équations (VII.10a,b), les parties réelles des moments fléchissants et des efforts tranchants s'écrivent

$$\bar{M}_{z,i}(x) = -E_i I_i \frac{\partial \bar{\psi}_{z,i}(x)}{\partial x}, \quad \bar{M}_{y,i}(x) = E_i I_i \frac{\partial \bar{\psi}_{y,i}(x)}{\partial x} \quad (\text{VII.26a})$$

$$\bar{Q}_{y,i}(x) = \bar{k}_i G_i S_i \bar{\gamma}_{xy,i}(x), \quad \bar{Q}_{z,i}(x) = \bar{k}_i G_i S_i \bar{\gamma}_{xz,i}(x) \quad (\text{VII.26b})$$

Si l'on néglige l'amortissement externe du à l'effet hydrodynamique dans les paliers, les conditions aux limites gauche et droite du système représenté sur la figure (VII.1), peuvent s'exprimer comme

$$\bar{u}_{y,1}(0) = 0, \quad \bar{u}_{z,1}(0) = 0, \quad E_1 I_1 \bar{\psi}'_{z,1}(0) = 0, \quad E_1 I_1 \bar{\psi}'_{y,1}(0) = 0 \quad (\text{VII.27a})$$

$$\bar{u}_{y,n}(L_n) = 0, \quad \bar{u}_{z,n}(L_n) = 0, \quad E_n I_n \bar{\psi}'_{z,n}(L_n) = 0, \quad E_n I_n \bar{\psi}'_{y,n}(L_n) = 0 \quad (\text{VII.27b})$$

En termes de nombres complexes, les équations précédentes(VII.27a,b) se réduisent aux expressions suivantes

$$\bar{u}_1(0) = 0, \quad E_1 I_1 \frac{\partial \bar{\psi}_1(0)}{\partial x} = 0 \quad (\text{VII.28a})$$

$$\bar{u}_n(L_n) = 0, \quad E_n I_n \bar{\psi}'_n(L_n) = 0 \quad (\text{VII.28b})$$

VII. 2. Vecteurs des coefficients des solutions des équations différentielles

La figure (VII.3) schématise la jonction de deux tronçons d'arbres adjacents. L_i désigne la longueur du i ème tronçon d'arbre

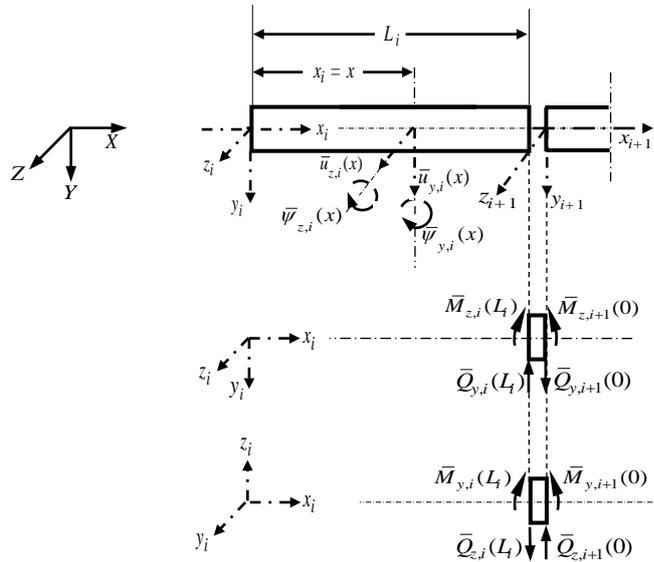


Figure VII. 3: Les forces et les moments internes agissant sur la section de jonction de deux tronçons d'arbres adjacents (i) and ($i+1$).

VII. 2. 1. Le cas de deux tronçons d'arbres voisins de caractéristiques mécaniques et/ou géométriques différentes

A la jonction de deux tronçons d'arbres adjacents ayant différents diamètres et/ou différentes propriétés mécaniques, les équations de continuité des déplacements et des rotations dues aux moments fléchissants sont données par les équations suivantes

$$\bar{u}_{y,i}(L_i) = \bar{u}_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.29a})$$

$$\bar{u}_{z,i}(L_i) = \bar{u}_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.29b})$$

$$\bar{\psi}_{z,i}(L_i) = \bar{\psi}_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.30a})$$

$$\bar{\psi}_{y,i}(L_i) = \bar{\psi}_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.30b})$$

Compte tenu des équations (VII.5a) et (VII.5b), les équations (VII.29a,b) et (VII.30a,b) deviennent

$$\bar{u}_i(L_i) = \bar{u}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.31})$$

$$\bar{\psi}_i(L_i) = \bar{\psi}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.32})$$

Les équations (VII.31) et (VII.32) peuvent s'écrire sous la forme vectorielle

$$\bar{w}_i(L_i) = \bar{w}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.33})$$

donc:

$$A_i(L_i) V_i = A_{i+1}(0) V_{i+1} \quad (\text{VII.34})$$

où

$$A_i(L_i) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_1^{(i)} L_i & \cos \lambda_1^{(i)} L_i & \sinh \lambda_2^{(i)} L_i & \cosh \lambda_2^{(i)} L_i \\ \beta_1^{(i)} \cos \lambda_1^{(i)} L_i & -\beta_1^{(i)} \sin \lambda_1^{(i)} L_i & \beta_2^{(i)} \cosh \lambda_2^{(i)} L_i & \beta_2^{(i)} \sinh \lambda_2^{(i)} L_i \end{bmatrix},$$

$$A_{i+1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta_1^{(i+1)} & 0 & \beta_2^{(i+1)} & 0 \end{bmatrix}$$

Les équations d'équilibres des efforts tranchants et des moments fléchissants exigent

$$\bar{M}_{z,i}(L_i) = \bar{M}_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.35a})$$

$$\bar{M}_{y,i}(L_i) = \bar{M}_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.35b})$$

$$\bar{Q}_{y,i}(L_i) = \bar{Q}_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.36a})$$

$$\bar{Q}_{z,i}(L_i) = \bar{Q}_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.36b})$$

