



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf



Faculté du Génie Electrique

Département d'Electronique

Asservissements et Régulation des systèmes linéaires et continus

Cours et Exercices

Destiné en priorité aux étudiants en génie électrique (LICENCE 3^{ème} année : électronique et génie biomédical)

Polycopié réalisé par : **Dr ZERHOUNI M'HAMED HOUARI**

Année Universitaire 2018 / 2019

Cet ouvrage est destiné en priorité aux étudiants en génie électrique (LICENCE 3^{ème} année : électronique et génie biomédical) qui s'intéressent au comportement des systèmes asservis linéaires. L'électronique permet en effet de concevoir de nombreux dispositifs, nécessitant d'être régulés ou permettant d'en réguler. L'automatique peut se décliner en plusieurs volets. L'un de ces volets est l'asservissement. C'est la tâche habituelle attendue de l'automaticien. Il s'agit d'intervenir sur le système pour qu'il fonctionne de la manière souhaitée et de manière automatique, sans l'intervention humaine. Pour ce faire, cet ouvrage présente des notions fondamentales qui sont illustrées par des exemples. Le cours est complété par des exercices.

C'est une ressource pour un étudiant en génie électrique dans le cadre de l'étude des systèmes linéaires.

L'ouvrage s'articule sur huit chapitres :

- **BREFS APERCUS SUR LES SYSTEMES ASSERVIS**
- **TRANSFORMEE DE LAPLACE**
- **SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES CONTINUS**
- **ANALYSE DES SYSTEMES DU PREMIER ET DU DEUXIEME ORDRES**
- **IDENTIFICATION DES SYSTEMES ASSERVIS**
- **STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS**
- **PRECISION DES SYSTEMES ASSERVIS**
- **CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS**

Ainsi, les étudiants disposeront d'un outil de travail adapté qui les aidera dans leurs études.

Cet ouvrage porte sur la matière asservissements et régulation des systèmes asservis linéaires et continus.

CHAPITRE 1 : BREFS APERCUS SUR LES SYSTEMES ASSERVIS

1.1.Définitions	5
1.2 Notion de commande : chaîne directe	5
Exemple 1	6
1.3 .Notion de système bouclé	7
Exemple 2	7
1.4. Différentes dénominations	8
1.5.Intérêts de l'automatique	8

CHAPITRE 2: TRANSFORMEE DE LAPLACE

2.1 Systèmes linéaires	9
2.2. Transformée de Laplace	9
2.2.1 Définition	9
2.3. Entrées types	9
2.3.1 Echelon unitaire	9
2.3.2La rampe causale	10
2.3.2 Impulsion de Dirac	11
Exemple 1	11
2.4 Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace	12
2.5 Transformée de Laplace inverse	13
2.5.1 Cas où les pôles (racines du dénominateur) sont réels et simples	13
2.5.2 Cas où un pôle n'est pas réel	14
2.5.3 Cas où les pôles sont réels et multiples	14

EXERCICES RESOLUS	15
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	17

CHAPITRE 3: SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES CONTINUS

3. Fonction de transfert d'un système asservi	19
3.1 Fonction de transfert en boucle fermée	19
3.2 Fonction de transfert en boucle ouverte	20
3.3 Systèmes à plusieurs entrées	22
3.3.1 Théorème de superposition	22
3.4 Quelques règles à connaître	23

EXERCICES RESOLUS	24
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	27

CHAPITRE 4 : ANALYSE DES SYSTEMES DU PREMIER ET DU DEUXIEME ORDRE

4.1 Principe de l'étude	30
4.2 Systèmes du premier ordre	30
4.2.1 Mise en équation	30

4.2.2 Réponse temporelle	30
4.2.2.1 Réponse à une impulsion de Dirac	30
4.2.2.2 Réponse indicielle	31
a) Le dépassement	32
b) Temps de montée	32
c) Temps d'établissement à x%	32
4.2.2.2.1 Caractéristiques temporelles	33
4.2.2.3 Réponse à une entrée en rampe	33
4.3 Etude des systèmes du second ordre	34
4.3.1 Mise en équation	34
4.3.2 Réponse indicielle	34
a) Discriminant positif	34
b) Discriminant nul	35
c) Discriminant négatif	35
4.3.2.1 Caractéristiques temporelles	37
4.4 Réponse harmonique (fréquentielle)	38
4.4.1 Diagramme de Bode	38
4.4.2 Diagramme de Nyquist	38
4.4.3 Diagramme de Black – Nichols	38
EXERCICES RESOLUS	39
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	48

CHAPITRE 5 : IDENTIFICATION DES SYSTEMES ASSERVIS

5 Identification par la réponse indicielle	50
5.1 Système du premier ordre	50
5.2 Système du deuxième ordre	51
EXERCICES RESOLUS	54
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	58

CHAPITRE 6 : STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

6. Méthode d'étude de la stabilité à partir de la FTBF	60
6.1. Etude des pôles de la FTBF	60
6.1.1 Carte des zéros et des pôles	61
Exemple 1	61
Exemple 2	61
6.2 Critères algébriques de stabilité	62
6.2.1 Systèmes d'ordre $n \leq 2$	62
6.2.2 Systèmes d'ordre $n > 2$: (Critère de Routh)	63
6.3 Critères graphiques	64
6.3.1 Notion de point critique	64
6.3.2 Enoncé du critère de Revers	65
• Dans le plan de Nyquist	65
• Dans le plan de Bode	65

6.3.3 Marges de stabilité	65
6.3.3.1 Marge de phase	65
6.3.3.1 Marge de gain	65
Lieu d'Evans (Lieu des racines ou Lieu des pôles)	66
Procédure pour le tracé du lieu d'Evans	67
Exemple 3	69
EXERCICES RESOLUS	72
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	75
CHAPITRE 7 : PRECISION DES SYSTEMES ASSERVIS	
7 Précision statique	77
7.1 Ecart de position	78
7.2 Ecart de vitesse	78
7.3 Ecart d'accélération	78
7.4 Rejet de la perturbation par compensation	79
EXERCICES RESOLUS	81
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	83
CHAPITRE 8 : CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS	
8.1 Définition	84
8.1.1 Correction série	84
8.1.2 Correction parallèle	85
8.1.3 Correction série-parallèle	85
8.2 Correcteurs série usuels	86
8.2.1 Correcteurs qui modifient le gain	86
8.2.1.1 Correcteur proportionnel P	86
8.2.1.2 Correcteur intégral I	87
8.2.1.3 Correcteur PI	89
8.2.1.4 Correcteur à "retard de phase"	90
8.2.2. Correcteurs qui modifient la marge de phase	93
8.2.2.1 Correcteur proportionnel dérivé PD	93
8.2.2 .2 Correcteur à avance de phase	94
8.2.3 Le correcteur réalisant les deux actions	96
a) Effets du correcteur	97
b) Caractéristiques du PID	98
8.3 Avantages et inconvénients du correcteur P, PI à avance de phase, PID	98
8.4 Etapes de synthèse des correcteurs	98
EXERCICES RESOLUS	99
EXERCICES SUPPLEMENTAIRES	104

L'homme a toujours utilisé l'énergie. Il a eu besoin de réaliser des dispositifs mécaniques pour réguler la vitesse des machines. Au 17ème siècle, il y'a eu les moulins avec des régulateurs centrifuges. Au 18ème siècle, Watt a transformé la machine à vapeur pour améliorer sa rentabilité. Il y a eu transformation du mouvement alternatif en une rotation continue. Une régulation mécanique basée sur un régulateur centrifuge a été réalisée.

Les premiers modèles ont vu le jour en 1776. Maxwell en 1868 a lancé les premières études théoriques sur la régulation. Routh et Hurwitz ont par la suite, mené des études sur la stabilité des systèmes. En 1927, Black introduit la notion de chaîne de retour. Nyquist fit des études sur la stabilité adaptées aux systèmes avec contre réaction. Au 20ème siècle, la régulation et l'asservissement des systèmes ont beaucoup avancé. Et le progrès ne cesse d'avancer...

1.1.Définitions

- L'automatique c'est ce qui fonctionne tout seul ou sans intervention humaine.
- L'automatique peut s'appliquer à tout ce qui bouge, fonctionne, se transforme.
- L'automatique est un assemblage de théories mathématiques et un moyen de raisonnement qui concerne la prise de décision, le contrôle et la commande de système.
- Un système est une collection d'objets reliés entre eux de telle sorte à former un tout pour réaliser une fonction donnée. L'objet d'application de l'automatique est appelé système.

Entre les éléments d'un système, il existe une certaine dépendance.

De façon générale, un système peut être décrit par une équation différentielle, sa réponse impulsionnelle, sa fonction de transfert...

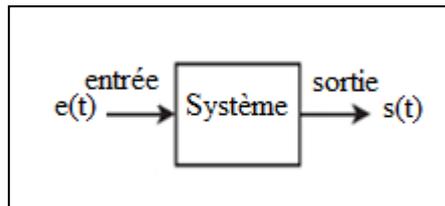


Figure (1.1) : modèle d'un système

Nous agissons sur les entrées d'un système qui pour nous est une boîte noire afin d'observer les réactions obtenues.

Exemples d'applications : les passages à niveaux, les distributeurs automatiques, les ascenseurs...

- **Un système est dit continu** si les entrées et les sorties sont des fonctions d'une variable continue (le temps).
- Au sens mathématique, **un système est dit linéaire**, si le principe de superposition s'applique.
- **Un système est dit invariant** (ou **stationnaire**) si les relations entre l'entrée et la sortie sont indépendantes du temps.

1.2 Notion de commande : chaîne directe

La commande d'un système consiste à exercer une influence sur un ou plusieurs éléments de ce système pour réaliser une fonction déterminée. Cette commande varie et peut être :

- Commande manuelle
- Commande avec amplificateur de puissance.
- Commande par entrées secondaires.

En boucle ouverte BO, la sortie n'a pas de retour sur le sommateur. Elle comprend la chaîne d'action et la chaîne de mesure.

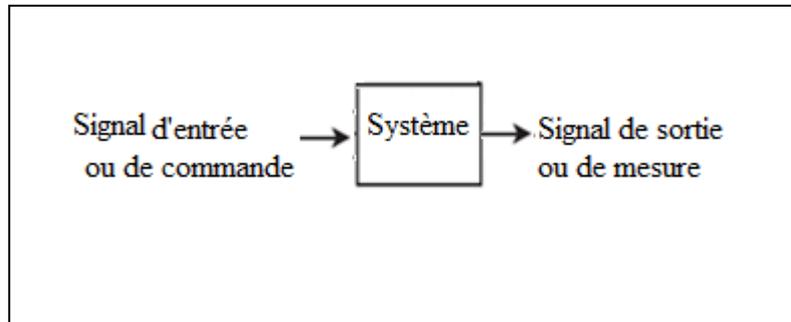


Figure (1.2) : système en chaîne ouverte

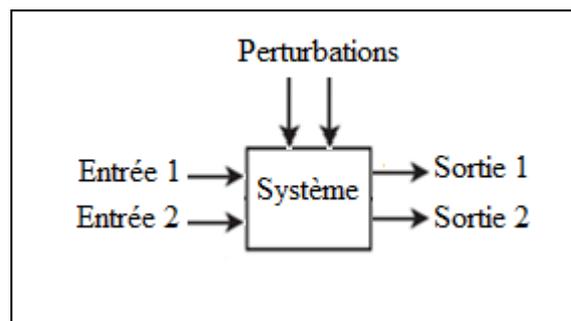


Figure (1.3) : système avec perturbation

Exemple 1:

Dans le cas où le système est une voiture, on aura :

les entrées : le volant, l'accélérateur et le frein.

les perturbations : le vent, l'état de la route...

les sorties : la position de la voiture et sa vitesse.

Remarque :

- *Le système en B.O n'est ni précis, ni sûr.*

1.3 .Notion de système bouclé :

Un système asservi, en boucle fermée, peut être représenté par la figure suivante :

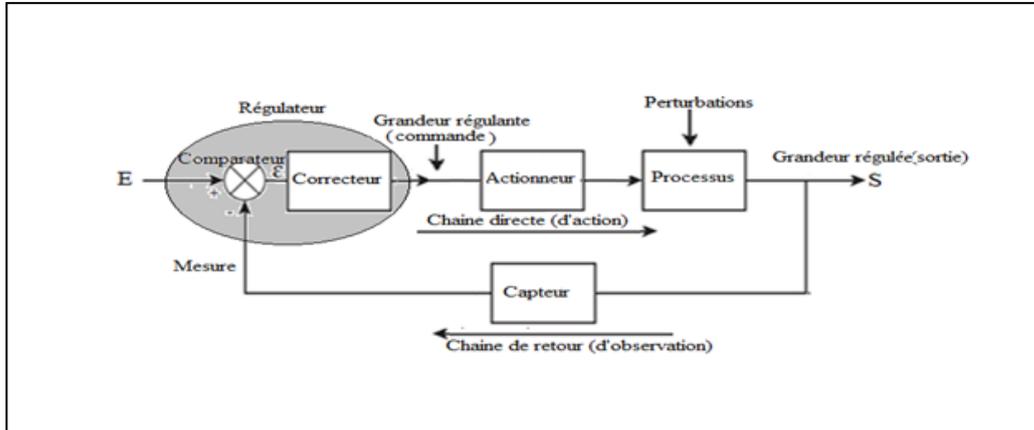


Figure (1.3) : schéma bloc d'un système asservi

Un système possède deux chaînes :

- **Une chaîne directe** : ou chaîne d'action, qui met en jeu une puissance importante.
- **Une chaîne de retour** : ou chaîne d'information
- **Le processus** est soumis aux excitations constituées par l'entrée de référence et les perturbations. La grandeur par laquelle il répond porte le nom de grandeur réglée ou grandeur asservie.
- **Le capteur** donne une image utilisable de la grandeur réglée. La nature de cette mesure est souvent électrique. Un capteur doit donner une image fidèle de la grandeur réglée. Sa stabilité impose donc les limites de la précision de l'asservissement
- **Le régulateur** est composé de deux parties :
- **Le comparateur** fait la différence encore appelée écart ou erreur entre l'information de référence et la grandeur mesurée.
- **Le correcteur** a pour rôle d'éliminer cet écart, en dépit des perturbations. Il doit amener le processus à réagir le plus rapidement, malgré les variations de l'entrée de référence ou les perturbations. C'est l'organe intelligent du système asservi.
- **L'actionneur** est l'organe muscle du système. Il reçoit du régulateur la grandeur régulante et l'amplifie en puissance. Il va piloter l'évolution du processus (exemple : moteur, vérin).

Dans plusieurs applications en industrie, il faut garder à des valeurs fixes, certaines grandeurs physiques (vitesse de rotation d'un moteur, température d'un four,.....) .

On est donc amené à concevoir des systèmes, où la grandeur à maîtriser qui est la grandeur de sortie s'aligne de manière précise sur la grandeur souhaitée ou consigne, quel que soient les conditions l'environnement. On réalise ceci en appliquant une rétroaction ou bouclage de la sortie sur l'entrée.

Exemple 2 :

Soit un conducteur qui est au volant d'un véhicule. Il doit suivre la route. Pour cela, il observe la route et son environnement et évalue la distance qui sépare son véhicule du

bord de la route.

Il détermine en fonction du contexte, l'angle qu'il doit donner au volant pour suivre la route. Il agit sur le volant (donc le système). Puis, il recommence son observation (nouvelle distance) pendant toute la durée du déplacement.

Si un coup de vent dévie le véhicule de sa trajectoire, après avoir observé et mesuré l'écart, le conducteur agit pour s'opposer à cette perturbation.

Remarque :

- *Un bouclage apparaît donc chaque fois qu'au cours d'une opération, un système prend en compte l'observation de son état pour le changer.*

1.4. Différentes dénominations

On répertorie généralement les systèmes asservis en deux catégories, par leur mode de fonctionnement. On a les systèmes régulateurs et les systèmes suiveurs ou asservissements.

- Systèmes régulateurs
- Systèmes suiveurs

1.5. Intérêts de l'automatique :

Les systèmes automatiques permettent avant tout de réaliser des opérations répétitives, difficiles, compliquées, pénibles qui ne peuvent pas être confiées à l'homme, pour différents motifs . Parmi celles-ci :

- **La précision** : limitée dans le cas de l'intervention humaine.
- **Le caractère pénible, voire impossible**, de tâches à effectuer dans certains environnements.
- **La complexité** : à partir d'une certaine échelle (grand nombre de paramètres), la commande manuelle n'est plus envisageable.
- **La répétitivité** de tâches
- **La recherche d'une diminution des coûts par l'augmentation des rendements** : en particulier la robotisation permet de diminuer notablement la part relative de la main d'œuvre dans le prix de revient.
- **La recherche de performances élevées** (productivité, coût, qualité et régularité des produits, rapidité des réponses, etc.....)

2.1 Systèmes linéaires

Soit un système linéaire stationnaire monovariante décrit par l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} + \dots b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

a_0, \dots, a_n et b_0, \dots, b_k sont des constantes. n est l'ordre du système.

On dispose de la relation directe entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

En général, pour un système physique, on a $k < n$.

Dans ce qui suivra, nous nous intéresserons aux systèmes linéaires à temps continu.

2.2. Transformée de Laplace (1749-1827)

2.2.1 Définition

Soit une fonction réelle d'une variable réelle $x(t)$ telle que $x(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace $X(s)$ ou $X(p)$ comme la fonction X de la variable complexe $s=p$ telle que :

$$X(p) = \text{TL}(x(t)) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

La fonction $X(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \tau + jw$)
 τ : est la partie réelle, w est la partie imaginaire.

La fonction $x(t)$ s'appelle l'original ou l'inverse de $X(p)$, ou encore sa transformée inverse.

2.3. Entrées types

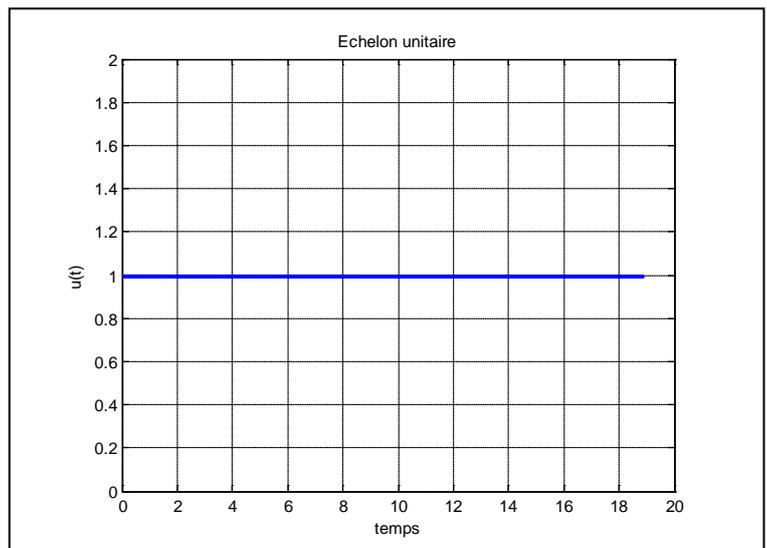
Certaines entrées types sont utilisées. Elles permettent de définir tout des critères de performances de notre système asservi. Elles sont présentées ci après.

2.3.1 Echelon unitaire

C'est un signal défini par : $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$

Le programme sous matlab permettant son tracé est avancé ci-dessous ainsi que son tracé.

```
t=[0:0.01:6*pi];
u=1;
plot(t,u,'b')
title('Echelon unitaire')
xlabel('temps')
ylabel('u(t)')
grid on
```



On calcule à présent $U(p)$ la transformée de Laplace de $u(t)$.

$$U(p) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt$$

$$U(p) = \int_0^{+\infty} 1 e^{-pt} dt$$

$$U(p) = -\frac{1}{p} [e^{-pt}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$$U(p) = \text{TL} [u(t)] = \frac{1}{p}$$

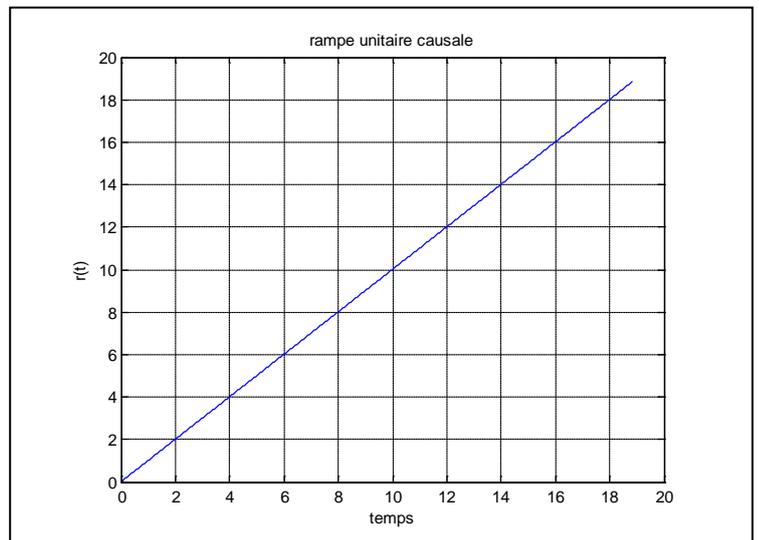
2.3.2 La rampe causale :

Le programme sous Matlab permettant son tracé est avancé ci-dessous ainsi que son tracé.

Elle est définie par : $r(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$

Le programme sous matlab permettant son tracé est avancé ci-dessous ainsi que son tracé

```
t=[0:0.001:6*pi];
f=t;
plot(t,f,'r')
title('rampe unitaire causale')
xlabel('temps')
ylabel('r(t)')
grid on
```



Pour calculer sa transformée de Laplace, on va utiliser l'intégration par partie :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \left[-t \frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} dt$$

Sachant que : $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x e^x) = 0$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = 0 - \left[\frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

$$R(p) = \text{TL} [r(t)] = \frac{1}{p^2}$$

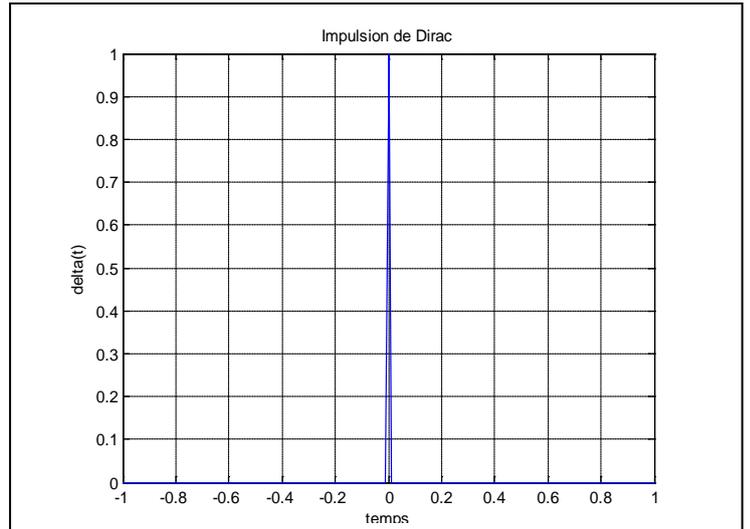
2.3.3 Impulsion de Dirac

Elle est définie par une fonction nulle pour tout t et pour t=0 ou elle a une valeur infinie.

$$TL[\delta(t)] = 1$$

Le programme sous matlab permettant son tracé est avancé ci-dessous ainsi que son tracé

```
t = (-1:0.01:1)';
impulse = t==0;
plot(t,impulse)
title('Impulsion de Dirac')
xlabel('temps')
ylabel('?(t)')
grid on
```

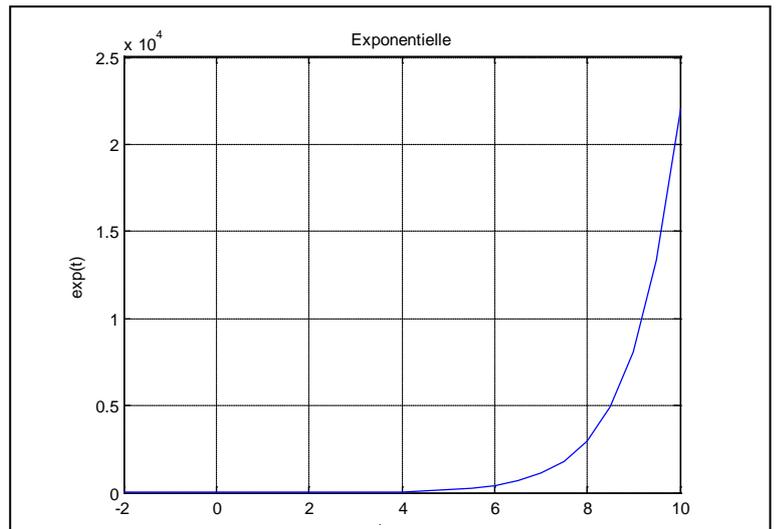


Exemple 1

Déterminer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

```
t = -2:0.5:10;
f = exp(t);
plot(t,f,'b')
title('Exponentielle')
xlabel('temps')
ylabel('exp(t)')
grid on
```



$$\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t} dt = \left[\frac{1}{p+a} e^{-(a+p)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

$$F(p) = TL [f(t)] = \frac{1}{p+a}$$

2.4 Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

Quelques propriétés sont importantes à connaître car elles permettent de calculer facilement les transformées de Laplace de certains signaux.

On posera :

$$\text{TL } [x(t)] = X(p)$$

$$\text{TL } [y(t)] = Y(p)$$

α, β, τ, a sont des réels.

a) Linéarité

La linéarité est une propriété importante de la transformation de Laplace

$$\text{TL}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha X(p) + \beta Y(p)$$

b) Multiplication de t par un scalaire :

$$\text{TL}[\alpha x(t)] = \frac{1}{|\alpha|} X(p)$$

c) Translation temporelle (retard) :

$$\text{TL}[x(t-\tau)] = X(p) e^{-\tau p}$$

d) Translation temporelle (avance) :

$$\text{TL}[x(t+\tau)] = X(p) e^{+\tau p}$$

e) Multiplication par t :

$$\text{TL}[t x(t)] = -\frac{dX(p)}{dp}$$

f) Multiplication par exponentielle :

$$\text{TL}[e^{-at} x(t)] = X(p+a)$$

j) Multiplication de deux signaux temporels :

$$\text{TL}[x(t) y(t)] = X(p) * Y(p)$$

k) Convolution de deux signaux temporels :

$$\text{TL}[x(t)*y(t)] = X(p) Y(p)$$

l) Dérivation par rapport à t :

$$\text{TL}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = p^n X(p) - p^{n-1}x(0^+) - p^{n-2}\dot{x}(0^+) - \dots - px^{n-2}(0^+) - x^{n-1}(0^+)$$

m) Intégration par rapport à t :

$$\text{TL}\left[\int_0^t x(u) du\right] = \frac{X(p)}{p}$$

n) Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$$

o) Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} (x(t)) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$$

Si la limite en $t=0$ de $x(t)$ existe.

Remarques:

- *Le produit de fonctions $f(t).g(t)$ n'a pas pour transformée $F(p).G(p)$ mais $F(p)*G(p)$.*
- *Dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace.*
- *Intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace.*
- *On appelle Zéros: les racines du numérateur, et Pôles les racines du dénominateur de la fonction de transfert.*

2.5 Transformée de Laplace inverse

A partir d'une fonction $X(p)$ transformée de Laplace de $x(t)$, on veut retrouver son original, autrement dit la fonction $x(t)$.

En prenant : $TL[x(t)] = X(p)$, on a :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma - jR}^{\sigma + jR} X(p) e^{pt} dp$$

Une autre méthode pour déterminer $x(t)$ à partir de $X(p)$ est de décomposer la fonction $X(p)$ fractions (éléments), en utilisant les tables de transformées, on détermine $x(t)$.

On va expliquer ceci en prenant trois exemples. On cherche à trouver $x(t)$.

2.5.1 Cas où les pôles (racines du dénominateur) sont réels et simples

Considérons :

$$X(p) = \frac{5p + 1}{p^2 + 3p + 2}$$

$$p^2 + 3p + 2 = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$p_1 = -2 ; p_2 = -1$$

On va écrire :

$$\begin{aligned} \frac{5p + 1}{p^2 + 3p + 2} &= \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{p + 2} \\ \frac{5p + 1}{p^2 + 3p + 2} &= \frac{(A + B)p + 2A + B}{p^2 + 3p + 2} \end{aligned}$$

A et B sont des constantes.

Par comparaison on trouve $A = -4$ et $B = 9$

$$\frac{5p + 1}{p^2 + 3p + 2} = -\frac{4}{p + 1} + \frac{9}{p + 2}$$

$$TL^{-1} \left[\frac{5p + 1}{p^2 + 3p + 2} \right] = \begin{cases} -4e^{-t} + 9e^{-2t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

2.5.2 Cas où un pôle n'est pas réel

Soit:

$$X(p) = \frac{4p^3 - 2p^2 + 4p - 4}{(p^2 + 2)(p^2 + 1)}$$

Les racines du dénominateur sont complexes conjuguées : $p_1 = \pm j\sqrt{2}$; $p_2 = \pm j\sqrt{1}$

$$X(p) = \frac{4p^3 - 2p^2 + 4p - 4}{(p^2 + 2)(p^2 + 1)} = \frac{Ap + B}{(p^2 + 2)} + \frac{Cp + D}{(p^2 + 1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 4 \\ B + D = -2 \\ A + 2C = 4 \\ B + 2D = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 4 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = -2 \end{cases}$$

A, B, C, D sont des constantes.

$$X(p) = \frac{4p^3 - 2p^2 + 4p - 4}{(p^2 + 2)(p^2 + 1)} = \frac{4p}{(p^2 + 2)} - \frac{2}{(p^2 + 1)}$$

$$x(t) = TL^{-1} \left[\frac{4p^3 - 2p^2 + 4p - 4}{(p^2 + 2)(p^2 + 1)} \right] = \begin{cases} 4 \cos\sqrt{2} t - 2 \sin t & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

2.5.3 Cas où les pôles sont réels et multiples

Soit :

$$X(p) = \frac{p + 4}{(p + 2)^2(p + 5)}$$

On a un pôle double (-2) et un pôle réel (-5).

