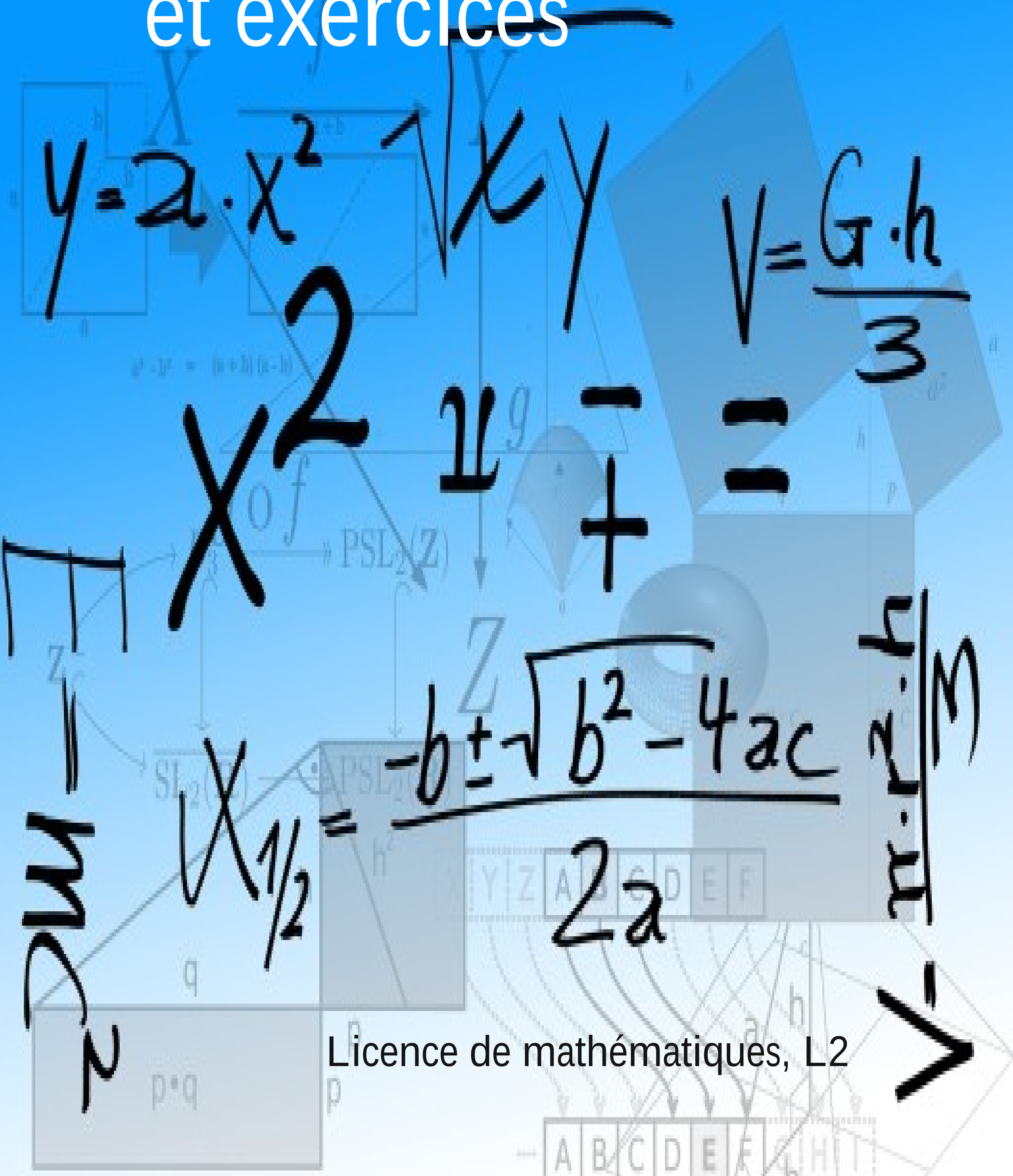
Cours d'Algèbre 3 et exercices



Licence de mathématiques, L2

Miloud Hocine Kouider

2020 - 2021

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Cours d'Algèbre 3 et exercices

Présenté par : **MILOUD HOCINE Kouider**

Année Universitaire 2020 – 2021

Un proverbe chinois affirme : « *Lorsqu'on donne un poisson à quelqu'un, on lui donne à manger pour un jour, lorsqu'on lui apprend à pêcher, on lui donne à manger pour toute la vie.* » Notre objectif est de vous apprendre à pêcher

Table des matières

Table des notations

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z}$: l'anneau des entiers relatifs.
- $\mathbb{K}$: un corps qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}[X]$: l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}^n[X]$: l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
- $\mathbb{C}^n$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
- $\mathcal{L}(E)$: l'espace des endomorphismes d'un espace vectoriel E.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $GL_n(\mathbb{K})$: le groupe des matrices inversibles d'ordre n sur $\mathbb{K}$.
- E_λ : le sous-espace propre associé à λ.
- $Sp(A)$: le spectre de la matrice A.
- $\chi_A(X)$: le polynôme caractéristique de A.
- $\mu_A(X)$: le polynôme minimal de A.
- C_λ : le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ.
- $\det(A)$: le déterminant d'une matrice carrée A.
- $tr(A)$: la trace de A, c'est la somme des coefficients situés sur la diagonale.
- ${}^tA$: la transposée de A.
- $Com(A)$: la comatrice d'une matrice carrée A.
- $Vect(X)$: l'espace vectoriel engendré par une partie X.

- $\dim(E)$: dimension d'un espace vectoriel E.
- $\mathcal{B}$: une base quelconque de l'espace vectoriel E.
- $\{e_1, \ldots, e_n\}$: la base canonique d'un espace vectoriel de dimension n.
- $Mat_{\mathcal{B}}(f)$: La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- I_n : matrice unité d'ordre n.
- $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: les éléments d'une matrice carrée A.
- Id : l'application identité sur E.
- $\mathrm{Im}(f)$: image d'une application linéaire f.
- $\ker(f)$: noyau d'une application linéaire f.
- $\mathrm{rg}(f)$: rang d'une application linéaire f.
- $f_{|_F}$: la restriction de l'application f au sous-espace F.
- $\mathcal{C}^\infty(E)$: l'espace des fonctions infiniment dérivables sur E.
- $\binom{n}{k}$: les coefficients binomiaux, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $\oplus$: somme directe des sous-espaces vectoriels.
- $F \subsetneq E$: signifie que $F \subset E$ et $F \neq E$.

Introduction

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques. Il recouvre le programme d'Algèbre 3 qui traite les concepts de base de la réduction d'endomorphisme en dimension finie et quelques techniques de calcul matriciel.

Le but de ce cours est d'introduire aux étudiants divers outils mathématiques permettant la résolution effective d'un certain nombre de problèmes en particulier la diagonalisation des endomorphismes, la trigonalisation, la réduction de Jordan, les puissances d'une matrice, les systèmes différentiels linéaires, etc.

Les chapitres de ce cours sont illustrés par des exemples d'applications, et une série d'exercices est proposée dans chacun d'entre eux, tous corrigés à la fin de ce polycopié avec grand soin. Ils permettent à l'étudiant de consolider ses connaissances acquises et de comprendre comment appliquer les concepts et outils proposés.

Le polycopié est constitué de trois chapitres :
Le premier chapitre est un rappel sur la construction de l'anneau des polynômes et ses propriétés algébriques.
Le deuxième chapitre traite en détail la réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie (diagonalisation, trigonalisation, la forme réduite de jordan, la décomposition de Dunford) et ces applications aux calcul des puissances d'une matrice, l'inverse d'une matrice et aux suites récurrentes linéaires.
Au troisième chapitre, on introduit la notion d'exponentiel d'une matrice carrée et l'application à la résolution des systèmes différentiels linéaires.

CHAPITRE 1

Rappel : Construction de l'anneau des polynômes

Dans ce premier chapitre on rappelle quelques notions et résultats de la première année. On présente aussi quelques propriétés de l'anneau des polynômes.

1.1 Groupes, anneaux, idéaux

1.1.1 Groupes

Définitions 1.1

1. *Un* ***groupe*** *est un ensemble G muni d'une loi interne $G \times G \mapsto G$, $(x, y) \mapsto x * y$ telle que :*
   (i) La loi $*$ est associative sur G, (i. e. pour tous x, y, z dans G, $(x * y) * z = x * (y * z)$).
   (ii) Il existe un élément neutre e pour la loi $*$ dans G, (i. e. pour tous $x \in G, x * e = e * x = x$).
   (iii) Tout élément de G a un symétrique (i.e. pour tous $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$).
2. *Si la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe $(G, *)$ est commutatif (ou abélien).*
3. *Un sous-ensemble non vide H de G (où $(G, *)$ est un groupe) est un* ***sous-groupe*** *de G si la restriction de la loi $*$ à H lui confère une*

structure de groupe.

Exemples 1.1 *Comme exemples de groupes, citons le groupe $\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}}$ des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ (la loi est la composition), le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (pour l'addition), l'ensemble des réels non nuls (pour la multiplication), tout espace vectoriel (pour l'addition), l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles (pour la multiplication).*

Proposition 1.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que H soit un sous-groupe de G est :*

$$H \neq \emptyset \text{ et } \forall x \in H,\ \forall y \in H,\ x * y^{-1} \in H.$$

1.1.2 Anneaux

Définitions 1.2

1. *Un **anneau** est un ensemble A muni de deux lois internes, généralement notées $+$ et $\times$, telles que $(A, +)$ soit un groupe abélien, dont l'élément neutre est noté 0, et telles que la loi $\times$ soit associative et distributive par rapport à la loi $+$.*
2. *Un anneau est **unitaire** si la loi $\times$ possède un élément neutre, noté 1.*
3. *Un anneau est **commutatif** si la loi $\times$ est commutative.*
4. *Un **diviseur de zéro à droite** (resp. à gauche) de l'anneau A est un élément $a \in A$, non nul, tel qu'il existe un élément $b \in A$ non nul vérifiant $ba = 0$ (resp. $ab = 0$). Un anneau est **intègre** s'il ne contient aucun diviseur de zéro. (c'est-à dire $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$).*
5. *Un **corps** est un anneau non réduit à $\{0\}$, dont tous les éléments sauf 0 sont inversibles pour la loi $\times$.*
6. *L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau A pour la loi $\times$ est un groupe pour cette loi, noté $A^{\times}$. Les éléments inversibles de A sont aussi appelés **unités**.*
7. *Un **sous-anneau** de l'anneau A est une partie B de A, stable pour les deux lois de composition de l'anneau A, telle que les restrictions des deux lois $+$ et $\times$ à B donnent à B une structure d'anneau.*
8. *Soient $A \subset B$ des anneaux et $x \in B$. Le sous-anneau de B **engendré par** A est le « plus petit sous-anneau de B contenant A et x ».*

Exemples 1.2

1. *L'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs, muni de l'addition et de la multiplication des entiers, est un anneau commutatif unitaire et intègre.*
2. *L'ensemble* $2\mathbb{Z} = \{2n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ *des entiers pairs, muni de l'addition et de la multiplication des entiers, ne possède pas d'élément unité mais vérifie toutes les autres propriétés d'un anneau commutatif.*
3. *L'anneau nul* $(\{0\}, +, \times)$ *est un anneau unitaire avec* $1_A = 0_A$. *Il ne contient pas de diviseurs de zéro, il n'est pas intègre et ce n'est pas un corps.*
4. *L'anneau des entiers* $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un anneau intègre mais pas un corps commutatif.*
5. *Les anneaux* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *et* $(\mathbb{C}, +, \times)$ *sont des corps commutatifs.*
6. *Pour* $n \geq 2$ *l'anneau* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *des matrices de taille* n *par* n *à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau non commutatif et non intègre.*
7. *L'anneau des fonctions : si* A *est un anneau et* X *un ensemble, les applications de* X *vers* A *forment un anneau noté* $\mathcal{A}(X, A)$.
8. *Anneau d'endomorphisme : Soit* $(A, +)$ *un groupe abélien. Alors* $(End_{gr}(A), +, \circ)$ *est un anneau unitaire. De même, si* E *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel alors* $End_{\mathbb{K}}(E) = \mathcal{L}(E)$ *est un anneau unitaire.*
9. *Anneaux de polynômes :* $\mathbb{R}[X]$ *et* $\mathbb{C}[X]$ *sont des anneaux unitaires.*
10. $\mathbb{Z}^\times = \{-1, +1\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *et* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^\times = GL_n(\mathbb{R})$.
11. *L'ensemble des entiers de Gauss* $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib;\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ *forme un sous-anneau de* $\mathbb{C}$.
12. *Les fonctions complexes continues sur un intervalle* I *:* $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ *forment un sous-anneau de* $\mathcal{A}(I, \mathbb{C})$.

Remarque 1.1 *Il ne faut pas confondre* $A^\times$ *et* $A^* = A \setminus \{0\}$. *Par exemple :* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^\times$, *mais* $\mathbb{Z}^\times = \{-1, +1\}$.

Définition 1.1 *Un* ***homomorphisme*** *d'anneaux* $\varphi : (A, +, \times) \longrightarrow (B, +, \times)$ *est une application de* A *dans* B *telle que pour tout* x *et pour tout* y *élément de* A *on ait*

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \varphi(0_A) = 0_B \\ \varphi(1_A) = 1_B \end{cases}$$

De plus $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Remarque 1.2 *On dit aussi **morphisme** pour homomorphisme.*

Exemples 1.3

1. *L'application*
$$\varphi : \begin{cases} A & \longrightarrow & (End_{gr}(A), +, \circ) \\ a & \longmapsto & \varphi_a : x \mapsto ax \end{cases}$$
est un morphisme d'anneaux unitaires.
2. *Pour $x \in \mathbb{R}$, l'application*
$$v : P \in \mathbb{R}[X] \longrightarrow P(x) \in \mathbb{R}$$
est un morphisme d'anneaux unitaires.

1.1.3 Idéaux

Définitions 1.3 *Soit $A(+, \times)$ un anneau*

1. *Un **idéal à gauche** de A est un sous-groupe additif I de A tel que*
$$\forall (a, x) \in A \times I, \ a.x \in I.$$
2. *Un **idéal à droite** de A est un sous-groupe additif I de A tel que*
$$\forall (a, x) \in A \times I, \ x.a \in I.$$
3. *Un **idéal** de A est un sous-groupe additif de A qui est à la fois idéal à droite et idéal à gauche de A (on précise parfois en disant, que I est, un idéal bilatère).*

Exemples 1.4

1. *$\{0\}$ et A sont des idéaux de A (Si l'anneau A est un corps, alors ce sont ses seuls idéaux).*
2. *Pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow B$ le noyau $\ker(\varphi)$ est un idéal bilatère de A.*
3. *Les idéaux I de $\mathbb{Z}$ sont les sous-ensembles de la forme*
$$n\mathbb{Z} = \{nk; \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposition 1.2

1. *Un idéal est un sous-anneau de A.*
2. *L'intersection d'une famille d'idéaux à gauche (resp. à droite, resp. bilatères) est un idéal à gauche (resp. à droite, resp. bilatère).*

Dans la suite de ces rappels, tous les idéaux considérés sont bilatères.

Définition 1.2 *Soit B une partie de A, l'idéal **engendré par** B est le plus petit idéal de A qui contient B. L'idéal engendré par B est noté (B).*

1.1.3.1 Lois quotient

Étant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un anneau A, on cherche à faire de $A/\mathcal{R}$ un anneau en le munissant des lois $\overline{x+y} = \overline{x}+\overline{y}$ et $\overline{x \cdot y} = \overline{x}\cdot\overline{y}$ (où $\overline{x}$ désigne la classe de x). Si ces lois sont bien définies (c'est-à-dire que $\overline{x+y}$ et $\overline{x \cdot y}$ ne dépendent pas des représentants choisis de $\overline{x}$ et $\overline{y}$), on dit que $\mathcal{R}$ est compatible avec la structure d'anneau. On montre que les relations d'équivalence compatibles avec la structure d'anneau sont de la forme $x\mathcal{R}y \iff x - y \in I$, où I est un idéal de A. Si tel est le cas, $A/\mathcal{R}$ est un anneau (muni des lois définies plus haut) appelé **anneau quotient** et noté A/I.

Proposition 1.3 *Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour tout idéal I de A, l'ensemble quotient A/I muni de l'addition et de la multiplication définies ci-dessus est un anneau commutatif unitaire, et la surjection canonique $p : A \longrightarrow A/I$ est un morphisme d'anneaux unitaires.*

Exemples 1.5

1. *Pour tout entier $n > 0$, $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et on peut définir l'anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*
2. *On considère $I = (X^2 - 1)\mathbb{R}[X] = \{(X^2 - 1)P;\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $(X^2 - 1)$. L'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)\mathbb{R}[X]$ admet deux diviseurs de zéro $\overline{X-1}$ et $\overline{X+1}$, donc il n'est pas intègre.*
3. *Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour tout idéal I de A, on note $I[X]$ le sous-ensemble de $A[X]$ formé des polynômes à coefficients dans I. Alors $I[X]$ est un idéal de $A[X]$ et les anneaux $(A/I)[X]$ et $A[X]/I[X]$ sont isomorphes.*
4. *Les surjections canoniques $p_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $p_2 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ sont des morphismes d'anneaux unitaires.*

Proposition 1.4 *Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors*

(i) Si J est un idéal de B, $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de A.

(ii) Si φ est surjectif et I est un idéal de A, alors $\varphi(I)$ est un idéal de B.

(iii) Si I est un idéal de A contenu dans le noyau de φ, alors il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\Phi : A/I \longrightarrow B$ vérifiant $\Phi \circ p = \varphi$. L'homomorphisme Φ est défini par $\Phi(x + I) = \varphi(x)$.

1.1.3.2 Idéaux premiers, idéaux maximaux

Définition 1.3 *Un idéal I de l'anneau A est **premier** si*

$$\forall (x,y) \in A^2, \; xy \in I \Longleftrightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Proposition 1.5 *Soit I un idéal de A, on a*

$$I \text{ est premier } \Longleftrightarrow A/I \text{ est intègre.}$$

Exemples 1.6

1. *L'idéal (0) d'un anneau est premier si et seulement si A est intègre.*
2. *Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, un idéal (n) est premier si, et seulement si, n est premier.*
3. *Si $\mathbb{K}$ est un corps, l'idéal (X) de $\mathbb{K}[X]$ est premier.*
4. *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Alors l'image réciproque d'un idéal premier est encore premier.*

Définition 1.4 *Soit I un idéal de l'anneau A, distinct de A, on dit que c'est un idéal **maximal** si c'est un élément maximal dans l'ensemble des idéaux de A muni de la relation d'inclusion, c'est-à-dire si :*

$$\forall J \text{ idéal de } A, \; I \subset J \Longrightarrow J = I \text{ ou } J = A.$$

Proposition 1.6 *Soit I un idéal de A, si A est unitaire,*

$$I \text{ est maximal } \Longleftrightarrow A/I \text{ est un corps.}$$

Exemples 1.7

1. *L'idéal (0) d'un anneau est maximal si et seulement si A est corps.*
2. *Un idéal maximal est premier. En effet, si I est maximal, A/I est un corps et donc en particulier intègre. Cependant la réciproque n'est pas vraie en général. Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, l'idéal (0) est premier puisque $\mathbb{Z}$ est intègre mais non maximal puisque $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.*
3. *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Alors l'image réciproque d'un idéal maximal n'est pas maximal, en effet si l'on prend pour φ le morphisme d'anneaux injectif $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$, alors l'image réciproque de l'idéal (0) n'est pas maximal.*

Dans toute la suite de ces rappels, tous les anneaux considérés sont commutatifs.

1.1.3.3 Éléments irréductibles, anneaux factoriels

On suppose que l'anneau A est commutatif unitaire et intègre.

Définition 1.5

1. *Soit x et y deux éléments de l'anneau A : On dit que x et y sont* ***associés*** *s'il existe un élément inversible u de A tel que $y = ux$.*
2. *Soit $x \in A$ non inversible ; x est* ***irréductible*** *si tout diviseur de x est soit inversible soit associé à x. On peut aussi dire que x est irréductible si lorsque $x = yz$, alors soit y est inversible, soit z est inversible.*

Exemple 1.1 *Considérons le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et $i\sqrt{5}$ ou autrement dit l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ des nombres qui peuvent s'écrire $a + ib\sqrt{5}$ pour des entiers relatifs a et b. Notez qu'une telle écriture est unique et qu'en particulier les multiples de 2 sont les nombres de la forme $a + ib\sqrt{5}$ avec a et b pairs. L'élément 2 est cependant irréductible dans cet anneau. En effet, supposons $2 = xy$. Les éléments x et y s'écrivent $x = a + ib\sqrt{5}$ et $y = c + id\sqrt{5}$. On prenant le carré du module de ces nombres complexes, on voit que $4 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$. Ceci force $b = d = 0$ d'où $2 = ac$. Mais alors $a = \pm 1$ ou $c = \pm 1$ et $2 = xy$ est donc banale.*

Définition 1.6 *On dit que l'anneau A est* ***factoriel*** *si*

(i) Tout élément x non inversible de A s'écrit

$$x = p_1 p_2 \dots p_n$$

où $p_1, \dots, p_n$ sont irréductibles,

(ii) La décomposition d'un élément x en produit de facteurs irréductibles est unique au sens suivant : si on a $x = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m$ alors $n = m$ et on peut changer l'ordre des q_i de façon que p_i et q_i soient, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, des éléments associés.