Si l'on tient compte des relations(VII.26a,b), les équations(VII.35a,b) et(VII.36a,b) deviennent

$$E_i I_i \bar{\psi}'_{z,i}(L_i) = E_{i+1} I_{i+1} \bar{\psi}'_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.37a})$$

$$E_i I_i \bar{\psi}'_{y,i}(L_i) = E_{i+1} I_{i+1} \bar{\psi}'_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.37b})$$

$$\bar{k}_i G_i S_i \bar{\gamma}_{xy,i}(L_i) = \bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1} \bar{\gamma}_{xy,i+1}(0) \quad (\text{VII.38a})$$

$$\bar{k}_i G_i S_i \bar{\gamma}_{xz,i}(L_i) = \bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1} \bar{\gamma}_{xz,i+1}(0) \quad (\text{VII.38b})$$

Les équations (VII.37a,b) et (VII.38a,b) peuvent s'écrire en fonction de nombres complexes comme suit

$$E_i I_i \bar{\psi}'_i(L_i) = E_{i+1} I_{i+1} \bar{\psi}'_{i+1}(0) \quad (\text{VII.39})$$

$$\bar{k}_i G_i S_i \bar{\gamma}_i(L_i) = \bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1} \bar{\gamma}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.40})$$

avec

$$\bar{\gamma}_i(x) = \frac{\partial \bar{w}_i(x)}{\partial x} - \bar{\psi}_i(x)$$

d'où l'on obtient la forme matricielle suivante

$$D_i(L_i) V_i = D_{i+1}(0) V_{i+1} \quad (\text{VII.41})$$

où

$$D_i(L_i) = [\Gamma_1 \quad \vdots \quad \Gamma_2]$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} -E_i I_i \lambda_1^{(i)} \beta_1^{(i)} \sin \lambda_1^{(i)} L_i & -E_i I_i \lambda_1^{(i)} \beta_1^{(i)} \cos \lambda_1^{(i)} L_i \\ \bar{k}_i G_i S_i (\lambda_1^{(i)} \cos \lambda_1^{(i)} L_i - \beta_1^{(i)} \cos \lambda_1^{(i)} L_i) & \bar{k}_i G_i S_i (-\lambda_1^{(i)} \sin \lambda_1^{(i)} L_i + \beta_1^{(i)} \sin \lambda_1^{(i)} L_i) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} E_i I_i \lambda_2^{(i)} \beta_2^{(i)} \sinh \lambda_2^{(i)} L_i & E_i I_i \lambda_2^{(i)} \beta_2^{(i)} \cosh \lambda_2^{(i)} L_i \\ \bar{k}_i G_i S_i (\lambda_2^{(i)} \cosh \lambda_2^{(i)} L_i - \beta_2^{(i)} \cosh \lambda_2^{(i)} L_i) & \bar{k}_i G_i S_i (\lambda_2^{(i)} \sinh \lambda_2^{(i)} L_i - \beta_2^{(i)} \sinh \lambda_2^{(i)} L_i) \end{bmatrix}$$

$$D_{i+1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -E_{i+1}I_{i+1}\lambda_1^{(i+1)}\beta_1^{(i+1)} & 0 & E_{i+1}I_{i+1}\lambda_2^{(i+1)}\beta_2^{(i+1)} \\ \bar{k}_{i+1}G_{i+1}S_{i+1}(\lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)}) & 0 & \bar{k}_{i+1}G_{i+1}S_{i+1}(\lambda_2^{(i+1)} - \beta_2^{(i+1)}) & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement, il en résulte les relations suivantes

$$V_{i+1} = B_i V_i \quad (\text{VII.42})$$

avec

$$B_i = \begin{bmatrix} A_{i+1}(0) \\ D_{i+1}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_i(L_i) \\ D_i(L_i) \end{bmatrix} \quad (\text{VII.43})$$

Les matrices B_i sont les matrices de transfert relatives aux vecteurs des coefficients constants des solutions des équations différentielles. Ces matrices ont la forme suivante

$$B_i = \begin{bmatrix} -\mu_1 \cos(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_1 \sin(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_2 \cosh(\lambda_2^{(i)} L_i) & \mu_2 \sinh(\lambda_2^{(i)} L_i) \\ \mu_3 \sin(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_3 \cos(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_4 \sinh(\lambda_2^{(i)} L_i) & \mu_4 \cosh(\lambda_2^{(i)} L_i) \\ -\mu_5 \cos(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_5 \sin(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_6 \cosh(\lambda_2^{(i)} L_i) & \mu_6 \sinh(\lambda_2^{(i)} L_i) \\ \mu_7 \sin(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_7 \cos(\lambda_1^{(i)} L_i) & \mu_8 \sinh(\lambda_2^{(i)} L_i) & \mu_8 \cosh(\lambda_2^{(i)} L_i) \end{bmatrix} \quad (\text{VII.44})$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{(\beta_1^{(i)}\lambda_2^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}\beta_2^{(i+1)})}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)})} + \frac{(\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i+1)} - \beta_2^{(i+1)}\lambda_1^{(i)})}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)})} \frac{\bar{k}_i G_i S_i}{\bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1}} \\ \mu_2 &= \frac{(\beta_2^{(i+1)}\beta_2^{(i)} - \beta_2^{(i)}\lambda_2^{(i+1)})}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)})} + \frac{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_2^{(i)} - \beta_2^{(i+1)}\beta_2^{(i)})}{\beta_2^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)}} \frac{\bar{k}_i G_i S_i}{\bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1}} \\ \mu_3 &= \frac{\beta_2^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)}}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)} + \beta_1^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)})} + \frac{\beta_1^{(i)}\lambda_1^{(i)}}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)} + \beta_1^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)})} \frac{E_i I_i}{E_{i+1} I_{i+1}} \\ \mu_4 &= \frac{\beta_2^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)}}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)} + \beta_1^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)})} - \frac{\beta_2^{(i)}\lambda_2^{(i)}}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)} + \beta_1^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)})} \frac{E_i I_i}{E_{i+1} I_{i+1}} \\ \mu_5 &= \frac{(\beta_1^{(i+1)}\beta_1^{(i)} - \beta_1^{(i)}\lambda_1^{(i+1)})}{(\beta_2^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)})} + \frac{(\beta_1^{(i+1)}\lambda_1^{(i)} - \beta_1^{(i+1)}\beta_1^{(i)})}{\beta_2^{(i+1)}\lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)}\lambda_2^{(i+1)}} \frac{\bar{k}_i G_i S_i}{\bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1}} \end{aligned} \quad (\text{VII.45})$$