A, B, C sont des constantes.

$$\frac{p + 4}{(p + 2)^2(p + 5)} = \frac{A}{(p + 2)^2} + \frac{B}{(p + 2)} + \frac{C}{(p + 5)}$$

$$\frac{p + 4}{(p + 2)^2(p + 5)} = \frac{(B + C)p^2 + (A + 7B + 4C) + 5A + 10B + 4C}{(p + 2)^2(p + 5)}$$

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 7B + 4C = 1 \\ 5A + 10B + 4C + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 4 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\frac{p + 4}{(p + 2)^2(p + 5)} = \frac{4}{(p + 2)^2} - \frac{1}{(p + 2)} + \frac{1}{(p + 5)}$$

$$x(t) = TL^{-1} \left[\frac{p + 4}{(p + 2)^2(p + 5)} \right] = \begin{cases} 4te^{-2t} - e^{-2t} + e^{-5t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE N° 1

- Résolvez l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 2\sin(2t)$$

On donne : $y(0) = 1$ et $\frac{dy(0)}{dt} = 1$

Solution :

$$TL : p^2Y(p) - py(0) - \frac{dy(0)}{dt} + Y(p) = 2 \frac{2}{p^2+4}$$

$$Y(p) (p^2 + 1) - p - 1 = \frac{4}{p^2+4}$$

$$Y(p) = \frac{4}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} + \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\frac{4}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4}$$

$$= \frac{p^3(A + C) + p^2(B + D) + p(4A + C) + 4B + D}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ 4A + C = 0 \\ 4B + D = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = 0 \\ B = \frac{4}{3} \\ C = 0 \\ D = \frac{-4}{3} \end{matrix}$$

$$Y(p) = \frac{4}{3} \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{2}{3} \frac{2}{p^2 + 4} + \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$x(t) = TL^{-1} \left[\frac{4}{(p^2+1)(p^2+4)} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} \right] =$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \sin(t) - \frac{2}{3} \sin(2t) + \cos(t) + \sin(t) & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

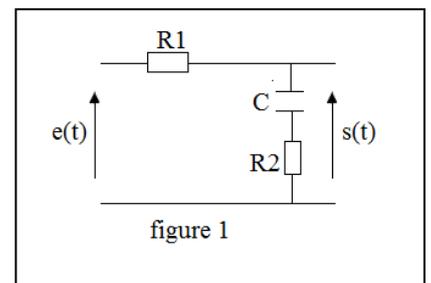
EXERCICE N°2 :

Le circuit électrique d'un correcteur à retard de phase est présenté sur la figure 1.

- 1)-Déterminez sa fonction de transfert.
- 2)-Déterminez les pôles et les zéros de ce système.

Solution :

$$S(p) = TL(s(t)), \quad E(p) = TL(e(t)).$$



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Z_{R_2+Z_C}}{Z_{R_1+Z_{R_2+Z_C}}} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cp}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{R_2 Cp + 1}{(R_1 + R_2)Cp + 1}$$

Les zéros : $z = -\frac{1}{R_2 C}$

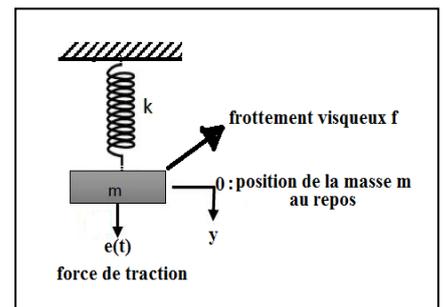
Les pôles : $p = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}$

EXERCICE N°3 :

Soit la figure ci contre qui représente le système

masse ressort amortisseur:

- Donner l'équation différentielle qui régit le système.
- Donner la fonction de transfert (avec les conditions initiales nulles).



Solution :

L'équation différentielle qui régit le système

$$e(t) = m\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t)$$

On va appliquer à cette équation différentielle la transformée de Laplace. Puis, la fonction de transfert calculée est :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{mp^2 + fp + k}$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE N° 1

- Déterminez-les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :
On prend : t : temps, w : pulsation, $j^2 = -1$. Les signaux sont causaux.

$$f_2(t) = e^{j\omega t}, \text{ En déduire la transformée de Laplace de } \cos(\omega t) \text{ et de } \sin(\omega t)$$

$$f_3(t) = \sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f_4(t) = 5(10 - e^{-4t})$$

EXERCICE N° 2

- Calculez les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{20}{p(p^2 + 4p + 3)}, F_2(p) = \frac{p^2 + p + 2}{p^2(p + 1)^3}, F_3(p) = \frac{10}{p(p + 1)(p + 2)(p^2 + 2p + 10)}$$

EXERCICE N° 3

- En utilisant la transformée de Laplace de cosinus et la transformée de Laplace de sinus ,
déterminez la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante :

$$G(p) = \frac{p - 1}{p^2 + 2p + 5}$$

EXERCICE N°4

En utilisant deux méthodes, calculez la valeur initiale : $s(t \rightarrow 0^+)$ et la valeur finale :
 $s(t \rightarrow +\infty)$ de la fonction suivante :

$$S(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)}$$

EXERCICE N° 5

Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant les transformées de Laplace.

$$2y''(t) + 2\dot{y}(t) - 12y(t) = 24t + 40$$

avec :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = \frac{3}{2} \sin(2t); y(0) = 1 \text{ et } \frac{dy(0)}{dt} = 2$$

EXERCICE N°6

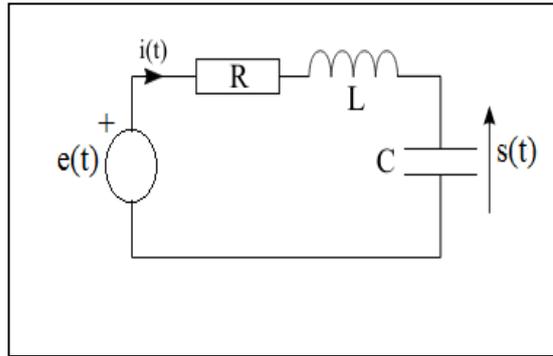
On considère un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$2 \frac{d^3s(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 6 \frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 4 \frac{de(t)}{dt} + 2e(t)$$

- a)-Calculez la fonction de transfert de ce système.
- b)-Donnez les pôles et les zéros de ce système.

EXERCICE N° 7

- Soit le circuit RLC suivant :



- 1) Etablir l'équation différentielle qui lie $e(t)$ à la tension de sortie $s(t)$.
- 2) En déduire la fonction de transfert du système.

A travers ce chapitre, nous ferons l'étude des systèmes asservis linéaires continus.

3. Fonction de transfert d'un système asservi

En premier lieu, nous allons définir quelques notions de fonction de transfert en boucle ouverte, en boucle fermée.

Réaliser une contre-réaction ou un retour ou un "feedback" : réagir en fonction de ce qui est réalisé, sachant ce qui est exigé.

Un système est en boucle ouverte lorsque la commande est élaborée sans l'aide de la connaissance des grandeurs de sortie : il n'y a pas de feedback.

Dans le cas contraire, le système est dit en boucle fermée.

3.1 Fonction de transfert en boucle fermée

De façon générale, pour déterminer une fonction de transfert en boucle fermée, on essayera de se ramener au schéma bloc suivant :

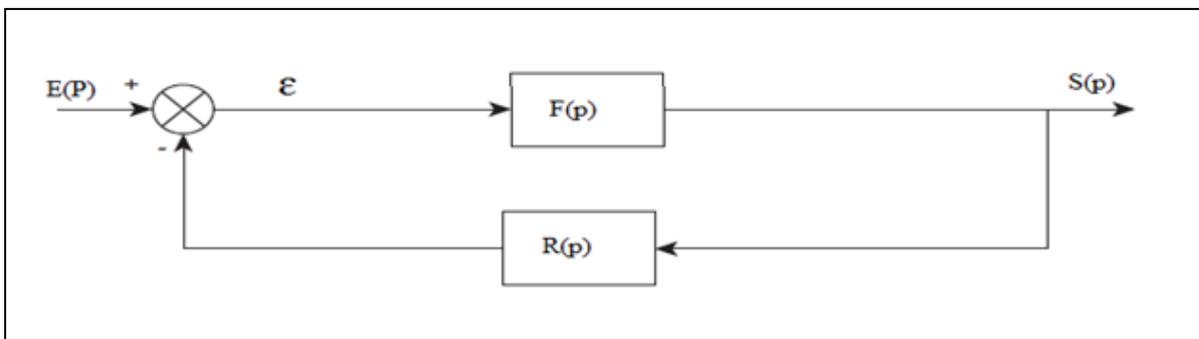


Figure (3.1) : schéma bloc (boucle fermée)

$F(p)$ représente la fonction de transfert (transmittance) de la chaîne directe.

$R(p)$ représente la fonction de transfert (transmittance) de la chaîne de retour.

Le transfert global (boucle fermée) est : $H_{BF} = \frac{S(p)}{E(p)}$

$$S(p) = F(p) \varepsilon(p) = F(p)[E(p) - S'(p)]$$

avec : $S'(p) = R(p)S(p)$

d'où : $S(p)[1 + R(p)F(p)] = F(p)E(p)$

$$H_{BF}(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)R(p)}$$

$H_{BF}(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée qu'on notera FTBF.

Remarque

La boucle fermée permet de :

- stabiliser un système instable en BO
- compenser les perturbations externes
- compenser les incertitudes internes au processus lui-même

3.2 Fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) correspond à l'ouverture de la boucle, soit sa coupure au niveau du comparateur. Donc, on ouvre la boucle de retour. La sortie prise dans ce cas est $S'(p)$. La fonction de transfert en boucle ouverte est le rapport entre l'image de la sortie $S'(p)$ (la mesure) et l'écart $\varepsilon(p) = E(p)$:

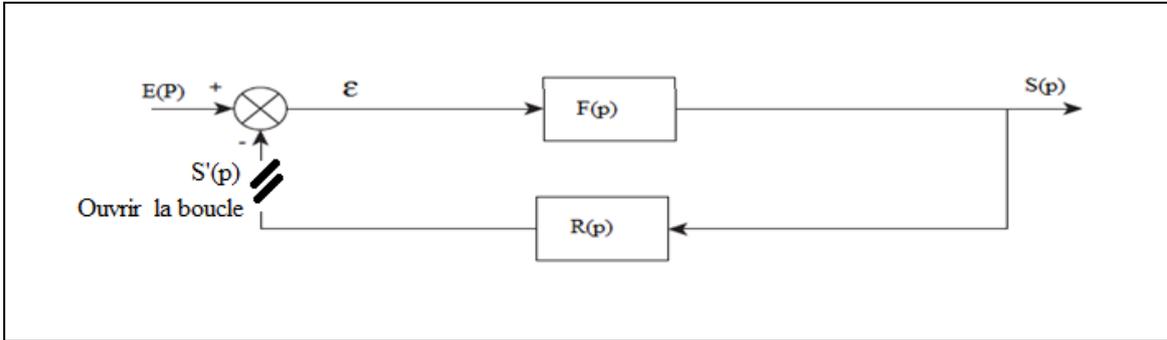


Figure (3.2) : schéma bloc (boucle ouverte)

$$H_{BO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)R(p)$$

On remarque ainsi, que la fonction de transfert on boucle fermée devient :

$$FTBF = \frac{\text{fonction de transfert de la chaine directe}}{1 + \text{fonction de transfert en boucle ouverte}}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

Pour un système à retour unitaire :

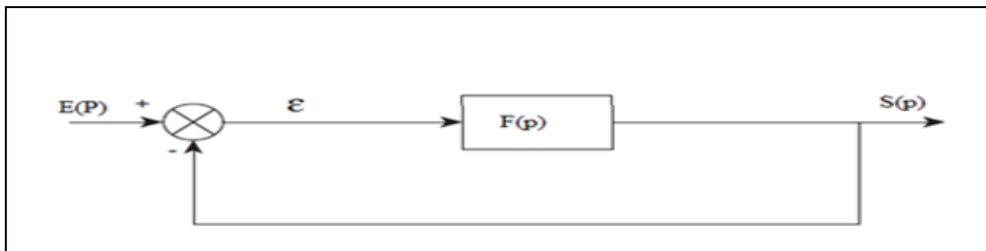


Figure (3.3) : schéma bloc (boucle à retour unitaire)

$$H_{BF}(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)} = \frac{\text{fonction de transfert de la chaine directe}}{1 + H_{BO}(p)}$$

Remarque:

- La FTBO est importante pour l'étude d'un système asservi. Son analyse spectrale (diagramme de Bode) va nous permettre d'établir les performances temporelles (précision, rapidité et amortissement) du système en boucle fermée.

- On peut citer comme exemple celui du schéma fonctionnel pour un asservissement de position d'un moteur à courant continu présenté ci après :

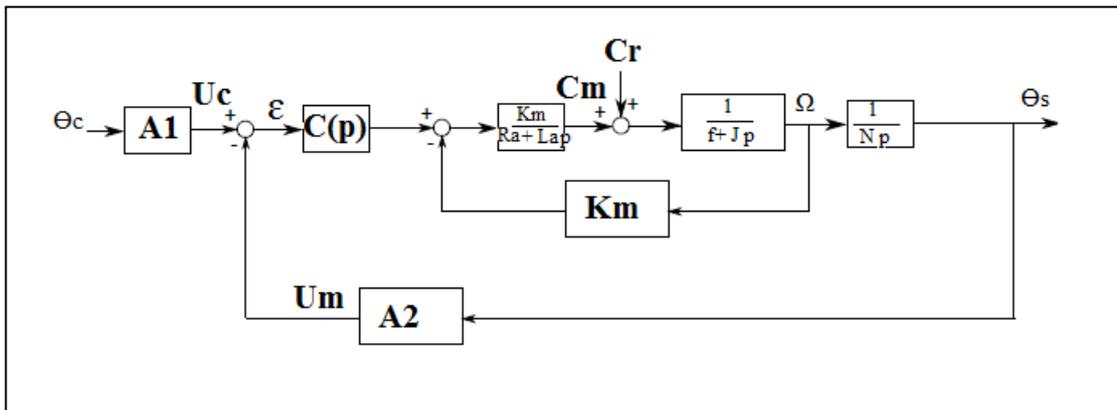


Figure (3.4) : asservissement de position

- Θ_c : signal d'entrée.
- A1 : gain constant.
- U_c : la tension délivrée en sortie de l'amplificateur.
- $C(p)$: gain du correcteur.
- K_m : constante de couple du moteur.
- R_a : résistance de l'induit du moteur.
- L_a : l'inductance.
- C_m : couple moteur.
- C_r : couple résistant du générateur.
- f : le coefficient de frottement fluide,.
- j : Moment d'inertie du moteur, ou du générateur.
- N : constante.
- U_m : Tension aux bornes de l'induit du moteur.
- A2 : gain constant.
- Θ_s : l'angle du moteur.
- Ω : la vitesse angulaire.

3.3 Systèmes à plusieurs entrées

On retrouve ce cas de système dans l'étude des systèmes asservis quand une perturbation se présente. Soit $E(p)$ l'entrée commande du système qui est connue. Soit $Y(p)$ l'entrée perturbation indésirable.

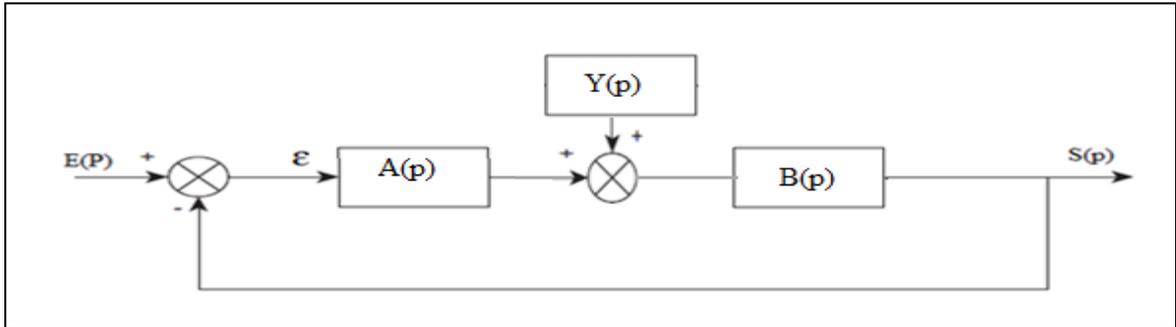


Figure (3.5) : schéma bloc (systèmes à plusieurs entrées)

La sortie $S(p)$ classique s'obtient en utilisant le principe de superposition.

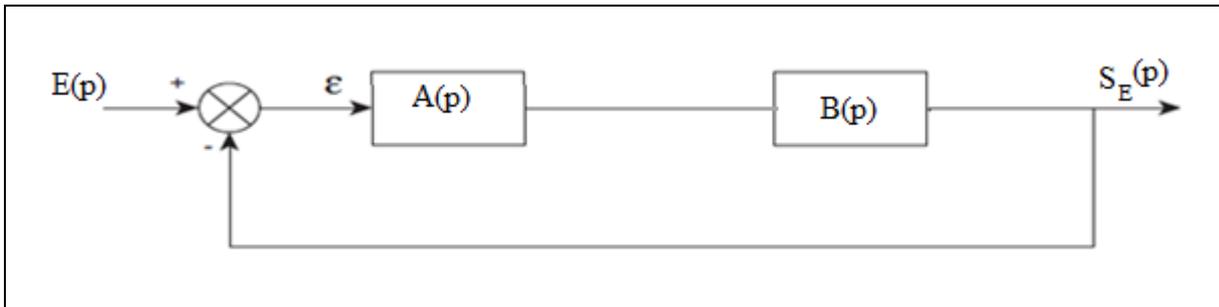
On étudie ainsi successivement la réponse $S_1(p)$ du système quand $E(p)=0$, puis $S_2(p)$ quand $Y(p)=0$ et on superpose les réponses $S(p) = S_1(p) + S_2(p)$

3.3.1 Théorème de superposition

Supposons un système linéaire. La réponse de la boucle aux sollicitations des entrées $e(t)$ et $y(t)$ sont égales à la somme des réponses de chacune des sollicitations.

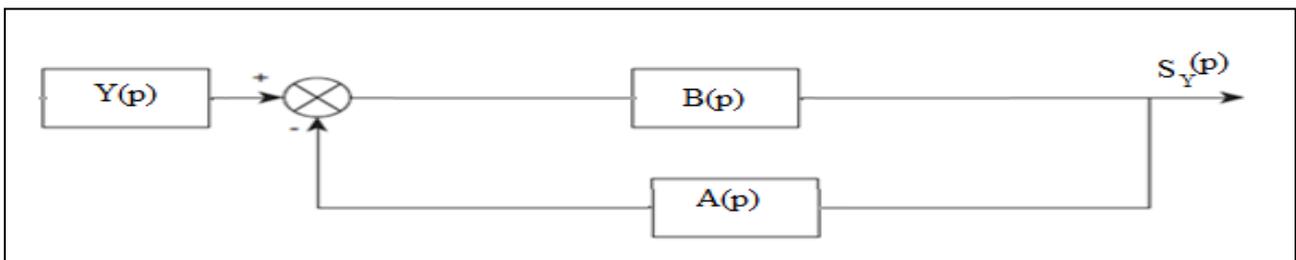
$$S(P) = S_E(p) + S_Y(p) = E(p) \frac{S_E(p)}{E(p)} + Y(p) \frac{S_Y(p)}{Y(p)}$$

On cherche $S_E(p)$ pour $\begin{cases} Y(p) = 0 \\ E(p) \neq 0 \end{cases}$



$$\frac{S_E(p)}{E(p)} = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

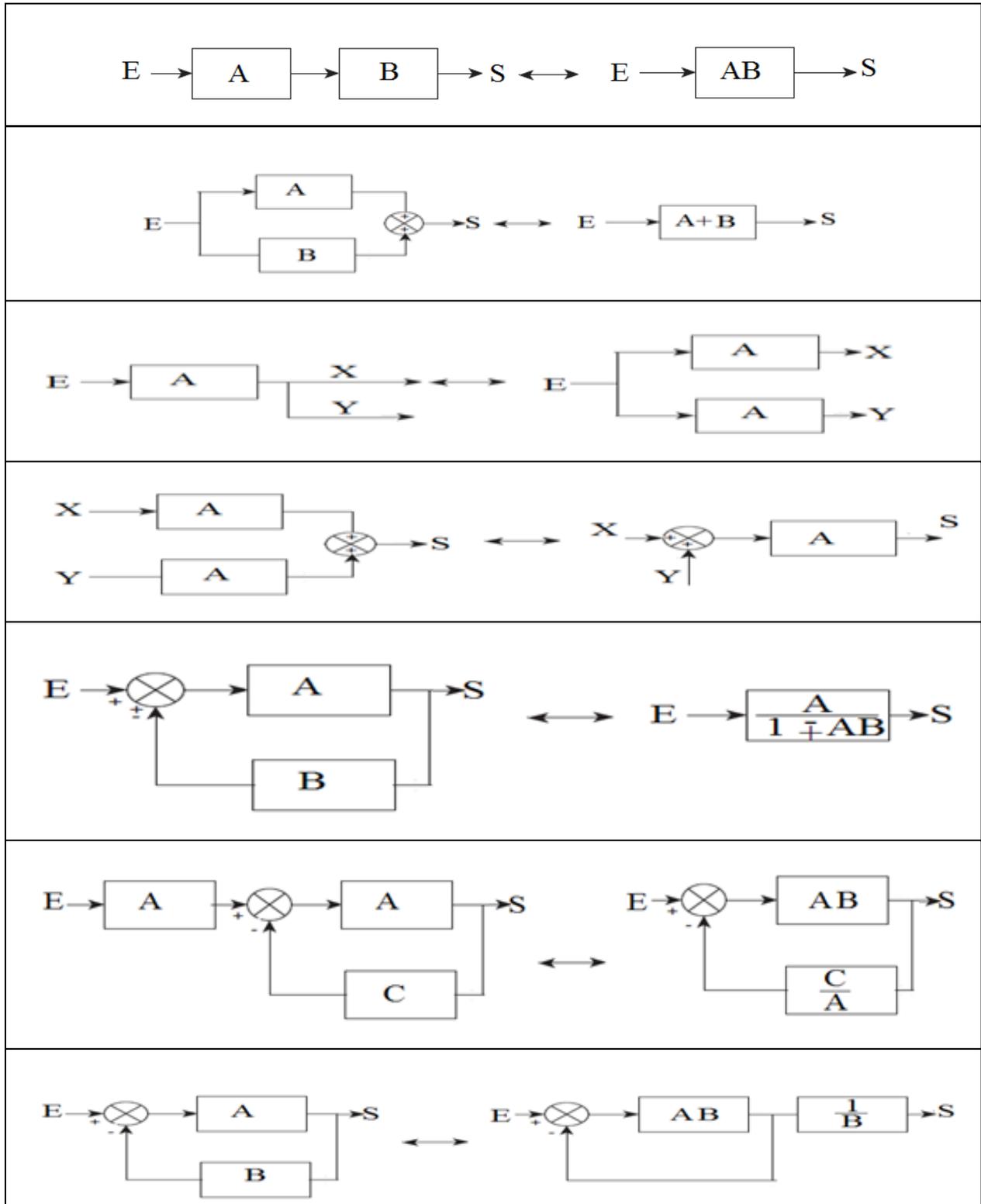
On cherche $S_Y(p)$ pour $\begin{cases} E(p) = 0 \\ Y(p) \neq 0 \end{cases}$



$$\frac{S_E(p)}{Y(p)} = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

$$S(p) = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} E(p) + \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)} Y(p)$$

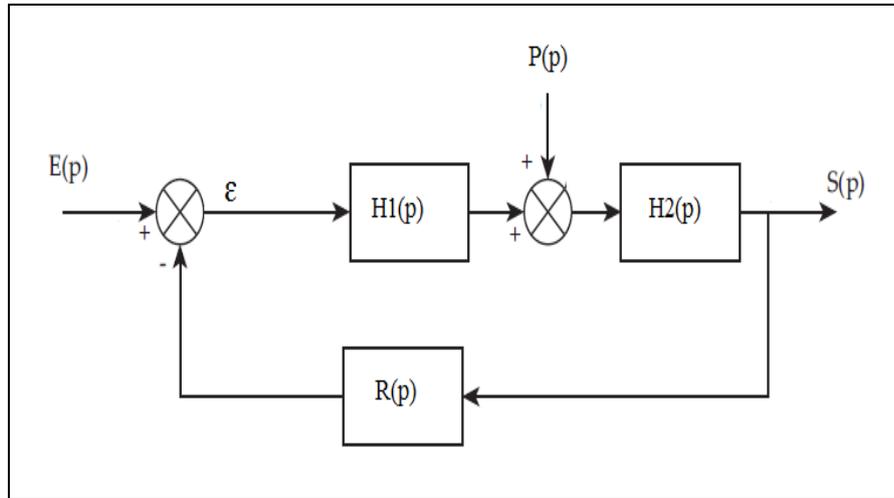
3.4 Quelques règles à connaître



EXERCICES RESOLUS

EXERCICE N° 1

Considérons le schéma général d'un système asservi en prenant l'entrée de commande $E(p)$ et l'entrée de perturbation $P(p)$.



- 1- En appliquant la méthode directe, déterminer la sortie $S(p)$ en fonction de l'entrée $E(p)$ et $P(p)$.
- 2- Déterminer la sortie pour les deux cas suivants :
 - $E(p) \neq 0$ et $P(p) = 0$
 - $P(p) = 0$ et $E(p) \neq 0$

Solution :

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p)S(p)$$

et

$$S(p) = H_2(p)[H_1(p)\varepsilon(p) + P(p)]$$

donc :

$$S(p) = H_2(p)[H_1(p)E(p) - H_1(p)R(p)S(p) + P(p)]$$

D'où :

$$S(p)[1 + H_1(p)H_2(p)R(p)] = H_1(p)H_2(p)E(p) + H_2(p)P(p)$$

$$S(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)}{[1 + H_1(p)H_2(p)R(p)]} E(p) + \frac{H_2(p)}{[1 + H_1(p)H_2(p)R(p)]} P(p)$$

$$H_1(p)H_2(p)R(p) = FTBO$$

- **Fonction de transfert vis-à-vis de l'entrée principale**

Pour $P(p)=0$, on obtient :

$$S1(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)}{[1 + H_1(p)H_2(p)R(p)]} E(p)$$

$$\frac{S1(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)}{[1 + H_1(p)H_2(p)R(p)]} = \frac{H_1(p)H_2(p)}{[1 + FTBO]}$$

- **Fonction de transfert vis-à-vis de la perturbation**

Pour $E(p)=0$, on obtient :

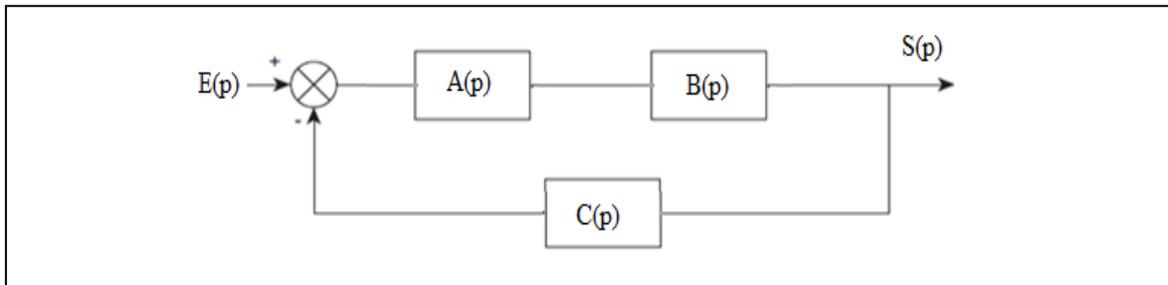
$$\frac{S_2(p)}{P(p)} = \frac{H_2(p)}{[1 + H_1(p)H_2(p)R(p)]} = \frac{H_2(p)}{[1 + FTBO]}$$

Remarques :

- On remarque que les dénominateurs des deux fonctions de transfert sont identiques. Elles possèdent de la sorte, les mêmes pôles.
- La stabilité du système dépend du type de pôles qui ne dépend pas du type d'entrée.

EXERCICE N° 2

Soit le schéma bloc suivant :

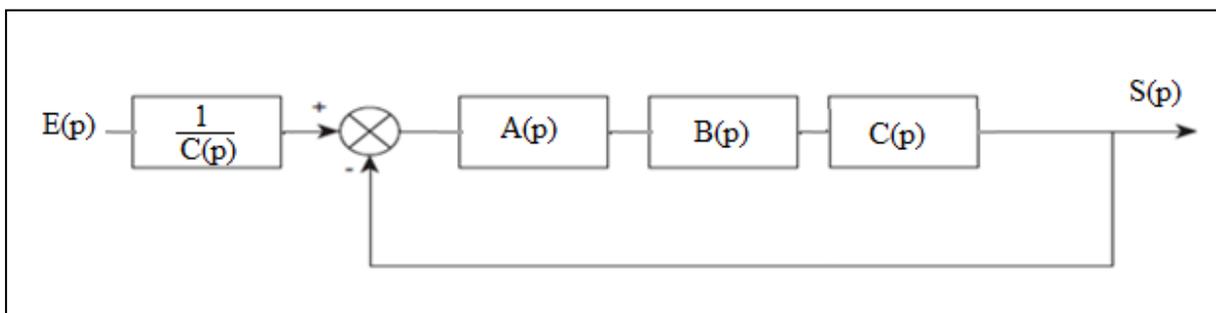


- Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).
- Proposer un schéma équivalent avec une boucle à retour unitaire .