Exemple 1.2 *L'anneau $\mathbb{Z}$ est un anneau factoriel : tout entier se décompose en facteurs premiers et cette décomposition est essentiellement unique.*

1.1.3.4 Anneaux principaux

Définition 1.7

1. *Un idéal I de l'anneau commutatif A est principal s'il est engendré par un seul élément.*

2. *Un* ***anneau principal*** *est un anneau intègre commutatif dont tous les idéaux sont principaux.*

Exemples 1.8

1. *Tout corps est un anneau principal.*
   Il existe des anneaux intègres non principaux.
2. $\mathbb{Z}[X]$ *est un anneau intègre non principal car si l'on considère l'idéal engendré par* X *et* 2, *il n'est pas principal.*
   Il existe des anneaux n'admettant que des idéaux principaux et non intègres.
3. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *est non intègre mais tout idéal est principal (car les seuls idéaux sont* 0 *et* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*).*

Remarque 1.3 *Même dans le cas où l'anneau* A *n'est pas commutatif, on peut parler d'idéal principal à droite ou à gauche. Ainsi, le sous-ensemble* I *de l'anneau* A *est un idéal principal à droite de* A. *si* I *est un idéal à droite et s'il existe un élément* $x \in I$ *tel que*

$$I = \{ax, a \in A\}.$$

Remarque 1.4 *: Si* x *est irréductible, alors l'idéal* (x) *est maximal parmi les idéaux principaux de* A.

Corollaire 1.1 *Les idéaux maximaux d'un anneau principal sont exactement les idéaux de la forme* $I = (x) = \{ax, a \in A\}$ *pour* x *un irréductible de* A.

Proposition 1.7 *Soit* x *un élément non nul de l'anneau principal* A. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) x *est un élément irréductible.*
(ii) (x) *est un idéal premier.*
(iii) (x) *est un idéal maximal.*

Théorème 1.1 *Un anneau principal est factoriel.*

En particulier, on retrouve que $\mathbb{Z}$ est factoriel. De même, l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est factoriel.

1.1.3.5 Anneaux euclidiens

Définition 1.8 *Un anneau A commutatif unitaire intègre est **euclidien** s'il existe une application $N : A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telle que, si a et b sont deux éléments de A et si $b \neq 0$, il existe des éléments q et r de A tels que*

$$a = bq + r.$$

*et tels que ou bien $r = 0$, ou bien $N(r) < N(b)$. Cette application N est appelée la **norme** de l'anneau euclidien.*

Remarque 1.5 *Lorsqu'on écrit $a = bq + r$ avec $N(r) < N(b)$, on effectue la division euclidienne de a par b. Le quotient est q, le reste r.*

Exemples 1.9

- *$\mathbb{Z}$ est un anneau euclidien, la norme est la fonction valeur absolue. On remarque que, avec cette définition, il y a dans $\mathbb{Z}$ deux quotients possibles : l'un par défaut (si le reste est positif), l'autre par excès (si le reste est négatif). Par exemple : $3 = 2 \times 1 + 1 = 2 \times 2 - 1$. Le quotient de 3 par 2 est 2 avec reste -1 ou 1 avec reste $+1$.*
- *L'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps $\mathbb{K}$ est un anneau euclidien, la norme est l'application degré.*

Proposition 1.8 *Un anneau euclidien est principal, donc factoriel.*

1.2 L'anneau des polynômes

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1.2.1 L'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$

Définition 1.9 *On appelle **polynôme à une indéterminée** et à coefficients dans $\mathbb{K}$ une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{K}$ dont tous les termes à partir d'un certain rang sont égaux à 0. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à une indéterminée.*

En d'autres termes, $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}(n > N \Longrightarrow a_n = 0).$$

Le polynôme P s'écrit ainsi : $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$ et les termes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ se nomment les coefficients du polynôme P.
On appelle **polynôme nul** le polynôme noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ dont tous les coefficients sont nuls : $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$. On le note plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté avec l'élément nul de $\mathbb{K}$. On appelle **polynôme constant** un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de la forme $P = (a_0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$.

Définition 1.10 *On dit que deux polynômes $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux, et on note $P = Q$, si $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1.2.2 Valuation et degré d'un polynôme

Définition 1.11 *Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.*

1. *On appelle **degré** de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand entier naturel n tel que $a_n \neq 0$. Autrement dit,*
$$\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N}; a_n \neq 0\}.$$
2. *On appelle **valuation** de P, et on note $v(P)$, le plus petit entier naturel n tel que $a_n \neq 0$. Autrement dit,*
$$v(P) = \min\{n \in \mathbb{N}; a_n \neq 0\}.$$

Exemple 1.3

1. *Soit $P = (1, 0, 0, 3, 0, \dots) \in \mathbb{R}[X]$. On a : $v(P) = 0$ et $\deg(P) = 3$.*
2. *Soit $P = (0, 0, 2i, -1, 1, \dots) \in \mathbb{C}[X]$. On a : $v(P) = 2$ et $\deg(P) = 4$.*

Remarques 1.1

1. *Par convention, on pose $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$ et $v(0_{\mathbb{K}[X]}) = +\infty$.*
2. *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $v(P) \leq \deg(P)$.*

Définitions 1.4 *Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré p*

1. *le terme **constant** de P est a_0*
2. *le **coefficient dominant** de P est a_p .*
3. *le polynôme P est **unitaire** (ou normalisé) si son coefficient dominant est 1.*
4. *le polynôme P est appelé **monôme** si $v(P) = \deg(P)$.*

1.2.3 Structures algébriques sur les polynômes

Définition 1.12 (Addition de polynômes) *Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On appelle somme des polynômes P et Q (ou addition de P et Q) le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté $P+Q$ et défini par*

$$P + Q = (a_n +_{\mathbb{K}} b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On a ainsi défini une première loi (de composition) interne sur $\mathbb{K}[X]$ notée $+$.

Exemple 1.4 *Si $P = (1, 1, 1, 0, \dots)$ et $Q = (0, 2, 3, -1, 0, \dots)$ alors*

$$P + Q = (1, 1, 1, 0, \dots) + (0, 2, 3, -1, 0, \dots) = (1, 3, 4, -1, 0, 0, \dots).$$

Définition 1.13 (Multiplication de polynômes) *Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On appelle produit de P et Q le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté $P \times Q$ (ou plus simplement PQ) est définie par*
$P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}.$$

Exemple 1.5 *Soient $P = (1, 2i, 2, 0, 0, \dots)$ et $Q = (1, 2, 0, 0, \dots)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Les coefficients du polynôme $P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]$ vérifient :*

$$\begin{cases} c_0 &= a_0b_0 = 1 \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 = 2 + 2i \\ c_2 &= \underbrace{a_0b_2}_{=0} + a_1b_1 + a_2b_0 = 2 + 4i \\ c_3 &= \underbrace{a_0b_3}_{=0} + \underbrace{a_1b_2}_{=0} + a_2b_1 + a_3b_0 \\ c_4 &= \underbrace{a_0b_4}_{=0} + \underbrace{a_1b_3}_{=0} + \underbrace{a_2b_2}_{=0} + \underbrace{a_3b_1}_{=0} + \underbrace{a_4b_0}_{=0} \\ \vdots & \\ c_n &= 0 \text{ pour tout } n \geq 4. \end{cases}$$

On a ainsi obtenu : $P \times Q = (1, 2 + 2i, 2 + 4i, 4, 0, 0, \dots)$.

1.2.3.1 Structure d'anneau commutatif et intègre sur $\mathbb{K}[X]$

1. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de la loi $+$ possède une structure de groupe commutatif. En effet, l'addition définie sur l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$ puisque l'addition $+_{\mathbb{K}}$ définie sur le corps $\mathbb{K}$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{K}$. De plus, l'addition des polynômes possède les propriétés suivantes (qui se déduisent des propriétés de l'addition sur $\mathbb{K}$).
   - Elle est associative : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, on a :
   $$(P+Q)+R = P+(Q+R).$$
   - Elle admet un élément neutre dans $\mathbb{K}[X]$. C'est le polynôme $0_{\mathbb{K}[X]}$ car
   $$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$
   - Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ admet un symétrique dans $\mathbb{K}[X]$ qui est le polynôme $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Elle est commutative : $P+Q = Q+P$ pour tous P, Q dans $\mathbb{K}[X]$.
2. La multiplication des polynômes possède les propriétés suivantes
   - Elle est associative : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,
   $$(P\times Q)\times R = P\times(Q\times R).$$
   - Elle est distributive par rapport à l'addition : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,
   $$P\times(Q+R) = (P\times Q)+(P\times R) \text{ et } (Q+R)\times P = (Q\times P)+(R\times P).$$
   - Elle admet un élément neutre dans $\mathbb{K}[X]$. C'est le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. En effet,
   $$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$
   - Elle est commutative : $P\times Q = Q\times P$ pour tous P, Q dans $\mathbb{K}[X]$.

De 1. et 2. , on conclut que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni des lois $+$ et $\times$ possède une structure d'anneau commutatif. De plus si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs p et m, alors le polynôme $P\times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nul. En effet, son $(p+m)$-ème coefficient c_{p+m} est non nul puisque $c_{p+m} = a_p \times b_m$ avec $a_p \neq 0$ et $b_m \neq 0$. On a ainsi établi que, pour tous P, Q de $\mathbb{K}[X]$,
$$(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \ \text{ et } \ Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}) \Longrightarrow P\times Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]},$$
autrement dit que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre.

Remarque 1.6 *Pour les polynômes constants et non nuls, les éléments de* $\mathbb{K}[X]$ *ne possèdent pas de symétrique pour la loi* $\times$*. L'anneau* $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *n'est donc pas un corps.*

1.2.3.2 Fonctions polynômes

Définition 1.14 *La* ***fonction polynôme*** *associée au polynôme* P*, est l'application de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *définie par :* $x \longrightarrow P(x)$*.*

Exemple 1.6

1. *Si* $P = (1, 0, 0, 3, 0, \dots) \in \mathbb{R}[X]$*, alors :* $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) = 1 + 3x^3$.
2. *Si* $P = (0, 0, 2i, -1, 1, \dots) \in \mathbb{C}[X]$*. alors :* $\forall x \in \mathbb{C}$ $P(x) = 2ix^2 - x^3 + x^4$.

1.2.4 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1.2.4.1 Division euclidienne

Proposition et définition 1.1 (Division euclidienne) *Soient* A *et* B *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *avec* $B \neq 0$*, il existe un unique couple* (Q, R) *de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *tels que*

$$A = BQ + R \quad \textit{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Déterminer le couple (Q, R) *c'est effectuer la division euclidienne de* A *par* B*. Les polynômes* Q *et* R *se nomment respectivement* ***quotient*** *et* ***reste****.*

Corollaire 1.2 *L'anneau* $\mathbb{K}[X]$ *est euclidien pour l'application* $N = \deg$.

Exemple 1.7 *Considérons les deux polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *suivants*

$$A = X^4 + 2X^3 - X + 6 \quad \textit{et} \quad B = X^3 - 6X^2 + X + 4.$$

Effectuons la division euclidienne de A *par* B *dans* $\mathbb{R}[X]$*.*

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +2X^3 & -X & & +6 & X^3 \; -6X^2 \; +X \; +4 \\ \cline{6-6}
-X^4 & +6X^3 & -X^2 & -4X & & X+8 \\ \cline{1-4}
 & 8X^3 & -X^2 & -5X & +6 & \\
 & -8X^3 & +48X^2 & -8X & -32 & \\ \cline{1-4}
 & & 47X^2 & -13X & -26 &
\end{array}$$

On a ainsi obtenu que $A = BQ + R$ avec $Q = X + 8$, $R = 47X^2 - 13X - 26$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

1.2.4.2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 1.15 *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A (ou que A est divisible par B) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$A = BQ.$$

On dit aussi que A est un multiple de B ou que B est un diviseur de A.

Définition 1.16 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que* $\deg(P) \geq 1$.

1. *Le polynôme P est dit irréductible (ou premier) dans $\mathbb{K}[X]$ s'il n'admet pour diviseur que les polynômes $\alpha.1_{\mathbb{K}[X]}$ et $\alpha.P$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.*
2. *Dans le cas contraire, on dit qu'il est réductible.*

Exemple 1.8 *le polynôme $P = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Par contre il réductible dans $\mathbb{C}[X]$, car il est divisible par les deux polynômes $X - i$ et $X + i$.*

1.2.4.3 Zéros ou racines de polynômes

1. Soit $\alpha \in A$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, α est zéro ou racine de P si $P(\alpha) = 0$.
2. L'élément α de $\mathbb{K}$ est racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.
3. α est racine d'ordre r, ou de multiplicité r de P si $(X - \alpha)^r$ divise P, mais $(X - \alpha)^{r+1}$ ne divise pas P.
4. Le nombre de racines (comptées avec multiplicité) d'un polynôme de degré p est au plus p. Si le polynôme P a exactement p racines (comptées avec multiplicité), on dit que le polynôme P est scindé.
5. Si P et Q sont de degré $\leq p$ et s'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$, $(p+1)$ éléments de A tels que $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ pour $1 \leq i \leq p$, alors $P = Q$.

1.2.4.4 Dérivation formelle

Définition 1.17 *Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$. Le polynôme dérivé de P est P', c'est l'élément de $\mathbb{K}[X]$ défini par*

$$P' = \sum_{i=0}^{n} i a_i X^{i-1}.$$

*L'application $P \longmapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ est appelée **dérivation formelle**.*

Remarque 1.7 *Les propriétés connues pour la dérivation des fonctions d'une variable réelle sont applicables ici : dérivée d'une somme, d'un produit, dérivée n-ième, formule de Leibnitz...*

1.2.4.5 Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

Théorème 1.2 (Théorème fondamental de l'algèbre) *Un élément de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe. On dit que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.*

Le théorème 1.2 est appelé aussi théorème de d'Alembert[1]-Gauss[2].

Corollaire 1.3

1. *Les éléments irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré* 1.
2. *Les éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré* 1 *et les polynômes de degré* 2 *qui ont deux racines complexes non réelles, qui sont alors conjuguées.*

1.3 Exercices

Exercice 1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et N une partie de A, telle que

$$N = \{x \in A : x^n = 0, n \geq 1\}.$$

Montrer que N est un idéal de A.

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire dont l'élément neutre pour la loi $\times$ est noté 1.

1. Soit x un élément nilpotent ($x^p = 0$) de A. Montrer que $1 - x$ est inversible.
2. Soit
$$U_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}),\ n \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ nilpotent.}$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (1 + x)^{-1}(1 + x^{2^{n+1}}).$$

1. Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) : Mathématicien et philosophe français.
2. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) : Mathématicien, astronome et physicien allemand.

Exercice 3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes :

1. $P_1[X] = -X^8 + 2X^4 - 1$.
2. $P_2[X] = X^5 - X^3 - X^2 + 1$.
3. $P_3[X] = 1 - X^8$.
4. $P_4[X] = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.
5. $P_5[X] = -X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 4. Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que j est une racine multiple de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$$

n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Calculer le reste de la division euclidienne de

1. $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$.
2. X^n par $(X-1)^2$.
3. $(X+1)^n$ par $(X-1)^2$.
4. $(X+1)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

CHAPITRE 2

Réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n. D'autre part $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E.

2.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$*

1. *On dit que λ est une **valeur propre** de f, s'il existe un vecteur **non nul** x de E tel que $f(x) = \lambda x$.*
2. *Un **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ est un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.*
3. *Le **spectre** de f est l'ensemble des valeurs propres de f. On le note $Sp(f)$.*

Définition 2.2 (version matricielle) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur **non nul** X de $\mathbb{K}^n$ tel que $AX = \lambda X$, alors on dit que :*

1. *λ est une **valeur propre** de A.*
2. *X est un **vecteur propre** de A associé à λ.*

On appelle ***spectre*** *de A et on note $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.*

Exemples 2.1

1. *(Cet exemple est en dimension infinie) L'endomorphisme de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admet tous les réels comme valeur propre, en effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \to e^{\lambda t}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
2. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le réel $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une valeur propre de A. En effet*
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$
3. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Le complexe $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une valeur propre de A. En effet*
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1

1. *Il résulte de la définition qu'un vecteur propre n'est jamais nul.*
2. *λ est une valeur propre de f si et seulement si $f-\lambda Id$ n'est pas injective.*

En effet λ est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x$. Or $f(x) - \lambda x = 0 = (f - \lambda \mathrm{Id})(x)$. Il s'ensuit que λ est une valeur propre de f si et seulement si $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Remarque 2.2 *Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors*

1. *λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de A.*
2. *x est un vecteur propre de f si et seulement si $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ est un vecteur propre de A.*

Proposition 2.1 *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.*

Preuve. Procédons par récurrence sur le cardinal p de la famille de vecteurs propres considérée.

1. Si $p = 1$, alors la famille ne contient qu'un vecteur qui est non nul (car vecteur propre) donc la famille est libre.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille de p vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes soit libre et considérons $(x_1, \dots, x_{p+1})$ une famille de $p+1$ vecteurs propres associées aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$.

   Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Si $\sum\limits_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i = 0$, alors

   $$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p+1} f(\alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \alpha_i x_i = 0.$$

   Donc

   $$0 = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \alpha_i x_i - \lambda_{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{p+1} (\lambda_i - \lambda_{p+1}) \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda_{p+1}) \alpha_i x_i.$$

   D'après notre hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\alpha_i = 0$ (car $\lambda_{p+1} \neq \lambda_i$ par hypothèse). On en déduit que $\alpha_{p+1} = 0$, car $x_{p+1} \neq 0$. Nous avons donc montré que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

■

Corollaire 2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes.*

Preuve. Une famille constituée de vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres est libre (d'après la proposition précédente) et de cardinal le nombre de valeurs propres distinctes. Or, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace, d'où le résultat. ■

2.2 Polynôme caractéristique

Définition 2.3 *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est le polynôme χ_f défini par*

$$\chi_f(X) = \det(f - XId).$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme χ_A défini par

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Remarque 2.3 *Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors $\chi_f = \chi_A$.*

En raison des remarques 2.2 et 2.3, on se contentera dans la majorité des cas d'énoncer les résultats dans le cadre des endomorphismes.

Dans la proposition suivante, on donne une caractérisation des valeurs propres, plus pratique que celle de la remarque 2.1.

Proposition 2.2 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de f si et seulement si*

$$\det(f - \lambda Id) = 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } f &\iff \exists x \in E \setminus \{0\} : \ f(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0\} : \ (f - \lambda \mathrm{Id})(x) = 0 \\ &\iff \ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\} \\ &\iff f - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff f - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0. \end{aligned}$$

■

Un des intérêts du polynôme caractéristique est la recherche des valeurs propres comme l'indique le corollaire suivant.

Corollaire 2.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de χ_f sont exactement les valeurs propres de f.*

Preuve. Le scalaire λ est une racine de χ_f si et seulement si $\det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible, ce qui est la définition de λ valeur propre. ■

Exemple 2.1 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par*

$$f(e_1) = e_1 - e_2 - e_3, \ f(e_2) = -e_1 + e_2 - e_3, \ f(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3.$$

Relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice associée à f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (\lambda-2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A, et donc de f, sont les deux réels -1 et 2.

Remarques 2.1

1. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ une matrice carrée d'ordre 2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A).
\end{aligned}$$

   Par conséquent,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A).$$

   Plus généralement, si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une matrice carrée d'ordre n alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A). \tag{2.1}$$

2. *Si une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux puisque*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda).$$

3. *Le calcul des valeurs propres est invariant par changement de base. En effet, soient A et B les matrices représentatives de f dans les bases $\mathcal{B}_1$*

et $\mathcal{B}_2$ de E respectivement. Le polynôme caractéristique de B est défini par :

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n).$$

Les deux matrices A et B sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Elles vérifient ainsi :

$$B = P^{-1}AP$$

où P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Vérifions que $\chi_B(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\
&= \det(P^{-1}(AP - \lambda P)) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\
&= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\
&= \frac{1}{\det(P)} \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\
&= \det(A - \lambda I_n) \\
&= \chi_A(\lambda).
\end{aligned}$$

Définition 2.4 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f.*

- *On dit que λ est une valeur propre de **multiplicité** m (ou d'ordre m) de f si λ est une racine de multiplicité m du polynôme caractéristique de f.*
- *En particulier, si $m = 1$ alors la valeur propre est dite **simple**.*
  *Si $m > 1$ alors la valeur propre est dite **multiple**. Elle est dite **double** lorsque $m = 2$ et **triple** lorsque $m = 3$.*

2.3 Sous-espaces propres

Définition 2.5 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f. Le **sous-espace propre** de f associé à λ est le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda Id)$ de E. On le note*

$$E_\lambda(f) := \ker(f - \lambda Id).$$

Remarques 2.2

1. *Si λ est une valeur propre de f, on a toujours $E_\lambda(f) \neq \{0\}$.*
2. *$E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f et le vecteur nul. Autrement dit,*

$$E_\lambda(f) = \{x \in E : \ f(x) = \lambda x\}.$$

3. *Les sous-espaces propres de f sont stables par f (pour toute valeur propre λ, $f(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$).*

Définition 2.6 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(A) := \ker(A - \lambda I_n)$ de $M_{1,n}(\mathbb{K})$ s'appelle le* ***sous-espace propre*** *de A associé à la valeur propre λ.*

Exemple 2.2 *Reprenons l'exemple 2.1 de l'endomorphisme f de E, avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vérifié que les valeurs propres de A, sont -1 et 2.