$$\mu_6 = \frac{(\beta_2^{(i)} \lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)} \beta_2^{(i)})}{(\beta_2^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)})} - \frac{(\beta_1^{(i+1)} \lambda_2^{(i)} - \beta_1^{(i+1)} \beta_2^{(i)})}{\beta_2^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)}} \frac{\bar{k}_i G_i S_i}{\bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1}}$$

$$\mu_7 = \frac{\beta_1^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)}}{(\beta_1^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)} + \beta_2^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)})} - \frac{E_i I_i}{E_{i+1} I_{i+1}} \frac{\beta_1^{(i)} \lambda_1^{(i)}}{(\beta_1^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)} \beta_2^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)})}$$

$$\mu_8 = \frac{\beta_1^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)}}{(\beta_1^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)} + \beta_2^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)})} + \frac{E_i I_i}{E_{i+1} I_{i+1}} \frac{\beta_2^{(i)} \lambda_2^{(i)}}{(\beta_1^{(i+1)} \lambda_1^{(i+1)} + \beta_2^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)})}$$

Pour les tronçons d'arbres ayant les mêmes diamètres et les mêmes propriétés mécaniques, on obtient

$$\frac{\bar{k}_i G_i S_i}{\bar{k}_{i+1} G_{i+1} S_{i+1}} = 1, \quad \frac{E_i I_i}{E_{i+1} I_{i+1}} = 1, \quad \lambda_1^{(i)} = \lambda_1^{(i+1)}$$

$$\lambda_2^{(i)} = \lambda_2^{(i+1)}, \quad \beta_1^{(i)} = \beta_1^{(i+1)}, \quad \beta_2^{(i)} = \beta_2^{(i+1)} \quad (\text{VII.46a})$$

c'est à dire que les coefficients $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8$ se réduisent à

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_7 = 0, \quad \mu_3 = \mu_6 = \mu_8 = 1 \quad (\text{VII.46b})$$

et la matrice B_i prend la forme diagonale par bloc suivante

$$B_i = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_1^{(i)} L_i) & -\sin(\lambda_1^{(i)} L_i) & 0 & 0 \\ \sin(\lambda_1^{(i)} L_i) & \cos(\lambda_1^{(i)} L_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\lambda_2^{(i)} L_i) & \sinh(\lambda_2^{(i)} L_i) \\ 0 & 0 & \sinh(\lambda_2^{(i)} L_i) & \cosh(\lambda_2^{(i)} L_i) \end{bmatrix} \quad (\text{VII.47})$$

Les relations entre les $(r-1)$ tronçons d'arbres suivants peuvent s'exprimer comme

$$V_{i+r} = B_{i+r-1} B_{i+r-2} \dots B_i V_i \quad (\text{VII.48})$$

De l'équation (VII.47), il est facile de remarquer que dans le cas de tronçons d'arbres ayant les mêmes diamètres et les mêmes propriétés mécaniques, l'expression (VII.48) se réduit à

$$V_{i+r} = R_i V_i \quad (\text{VII.49})$$

où R_i est la matrice B_i obtenue de l'équation (VII.47), avec L_i remplacé par

$$L_i = \sum_{v=i}^{v=i+r-1} L_v \quad (\text{VII.50})$$

(Comme dans le cas du modèle de Euler-Bernoulli (chap. VI), la multiplication de ce type de matrices peut être remplacée par une sommation des arguments des fonctions apparaissant

dans ces matrices). Cette propriété avantageuse n'existe pas avec la méthode conventionnelle des matrices de transfert relatives aux vecteurs (TMM). La méthode de résolution présentée dans ce chapitre garde cet avantage, même si un modèle linéaire de l'amortissement interne est pris en compte.

VII. 2. 2. Le cas de deux tronçons d'arbres voisins (i) et ($i+1$) reliés par une masse discrète m_i

La figure (VII.4.a,b) montre une masse discrète m_i en rotation à la vitesse Ω , ayant pour matrice d'inertie M_i , joignant deux tronçons d'arbres voisins (i) and ($i+1$), dans les plans vertical et horizontal, respectivement. Les valeurs approximatives des composantes de la vitesse angulaire sont

$$\Omega_y = \Omega \sin \psi_{z,i}(L_i, t) \approx \Omega \psi_{z,i}(L_i, t) \tag{VII.51a}$$

$$\Omega_z = \Omega \sin(-\psi_{y,i}(L_i, t)) \approx -\Omega \psi_{y,i}(L_i, t) \tag{VII.51b}$$

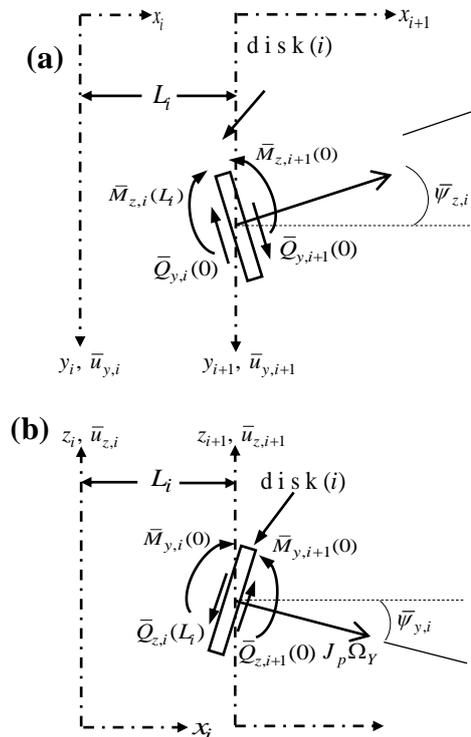


Figure VII.4: Les forces et les moments internes agissant sur le disque rigide (i), joignant deux segments d'arbres de Timoshenko (i) et ($i+1$), dans (a) le plan xy -, et (b) le plan xz .