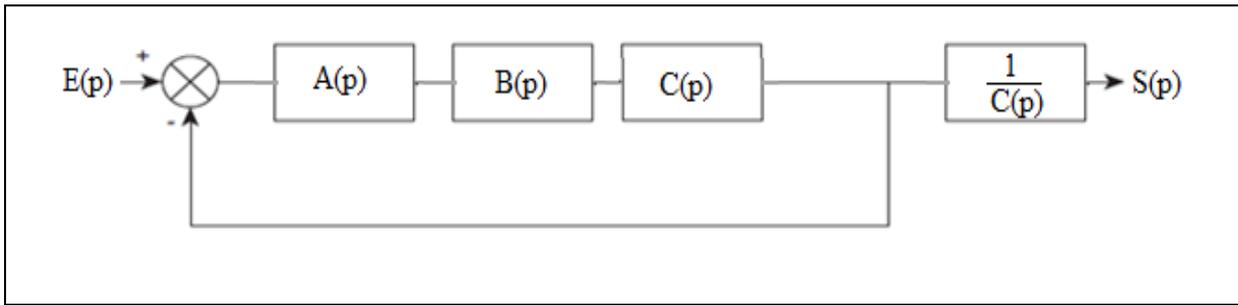
Solution :

$$FTBO = A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)$$

$$FTBF = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)C(p)}$$



Ou bien :



Pour les deux cas, on trouve la même fonction de transfert en boucle fermée :

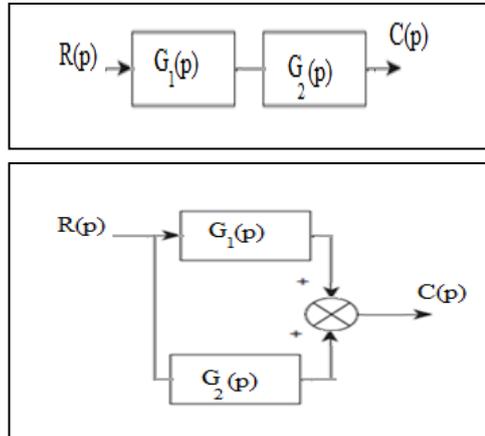
$$\text{FTBF} = \frac{1}{C(p)} \cdot \frac{A(p)B(p)C(p)}{1 + A(p)B(p)C(p)}$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE N°1

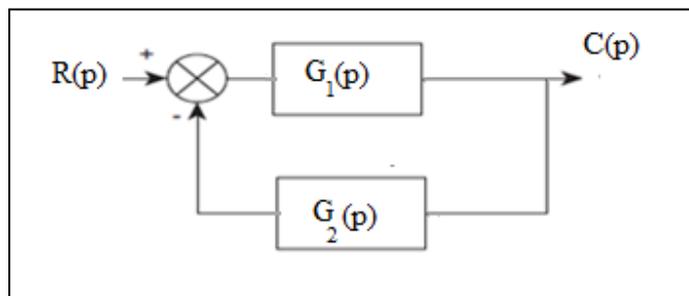
I- On considère les boucles de régulation représentées ci-dessous :

$$G_1(P) = \frac{100}{P + 10} \quad ; \quad G_2(P) = \frac{1}{2p + 1}$$



a) Déterminer $\frac{C(p)}{R(p)}$ de chaque cas.

II- On considère la boucle de régulation représentée ci-dessous

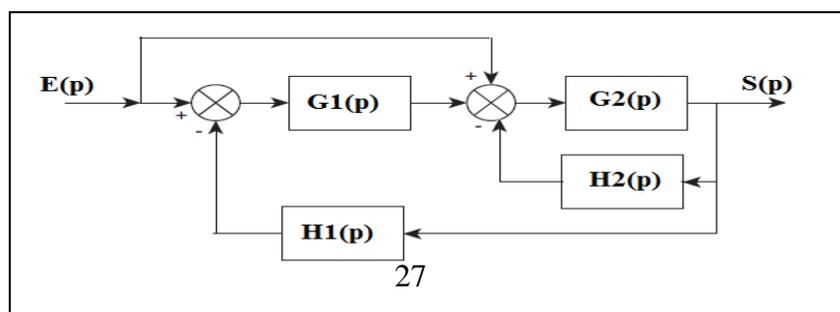


Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) .

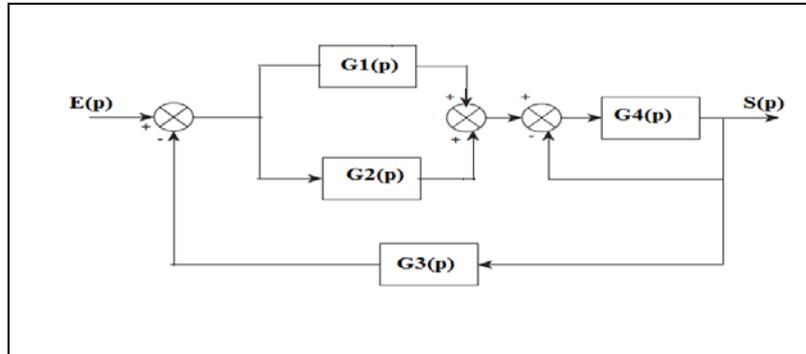
EXERCICE N° 2

1)- Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) des systèmes ci-dessous :

a)

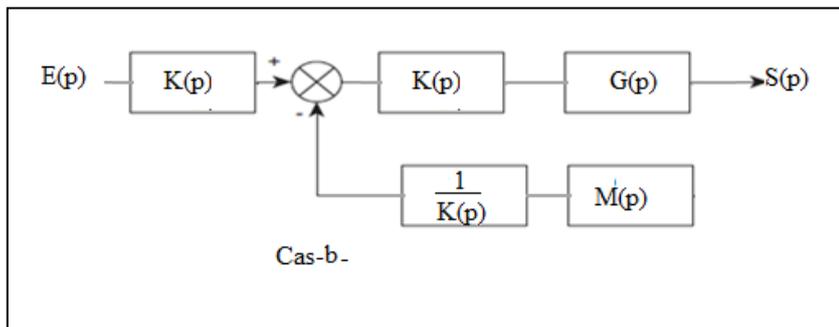
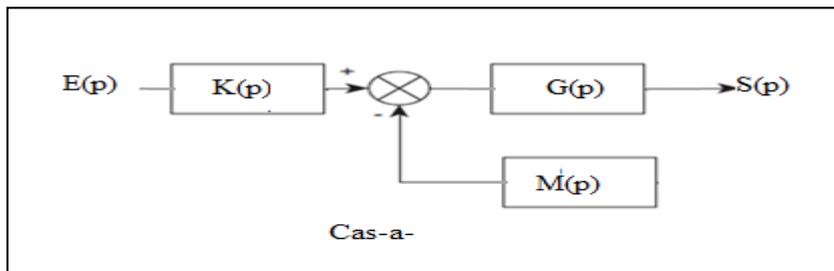


b)

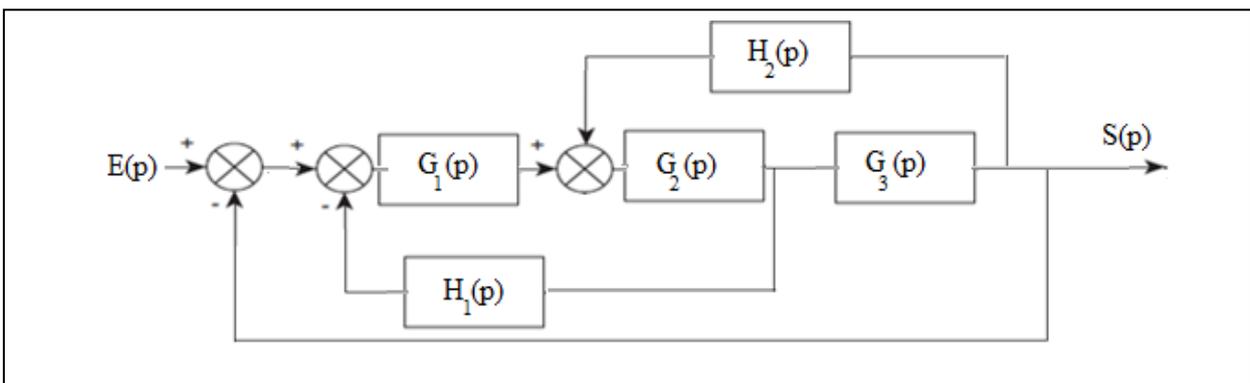


EXERCICE N° 3

A- Calculer dans le cas -a- et -b- la sortie $S(p)$ fonction de $(G(p), K(p), E(p), M(p))$.



B- On considère la boucle de régulation représentée sur la figure ci-dessous :



1-Donner la fonction globale du schéma fonctionnel (En adoptant quelques règles de réduction).

L'écrire sous forme de :

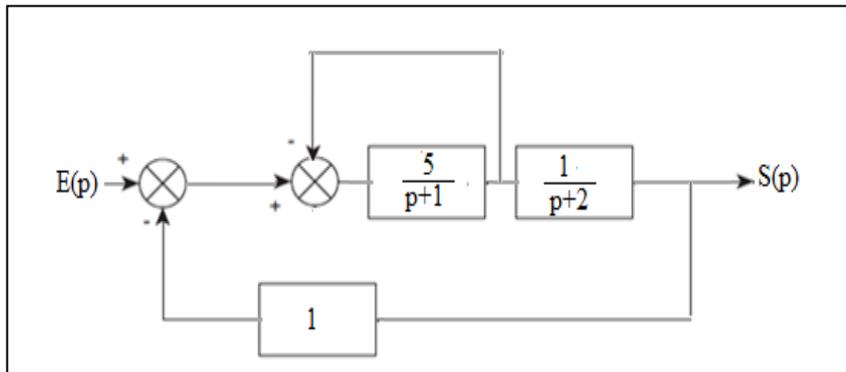
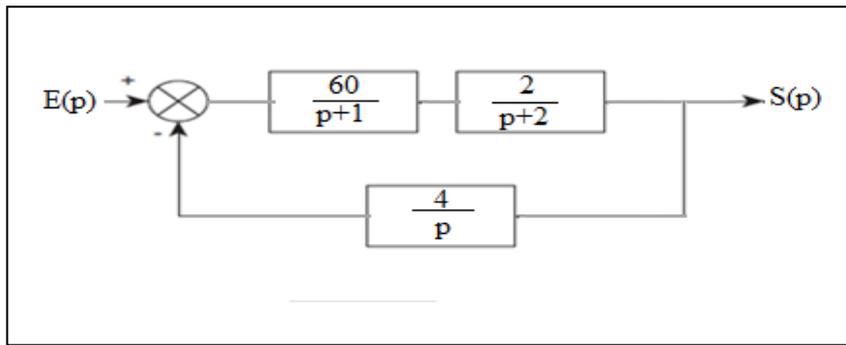
$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\frac{p^2}{w_n^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1}$$

2-Déterminer k: (gain statique du système), ξ (coefficient d'amortissement) et w_n (pulsation propre) sachant que :

$$G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot G_3(p) = 35 ; G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot H_1(p) = p^2 ; G_3(p) \cdot H_2(p) \cdot G_2(p) = 3,6 p$$

EXERCICE N° 4

On considère les boucles de régulation représentées ci-dessous :



1- Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO et la fonction de transfert en boucle fermée FTBF pour chacune des boucles .

4.1 Principe de L'étude

L'étude complète d'un système est composée de deux parties : son étude temporelle et son étude fréquentielle.

4.2 Systèmes du premier ordre

4.2.1 Mise en équation

Les systèmes du premier ordre sont régis par des équations différentielles du premier degré. Leur fonction de transfert possède un pôle. L'équation la plus couramment rencontrée est:

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = k e(t)$$

Les deux constantes τ et k sont des nombres réels positifs, en général.

τ : est appelée constante de temps du système.

k : est appelée gain statique.

Ces systèmes sont quelques fois appelés systèmes à une seule constante de temps.

Prenant les conditions initiales nulles, la fonction de transfert du système se calcule à partir de l'équation différentielle en utilisant la transformation de Laplace:

$$\begin{aligned} \tau pS(p) + S(p) &= k E(p) \\ G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{k}{1 + \tau Tp} \end{aligned}$$

4.2.2 Réponse temporelle

Pour l'étude temporelle, on cherche les réponses $s(t)$ des systèmes étudiés à des signaux d'entrée $e(t)$ appelés entrées canoniques, qui sont en général:

- l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, (réponse impulsionnelle)
- l'échelon unitaire $u(t)$, (réponse indicielle)
- rampe unitaire $v(t)$.

4.2.2.1 Réponse à une impulsion de Dirac

Soit une entrée $e(t) = \delta(t)$. On a donc :

$$E(p) = 1$$

d'où :

$$S(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

On calcule facilement $s(t)$ à partir de la table des transformées de Laplace

$$s(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

La constante de temps du système, τ peut être mise en évidence sur la courbe (figure 4.1). Dans la fonction exponentielle décroissante, la tangente à l'origine coupe l'asymptote (ici, l'axe des abscisses) au point d'abscisse τ .

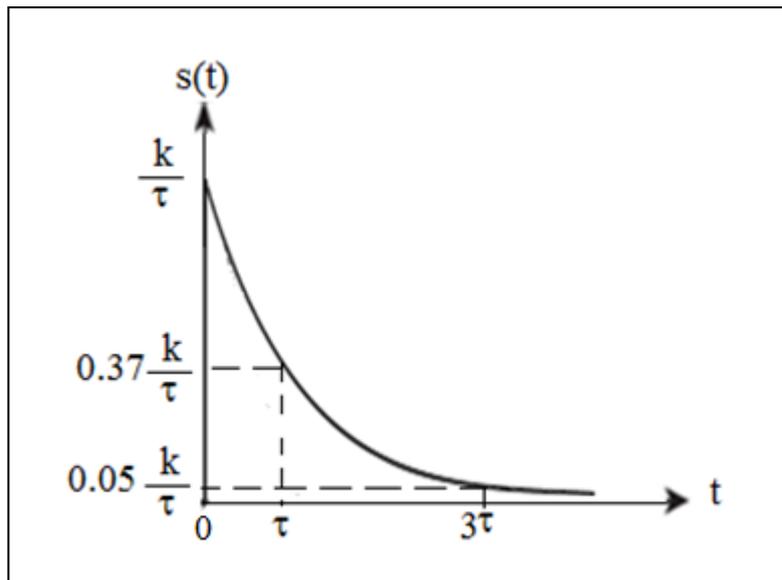


Figure (4.1) : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

4.2.2.2 Réponse indicielle

L'entrée consiste en un échelon unitaire $e(t) = u(t)$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

d'où :

$$S(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)} \frac{1}{p}$$

On calcule facilement $s(t)$ à partir de la table des transformées de Laplace :

$$s(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (t > 0)$$

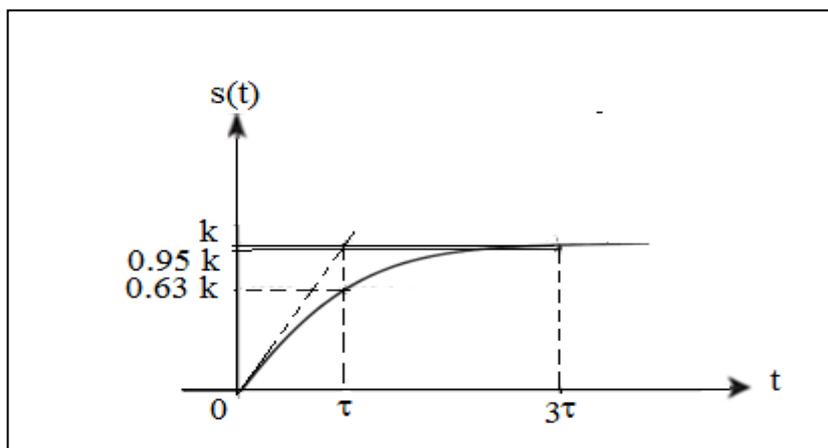


Figure (4.2) : Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

CHAPITRE 4 : ANALYSE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE ET DU DEUXIEME ORDRE

On définit le temps du premier maximum T_m comme étant l'instant caractérisant le premier maximum.

a) Le dépassement

Soit S_{max} la valeur maximale prise par $s(t)$ et S_{fin} est la valeur finale (atteinte en régime permanent). On définit le dépassement maximal si $S_{max} > S_{fin}$ par :

$$D = S_{max} - S_{fin}$$

Le dépassement relatif est un pourcentage selon :

$$D\% = \left(\frac{S_{max} - S_{fin}}{S_{fin}} \times 100 \right) \%$$

b) Temps de montée (rise time)

Il est noté t_m . C'est le temps nécessaire à la réponse pour évoluer de 10 à 90%, de 5 à 95%, ou de 0 à 100% de sa valeur finale.

Pour les systèmes du 2nd ordre peu amortis, le temps de montée de 0 à 100% est plus généralement pris.

Pour les systèmes très amortis, l'évolution de 10 à 90% est plus souvent adoptée.

c) Temps d'établissement à x% ($t_{rx\%}$)

Le temps d'établissement à x% (ou encore temps de réponse à x%) est le temps nécessaire pour que la réponse indicielle reste dans la fourchette $\pm x\%$ autour de la valeur finale S_{fin} .

On peut le définir comme le temps à partir duquel :

$$|s(t) - S_{fin}| \leq x\% \cdot S_{fin}$$

Généralement, $x\% = 10\%$ ou 5% .

Ces grandeurs caractérisent complètement le comportement transitoire (en réponse indicielle) d'un système donné.

4.2.2.1 Caractéristiques temporelles

Les caractéristiques transitoires d'un système ne dépendent pas de l'amplitude de l'échelon appliqué mais uniquement de la constante de temps τ de ce système.

Système	$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$
Dépassement D%	0
Temps du premier maximum T_m	N.D
Temps de montée t_m	2.2 x τ
Temps de réponse à 10% $t_{r\ 10\%}$	2.3 x τ
Temps de réponse à 5% $t_{r\ 5\%}$	3 x τ

4.2.2.3 Réponse à une entrée en rampe

On étudie maintenant la réponse du système à une rampe unitaire $e(t) = v(t) = t$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p^2}$$

D'où :

$$S(p) = G(p) \frac{1}{p} = \frac{k}{p^2(1+\tau p)}$$

Alors :

$$s(t) = k(t - \tau) + k\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

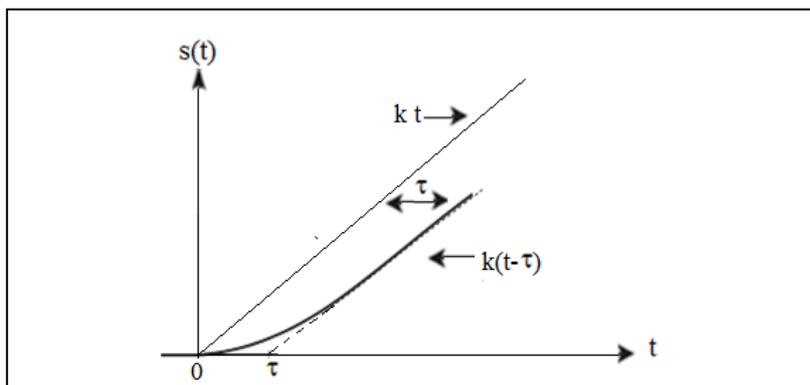


Figure (4.3) : Réponse d'un système du premier ordre à une entrée rampe.

4.3 Etude des systèmes du second ordre

4.3.1 Mise en équation

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré. Leur fonction de transfert possède donc deux pôles. L'équation la plus couramment rencontrée s'écrit :

$$\frac{1}{w_n^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2\xi}{w_n} \frac{ds}{dt} + s(t) = ke(t)$$

Les trois constantes w_n , ξ et k sont des nombres réels en général positifs.

- w_n : la pulsation propre du système ;
- ξ : est appelée coefficient ou facteur d'amortissement.
- k : est le gain statique du système.

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$\frac{1}{w_n^2} S(p) + \frac{2\xi p}{w_n} S(p) + S(p) = kE(p)$$

soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\frac{p^2}{w_n^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1}$$

4.3.2 Réponse indicielle

L'entrée prise est un échelon unitaire $e(t) = u(t)$.

On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$S(p) = \frac{G(p)}{p} = \frac{k}{p \left(\frac{p^2}{w_n^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1 \right)}$$

Trois cas sont à considérer selon le signe du discriminant du polynôme du dénominateur.

On a :

$$\Delta = \frac{4\xi^2}{w_n^2} - \frac{4}{w_n^2} = \frac{4}{w_n^2} (\xi^2 - 1)$$

a) Discriminant positif

On a : $\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$

Dans ce cas, on a :

$$s(t) = \begin{cases} k u(t) - \frac{k}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-w_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-w_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right] & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

L'étude de cette fonction montre la présence d'une asymptote en K lorsque $t \rightarrow +\infty$ et une tangente à l'origine nulle. Les deux termes en exponentielles décroissent d'autant plus

lentement que ξ est grand. Dans ce cas, le signal $s(t)$ tend moins rapidement vers son asymptote. La figure 4.4 présente l'évolution de $s(t)$ pour diverses valeurs de ξ .

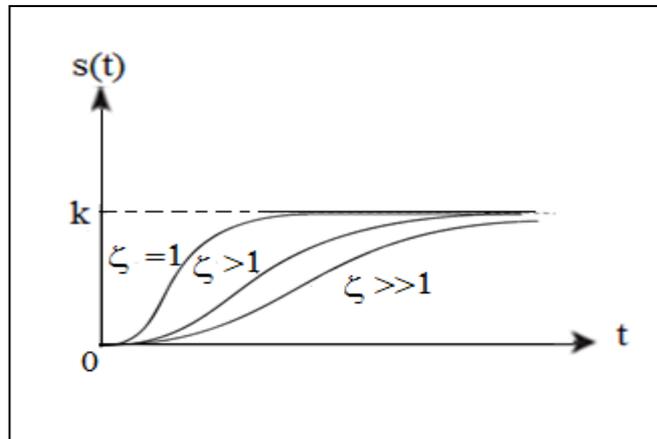


Figure (4.4) : Réponse indicielle d'un système du second ordre à divers coefficients d'amortissement.

La réponse la plus rapide est obtenue pour un facteur d'amortissement très proche de 1.

b) Discriminant nul

On a : $\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$

Dans ce cas, on a :

$$s(t) = \begin{cases} ku(t) - k(1 + w_n t)e^{-w_n t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Nous obtenons une réponse qui tend très rapidement vers l'asymptote (voir figure 4.4).

c) Discriminant négatif

On a : $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$

Dans ce cas, on a :

$$s(t) = \begin{cases} ku(t) - ke^{-\xi w_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \right] & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La réponse du système est formée de la différence de deux signaux : le signal $k u(t)$, échelon d'amplitude k et un signal sinusoïdal encadré par une enveloppe en exponentielle décroissante, qui tend donc vers 0, en oscillant. Le graphe de $s(t)$ possède donc une asymptote vers la constante k lorsque t tend vers l'infini. Le signal tend vers cette asymptote en présentant un régime dit "oscillatoire amorti" (voir figure 4.5).

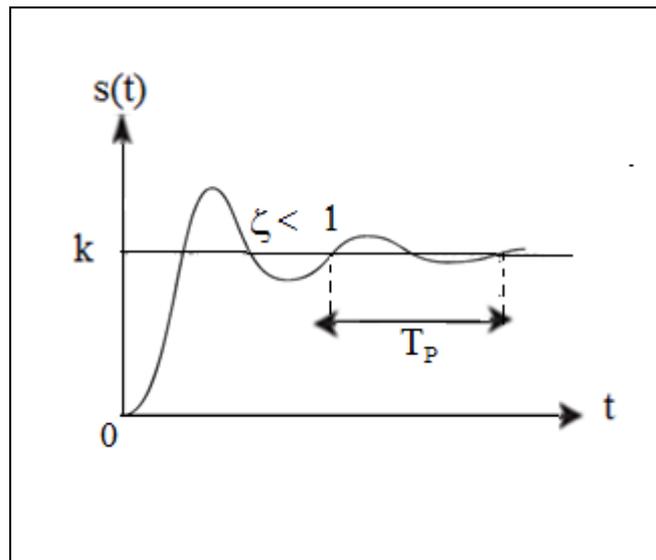


Figure (4.5) : Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement inférieur à 1

Remarques

- Les oscillations sont d'autant plus importantes (en amplitude et en durée) que le facteur d'amortissement est faible. S'il est nul, le signal de sortie est une sinusoïde oscillant entre 0 et $2k$.
- De la valeur de ξ facteur d'amortissement, dépend le type de réponse du système.

– *Régime amorti* : $\xi > 1$. Dans le cas du régime amorti, la sortie du système tend d'autant plus lentement vers sa valeur finale k que ξ est grand.

– *Régime critique* : $\xi = 1$. Le régime critique est caractérisé par la réponse la plus rapide possible : le signal $s(t)$ tend très vite vers sa valeur finale, sans oscillations.

– *Régime oscillatoire amorti* : $\xi < 1$. Dans le cas du régime oscillatoire amorti, la pulsation du signal sinusoïdal enveloppé par l'exponentielle décroissante a pour expression :

$$w_p = w_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

C'est la pseudo-pulsation du régime oscillatoire amorti. Elle est inférieure à la pulsation w_n .

On définit également la pseudo-période de ces oscillations par :

$$T_p = \frac{2\pi}{w_p} = \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Cette pseudo-période est égale à l'intervalle de temps correspondant à une alternance complète de la sinusoïde amortie (voir figure 4.5). Elle est d'autant plus grande que ξ est proche de 1.

CHAPITRE 4 : ANALYSE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE ET DU DEUXIEME ORDRE

4.3.2.1 Caractéristiques temporelles

Les caractéristiques transitoires d'un système ne dépendent pas de l'amplitude de l'échelon appliqué mais des deux facteurs : ξ (coefficient d'amortissement) et w_n (pulsation propre) de ce système.

Système	$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\frac{p^2}{w_n^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1}$	
	$\xi < 1$	$\xi \geq 1$
Dépassement D%	$100 e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\right)} \%$	0
Temps du premier maximum T_m	$\frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}$	N.D
Temps de réponse à 10% $t_{r\ 10\%}$	$-\frac{1}{\xi w_n} \ln(0.1\sqrt{1-\xi^2})$	$\frac{2.3}{w_n(\xi - \sqrt{1-\xi^2})}$
Temps de réponse à 5% $t_{r\ 5\%}$	$-\frac{1}{\xi w_n} \ln(0.05\sqrt{1-\xi^2})$	$\frac{3}{w_n(\xi - \sqrt{1-\xi^2})}$

4.4 Réponse harmonique (fréquentielle)

On définit la réponse harmonique (ou fréquentielle) d'un système par sa réponse à une entrée sinusoïdale.

4.4.1 Diagramme de Bode

Soit la fonction de transfert notée $H(p)$ d'un système. Pour $p=jw$ on notera : $H(jw)$.

On représente séparément en fonction de la pulsation w (en rad/s) en échelle logarithmique :

$$\text{Courbe de gain : } |G(w)|_{db} = 20 \log_{10} |H(w)|$$

$$\text{Courbe de phase : } \varphi(w) = \text{Arg } H(jw)$$

Remarques

- Le produit de deux fonctions de transfert se traduit dans le plan de Bode par la somme des lieux respectifs.
- La multiplication par k se traduit par la translation de k_{db} de la courbe de gain, la courbe de phase restant inchangée.

4.4.2 Diagramme de Nyquist

On représente dans le plan complexe l'extrémité du vecteur image de $H(jw)$ lorsque la pulsation w varie de 0 à $+\infty$

$$H(jw) = \text{Re}[H(jw)] + j \text{Im}[H(jw)] = X + j Y$$

$$\text{Re}[H(jw)] = X \quad \text{et} \quad \text{Im}[H(jw)] = Y$$

Le point de coordonnées (X, Y) décrit alors une courbe graduée dans le sens des w croissants.

4.4.3 Diagramme de Black – Nichols

Le lieu de Black représente par une seule courbe le logarithme à base 10 du module de la fonction de transfert en fonction de sa phase.