Détermination du sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -1$.
le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -1$ est l'espace $E_{\lambda_1} = \ker(A + I_3)$ et on a

$$(x,y,z) \in E_{\lambda_1} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = z.$$

Donc $E_{\lambda_1} = Vect\{(1,1,1)\}$.

Détermination du sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 2$.
Le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 2$ est l'espace $E_{\lambda_2} = \ker(A - 2I_3)$ et on a

$$(x,y,z) \in E_{\lambda_2} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -(y+z).$$

Donc $E_{\lambda_2} = Vect\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$.

Proposition 2.3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de multiplicité m de f alors*

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m.$$

Preuve. Posons $p = \dim(E_\lambda(f))$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E_\lambda(f)$ que l'on complète (d'après le théorème de la base incomplète) par $e_{p+1}, \ldots, e_n$

pour obtenir une base $\mathcal{B}$ de E. Dans ce cas on a :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1p+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & a_{p\ p+1} & \dots & a_{pn} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{p+1\ p+1} & \dots & a_{p+1\ n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n\ p+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

L'expression du polynôme caractéristique associé à f étant indépendante de la base choisie, on a :

$$\chi_f(X) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(f) - XI_n).$$

En développant par rapport aux p premières colonnes, on obtient :

$$\chi_f(X) = (\lambda - X)^p \det(M - XI_{n-p}),$$

où $M = (a_{ij})_{p+1 \leq i,j \leq n}$. Ainsi $(\lambda - X)^p$ divise le polynôme χ_f et $p \leq m$. En particulier, si la multiplicité de λ est égale à 1, on en déduit immédiatement que $p = 1$. ■

Proposition 2.4 *Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.*

Preuve. Soit $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit x un élément de la somme de ces sous-espaces propres, supposons que x admette deux décompositions distinctes sur cette somme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i.$$

Alors $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x'_i) = 0$, or chacun des termes de cette somme est soit nul, soit un vecteur propre. D'après la proposition 2.1, $x_i - x'_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (sinon on aurait trouvé une combinaison linéaire nulle non triviale de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes). On obtient l'unicité de la décomposition de x et par conséquent, les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe. ■

Exemple 2.3 *Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel $\mathcal{I}$ des fonctions paires et le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ des fonctions impaires sont en somme directe. En effet, ce sont les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 de l'endomorphisme de E défini par $f \longmapsto \widehat{f}$ où $\widehat{f} : x \longmapsto f(-x)$.*

2.4 Exercices

Exercice 8.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 2. Calculer χ_f en fonction de $tr(f)$ et $tr(f^2)$.

Exercice 10. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Calculer $\chi_{A^{-1}}$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les valeurs propres de la comatrice $Com(A)$.

Exercice 12. Calculer les éléments propres des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5 Diagonalisation d'un endomorphisme

2.5.1 Définitions et exemples

Définition 2.7

1. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit **diagonalisable** s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.*
2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$, et s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $D = P^{-1}AP$, ou bien $A = PDP^{-1}$, P est appelée matrice de passage.*

Exemples 2.2

1. *Considérons les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors l'égalité matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

Ainsi A est diagonalisable.

2. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, en effet si elle est diagonalisable, il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$ sont forcément des valeurs propres de A et sont donc tous égaux à $\lambda = 1$ (qui est l'unique valeur propre de A). Alors $A = PI_2P^{-1} = I_2$, or ce n'est pas le cas, par conséquent la matrice A n'est pas diagonalisable.*

2.5.2 Critères de diagonalisation

L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour la diagonalisabilité d'un endomorphisme.

Proposition 2.5 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f. Soient $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres correspondants. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable est que*

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_p}) = \dim(E).$$

Preuve. ($\Rightarrow$) Soient $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et $n = \dim(E)$. Supposons f diagonalisable et montrons que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$. Puisque f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f telle que la matrice associée à f dans cette base est diagonale. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_p$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_f(\lambda) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda)^{m_i},$$

d'où $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ puisque χ_f est un polynôme de degré n. Donc il suffit de montrer que $n_i = m_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ pour déduire que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.

- Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ les m_i vecteurs propres de $\mathcal{B}$ correspondant aux valeurs propres λ_i forment une famille libre. On a donc nécessairement

$$n_i \geq m_i \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}. \tag{2.2}$$

- D'après la proposition 2.3, la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre à laquelle il est associé. On a donc aussi :

$$n_i \leq m_i \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}. \tag{2.3}$$

De (2.2) et (2.3) on déduit que $n_i = m_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.
($\Leftarrow$) Supposons que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ et montrons que f est diagonalisable. Soient

$$\mathcal{B}_1(v_i^{(1)})_{1 \leq i \leq n_1}, \mathcal{B}_2(v_i^{(2)})_{1 \leq i \leq n_2}, \dots, \mathcal{B}_p(v_i^{(p)})_{1 \leq i \leq n_p}$$

des bases respectives des sous-espaces $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$. Tous les vecteurs appartenant à ces bases sont des vecteurs propres. On considère la famille $\mathcal{B}$ formée de l'ensemble des p bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$.

$$\mathcal{B} = \Big(\underbrace{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}}_{\in E_{\lambda_1}}, \underbrace{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}}_{\in E_{\lambda_2}}, \dots, \underbrace{v_1^{(p)}, v_2^{(p)}, \dots, v_{n_p}^{(p)}}_{\in E_{\lambda_p}} \Big)$$

C'est une famille libre dans E. Or, $card(\mathcal{B}) = card(\mathcal{B}_1) + card(\mathcal{B}_2) + \cdots + card(\mathcal{B}_p) = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ et par hypothèse $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, alors on obtient $card(\mathcal{B}) = n$. Donc la famille (de vecteurs propres) $\mathcal{B}$ est effectivement une base de E, car toute famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base, cela termine la démonstration. ■

Remarque 2.4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si E est la somme directe des sous-espaces propres de f.*

On déduit immédiatement de la proposition 2.5 une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Corollaire 2.3 *Si un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.*

Preuve. Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors une famille de vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres est libre et de cardinal n donc c'est une base. On a trouvé une base de vecteurs propres de f donc f est diagonalisable. ■

Exemples 2.3

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

   La matrice A possède ainsi une valeur propre simple ($\lambda_1 = 3$, on a donc $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$) et une valeur propre double ($\lambda_2 = 2$). On vérifie facilement que $E_{\lambda_1} = Vect((1,1,-2))$ et $E_{\lambda_2} = Vect((1,0,0))$. On a donc $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$. La matrice A n'est pas diagonalisable car

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3).$$

2. *Reprenons l'exemple de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ (valeur propre simple) et $\lambda_2 = 2$ (valeur propre double) et $E_{\lambda_1} = Vect((1,1,1))$ et $E_{\lambda_2} = Vect\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Cette matrice est diagonalisable car

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) = 1 + 2 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Définition 2.8 (Polynôme scindé) *Le nombre de racines (comptées avec multiplicité) d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré p est au plus p. Si le polynôme P a exactement p racines (comptées avec multiplicité), on dit que le polynôme P est* ***scindé****.*

Corollaire 2.4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si son polynôme caractéristique χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.*

Preuve. Les racines de χ_f sont les valeurs propres de f. L'hypothèse implique que f admet n valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable d'après le résultat précédent. ■

On utilise aussi souvent la caractérisation suivante.

Théorème 2.1 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Soient $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres correspondants. Alors f est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

(i) Le polynôme caractéristique χ_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$.

(ii) Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

2.6 Exercices

Exercice 13. Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(u) = (4z, x + 2y + z, 2x + 4y - 2z).$$

1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$.
2. Montrer que f est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de f.
3. Soit $\mathcal{B}'$ une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f et considérons l'endomorphisme $g = f^3 - 9f + \mathrm{Id}$ où $f^3 = f \circ f \circ f$. Calculer la matrice associée à g dans $\mathcal{B}'$ et en déduire la matrice associée à g dans $\mathcal{B}$.

Exercice 15. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour un élément P de E, on considère $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
1. Monter que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f.

Exercice 16. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f et g des endomorphismes de E vérifiant :

$$f \circ g = g \circ f.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. En déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 17. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. Pour $\alpha = 2$. Calculer A_2^k, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & cd \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que f soit diagonalisable. Que peut-on dire lorsque f n'est pas diagonalisable ?

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $u, v \in E - \{0\}$ tel que $f(u) = u$ et $f(v) = -v$. Montrer que f est diagonalisable.

2.7 Trigonalisation d'un endomorphisme

2.7.1 Définitions et exemples

Définition 2.9

1. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. est dit* ***trigonalisable*** *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.*
2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* ***trigonalisable*** *si elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$, et s'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $T = P^{-1}AP$.*

Exemple 2.4 *Considérons les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors l'égalité matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P}.$$

Ainsi A est trigonalisable.

2.7.2 Caractérisation de la trigonalisation

Théorème 2.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (i.e. χ_f se décompose en un produit de polynômes du premier degré).*

Preuve. ($\Rightarrow$) Si f est trigonalisable alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Utilisons $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ pour calculer le polynôme caractéristique de f. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_f(\lambda) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda),$$

puisque $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire, ce qui montre que χ_f est scindé.
($\Leftarrow$) Supposons le polynôme caractéristique de f scindé sur $\mathbb{K}$ et montrons qu'il existe alors une base de E relativement à laquelle la matrice associée à f est triangulaire. Utilisons pour cela un raisonnement par récurrence sur la dimension n de l'espace E. Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Supposons-le vérifié pour les espaces de dimension $n-1$ avec $n \geq 2$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé. Donc f possède au moins une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Désignons par v_1 un vecteur propre de f associé à λ_1. Complétons v_1 par des vecteurs $v_2, \dots, v_n$ pour que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ soit une base de E. Alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & m_{12} & \dots & \dots & \dots & m_{1n} \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & M & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Donc $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \det(M - \lambda I_{n-1})$. D'autre part on a $E = \mathbb{K}v_1 \oplus F$ où $F = Vect(v_2, \dots, v_n)$. Soit g l'endomorphisme de E défini par :

$$Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & M & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Remarquons que pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$:

$$f(v_i) = m_{1i}v_1 + g(v_i).$$

Ainsi pour tout $u \in F$ il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f(u) = av_1 + g(u).$$

D'autre part on a évidemment $g(F) \subset F$. Donc $g_{|_F} \in \mathcal{L}(F)$ et $Mat_{\{v_2,\ldots,v_n\}}(g_{|_F}) = M$. Or $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\det(M - \lambda I_{n-1}) = (\lambda_1 - \lambda)\chi_M(\lambda)$. Comme χ_f est scindé, il s'ensuit que χ_M est scindé et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe une base $(v'_2, \ldots, v'_n)$ de F telle que :

$$Mat_{\{v'_2,\ldots,v'_n\}}(g_{|_F}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Comme $E = \mathbb{K}v_1 \oplus F$, $\mathcal{B}' = \{v_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ est une base de E. Pour tout $j \in \{2, \ldots, n\}$ il existe $a_{1j} \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f(v'_j) = a_{1j}v_1 + g(v'_j) = a_{1j}v_1 + \sum_{i=2}^{j} \alpha_{ij}v'_i.$$

Il s'ensuit que $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire supérieure. ■

Corollaire 2.5 *Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable sur* $\mathbb{C}$.

Preuve. C'est une conséquence du fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (i.e. tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé). ■

Remarque 2.5 *Si un endomorphisme f est trigonalisable alors sa matrice dans une base appropriée est triangulaire supérieure et sur la diagonale principale figurent les valeurs propres de f, chacune d'elle y figurant autant de fois que son ordre de multiplicité dans χ_f.*

Corollaire 2.6 *Si χ_f est scindé, c'est-à-dire si $\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)$, alors*

$$tr(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \text{et}\ \det(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Preuve. Soit A la matrice associé à l'endomorphisme f, alors

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda) \tag{2.4}$$

Le coefficient de λ^{n-1} dans (2.1) est $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ car, dans le calcul du déterminant, seul le produit des éléments de la diagonale de $(A-\lambda I)$ donne un terme en λ^{n-1}. D'autre part, le coefficient de λ^{n-1} dans (2.4) est $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. D'après la relation (2.1), on a $\chi_A(0) = \det(A)$. D'autre part avec (2.4), on obtient $\chi_A(0) = (\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - 0)\dots(\lambda_n - 0) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$. ■

En pratique, pour trigonaliser un endomorphisme ou une matrice, on procèdera en suivant pas à pas les étapes de l'exemple traité au paragraphe suivant

Exemple 2.5 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2\times L_1 - L_2 \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En développant par rapport à la troisième colonne on trouve

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

Cherchons le sous-espace $E_{\lambda_1} = \ker(A - 3I_3)$ *associé à* $\lambda_1 = 3$ *qui est a priori une droite vectorielle représentée par*

$$(A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 10y + 8z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \end{cases} \iff 2x = y = z.$$

D'où $E_{\lambda_1} = Vect(u_1)$ *avec* $u_1 = (1,2,2)$.
Le sous-espace $E_{\lambda_2} = \ker(A + I_3)$ *associé à* $\lambda_2 = -1$*, valeur propre double,*

peut a priori être de dimension 1 *ou* 2*. Le système qui le définit est*

$$(A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x-3y+4z=0 \\ 4x-6y+8z=0 \\ 6x-7y+8z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=2x \end{cases}$$

Donc $E_{\lambda_2} = Vect(u_2)$ *avec* $u_2 = (1,2,1)$*. Ce sous-espace étant de dimension inférieure à* 2*, ordre de la valeur propre* -1*,* A *n'est pas diagonalisable.*
En prenant pour base (u_1,u_2,u_3) *où* u_3 *est un vecteur quelconque indépendant de* u_1 *et* u_2 *on aura la matrice triangulaire semblable à* A *:*

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour préciser la matrice de passage ainsi que a *et* b*, prenons pour* u_3 *par exemple le vecteur* e_1 *de la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*, ce choix est acceptable car dans cette base*

$$\det(u_1,u_2,e_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Remarquons que $u_3 = e_2$ *convient aussi, mais pas* $u_3 = e_3$*. La matrice de passage est donc* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
On peut trouver a *et* b *en écrivant*

$$T = P^{-1}AP,$$

mais il est plus simple de remarquer que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= au_1 + bu_2 - e_1 \\ &= e_1 + 4e_2 + 6e_3 \end{aligned}$$

avec

$$u_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad u_3 = e_1$$

donc $e_3 = u_1 - u_2,\ e_1 = u_3$ *et*

$$u_2 = u_3 + 2e_2 + u_1 - u_2 \implies e_2 = -\frac{1}{2}u_1 + u_2 - \frac{1}{2}u_3$$

donc

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(e_3) = u_3 + 4\Big(-\frac{1}{2}u_1 + u_2 - \frac{1}{2}u_3\Big) + 6(u_1 - u_2) \\ &= 4u_1 - 2u_2 - u_3 \end{aligned}$$

Ainsi $a = 4$, $b = -2$ *et* $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Notons qu'il y a une infinité de changements de base permettant de trigonaliser une matrice donnée.

Pour plus d'exemples sur la trigonalisation des endomorphismes voir l'exercice 21, page 48.

2.8 Polynôme annulateur, polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton

2.8.1 Polynômes d'endomorphismes

Soit f un endomorphisme de E. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k est défini par récurrence de la façon suivante :

1. $f^0 = \mathrm{Id}$.
2. Pour tout entier $k \geq 1$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

On a alors les propriétés suivantes, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a :

1. $f^p \circ f^q = f^{p+q} = f^q \circ f^p$.
2. $(f^p)^q = f^{pq} = (f^q)^p$.

Définition 2.10 *Soit* $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$.

1. *On appelle polynôme de l'endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tout endomorphisme de la forme :*

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$$

2. *De même si* A *est une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on pose*

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.$$

Proposition 2.6 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors*

1. $(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$.
2. $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f) = (QP)(f)$.
3. *Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors $Mat_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.*

Remarque 2.6 *Cette proposition ne dit rien d'autre que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_f : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & P(X) & \longmapsto & P(f) \end{array}$$

1. *est une application linéaire du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ dans le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.*
2. $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\Phi_f(PQ) = \Phi_f(P) \circ \Phi_f(Q)$.
3. $\Phi_f(1) = f^0 = Id$.

2.8.2 Polynôme annulateur

Définition 2.11 *On dit qu'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est un polynôme **annulateur** de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ si $P(A) = 0$, ou si $P(f) = 0$.*

Exemples 2.4

1. *Si $p : E \longrightarrow E$ est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p car $p^2 = p$.*
2. *Si $f : E \longrightarrow E$ est une involution (un endomorphisme de E, vérifiant $f^2 = Id.$), $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f.*

Proposition 2.7 *Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.*

Preuve. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Alors, la famille $(f^k)_{0 \leq k \leq n^2}$ comporte $n^2 + 1$ vecteurs de l'espace $\mathcal{L}(E)$, lequel est de dimension n^2 : elle est alors liée. Il existe donc une famille de $(a_k)_{0 \leq k \leq n^2} \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ de scalaires non tous nuls telle que

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0.$$

Par conséquent, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est annulateur de f.

$\blacksquare$

Nous verrons dans le paragraphe suivant (théorème de Cayley-Hamilton) qu'en dimension n, on peut déterminer un polynôme annulateur de degré $\leq n$ (le polynôme caractéristique).

2.8.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton a été introduit par Hamilton[1] dans le cas particulier d'un espace vectoriel E de dimension 4, plus tard Cayley[2] a donné une version dans le cas général d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 2.3 (Cayley-Hamilton) *Soit f un endomorphisme de E, alors :*

$$\chi_f(f) = 0.$$

De même si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit de montrer le théorème dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1ère démonstration (par la formule de la comatrice).

Commençons par rappeler la formule de la comatrice.

Proposition 2.8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors*

$$A\,{}^tCom(A) = \det(A) I_n. \tag{2.5}$$

Appliquons la formule (2.5) à la matrice $A - XI_n \in M_n(\mathbb{K}[X])$ et adoptons les notations suivantes :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X].$$

$${}^tCom(A - XI_n) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k X^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]).$$

Alors, le polynôme

$$(A - XI_n)\,{}^tCom(A - XI_n) = \sum_{k=0}^{n} (AA_k - A_{k-1}) X^k,$$

1. William Rowan Hamilton (1805-1865) : Mathématicien, physicien et astronome irlandais.
2. Arthur Cayley (1821-1895) : Mathématicien britannique.

avec la convention $A_{-1} = A_n = 0$ coïncide avec $\chi_A(X)I_n$. En identifiant les coefficients, on obtient, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$AA_k - A_{k-1} = a_k I_n.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}
\chi_A(A) &= \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (AA_k - A_{k-1})A^k \\
&= A^{n+1}A_n - A^0 A_{-1} = 0
\end{aligned}$$

car « tout se simplifie » . ■

2ème démonstration (par les matrices triangulaires).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ dans laquelle $T = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f telles que :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ O & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Posons $V_0 = \{0\}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, soit $V_k := Vect(e_1, \dots, e_n)$. Alors on a

$$(f - \lambda_k \mathrm{Id})(V_k) \subset V_{k-1}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

En effet, soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, k\}$. Comme T est triangulaire supérieure il existe des scalaires $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{jj}$ tels que :

$$(f - \lambda_k \mathrm{Id})(e_j) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} e_i - \lambda_k e_j.$$

Si $j < k$, alors $(f - \lambda_k \mathrm{Id})(e_j) \in V_{k-1}$. Si $j = k$, comme $\alpha_{kk} = \lambda_k$, on a aussi $(f - \lambda_k \mathrm{Id})(e_j) \in V_{k-1}$.