On suppose que le centre de gravité de chaque disque (i) coïncide avec le centre de la section transversale du tronçon d'arbre. Dans le cas de petits déplacements, les conditions de continuité suivantes sont vérifiées

$$\bar{u}_{y,i}(L_i) = \bar{u}_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.52a})$$

$$\bar{u}_{z,i}(L_i) = \bar{u}_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.52b})$$

$$\bar{\psi}_{z,i}(L_i) = \bar{\psi}_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.53a})$$

$$\bar{\psi}_{y,i}(L_i) = \bar{\psi}_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.53a})$$

Si l'on prend en considération les équations (VII.5a,b), (VII.21) et (VII.22), les équations (VII.52a,b) et (VII.53a,b) deviennent

$$\bar{u}_i(L_i) = \bar{u}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.54a})$$

$$\bar{\psi}_i(L_i) = \bar{\psi}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.54b})$$

$$\bar{w}_i(L_i) = \bar{w}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.55a})$$

$$A_i(L_i)V_i = A_{i+1}(0)V_{i+1} \quad (\text{VII.55b})$$

Les équations d'équilibre au niveau du disque (i), des efforts tranchants et des moments fléchissants sont

$$Q_{y,i}(L_i, t) = Q_{y,i+1}(0, t) - m_i \frac{\partial^2 u_{y,i}(L_i, t)}{\partial t^2} \quad (56a)$$

$$Q_{z,i}(L_i, t) = Q_{z,i+1}(0, t) - m_i \frac{\partial^2 u_{z,i}(L_i, t)}{\partial t^2} \quad (56b)$$

$$M_{z,i}(L_i, t) = M_{z,i+1}(0, t) - J_{d,i} \frac{\partial^2 \psi_{z,i}(L_i, t)}{\partial t^2} - J_{p,i} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} \quad (57a)$$

$$M_{y,i}(L_i, t) = M_{y,i+1}(0, t) - J_{d,i} \frac{\partial^2 \psi_{y,i}(L_i, t)}{\partial t^2} - J_{p,i} \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} \quad (57b)$$

où $J_{d,i}$ et $J_{p,i}$ sont le moment d'inertie massique diamétral et le moment d'inertie massique polaire du disque (i), respectivement.

Si l'on prend en considération les équations (VII.24b) et (VII.26b), les équations (VII.56a,b) deviennent

$$\bar{k}G_i S_i \bar{\gamma}_{xy,i}(L_i) - \omega^2 m_i \bar{u}_{y,i}(L_i) = \bar{k}G_{i+1} S_{i+1} \bar{\gamma}_{xy,i+1}(0) \quad (\text{VII.58a})$$

$$\bar{k}G_i S_i \bar{\gamma}_{xz,i}(L_i) - \omega^2 m_i \bar{u}_{z,i}(L_i) = \bar{k}G_{i+1} S_{i+1} \bar{\gamma}_{xz,i+1}(0) \quad (\text{VII.58b})$$

Par substitution des équations (VII.51a,b) dans les équations (VII.57a,b), respectivement, et compte tenu des équations (VII.24a), (VII.26a), on obtient

$$(EI_z)_i \bar{\psi}'_{z,i}(L_i) - \omega^2 J_{d,i} \bar{\psi}_{z,i}(L_i) - j J_{p,i} \Omega \omega \bar{\psi}_{y,i}(L_i) = (EI_z)_{i+1} \bar{\psi}'_{z,i+1}(0) \quad (\text{VII.59a})$$

$$(EI_y)_i \bar{\psi}'_{y,i}(L_i) - \omega^2 J_{d,i} \bar{\psi}_{y,i}(L_i) + j J_{p,i} \Omega \omega \bar{\psi}_{z,i}(L_i) = (EI_y)_{i+1} \bar{\psi}'_{y,i+1}(0) \quad (\text{VII.59b})$$

Par multiplication des équations (VII.58b) et (VII.59b) par j et en les additionnant aux équations (VII.58a) et (VII.59a), respectivement, on obtient

$$\bar{k}G_i S_i \bar{\gamma}_i(L_i) - \omega^2 m_i \bar{u}_i(L_i) = \bar{k}G_{i+1} S_{i+1} \bar{\gamma}_{i+1}(0) \quad (\text{VII.60a})$$

$$(EI)_i \bar{\psi}'_i(L_i) - \omega^2 J_{d,i} \bar{\psi}_i(L_i) - J_{p,i} \Omega \omega \bar{\psi}_i(L_i) = (EI)_{i+1} \bar{\psi}'_{i+1}(0) \quad (\text{VII.60b})$$

Les équations (VII.60a,b) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$D_i(L_i) V_i - \omega^2 M_i A_i(L_i) V_i - J_{p,i} \Omega \omega \chi_i(L_i) V_i = D_{i+1}(0) V_{i+1} \quad (\text{VII.61})$$

où

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix}$$

et

$$\chi_i(L_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^{(i)} \cos \lambda_1^{(i)} L_i & -\beta_1^{(i)} \sin \lambda_1^{(i)} L_i & \beta_2^{(i)} \cosh \lambda_2^{(i)} L_i & \beta_2^{(i)} \sinh \lambda_2^{(i)} L_i \end{bmatrix}$$

alors que

$$V_i = [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}]^T \quad (\text{VII.62})$$

Les équations (VII.55b) et (VII.61), peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$V_{i+1} = H_i V_i \quad (\text{VII.63})$$

où

$$H_i = \begin{bmatrix} A_{i+1}(0) \\ D_{i+1}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_i(L_i) \\ D_i(L_i) - \omega^2 M_i A_i(L_i) - \Omega \omega J_{p,i} \chi_i(L_i) \end{bmatrix} \quad (\text{VII.64})$$