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE N° 1

Tracer le diagramme de Bode, de Nyquist de la fonction de transfert d'un système du premier ordre avec un gain statique égal à 1 et une constante de temps égale à $2\mu\text{s}$:

Solution :

Représentation de Bode :

$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p} = \frac{1}{1 + 2 \cdot 10^{-6} p}$$

$$H(jw) = \frac{1}{1 + j2 \cdot 10^{-6} w}$$

$$|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2}} \text{ Avec } w_0 = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} \text{ rd/s}$$

$$|G(jw)|_{db} = 20 \log_{10} |H(jw)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (w2 \cdot 10^{-6})^2}}$$

$$|G(jw)|_{db} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2}}; \text{ Avec } w_0 = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} \text{ rd/s}$$

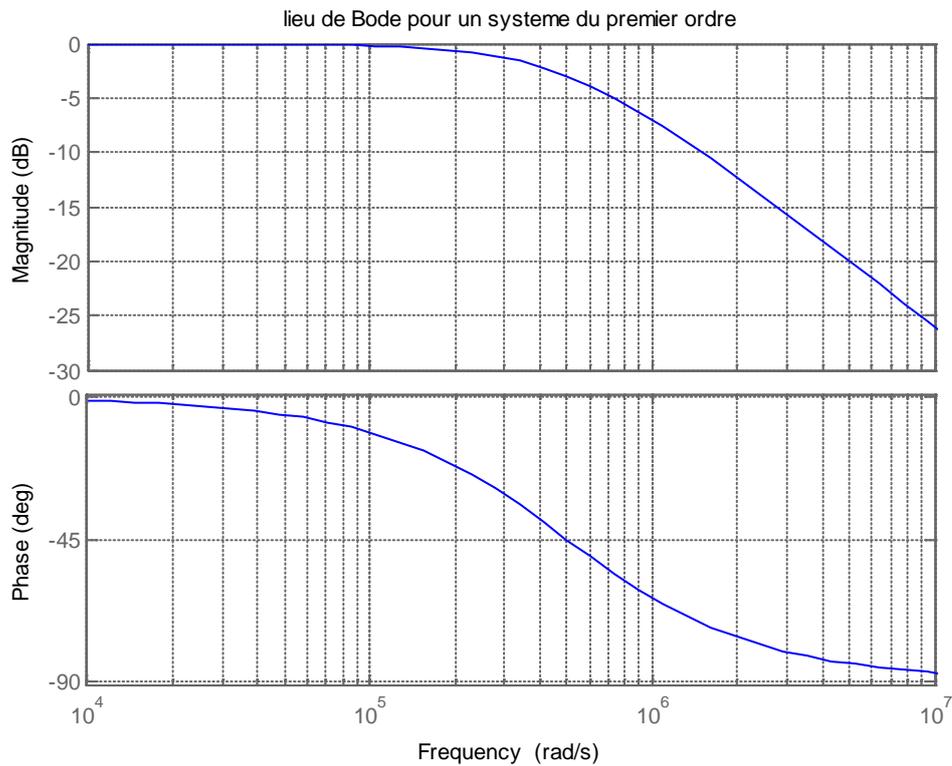
$$\varphi = -\text{Arctg}\left(\frac{w}{w_0}\right)$$

Le module :

- Pour $w \rightarrow 0$ $|G(jw)|_{db} \rightarrow 0$
- Pour $w \rightarrow \infty$ $|G(jw)|_{db} \rightarrow -20 \log_{10}(w/w_0)$

La phase :

- Pour $w \rightarrow 0$: $\varphi(w) = 0$
- Pour $w \rightarrow \frac{1}{\tau}$: $\varphi(w) = -\frac{\pi}{4}$
- Pour $w \rightarrow \infty$: $\varphi(w) = -\frac{\pi}{2}$



- Représentation de Nyquist

$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2} + j \frac{(-\tau\omega)}{1 + (\tau\omega)^2}$$

$$X = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{(-\tau\omega)}{1 + (\tau\omega)^2}$$

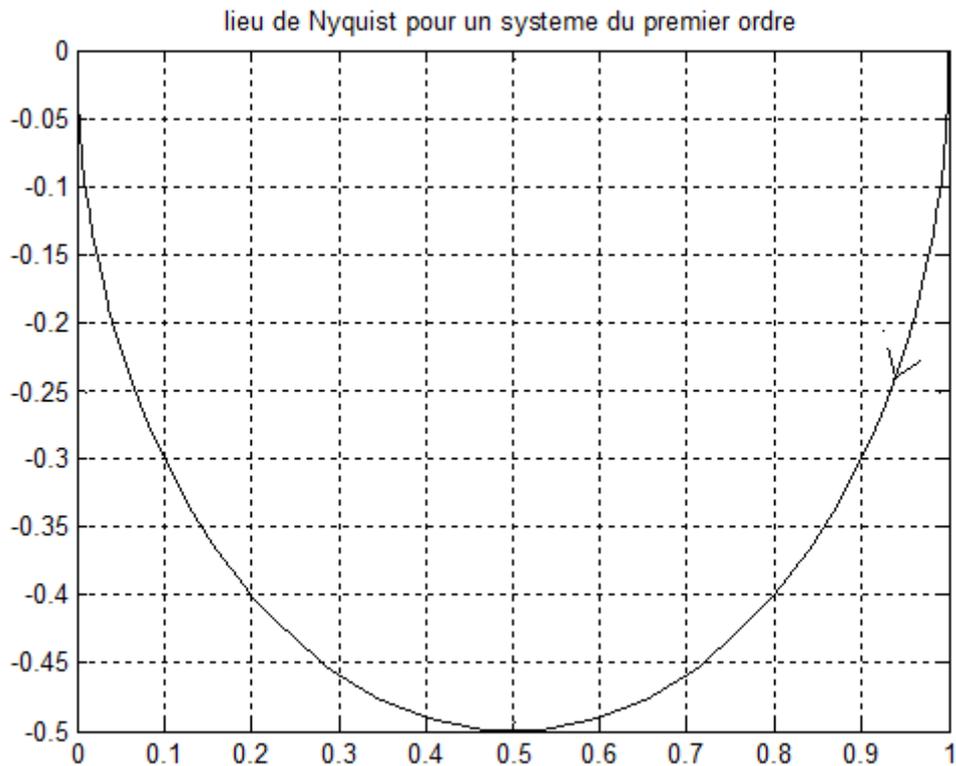
On remarque que : $Y < 0$

$$H(j\omega) = X + jY$$

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon $\left(\frac{1}{2}\right)$ et de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Pour le point de démarrage obtenu pour $\omega = 0$, on a : $X = 1$ et $Y = 0$



EXERCICE N° 2

Tracer le diagramme de Black Nichols de la fonction de transfert d'un système du premier ordre :

$$G(jw) = \frac{k}{1 + j \frac{w}{w_0}}$$

Solution :

$$\log|G(jw)| = \log|k| - \log\left(1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = -\text{arctg}\left(\frac{w}{w_0}\right)$$

$w \ll w_0$:

$$\log|G(jw)| = \log|k|$$

$$\theta = 0$$

CHAPITRE 4 : ANALYSE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE ET DU DEUXIEME ORDRE

$w = w_0$:

$$\log|G(jw)| = \log|k| - \log\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

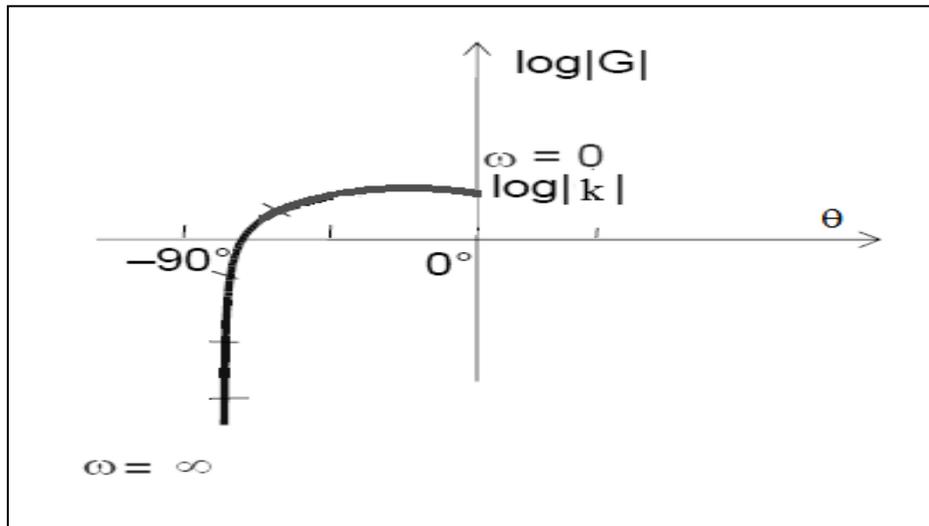
$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

$w \gg w_0$:

$$\log|G(jw)| \rightarrow -\infty$$

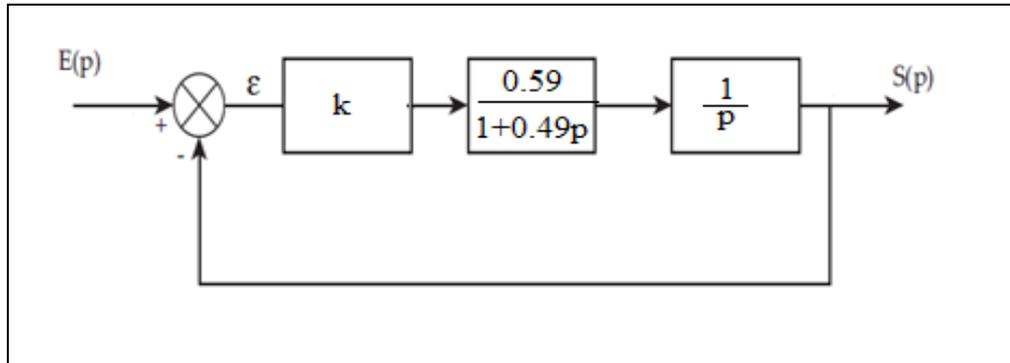
$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

Lieu de Black Nichols :



EXERCICE N° 2

Soit le schéma bloc suivant :



- 1) Montrer que la fonction de transfert est une fonction du deuxième ordre. La mettre sous forme canonique et donner ses paramètres caractéristiques en fonction de k.
- 2) Déterminer le gain k en prenant le coefficient d'amortissement égal à 0.7
- 3) Tracer la réponse indicielle et la réponse impulsionnelle.
- 4) Tracer le diagramme de Bode et Nyquist.

Solution :

- 1) La fonction de transfert est du deuxième ordre.
La mettre sous forme canonique et donner ses paramètres caractéristiques en fonction de k.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{0.59 k}{(1 + 0.49p)p + 0.59k}$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{0.59k} + \frac{0.49}{0.59k} p^2}$$

Il s'agit d'une fonction du deuxième ordre :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\frac{p^2}{w_n^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1}$$

Par identification :

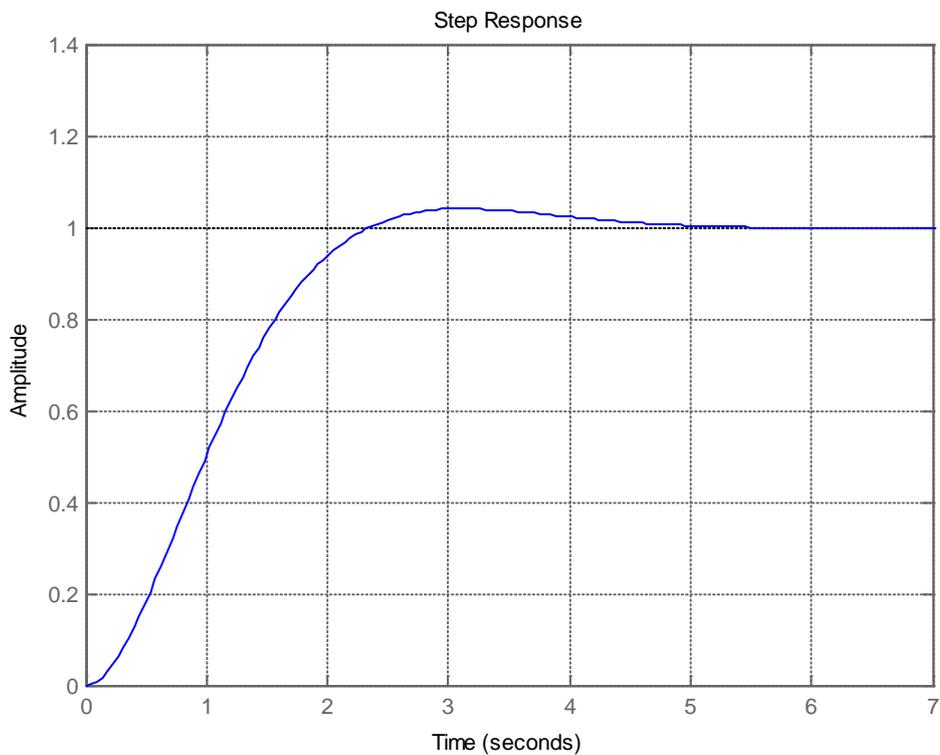
$$\begin{cases} k = 1 \\ w_n = \sqrt{1.20k} \\ \xi = \frac{1}{\sqrt{1.2k}} \end{cases}$$

Le gain k pour que le coefficient d'amortissement soit égal à 0.7 :

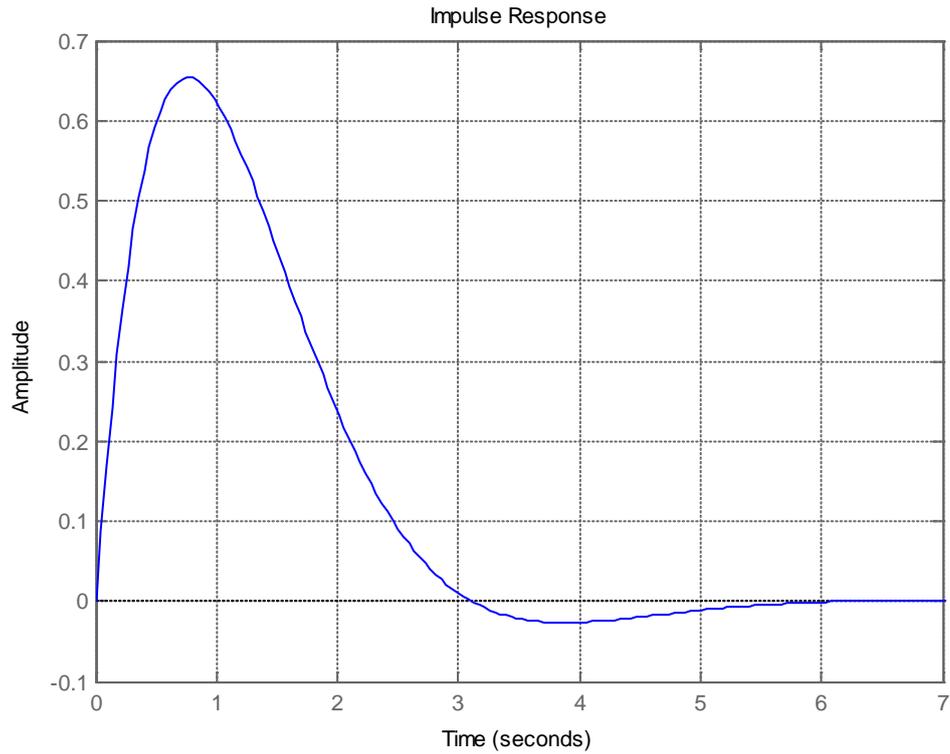
$$\text{on veut que: } \xi = \frac{1}{\sqrt{1.2k}} = 0.7$$

$$k = \frac{1}{1.2\xi^2} = 1.7$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + 0.99p + 0.48 p^2}$$



CHAPITRE 4 : ANALYSE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE ET DU DEUXIEME ORDRE



on veut que: $\xi = \frac{1}{\sqrt{1.2k}} = 0.7$

$$k = \frac{1}{1.2\xi^2} = 1.7$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + 0.99p + 0.48 p^2} = \frac{1}{\frac{p^2}{w_n^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1} = \frac{1}{(1.44)^2 + \frac{2 * 0.71p}{1.44} + 1}$$

$$\left| \frac{S(p)}{E(p)} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 - \left(2\xi \frac{w}{w_n}\right)^2}}$$

$$\varphi(w) = -\arctg\left(\frac{2\xi \frac{w}{w_n}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\right)$$

$$20. \log_{10} \left| \frac{S(p)}{E(p)} \right| = 20. [\log_{10}(1) - \log_{10} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 - \left(2\xi \frac{w}{w_n}\right)^2}]$$

Le module :

- Pour $w \ll w_n$: $20. \log_{10} \left| \frac{S(p)}{E(p)} \right| \rightarrow 0$ (asymptote horizontale)
- Pour $w \ll w_n$

$$20. \log_{10} \left| \frac{S(p)}{E(p)} \right| \rightarrow 20. [\log_{10}(1) - \log_{10}\left(\frac{w}{w_n}\right)^2] = 20. [(0 + 2 \log_{10} w_n) - 2 \log_{10} w]$$

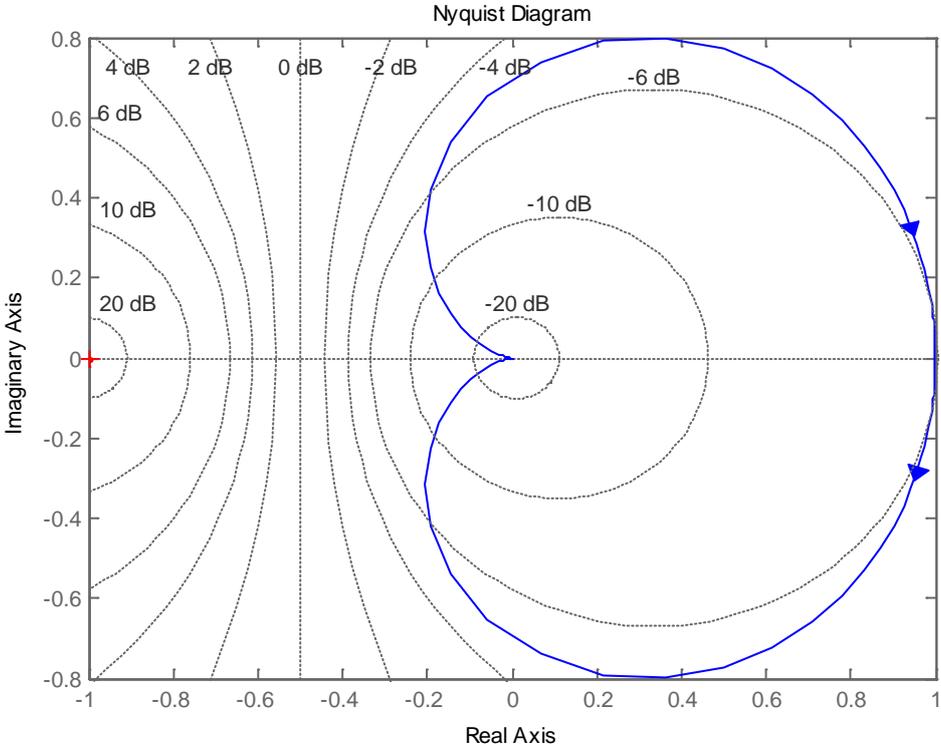
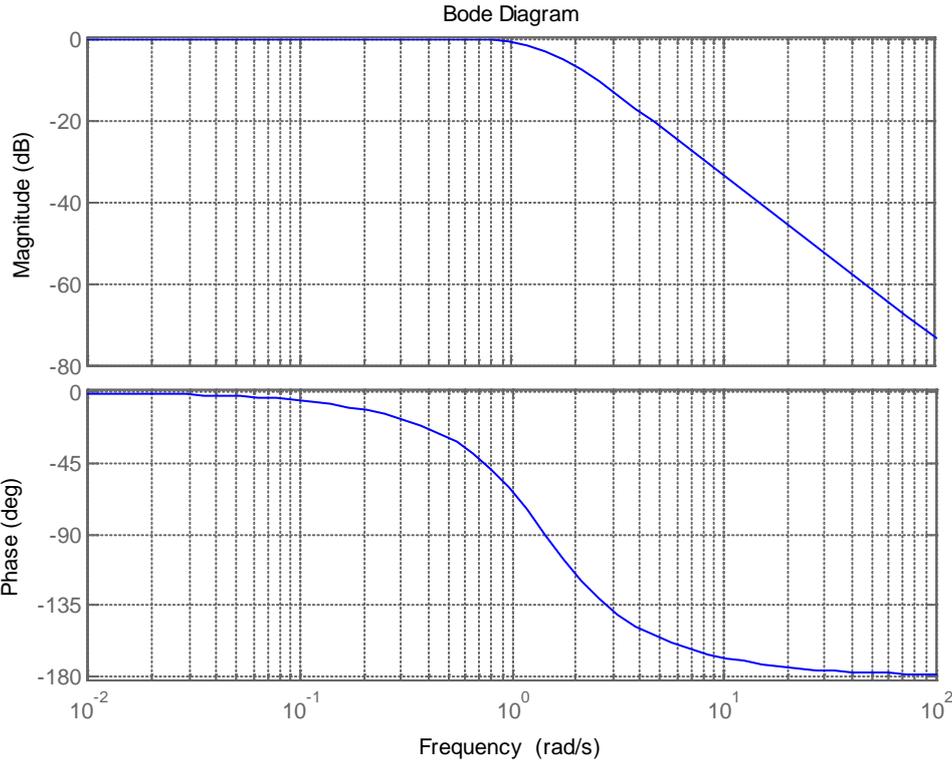
(asymptote de pente -40).

La phase :

$$\varphi(w) = -\arctg\left(\frac{2\xi \frac{w}{w_n}}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\right)$$

- Pour $w \rightarrow 0$: $\varphi(w) = 0$
- Pour $w = w_n$: $\varphi(w) = -\frac{\pi}{2}$
- Pour $w \rightarrow \infty$: $\varphi(w) = -\pi$

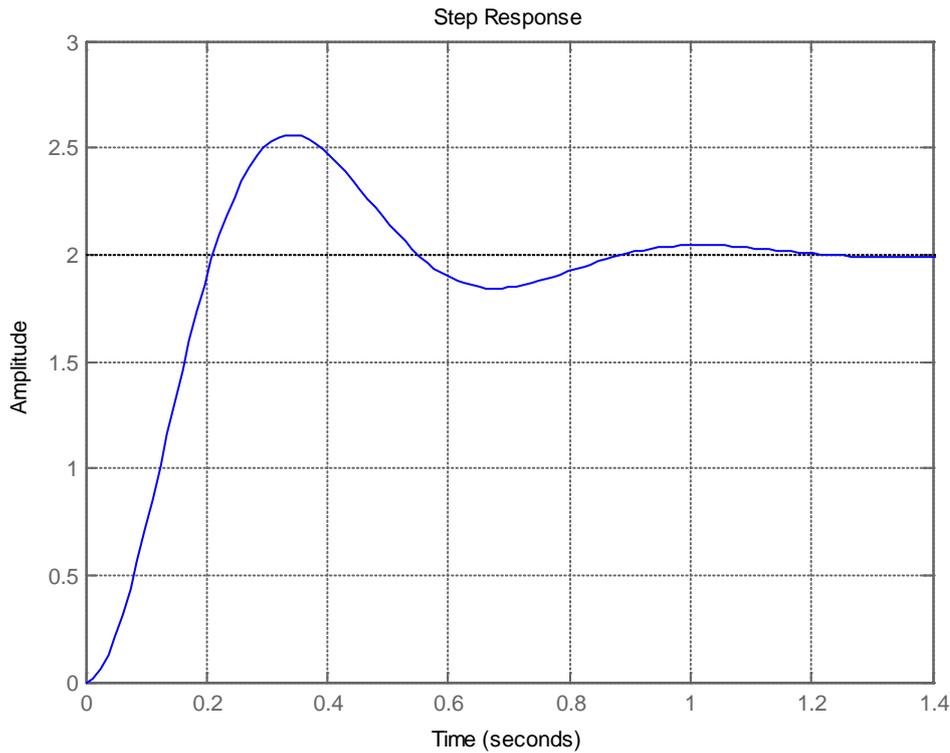
CHAPITRE 4 : ANALYSE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE ET DU DEUXIEME ORDRE



EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE N°1

Soit la courbe ci-dessous :



1) Déterminer de la courbe :

- le temps de réponse $t_{r,5\%}$.
- Le dépassement $D\%$.
- La valeur finale.
- L'amortissement ζ .
- La pulsation w_n .

2) Donner la fonction de transfert du système avec : $\zeta=0.375$, on a $w_n t_r=8$

EXERCICE N° 2

- 1) Donner la fonction de transfert d'un dérivateur pur.
- 2) Donner la fonction de transfert d'un intégrateur pur.
- 3) Tracer le diagramme de Bode et de Nyquist pour :

$$a) \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{1}{Cp} \quad b) \frac{U(p)}{I(p)} = Lp$$

EXERCICE N° 3

La fonction de transfert d'un système du premier ordre avec retard est donnée par :

$$H(p) = \frac{k e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

- 1) Donner $|H(j\omega)|$ et $\varphi_{H(j\omega)}$
- 2) Est-ce que le module ou bien la phase sont affectés par le retard ?

EXERCICE N°4

Soit la fonction de transfert d'un système :

$$B(p) = \frac{(2 + 5p)(2 + p)}{(2 + 20p) + (2 + 0.1p)(2 + 0.04p)}$$

Tracer le lieu de Bode asymptotique.

Dans ce chapitre on va faire une analyse de réponses temporelles ou fréquentielles, observées sur le système auquel on a appliqué un signal d'entrée donné.

Afin de déterminer la fonction de transfert d'un système que l'on souhaite asservir, on procède à l'identification.

5 Identification par la réponse indicielle

5.1 Système du premier ordre

Comme entrevu un système du premier ordre est régi par:

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = k e(t)$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

La réponse indicielle est :

$$s(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (t > 0)$$

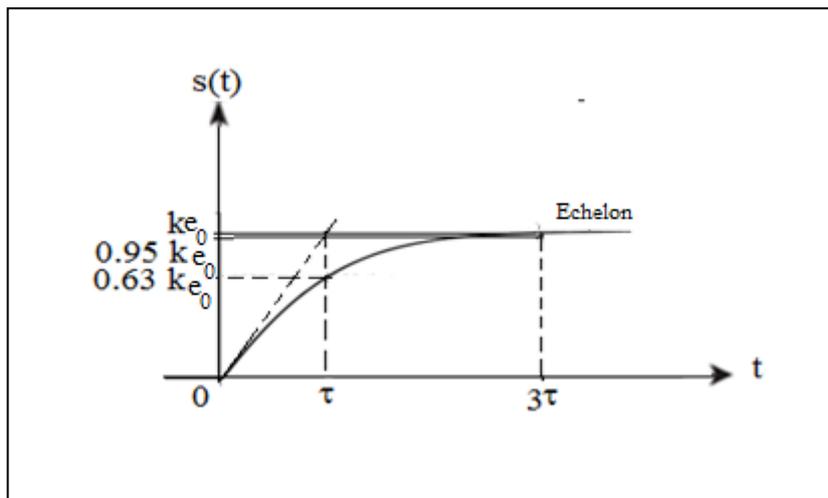


Figure (5.1) : Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

- L'asymptote horizontale permet de calculer le gain statique k :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [s(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = ke_0$$

$$k = \frac{s_{\infty}}{e_0}$$

- L'intersection de la tangente à l'origine et l'asymptote horizontale donne la constante de temps (le temps mis pour atteindre 63% de la valeur finale).

5.2 Système du deuxième ordre

Comme précité, un système du deuxième ordre est régi par l'équation suivante :

$$\frac{1}{w_n^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{w_n} \frac{ds}{dt} + s(t) = ke(t)$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\frac{p^2}{w_n^2} + \frac{2\xi p}{w_n} + 1}$$

Les trois constantes w_n , ξ et k sont des nombres réels en général positifs.

- w_n : la pulsation propre du système ;
- ξ : est appelée coefficient ou facteur d'amortissement.
- k : est le gain statique du système.

La solution dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique c'est-à-dire des valeurs de ξ .

- pour $0 < \xi < 1$ (système oscillant amorti)

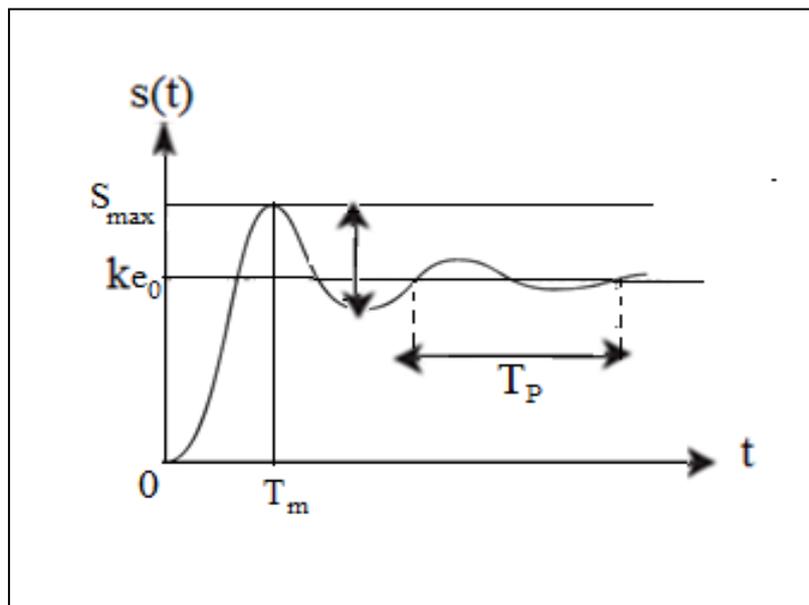


Figure (5.2) : Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre pour $0 < \xi < 1$

L'asymptote horizontale permet de trouver le gain statique k :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [s(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = ke_0$$

$$k = \frac{S_\infty}{e_0}$$

Le premier dépassement est donné par :

$$D_1 \% = 100 \left| \frac{S_{\max} - S_\infty}{S_\infty} \right|$$

S_{\max} est la valeur maximale de $s(t)$ et S_∞ sa valeur finale

La valeur de D_1 permet de trouver celle de ξ (coefficient ou facteur d'amortissement).

$$D_1 \% = 100 e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

Pour déterminer w_n :

- on a le temps du premier maximum, d'après ce qui précède :

$$T_m = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

- on a aussi la pseudo-période :

$$\frac{\pi}{w_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{T_p}{2}$$

Pour $\xi \geq 1$ système non oscillant amorti

Le système peut être considéré comme le produit de deux fonctions de transfert du premier ordre de constantes de temps τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1 > \tau_2$.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Si on pose $\alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1$ et on posant $\tau = \tau_1$, alors la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{(1 + \tau p)(1 + \alpha \tau p)}$$

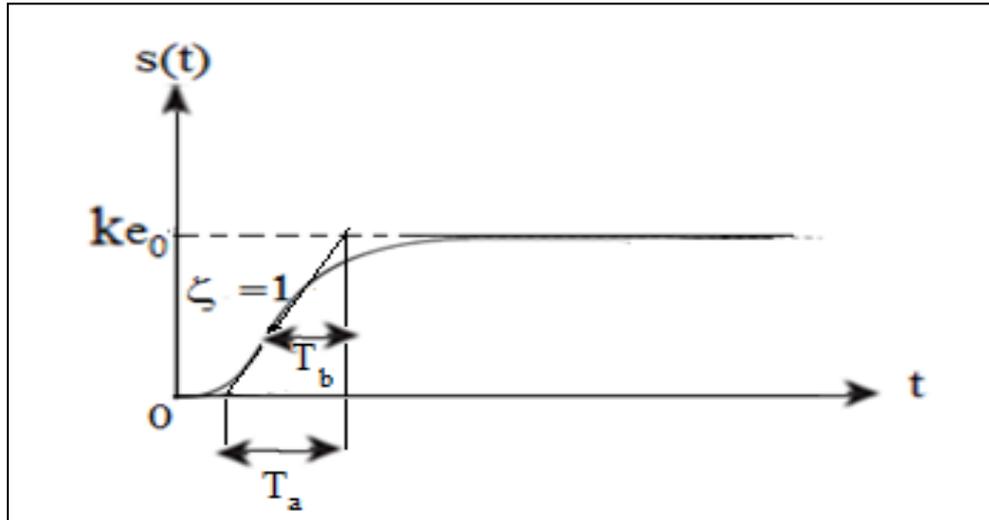


Figure (5.3) : Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre pour $\xi \geq 1$

- L'asymptote horizontale permet de calculer le gain statique k :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [s(t)] = \lim_{p \rightarrow 0^+} pS(p) = ke_0$$

$$k = \frac{s_\infty}{e_0}$$

Pour déterminer les valeurs de α et τ , on commence par tracer la tangente au point d'inflexion. Elle permet de définir les valeurs de T_a et T_b .