Poursuivons maintenant la preuve du théorème. Soit maintenant $x \in E = V_n$. Alors

$$\begin{aligned}
(f - \lambda_n \mathrm{Id})(x) \in V_{n-1} \quad , \quad & (f - \lambda_{n-1}\mathrm{Id}) \circ (f - \lambda_n \mathrm{Id})(x) \in V_{n-2}, \dots, \\
& (f - \lambda_2 \mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (f - \lambda_n \mathrm{Id})(x) \in V_1
\end{aligned}$$

Comme V_1 n'est rien d'autre que le sous-espace propre associé à λ_1 on a :

$$(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (f - \lambda_n \mathrm{Id})(x) = 0,$$

et comme $\chi_f(f)(x) = (-1)^n (f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (f - \lambda_n \mathrm{Id})(x)$, il s'ensuit que $\chi_f(f) = 0$. ■

2.8.4 Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

2.8.4.1 Calcul de l'inverse

Proposition 2.9 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un polynôme annulateur P tel que*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k, \ \text{avec } d > 0 \text{ et } a_0 = P(0) \neq 0.$$

Alors

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}.$$

Preuve. Puisque

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0$$

il vient

$$\left(\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1} \right) A = -a_0 I_n$$

et donc, en fait

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}.$$

■

Exemple 2.6 *Calculons l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de A que l'on suppose non identiquement nul (on peut prendre par exemple $P = \chi_A$, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton).

On a : $\chi_A(X) = X^3 + 1$, *donc* $\chi_A(A) = A^3 + I_3 = 0$, *on en déduit que* $A^{-1} = A^2$. *Finalement, on obtient*

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.8.4.2 Calculs de puissances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un polynôme annulateur P de degré d. Alors on peut calculer A^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k sans effectuer aucune réduction de la matrice A et ceci en se servant seulement du polynôme P. En effet, d'après la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$X^k = Q_k(X)P(X) + R_k(X)$$

avec $\deg(R_k) < \deg(P) = d$. Alors on trouve $A^k = R_k(A)$.

Exemple 2.7 *Déterminons les puissances d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *de polynôme annulateur* $(X-\alpha)^2$.

Le reste de la division euclidienne de X^k *par* $(X-\alpha)^2$ *est un polynôme de degré au plus* 1 *que nous noterons* $aX + b$. *On a donc :*

$$X^k = Q(X)(X-\alpha)^2 + aX + b.$$

Reste à déterminer les valeurs des complexes a et b. Pour cela, nous spécifions cette relation en α *puis dérivons cette relation avant de spécifier en* α *(tous les termes où apparaît* Q *s'annulent, car* α *est racine double de* $(X-\alpha)^2$*). Nous obtenons :*

$$\begin{cases} \alpha^k = \alpha a + b \\ k\alpha^{k-1} = a \end{cases}$$

Finalement $A^k = k\alpha^{k-1}A + (1-k)\alpha^k I_n$.

2.8.5 Polynôme minimal

Comme l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est euclidien, il est en particulier principal, donc chaque idéal de $\mathbb{K}[X]$ peut être engendré par un unique polynôme unitaire de degré minimal.

Proposition 2.10 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Considérons le sous-ensemble de* $\mathbb{K}[X]$ *suivant :*

$$\mathcal{I}(f) = \{P \in \mathbb{K}[X];\ P(f) = 0\}.$$

Alors

1. $\mathcal{I}(f) \neq \{0\}$.
2. $\mathcal{I}(f)$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$ *appelé idéal* ***annulateur*** *de* f.

Preuve.
1. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$. Comme $\deg \chi_f = n$, χ_f est un polynôme non nul et $\mathcal{I}(f) \neq \{0\}$.
2. L'ensemble $\mathcal{I}(f)$ est clairement un sous-groupe additif de $\mathbb{K}[X]$. Si $P \in \mathcal{I}(f)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $QP \in \mathcal{I}(f)$, car

$$(QP)(f) = Q(f) \circ P(f) = 0.$$

■

Définition 2.12 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Le polynôme* ***minimal*** *de* f *est l'unique polynôme unitaire de degré minimal, noté* μ_f, *qui engendre* $\mathcal{I}(f)$.
Autrement dit μ_f *est l'unique polynôme unitaire de plus bas degré annulant* f.

Exemple 2.8 *Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- *Tout d'abord, le polynôme caractéristique de* A *est* $\chi_A(X) = (X-2)$. *D'où*
$$\mu_A(X) = (X-2) \text{ ou } (X-2)^2$$
et puisque $A - 2I_2 \neq 0$, *alors* $\mu_A(X) = \chi_A(X) = (X-2)^2$.
- *Comme* $\chi_B(X) = (X-3)^2(X-6)$, *alors*
$$\mu_B(X) = (X-3)(X-6) \text{ ou } (X-3)^2(X-6).$$
Or $(A-3I_3)(A-6I_3) = 0$. *Donc* $\mu_B(X) = (X-3)(X-6)$.

Proposition 2.11 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Le polynôme minimal* μ_f *de* f *divise tout polynômes annulateurs de* f. *En particulier,* μ_f *divise le polynôme caractéristique* χ_f *de* f.

Preuve. Soit P un polynôme annulateur de f et montrons que μ_f divise P. Pour ce faire, on considère la division euclidienne de P par μ_f, qui s'écrit :

$$P = Q\mu_f + R,$$

où $\deg R < \deg \mu_f$. On a :

$$0 = P(f) = \underbrace{Q(f)\mu_f(f)}_{=0} + R(f) \implies R(f) = 0$$

et $R(X)$ est un polynôme annulateur de f de degré $< \deg \mu_f$. Forcément, $R = 0$ et $\mu_f(X)$ divise $P(X)$.
En particulier (d'après le théorème de Cayley-Hamilton) le polynôme caractéristique χ_f de f est un polynôme annulateur de f alors (en vertu de ce qui précède) μ_f divise χ_f. ■

Proposition 2.12 *Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont exactement les mêmes racines.*

Preuve. Soit λ une racine de χ_f. Alors λ est une valeur propre de f. Soit x un vecteur propre de f associé à λ. Il est facile de voir que pour tout entier $i \geq 0 : f^i(x) = \lambda^i x$. Donc si $\mu_f(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, alors

$$0 = \mu_f(f)(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i(x) = \Big(\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i\Big) x = \mu_f(\lambda)x.$$

Comme x est non nul car x est un vecteur propre, $\mu_f(\lambda) = 0$ et λ est une racine de μ_f.
Réciproquement, comme μ_f divise χ_f, les racines de μ_f sont des racines de χ_f. ■

Comment trouver le polynôme minimal d'un endomorphisme ?

Théorème 2.4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$:*

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} (X - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts, et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$. Alors

$$\mu_f(X) = (X - \lambda_1)^{\beta_1} (X - \lambda_2)^{\beta_2} \dots (X - \lambda_k)^{\beta_k}$$

pour certains entiers : $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$.

Preuve. On note $\beta_1, \dots, \beta_k$ les multiplicités de $\mu_f(X)$ en les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. On a déjà vu que $1 \leq \beta_i$ car $\mu_f(\lambda_i) = 0$. On a aussi $\beta_i \leq \alpha_i$, la multiplicité de λ_i dans $\chi_f(X)$ car μ_f divise χ_f. ■

Remarque 2.7 *Pour trouver μ_f, on applique à l'endomorphisme f chacun des polynômes ayant la forme précédente et ceci en respectant l'ordre croissant de leurs degrés. On s'arrête dés qu'on tombe sur le premier polynôme qui annule f et ce sera le polynôme minimal de f recherché.*

Exemple 2.9 *On cherche le polynôme minimal de la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans les différents cas suivants.*

A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi_A(X)$	X^4	X^4	X^4
$\mu_A(X)$	X^2	X^3	X^4

2.8.6 Nouveau critère de diagonalisation

Théorème 2.5 (Lemme de décomposition des noyaux) *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux et $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ Alors :*

$$\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(f)).$$

(énoncé similaire avec des matrices)

Preuve. Si $k = 1$, le résultat est évident.
Si $k = 2$, alors $P = P_1 P_2$ et P_1 et P_2 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout[3], il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que :

$$Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = 1.$$

Il s'ensuit que :

$$Q_1(f) \circ P_1(f) + Q_2(f) \circ P_2(f) = \mathrm{Id}.$$

Soit $x \in \ker(P_1(f)) \cap \ker(P_2(f))$ Alors la relation précédente entraîne que :

$$x = Q_1(f)(P_1(f)(x)) + Q_2(f)(P_2(f)(x)) = 0.$$

3. Étienne Bézout (1730-1783) : Mathématicien français.

Donc $\ker(P_1(f))$ et $\ker(P_2(f))$ sont en somme directe.
Montrons maintenant que $\ker(P(f)) \subset \ker(P_1(f)) + \ker(P_2(f))$:
Soit $x \in \ker(P(f))$, alors :

$$x = Q_1(f)(P_1(f)(x)) + Q_2(f)(P_2(f)(x)).$$

Or :

$$P_2(f)(Q_1(f)(P_1(f)(x))) = Q_1(f)(P(f)(x)) = 0.$$

Donc $Q_1(f)(P_1(f)(x)) \in \ker(P_2(f))$. De même $Q_2(f)(P_2(f)(x)) \in \ker(P_1(f))$.
Finalement $x \in \ker(P_1(f)) + \ker(P_2(f))$.
Montrons que $\ker(P_1(f)) + \ker(P_2(f)) \subset \ker(P(f))$:
Soit $x \in \ker(P_1(f))$, alors $P(f)(x) = P_2(f)(P_1(f)(x)) = 0$ donc $x \in \ker(P(f))$ et $\ker(P_1(f)) \subset \ker(P(f))$. De même $\ker(P_2(f)) \subset \ker(P(f))$. Donc $\ker(P_1(f)) + \ker(P_2(f)) \subset \ker(P(f))$. On a donc montré que :

$$\ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f)).$$

Soit $k \geq 3$ et supposons le théorème démontré au rang k. Montrons que le résultat est vrai au rang $k+1$. Soit donc $P = \bigoplus_{i=1}^{k+1} P_i$, avec $P_1, \dots, P_k, P_{k+1}$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Le fait que le polynôme P_{k+1} est premier avec chacun des polynômes P_i $(1 \leq i \leq k)$ entraîne qu'il est premier avec leur produit $P_1 P_2 \dots P_k$. Il s'ensuit (d'après le cas "$k = 2$" déjà démontré du théorème) que l'on a :

$$\ker P(f) = \ker(P_1 P_2 \dots P_k)(f) \oplus \ker P_{k+1}(f).$$

Mais comme $\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(f))$. (d'après l'hypothèse de récurrence), il en résulte que :

$$\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k+1} \ker(P_i(f)).$$

■

Nous arrivons maintenant à l'importante nouvelle caractérisation des endomorphismes diagonalisables annoncée au titre de cette section.

Théorème 2.6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples.*

Preuve. $(\Rightarrow)$ Supposons que f est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de f (comptées sans multiplicité - autrement dit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

sont distincts). Considérons le polynôme :

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k).$$

Comme f est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$. Donc soit $x \in E$, alors il existe $(x_1, \dots, x_k) \in E_{\lambda_1}(f) \times \dots \times E_{\lambda_k}(f)$ tels que :

$$x = x_1 + \dots + x_k.$$

Or :

$$P(f)(x_i) \left(\prod_{\substack{1 \le i \le k \\ j \ne i}} (f - \lambda_j \mathrm{Id}) \right) ((f - \lambda_i \mathrm{Id})(x_i)) = 0.$$

Donc $P(f)(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et $P(f) = 0$. Donc P est un polynôme annulateur de f et μ_f divise P. Comme les racines de μ_f sont exactement les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il s'ensuit que $\mu_f = P$ et μ_f est scindé et n'a que des racines simples.
($\Leftarrow$) Supposons que μ_f est scindé et n'a que des racines simples. Alors :

$$\mu_f(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k).$$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, sont les valeurs propres de f. D'après le théorème 2.5 :

$$E = \ker(\mu_f)(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f).$$

Donc E est la somme directe des sous-espaces propres de f ce qui signifie que f est diagonalisable. ■

Corollaire 2.7 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de f qui est scindé et qui n'admet que des racines simples.*

Preuve. ($\Rightarrow$) On suppose que f est diagonalisable. Alors d'après le théorème précédent μ_f est scindé et n'a que des racines simples. De plus c'est un polynôme annulateur.
($\Leftarrow$) Réciproquement supposons qu'il existe un polynôme annulateur P de f qui est scindé et qui n'admet que des racines simples. Comme μ_f divise P, il s'ensuit que μ_f est scindé et n'a que des racines simples ce qui implique d'après le théorème précédent que f est diagonalisable. ■

Exemples 2.5

1. *Les projecteurs et les involutions sont diagonalisables car ils admettent des polynômes annulateurs scindés à racines simples (respectivement* $X^2 - X$ *et* $X^2 - 1$*).*
2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonalisable et* G_A *l'endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par* $G_A(M) = AM$ *(multiplication à gauche par* A*). Montrons que* G_A *est diagonalisable.*
   Comme A *est diagonalisable, il existe un polynôme* P *scindé à racines simples, annulateur de* A*.*
   Un simple calcul donne que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(G_A)(M) = P(A)M = 0$ *(c'est-à-dire* $G_{P(A)} = P(G_A)$*), donc* P *est aussi annulateur de* G_A *qui est donc diagonalisable d'après la caractérisation précédente.*
3. *Le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable est l'endomorphisme nul. En effet, si* f *est un tel endomorphisme, alors* f *admet un polynôme annulateur scindé à racines simples* P *et un polynôme annulateur de la forme* X^m*. D'où,* P *divise* X^m *et par conséquent* $P = X$*. D'où* f *est l'endomorphisme nul.*

2.9 Exercices

Exercice 21. Trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 22. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que f^2 est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Exercice 23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet le polynôme anumulateur $X^3 - X - 1$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$tr(A) = tr(A^2) = \cdots = tr(A^{n-1}).$$

Montrer que A est diagonalisable ou nilpotente.

Exercice 25. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on définie l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ associé par composition $G_f : g \to f \circ g$. Montrer que $\mu_f = \mu_{G_f}$.

Exercice 26. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $\mu_A = X^2 - tr(A)X$.
2. En déduire les puissances de A en fonction de A et I_n.

Exercice 27. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$
Pour chacune de ces matrices, dire si elle est diagonalisable ou non.

Exercice 28. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
2. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, exprimer A^n, en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$.)

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -3 \\ -2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. En déduire le polynôme minimal de A.
3. En utilisant le polynôme minimal de A, calculer A^{-1}.

2.10 Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

2.10.1 Sous-espaces caractéristiques

Dans ce paragraphe f est un endomorphisme de E tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres (distinctes) de f. Alors :

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \ \mu_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}.$$

On note d'autre part :

$$C_{\lambda_i}(f) := \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}, \ \text{ et } M_{\lambda_i}(f) := \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i}.$$

On a bien entendu $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Définition 2.13 *Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. Le sous-espace vectoriel $C_{\lambda_i}(f)$ s'appelle le* ***sous-espace caractéristique*** *de f associé à la valeur propre λ_i.*

Remarque 2.8

- *D'après le paragraphe précédent, il est immédiat que :*

$$E_{\lambda_i}(f) \subset M_{\lambda_i}(f) \subset C_{\lambda_i}(f).$$

- *$C_{\lambda_i}(f)$ et $M_{\lambda_i}(f)$ sont stable par f (i.e. $f(C_{\lambda_i}(f)) \subset C_{\lambda_i}(f)$ et $f(M_{\lambda_i}(f)) \subset M_{\lambda_i}(f)$). En effet, soit $x \in C_{\lambda_i}(f)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$,*

$$(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(f(x)) = f \circ (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0.$$

Proposition 2.13 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

1. Pour tout entier $k \geq 0$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.

2. Si j est un entier tel que $\ker(f^j) = \ker(f^{j+1})$, alors :

$$\forall k \geq j, \ \ker(f^j) = \ker(f^k).$$

3. Soit i_0 le plus petit entier tel que $\ker(f^{i_0}) = \ker(f^{i_0+1})$. Alors $i_0 \leq \dim(E)$.

Preuve.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \ker(f^k)$, alors :

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0.$$

Donc $x \in \ker(f^{k+1})$ et $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.

2. Supposons que $\ker(f^j) = \ker(f^{j+1})$. Montrons que pour tout $k \geq j$, $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Soit $x \in \ker(f^{k+1})$ alors :

$$f^{k+1}(x) = f^{j+1}(f^{k-j}(x)) = 0.$$

Donc $f^{k-j}(x) \in \ker(f^{j+1})$, mais comme $\ker(f^j) = \ker(f^{j+1})$, $f^{k-j}(x) \in \ker(f^j)$, et :

$$f^j(f^{k-j}(x)) = 0 = f^k(x).$$

Donc $x \in \ker(f^k)$ et $\ker(f^{k+1}) \subset \ker(f^k)$. Mais d'après 1. on a aussi $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$. Finalement $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$.

3. Soit i_0 le plus petit entier tel que $\ker(f^{i_0}) = \ker(f^{i_0+1})$. Considérons l'application :

$$F : \begin{array}{lll} \{0, \ldots, i_0\} & \longrightarrow & \{0, \ldots, n\} \\ k & \longrightarrow & \dim(\ker(f^k)) \end{array}.$$

D'après le point précédent, on a :

$$\dim(\ker(f^0)) < \cdots < \dim(\ker(f^{i_0})).$$

Donc F est injective et il s'ensuit que $i_0 \leq n$.

■

Définition 2.14 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **indice** de f le plus petit entier i_0 tel que* $\ker(f^{i_0}) = \ker(f^{i_0+1})$.

Définition 2.15 *On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier p tel que $f^p = 0$.*

Remarque 2.9

- *Si $i_0 > 0$, alors d'après la définition de i_0 et la proposition 2.13 on a pour tout $p \geq 1$:*

$$\{0\} = \ker(f^0) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(f^{i_0}) = \ker(f^{i_0+1}) = \cdots = \ker(f^{i_0+p})$$

- *Si f est nilpotente, l'indice i_0 de f n'est autre que* $\inf\{p;\ f^p = 0\}$, *c'est-à-dire l'indice de nilpotence de f.*

Théorème 2.7 *Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. L'ordre de multiplicité β_i de λ_i dans μ_f est l'indice de l'endomorphisme $(f - \lambda_i Id)$. En particulier on a :*

$$C_{\lambda_i}(f) = M_{\lambda_i}(f).$$

Preuve. Les polynômes des ensembles $\{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\ ;\ 1 \leq i \leq k\}$ et $\{(X-\lambda_i)^{\beta_i}\ ;\ 1 \leq i \leq k\}$ sont premiers deux à deux. Comme χ_f et μ_f sont des polynômes annulateurs on a $\ker(\chi_f(f)) = \ker(\mu_f(f))$ et d'après le théorème 2.5 on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} C_{\lambda_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} M_{\lambda_i}(f).$$

Donc

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{k} \dim(C_{\lambda_i}(f)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(M_{\lambda_i}(f)).$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{k} (\dim(C_{\lambda_i}(f)) - \dim(M_{\lambda_i}(f))) = 0.$$

Comme $\dim(C_{\lambda_i}(f)) - \dim(M_{\lambda_i}(f)) \geq 0$, on a $\dim(C_{\lambda_i}(f)) = \dim(M_{\lambda_i}(f))$ et $C_{\lambda_i}(f) = M_{\lambda_i}(f)$ On en déduit donc que l'indice i_0 de $(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ vérifie $i_0 \leq \beta_i$.

Supposons que $i_0 < \beta_i$. Cela signifie alors que $\ker(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i - 1} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i}$. Considérons alors le polynôme :

$$Q(X) = \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ j \neq i}} (X - \lambda_j \mathrm{Id})^{\beta_j} \right) (X - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i - 1}$$

Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{j=1}^{k} M_{\lambda_j}(f)$, il existe $(x_1, \dots, x_k) \in M_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times M_{\lambda_k}(f)$ tel que : $x = x_1 + \cdots + x_k$. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$. avec $j \neq i$ on a $(f - \lambda_j \mathrm{Id})^{\beta_j}(x_j) = 0$ et comme $\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i - 1} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i} = M_{\lambda_i}(f)$ on a $(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i - 1}(x_i) = 0$. Donc pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ $Q(f)(x_j) = 0$ et :

$$Q(fu)(x) = 0.$$

Ceci pour tout $x \in E$. Donc Q est un polynôme annulateur de f. Mais $\deg(Q) < \deg(\mu_f)$ ce qui contredit la définition de μ_f. Donc $i_0 = \beta_i$. ∎

Théorème 2.8 *Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on a :*

$$\dim(C_{\lambda_i}(f)) = \alpha_i$$

α_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i.