H_i représente la matrice de transfert relative aux vecteurs des coefficients des solution des équations différentielles V_i et V_{i+1} , à travers le disque (i), prenant en considération son effet gyroscopique. Les vecteurs des coefficients des solutions V_2, V_3, \dots, V_n , peuvent être facilement déterminés par les matrices définies précédemment, comme suit

$$\begin{aligned} V_2 &= B_1 V_1, \\ V_3 &= B_2 a_2 = B_2 B_1 V_1 \\ V_4 &= R_3 a_3 = R_3 B_2 B_1 V_1 \\ &\vdots \\ V_n &= B_{n-1} \dots R_3 B_2 B_1 V_1. \end{aligned} \quad (\text{VII.65})$$

VII. 2. 3. Fréquences naturelles, vitesses critiques de tournoiement et leurs modes correspondants

En fonction des variables complexes, les conditions aux limites s'écrivent comme suit

$$\bar{u}_1(0) = 0, E_1 I_1 \bar{\psi}'_1(0) = 0, \quad \bar{u}_n(L_n) = 0, E_n I_n \bar{\psi}'_n(L_n) = 0 \quad (\text{VII.66})$$

Finalement, les conditions aux limites (VII.66) peuvent s'écrire comme suit

$$\Pi_1(0) V_1 = 0, \quad \Pi_n(L_n) V_n = 0 \quad (\text{VII.67})$$

En utilisant les relations (VII.65), on peut écrire les conditions aux limites sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(0) \\ \Pi_n(L_n) B_{n-1} \dots H_3 B_2 B_1 \end{bmatrix} \{V_1\} = 0 \quad (\text{VII.68})$$

ainsi, les conditions aux limites sont exprimées en fonction du vecteur V_1 , qui est le vecteur des coefficients des solutions des vibrations du premier tronçon d'arbre de Timochenko ($i=1$)

$$V_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}]^T \quad (\text{VII.69})$$

Selon l'équations (VII.65), le vecteur colonne V_1 vérifie l'équation suivante

$$C_1 V_1 = 0 \quad (\text{VII.70})$$

où

$$C_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_{41} & \dots & & \alpha_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1(0) \\ \Pi_n(L_n)B_{n-1}\dots H_3B_2B_1 \end{bmatrix} \quad (\text{VII.71})$$

L'équation (VII.70) représente l'équation caractéristique. Si l'on écarte la solution triviale pour le vecteur V_1 , on doit avoir

$$|C_1| = 0 \quad (\text{VII.72})$$

qui représente l'équation des fréquences. Les fréquences naturelles (ω_s) du système à l'arrêt et les vitesses critiques de tournoiement ($\tilde{\omega}_s$) peuvent s'obtenir par résolution de l'équation des fréquences (VII.72), pour ($\Omega = 0$) et ($\Omega = \tilde{\omega}_s$), respectivement.

D'après I. P. Natanson [17], dans le cas d'une matrice singulière, le vecteur propre (V_1) dans l'équation (VII.70) peut être estimé à une constante multiplicative près ϕ , comme suit

$$a_{11} = \phi f_{11}, \quad a_{12} = \phi f_{12}, \quad a_{13} = \phi f_{13}, \quad a_{14} = \phi f_{14} \quad (\text{VII.73})$$

où $f_{1\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, 4$) représentent les compléments algébriques correspondant aux éléments $\alpha_{1\nu}$ ($\nu = 1, \dots, 4$) de la matrice C_1 . Le mode vibratoire du premier tronçon d'arbre ($i=1$) peut s'exprimer comme

$$\bar{u}_1(x) = g_{11} \sin \lambda_1^{(1)} x + g_{12} \cos \lambda_1^{(1)} x + g_{13} \sinh \lambda_2^{(1)} x + g_{14} \cosh \lambda_2^{(1)} x \quad (\text{VII.74})$$

avec

$$g_1 = \{g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}\}$$

Pour le i ème tronçon d'arbre de Timochenko, on obtient

$$\bar{u}_i(x) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_1^{(i)} x & \cos \lambda_1^{(i)} x & \sinh \lambda_2^{(i)} x & \cosh \lambda_2^{(i)} x \end{bmatrix} \{g_i\} \quad (\text{VII.75})$$

avec

$$g_i = [g_{i1}, g_{i2}, g_{i3}, g_{i4}]^T$$

Pour le reste des tronçons d'arbres, on utilise les équation (VII.64), et on obtient les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 g_2 &= B_1 g_1, \\
 g_3 &= B_2 g_2 = B_2 B_1 g_1 \\
 &\vdots \\
 g_n &= B_{n-1} g_{n-1} = B_{n-1} B_{n-2} \dots R_3 B_2 B_1 g_1
 \end{aligned}
 \tag{VII.76}$$

où

$$g_i = [g_{i1}, g_{i2}, g_{i4}, g_{i4}]^T$$

VII. 3. Application à un rotor constitué d'un arbre de Timoshenko à section étagée supportant trois disques identiques [16]

On considère l'exemple numérique représenté sur la figure (VII.5) de la référence [18], représentant un rotor constitué de six arbres d'une longueur $L_i = 0.20 \text{ m}$ et d'un diamètre $d_i^{(s)} = 0.03 \text{ m}$ ou 0.04 m chacun, à section étagée supportant trois disques identiques, ayant chacun une épaisseur $h = 0.004 \text{ m}$, et un diamètre $d^{(d)} = 0.36 \text{ m}$. Les propriétés du matériau des segments d'arbres et des disques sont: le module de Young $E = 2.068 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, coefficient de correction du cisaillement $\bar{k} = 0.75$, et le module de Kirchhoff $G = 0.795 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. La masse volumique des arbres et des disques est $\rho_i^{(d)} = \rho_i^{(s)} = 7850 \text{ kg/m}^3$

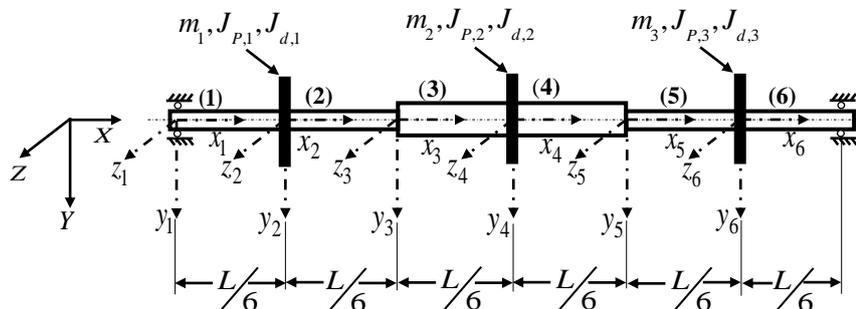


Figure VII. 5: Arbre de Timoshenko étagé supportant trois disques rigides et identiques.