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{1 + \alpha} s$$

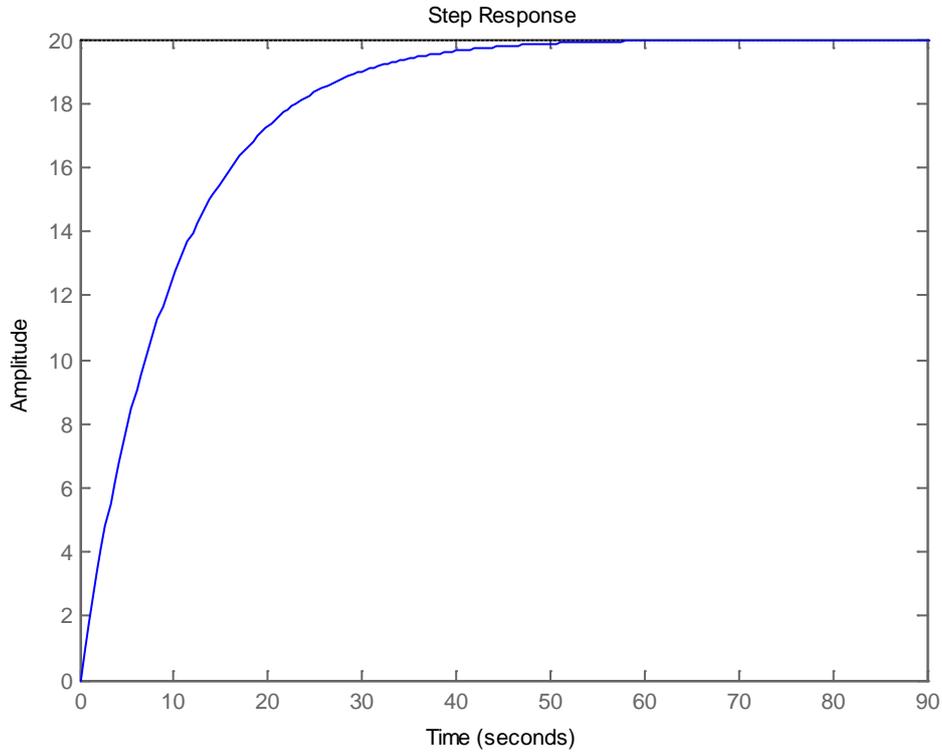
La valeur de τ est donnée par :

$$\tau = \frac{T_b}{1 + \alpha}$$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE N°1

Après avoir exercé à $t=0$ un échelon d'amplitude $e_0=5\%$ en entrée d'un procédé, on obtient la courbe suivante :



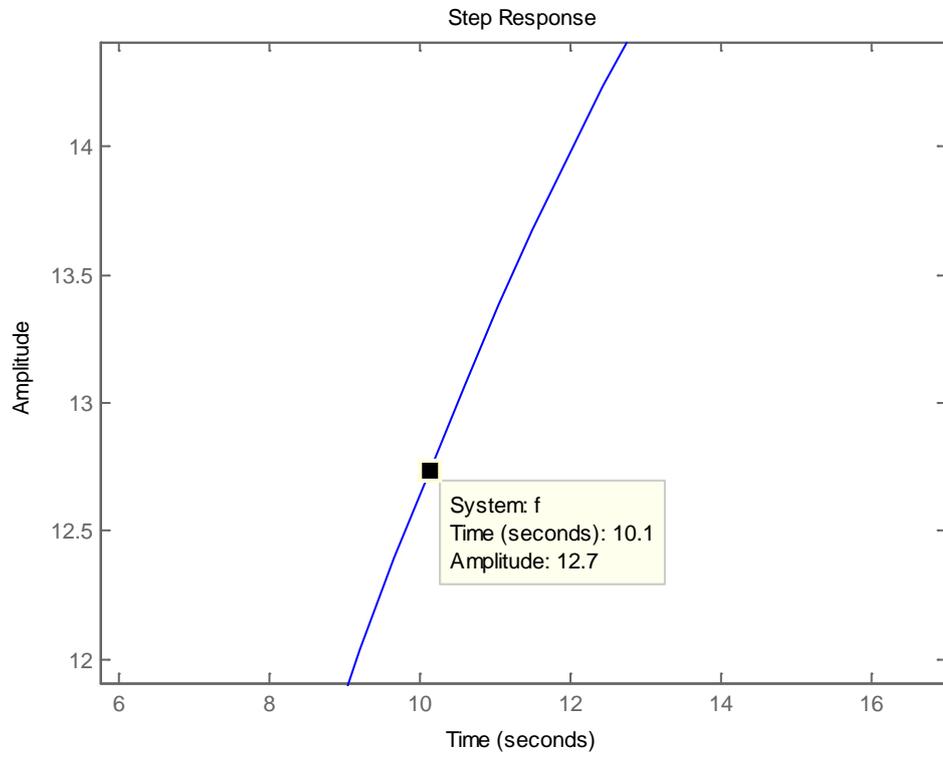
Déterminer la fonction de transfert de ce système.

Solution :

L'allure de la courbe est celle de la réponse indicielle d'un système du premier ordre.

$$ke_0 = 20$$
$$k = \frac{20}{e_0} = \frac{20}{5} = 4$$

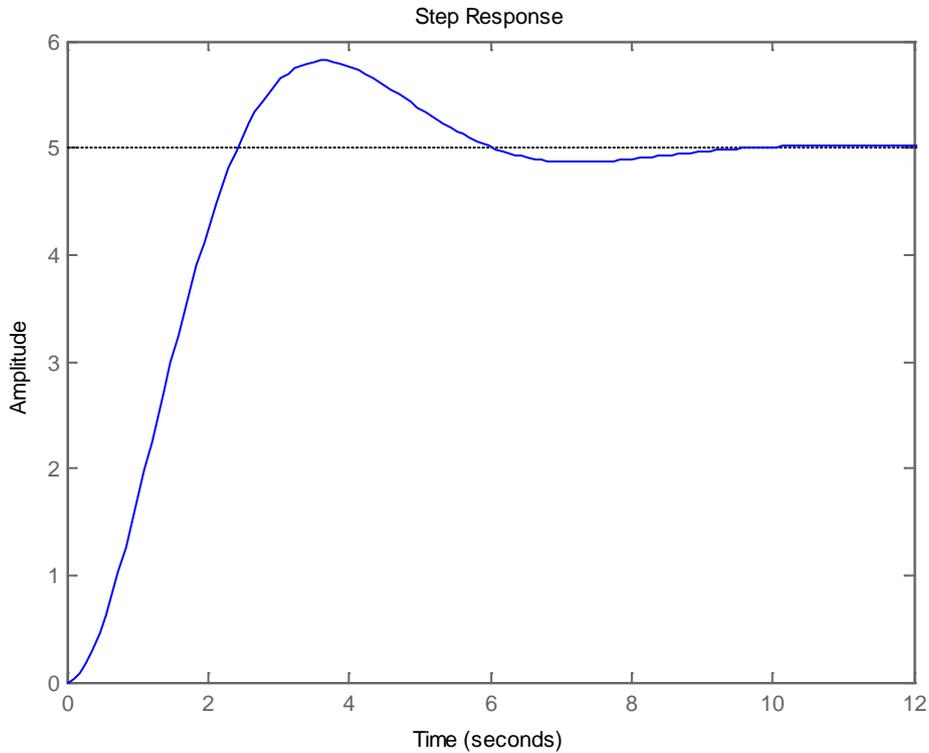
Et on fait la projection de $0.63ke_0 = 12.6$ sur l'axe des temps et on trouve 10s.



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{4}{1 + 10p}$$

EXERCICE N°2

Le relevé de la réponse indicielle (échelon unitaire) d'un processus a donné les résultats ci-dessous :



- I) Sans faire de calculs :
- Donner l'ordre de ce système et la forme canonique de la fonction de transfert.
 - Donner l'intervalle de ξ .

- II) En utilisant la figure, déterminer :
- le gain statique k .
 - le premier dépassement.
 - Le coefficient ou facteur d'amortissement ξ
 - La pulsation propre du système w_n .
 - En déduire la fonction de transfert.

Solution :

- L'ordre de ce système, la forme canonique de la fonction de transfert et l'intervalle de ξ :

L'allure de la courbe est celle de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre. Pour pour $0 < \xi < 1$ (système oscillant amorti)

- le gain statique k :

$$k = \frac{s_{\infty}}{e_0} = \frac{5}{1} = 5$$

- Le premier dépassement :

$$D_1 \% = 100 \left| \frac{s_{max} - s_{\infty}}{s_{\infty}} \right| = 100 \left| \frac{5.81 - 5}{5} \right| = 16.2\%$$

- Le coefficient ou facteur d'amortissement ξ :

$$D_1 \% = 100 e^{-\left(\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

$$\xi = \frac{3.31}{13.17} = 0.50$$

- la pulsation propre du système w_n :

$$T_m = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$w_n = \frac{\pi}{T_m \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$w_n = \frac{3.14}{3.59 \sqrt{1-0.25}} = 1.01$$

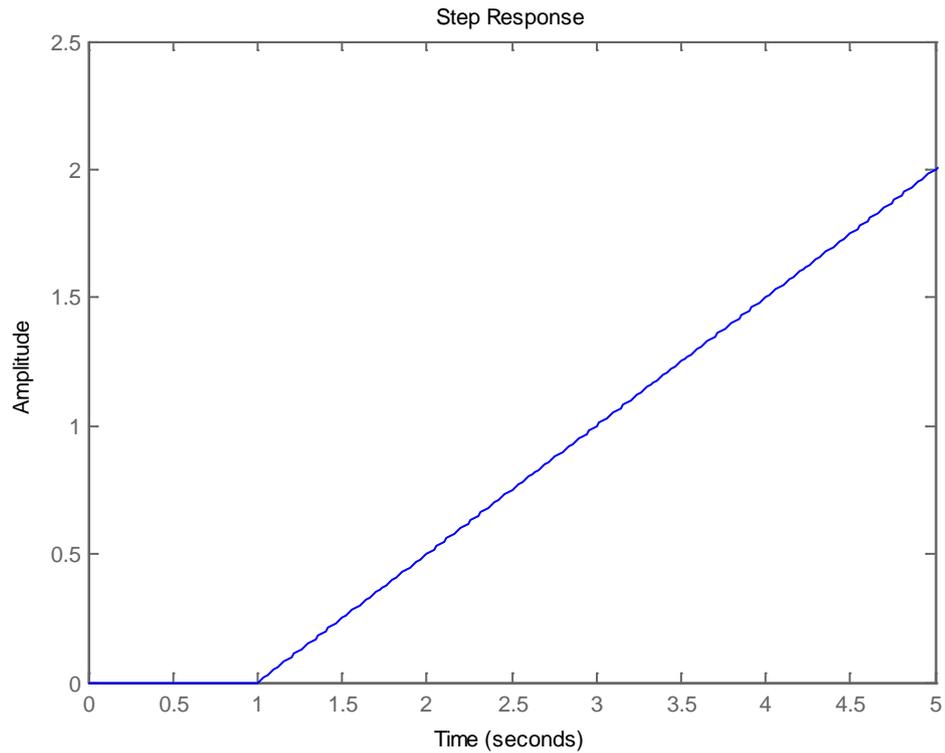
- En déduire la fonction de transfert :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{p^2 + p + 1}$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE N°1

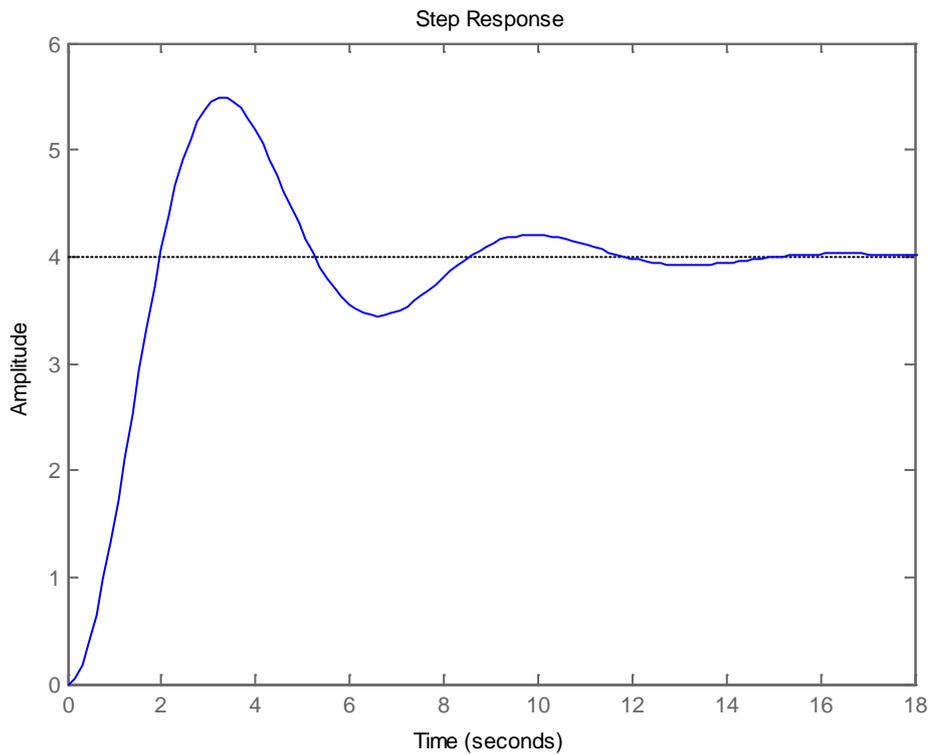
Si on applique en entrée d'un système, un échelon d'amplitude 1%, on obtient la courbe suivante :



- 1) Donner la fonction de transfert de ce système
- 2) Donner l'ordre de ce système.
- 3) Ce système est un intégrateur ou bien un dérivateur ?

EXERCICE N°2

Le relevé de la réponse indicielle (échelon unitaire) d'un processus a donné les résultats ci-dessous :



III) Sans faire de calculs :

- Donner l'ordre de ce système et la forme canonique de la fonction de transfert.
- Donner l'intervalle de ξ .

IV) En utilisant le graphe, déterminer :

- le gain statique k .
- Le premier dépassement.
- coefficient ou facteur d'amortissement ξ
- pulsation propre du système w_n .
- En déduire la fonction de transfert

Les performances d'un système asservi sont appréciées selon:

- La stabilité,
- La précision statique ou précision obtenue en régime permanent,
- La rapidité ou précision dynamique.

6. Méthode d'étude de la stabilité à partir de la FTBF

6.1. Etude des pôles de la FTBF

Un système est dit stable si, excité par une impulsion de Dirac, il revient à sa position de repos. Il est instable dans le cas contraire.

On considère un système de fonction de transfert $F(p)$ excité par une impulsion de Dirac.

$$e(t) = \delta(t)$$

Alors : $E(p) = 1$ et de ce fait :

$$S(p) = F(p)E(p) = F(p)$$

La réponse impulsionnelle d'un système est représentée par sa fonction de transfert. La forme du signal de sortie va donc dépendre des pôles de celle-ci. La stabilité va dépendre de ces pôles. De façon générale, une fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'une somme de fractions rationnelles du premier ou second ordre :

$$F(p) = \sum_i \frac{A_i}{p - p_i} + \sum_j \frac{B_j p + C_j}{\frac{p^2}{w_{nj}^2} + \frac{2\xi_j p}{w_{nj}} + 1} \quad \text{Avec } i + 2j = n \text{ ordre du système}$$

Donc :

$$s(t) = \sum_i A_i e^{p_i t} + \sum_j A_j e^{a_j t} \cos(w_j t + \varphi_j)$$

Le système revient au repos quand les termes exponentiels $e^{p_i t}$ et $e^{a_j t}$ tendent vers zéro avec le temps.

Théorème

- Un système linéaire continu en boucle fermée n'est stable que si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative. Ils sont situés dans le demi-plan négatif dédié à la variable complexe p .

6.1.1 Carte des zéros et des pôles

On peut représenter graphiquement les pôles et les zéros d'une fonction de transfert dans un plan complexe. On représente usuellement un pôle par une croix(x) et un zéro par un rond (o). Cet ensemble est appelé carte des pôles et des zéros.

Exemple 1

$$FTBF = \frac{2(p - 4)}{(p + 1)(p + 3)}$$

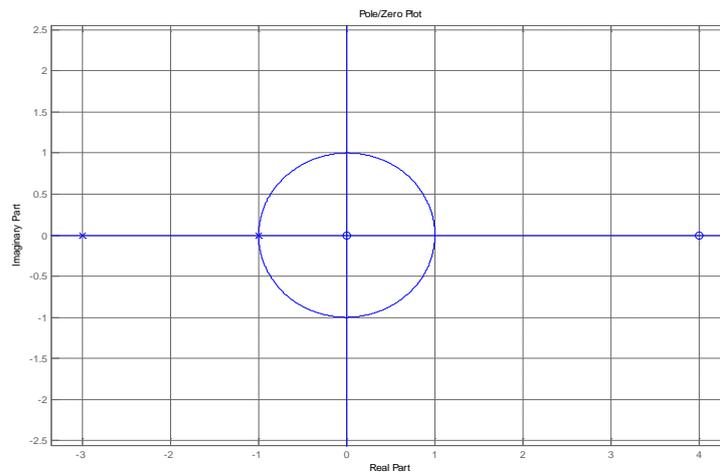
Un zéro : $p=4$;

Deux pôles réels simples en :

$p=-1$ et $p=-3$

Programme sous Matlab :

```
num=[2 -8];  
den=[1 4 3];  
fvtool(num,den,'polezero')
```



Le système est stable car tous les pôles sont à gauche.

Exemple 2

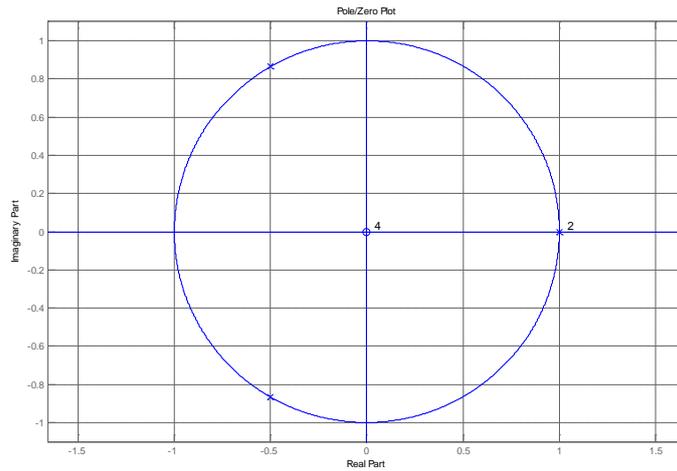
$$FTBF = \frac{5}{(p - 1)^2(p^2 + p + 1)}$$

Un pôle réel double en $p=1$.

Deux pôles complexes conjugués en $p = -0.5 \pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$

Programme sous Matlab :

```
num=[5];
den=[1 -1 0 -1 +1] ;
fvtool(num,den, 'polezero')
```



Le système est instable (un pôle double à droite).

6.2 Critères algébriques de stabilité

Ils permettent de distinguer la limite de stabilité à partir de l'analyse de la FTBF.

6.2.1 Systèmes d'ordre $n \leq 2$

- Pour un système du premier ordre :

$$F_{BF}(p) = \frac{N(p)}{a_1 p + a_0} \text{ avec } a_1 > 0$$

Le système est stable si :

$$p_1 = -\frac{a_0}{a_1} \text{ si } p_1 < 0$$

- Pour un système du deuxième ordre :

$$F_{BF}(p) = \frac{N(p)}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \text{ avec } a_2 > 0$$

Le système est stable si les pôles p_1 et p_2 ont :

$$\begin{cases} Re(p_1) < 0 \\ Re(p_2) < 0 \end{cases} \leftrightarrow a_2 > 0 \text{ et } a_1 \cdot a_0 > 0$$

6.2.2 Systèmes d'ordre $n > 2$: (Critère de Routh)

Ce critère permet de savoir si les racines d'un polynôme sont ou non à partie réelle négative. L'étude porte sur le dénominateur $D(p)$ de la FTBF :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad \text{avec } a_n > 0$$

- Si certains coefficients a_i sont négatifs ou nuls alors $D(p)$ a des racines à parties réelles positives : le système est instable.
- Si tous les coefficients a_i sont positifs, on ne peut pas affirmer que les racines de $D(p)$ sont à partie réelle négative. Pour conclure, il faut utiliser le critère de Routh.

<i>N de ligne</i>	<i>tableau</i>				
1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$a_{n-8} \dots \dots \dots 0$
2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$a_{n-9} \dots \dots \dots 0$
3	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$c_{n-4} \dots \dots \dots 0$
4	d_n	d_{n-1}	d_{n-2}	d_{n-3}	$d_{n-4} \dots \dots \dots 0$
5	e_n	e_{n-1}	e_{n-2}	e_{n-3}	$e_{n-4} \dots \dots \dots 0$

$$c_{n-i} = \frac{a_{n-1} a_{n-2i-2} - a_n a_{n-2i-3}}{a_{n-1}}$$

$$d_{n-i} = \frac{c_n a_{n-2i-3} - a_{n-1} c_{n-i-1}}{c_n}$$

$$e_{n-i} = \frac{d_n c_{n-i-1} - d_{n-i-1} c_n}{d_n}$$

- Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert est égal au nombre de changements de signe des coefficients de la première colonne.
- Le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.
- Soit n l'ordre du système
- Le nombre de lignes est égal à $n+1$
- Le nombre de colonnes est égal à $(n+1)/2$

6.3 Critères graphiques

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la FTBF possède des pôles à partie réelle négative. Ceci suppose de disposer de l'expression de son dénominateur. Or, si l'expression de la FTBF n'est pas toujours connue, on dispose en général de la FTBO par sa réponse indicielle ou harmonique. Des critères graphiques permettent d'étudier la stabilité de la FTBF à partir des lieux de transfert de la FTBO.

6.3.1 Notion de point critique

Dans le cas d'un système asservi représenté par le schéma bloc ci contre :

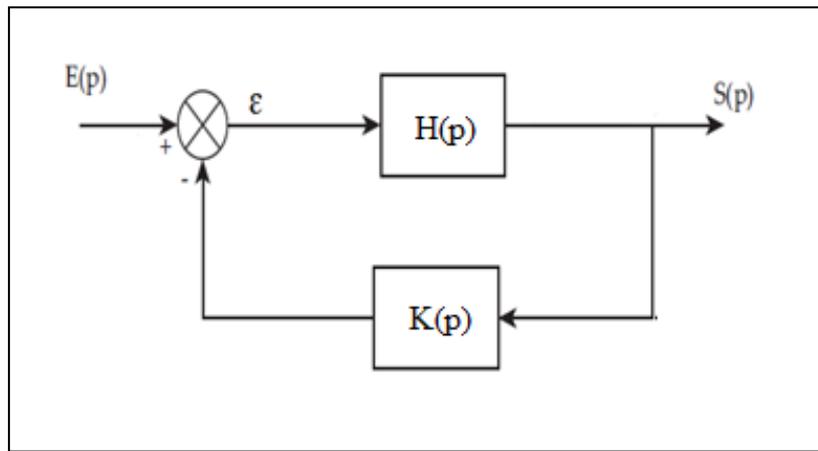


Figure (6.1) : système asservi

$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)} = \frac{H(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

Le système est stable si le signe de la partie réelle de toutes les solutions de : $1 + H_{BO}(p) = 0$ est négative.

Il ya donc instabilité s'il existe une racine: $p_1 = \alpha + j\beta$ avec $\alpha \geq 0$ telle que :

$$H_{BO}(p_1) = -1.$$

La stabilité d'un système en BF se fait à partir de la position du lieu de transfert en boucle ouverte (LTBO) par rapport au point (-1). Ce point, extrémité du vecteur de module 1 (ou 0dB) et d'argument -180° , est nommé point critique.

Remarque

- Un système bouclé est stable si le 'gain' en boucle ouverte est inférieur à 1 (0dB) lorsque le déphasage atteint -180° .

6.3.2 Enoncé du critère de Revers

- **Dans le plan de Nyquist**

- Le système sera stable en boucle fermée si en parcourant le LTBO dans le sens des pulsations ‘w’ croissantes, on laisse le point critique (-1 ; 0) sur la gauche.

- **Dans le plan de Bode**

Le système sera stable en boucle fermée si pour la pulsation critique w_c pour laquelle :

$$\text{Arg}[H_{BO}(jw_c)] = -180^\circ$$

La courbe de gain de la FTBO passe en dessous du niveau 0 db, c'ad :

$$|H_{BO}(jw_c)| < 1$$

6.3.3 Marges de stabilité

Il est nécessaire de définir des ‘marges’ vis-à-vis du problème d’instabilité d’un système. Le moindre changement de l’un des facteurs, impact de la température par exemple, peut engendrer l’instabilité. On définit principalement :

6.3.3.1 Marge de phase

$$M_\phi = \text{Arg}[H_{BO}(jw_u)] - (-180^\circ)$$

C’est la distance en degrés du point critique (-180° ; 0 dB) au point d’intersection du Lieu de Transfert en Boucle Ouverte avec la droite $G=0\text{dB}$. On note w_u la pulsation (au gain unité) pour laquelle :

$$|H_{BO}(jw_u)| = 1 (0\text{dB})$$

6.3.3.1 Marge de gain

$$M_G = 0 - 20\log_{10}|H_{BO}(jw_c)|$$

C’est la distance en dB du point critique (-180° ; 0 dB) au point d’intersection du Lieu de Transfert en Boucle Ouverte avec la droite $\phi=-180^\circ$. On note w_c la pulsation (critique) pour laquelle :

$$\text{Arg}[H_{BO}(jw_c)] = (-180^\circ).$$

Remarque

- Un système stable possède des marges de gain et de phases positives.
- Les valeurs de $M_\phi = 45^\circ$ et $M_G = 10\text{ dB}$ sont acceptables pour les systèmes asservis.

Lieu d'Evans (Lieu des racines ou Lieu des pôles)

Soit le système suivant :

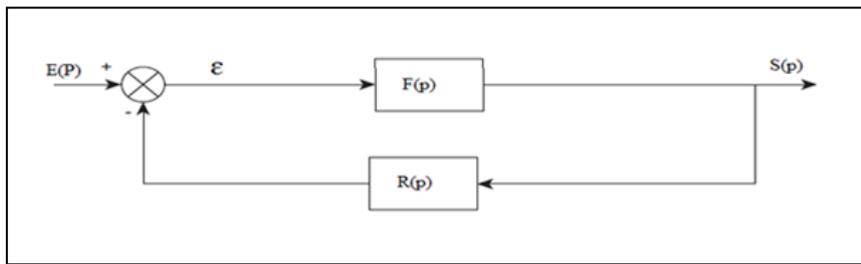


Figure (6.2) : système asservi

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)R(p)}$$

L'équation caractéristique est :

$$1 + F(p)R(p) = 0$$

$$F(p)R(p) = -1$$

Nous supposons que $F(p)R(p)$, avec $FTBO(p) = F(p)R(p)$ est un rapport de polynômes en p . Puisque $F(p)R(p)$ est une quantité complexe, l'équation : $F(p)R(p) = -1$ peut être décomposée en :

- Une condition d'angle : $F(p)R(p) = \pm 180^\circ(2i + 1)$ avec $i=0, 1, 2, \dots$
- Une condition de module : $|F(p)R(p)| = 1$

Les valeurs de p qui satisfont, à la fois, la condition d'angle et la condition de module sont les racines de l'équation caractéristique, donc les pôles de la boucle fermée.

Comme entrevu, les caractéristiques dynamiques du système sont impactées par les pôles et zéros de la fonction de transfert en boucle fermée du système asservi. En effet, les propriétés transitoires du système dépendent de ses zéros alors que les pôles, décident de la stabilité.

La position des pôles de la FTBF dépend de la valeur du gain choisi. Donc, il est intéressant, d'étudier comment se déplacent les pôles de la FTBF, dans le plan p , lorsque le gain varie.

W.R. Evans en 1950 a trouvé et développé une méthode appelée la méthode du lieu des racines ou lieu d'Evans pour trouver les racines de l'équation caractéristique pour toute valeur d'un paramètre variable du système. On localise les racines pour une valeur particulière de ce paramètre sur le tracé réalisé. Ce paramètre est, généralement, le gain de la FTBO supposé varier de 0 à l'infini.

De la sorte, on peut voir l'impact, sur la position des pôles de la FTBF, de la variation du gain ou de l'addition de pôles et/ou de zéros de la FTBO, la contribution de chaque pôle et zéro de la FTBO sur la position des pôles de la FTBF.

On peut décider donc de quelle manière ces pôles et zéros peuvent être variés pour avoir les performances voulues du système en boucle fermée.

Une certaine procédure doit être suivie selon des règles.

Procédure pour le tracé du lieu d'Evans

- Si l'équation caractéristique est de degré n , le lieu aura n branches. Chaque branche va correspondre à une racine de l'équation caractéristique.
- les racines réelles sont représentées par des points de l'axe réel. Les branches qui correspondent aux racines réelles sont des portions de l'axe réel. Les branches qui correspondent aux racines imaginaires sont assez compliquées.
- Les coefficients de $1 + F(p)R(p)$ étant réels, les racines imaginaires vont être groupées par couples. Les branches du lieu lui correspondant sont symétriques par rapport à l'axe réel. Le lieu d'Evans est, de la sorte symétrique par rapport à l'axe réel.

Si on écrit par exemple l'équation caractéristique sous forme de :

$$1 + F(p)R(p) = 0, \text{ avec } FTBO(p) = F(p)R(p)$$

On aura d'une manière générale :

K étant le gain :

$$1 + \frac{K(p + z_1)(p + z_2) \dots (p + z_m)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)} = 0, \quad K > 0$$

Les z_i sont les zéros de la FTBO, les p_i sont les pôles de la FTBO avec $i=0,1,2,3\dots$

On a à :

- a) Déterminer les pôles et zéros de $F(p)R(p)$ dans le plan p . Les branches du lieu d'Evans partent des pôles en BO et arrivent aux zéros (zéros finis ou zéros à l'infini).

Les points de départ du lieu ($K = 0$) sont les pôles de la $FTBO(p) = F(p)R(p)$
 Les points d'arrivée du lieu ($K \rightarrow \infty$) sont les zéros de la FTBO.

Soient :

- n : nombre de pôles finis de $F(p)R(p)$,
- m : le nombre de zéros finis de $F(p)R(p)$ (avec $n \geq m$ pour un système réel).

Si $m \neq n$, la FTBO comporte alors $(n - m)$ zéros infinis implicites.

- b) Le nombre de branches infinies (ou directions asymptotiques) est égal à $(n - m)$.
- c) Les branches asymptotiques présentent des déviations φ_i telles que :

$$\varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i + 1)}{n - m} \quad (i = 0,1,2, \dots \dots)$$

$i = 0$ correspond à l'asymptote avec la plus faible déviation par rapport à l'axe réel. Bien que i est supposé évoluer jusqu'à ∞ , l'angle de déviation se répète, et le nombre de branches est égal à $n - m$.

- d) Les branches asymptotiques se rejoignent, sur l'axe réel, au point d'abscisse x_i tel que :

$$x_i = \frac{\sum \text{pôles de } F(p)R(p) - \sum \text{zéros de } F(p)R(p)}{n - m}$$

- e) La partie du lieu sur l'axe réel est formée de segments discontinus. En effet, on positionne un point test entre chaque pôle et zéro sur l'axe réel. On calcule le nombre de pôles et zéros réels à droite de ce point test. Si ce nombre est impair, ce point test appartient au lieu. S'il est pair, le point test n'appartient pas au lieu.
- f) En ce qui concerne les points de séparation et de rencontre du lieu sur l'axe réel : ce sont les points qui correspondent aux valeurs critiques de K pour lesquelles deux racines réelles se confondent avant de se séparer à angles droits en deux racines complexes conjuguées

Les points de rencontre sont les points qui correspondent aux valeurs critiques de K pour lesquelles deux racines complexes conjuguées se confondent avant de se séparer en deux racines réelles.