Preuve. On montre d'abord que $\dim(C_{\lambda_i}(f)) \leq \alpha_i$ par une preuve analogue à celle de la proposition 2.3 : posons $n_i = \dim(C_{\lambda_i}(f))$. Comme $C_{\lambda_i}(f)$ est stable par f, la restriction $f_i = f_{|C_{\lambda_i}(f)}$ est un endomorphisme de $C_{\lambda_i}(f)$. De plus on a $\ker(f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_{\lambda_i}(f)})^{\alpha_i} = C_{\lambda_i}(f)$. Donc le polynôme $Q(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est un polynôme annulateur de f_i et ceci montre que λ_i est l'unique valeur propre de f_i. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $C_{\lambda_i}(f)$ dans laquelle la matrice de f_i est triangulaire supérieure. On complète $\mathcal{B}_i$ par une famille de vecteurs $\mathcal{C}$ de façon à ce que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_i \cup \mathcal{C}$ soit une base de E. Alors :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_i & a_{12} & \dots & a_{1n_i} & \\ 0 & \ddots & & \vdots & A \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n_i-1,n_i} & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \\ & & O & & B \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que :

$$\chi_f(X) = (\lambda_i - X)^{n_i} \chi_B(X)$$

et donc $(\lambda_i - X)^{n_i}$ divise $\chi_f(X)$. Cela implique que $n_i \leq \alpha_i$. On a donc :

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{k} \dim(C_{\lambda_i}(f)) = \sum_{i=1}^{k} n_i \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \dim(E).$$

On déduit que $n_i = \alpha_i$. ∎

2.10.2 Décomposition de Dunford [4]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$. Pour tout x de E il existe un unique couple $(p(x), q(x)) \in F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.

Proposition 2.14 *Les applications p et q sont des endomorphismes de E. p s'appelle le* ***projecteur*** *sur F* ***parallèlement*** *à G et q s'appelle le* ***projecteur*** *sur G* ***parallèlement*** *à F.*

Proposition 2.15 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et une famille de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1 \leq i \leq k}$ tels que :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i \text{ et } f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$$

4. Nelson Dunford (1906-1986) : Mathématicien américain.

où $(p_i)_{1\le i\le k}$ est la famille de projecteurs associée à $(F_i)_{1\le i\le k}$. Dans ce cas $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et $F_i = E_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons que f est diagonalisable. Par la proposition 2.4, E est somme directe de ses sous-espaces propres :

$$E = \bigoplus_i E_{\lambda_i}(f).$$

Si on note $F_i = E_{\lambda_i}(f)$ et (p_i) la famille de projecteurs associée à cette décomposition, il reste à montrer que $f = \sum_i \lambda_i p_i$. Pour montrer que pour tout x de E, $f(x) = \sum_i \lambda_i p_i(x)$, on peut, par linéarité, supposer qu'il existe i tel que $x \in F_i$ Alors, on a $f(x) = \lambda_i x$ et $\sum_j \lambda_j p_j(x) = \lambda_i x$. Donc l'égalité est établie.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant qu'il existe (F_i) et (λ_i) tels que

$$\begin{cases} E = \bigoplus_i F_i \\ f = \sum_i \lambda_i p_i \end{cases}$$

Alors, on vérifie comme ci-dessus que pour $x \in F_i$, on a $\sum_j \lambda_j p_j(x) = \lambda_i x$ de sorte que $F_i \subset E_{\lambda_i}(f)$. On raisonne sur les dimensions pour en déduire que $F_i = E_{\lambda_i}(f)$: l'inclusion déjà établie donne $\dim(F_i) \le \dim(E_{\lambda_i}(f))$. D'où $\dim E = \sum \dim(F_i) \le \sum \dim(E_{\lambda_i}(f)) \le \dim E$, de sorte que toutes ces inégalités sont des égalités, et donc $F_i = E_{\lambda_i}(f)$. On en déduit $E = \bigoplus_i E_{\lambda_i}(f)$ et donc que f est diagonalisable. ∎

Théorème 2.9 (Décomposition de Dunford) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique couple (d, ν) d'endomorphismes de E tel que :*

1. *$f = d + \nu$.*
2. *$d \circ \nu = \nu \circ d$.*
3. *d est diagonalisable et ν est nilpotent.*

De plus si $\mu_f(X) = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$ alors $d = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ où $(p_i)_{1\le i\le k}$ est la famille de projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k} C_{\lambda_i}(f)$ et l'indice de ν est $r = \max_{1\le i\le k}(\beta_i)$.

Preuve. Existence : On a $E = \bigoplus_{i=1}^{k} C_{\lambda_i}(f)$. Soit $(p_i)_{1\leq i\leq k}$ la famille de projecteurs associés à cette décomposition. Posons $d = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ Alors d est un endomorphisme diagonalisable (voir Proposition 2.15). Posons maintenant $\nu = f - d$. Alors :

$$\nu = f - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i = f \circ \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ p_i.$$

Montrons que $d \circ \nu = \nu \circ d$.

$$\begin{aligned}
\nu \circ d &= \left(\sum_{i=1}^{k} (f - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ p_i \right) \circ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq k} \lambda_j (f - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ p_i \circ p_j \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq k} \lambda_j (f - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ p_j \circ p_i.
\end{aligned}$$

Puisque les sous-espaces $C_{\lambda_j}(f)$ sont stables par $(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, k\}^2$, alors $(f - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ p_j = p_j \circ (f - \lambda_i \mathrm{Id})$. Donc :

$$\begin{aligned}
\nu \circ d &= \sum_{1\leq i,j\leq k} \lambda_j p_j \circ (f - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ p_i \\
&= d \circ \nu.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que ν est nilpotent d'indice $r = \max_{1\leq i\leq k} (\beta_i)$. Comme les sous-espaces $C_{\lambda_i}(f)$ sont stables par $(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$\nu^r = \sum_{i=1}^{k} (f - \lambda_i \mathrm{Id})^r \circ p_i.$$

Or $r \geq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, et β_i est l'indice de $f - \lambda_i \mathrm{Id}$ d'après le théorème 2.7. Donc $\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^r = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i} = C_{\lambda_i}(f)$.

Soit $x \in E$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $p_i(x) \in \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^r$. Donc pour tout $x \in E$, $\nu^r(x) = 0$ ce qui signifie que $\nu^r = 0$ et ν est nilpotent. Soit $j \in \{1, \ldots, k\}$, tel que $\beta_j = r$. Alors dans ce cas

$$\ker(f - \lambda_j \mathrm{Id})^{r-1} \subsetneq \ker(f - \lambda_j \mathrm{Id})^r = C_{\lambda_j}(f).$$

Donc soit $x \in C_{\lambda_j}(f) \setminus \ker(f - \lambda_j \mathrm{Id})^{r-1}$. Alors $p_i(x) = 0$ pour tout $i \neq j$ et :

$$\nu^{r-1}(x) = \sum_{i=1}^{k} (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{r-1}(p_i(x)) = (f - \lambda_j \mathrm{Id})^{r-1}(x).$$

Donc ν est nilpotent d'indice r.
Unicité : Soit (d', ν') un autre couple vérifiant les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème. On remarque d'abord que $f \circ d' = d' \circ f$, donc pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, les sous-espaces $C_{\lambda_i}(f)$ sont stables par d' (pour tout $x \in C_{\lambda_i}(f)$, $(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i}(d'(x)) = d' \circ (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i}(x) = 0$).
Comme $d|_{C_{\lambda_i}(f)} = \lambda_i \mathrm{Id}_{C_{\lambda_i}(f)}$ on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur $C_{\lambda_i}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, comme $E = \bigoplus_{i=1}^{k} C_{\lambda_i}(f)$ on en déduit, que d et d' commutent. De plus d et d' sont diagonalisables d'après la Proposition 2.15, on peut donc les diagonaliser dans une même base, ce qui prouve que $d' - d$ est, diagonalisable.

Comme $\nu = f - d$, $\nu' = f - d'$ et que $d \circ d' = d' \circ d$, ν et ν' commutent. Soient r et r' les indices de ν et ν' respectivement, on a donc :

$$(\nu - \nu')^{r+r'} = \sum_{i+j=r+r'} \binom{r+r'}{i} \nu^i (-1)^j \nu'^j = 0$$

(dans chaque terme de cette somme, on a soit, $i \geq r$, soit $j \geq r'$). Donc $\nu - \nu' = d' - d$ est nilpotent. Or nous avions montré que $d' - d$ est diagonalisable, donc $d' - d = 0$ (le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul). Autrement dit, $d = d'$ et donc $\nu = \nu'$. ∎

Exemple 2.10 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La partie diagonalisable d et la partie nilpotente ν de f sont les endomorphismes dont les matrices respectives dans la base canonique sont G et H avec

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous verrons ultérieurement (voir page 61) suivant quelle méthode nous avons obtenu les expressions des deux matrices G et H. Nous pouvons néanmoins vérifier les points suivants :

1. $A = G + H$.
2. $\chi_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(2-\lambda)$.

   La matrice G possède une valeur propre double ($\lambda_1 = 1$) et une valeur propre simple ($\lambda_2 = 2$). Elle est diagonalisable puisque $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$ *et* $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$.
3. *La matrice H est nilpotente puisque $H^2 = 0$.*
4. *Le produit des deux matrices G et H est commutatif : $G \times H = H \times G$.*

Remarque 2.10 *Attention, la décomposition de Dunford d'une matrice n'est pas simplement l'extraction des coefficients diagonaux (même si elle est triangulaire). Par exemple, la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, car elle admet trois valeurs propres distinctes (qui se lisent sur la diagonale de cette matrice triangulaire), donc est sa propre décomposition de Dunford.

2.11 Réduction de Jordan

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes deux à deux, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$. On peut affiner le résultat du théorème 2.2 et montrer que si le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{K}$ ($m_1 + \cdots + m_p = n$), alors l'endomorphisme f peut être représenté, dans une base convenable (dite base de Jordan) par une matrice (dite matrice de Jordan) diagonale par blocs de la forme :

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & J_p \end{array}\right)$$

Définition 2.16 *On appelle **bloc de Jordan** d'ordre m_i toute sous-matrice $(J_i)_{1\leq i\leq p}$ d'ordre m_i à coefficients dans $\mathbb{K}$ définie par :*

$$J_i = \lambda_i I_{m_i} + N_i,$$

où I_{m_i} désigne la matrice identité d'ordre m_i et où la matrice N_i est définie par :

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1^{(i)} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2^{(i)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \delta_{m_i-1}^{(i)} \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\delta_1^{(i)}, \ldots, \delta_{m_i-1}^{(i)} \in \{0, 1\}$.

Lorsque f est diagonalisable, on obtient simplement $\delta_1^{(i)} = \delta_2^{(i)} = \cdots = \delta_{m_i-1}^{(i)} = 0$ mais lorsque f est seulement trigonalisable, on obtient que J est la plus simple des matrices triangulaires représentant f. Donc il s'agit bien d'une réduction particulière de f qu'on nomme forme réduite de Jordan [5].En un certain sens, la réduction de Jordan est la plus poussée que l'on puisse obtenir.
Il est à noter que la réduction de Jordan fournit une version matricielle de la décomposition de Dunford (voir théorème 2.9). En effet, on remarque que l'on peut décomposer la matrice J comme la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N :

$$J = D + N,$$

avec $D \times N = N \times D$.

Théorème 2.10 (Jordan) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f ait la forme :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & J_p \end{array}\right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

5. Camille Jordan (1838-1922) : Mathématicien français

Ce qui se reformule aussi :

Théorème 2.11 (Jordan, version matricielle) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice de Jordan, c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$, telle que*

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & J_p \end{array}\right)$$

Nous admettons ces théorèmes, mais nous verrons sur des exemples comment obtenir la réduite de Jordan.

Quelques propriétés simples de blocs de Jordan J_i :

Soit χ_A le polynôme caractéristique et μ_A le polynôme minimal de A tels que :

$$\chi_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \ \mu_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}.$$

Alors

1. Le nombre de blocs de Jordan associés à λ_i est égal à $\dim \ker(A - \lambda_i)$.
2. La somme des tailles de tous les blocs de Jordan correspondant à une valeur propre λ_i est égale à sa multiplicité α_i dans χ_A.
3. Le plus grand bloc de Jordan correspondant à une valeur propre λ_i est d'ordre β_i la multiplicité de λ_i dans μ_A.

les exemples suivants montrent comment factoriser une matrice sous forme normale de Jordan :

Exemple 2.11 *Nous reprenons l'exemple 2.10 de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ (voir page 51) dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & -4 \\ -6 & -2-\lambda & 5 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

2. ***Détermination des sous-espaces propres :***
La valeur propre $\lambda_1 = 2$ *est de multiplicité* 1. *Le sous-espace propre associé* $E_{\lambda_1} = \ker(A - 2I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$ *sera de dimension* 1. *Après calculs, on trouve que* $E_{\lambda_1} = Vect(v_1)$ *où* $v_1 = (1, 1, 2)$. *Comme la multiplicité de* 2 *dans* χ_A *est* 1, *alors la valeur propre* 2 *sera juste associée à un bloc de Jordan de taille* 1×1.
La valeur propre $\lambda_2 = 1$ *est de multiplicité* 2. *Il faut déterminer le sous-espace propre associé* $E_{\lambda_2} = \ker(A - I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$ *Après calculs, on trouve que* $E_{\lambda_2} = Vect(v_2)$ *où* $v_2 = (-1, 2, 0)$. *Comme* E_{λ_2} *est un espace vectoriel de dimension* 1, *alors que* 1 *est racine de multiplicité* 2, *la matrice* A *n'est pas diagonalisable et on sait alors que la valeur propre* 1 *sera associée à un bloc de Jordan de taille* 2×2.
3. ***Base de Jordan :***

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \tag{2.6}$$

Pour déterminer P, *mettons* P *en vecteurs colonnes* $P = [v_1, v_2, v_3]$, *alors* $AP = PJ$, *ce qui donne*

$$\begin{cases} Av_1 = 2v_1 \\ Av_2 = v_2 \\ Av_3 = v_2 + v_3 \end{cases}$$

Donc on cherche $v_3 \in \mathbb{R}^3$ *tel que dans la base* $\mathcal{B}_J = (v_1, v_2, v_3)$ *on a la forme* (2.6). *Soit* $v_3 = (x, y, z)$, *alors*

$$Av_3 = v_2 + v_3 \iff (A - I_3)v_3 = v_2 \iff \begin{cases} 6x + 3y - 4z = -1 \\ -6x - 3y + 5z = 2 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Donc $v_3 = (0, 1, 1)$ *convient.*
Ainsi la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ *à* $\mathcal{B}_J$ *est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et on a} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 2.9 la forme réduite de Jordan associée à f est $J = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $J = P^{-1}AP$, d'où

$$A = PJP^{-1} = P(D + N)P^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}.$$

Posons $G = PDP^{-1}$ et $H = PNP^{-1}$. On vérifie :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{G} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{H} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

On retrouve les expressions de G et H données en page 56. Donc

$$A = G + H.$$

La matrice G (respectivement la matrice H) est la représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}_c$ de la partie diagonalisable d (resp. de la partie nilpotente ν) de l'endomorphisme f.

Exemple 2.12 *Déterminer la réduite de Jordan J de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = -(\lambda - 1)^3 (\lambda + 1)^2$, *les valeur propre de A, sont $(\lambda_1 = 1)$ triple et $(\lambda_2 = -1)$ double.*

2. Cherchons une base de vecteurs propres pour J :

- *Pour* $\lambda_1 = 1$

$$v_1 = (x,y,z,t,w) \in E_1 \iff \begin{cases} -2x-2y-3z-3t-3w=0 \\ z=0 \\ t+w=0 \\ x+y+z+t+3w=0 \\ -x-y-z-t-3w=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-y \\ y=-x \\ z=0 \\ w=0 \\ t=0 \end{cases}$$

On trouve $v_1 = (1,-1,0,0,0)$.
Cherchons v_2, v_3 *tels que* $Av_2 = v_1 + v_2 \iff (A - I_3)v_2 = v_1$, *et* $Av_3 = v_2 + v_3 \iff (A - I_3)v_3 = v_2$, *on trouve* $v_2 = (0,1,-1,0,0)$ *et* $v_3 = (0,0,1,-1,0)$.

- *Pour* $\lambda_2 = -1$

$$v_4 = (x,y,z,t,w) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -2y-3z-3t-3w=0 \\ z+2y=0 \\ t+w=0 \\ x+y+z+3t+3w=0 \\ -x-y-z-t-w=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=-w \\ w=-t \end{cases},$$

on trouve $v_4 = (0,0,0,1,-1)$.
Cherchons v_5 *tel que* $Av_5 = v_4 - v_5 \iff (A + I_3)v_5 = v_4$, *on trouve* $v_5 = (1,0,0,1,-1)$.
Donc, dans la base $\mathcal{B}_J = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, *on a :*

$$J = \left(\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi la matrice de passage P est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et on a } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.12 Application de la réduction au calcul des puissances d'une matrice et aux suites récurrentes

2.12.1 Calcul des puissances d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres (distinctes) de f. Alors :

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \ \mu_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}.$$

On rappelle d'autre part que :

$$\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i - 1} \subsetneq \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i} = C_{\lambda_i}(f).$$

et que $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i = \dim(C_{\lambda_i}(f))$.
D'après le théorème 2.9, il existe un unique couple (d, ν) d'endomorphismes de E vérifiant les propriétés 1,2,3 du théorème. Notons m l'indice de ν. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors comme d et ν commutent on peut appliquer la formule du binôme de Newton ce qui donne

$$f^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} d^{p-i} \nu^i.$$

Si $p \geq m$, alors :

$$f^p = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{p}{i} d^{p-i} \nu^i.$$

Considérons une base de E définie par $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ où pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{B}_i$ est une base de $C_{\lambda_i}(f)$. Dans ce cas comme $E_{\lambda_i}(f) = C_{\lambda_i}(f)$ pour tout

$i \in \{1, \ldots, k\}$, on a :

$$Mat_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & O & & \ddots & & O & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

et $Mat_{\mathcal{B}}(\nu) = Mat_{\mathcal{B}}(f - d)$. De plus comme $C_{\lambda_i}(f)$ est stable par ν, en posant $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $D = Mat_{\mathcal{B}}(d)$ et $N = Mat_{\mathcal{B}}(\nu)$ alors A est une matrice diagonale par blocs et pour $p \geq m$ on a :

$$A^p = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{p}{i} D^{p-i} N^i.$$

On sait calculer les puissances de D. Il reste à calculer $N^2, \ldots, N^{m-1}$.

2.12.2 Suites récurrentes

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.

Définition 2.17 *Une relation de récurrence d'ordre k est une relation vérifiée par la suite (u_n) du type :*

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + a_{k-2}u_{n+k-2} + \ldots + a_0u_n \quad n \in \mathbb{N} \qquad (2.7)$$

Cette relation de récurrence est équivalente à la relation de récurrence matricielle :

$$X_{n+1} = AX_n \quad n \in \mathbb{N}$$

où $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+k-1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \ldots & \ldots & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$.

Un calcul facile permet de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A_n X_0$ et

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^k(\lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0). \qquad (2.8)$$

Exemple 2.13 *Considérons la suite récurrente suivante*

$$u_{n+3} = u_{n+2} + 8u_{n+1} - 12u_n \quad n \in \mathbb{N}$$

La matrice A définie comme ci-dessus vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la relation (2.8), on a

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 12) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

Donc les valeurs propres de A sont 2 et -3 de multiplicités respectives 2 et 1.
La décomposition de Dunford de A s'écrit ici $P^{-1}AP = D + N$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme N est nilpotente d'indice 2, on déduit que pour $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P(D+N)^n P^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P(D^n + nD^{n-1}N)C$$

où $C = P^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. *Donc*

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

et

$$u_n = c_1 2^n + c_2(-n2^{n-1} + 2^n) + c_3(-3)^n.$$

Les coefficients inconnus c_1, c_2, c_3 sont déterminés par les valeurs u_0, u_1, u_2 de la suite.

2.13 Exercices

Exercice 30. Déterminer les sous-espaces caractéristiques des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\dim(\ker(f - \lambda \mathrm{Id})) = \dim(\ker(f - \lambda \mathrm{Id})^2).$$

Exercice 32. Calculer la réduite de Jordan pour chacune des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \alpha & 1 \\ -2 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Calculer la réduite de Jordan J de A.
3. Montrer que $J = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente, Calculer $A^n, \ n \in \mathbb{N}$.

Exercice 34. Déterminer la décomposition de Dunford d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de trace nulle.

Exercice 35. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de décomposition de Dunford $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $N = P(A)$.

Exercice 36. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ semblable à la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et le déterminant de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer $\dim \ker(A - 2I)$, $\dim \ker(A - 2I)^3$, $\dim \ker(A - 2I)^2$.
4. Donner le polynôme minimal de A.

Exercice 37. Résoudre les systèmes de suites suivants

1. $(S_1) \begin{cases} u_{n+1} = \lambda u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = \lambda v_n \end{cases}, \; u_0 = 0, v_0 = 1, \text{ et } \lambda \neq 0$
2. $(S_2) \begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n + 1 \\ v_{n+1} = \beta u_n + \alpha v_n + 2 \end{cases}, \; u_0 = 1, v_0 = 0 \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. $(S_3) \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = -u_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}, \; u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = -1$

Exercice 38. Soit une suite récurrente réelle donnée par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \; u_0 = 1, u_1 = 5.$$

Exprimer u_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 39. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 = 5A - 2I_3.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
2. Écrire la forme réduite de Jordan de A.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire réelle satisfaisant la relation de récurrence

$$u_{n+3} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0,\ u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 0.$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n et les premiers termes u_0, u_1, u_2.