Les premières cinq fréquences naturelles ω_s ($s=1,2,\dots,5$) obtenues en appliquant la méthode présentée dans ce chapitre et celles obtenues par les auteurs de la référence [18] en utilisant la méthode des éléments finis (MEF) sont représentées sur la tableau VII.1.

Tableau VII.1: Comparaison des cinq premières fréquences $\omega_1 - \omega_5$ (avec $\Omega=0$)

Mode	Fréquences Propres ω_s ($s=1,2,\dots,5$), avec $\Omega=0$	
	(rad / s)	
	Méthode présentée	MEF in Ref. [18]
1 st	140.72011	140.7202
2 nd	434.46529	434.4659
3 rd	925.09181	925.0961
4 th	1490.61536	1490.6195
5 th	1697.21160	1697.2179

Le Tableau VII.1. montre que les cinq premières fréquences propres obtenues en utilisant la méthode présentée dans ce chapitre sont identiques à celles obtenues par les auteurs de la référence [18], en utilisant la méthode conventionnelle (MEF). Les modes propres correspondant à ces fréquences propres sont représentés sur les figures (VIII. 6)-(VII. 10)

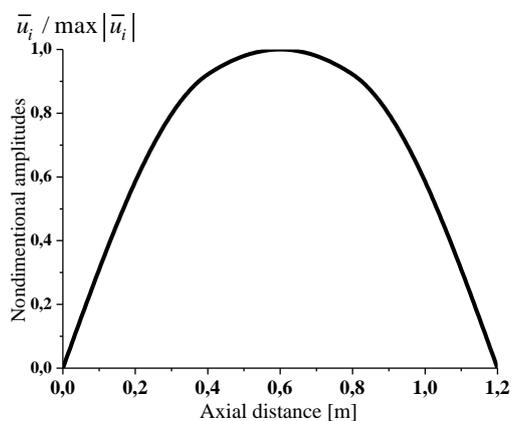


Figure VII. 6: Le premier mode propre des vibrations transversales.

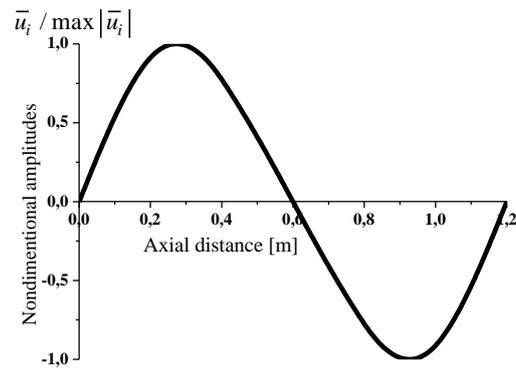


Figure VII. 7: Le second mode propre des vibrations transversales.

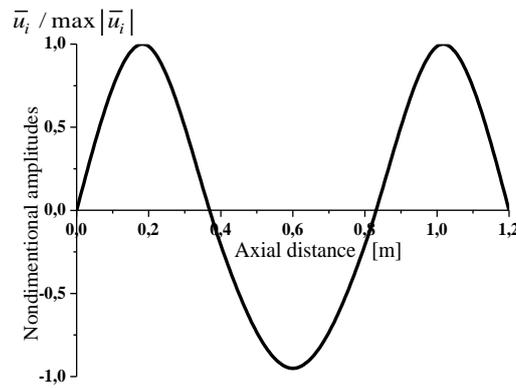


Figure VII. 8: Le troisième mode propre des vibrations transversales.

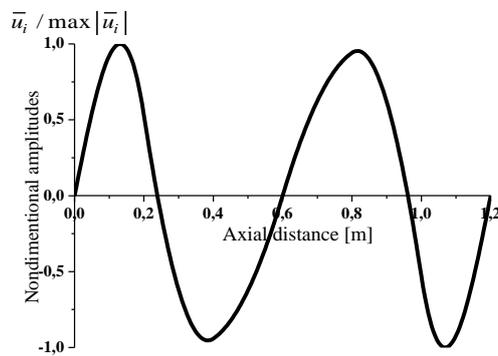


Figure VII. 9: Le quatrième mode propre des vibrations transversales.

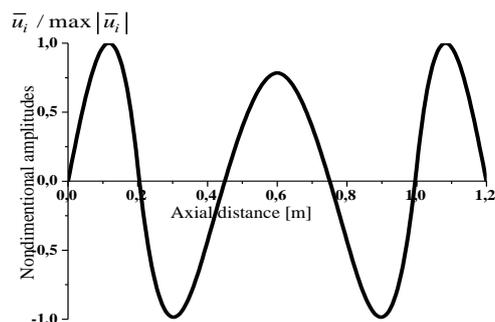


Figure VII. 10: Le cinquième mode propre des vibrations transversales.

Sur le tableau VII.2. sont présentées les cinq basses vitesses critiques $\tilde{\omega}_s^F$ et $\tilde{\omega}_s^B$ ($s=1,2,\dots,5$), de tournoiement (whirling) avant "**forward**" et arrière "**backward**" prenant en considération le moment gyroscopique de l'arbre, obtenues par la méthode présentée dans ce chapitre, et celles obtenues par les auteurs de la référence [18] en utilisant la méthode conventionnelle (MEF).