- ✓ Si le lieu lie 2 pôles adjacents de la FTBO sur l'axe réel, il existe alors, au moins, un point de séparation entre ces 2 pôles.
- ✓ Si le lieu lie 2 zéros adjacents de la FTBO (un des 2 zéros peut se trouver à $-\infty$) sur l'axe réel, il existe alors, toujours, au moins un point de rencontre entre ces 2 zéros.
- ✓ Si le lieu lie un pôle de la FTBO et un zéro (fini ou infini) de la FTBO sur l'axe réel, soit qu'il n'existe ni point de séparation ni point de rencontre, soit que tous les deux existent.

Les points de séparation et de rencontre ont pour abscisses β qui peuvent être calculés :

- Soit par :

$$\sum \frac{1}{\beta - p_i} - \sum \frac{1}{\beta - z_i} = 0$$

(avec p_i, z_i respectivement les pôles et zéros de la FTBO)

Cette relation ne donne que les points de séparation ou de rencontre qui ne sont pas issus de pôles ou zéros multiples.

- soit en écrivant que : $1 + F(p)R(p) = 1 + KF_1(p)R_1(p) = 0$ (équation caractéristique).

$$K(p) = -\frac{1}{F_1(p)R_1(p)}$$

Puis en calculant :

$$\left[\frac{dK(p)}{dp} \right]_{p=\beta} = 0$$

C'est-à-dire

$$\left[\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{F_1(p)R_1(p)} \right) \right]_{p=\beta} = 0$$

- g) Angle de départ (angle d'arrivée) du lieu des racines à partir de pôles complexes (zéros complexes) :

Pour déterminer les directions du lieu aux alentours des pôles ou zéros complexes, l'angle de départ (respec. angle d'arrivée) du lieu à partir des pôles complexes (respec. sur les zéros complexes) peut être déterminé en substituant de 180° la somme algébrique des angles de tous les vecteurs entre tous les autres pôles et zéros, et le pôle complexe (respec. zéro complexe) concerné.

- ❖ Angle de départ d'un pôle complexe = $180^\circ - (\text{somme des angles des vecteurs entre le pôle complexe concerné et les autres pôles}) + (\text{somme des angles des vecteurs entre le pôle complexe concerné et les zéros})$
- ❖ Angle d'arrivée d'un zéro complexe = $180^\circ - (\text{somme des angles des vecteurs entre le zéro complexe concerné et les autres zéros}) + (\text{somme des angles des vecteurs entre le zéro complexe concerné et les pôles})$

- h) Intersection du lieu avec l'axe imaginaire :

Les points d'intersection du lieu avec l'axe imaginaire peuvent être déterminés en utilisant le critère de stabilité de Routh par exemple, soit en posant $p = jw$ dans l'équation caractéristique, en égalant les parties imaginaire et réelle de cette équation à zéro, et en calculant w et K . Ces valeurs correspondent aux fréquences et les gains respectivement pour lesquels le lieu coupe l'axe imaginaire.

- i) Détermination des pôles de la Boucle Fermée :

Chaque point du lieu d'Evans est un pôle en BF si la valeur du gain K en ce point vérifie la condition sur le module.

Inversement la condition sur le module permet de déterminer la valeur du gain K en tout point particulier du lieu.

La valeur de K correspondant à n'importe quel point p_1 du lieu peut être obtenue en utilisant la condition sur le module, c'est à dire :

$$K = \frac{\text{produit des modules des vecteurs entre } p \text{ et les zéros}}{\text{produit des modules des vecteurs entre } p \text{ et les pôles}}$$

Exemple 3

Soit à déterminer le lieu des racines du système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$FTBO = \frac{K}{p(p+1)(p+5)}$$

- ✓ Point de départ du lieu = pôles de la FTBO ($p = 0, p = -1, p = -5$) alors $n=3$
- ✓ Point d'arrivée du lieu = zéros de la FTBO (aucun) alors $m=0$
- ✓ Nombre de branches asymptotiques = $n-m=3$
- ✓ Directions asymptotiques :

$$\varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i+1)}{n-m} \quad (i = 0,1,2, \dots)$$

$$\varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i + 1)}{3} \quad (i = 0,1,2, \dots)$$

$$\varphi_i = +60^\circ, -60^\circ, +180^\circ$$

Intersection des asymptotes sur l'axe réel

$$x_i = \frac{\sum \text{p\^oles de FTBO} - \sum \text{z\^eros de FTBO}}{n - m}$$

$$x_i = \frac{(0 - 1 - 5)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Points de s\^eparation (ou de rencontre) σ sur l'axe r\^eel :

En appliquant :

$$\sum \frac{1}{\beta - p_i} - \sum \frac{1}{\beta - z_i} = 0$$

Alors :

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta + 1} + \frac{1}{\beta + 5} = 0$$

$$\beta = -3.52 \text{ et } \beta = -0.47$$

$\beta = -3.52$ \^a rejeter } d'apr\^es la r\^egle(e), la valeur $K_\beta = -3,79$ n'appartient pas au lieu,
 $\beta = -0.47$ \^a retenir } elle est donc \^a exclure.

En appliquant $F_1(p)R_1(p) = FTBO1(p)$

$$K(p) = -\frac{1}{FTBO1(p)}$$

Puis en calculant : $\left[\frac{dK(p)}{dp} \right]_{p=\beta} = 0$

C'est-\^a-dire $\left[\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{FTBO1(p)} \right) \right]_{p=\beta} = 0$

$$K(\beta) = -\beta(\beta + 1)(\beta + 5)$$

$$\frac{dK(\beta)}{d\beta} = -(3\beta^2 + 12\beta + 5) = 0$$

$$\beta = -0.47 \text{ et } \beta = -3.52$$

La valeur $-3,52$ n'appartient pas au lieu, elle est donc \^a exclure.

Valeur du gain au point β (K_β) :

La condition sur le module donne la valeur de K_β .

$$|FTBO(\beta)| = 1 \text{ alors } K_\beta = 1.12$$

Intersection du lieu avec l'axe imaginaire :

La valeur du gain lorsque le lieu rencontre l'axe imaginaire peut être obtenue selon le critère de stabilité de Routh entrevu. De la sorte, le système est stable pour :

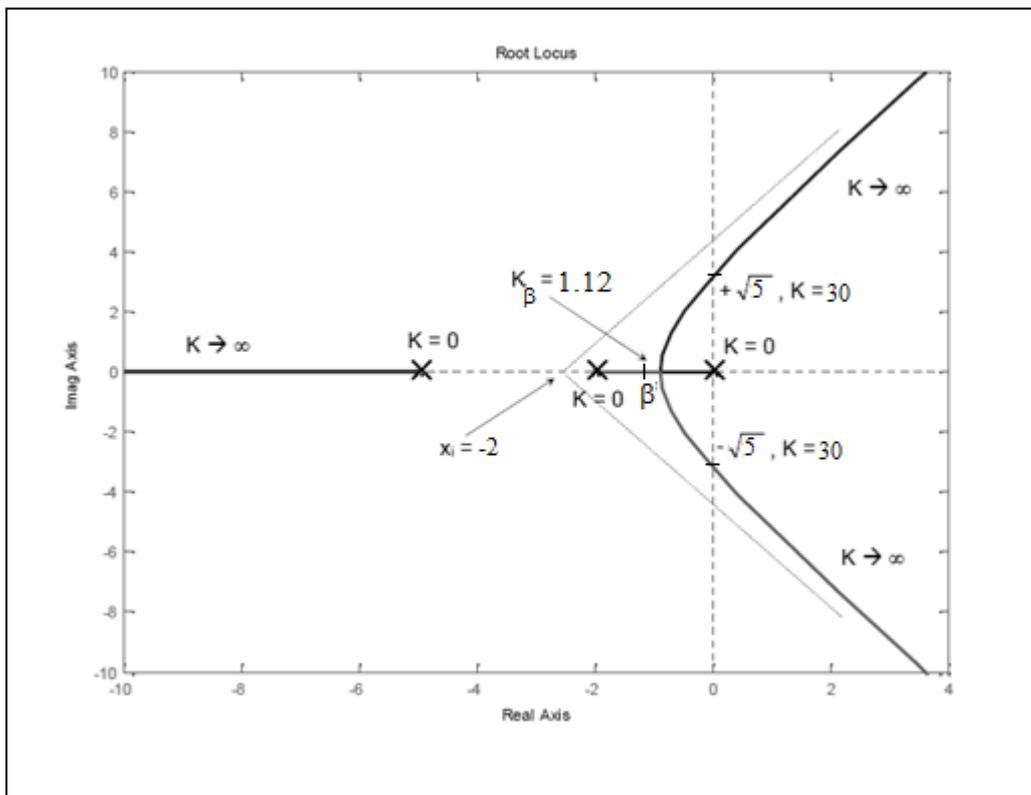
$$0 < K < 30$$

La valeur limite $K = 30$, correspond donc au point recherché.

Les pôles au point d'intersection sont déterminés par l'équation caractéristique en remplaçant p par jw . On obtiendra deux équations l'une relative à la partie imaginaire et l'autre à la partie réelle. Elles donneront les deux paramètres K et w . On trouve :

$$K = 30, \quad w = \pm\sqrt{5}, \quad p_{1,2} = \pm j\sqrt{5}$$

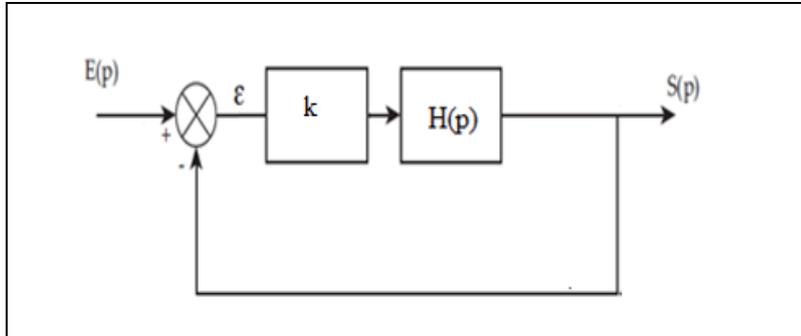
Lieu d'Evans du système :



EXERCICES RESOLUS

EXERCICE N°1

Considérons le système suivant : (voir figure)



Avec :

$$H(p) = \frac{1}{(p + 1)(p + 2)(p + 5)}$$

A) Vérifier si le système est stable ou pas en en boucle ouverte et pour $k=1$.

B) En utilisant le critère de Routh :

- 1) Etudier la stabilité de ce système en boucle fermée et pour $k=1$.
- 2) k n'est pas donné (paramètre réel variable) et $k>0$. Etudier la stabilité du système en boucle fermée.

Solution :

1) La stabilité de ce système en boucle ouverte avec $k=1$:

$$(p + 1)(p + 2)(p + 5) = 0 \text{ donc}$$

$$p_1 = -1 ; p_2 = -2 ; p_3 = -5$$

Les pôles sont à partie réelle négative. Ceci implique que le système est stable en boucle ouverte avec $k=1$.

2) La stabilité de ce système en boucle fermée avec $k=1$

$$FTBF = \frac{k H(p)}{1 + kH(p)} = \frac{1}{p^3 + 8p^2 + 17p + 11}$$

L'équation caractéristique est : $D(p) = p^3 + 8p^2 + 17p + 11 = 0$

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ \text{nombre de lignes} &= n + 1 = 4 \\ \text{nombre de colonnes} &= \frac{n + 1}{2} = 2 \end{aligned}$$

N°Ligne	Tableau	
1	1	17
2	8	11
3	$\frac{125}{8}$	0
4	11	0

Tous les coefficients de la première colonne sont de même signe. Le système est stable en boucle fermée.

3) La stabilité du système en boucle fermée avec $k > 0$:

$$FTBTF = \frac{k}{p^3 + 8p^2 + 17p + (10 + k)}$$

L'équation caractéristique est :

$$D(p) = p^3 + 8p^2 + 17p + (10 + k) = 0$$

$n = 3$

$$\text{nbre de lignes} = n + 1 = 4$$

$$\text{nbre de colonnes} = \frac{n + 1}{2} = 2$$

N°Ligne	Tableau	
1	1	17
2	8	10+ k
3	$\frac{126-k}{8}$	0
4	10+ k	0

Pour que tous les coefficients de la première colonne soient du même signe, il faut qu'ils soient tous positifs. On a donc :

$$\begin{cases} \frac{126 - k}{8} > 0 \\ 10 + K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 126 \\ k > -10 \end{cases}$$

Comme par hypothèse, k est positif, nous déduisons la plage de valeurs admissibles pour k : $0 < k < 126$

EXERCICE N°2

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

- a) Déterminer la marge de gain.
- b) Déterminer la marge de phase.

Solution

On doit déterminer la valeur de w_c , puis calculer : $M_G = 0 - 20 \log_{10} |H_{BO}(jw_c)|$
 w_c est telle que : $Arg[H_{BO}(jw_c)] = (-180^\circ)$.

$$\text{On a : } G(jw) = \frac{5}{\left(j\frac{w}{100} + 1\right)^3}$$

$$Arg[H_{BO}(jw)] = 0 - 3 \arctan \frac{w}{100}$$

$$Arg[H_{BO}(jw_c)] = -\pi$$

$$-3 \arctan \frac{w_c}{100} = -\pi$$

$$w_c = 100\sqrt{3}$$

On a alors :

$$M_G = 0 - 20 \log_{10} |H_{BO}(100\sqrt{3})|$$

$$M_G = -20 \log_{10} \frac{5}{\sqrt{\left(\frac{w_c^2}{100^2} + 1\right)^3}}$$

$$M_G = 4dB$$

Pour la marge de phase, on doit trouver la valeur de w_u , puis calculer :

$$M_\phi = Arg[H_{BO}(jw_u)] - (-180^\circ)$$

w_u est telle que :

$$|H_{BO}(jw_u)| = 1dB$$

$$G(jw) = \frac{5}{\left(j\frac{w}{100} + 1\right)^3}$$

$$\frac{5}{\sqrt{\left(\frac{w_u^2}{100^2} + 1\right)^3}} = 1$$

$$w_u = 139 \text{ rad/s}$$

$$M_\phi = Arg[H_{BO}(jw_u)] - (-180^\circ)$$

$$Arg[H_{BO}(jw)] = 0 - 3 \arctan \frac{w}{100}$$

$$M_\phi = Arg[H_{BO}(jw_u)] - (-180^\circ) = \pi - 3 \arctan \frac{139}{100}$$

$$M_\phi = 0.3 \text{ rad} = 17^\circ$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE N°1

Etudier la stabilité de chaque système dont la fonction de transfert est:

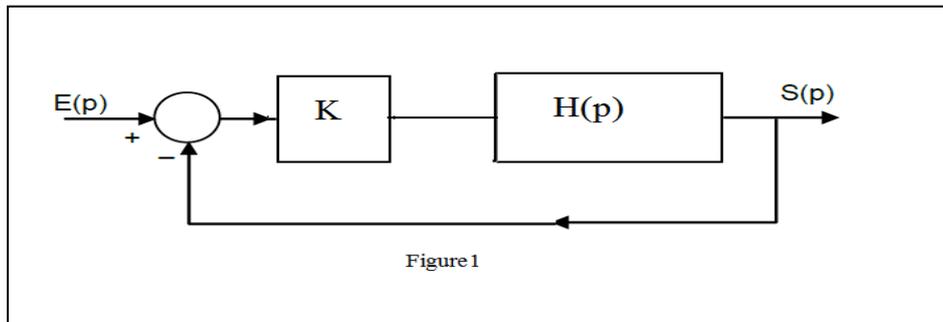
$$a) G(P) = \frac{5(p - 3)}{(P + 1)(P + 2)} ; b) H(P) = \frac{2}{(P^2 + P + 1)(P - 1)^2}$$

EXERCICE N°2

Considérons le système suivant : (voir figure 1).

On donne :

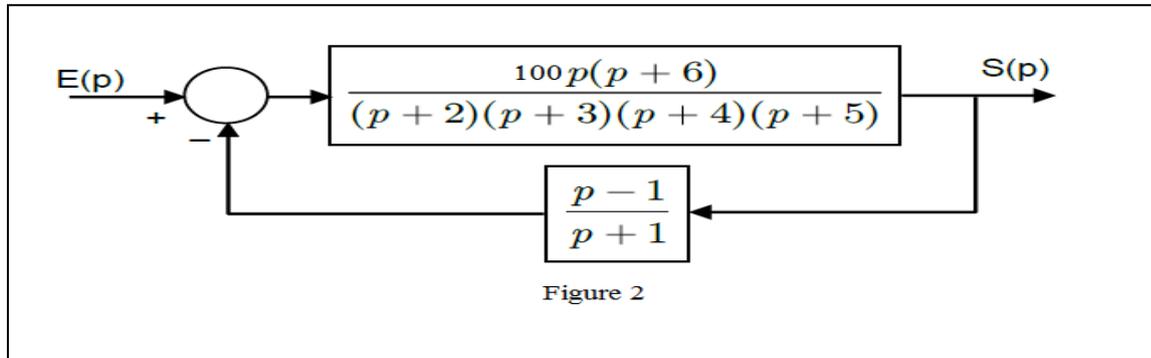
$$H(P) = \frac{1}{(P + 2)(P + 4)(P + 10)}$$



- 1) Vérifier si le système est stable ou non en boucle ouverte sachant que $K=1$.
- 2) En utilisant le critère de Routh :
 - Etudier la stabilité de ce système, en boucle ouverte en prenant $K=1$.
 - Etudier la stabilité de ce système, en boucle fermée en prenant $K=1$.
 - Si K est inconnu (paramètre réel qui peut varier) avec $K>0$, alors étudier la stabilité du système en boucle fermée.

EXERCICE N°3

Soit le système asservi suivant : (voir figure 2).



- 1) En utilisant le critère de Routh, étudier la stabilité de ce système, en boucle fermée.
- 2) Donner le nombre de pôles à partie réelle positive et le nombre de pôles à partie réelle négative.

La précision est un paramètre clé dans l'étude des systèmes asservis. C'est un des critères des performances du système.

En boucle fermée, on voudrait que notre système :

- suive notre entrée imposée en régime permanent établi (précision)
- élimine les perturbations (rejet)
- ait une dynamique rapide

7 Précision statique

Pour un système asservi, la précision statique se caractérise par la différence en régime permanent entre le signal d'entrée et le signal de sortie. Cette différence s'appelle écart ou erreur et est notée 'ε'.

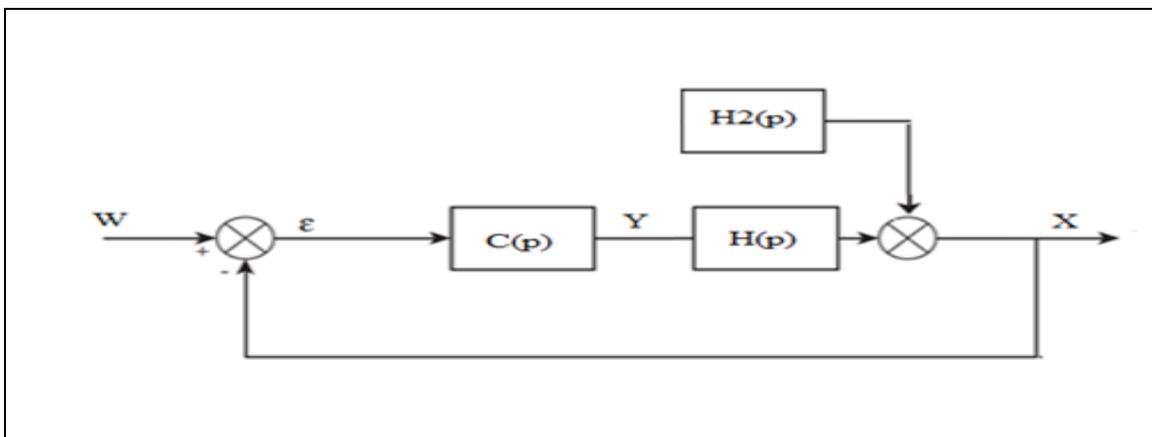


Figure (7.1) : Exemple de système

On détermine l'écart entre $W(p)$ et $X(p)$ et on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{W(p)}{1 + C(p)H(p)}$$

En régime permanent, la valeur de ε peut être calculée à l'aide du théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{W(p)}{1 + C(p)H(p)} \right]$$

Cet écart dépend du signal d'entrée. Selon les signaux d'entrée, on définit trois notions de l'écart :

- Ecart de position
- Ecart de vitesse

- Ecart d'accélération

7.1 Ecart de position

Le signal d'entrée est un échelon de position (variation brusque en amplitude) :

$$w(t) = A u(t) \quad \text{et} \quad W(p) = \frac{A}{p}, \quad A : \text{constante}$$

L'écart dans ce cas, est appelé écart de position, écart statique ou écart de statisme. Il est noté ε_s .

7.2 Ecart de vitesse

Le signal d'entrée est un échelon de vitesse ou rampe:

$$w(t) = b t u(t) \quad \text{et} \quad W(p) = \frac{b}{p^2} \quad b : \text{constante}$$

L'écart, appelé écart de vitesse, écart de trainage, est noté ε_v .

7.3 Ecart d'accélération

Le signal d'entrée est un échelon d'accélération

$$w(t) = c t^2 u(t) \quad \text{et} \quad W(p) = \frac{c}{p^3} \quad c : \text{constante}$$

L'écart dans ce cas est noté ε_a .

Remarque :

Pour le calcul de ε , on dégage le nombre d'intégrations dans $C(p)H(p)$. On écrit :

$$C(p)H(p) = \frac{K}{p^\alpha} T(p)$$

Avec : K : constante ; $T(0) = 1$.

α est le ou classe du système.

- Plus le nombre d'intégrations est élevé, plus est la précision du système asservi. (voir tableau)

Un problème se pose. Quand le système possède des intégrations, la stabilité est « menacée ».

Entrée Nbre d'intégrations	Echelon de position $w(t) = A u(t)$ $W(p) = \frac{A}{p}$ A : constante	Echelon de vitesse $w(t) = b t u(t)$ $W(p) = \frac{b}{p^2}$ b : constante	Echelon d'accélération $w(t) = c t^2 u(t)$ $W(p) = \frac{c}{p^3}$ c : constante
$\alpha = 0$	$\epsilon_s = \frac{A}{1+K}$	$\epsilon_v \rightarrow \infty$	$\epsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 1$	$\epsilon_s = 0$	$\epsilon_v = \frac{b}{K}$	$\epsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 2$	$\epsilon_s = 0$	$\epsilon_v = 0$	$\epsilon_a = \frac{a}{K}$

Remarque:

En régime permanent, l'erreur globale est la somme de l'erreur par rapport à l'entrée : consigne et de l'erreur due au signal perturbateur.

7.4 Rejet de la perturbation par compensation

On peut éliminer totalement l'effet du signal perturbateur en faisant une correction par compensation.

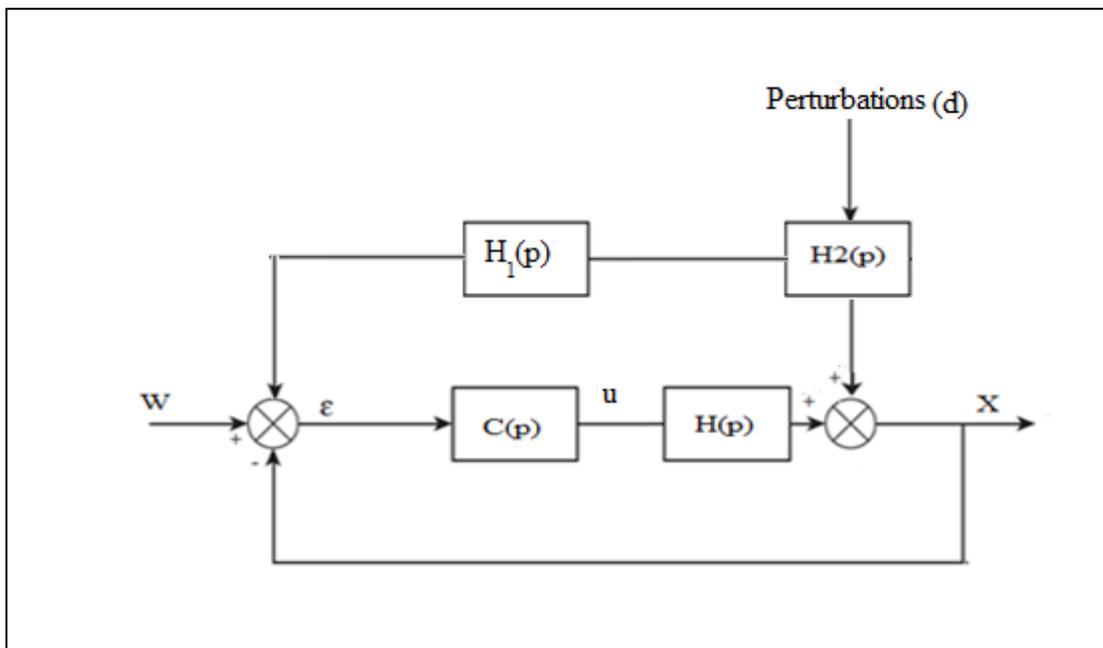


Figure (7.2) : correction par compensation.

$$H_{B0}(p) = C(p)H(p)$$

$$X(p) = \frac{H_{B0}(p)}{1 + H_{B0}(p)}W(p) + \frac{H_2(p) - H_1(p)H_{B0}(p)}{1 + H_{B0}(p)}D(p)$$

On élimine totalement la perturbation en prenant :

$$H_1(p) = \frac{H_2(p)}{H_{B0}(p)}$$

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE N°1 (Asservissement de vitesse)

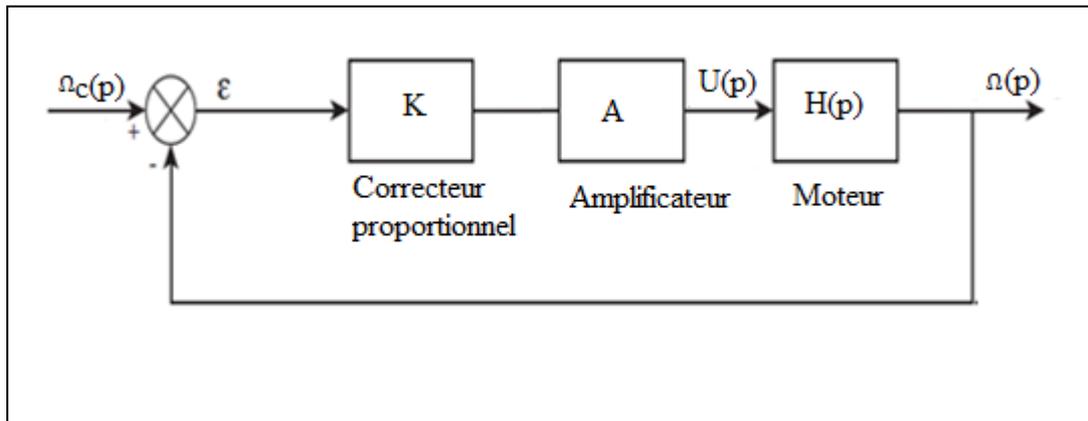
On désire asservir la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu avec sa fonction de transfert donnée par:

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{2}{(1 + 0.2p)(1 + p)}$$

$u(t)$: représente la tension appliquée aux bornes du moteur.

$\Omega(t)$: représente la vitesse angulaire de rotation du moteur.

Le schéma bloc simplifié à retour unitaire est donné par :



On donne : Ω_0 l'amplitude de l'échelon et γ_0 la pente de la rampe pour la consigne Ω_c

- Déterminer l'écart de position et celle de trainage.

Solution :

L'écart de position :

$$\lim_{p \rightarrow 0} [p\varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p}{1 + KAH(p)} \right] \frac{\Omega_0}{p} = \frac{\Omega_0}{1 + 2KA}$$

L'écart de trainage :

$$\lim_{p \rightarrow 0} [p\varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p}{1 + KAH(p)} \right] \frac{\gamma_0}{p^2} = +\infty$$

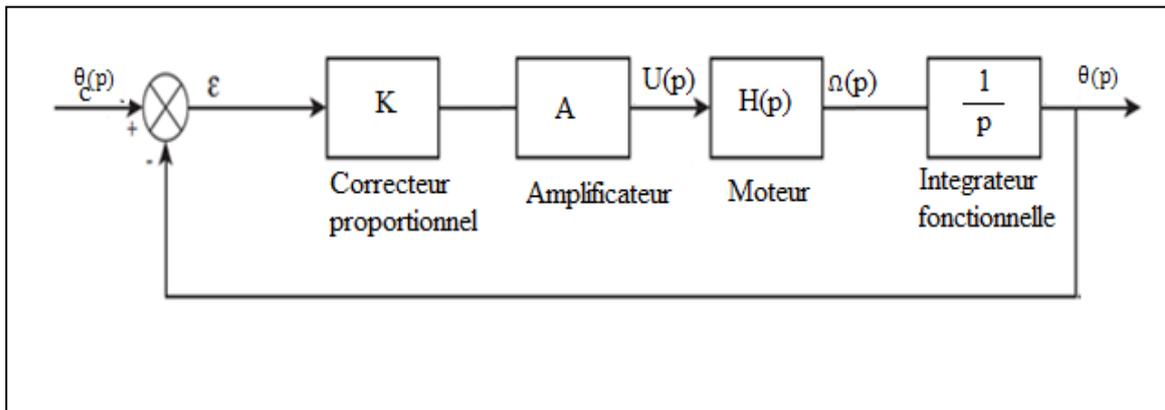
EXERCICE N°2 (Asservissement de position)

On veut asservir la position angulaire θ du rotor du moteur de l'exercice 1.

Sachant que :

$$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \Omega(p) = p\theta(p)$$

Le schéma bloc simplifié avec retour unitaire est donné selon :



On note Θ_0 l'amplitude de l'échelon et Ω_0 la pente de la rampe pour la consigne Θ_c

- Déterminer l'écart de position et celle de trainage.