Exercice 40. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^{1442}.

CHAPITRE 3

Exponentielle d'une matrice et Application aux systèmes différentiels linéaires

Dans toute la suite le corps $\mathbb{K}$ considéré est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Exponentielle d'une matrice

Dans cette section, on présente quelques définitions et propriétés remarquables sur l'exponentielle d'une matrice carrée.

Définition 3.1 *On appelle exponentielle de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la somme de la série normalement convergente*

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

Exemple 3.1 *Si A est la matrice diagonale*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors } A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

et donc

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1 *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.*

1. *Si $AB = BA$, alors $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$ et $Be^A = e^A B$.*
2. *$(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*
3. *$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.*
4. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{tI_n}A = e^t A$.*

Proposition 3.2 *Si on considère la fonction $f_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour A fixé par $f_A(t) = e^{tA}$, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$f'_A(t) = Af_A(t) = f_A(t)A.$$

Preuve. Il s'agit de remarquer que tA et $t'A$ commutent pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$. On a donc, pour $h \in \mathbb{R}$ tendant vers 0,

$$f_A(t+h) = f_A(t)f_A(h) = f_A(t)(1 + hA + o(h^2)),$$

car $f_A(t)$ est une série entière en A. On a donc

$$\frac{f_A(t+h) - f_A(h)}{h} = Af_A(t) + o(h),$$

ce qui démontre que f_A est dérivable en t de dérivée $Af_A(t)$ (ou $f_A(t)A$ car ils commutent). ■

3.2 Calcul pratique de l'exponentielle d'une matrice

De manière générale si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si son polynôme caractéristique est scindé, alors d'après le théorème (2.9) (décomposition de Dunford), il existe une matrice D diagonalisable et une matrice N nilpotente telles que :

1. $A = D + N$
2. $D \times N = N \times D$

Puisque D et N commutent on a :

$$e^A = e^{D+N} = e^D e^N.$$

Comme la matrice D est diagonalisable il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

D'autre part N est nilpotente donc il existe un entier $p \leq n$ tel que $N^p = 0$. Donc :

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}\Big(I_n + N + \frac{1}{2!}N^2 + \dots + + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}\Big).$$

3.3 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

L'une des propriétés fondamentales de l'exponentielle d'une matrice réside dans le fait qu'elle est intimement liée à la résolution des équations linéaires à coefficients constants.

Définition 3.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ soit $b_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ soit $a_{ij} \in \mathbb{K}$.*

1. *Le système :*

$$(\mathcal{SL}) \qquad \begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + & \dots & + a_{1n}y_n + b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + & \dots & + a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$$

*s'appelle **système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants**.*

2. *Le système :*

$$(\mathcal{SH}) \qquad \begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + & \dots & + a_{1n}y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + & \dots & + a_{nn}y_n \end{cases}$$

*s'appelle **système différentiel linéaire homogène associé à** $(\mathcal{SL})$.*

Résoudre $(\mathcal{SL})$ ou $(\mathcal{SH})$ revient à trouver un intervalle non vide $J \subset I$ et des fonctions $y_1, \dots, y_n$ dérivables sur J et vérifiant le système considéré.

Si on note $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, alors :

$$(\mathcal{SL}) \Longleftrightarrow (\mathcal{L}) \qquad Y' = AY + B$$

et

$$(\mathcal{SH}) \Longleftrightarrow (\mathcal{H}) \qquad Y' = AY.$$

Résoudre $(\mathcal{L})$ ou $(\mathcal{H})$ revient à trouver un intervalle non vide $J \subset I$ et une fonction $Y : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dérivable sur J et vérifiant respectivement $(\mathcal{L})$ ou $(\mathcal{H})$.

3.3.1 Système différentiel linéaire homogène

Notons $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}^n$.

Théorème 3.1 *L'ensemble $S_{\mathcal{H}}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{H} : Y' = AY$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ de dimension n. Plus précisément :*

$$S_{\mathcal{H}} := \{t \longrightarrow e^{tA}C \ \text{ où } C \in \mathbb{K}^n\}.$$

De plus pour tout $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ il existe une unique solution Y de $\mathcal{H}$ telle que $Y(t_0) = Y_0$.

Preuve. Il est clair que la fonction nulle appartient à $S_{\mathcal{H}}$ et que si $(Y_1, Y_2) \in S_{\mathcal{H}}^2$ alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2 \in S_{\mathcal{H}}$$

Donc $S_{\mathcal{H}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

Maintenant soit $Y \in S_{\mathcal{H}}$ et soit $X(t) = e^{-tA}Y(t)$. Alors :

$$X'(t) = -Ae^{-tA}Y(t) + e^{-tA}Y'(t) = -Ae^{-tA}Y(t) + e^{-tA}AY(t) = 0.$$

Car A et e^{-tA} commutent. Donc il existe $C \in \mathbb{K}^n$ tel que $X(t) = C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $Y(t) = e^{tA}C$.
La réciproque est facile à vérifier : pour tout $C \in \mathbb{K}^n$ la fonction
$t \longrightarrow Y(t) = e^{tA}C$ est solution de $S_{\mathcal{H}}$.
D'autre part soit $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ Alors :

$$Y(t_0) = Y_0 \Longleftrightarrow e^{t_0A}C = Y_0 \Longleftrightarrow C = e^{-t_0A}Y_0.$$

■

3.3.1.1 Méthodes de résolution

Cas où A est diagonalisable :

Théorème 3.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de de vecteurs propres associés. Alors*

$$S_{\mathcal{H}} = \left\{ t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v_i \text{ où } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \tag{3.1}$$

Preuve. Supposons A diagonalisable. Il existe alors une matrice D diagonale et une matrice P inversible formée par n vecteurs propres $(v_1, \ldots, v_n)$ telle que $A = PDP^{-1}$.
Posons $X = P^{-1}Y$ (donc $Y = PX$). L'équation $\mathcal{H} : Y' = AY$ devient une équation de X' :

$$X' = P^{-1}Y' = P^{-1}AY = P^{-1}APX = DX.$$

Ainsi X est la solution d'un système différentiel diagonal :

$$\begin{cases} x_1' &= \lambda_1 x_1 \\ \vdots & \\ x_n' &= \lambda_n x_n \end{cases} \qquad \text{d'où } X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Enfin, $Y = PX$ donne alors : $Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$. ■

Exemple 3.2 *Résoudre le système différentiel*

$$Y' = AY, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après un calcul simple, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, \; v_1 = (1,1,0) \text{ et } v_2 = (-1,0,1) \\ \lambda_2 = 2, \; v_3 = (1,1,1). \end{cases}$$

La matrice A est diagonalisable, donc d'après (3.1), on a :

$$Y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1e^t - c_2e^t + c_3e^{2t} \\ y_2(t) = c_1e^t + c_3e^{2t} \qquad , c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ y_3(t) = c_2e^t + c_3e^{2t} \end{cases}$$

Cas où A est une matrice carré quelconque :
Supposons que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{K}$, donc la décomposition de Dunford permet d'écrire A sous la forme « diagonalisable + nilpotente ». Autrement dit, il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP = D + N$ avec D diagonale, N nilpotente et $ND = DN$.
On note cette matrice $B = P^{-1}AP = D+N$. (B est une matrice de Jordan, ou même une matrice triangulaire quelconque).
Posons $X = P^{-1}Y$ (donc $Y = PX$). L'équation $\mathcal{H} : Y' = AY$ devient une équation de X' :

$$X' = P^{-1}Y' = P^{-1}AY = P^{-1}APX = BX.$$

les solutions $X(t)$ sont données par $X(t) = e^{tB}C$ où $C \in \mathbb{K}^n$. D'autre part

$$e^{tB} = e^{t(D+N)} = e^{Dt}e^{Nt}$$

et les matrices e^{Dt} et e^{Nt} sont faciles à calculer.
Finalement, on obtient $Y(t) = PX(t) = e^{tB}C$ avec $C \in \mathbb{K}^n$.

Exemple 3.3 *En utilisant à nouveau la matrice A des exemples 2.5 et 2.10, cherchons à résoudre le système différentiel*

$$Y' = AY \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a montré que la forme réduite de Jordan associée à A est :

$$J = P^{-1}AP = D + N$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D est bien diagonale, N est nilpotente, car $N^2 = 0$ et $DN = ND$.
Posons $X = P^{-1}Y$ (donc $Y = PX$). L'équation devient une équation de

$X : X' = JX$
Les solutions de $X' = JX$ *sont* $X(t) = e^{Jt}C$, $C \in \mathbb{R}^3$.

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad e^{Nt} = I + Nt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$e^{tJ} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $Y' = AY$ *sont*

$$Y(t) = PX(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t & -te^t \\ e^{2t} & 2e^t & (2t+1)e^t \\ 2e^{2t} & e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1e^{2t} - c_2e^t - c_3te^{2t} \\ y_2(t) = c_1e^{2t} + 2c_2e^t + c_3(2t+1)e^t \\ y_3(t) = 2c_1e^{2t} + c_2e^t + c_3(t+1)e^t \end{cases} \qquad , c_1, c_2, c_3, \in \mathbb{R}$$

Remarque 3.1 *On remarque que dans les deux cas, le calcul de* P^{-1} *est inutile.*

3.3.2 Système différentiel linéaire non homogène

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $B : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction continue et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 3.3 *On suppose que l'ensemble* $S_{\mathcal{L}}$ *des solutions de* $\mathcal{L} : Y' = AY + B$ *est non vide. Soit* $Z \in S_{\mathcal{L}}$ *Alors :*

$$S_{\mathcal{L}} := \{t \longrightarrow e^{tA}C + Z(t) \text{ où } C \in \mathbb{K}^n\}.$$

Preuve. Soit Y une solution de $\mathcal{L}$ sur I. Alors :

$$\begin{aligned} (Y-Z)'(t) = Y'(t) - Z'(t) &= (AY(t) + B(t)) - (AZ(t) + B(t)) \\ &= A(Y(t) - Z(t)). \end{aligned}$$

Donc $Y - Z$ est solution de l'équation homogène $\mathcal{H} : Y' = AY$. Donc $Y(t) = e^{tA}C + Z(t)$ où $C \in \mathbb{K}^n$.
Réciproquement, on vérifie facilement que toutes les fonctions de la forme $Y(t) = e^{tA}C + Z(t)$ pour tout $t \in I$ sont des solutions de $\mathcal{L}$. ■

Théorème 3.4 *Pour tout $t_0 \in I$:*

$$\begin{array}{rccl} Z: & I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & t & \longrightarrow & Z(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds. \end{array} \tag{3.2}$$

est une solution de $\mathcal{L}$.

Preuve. Soit $Z(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds$ pour tout $t \in I$. Montrons que Z est une solution de $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds \\ &= \int_{t_0}^{t} e^{tA}e^{-sA}B(s)ds \quad (\text{car } tA \text{ et } -sA \text{ commutent}) \\ &= e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} Z'(t) &= Ae^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)ds + e^{tA}e^{-tA}B(t) \\ &= AZ(t) + B(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Remarque 3.2 *On a*

1. *Les solutions de $\mathcal{H} : Y' = AY$. sont données par $Y(t) = e^{tA}C$ avec $C \in \mathbb{K}^n$. Si l'on cherche une fonction dérivable $C : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ telle que $Z(t) = e^{tA}C(t)$ soit solution de $\mathcal{L}$ on a :*

$$\begin{aligned} 0 &= Z'(t) - (AZ(t) + B(t)) \\ &= Ae^{tA}C(t) + e^{tA}C'(t) - (Ae^{tA}C(t) + B(t)) \\ &= e^{tA}C'(t) + B(t) \end{aligned}$$

   *Donc $C'(t) = e^{-tA}B'(t)$ et on retrouve l'expression (3.2) (ce que l'on appelle **méthode de variation de la constante**.)*

2. *Pour résoudre $\mathcal{L}$ il suffit tout simplement de trouver une solution particulière Z de $\mathcal{L}$ et dans ce cas les solutions de $\mathcal{L}$ s'écrivent comme la somme de Z et d'une solution de $\mathcal{H}$.*

Exemple 3.4 *Résoudre le système différentiel :*

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} y_1'(t) = \frac{6}{7}y_1(t) - \frac{15}{14}y_2(t) + e^{2t} \\ y_2'(t) = -\frac{5}{7}y_1(t) + \frac{37}{14}y_2(t) + e^{-t}. \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = -1$,

$$(\mathcal{L}) \Longleftrightarrow Y'(t) = AY(t) + B(t).$$

avec $A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{15}{14} \\ -\frac{5}{7} & \frac{37}{14} \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ *et* $\lambda_2 = 3$. *Les vecteurs propres associés sont*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système $(\mathcal{L})$ *sont données par :*

$$Y(t) = e^{At}Y(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

Comme A *est diagonalisable, alors*

$$\begin{aligned} e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7}e^{t/2} + \frac{1}{7}e^{3t} & \frac{3}{7}e^{t/2} - \frac{3}{7}e^{3t} \\ \\ \frac{2}{7}e^{t/2} - \frac{2}{7}e^{3t} & \frac{1}{7}e^{t/2} + \frac{6}{7}e^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7}e^{t/2}+\frac{1}{7}e^{3t} & \frac{3}{7}e^{t/2}-\frac{3}{7}e^{3t} \\ \\ \frac{2}{7}e^{t/2}-\frac{2}{7}e^{3t} & \frac{1}{7}e^{t/2}+\frac{6}{7}e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ \\ -1 \end{pmatrix} \\
&+ \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{6}{7}e^{(t-s)/2}+\frac{1}{7}e^{3(t-s)} & \frac{3}{7}e^{(t-s)/2}-\frac{3}{7}e^{3(t-s)} \\ \\ \frac{2}{7}e^{(t-s)/2}-\frac{2}{7}e^{3(t-s)} & \frac{1}{7}e^{(t-s)/2}+\frac{6}{7}e^{3(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2s} \\ \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 3e^{t/2}+e^{3t} \\ e^{t/2}-2e^{3t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{6}{7}e^{t/2+3s/2}+\frac{1}{7}e^{3t-s}+\frac{3}{7}e^{t/2-3s/2}-\frac{3}{7}e^{3t-4s} \\ \\ \frac{2}{7}e^{t/2+3s/2}-\frac{2}{7}e^{3t-s}+\frac{1}{7}e^{t/2-3s/2}+\frac{6}{7}e^{3t-4s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 3e^{t/2}+e^{3t} \\ e^{t/2}-2e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t \left(\frac{6}{7}e^{t/2+3s/2}+\frac{1}{7}e^{3t-s}+\frac{3}{7}e^{t/2-3s/2}-\frac{3}{7}e^{3t-4s}\right) ds \\ \\ \int_0^t \left(\frac{2}{7}e^{t/2+3s/2}-\frac{2}{7}e^{3t-s}+\frac{1}{7}e^{t/2-3s/2}+\frac{6}{7}e^{3t-4s}\right) ds \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^{t/2}+e^{3t} \\ e^{t/2}-2e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7}e^{2t}-\frac{5}{28}e^{-t}-\frac{2}{7}e^{t/2}+\frac{1}{28}e^{3t} \\ \\ \frac{10}{21}e^{2t}-\frac{13}{42}e^{-t}-\frac{2}{21}e^{t/2}-\frac{1}{14}e^{3t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{19}{7}e^{t/2}+\frac{29}{28}e^{3t}+\frac{3}{7}e^{2t}-\frac{5}{28}e^{-t} \\ \\ \frac{19}{21}e^{t/2}-\frac{29}{14}e^{3t}+\frac{10}{21}e^{2t}-\frac{13}{42}e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.4 Exercices

Exercice 41. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et montrer que $e^A = I_3 + (e-1)A$.

Exercice 42. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Monter que

$$\int_0^{+\infty} e^{-tA} dt = A^{-1}.$$

Exercice 43. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. En déduire la valeur de e^{tA}.
3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} y_1'(t) &= -y_3(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) &= y_2(t) - 2y_3(t) \end{cases}$$

Exercice 44. Résoudre le système différentiel

$$(S)\begin{cases} y_1'(t) &= ay_1(t) + by_2(t) + cy_3(t) \\ y_2'(t) &= cy_1(t) + by_2(t) + ay_3(t) \\ y_3'(t) &= by_1(t) + cy_2(t) + ay_3(t) \end{cases}$$

où a, b, c sont trois réels donnés.
Déterminer, sous forme réelle, la solution particulière telle que $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$.

Exercice 45. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ lorsque

$$\mathbf{1}.\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2}.\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 46. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^n en fonction de A et de I_3 (utiliser la division euclidienne).
3. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ avec $a = 1$.

Exercice 47. Résoudre les systèmes différentiels suivants

1. $\begin{cases} y_1'(t) &= 5y_1(t) - 3y_2(t) + 8 \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + 32t \end{cases}$, avec $y_1(0) = 2, y_2(0) = 0$
2. $\begin{cases} y_1'(t) &= -7y_1(t) - 9y_2(t) + 9y_3(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) + 5y_2(t) - 3y_3(t) + 2e^{-t} + e^t \\ y_3'(t) &= -3y_1(t) - 3y_2(t) + 5y_3(t) + 3e^t, \end{cases}$

avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0$.

3. $\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & -5y_1(t) - 8y_2(t) + 4y_3(t) \\ y_2'(t) & = & 2y_1(t) + 3y_2(t) - 2y_3(t) + e^{-t} \\ y_3'(t) & = & 6y_1(t)14y_2(t) - 5y_3(t) + 9t, \end{array} \right.$

avec $y_1(0) = 2, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1$.

Exercice 48. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\alpha^2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.
3. Déterminer selon les valeurs de α le polynôme minimal de A.
4. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ avec $\alpha = 0$.

Exercice 49.

1. Déterminer une condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1+\alpha & 1 \\ -\alpha & -\alpha & -1 \\ \alpha & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

2. Déterminer suivant les valeurs de α le polynôme minimal de A.
3. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ avec $\alpha = 0$.

Exercice 50.

1. Déterminer une condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

2. Dans tous les cas donner le polynôme minimal.
2. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ avec $c = 1$.

CHAPITRE 4

Solutions des exercices

4.1 Solutions des exercices du chapitre 1

Exercice 1.

Remarquons d'abord que l'élément nul de A appartient à N. Prenons ensuite $a \in A$, $x, y \in N$ et n, m de sorte que $x^n = y^m = 0$. On a

$$(ax)^n = a^n x^n \quad (A \text{ anneau commutatif})$$

et donc $ax \in N$. De plus, pour tout entiers n, m, la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned}
(x-y)^{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k (-1)^{n+m-k} y^{n+m-k} \\
&= y^m \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m}{k} x^k (-1)^{n+m-k} y^{n-k} \right) \\
&+ x^n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^{k-n} (-1)^{n+m-k} y^{n+m-k} \right),
\end{aligned}$$

or $x^n = y^m = 0$ ce qui montre que $x - y \in N$. Finalement, on a bien prouvé que N est un idéal de A.

Exercice 2.

1. Soit p l'indice de nilpotence de x tel que $x^p = 0$. Remarquons d'abord que
$$1 = 1 - x^p = (1-x)(1+x+\cdots+x^{p-1}) = (1+x+\cdots+x^{p-1})(x-1),$$
posons $y = 1+x+\cdots+x^{p-1}$. Donc on a montrer que
$(1-x)y = y(1-x) = 1$, d'où le résultat.
2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $U_n = (1-x)^{-1}(1+x^{2^{n+1}})$.
   - Pour $n = 0$, on a $(1-x)U_0 = (1-x)(1+x) = 1-x^2$, d'où $U_0 = (1-x)^{-1}(1-x^2)$ (c'est vrai).
   - Supposons que $U_{n-1} = (1-x)^{-1}(1-x^{2n})$. Donc
$$U_n = U_{n-1}(1+x^{2n}) = (1-x)^{-1}(1+x^{2^{n+1}}).$$

Exercice 3.

1. $P_1[X] = -X^8 + 2X^4 - 1$.

Dans $\mathbb{R}[X]$:
$P_1[X] = -(X^4-1)^2 = -(X^2-1)^2(X^2+1)^2 = -(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2$.
Dans $\mathbb{C}[X]$:
$P_1[X] = -(X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2$.

2. $P_2[X] = X^5 - X^3 - X^2 + 1$.

Dans $\mathbb{R}[X]$:
$P_2[X] = (X+1)(X-1)^2(X^2+X+1)$.
Dans $\mathbb{C}[X]$:
$P_2[X] = (X+1)(X-1)^2(X-j)(X-\overline{j})$ avec $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. $P_3[X] = 1 - X^8$.