TABLE VII.2: Comparaison des cinq basses vitesses critiques de tournoiement (whirling) avant "**forward**" et arrière "**backward**", correspondant à ($\Omega = \tilde{\omega}$), avec le moment gyroscopique de l'arbre pris en compte.

Vitesses Critiques de Tournoiement $\tilde{\omega}_s$ avec $\Omega = \tilde{\omega}$			
(rad / s)			
Direction du tournoiement	Méthode présentée	MEF dans la Ref. [18]	Méthode Analytique dans la Ref. [18]
	$\tilde{\omega}_1^F$	147.06340	147.0635
	$\tilde{\omega}_2^F$	480.87540	480.8764
Forward	$\tilde{\omega}_3^F$	932.46869	932.4732
	$\tilde{\omega}_4^F$	5355.19469	5355.6869
	$\tilde{\omega}_5^F$	6216.88169	6217.4720

	$\tilde{\omega}_1^B$	134.99264	134.9927	134.9927
	$\tilde{\omega}_2^B$	391.214530	391.2148	391.2148
Backward	$\tilde{\omega}_3^B$	896.275739	896.2792	896.2790
	$\tilde{\omega}_4^B$	960.383015	960.3859	960.3858
	$\tilde{\omega}_5^B$	1068.337680	1068.3425	1068.3423

Sur le Tableau VII.2, on voit que toutes les valeurs des vitesses critiques de tournoiement (whirling) avant "**forward**" et arrière "**backward**" calculées à l'aide de la méthode des matrices de transfert relatives aux vecteurs des coefficients constants, présentée dans ce chapitre, sont identiques à celles obtenues en utilisant la méthode conventionnelle (MEF) de la référence [18]

Le tableau VII.3 montre une comparaison entre les valeurs des vitesses critiques $\tilde{\omega}_s^F$ and $\tilde{\omega}_s^B$ ($s=1,2,\dots,5$) de tournoiement (whirling) avant "**forward**" et arrière "**backward**" calculées à l'aide de la méthode présentée dans ce chapitre en négligeant le moment gyroscopique de l'arbre, et celles obtenues par les auteurs de la référence [18] en utilisant la méthode conventionnelle (MEF).

Tableau VII.3: Comparaison des cinq basses vitesses critiques de tournoiement (whirling) avant "**forward**" et arrière "**backward**", correspondant à ($\Omega = \tilde{\omega}$), avec le moment gyroscopique de l'arbre négligé.

Vitesses Critiques des Vibrations de Tournoiement

$\tilde{\omega}_s$ avec ($\Omega = \tilde{\omega}$) (rad / s)

Direction du tournoiement	Méthode présentée	MEF dans la Ref. [18]	Méthode Analytique dans la Ref. [18]
	$\tilde{\omega}_1^F$	147.05248	147.0526
	$\tilde{\omega}_2^F$	480.64971	480.6506
Forward	$\tilde{\omega}_3^F$	932.01115	896.2792

$\tilde{\omega}_4^F$	5320.47043	5320.9487	960.3859
$\tilde{\omega}_5^F$	6172.09668	6172.6673	6172.1948
<hr/>			
$\tilde{\omega}_1^B$	135.00107	135.0011	135.0011
$\tilde{\omega}_2^B$	391.34774	391.3481	391.3480
Backward $\tilde{\omega}_3^B$	896.60700	896.6104	896.6103
$\tilde{\omega}_4^B$	960.55576	960.5586	960.5585
$\tilde{\omega}_5^B$	1068.64318	1068.6480	1068.6478

Le tableau VII.3 montre que toutes les valeurs calculées à l'aide de la méthode présentée dans ce travail sont identiques à celles obtenues par les auteurs de la référence [18] en utilisant la méthode conventionnelle (MEF).

Ceci montre que l'approche présentée dans ce chapitre qui consiste à combiner la méthode des matrices de transfert relatives aux vecteurs des coefficients des solutions des équations différentielles avec la technique de I. P. Natanson, qui utilise les compléments algébriques, est une approche robuste.

Les modes correspondants aux cinq basses vitesses critiques de tournoiement avant (forward whirling) et tournoiement arrière (backward whirling), obtenus à l'aide de la méthode présentée dans ce chapitre sont représentés les figures (VII. 11- VII. 15),

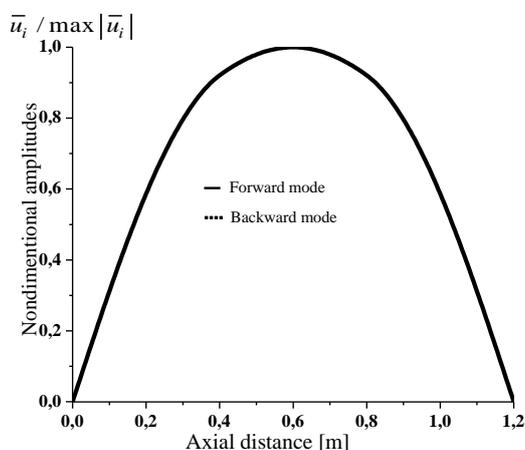


Figure VII. 11: Le premier mode de vibrations de tournoiement.

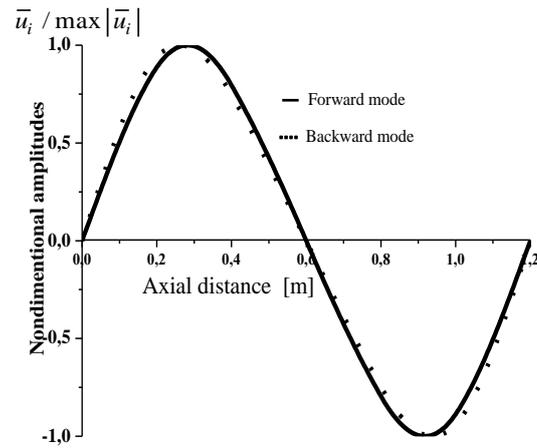


Figure VII. 12: Le second mode de vibrations de tournoiement.