L'écart de position :

$$\lim_{p \rightarrow 0} [p\varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p}{1 + \frac{KAH(p)}{p}} \right] \frac{\Theta_0}{p} = 0$$

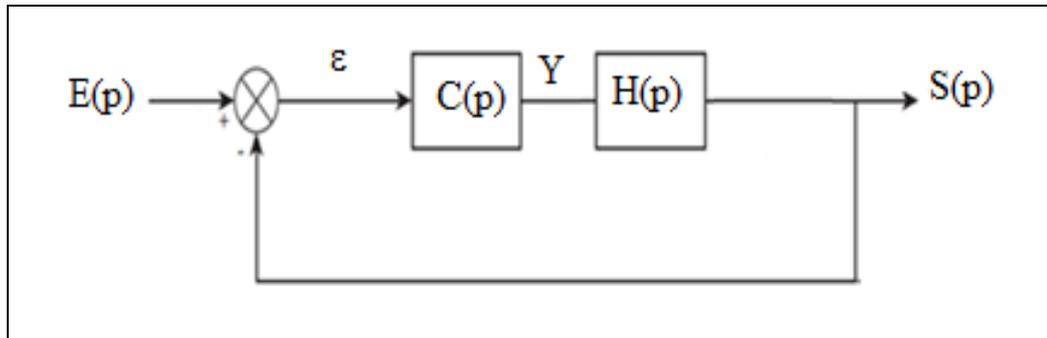
L'écart de trainage :

$$\lim_{p \rightarrow 0} [p\varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p}{1 + \frac{KAH(p)}{p}} \right] \frac{\Omega_0}{p^2} = \frac{\Omega_0}{2AK}$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE N°1 :

Soit le système suivant avec un régulateur à action proportionnelle de fonction de transfert $C(p) = G_r$.



On donne : $H(p) = \frac{2k}{p(20p+2)}$

k est une constante.

- 1) Donner l'erreur $\varepsilon(p)$ en fonction de $E(p)$.
- 2) Donner l'écart de position ε_p si: $E(p) = \frac{0.4}{p}$
- 3) Donner l'écart de vitesse ε_v si: $E(p) = \frac{0.1}{p^2}$

EXERCICE N°2

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$ définie par :

$$F(p) = \frac{k}{(p+1)^2} \text{ avec } k: \text{ constante et } k > 0$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire. Déterminer la valeur de k qui assure au système en boucle fermée, une erreur de position égale à 5%.

EXERCICE N°3

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$ définie par :

$$F(p) = \frac{50}{(20p+2)(2p+20)}$$

Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Pour amener un système à suivre un comportement imposé par l'utilisateur, on utilise un dispositif appelé correcteur inséré en boucle fermée. Nous allons examiner dans ce chapitre les correcteurs et leurs caractéristiques.

8.1 Définition

Un correcteur est un élément que l'on ajoute au système initial pour remédier au problème des compromis de la stabilité et la précision. Par sa réalisation, la synthèse du système asservi se concrétise. Le correcteur est inséré dans la chaîne directe. Il est placé en sortie du comparateur. Il délivre le signal de commande.

Il existe plusieurs types de correcteurs. Le correcteur série est le plus utilisé.

8.1.1 Correction série

La figure (8.1) montre ce cas. Comme indiqué, il est placé en série dans la chaîne directe.

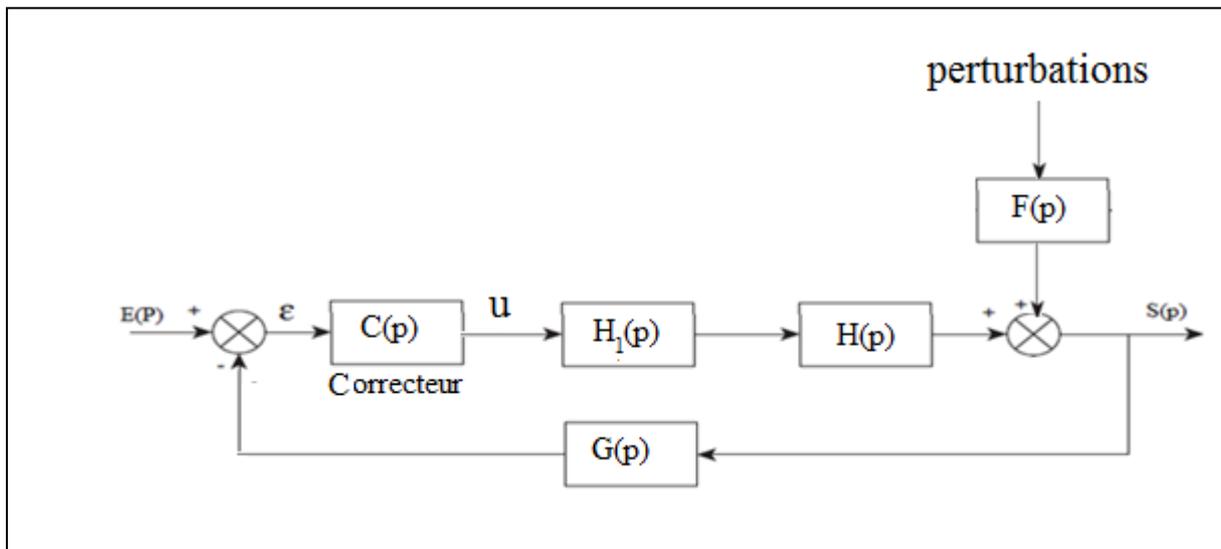


Figure (8.1) : Correction série

8.1.2 Correction parallèle

Comme indiqué, il est placé en parallèle, avec le système. La figure (8.2) illustre ce cas.

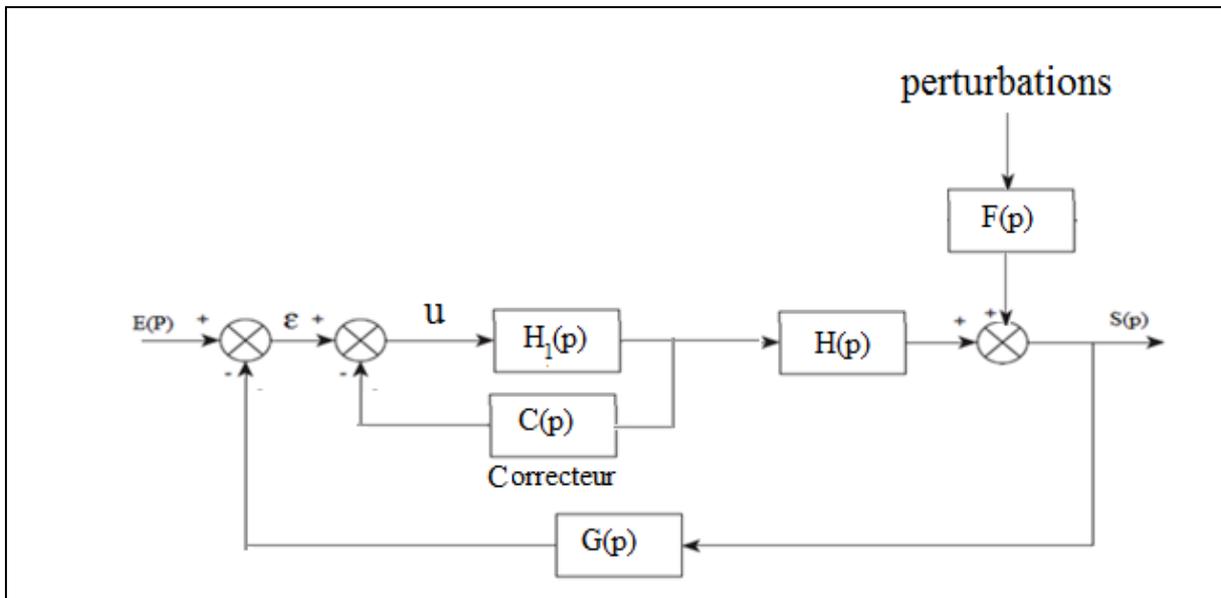


Figure (8.2) : Correction parallèle

8.1.3 Correction série-parallèle

La figure (8.3) montre ce cas.

$C_1(p)$ est la fonction de transfert du correcteur série. $C_2(p)$ est la fonction de transfert du correcteur parallèle.

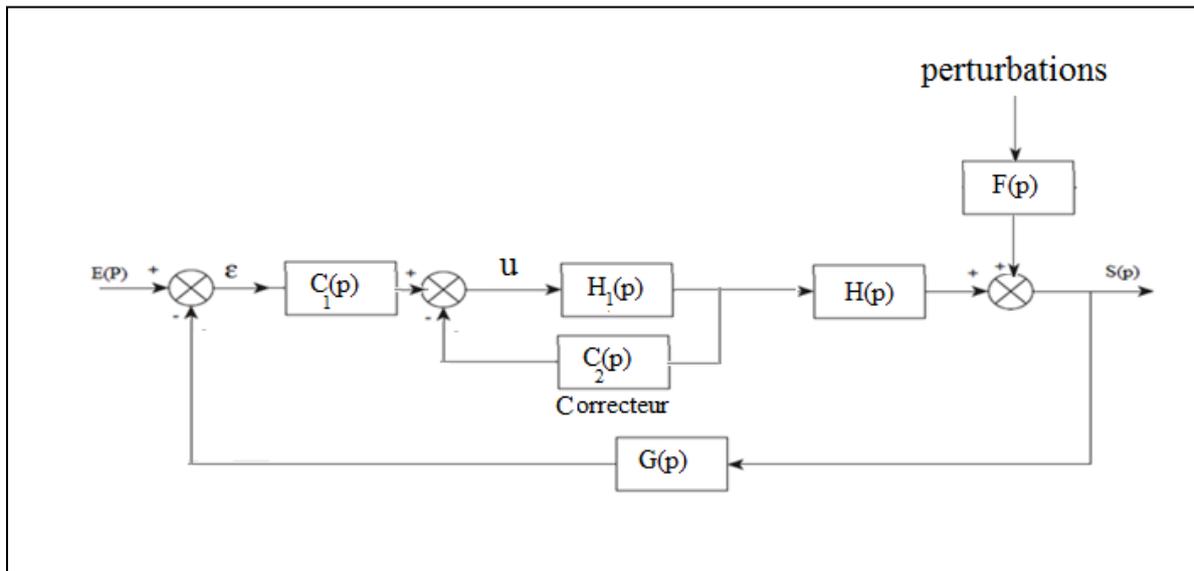


Figure (8.3) : Correction série-parallèle

8.2 Correcteurs série usuels

Il y a des correcteurs qui modifient le gain du système en BO (précision), d'autres qui agissent sur la marge de phase (stabilité, rapidité).

Comme correcteurs qui modifient le gain, on citera le correcteur proportionnel (P), le correcteur intégral (I), les correcteurs proportionnel-intégral (PI), les correcteurs à retard de phase. Pour les correcteurs qui modifient la marge de phase, on a le correcteur proportionnel dérivé (PD), le correcteur à avance de phase.

Le correcteur réalisant les deux actions est par exemple, le correcteur proportionnel-intégral-dérivateur (PID)

8.2.1 Correcteurs qui modifient le gain

8.2.1.1 Correcteur proportionnel P

C'est le plus simple. Il consiste en un amplificateur de gain réglable. Le correcteur a pour un gain :

$$C(p) = k_c$$

La commande du système est :

$$u(t) = k_c \varepsilon(t)$$

avec $\varepsilon(t)$ est le signal d'erreur (Figure 8.1).

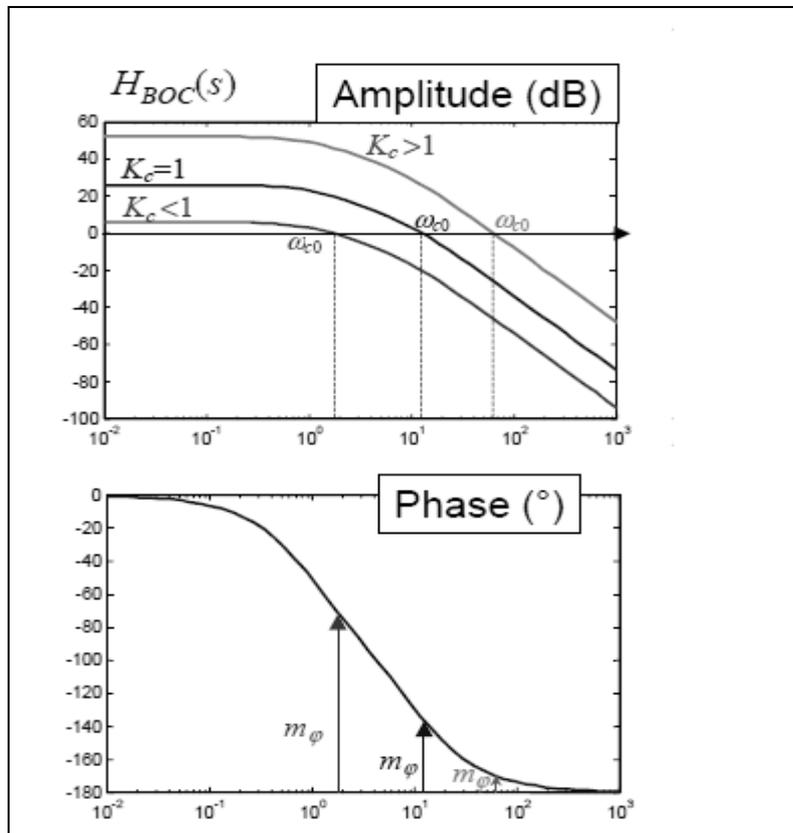


Figure (8.4) : Représentation de fréquentielle

On notera :

- Soit avec w_{co} la pulsation obtenue pour $|H_{BOC}|_{db} = 0db$
- H_{BOC} est la fonction de transfert en boucle ouverte avec le correcteur inséré.
- H_{BONC} est la fonction de transfert en boucle ouverte sans l'adjonction du correcteur

Si $k_c > 1$

- la translation du diagramme de gain de Bode est vers le haut
- l'augmentation de w_{co} ce qui implique l'augmentation de la rapidité Il y a diminution de la marge de phase d'où la dégradation de la stabilité en BF)

Si $k_c < 1$

- la translation du diagramme de gain de Bode se fait vers le bas
- la diminution de w_{co} entraîne la diminution de la rapidité
- On assiste à l'augmentation de la marge de phase donc à l'amélioration de la stabilité.

8.2.1.2 Correcteur intégral I

C'est une fonction d'intégration qui est réalisée. Un pôle nul est ajouté à la fonction de transfert en boucle ouverte. On obtiendra un système caractérisé par une erreur de position (voir chapitre précision).

La fonction de transfert du correcteur :

$$C(p) = \frac{1}{T_i p} \quad ; \quad \text{avec } T_i: \text{ constante d'intégration}$$

La commande du système est obtenue selon:

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

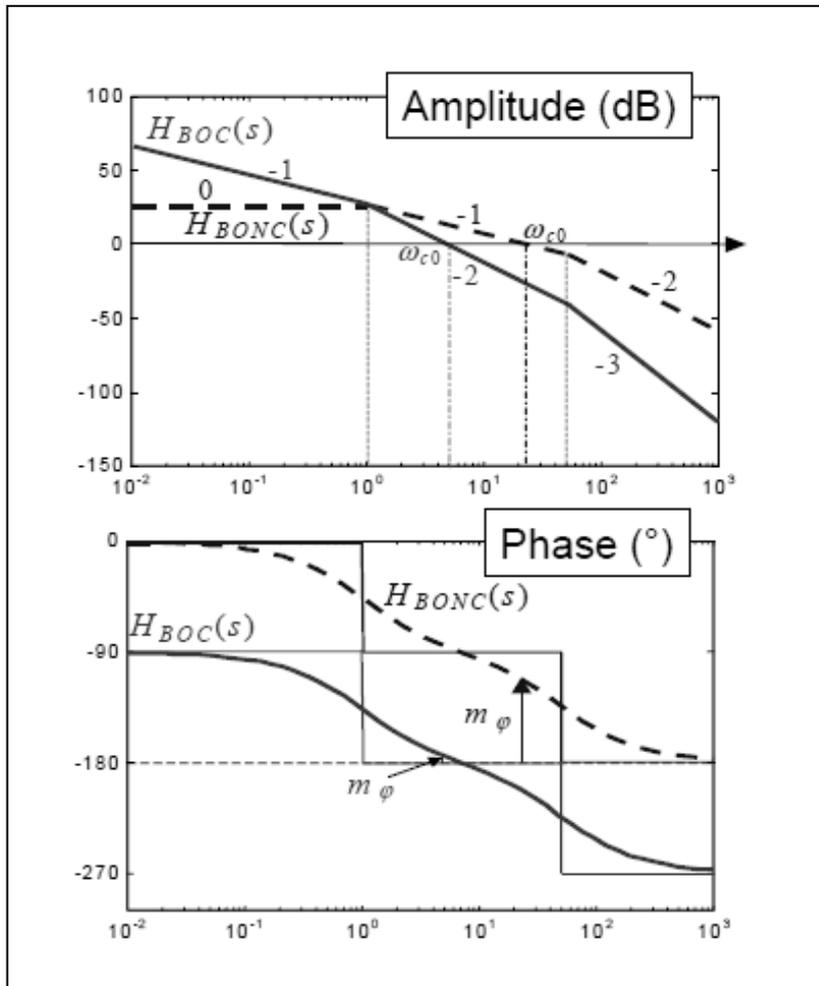


Figure (8.5) : Représentations fréquentielles obtenues

Nous voyons que :

- L'augmentation des pentes est de +20dB/décade
- La translation du diagramme de phase de 90° se fait vers le bas

*L'introduction d'un intégrateur a pour but l'amélioration précision (voir chapitre sur la précision)

- Il y a annulation de l'erreur statique, diminution de l'erreur de vitesse avec le système non corrigé de classe 0.
- Il y a rejet asymptotique des perturbations constantes.

*On observe une diminution de la pulsation de coupure à 0dB

- diminution de la rapidité du système en BF
- l'effet intégrateur entraîne un ralentissement du système

La réduction de la marge de phase provoque la dégradation de la stabilité et entraîne même l'instabilité

Remarque :

Le correcteur I améliore uniquement la précision au détriment des autres performances qui sont dégradées.

8.2.1.3 Correcteur PI

PI est une combinaison des correcteurs P et I entrecroisés.

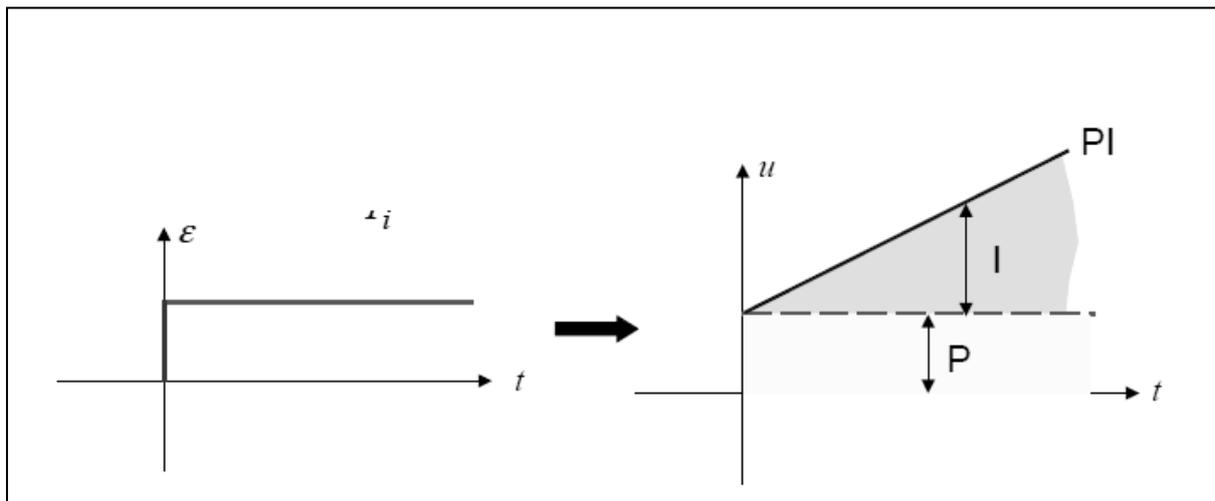
C'est généralement, le correcteur qui est le plus souvent utilisé en industrie. Sa fonction de transfert est :

$$C(p) = k_c + \frac{k_c}{T_i p} = k_c \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

Plus T_i est grande, plus l'action intégrale est faible.

La commande du système est:

$$u(t) = k_c \varepsilon(t) + \frac{k_c}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$



Figure(8.6) : Les signaux du correcteurs selon le temps

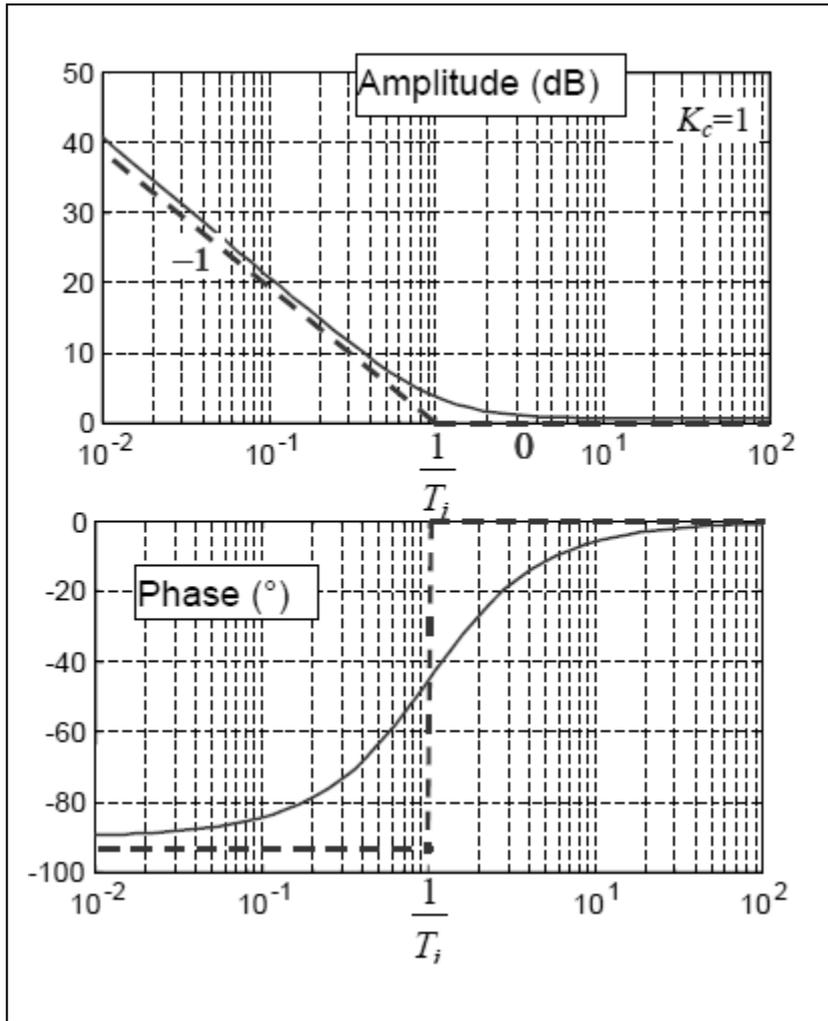


Figure (8.7) : Représentation fréquentielle

- Il y a 'introduction d'un intégrateur
- Le gain en basses fréquences ($\omega \ll \frac{1}{T_i}$) est infini ainsi l'erreur statique est nulle (avec système de classe 0)
- Le gain du système corrigé ne sera pas modifié en hautes fréquences si $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{co}$ d'où (ω_{co} de la sorte la rapidité) est non modifiée
- La phase du système corrigé n'est modifiée qu'en basses fréquences à l'inverse de I.
- La marge de phase n'est pas modifiée si $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{co}$

8.2.1.4 Correcteur à "retard de phase"

La fonction de transfert du correcteur est :

$$C(p) = k_c \frac{1 + Tp}{1 + bTp} ; \text{avec } b > 1$$

En pratique, on choisit $k_c = b$

Le correcteur à retard de phase est une forme qui s'approche du correcteur PI. Il réalise une action intégrale (donc une augmentation du gain en basses fréquences) sans introduire d'intégrateur.

Les contraintes qui peuvent être satisfaites sont

- Une erreur permanente donnée
- Une Marge de phase donnée
- Une Rapidité donnée

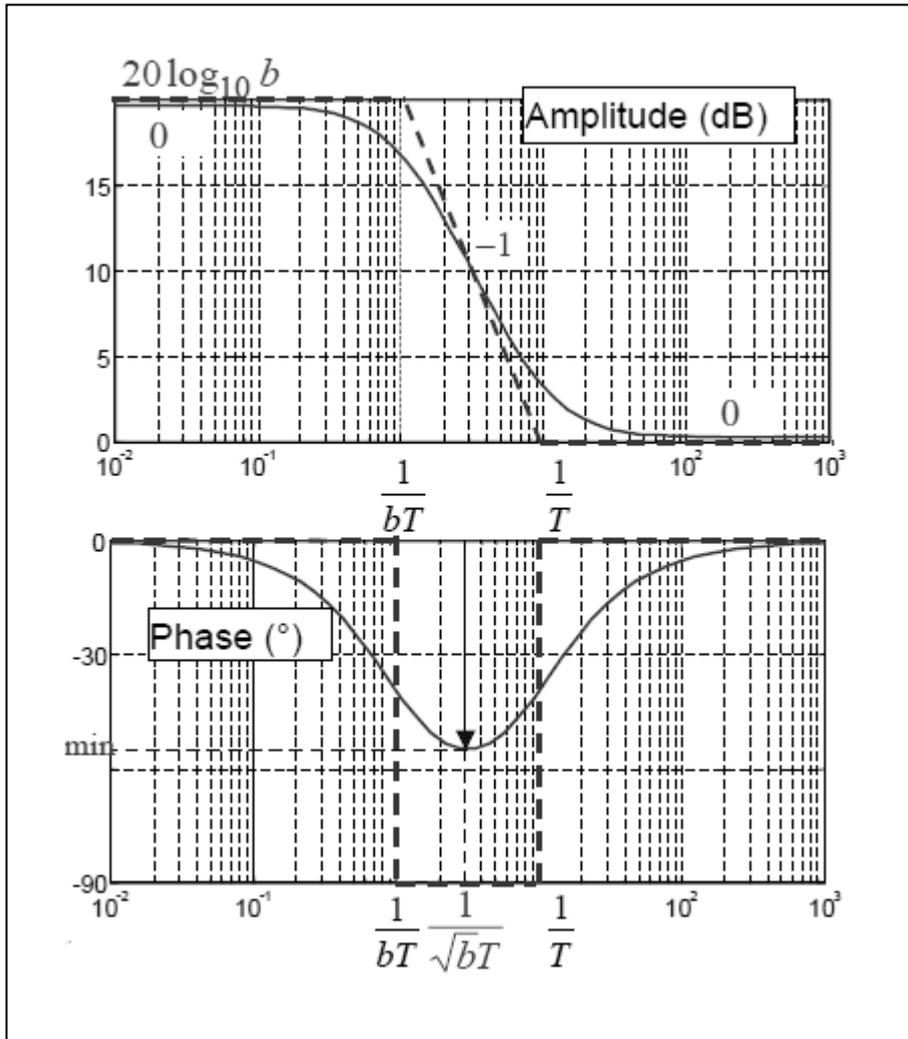


Figure (8.8) : Représentation fréquentielle

On a :

- Introduction d'un déphasage négatif d'où le nom de correcteur à retard de phase.
- Déphasage minimum

$$\varphi_{C,min} = \arcsin \frac{1-b}{1+b} \text{ rad}$$

$$\varphi_{c,min} < 0$$

- Pulsation correspondante

$$w_{c,min} = \frac{1}{T\sqrt{b}}$$

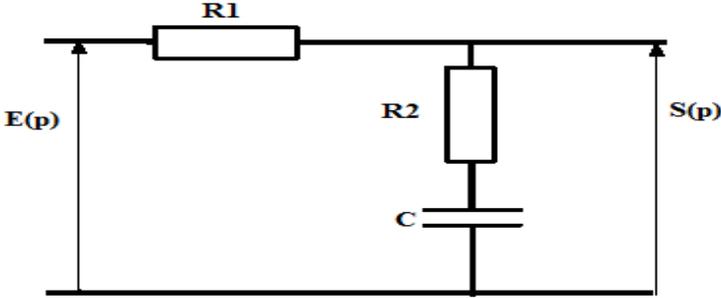
Les effets du correcteur se résument à une

- Augmentation du gain en basses fréquences de $20 \log_{10} b \Rightarrow$ effet intégral \Rightarrow baisse de l'erreur statique en BF (système de classe 0 en BO)
- Diminution de la bande passante à 0dB $w_{co} \Rightarrow$ système plus lent en BF (augmentation de t_m ou de $t_{r5\%}$)

On peut régler le correcteur selon les étapes suivantes :

- Introduire dans le correcteur un gain k'_c qu'on peut calculer afin d'avoir la marge de phase voulue.
- Calculer $k'_c = b$ pour obtenir la précision désirée.
- Choisir la constante de temps T telle que $\frac{1}{T} \ll w_{co}$ ($\frac{1}{T} \ll 0.1 w_{co}$) pour ne pas affecter la marge de phase et les performances dynamiques.

Un exemple peut être proposé selon :

<p>Remarque :</p> <p>Ce correcteur peut être synthétisé par le réseau passif suivant :</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div>	$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{(1 + Tp)}{1 + aTp}$ <p>avec : $a = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ et</p> $T = R_2c$
--	---

8.2.2. Correcteurs qui modifient la marge de phase

8.2.2.1 Correcteur proportionnel dérivé PD

PD représente la combinaison des correcteurs P et dérivée D.
 La fonction de transfert du correcteur, dans ce cas est :

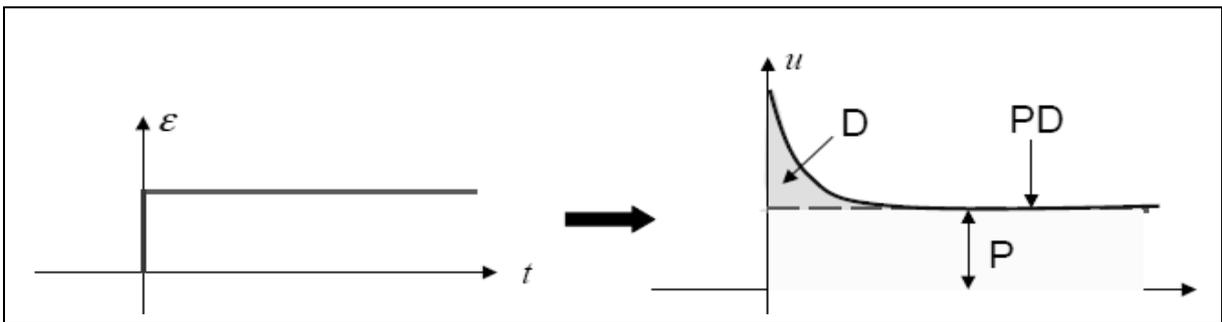
$$C(p) = k_c(1 + T_d p), \quad T_d: \text{constante de dérivation.}$$

L'action dérivée est importante si T_d est grande.