Dans $\mathbb{R}[X]$:
$P_3[X] = (1-X^4)(1+X^4)$,
$$(1-X^4) = (1-X^2)(1+X^2) = (1+X)(1-X)(1+X^2),$$
$$\begin{aligned}(1+X^4) &= 1+2X^2+X^4-2X^2 = (1+X^2)^2-(\sqrt{2}X)^2\\ &= (1+X^2-\sqrt{2}X)(1+X^2+\sqrt{2}X).\end{aligned}$$
Donc
$P_3[X] = (1+X)(1-X)(1+X^2)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.
Dans $\mathbb{C}[X]$:
Il suffit de décomposer $1+X^2$, $X^2-\sqrt{2}X+1$ et $X^2+\sqrt{2}X+1$,

$1+X^2=(X+i)(X-i)$,
$X^2-\sqrt{2}X+1=\big(X-\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\big)\big(X-\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\big)$,
$X^2+\sqrt{2}X+1=\big(X-\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\big)\big(X-\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\big)$.
Donc

$$\begin{aligned} P_3[X] &= (1+X)(1-X)(X+i)(X-i)\left(X-\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\times \left(X-\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

4. $P_4[X]=X^4-X^3+X^2-X+1$
Dans $\mathbb{C}[X]$:
$P_4[X]=\Big(X-e^{\frac{i\pi}{5}}\Big)\Big(X-e^{-\frac{i\pi}{5}}\Big)\Big(X-e^{\frac{3i\pi}{5}}\Big)\Big(X-e^{-\frac{3i\pi}{5}}\Big)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$:
$P_4[X]=\Big(X^2-2\cos(\frac{\pi}{5})+1\Big)\Big(X^2-2\cos(\frac{3\pi}{5})+1\Big)$.
5. $P_5[X]=-X^5+X^4-X^3+X^2-X+1$.
Dans $\mathbb{C}[X]$:
$P_5[X]=-(X-1)\Big(X-e^{\frac{i\pi}{3}}\Big)\Big(X-e^{-\frac{i\pi}{3}}\Big)\Big(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\Big)\Big(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\Big)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} P_5[X] &= -(X-1)\Big(X^2-2\cos(\frac{\pi}{3})+1\Big)\Big(X^2-2\cos(\frac{2\pi}{3})+1\Big) \\ &= -(X-1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1). \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. On vérifie que $P(j)=P'(j)=0$. Donc j est racine double, comme P est un polynôme à coefficients réels, $\overline{j}$ est aussi racine double.
2. On remarque que i est une racine (et donc $-i$ est aussi racine)
   Dans $\mathbb{C}[X]$:
   $P=(X-j)^2(X-\overline{j})^2(X-i)(X+i)$.
   Dans $\mathbb{R}[X]$:
   $P=(X^2+X+1)^2(X^2+1)$.

Exercice 5.

Supposons que $z \in \mathbb{C}$ est une racine multiple de P_n. Donc $P_n(z) = P_n'(z) = 0$ et comme $P_n' = P_{n-1}$, on a $P_{n-1}(z) = 0$, donc $\frac{z^n}{n!} = (P_n - P_{n-1})(z) = 0$ d'où $z = 0$. Ceci entraîne $P_n(z) = P_n(0) = 1 \neq 0$, ce qui est absurde. Le polynôme P_n n'a donc que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6.

1.
$$X^n + X + 1 = (X-1)^2 Q + R \quad (*)$$

avec $\deg(R) < 2$, donc $R = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que $R' = a$. Prenons $X = 1$ dans $(*)$

$$3 = R(1) = a + b.$$

On dérive $(*)$

$$nX^{n-1} + 1 = Q'(X-1)^2 + 2Q(X-1) + R'.$$

On prend $X = 1$
$$n + 1 = a.$$

On en déduit que

$$b = 3 - a = 3 - (n+1) = 2 - n.$$

Et finalement
$$R = (n+1)X + 2 - n.$$

Par la même méthode on trouve

2. $R = nX + 1 - n$
3. $R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$.
4. $(X+1)^n = Q(X^2+1) + R$, avec $\deg(R) < 2$, donc $R = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

On pose $X = i$

$(i+1)^n = ai + b \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^n = b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n e^{\frac{ni\pi}{4}} = b + ai$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$

Donc
$$R = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) X + (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 7.
Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) = (P(X) - X)Q(X).$$

Or

$$P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X,$$

le polynôme $P(P(X)) - X$ est donc divisible par $P(X) - X$ car somme de deux polynômes divisibles par $P(X) - X$.

4.2 Solutions des exercices du chapitre 2

Exercice 8.

1.

$$\begin{aligned}
\chi_{A_4}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \lambda^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^3(\lambda - 4).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\chi_{A_n}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ \vdots \\ C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n \end{array} \\
&= \lambda^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^{n-1}(\lambda - n)
\end{aligned}$$

Exercice 9.

Dans une base $\mathcal{B}$ de E obtenue en complétant une base de $\ker(f)$, la matrice de l'endomorphisme f est de la forme

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \star & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \star & \star \\ \vdots & & \vdots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Alors $\chi_f = X^{n-2}((X-a)(X-d)-bc)$. En remarquant que

$$tr(f) = a+d, \quad tr(f^2) = a^2+d^2+2bc,$$

on obtient

$$\chi_f = X^{n-2}\Big(X^2 - tr(f)X + \frac{1}{2}(tr(f))^2 - \frac{1}{2}tr(f^2)\Big).$$

Exercice 10.

$$\begin{aligned}
\chi_{A^{-1}}(X) &= \det(A^{-1} - XI_n) = \det\Big(- XA^{-1}\Big(- \frac{1}{X}I_n + A\Big)\Big) \\
&= \det(A^{-1})(-X^n)\det\Big(- \frac{1}{X}I_n + A\Big) \\
&= \frac{(-1)^n}{\det(A)}X^n\chi_A\Big(\frac{1}{X}\Big).
\end{aligned}$$

Exercice 11.

On pourra discuter selon le rang de A.

• Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$, alors tous les mineurs de A sont nuls (grâce à la caractérisation du rang comme la taille du plus grand déterminant extrait non nul) donc $Com(A) = 0$: la seule valeur propre est 0.

• Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors A est inversible et $Com(A) = \det(A){}^tA^{-1}$. Les valeurs propres de $Com(A)$ sont donc les $\frac{\det(A)}{\lambda}$ où λ est une valeur propre (non nulle car A est inversible) de A donc de ${}^tA$.

• Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, alors $Com(A){}^tA = 0$. En particulier, $\mathrm{Im}({}^tA) \subset \ker(Com(A))$ et donc

$$\dim(\ker(Com(A))) \geq \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A) = n-1.$$

Donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. La dernière valeur propre est alors $tr(Com(A))$.

Exercice 12.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Rép. On a : $\lambda_1 = 4$, $E_{\lambda_1} = Vect\{(1,4,3)\}$ et $\lambda_2 = -2$ (double) $E_{\lambda_2} = Vect\{(1,1,0)\}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rép. On a : $\lambda = 2$ (triple), $E_\lambda = Vect\{(0,-1,-1)\}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rép. On a : $\lambda_1 = -1$, $E_{\lambda_1} = Vect\{(0,1,1)\}$, $\lambda_2 = 1$, $E_{\lambda_2} = Vect\{(2,1,1)\}$ et $\lambda_3 = 3$, $E_{\lambda_3} = Vect\{(0,3,1)\}$

Exercice 13. Les formes réduites diagonales associées aux matrices $A_1, \ldots, A_5$ sont données dans le tableau suivant

A_i	$\chi_{A_i}(\lambda)$	$Sp(A_i)$	$P_i = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$	D_i
A_1	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$	$\{0,1,4\}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
A_2	$(\lambda+4)(\lambda-1)(\lambda-2)$	$\{-4,1,2\}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
A_3	$(\lambda-1)(\lambda-2)^2$	$\{1,2\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
A_4	$(\lambda-1)^2(\lambda-2)$	$\{1,2\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
A_5	$(\lambda+2)(\lambda-2)^2(\lambda-2i)$	$\{-2,2,2i\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$

Exercice 14.

1. Notons A la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$. Elle s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Le polynôme caractéristique de f s'obtient en calculant celui de la matrice A. $\chi_f(\lambda) = -\lambda(\lambda+4)(\lambda-4)$. Ainsi, f possède trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 0$, et $\lambda_1 = 4$. Il est donc diagonalisable. On obtient : $E_{\lambda_1} = Vect\{\underbrace{(1,0,-1)}_{v_1}\}$, $E_{\lambda_2} = Vect\{\underbrace{(2,-1,0)}_{v_2}\}$ et

$E_{\lambda_3} = Vect\{\underbrace{(1,1,1)}_{v_3}\}$.

3. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$, relativement à $\mathcal{B}'$ $f^3 = f \circ f \circ f$ s'écrit

$$\begin{aligned}
D^3 - 9D + I_3 &= \begin{pmatrix} (-4)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}'}(g)
\end{aligned}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $Mat_{\mathcal{B}'}(g) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(g) P$. D'où $Mat_{\mathcal{B}}(g) = P Mat_{\mathcal{B}'}(g) P^{-1}$. On obtient :

$$Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 28 \\ 7 & 15 & 7 \\ 14 & 28 & -13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

1. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$

$$\begin{aligned}
& AP - (X^4 - X)P \\
= \ & (X-1)P = a_3 X^4 + (a_2 - a_3) X^3 + (a_1 - a_2) X^2 + (a_0 - a_1) X - a_0 \\
= \ & a_3 (X^4 - X) + (a_2 - a_3) X^3 + (a_1 - a_2) X^2 + (a_3 + a_0 - a_1) X - a_0,
\end{aligned}$$

et donc

$$AP = (X^4 - X)(P + a_3) + (a_2 - a_3) X^3 + (a_1 - a_2) X^2 + (a_3 + a_0 - a_1) X - a_0,$$

et alors

$$f(P) = (a_2 - a_3) X^3 + (a_1 - a_2) X^2 + (a_3 + a_0 - a_1) X - a_0.$$

Par suite, f est un endomorphisme de E et la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E est

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Soit $P \in E$, $P \in \ker(f) \Leftrightarrow a_2 - a_3 = a_1 - a_2 = a_3 + a_0 - a_1 = a_0 = 0$ $\Leftrightarrow a_3 = a_2 = a_1$ et $a_0 = 0$. Donc $\ker(f) = Vect\{X^3 + X^2 + X\}$.
- $\mathrm{rg}(f) = 3$ et immédiatement $\mathrm{Im}(f) = Vect\{X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2\}$.

2. $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda+3)$. A admet quatre valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$, deux réelles 0 et -1 et deux non réelles $-1 + j$ et $-1 + j^2$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas diagonalisable.

- $P \in \ker(f + \mathrm{Id}) \Leftrightarrow a_2 = a_1 = a_3 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_2 = a_1 = 0$ et $a_0 = -a_3$. Donc $\ker(f + \mathrm{Id}) = Vect\{X^3 - 1\}$.
- $P \in \ker(f+(1-j)\mathrm{Id}) \Leftrightarrow a_2 - ja_3 = a_1 - ja_2 = a_3 + a_0 - ja_1 = -ja_0 = 0$ $\Leftrightarrow a_2 = ja_3, a_1 = ja_3$ et $a_0 = 0$.
  Donc $\ker(f + (1 - j)\mathrm{Id}) = Vect\{X^3 + jX^2 + j^2X\}$.
- $\ker(f + (1 - j^2)\mathrm{Id}) = Vect\{X^3 + j^2X^2 + jX\}$.

Exercice 16.

1. On montre que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g, c'est-à-dire que $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$ et $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$.

- Soit $y \in g(\ker(f))$, alors il existe $x \in \ker(f)$ tel que $y = g(x)$. Comme $x \in \ker(f)$, donc $f(x) = 0$. Comme g est linéaire $g(f(x)) = 0$. Or $f \circ g = g \circ f$, donc $f(g(x)) = g(f(x)) = 0$, donc $y = g(x) \in \ker(f)$.
- Soit $z \in g(\mathrm{Im}(f))$, alors il existe $y \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $z = g(y)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $g(y) = g(f(x))$ et comme $f \circ g = g \circ f$, on obtient $g(y) = f(g(x))$, donc
  $z = g(y) \in \mathrm{Im}(f)$.

2. La réciproque est fausse. En effet, si f et g sont tous les deux des automorphismes, il est clair que $\ker(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E$ sont stables car g est bijective. Mais il n'y a aucune raison pour que f et g commutent. Donnons un exemple, en prenant pour f et g les automorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $AB \neq BA$.

3. Soit λ une valeur propre de f (λ existe car on travaille sur le corps $\mathbb{C}$). Posons $E_\lambda = \ker(f - \lambda\mathrm{Id})$. D'après 1. On a $g(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Considérons l'application g_λ de E_λ dans E_λ qui, à $x \in E_\lambda$ associe $g(x)$. C'est un endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel donc il admet une valeur propre μ et il existe $x \neq 0 \in E_\lambda$ tel que $g_\lambda(x) = g(x) = \mu x$. Or $x \in E_\lambda$ donc $f(x) = \lambda x$. On a ainsi montré que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 17.

1. $\chi_{A_\alpha}(\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)(\alpha-\lambda)$. Les valeurs propres de f sont donc $1, 2$ et α. En particulier, si $\alpha = 1$ ou 2 f n'admet que deux valeurs propres.

2. • Si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable.

• Si $\alpha = 1$, $\chi_{A_1}(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Une base de $\ker(A-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$. L'espace est de dimension $1 \neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable.

• Si $\alpha = 2$. Une base de $\ker(A-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. En particulier, $\ker(A-2I)$ est de dimension 2 et A est diagonalisable.

3. On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Pour la valeur propre 1, une base de $\ker(A-I)$ est donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$. On a $A_2 = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit facilement par récurrence que $A_2^k = PD^kP^{-1}$. Mais puisque D est diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent donne finalement

$$A_2^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k-1 \\ 1-2^k & 2^k & 2^k-1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Exercice 18.

On montre tout d'abord que les sous-espaces propres sont de dimension 1. Par ailleurs, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-a-b)(\lambda-c-d)$. Par conséquent, la multiplicité de 0 est au moins 2 donc ne coïncide pas avec la dimension du sous-espace propre : la matrice n'est pas diagonalisable.

Exercice 19.
On note $n = \dim E$. Par hypothèse, $\dim \ker(A) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$, autrement dit 0 est une valeur propre de A d'ordre $n-1$ donc racine du polynôme caractéristique P_A de A d'ordre au moins $n-1$. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_A(X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda)$. La somme des valeurs propres de A étant égale à la trace de A, on a $\mathrm{tr}(A) = \lambda$. Ainsi, si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, A admet une valeur propre $\lambda \neq 0$. Les sous espaces propres E_0 et E_λ de A vérifient alors $\dim E_0 + \dim E_\lambda = n$ donc A est diagonalisable.
Lorsque $\mathrm{tr}(A) = 0$, 0 est la seule valeur propre de A. Si la matrice A est diagonalisable, A serait nulle, ce qui est absurde.
CNS : une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.
Lorsque A n'est pas diagonalisable, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{tr}(A) = 0$, on a $A^2 = 0$. En effet. Soit $v_1 \in E$ tel que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ Complétons v_1 en une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_1)$ de E. Dans cette base, la matrice A est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{tr}(A) = \alpha_1 = 0$, on a $B^2 = 0$, c'est-à-dire $A^2 = 0$.

Exercice 20.
Montrons que f est diagonalisable : Tout d'abord, on a

$$\begin{cases} f(u) = u \\ f(v) = -v \end{cases} \tag{4.1}$$

Si $n = 2$, d'après (4.1), $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont deux valeurs propres distinctes de f. Donc f est diagonalisable. Dans ce cas

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $n > 2$, $\dim E = \mathrm{rg}(f) + \dim \ker(f)$, alors $\dim \ker(f) = n - 2$. c'est-à-dire $\ker(f)$ admet une base de $(n-2)$ vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_3 = 0$. Comme u et v sont deux vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ respectivement, f est donc diagonalisable.

La matrice diagonale est donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21. Les matrices triangulaires semblables aux matrices A_1, A_2, A_3 sont données dans le tableau suivant

A_i	$\chi_{A_i}(\lambda)$	$Sp(A_i)$	$P_i = [v_1, v_2, \dots, v_n]$	T_i
A_1	$-(\lambda-3)(\lambda-2)^2$	$\{2,3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
A_2	$(\lambda-1)^3$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
A_3	$(\lambda-1)^3$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -4 & -15 & 0 \\ -8 & -14 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 22.
L'endomorphisme f^2 est diagonalisable donc il existe un polynôme μ_{f^2} scindé à racines simples annulateur de f^2.
($\Rightarrow$) Si $\ker(f) \neq \ker(f^2)$, alors le sous-espace propre associé à la valeur 0 n'est pas égal au sous-espace caractéristique : f n'est pas diagonalisable.
($\Leftarrow$) Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$. Le polynôme $\mu_{f^2}(X^2)$ annule de f et, sa seule racine multiple possible est 0. D'après le lemme des noyaux, E est somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres non nulles et de $\ker(f^2) = \ker(f)$, le sous-espace propre associé à 0 : ainsi, f est diagonalisable.

Exercice 23.
Les valeurs propres de A sont parmi les racines du polynôme annulateur $X^3 - X - 1$ et une rapide étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3 - x - 1$ indique une racine réelle λ strictement positive et deux racines complexes

conjuguées μ et $\overline{\mu}$. Notons α la multiplicité de la valeur propre λ et β la multiplicité des deux valeurs propres μ et $\overline{\mu}$ (la multiplicité est la même pour les deux valeurs propres puisque χ_A est à coefficients réels).
Or, le déterminant est le produit des valeurs propres avec leur multiplicité donc

$$\det(A) = \lambda^\alpha \mu^\beta \overline{\mu}^\beta = \lambda^\alpha |\mu|^{2\beta} > 0.$$

Exercice 24.
D'après les formules des sommes de Newton et les relations coefficients-racines, le polynôme caractéristique est

$$X^n + (-1)^n \det(A).$$

Si $\det(A) = 0$, le théorème de Cayley & Hamilton assure que A est nilpotente. Sinon, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable (et d'ailleurs, toutes les valeurs propres ont le même module).

Exercice 25.
Remarquons tout d'abord que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $P(G_f)(g) = P(f) \circ g$. Ainsi, μ_f est annulateur de G_f.
De plus, pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $\mu_{G_f}(f) \circ g = 0$ donc $\mu_{G_f}(f) = 0$ et μ_{G_f} est annulateur de f. En conclusion, $\mu_f = \mu_{G_f}$.

Exercice 26.
On montre facilement qu'il existe des vecteurs colonnes non nuls $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A = X^tY$.

1. Le polynôme minimal est au moins de degré 2. De plus,

$$A^2 = X^tYX^tY = ({}^tYX)A,$$

car ${}^tYX$ est un scalaire. Or ${}^tYX = tr({}^tYX) = tr(X^tY) = tr(A)$. Ainsi, $X^2 - tr(A)X$ est annulateur de A. En conclusion, $\mu_A = X^2 - tr(A)X$.

2. Pour calculer la puissance A^k, effectuons la division de X^k par μ_A.

- Si $tr(A) = 0$, alors $A^k = 0$ dès que $k \geq 2$.
- Sinon, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$X^k = Q(X)\mu_A(X) + tr(A)^{k-1}X.$$

En effet, le reste dans la division de X^k par μ_A est un polynôme de degré au plus 1, qui est nul en 0 et qui vaut $tr(A)^k$ en $tr(A)$. Ainsi, $A^k = tr(A)^{k-1}A$ pour tout $k \geq 1$.
Remarquons que ce résultat peut aussi être déduit par une simple récurrence.

Exercice 27.
• Pour A, on remarque que $A^2 = 3A$ et donc $A^2 - 3A = 0$. Comme A n'est pas un multiple de l'identité, on en déduit que son polynôme minimal est $\mu_A(X) = X^2 - 3X = X(X-3)$. Donc A est diagonalisable.
• Pour B, $P\chi_B(X) = (X-1)(X+1)^2$. On sait que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique $(X-1)(X+1)^2$ tout en ayant les mêmes racines. Cela ne peut être que $(X-1)(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$. Il était alors facile de vérifier que $(B - I_3)(B + I_3)$ est un polynôme annulateur pour B. Donc $\mu_B(X) = (X-1)(X+1)$ et B est diagonalisable.
• Pour C, le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X) = (X+1)^3$. La seule valeur propre de C est donc -1. Comme C n'est pas égale à $-I_3$ son polynôme minimal ne peut être que $(X+1)^3$ ou $(X+1)^2$. Un calcul rapide montre que $(C + I_3)^2 = 0$ et donc le polynôme minimal de C est $\mu_C(X) = (X+1)^2$. Ainsi la matrice C n'est pas diagonalisable.

Exercice 28.

1. $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$. On obtient $E_{-2} = Vect\{v_1\}$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $E_1 = Vect\{v_2\}$ où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Comme $\dim(E_1) = 1 \neq 2$ donc A n'est pas diagonalisable.
On prend $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut déjà affirmer que $P^{-1}AP$ est

de la forme $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément

$$Av_3 - v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = v_2$$

et donc $Av_3 = v_2 + v_3$ puis

$$A = PTP^{-1} \quad \text{où} \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par χ_A fournit trois réels a_n, b_n et c_n et un polynôme Q tels que $X^n = \chi_A Q + a_n X^2 + b_n X + c_n$. En prenant les valeurs des membres en -2, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en 1, on obtient

$$\begin{cases} 4a_n - 2b_n + c_n = (-2)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n + b_n = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \\ b_n = \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) \\ c_n = \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) \end{cases}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{9}\Big(((-2)^n + 3n - 1)A^2 + ((-2)^{n+1} + 3n + 2)A + ((-2)^n - 6n + 8)I\Big) \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 29.