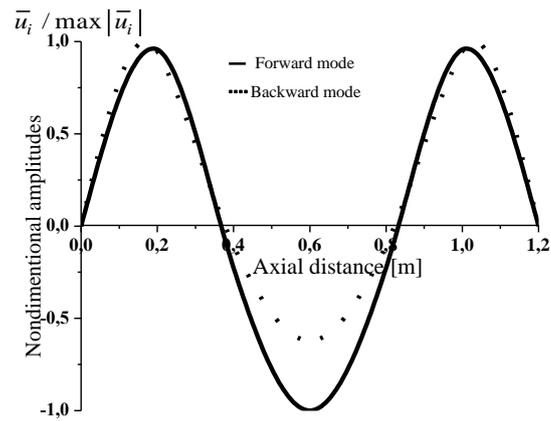


Figure VII. 13: Le troisième mode de vibrations de tournoiement.

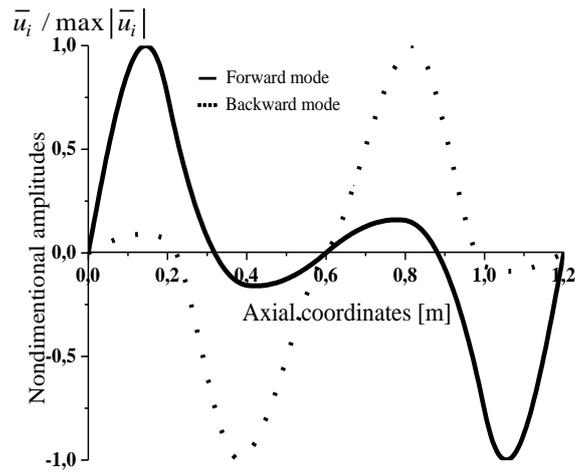


Figure VII. 14: Le quatrième mode de vibrations de tournoient.

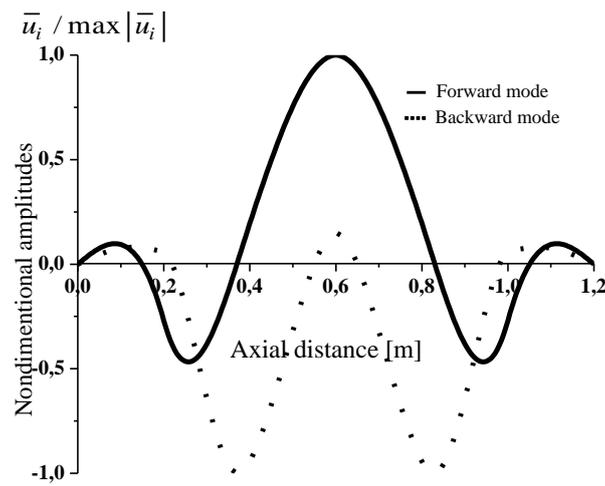


Figure VII. 15: Le cinquième mode de vibrations de tournoient.

Références Bibliographiques

- [1] Volcy G., (1978): Machinery and hull from a static and interaction and compatibility between vibration point of view, SNAME, Ship Vibration Symposium. Arlington.
- [2] Kolenda Janusz, (2015): Noise and vibrations on ships
Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia, Pologne
- [3] Géraudin M., Rixen D., (1996): Théorie des Vibrations. Application à la dynamique des structures. 2^{ème} édition corrigée et complétée, Masson, Paris.
- [4] Jastrzebski P., Mutermilch J., Orłowski W., (1985): La résistance des matériaux, (*Wytrzymałość materiałów*). Arkady, Warszawa.
- [5] Timoshenko, S.P., Young, D.H., and Weaver, W. Jr. (1974) Vibration Problems in Engineering, 4th edn, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [6] Myklestad, N.O. (1944) A new method of calculating normal modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams. *Journal of Aeronautical Science*, 11, 153–162.
- [7] Wu, J.S. Analytical and Numerical Methods for Vibration Analyses, 2013, John Wiley & Sons, Singapore Pte. Ltd.
- [8] Hamdi Cherif Z., Kandouci Ch. , (2020): Dynamic characteristics of multi-disk shaft system using the vectors of solution coefficients.
Journal of Mechanical Engineering; MARA. Vol 17(3), 95-115.
- [9] Kandouci Ch., Adjal Y., (2014): Forced axial and torsional vibration of a shaft line using transfer matrix method related to solution coefficients.
Journal of Marine Science and Application, 13(2), pp 200-205.
- [10] Lloyd Register of Shipping, (2020); Guidance notes (LR) rules and regulations for the classification of ships. Lloyd's Register, London, UK.
- [11] Bureau Veritas, (2020): BV rules for the classification of steel ships, part C machinery, electricity, automation and fire protection. Chap. 1, Sec. 9. Bureau Veritas, Neuilly-sur-Seine, France, 156.
- [12] DetNorskVeritas –Germanisher L'oyd (DNV-GL), (2018): Ship vibration and noise. Rules for the Ship Classification.
- [13] Prohl M. A., (1945): A general method for calculating critical speeds of flexible rotors. *ASME J. Appl. Mech.*, 12, pp. 142-148.
- [14] Kolenda J., (1978): Forced vibrations of shaft line taking in to account the flexural stiffness asymmetry and foundation flexibility. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **16** (4), pp517-535.
- [15] Kolenda J., (1979): A more precise description of shaf line vibrations.

Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 17(2).

- [16] Kandouci Ch., (2022) Whirling analysis of stepped Timoshenko shaft carrying several rigid disks. *Journal of Mechanical Engineering* 19(2): 97–124
- [17] Natanson I. P., (1999): Short course in higher mathematics. Publ. Lan. (St. Petersburg), pp 399-400.
- [18] Wu J. S., Hsu T. F., (2020): An efficient approach for whirling speeds and mode shapes of uniform and nonuniform Timoshenko shafts mounted by arbitrary rigid disks. *Engineering reports, Wiley Online Library*, 2(7).