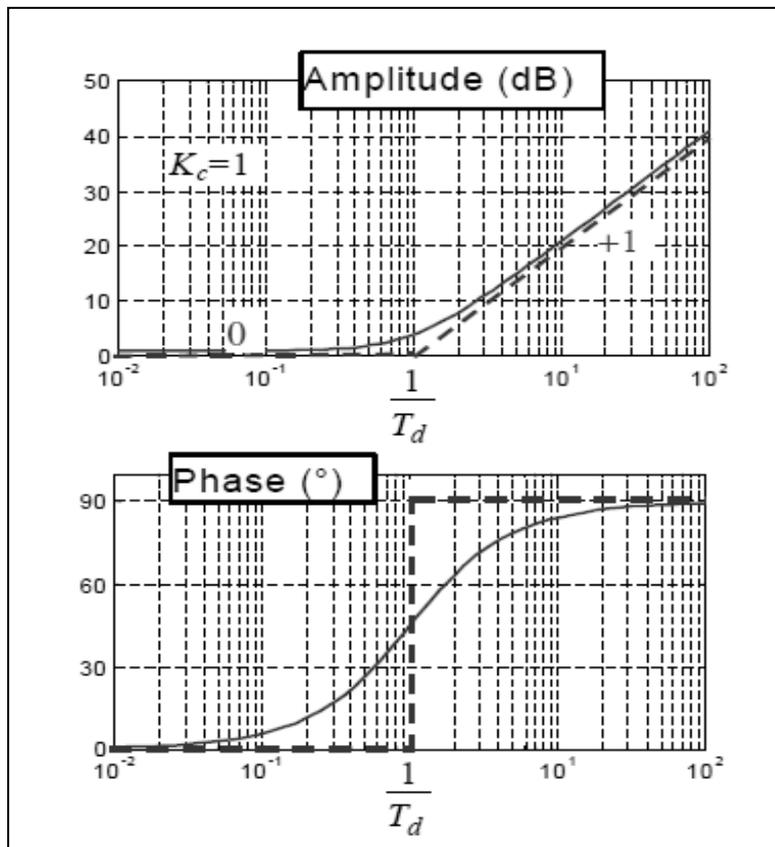
La commande du système est réalisée selon :

$$u(t) = k_c \varepsilon(t) + k_c T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

La commande est proportionnelle à l'erreur et à la variation de l'erreur (dérivée)



Figure(8.9) : signaux temporels du correcteur



Figure(8.10) : Réponse fréquentielle obtenue

Ce correcteur a pour effet :

- Avance de phase maximale de 90° pour $w \gg \frac{10}{T_d}$ donc amélioration de la stabilité.
(marge de phase)
- Augmentation de la pulsation w_{co} d'où amélioration de la rapidité ($t_{r5\%}$, $tm \downarrow$).
- Amplification en hautes fréquences (pour $w > \frac{1}{T_d}$) ainsi élargissement de la BP du système en BF donc sensibilité aux bruits.
- Diminution de l'erreur permanente.

Le correcteur peut être réglé selon les étapes qui suivent :

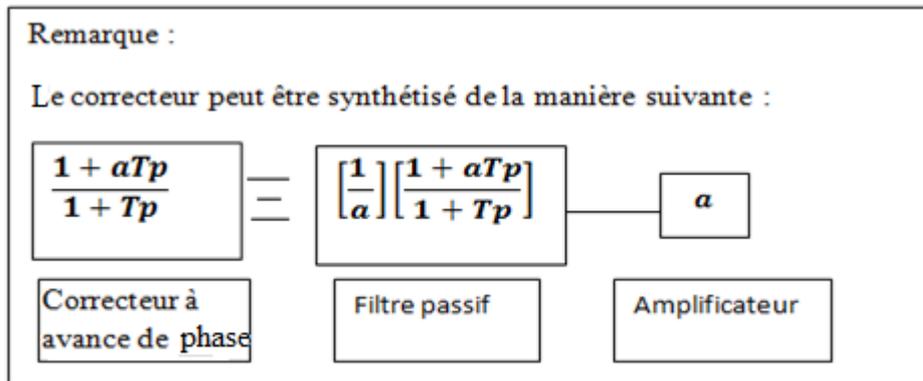
- Régler k_c pour avoir w_{co} choisi
- Régler T_d pour avoir m_ϕ voulue
- Vérifier w_{co} et m_ϕ

8.2.2 .2 Correcteur à avance de phase

La fonction de transfert du correcteur est selon l'équation ci après:

$$C(p) = k_c \frac{1 + aT p}{1 + T p} \quad , \quad a > 1$$

Le correcteur à avance de phase est une forme approchée du correcteur PD qui est physiquement irréalisable (condition de causalité non vérifiée)



Certaines contraintes peuvent être satisfaites :

- Augmentation de la marge de phase.
- Augmentation de la bande passante (donc augmentation de la rapidité, baisse de t_r)
- Erreurs en régime permanent imposées.

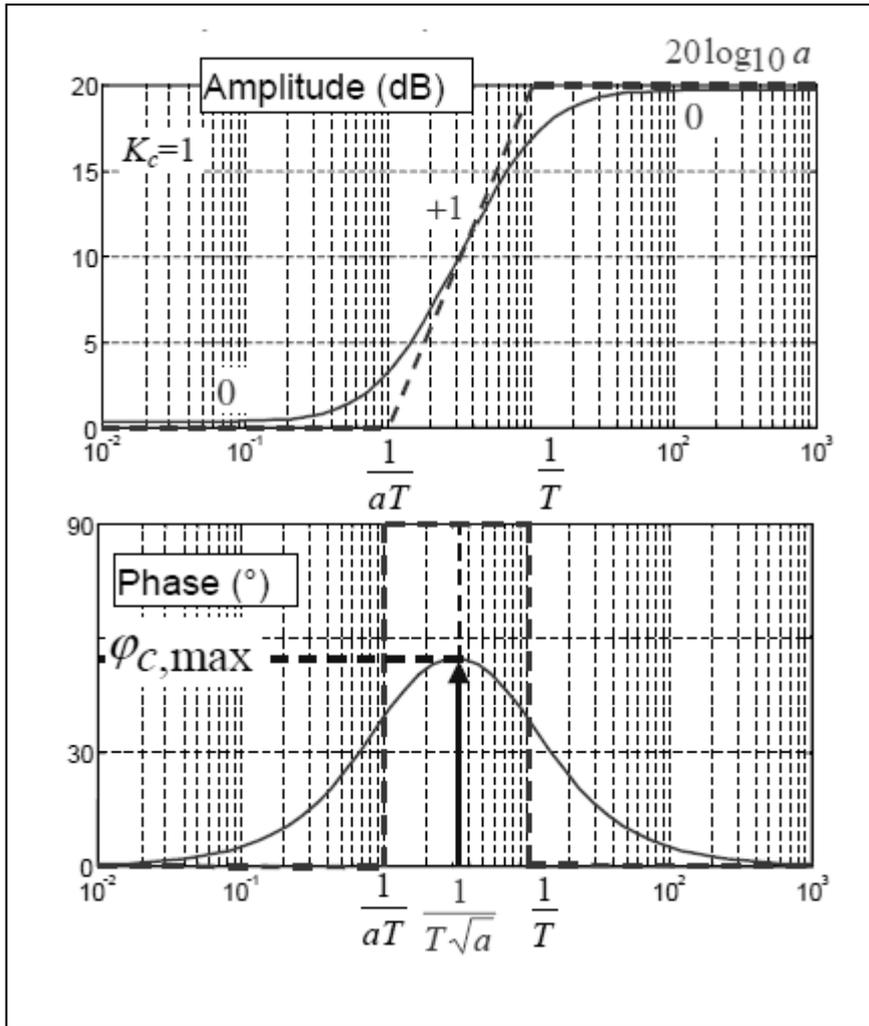


Figure (8.11) : Réponse fréquentielle du correcteur.

Certaines constatations peuvent être dégagées :

- Introduction d'un déphasage positif d'où le nom de correcteur à avance de phase.
- Avance de phase maximale (la cloche)

$$\varphi_{c,max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \text{ rad}$$

$$\varphi_{c,max} > 0$$

- La pulsation correspondante est :

$$\omega_{c,max} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

Les effets de ce correcteur se résument à une :

- Augmentation de la marge de stabilité donc effet dérivateur
- Augmentation de la bande passante à 0dB ω_{co} ce qui montre que le système est plus rapide en BF (diminution de t_m ou de t_r 5%)
- Sensibilité aux bruits provoqués par l'élargissement de la BP.

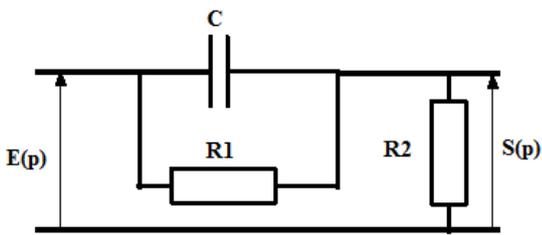
Pour régler ce correcteur, la démarche à suivre consiste à :

- Calculer a pour avoir l'avance de phase $\varphi_{C,max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$ désirée
- Calculer T de façon à placer la cloche à la pulsation w_{co} désirée c à d

$$w_{c,max} = \frac{1}{T\sqrt{a}} = w_{co}$$

- Le gain fréquentiel est augmenté de $20 \log_{10} a$ à partir de $w = \frac{10}{T}$ Ceci décale la pulsation w_{co} du système corrigé en BO
- Calculer k_c pour ramener w_{co} à la bonne valeur

Un exemple peut être proposé selon :

<p>Le filtre passif est le filtre:</p> 	$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{a} \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$ <p>avec : $a = 1 + \frac{R_1}{R_2}$</p> <p>et $T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} c$</p>
---	--

8.2.3 Le correcteur réalisant les deux actions

Le correcteur PID regroupe les actions des correcteurs PI et PD. Il se présente sous la forme de :

$$C(p) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \text{ donc sous forme de}$$

$$C(p) = \left(A + B p + \frac{C}{p} \right)$$

T_i : constante d'intégration; T_d : constante de dérivation

Commande du système :

$$u(t) = k_c \varepsilon(t) + \frac{k_c}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + k_c T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

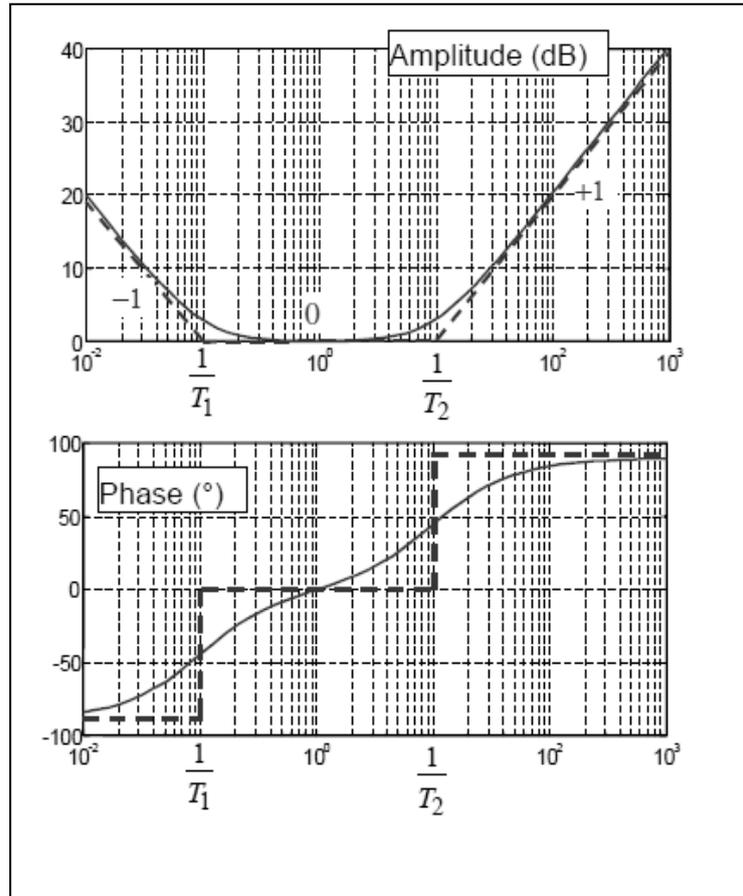


Figure (8.12) : Réponse fréquentielle

a) Effets du correcteur

Son action se fait sur toutes les fréquences. Son effet est stabilisant. Il élimine voire annule l'erreur statique. Il a tendance à améliorer la rapidité.

On remarque que ce correcteur entraîne un gain infini en HF. Réellement, il ne peut être irréalisable.

On voit :

- Une avance de phase en hautes fréquences
- Une amplification en hautes fréquences donc effet PD en hautes fréquences
- Retard de phase en basses fréquences d'où effet PI en basses fréquences
- Fréquences moyennes : peu d'influence du correcteur

b) Caractéristiques du PID

En industrie, le correcteur a les caractéristiques :

- B_p : bande proportionnelle $B_p = \frac{100}{k_c}$
- Taux de répétition par minute $\tau_r = \frac{60}{T_i}$
- Constante de temps de dérivation T_d

8.3 Avantages et inconvénients du correcteur P, PI à avance de phase, PID

Correcteurs	P	PI	Avance de phase	PID
Avantages	Simplicité meilleure précision	Simplicité Erreur statique nulle	Amélioration stabilité et rapidité	Très utilisé en industrie Action PI+PD
Inconvénients	Risque d'instabilité	Système parfois lent en BF	Sensibilité du système aux bruits	Réglage des paramètres plus difficiles

8.4 Etapes de synthèse des correcteurs

La synthèse des correcteurs se fait par des étapes résumées ci dessous :

- A) Analyse du système (identification, performances dynamiques, réponse fréquentielle)
- B) Analyse du cahier de charges (traduction en termes d'erreur, de rapidité, de marge de phase, de pulsation ω_{co})
- C) Choix de la structure du correcteur compte tenu du cahier des charges et des caractéristiques du système
- D) Calcul des paramètres du correcteur.
- E) Vérification des performances du système corrigé. Si le cahier des charges n'est pas satisfait, retour à C.
- F) Réalisation de l'asservissement et tests.

EXERCICE RESOLUS

EXERCICE N°1

Un correcteur, de fonction de transfert $C(p)$, reçoit sur son entrée ε un échelon d'amplitude E .

Exprimer puis tracer la loi de commande $u_r(t)$ lorsque le correcteur est :

- a) Un correcteur P,
- b) Un correcteur PI,
- c) Un correcteur PD.

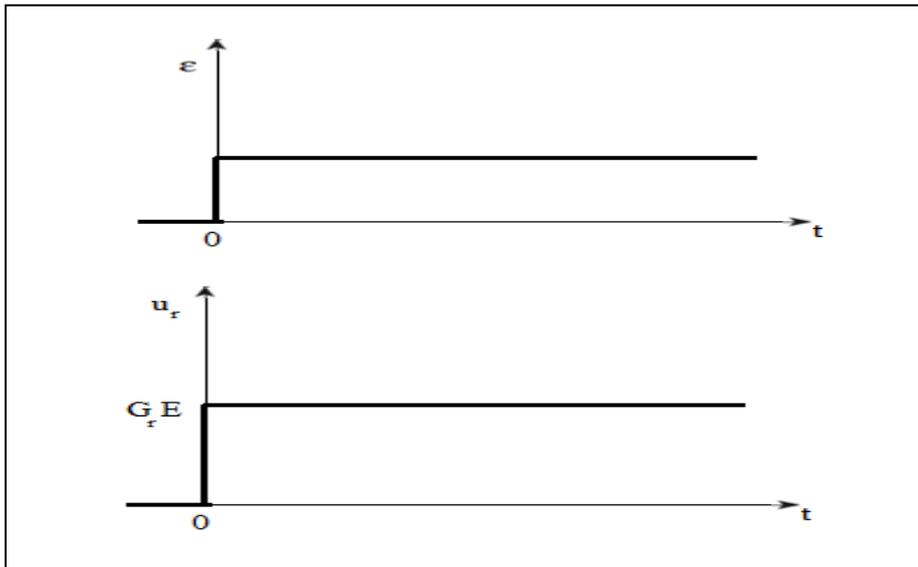
Solution :

- a) Un correcteur P a pour fonction de transfert :

$$C(p) = G_r$$

$$\text{Donc } U_r(p) = G_r \frac{E}{p}$$

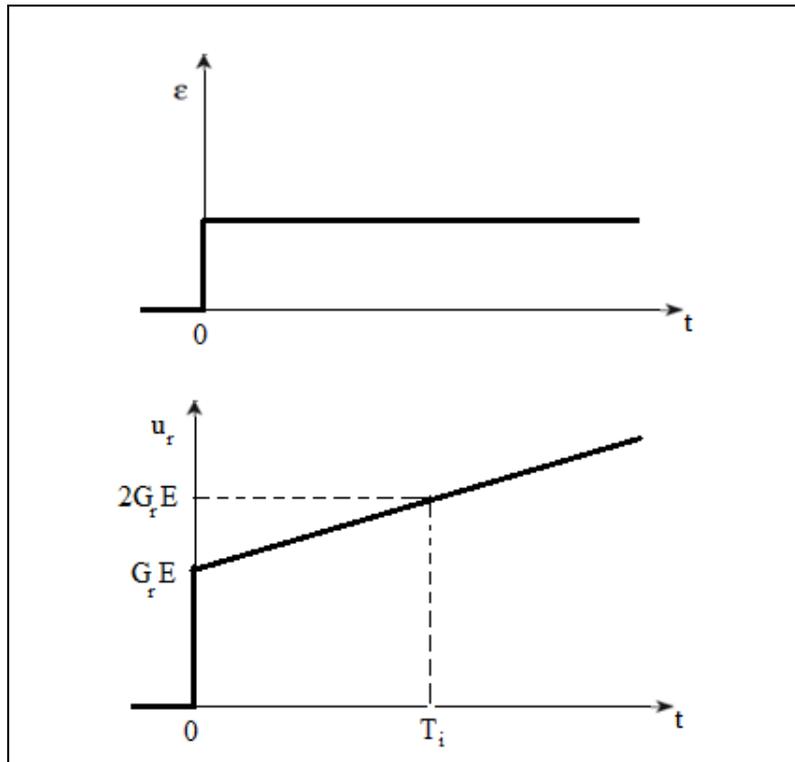
$$U_r(t) = G_r E \quad \text{pour } t > 0$$



- b) Un correcteur PI a pour fonction de transfert :

$$C(p) = G_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

$$\text{On en déduit que : } u_r(t) = G_r E + \frac{G_r}{T_i} E t$$

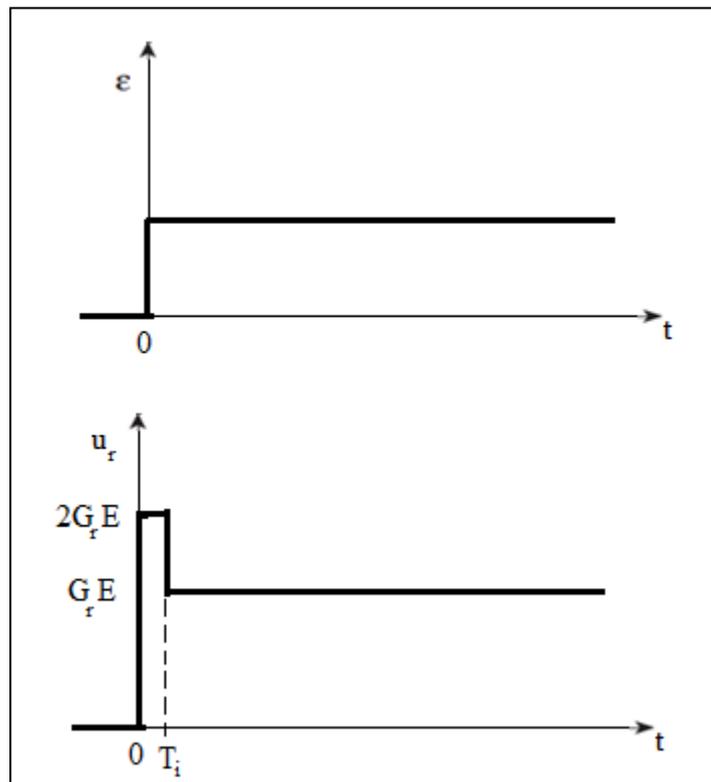


c) Un correcteur PD a pour fonction de transfert :

$$C(p) = G_r (1 + T_d) p$$

$$\text{On en déduit que : } u_r(t) = G_r E + T_d G_r E \delta(t)$$

Où $T_d G_r E \delta(t)$ est une impulsion d'aire $T_d G_r E$. On peut assimiler cette aire à celle d'un rectangle de côtés T_d et $G_r E$.



EXERCICE N°2

On s'intéresse dans cet exercice au système $F(p)$, placé dans une boucle à retour unitaire, représenté en Figure 1. On a un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert $C_1(p)$.

$$C_1(p) = K_{PI} \left(\frac{1 + p \tau_{PI}}{p \tau_{PI}} \right)$$

K_{PI} et τ_{PI} sont des constantes .

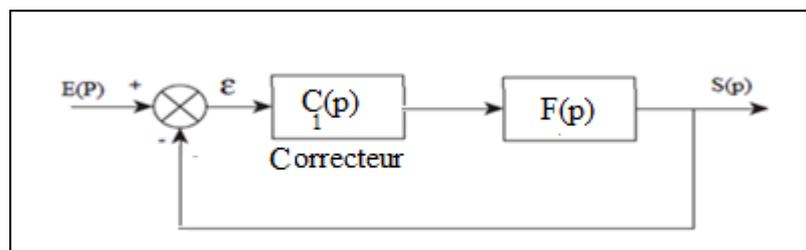


Figure 1

Avec :

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On fixera la valeur de la constante de temps du correcteur τ_{PI} égale à la constante de temps du système à asservir τ .

- 1) Donner la FTBF(p) : la fonction de transfert en boucle fermée, de cet asservissement.
- 2) Mettre la FTBF(p) sous la forme suivante :

$$FTBF(p) = \frac{K'_{BF}}{1 + p\tau'_{BF}}$$

- 3) Donner les expressions des 2 constantes K'_{BF} et τ'_{BF} .
- 4) Pour $\tau'_{BF} = 15$ min, $K=1.5$, $\tau = \left(\frac{1}{2}\right)$ heure.

- a) déterminer la valeur de K_{PI} pour ce cas.
- b) Exprimer l'erreur statique de cet asservissement :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

pour une entrée égale à $[4.u(t)]$.

- 5) Conclure sur l'intérêt d'utiliser un correcteur proportionnel intégral.

Solution :

1)

$$FTBF(p) = \frac{C_1(p)F(p)}{1 + C_1(p)F(p)}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_{PI} \left(\frac{1 + p \tau_{PI}}{p \tau_{PI}} \right) \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right)}{1 + K_{PI} \left(\frac{1 + p \tau_{PI}}{p \tau_{PI}} \right) \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right)}$$

2)

$$FTBF(p) = \frac{K K_{PI}}{p \tau_{PI} + K K_{PI}}$$

$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{p \tau_{PI}}{K K_{PI}}} = \frac{K'_{BF}}{1 + p \tau'_{BF}}$$

3) Par identification :

$$K'_{BF} = 1$$

$$\tau'_{BF} = \frac{p \tau_{PI}}{K K_{PI}} = \frac{\tau}{K K_{PI}}$$

4) Pour $\tau'_{BF} = 15 \text{ min}$, $K=1.5$, $\tau = \left(\frac{1}{2} \right) \text{ heure} = 30 \text{ min}$

a) On a trouvé d'après 3)

$$\tau'_{BF} = \frac{p \tau_{PI}}{K K_{PI}} = \frac{\tau}{K K_{PI}}$$

$$K_{PI} = \frac{\tau}{K \tau'_{BF}} = \frac{30}{15 \times 1.5} = 1.33$$

b)

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [p \varepsilon(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \right]$$

Avec :

$$E(p) = \frac{4}{p}$$

$$\varepsilon_s = 0$$

5) Conclusion :

Le correcteur proportionnel intégral sert à augmenter la précision (diminuer l'erreur ε_s).

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICE N°1

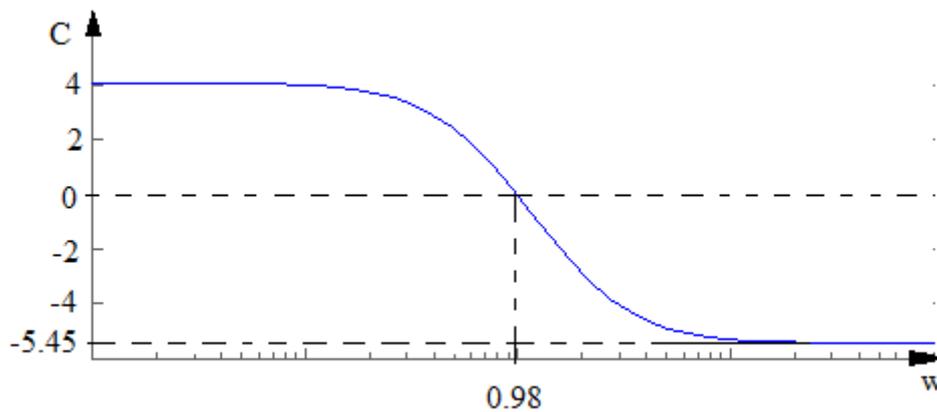
On considère un processus de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{20}{2p(1 + \frac{p}{10})^2}$$

1. Ce système est mis dans un asservissement à retour unitaire avec un correcteur proportionnel P de gain k. Donner le schéma fonctionnel du système asservi.
2. Calculer la valeur gain k qui assure au système une marge de phase 45° .
3. La consigne est un signal échelon unitaire .Calculer l'erreur en régime permanent entre la consigne et la sortie du système. Répondre à la même question si la consigne est une rampe de pente 1.
4. On désire avoir maintenant un asservissement respectant les conditions suivantes :
 - Erreur statique nulle, $\varepsilon_p(\infty) = 0$,
 - Erreur de trainage finie $\varepsilon_p(\infty) = 5\%$.
 Pour ce faire, on adjoint au correcteur proportionnel P, un correcteur à retard de phase.
 - Donner le nouveau schéma fonctionnel de l'asservissement.
 - Calculer les paramètres du correcteur.

EXERCICE N°2

La réponse harmonique en dB d'un correcteur intégral approché est illustrée par la figure suivante :



- 1) Donner les caractéristiques de ce correcteur.
- 2) En déduire la fonction de transfert de ce correcteur sachant que :

$$C(p) = G_r \frac{1+aT_d p}{1+T_d p}$$

G_r, a, T_d : constantes.

EXERCICE N°3

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p + 3)^3}$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire.

- a) Déterminer la valeur de K qui assure au système en boucle fermée un dépassement limité à 10 %.
- b) Calculer alors l'erreur de position en boucle fermée.
- c) Déterminer l'expression $C(p)$ du correcteur à retard de phase qu'il faut introduire dans la chaîne directe pour maintenir cette limitation du dépassement tout en limitant l'erreur statique à $\varepsilon_p = 20\%$.

EXERCICE N°4 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{k}{100(p + 1)(p + \frac{1}{10})^2}$$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

$$\Delta_\varphi \geq 45^\circ ; D \leq 10\% ; \varepsilon_p < 0.08 ; t_m < 8s$$

- 1) Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_p < 0.08$?
- 2) Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8s$?
- 3) On choisit à présent, pour K , la plus petite valeur permettant d'obtenir à la fois $\varepsilon_p < 0.08$ et $t_m < 8s$. Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions. Que vaut alors le dépassement ?
- 4) Tout en conservant cette valeur de K , on introduit, en amont de $G(p)$, dans la chaîne directe, un correcteur $C(p)$ destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges. Déterminer avec précision la fonction de transfert de ce correcteur.

BIBLIOGRAPHIE ET SITES INTERNET

- Y.GRANJON « AUTOMATIQUE : SYSTEMES LINEAIRES, NON LINEAIRES, A TEMPS CONTINU, A TEMPS DISCRET, REPRESENTATION D'ETAT », EDITION DUNOD, 2010.
- P. PROUVOST « AUTOMATIQUE : CONTROLE ET REGULATION », EDITION DUNOD, 2010.
- S. LEBALLOIS, P.CODRON « AUTOMATIQUE : SYSTEMES LINEAIRES ET CONTINUS », EDITION DUNOD, 2006.
-
- M. VILLAIN « AUTOMATIQUE 2 : SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES », EDITION ELLIPSES, 1996.
- P. SIARRY « AUTOMATIQUE DE BASE », EDITION BERT , 1993.
- C. FRANCOIS « AUTOMATIQUE : COMPORTEMENT DES SYSTEMES ASSERVIS », EDITION ELLIPSES, 2014.
- MOHAMMED KARIM FELLAH, POLYCOPIE, « AUTOMATIQUE (1 ET 2) ASSERVISSEMENTS LINEAIRES CONTINUS », 2013.
- Site TD DE MOHAMMED KARIM FELLAH, « AUTOMATIQUE (1 ET 2) ASSERVISSEMENTS LINEAIRES CONTINUS », 2013.
- <https://fr.scribd.com/document/251853475/>
- <http://asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/auto/>
- http://geii.iut-nimes.fr/sites/default/files/u60/seance4_0.pdf

Table des transformées de Laplace

<i>Fonctions temporelles</i> pour $t > 0$	<i>Transformées de Laplace</i>
$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \frac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$S(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{p+a}$
$s(t) = t e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \frac{a}{p(p+a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = (1/a) (t - (1/a) + (e^{-at}) / a)$	$S(p) = \frac{1}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$S(p) = \frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - at e^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

$s(t) = t^2 e^{-at}$	$S(p) = \frac{2}{(p+a)^3}$
$s(t) = t^n e^{-at}$	$S(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$s(t) = (1-at)e^{-at}$	$S(p) = \frac{p}{(p+a)^2}$
$s(t) = at - 1 + e^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 - (1+at)e^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$s(t) = (c-a)e^{-at} - (b-c)e^{-bt}$	$S(p) = \frac{(b-a)(p+c)}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - \cos wt$	$S(p) = \frac{w^2}{p(p^2+w^2)}$
$s(t) = t - \frac{1}{w} \sin wt$	$S(p) = \frac{w^2}{p^2(p^2+w^2)}$