1. $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)$. La matrice A admet trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.
2. $\mu_A(X) = \chi_A(X) = X(X - 1)(X - 4.)$
3.

$$\begin{aligned} \mu_A(A) &= A(A - I)(A - 4I) = 0 \\ &= A^3 - 5A^2 + 4A \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{5}{4}I - \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -9 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 30.

A_i	$\chi_{A_i}(\lambda)$	$Sp(A_i)$	C_{λ_i}
A_1	$(\lambda-2)(\lambda-1)^2$	$\{1,2\}$	$C_2 = Vect\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ $C_1 = Vect\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$
A_2	$(\lambda-2)^2(\lambda-1)^3$	$\{1,2\}$	$C_1 = Vect\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}$ $C_2 = Vect\{\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\}$

Exercice 31.
($\Rightarrow$) Si f est diagonalisable, les sous-espaces propres et caractéristiques sont confondus donc, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\dim(\ker(f-\lambda\mathrm{Id})) = \dim(\ker(f-\lambda\mathrm{Id})^2).$$

De plus, si λ n'est pas valeur propre, les deux sous-espaces sont réduits à $\{0\}$ car f est injectif.
($\Leftarrow$) Si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\dim(\ker(f-\lambda\mathrm{Id})) = \dim(\ker(f-\lambda\mathrm{Id})^2)$$

alors la suite des noyaux itérés $(\ker(f-\lambda\mathrm{Id})^k)_{k\geq 1}$ est constante : en particulier les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques coïncident : f est diagonalisable.

Exercice 32. Les formes réduites de Jordan des matrices $A_1, \ldots, A_5$ sont données dans le tableau suivant

A_i	$\chi_{A_i}(\lambda)$	$Sp(A_i)$	$P_i = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$	J_i
A_1	$(\lambda-2)^3$	$\{2\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
A_2	$(\lambda-1)^4$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
A_3	$(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2$	$\{1,2\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -8 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
A_4	$\lambda^3(\lambda-2)^2$	$\{1,2\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
A_5	$(\lambda-1)^4$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 3\alpha+1 & \alpha+1 & 1 & \alpha-1 \\ -3\alpha-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 33.

1. $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$. La matrice A admet une unique valeur propre : $\lambda = 1$, si elle était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A = PI_3P^{-1}$ alors $A = I_3$, or ce n'est pas le cas, par conséquent la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Cherchons une base de vecteurs propres pour J :

$$(x,y,z) \in \ker(A-I) \Longleftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ -x+y=0 \\ -2x+3y-z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=z.$$

Ainsi, $\ker(A-I) = Vect\{v_1\}$, où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cherchons les vecteurs v_2, v_3 tels que

$$(A-I)v_2 = v_1,\ (A-I)v_3 = v_2,$$

ce qui donne $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc, dans la base $\mathcal{B}_J = (v_1, v_2, v_3)$, on a :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice de passage P est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et on a} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N,$$

avec

$$DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0.$$

C'est donc la décomposition de Dunford.
la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$J^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}D^{n-2}N^2.$$

Puis, $A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 34.

Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de trace nulle est $\chi_A = X^2 + \det(A)$. Deux cas se présentent :

- si $\det(A) \neq 0$, alors χ_A est annulateur scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

• sinon, $A^2 = 0$ donc A est nilpotente.
Dans tous les cas, A est sa propre décomposition de Dunford.

Exercice 35.
On sait déjà d'après la décomposition de Dunford qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $N = Q(A)$.

• Si $\mu_A(0) \neq 0$ il suffit de poser

$$P(X) = Q(X) - \frac{Q(0)}{\mu_A(0)}\mu_A(X).$$

• Sinon, Q^n est annulateur de A donc est divisible par μ_A Ainsi, 0 est racine de μ_A donc de Q et il n'y a rien à établir.

Le résultat est également vrai pour D avec le polynôme $X - P(X)$. On peut alors facilement obtenir que, pour tout vecteur $X \in \ker A^2$, $NX \in \ker(A)$. Ce résultat découle directement de la remarque simple suivante : N et A coïncident sur le sous-espace caractéristique de A associé à 0.

Exercice 36.
1. Puisque les matrices A et B sont semblables, elles ont le même déterminant et les mêmes valeurs propres. La matrice A admet donc une unique valeur propre : 2, et son déterminant

$$\det(A) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

2. La matrice B représente déjà la réduite de Jordan de $B \Longrightarrow B$ n'est pas diagonalisable $\Longrightarrow A$ n'est donc pas diagonalisable.
3. $\dim\ker(A - 2I)$: Il y a deux blocs de Jordan associé à 2, donc :

$$\dim\ker(A - 2I) = 2.$$

$\dim\ker(A - 2I)^3$: Le plus grand bloc de Jordan associé à 2 est de taille 3, donc $\dim\ker(A - 2I)^3$ égal à la multiplicité de la valeur propre 2. Ainsi

$$\dim\ker(A - 2I)^3 = 5.$$

$\dim\ker(A-2I)^2$: On sait que le noyau des itérés forme une suite croissante. Donc

$$\dim\ker(A - 2I) < \dim\ker(A - 2I)^2 < \dim\ker(A - 2I)^3.$$

La valeur de $\dim\ker(A-2I)^2$ ne peut donc être que 3 ou 4.

$$(B-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{rg}((B-2I)^2) = 1$ on en déduit par le théorème du rang que

$$\dim\ker(A-2I)^2 = 4.$$

4. Vu que la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre 2 est 3, le polynôme minimal de A est donné par :

$$\mu_A(X) = (X-2)^3.$$

Exercice 37.

- $(S_1) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n,\ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, où

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne $X_n = A^{n-1}X_0$, où

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 2n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$X_n = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & 2n\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n\lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

- $(S_2) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n + B,\ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, où

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} + C \\ &= A^2X_{n-2} + (A+I)C \\ &= \dots \\ &= A^nX_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I)C \end{aligned}$$

On écrit

$$A = \frac{\alpha+\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha-\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$A^n = \frac{(\alpha+\beta)^n}{2}U + \frac{(\alpha-\beta)^n}{2}V.$$

Donc

$$\begin{aligned} A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha+\beta)^k U + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha-\beta)^k V \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\alpha+\beta)^n}{1-\alpha-\beta}\right)U + \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\alpha-\beta)^n}{1-\alpha+\beta}\right)V. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$X_n = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- $(S_3) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n,\ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, où

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

D'une manière analogue, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2 \times (-1)^{n+1} + 3 \times 2^n \\ 4 - 3 \times 2^n \\ 4 - 3 \times 2^n + 2 \times (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 38.

$$(u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n,\ u_0 = 1, u_1 = 5) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n,\ X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 2^{n+2} \\ 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Finalement, $u_n = 3^{n+1} - 2^{n+1},\quad n \in \mathbb{N}$.

Exercice 39.

1. On a : $A^3 - 5A + 2I = 0$. Donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(X) = X^3 - 5X + 2 = (X-2)(X+1+\sqrt{2})(X+1-\sqrt{2}) = \mu_A(X)$.
2. Comme A est diagonalisable, alors

$$J = D = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3.

$$u_{n+3} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0,\ u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$X_{n+1} = AX_n,\ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 \\ &= \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 24\Big[(\sqrt{2}-1)^n + (-1-\sqrt{2})^n\Big] + 13\sqrt{2}\Big[(-1-\sqrt{2})^n - (\sqrt{2}-1)^n\Big] \\ 11\sqrt{2}\Big[(\sqrt{2}-1)^n - (-1-\sqrt{2})^n\Big] - 2\Big[(-1-\sqrt{2})^n + (\sqrt{2}-1)^n\Big] \\ 9\sqrt{2}\Big[(\sqrt{2}-1)^n - (-1-\sqrt{2})^n\Big] + 20\Big[(-1-\sqrt{2})^n + (\sqrt{2}-1)^n\Big] \end{pmatrix} \\ &- \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 2^{n+2} \\ 2^{n+1} \\ 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{28}\left(9\sqrt{2}\Big[(\sqrt{2}-1)^n-(-1-\sqrt{2})^n\Big]+20\Big[(-1-\sqrt{2})^n+(\sqrt{2}-1)^n\Big]\right) \\ &- \frac{3}{7}\times 2^n, \quad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercice 40.

1. $\chi_A(\lambda)=1-\lambda^3$. Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1=1, \lambda_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. La matrice A admet trois valeurs propres distinctes : A est donc diagonalisable.

2. Par un calcul direct, nous avons

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Notant donc que $1442=3\times 480+2$, on a

$$\begin{aligned} A^{1442} &= A^{3\times 480+2}=(A^3)^{480}A^2 \\ &= I^{480}A^2=A^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$A^{1442}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

4.3 Solutions des exercices du chapitre 3

Exercice 41.

$$A^2=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=A$$

D'où $A^n = A$ pour tout $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} e^A &= I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \ldots \\ &= I + A\Big(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots\Big) \\ &= I + A(e-1). \end{aligned}$$

Exercice 42.

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-tA} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-tA} A A^{-1} dt \\ &= \left[- \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(e^{-tA}) dt \right] A^{-1} \\ &= [-e^{-tA}]_0^{+\infty} A^{-1} \\ &= A^{-1}. \end{aligned}$$

Exercice 43.

1. Un calcul sans difficultés montre que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)^3$.

2. Posons $N = A + I_3$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N^3 = 0$, et donc N est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite le calcul de l'exponentielle de N. En effet, on a

$$e^{tN} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n N^n}{n!} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2.$$

D'autre part, puisque $tA = tN - tI_3$ et que tN et $-tI_3$ commutent, on a

$$e^{tA} = e^{-tI_3} e^{tN} = e^{-t} \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right).$$

On en déduit

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t + 1 & -\frac{t^2}{2} & -t \\ \frac{t^2}{2} + t & 1 - \frac{t^2}{2} & -t \\ \frac{t^2}{2} & t - \frac{t^2}{2} & 1 - t \end{pmatrix}.$$

3. Soit $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, c_1, c_2, c_3 étant trois constantes, alors la solution de $Y'(t) = AY(t)$ est donnée par

$$Y(t) = e^{tA}v = e^{-t}\begin{pmatrix} c_1\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) - c_2\frac{t^2}{2} - c_3 t \\ c_1\left(\frac{t^2}{2}+t\right) + c_2\left(1-\frac{t^2}{2}\right) - c_3 t \\ c_1\frac{t^2}{2} + c_2\left(t-\frac{t^2}{2}\right) + c_3(1-t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 44.

La matrice de (S), $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 &= a+b+c, \\ \lambda_2 &= a+bj+cj^2, \\ \lambda_3 &= a+bj^2+cj = \overline{\lambda_2} \end{cases},$$

avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, racine cubique de l'unité. Un calcul direct serait également possible. A est donc diagonalisable et ses sous-espaces propres, d'après sont ceux de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_1 = a+b+c$, la valeur propre de B associée est 1, et les vecteurs propres sont donnés par

$$\begin{cases} -x+y &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ x-z &= 0 \end{cases},$$

d'où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = a+bj+cj^2$ la valeur propre de B est j, on a donc

$$\begin{cases} -jx+y &= 0 \\ -jy+z &= 0 \\ x-jz &= 0 \end{cases},$$

d'où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ est le conjugué de v_2, soit $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

D'où une matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

et le système réduit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & (a+b+c)x_1(t) \\ x_2'(t) & = & (a+bj+cj^2)x_2(t) \\ x_3'(t)_3 & = & (a+bj^2+cj)x_3(t) \end{array} \right. ,$$

qui a pour solution générale

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{(a+b+c)t} \\ x_2(t) & = & c_2 e^{(a+bj+cj^2)t} \\ x_3(t)_3 & = & c_3 e^{(a+bj^2+cj)t} \end{array} \right. ,$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & e^{at}(c_1 e^{(b+c)t} + c_2 e^{(bj+cj^2)t} + c_3 e^{(bj^2+cj)t}) \\ y_2(t) & = & e^{at}(c_1 e^{(b+c)t} + j e^{(bj+cj^2)t} + j^2 e^{(bj^2+cj)t}) \\ y_3(t) & = & e^{at}(c_1 e^{(b+c)t} + j^2 e^{(bj+cj^2)t} + j e^{(bj^2+cj)t}) \end{array} \right.$$

Les conditions initiales $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$ conduisent au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + c_3 & = & 1 \\ c_1 + jc_2 + j^2 c_3 & = & 1 \\ c_1 + j^2 c_2 + jc_3 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & \frac{1}{3} \\ c_2 & = & -\frac{2}{3} j \\ c_3 & = & -\frac{2}{3} j^2 \end{array} \right. ,$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & \frac{1}{3} e^{at}(e^{(b+c)t} - 2j e^{(bj+cj^2)t} - 2j^2 e^{(bj^2+cj)t}) \\ y_2(t) & = & \frac{1}{3} e^{at}(e^{(b+c)t} - 2j^2 e^{(bj+cj^2)t} - 2j e^{(bj^2+cj)t}) \\ y_3(t) & = & \frac{1}{3} e^{at}(e^{(b+c)t} - 2e^{(bj+cj^2)t} - 2e^{(bj^2+cj)t}) \end{array} \right.$$

Pour obtenir des solutions réelles il faut remplacer j par $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et j^2 par $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, d'où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} bj + cj^2 & = & -\frac{b+c}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ bj^2 + cj & = & -\frac{b+c}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(b-c) \end{array} \right.$$

Il s'ensuit un calcul assez long dont nous donnerons seulement le résultat :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(t) & = & \frac{1}{3}e^{at}\left[e^{(b+c)t} + 2e^{-\frac{b+c}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)t\right)\right] \\ y_2(t) & = & \frac{1}{3}e^{at}\left[e^{(b+c)t} + 2e^{-\frac{b+c}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)t\right)\right] \\ y_3(t) & = & \frac{1}{3}e^{at}\left[e^{(b+c)t} - 4e^{-\frac{b+c}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)t\right] \end{array}\right.$$

Exercice 45.

1.Rép. $Y(t) = \begin{pmatrix} c_1(4t+2e^{-t}-1) + c_2(1-e^{-t}-2t) - +c_3(3t+e^{-t}-1) \\ c_1(8t-2e^{-t}+2) + c_2(e^{-t}-4t) + c_3(6t-e^{-t}+1) \\ c_1(4-4e^{-t}) + c_2(2e^{-t}-2) + c_3(3-2e^{-t}) \end{pmatrix}$.

2.Rép. $Y(t) = e^t \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2t + c_3(t^2+t) + c_4\left(\frac{2}{3}t^3 + 3t\right) \\ c_2 + c_3t + c_4(t^2+t) \\ c_3 + 2c_4t \\ c_4 \end{pmatrix}$.

Exercice 46.

1. $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$ et $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Donc A est diagonalisable.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par μ_A fournit deux réels a_n, b_n et un polynôme Q tels que $X^n = \mu_A Q + a_n X + b_n$. En prenant les valeurs des membres en -1, puis la valeur des deux membres en 2, on obtient
$\left\{\begin{array}{l} b_n - a_n = (-1)^n \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) \end{array}\right.$ Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors

$$A^n = \frac{1}{3}\Big((2^n - (-1)^n)A + (2^n + 2(-1)^n)I_3\Big).$$

3. $Y(t) = \begin{pmatrix} c_1\left(\frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3}\right) + c_2\left(\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}\right) + c_3\left(\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}\right) \\ c_1\left(\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}\right) + c_2\left(\frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3}\right) + c_3\left(\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}\right) \\ c_1\left(\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}\right) + c_2\left(\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}\right) + c_3\left(\frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3}\right) \end{pmatrix}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 47.

1. $\begin{cases} y_1(t) &=& -10-12t+3e^{4t}+9e^{2t} \\ y_2(t) &=& -10-20t+e^{4t}+9e^{2t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1(t) &=& -9t+\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{26}{3}e^{-t}+9te^{-t} \\ y_2(t) &=& 2^t+\frac{5}{3}e^{2t}-\frac{11}{3}e^{-t}-3te^{-t} \\ y_3(t) &=& -6e^t+3e^{2t}+3e^{-t}+3te^{-t} \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1(t) &=& -\frac{8}{3}+4t+(4+6t)e^{-t}+(\frac{2}{3}-18t)e^{-3t} \\ y_2(t) &=& \frac{4}{3}-2t-2te^{-t}+(-\frac{1}{3}+9t)e^{-3t} \\ y_3(t) &=& \frac{1}{3}+t+(\frac{11}{2}+2t)e^{-2t}+(-\frac{29}{6}+9t)e^{-3t} \end{cases}$

Exercice 48.

1. $P_{A_\alpha}(\lambda)=(4-\lambda)(3-\lambda+\alpha)(3-\lambda-\alpha)$.
2. • si $\alpha=0$, la matrice A_α admet les valeurs propres $\lambda_1=4$ et $\lambda_2=3$ avec multiplicité respective 1 et 2.

• si $\alpha=\pm 1$ la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1=4$ valeur propre double et $\lambda_2=2$ valeur propre simple.

• si $\alpha\in\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$, la matrice A_α admet les valeurs propres simples $\lambda_1=4$, $\lambda_2=3+\alpha$ et $\lambda_3=3-\alpha$.

3. Notons μ_A le polynôme minimal de A_α

• Si $\alpha=0$, $\mu_A(X)=(4-X)(3-X)^2$.

• Si $\alpha=\pm1$, $\mu_A(X)=(4-X)(2-X)$.

• Si $\alpha\in\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$, $\mu_A(X)=(4-X)(3-X+\alpha)(3-X-\alpha)$.

4. Soient $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}$, alors la solution de $Y'(t)=A_0Y(t)$ est donnée par

$$Y(t)=\exp(tA_0)v=e^{3t}\begin{pmatrix} -c_3\\ c_1e^t-2(c_2+c_3t)\\ c_2+c_3t\end{pmatrix},\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

Exercice 49.

1. $\chi_A(\lambda)=-(1+\lambda)(1-\lambda)^2$. Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1=-1$, valeur propre simple, et $\lambda_2=1$, valeur propre double. La matrice A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 noté E_{λ_2} est de dimension 2.

Or $(x,y,z) \in E_{\lambda_2}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha x + (1+\alpha)y + z = 0 \\ -\alpha x - (1+\alpha)y - z = 0 \\ \alpha x + (\alpha - 1)y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ \alpha(x+y) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'espace E_{λ_2} est de dimension 2 si et seulement si $\alpha = 0$, c'est alors le plan d'équation $y + z = 0$.

2. • Si $\alpha = 0$, la matrice A est diagonalisable, son polynôme minimal n'a que des racines simples, il est égal à

$$\mu_A(X) = (X-1)(X+1).$$

• Si $\alpha \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal ne peut pas avoir uniquement des racines simples, il est donc égal à

$$\mu_A(X) = (X-1)^2(X+1).$$

3.

$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + \frac{1}{2}c_2(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}c_3(e^t - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}c_2(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2}c_3(e^{-t} - e^t) \\ \frac{1}{2}c_2(e^{-t} - e^t) + \frac{1}{2}c_3(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 50.

1. $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$. La matrice A admet les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ avec multiplicité respective 1 et 2. Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si son sous-espace propre associé à la valeur propre 2, noté E_{λ_2} est de dimension 2. Or $(x,y,z) \in E_{\lambda_2}$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x + ay + bz = 0 \\ cz = 0 \end{cases}$$

Cet espace est donc de dimension 2 si et seulement si $c = 0$.

2. Si A est diagonalisable $\mu_A(X) = (1-X)(2-X)$,
sinon $\mu_A(X) = \chi_A(X)$.

3.

$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + ac_2(e^{2t} - e^t) + bc_3(e^{2t} - e^t) \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Bibliographie

[1] E. Azoulay et J. Avignant, *Mathématiques, tome 4, Algèbre, cours et exercices.* McGraw-Hill, Paris, 1984.

[2] G. Georges et G. Marie-Nicole, *Algèbre fondamentale. Arithmétique.* Ellipses, 2004.

[3] R. Goblot, *Algèbre Commutative.* Dunod, 2001.

[4] X. Gourdon, *Les maths en tête Algèbre.* 2ième édition, Ellipses, 2009.

[5] V. V. Prasolov, *Problems and Theorems in Linear Algebra* . American Mathematical Society, Vol. 134, 1994.

[6] J. J. Risler et P. Boyer, *Algèbre pour la licence 3 cours et exercices corrigés.* Dunod, 2006.

[7] A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre* . Cassini, Paris, 2001.

[8] A. Tchoudjem, *Algèbre-III Réduction des endomorphismes.* Université Lyon I, 2011.